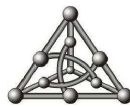


TESE DE DOUTORADO

BRACES MINIMAIS E SUAS PROPRIEDADES

Phelipe Araujo Fabres

Orientador: Marcelo Henriques de Carvalho



**Faculdade de Computação**  
**Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**  
**Ciência da Computação**

Agosto 2021

## Resumo

McCuaig [12] provou um teorema de geração para braces e o usou como uma ferramenta de indução para obter uma caracterização estrutural de braces Pfaffianos [13].

Um brace é minimal se a remoção de qualquer aresta resulta em grafo que não é brace. A partir do teorema de geração de braces de McCuaig, nós provamos nosso teorema principal que pode ser visto como uma ferramenta de indução para braces minimais. Como uma aplicação, nós provamos que um brace minimal de ordem  $2n$  ( $n \geq 6$ ) tem no máximo  $5n - 10$  arestas e apresentamos uma caracterização completa dos braces minimais para os quais esse limite superior ocorre com igualdade.

Um trabalho similar foi realizado no contexto de bricks minimais por Norine-Thomas [16] em que eles deduzem o resultado principal do teorema de geração de bricks provado pelos mesmos autores [17]. No final deste trabalho, apresentamos um teorema único para a construção de bricks e braces minimais combinando uma prova alternativa do teorema de Norine-Thomas com o nosso teorema principal.

**Palavras-Chave:** emparelhamento perfeito, grafo bipartido, grafo coberto por emparelhamentos, brick, brace, grafo 2-extensível.

## Abstract

McCuaig [12] proved a generation theorem for braces, and used it as the principal induction tool to obtain a structural characterization of Pfaffian braces [13].

A brace is minimal if deleting any edge results in a graph that is not a brace. From McCuaig's brace generation theorem, we derive our main theorem that may be viewed as an induction tool for minimal braces. As an application, we prove that a minimal brace of order  $2n$  has size at most  $5n - 10$ , when  $n \geq 6$ , and we provide a complete characterization of minimal braces that meets this upper bound.

A similar work has already been done in the context of minimal bricks by Norine-Thomas [16] wherein they deduce the main result from the brick generation theorem due to the same authors [17]. Therefore, we built a definitive version, combining an alternative proof of Norine-Thomas's theorem with our main theorem, for building minimal bricks and braces.

**Keywords:** perfect matching, bipartite graph, matching covered graph, brick, brace, 2-extendable graph.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Braces minimais</b>	<b>5</b>
2.1	Teorema de McCuaig . . . . .	7
2.2	Braces minimais . . . . .	8
2.3	Braces minimais pequenos . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Uma ferramenta de indução para braces minimais</b>	<b>15</b>
3.1	Operações de expansão . . . . .	15
3.1.1	Índice um . . . . .	18
3.1.2	Índice dois . . . . .	19
3.2	Teorema principal . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Uma aplicação</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Geração de bricks e braces minimais</b>	<b>27</b>
5.1	Famílias especiais de bricks e braces . . . . .	27
5.2	Arestas estritamente magras e seus índices . . . . .	28
5.3	Expansões . . . . .	29
5.4	Expansões adicionais . . . . .	31
5.5	Geração de bricks e braces minimais . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Trabalhos futuros</b>	<b>39</b>
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>41</b>
	<b>Referências</b>	<b>42</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho insere-se no contexto de emparelhamento em grafos, e mais precisamente no de grafos cobertos por emparelhamentos. Carvalho, Lucchesi e Murty [3] estabeleceram um teorema para construir braces de forma generalista. McCuaig [12] estabeleceu um teorema de geração para braces simples (sem arestas paralelas). Nosso trabalho estabeleceu um teorema para construção de braces minimais inspirado em um trabalho similar para bricks minimais de autoria de Norine-Thomas [16].

Para notação e terminologia geral sobre a teoria dos grafos seguimos o livro de Bondy e Murty [1]. Todos os grafos considerados neste trabalho são finitos e sem laços; entretanto são consideradas arestas múltiplas (ou seja, paralelas). Em um grafo  $G$ , a *ordem* é o número de vértices (ou seja,  $|V(G)|$ ), e o *tamanho* é o número de arestas (ou seja,  $|E(G)|$ ).

Para um subconjunto  $X$  de  $V(G)$ , denotamos o co-contorno de  $X$  por  $\partial(X)$ . Um *corte* de  $G$  é um subconjunto do conjunto de arestas  $E(G)$  da forma  $\partial(X)$  para algum subconjunto  $X$  de  $V(G)$ . Nos referimos a  $X$  e  $\overline{X} := V(G) - X$  como as *bordas* de  $\partial(X)$ . Portanto,  $\partial(X)$  é o conjunto de arestas que possuem exatamente um extremo em cada borda. Um corte é *trivial* se uma de suas bordas for um único vértice. O grafo obtido pela contração da borda  $X$  em um único vértice  $x$  é denotado por  $G/(X \rightarrow x)$ , ou simplesmente por  $G/X$ . Os grafos  $G/X$  e  $G/\overline{X}$  são chamados de  $\partial(X)$ -*contração* de  $G$ .

Um grafo conexo  $G$  é *k-extensível* se ele possuir um emparelhamento de tamanho  $k$ , e se cada emparelhamento de tamanho  $k$  for um subconjunto de um emparelhamento perfeito de  $G$ . Para um tratamento mais completo sobre emparelhamento em grafos e suas origens, recomendamos a leitura do livro de Lovász e Plummer [10]. Todos os grafos considerados nesse trabalho são 1-extensíveis, e vamos nos referir a eles como *grafos cobertos por emparelhamentos*. É possível observar que esses grafos (de ordem quatro ou mais) são 2-conexos. Além disso, para um grafo  $G$ , denominamos  $n_G := \frac{|V(G)|}{2}$  e  $m_G := |E(G)|$ . Logo,  $G$  tem ordem  $2 \cdot n_G$  e tamanho  $m_G$ .

Um corte  $\partial(X)$  de  $G$  é *justo* se  $|M \cap \partial(X)| = 1$  para cada emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$ . Por exemplo, o grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $Q_{10}$ , mostrado na Figura 1.1, tem um corte justo não trivial  $C$ , e cada  $C$ -contração é isomorfa ao  $K_{3,3}$ .

Um grafo coberto por emparelhamentos livre de cortes justos não triviais é chamado de *brace* se é bipartido, e de *brick* se é não bipartido. É possível verificar que se  $\partial(X)$  é um corte justo não trivial de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$ , então cada  $\partial(X)$ -contração de  $G$  é um grafo coberto por emparelhamentos de ordem estritamente menor. Essa observação sugere uma decomposição de qualquer

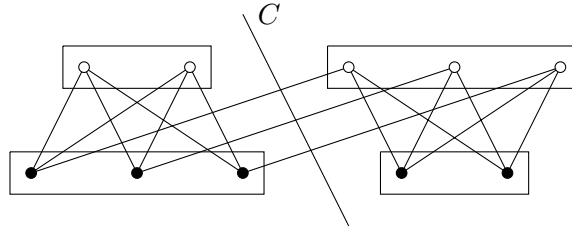


Figura 1.1:  $C$  é um corte justo não trivial em  $Q_{10}$

grafo coberto por emparelhamentos a uma lista de bricks e braces; esse procedimento é conhecido como *decomposição por cortes justos* de  $G$ . Um grafo pode admitir várias decomposições por cortes justos. Contudo, Lovász [9] provou que quaisquer duas decomposições por cortes justos de um grafo coberto por emparelhamentos geram a mesma lista de bricks e braces, exceto possivelmente pela multiplicidade das arestas. Observamos que um grafo coberto por emparelhamentos é bipartido se, e somente se, suas decomposições por cortes justos geram apenas braces (ou seja, não geram bricks).

Devido à decomposição por cortes justos, várias propriedades importantes de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$  podem ser deduzidas de seus bricks e braces. Por exemplo, existe um problema de grande interesse conhecido como o problema de orientação Pfaffiana [8, 20] de grafos. É de conhecimento que  $G$  é Pfaffiano se, e somente se, cada um de seus bricks e braces for Pfaffiano. Consequentemente, pesquisadores foram levados a obter uma compreensão mais profunda de bricks e braces. McCuaig [12] estabeleceu um teorema de geração para braces simples (sem arestas paralelas), e usou isso como a principal ferramenta para obter uma caracterização estrutural de braces Pfaffianos [13]. Robertson, Seymour e Thomas [19] chegaram à uma mesma caracterização usando uma abordagem diferente. Esses trabalhos inovadores levaram a um algoritmo de tempo polinomial para decidir se um dado grafo bipartido é ou não Pfaffiano [14].

Um brace é *minimal* se a remoção de qualquer aresta resultar em um grafo que não é brace. O teorema de McCuaig mencionado acima é uma poderosa ferramenta de indução para a classe de braces simples. O objetivo desse trabalho é usar o teorema de McCuaig para construir uma ferramenta de indução para a classe de braces minimais — uma subclasse própria da classe de braces simples. No capítulo 2 vamos introduzir a terminologia necessária para tornar isso mais preciso. O teorema principal e sua prova aparecem no capítulo 3. No capítulo 4, usamos o teorema principal como uma ferramenta de indução para provar o teorema 4.2 — que afirma que  $m_G \leq 5n_G - 10$  para todo brace minimal  $G$ , onde  $n_G \geq 6$ , e também provar uma caracterização completa dos braces minimais que alcançam esse limite superior. Por fim, no capítulo 5 estabelecemos um teorema unificado para geração de bricks e braces minimais. A geração de bricks minimais é uma prova alternativa para o teorema de Norine-Thomas [16]. O material dos capítulos 2 e 3 é parte do artigo [7] que publicamos em conjunto com Nishad Kothari.

## Capítulo 2

# Braces minimais

Neste capítulo, apresentaremos as propriedades principais de braces minimais. Usaremos essas propriedades para caracterizar os braces minimais de ordem até doze. Essas propriedades também serão utilizadas nos próximos capítulos.

Para um grafo bipartido conexo  $G$ , adotamos a notação  $G[A, B]$  para denotar as partes da bipartição  $A$  e  $B$  em  $V(G)$ . A vizinhança de conjunto de vértices  $Z$  é denotada por  $N_G(Z)$ . A seguinte proposição pode ser deduzida do famoso Teorema de Hall.

**Proposição 2.1** [10] *Seja  $G[A, B]$  um grafo bipartido conexo, onde  $|A| = |B|$ . As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i)  $G$  é coberto por emparelhamentos,
- (ii)  $|N_G(Z)| \geq |Z| + 1$  para todo subconjunto próprio não vazio  $Z$  de  $A$ , e
- (iii)  $G - a - b$  tem emparelhamento perfeito para todo par de vértices  $a \in A$  e  $b \in B$ . □

Seja  $X$  um subconjunto de cardinalidade ímpar do conjunto de vértices de um grafo bipartido conexo  $G[A, B]$ . Então, um dos dois conjuntos  $A \cap X$  e  $B \cap X$  é maior que o outro; o maior conjunto, denotado  $X_+$ , é chamado de *parte majoritária* de  $X$ ; o menor conjunto, denotado  $X_-$ , é chamado de *parte minoritária* de  $X$  (Figura 2.1). A proposição a seguir estabelece uma forma padrão de cortes justos em grafos bipartidos.

**Proposição 2.2** [15] *Um corte  $\partial(X)$  de um grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G[A, B]$  é justo se, e somente se, as seguintes propriedades prevalecerem:*

- (i)  $|X|$  é ímpar e  $|X_+| = |X_-| + 1$ ; conseqüentemente  $|\overline{X}_+| = |\overline{X}_-| + 1$ , e
- (ii) não existirem arestas entre  $X_-$  e  $\overline{X}_-$ . □

Recorde que um brace é um grafo bipartido conexo coberto por emparelhamentos que é livre de cortes justos não triviais. A seguinte caracterização de braces pode ser deduzida da proposição 2.2.



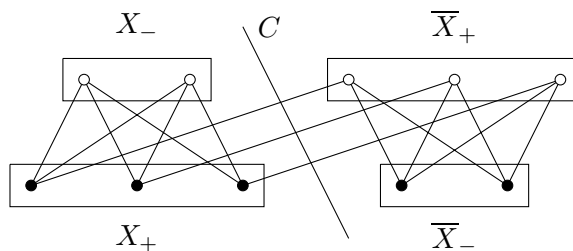


Figura 2.1: Partes majoritárias e minoritárias

**Proposição 2.3** [10] Para um grafo bipartido conexo  $G[A, B]$  de ordem seis ou mais, onde  $|A| = |B|$ , as seguintes propriedades são equivalentes:

- (i)  $G$  é um brace.
- (ii)  $|N_G(Z)| \geq |Z| + 2$  para cada subconjunto não vazio  $Z$  de  $A$  tal que  $|Z| < |A| - 1$ .
- (iii)  $G - a_1 - a_2 - b_1 - b_2$  tem um emparelhamento perfeito para quaisquer quatro vértices  $a_1, a_2 \in A$  e  $b_1, b_2 \in B$ .
- (iv)  $G$  é 2-extensível. □

Portanto, braces são precisamente os grafos bipartidos 2-extensíveis. O seguinte resultado é consequência imediata das proposições 2.1 e 2.3.

**Corolário 2.4** Seja  $G$  um grafo bipartido obtido de um grafo  $H$  pela adição de uma aresta. Se  $H$  é coberto por emparelhamentos então  $G$  também é. Ademais, se  $H$  é um brace então  $G$  também é. □

Os braces  $K_2$  e  $C_4$  são os únicos grafos cobertos por emparelhamentos bipartidos de ordem dois e quatro, respectivamente. Para um grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G$  de ordem seis ou mais, pode-se mostrar que se  $G$  tem um corte de vértices de tamanho dois então  $G$  possui um corte justo não trivial. Isto implica no seguinte.

**Proposição 2.5** Todo brace, de ordem seis ou mais, é 3-conexo. □

Um vértice é *cúbico* se o seu grau é igual a três; caso contrário, ele é *não cúbico*. Um grafo é *cúbico* se cada um de seus vértices for cúbico; caso contrário ele é *não cúbico*.

McCuaig [12] descreveu três famílias infinitas de braces simples: prismas<sup>1</sup>, escadas de Möbius e rodas duplas.

<sup>1</sup>McCuaig [12] refere-se aos ‘prismas’ como ‘escadas’.

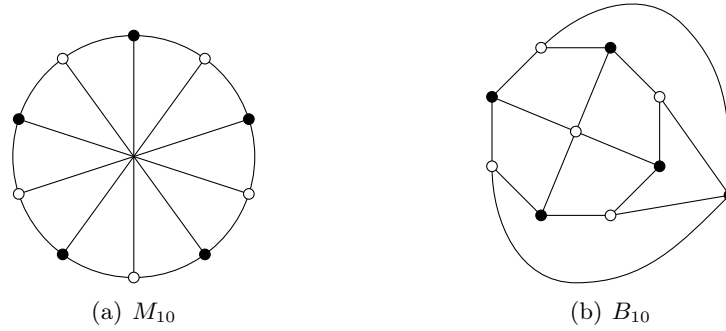


Figura 2.2: Braces de McCuaig de ordem dez

- Um *prisma* é um grafo obtido a partir de dois ciclos disjuntos, com vértices  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $n \geq 3$ , pela adição das arestas  $u_i v_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $n$  for par, então o prisma é um brace.
- Uma *escada de Möbius* de ordem  $2n$  (onde  $n \geq 2$ ), denotada como  $M_{2n}$ , é um grafo que consiste de um ciclo  $(u_1, u_2, \dots, u_{2n})$ , onde  $n \geq 2$ , mais  $n$  arestas, cada uma com extremos em  $u_i$  e  $u_{n+i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $n$  é par então a escada de Möbius é um brace.
- Uma *roda dupla* de ordem  $2n$  (onde  $n \geq 4$ ), denotada como  $B_{2n}$ , é um grafo bipartido simples obtido de um circuito  $C_{2n-2}$  pela adição de dois vértices não adjacentes, cada um com grau  $n-1$ . Ou seja, cada um desses dois vértices é adjacente a todos os vértices da outra parte.

Um *brace de McCuaig* é qualquer brace que seja um prisma, uma escada de Möbius ou uma roda dupla. O cubo, mostrado na Figura 2.3(c), é a menor roda dupla e é também o menor prisma bipartido. Exceto por ele, as rodas duplas são não cúbicas (veja a Figura 2.2(b)). Por outro lado, prismas e escadas de Möbius são cúbicos. As menores escadas de Möbius bipartidas são  $K_{3,3}$  e o brace  $M_{10}$  mostrado na Figura 2.2(a).

## 2.1 Teorema de McCuaig

Uma aresta  $e$  de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$  é *removível* se  $G - e$  é também coberto por emparelhamentos. O corolário a seguir é deduzido das proposições 2.1 e 2.3.

**Corolário 2.6** *Em um brace, de ordem seis ou mais, toda aresta é removível.* □

Suponha que  $G$  seja um brace de ordem seis ou mais e seja  $e \in E(G)$ . O grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G - e$  pode não ser um brace. Em particular, um ou os dois extremos de  $e$  podem ter grau precisamente dois em  $G - e$ ; para obtermos um brace menor, devemos nos livrar dos vértices de grau dois. Isto nos leva às seguintes definições de ‘bi-contração’ e ‘retração’.

Seja  $G$  um um grafo coberto por emparelhamentos e suponha que  $v_0$  seja um vértice de grau dois que possui dois vizinhos distintos,  $v_1$  e  $v_2$ . A *bi-contração* de  $v_0$  é a operação de contrair as duas arestas  $v_0 v_1$

e  $v_0v_2$  incidentes a  $v_0$ . Note que  $\partial(X)$ , onde  $X := \{v_0, v_1, v_2\}$ , é um corte justo de  $G$ . O grafo obtido pela bi-contracção de  $v_0$  é o mesmo que  $G/X$  e portanto coberto por emparelhamentos.

A *retração* de  $G$ , denotada por  $\widehat{G}$ , é o grafo coberto por emparelhamentos obtido pela bi-contracção de todos os vértices de grau dois que possuem dois vizinhos distintos. Em um brace  $G$  de ordem seis ou mais, uma aresta (removível)  $e$  é *magra* se  $\widehat{G - e}$  é também um brace. Recentemente, Carvalho, Lucchesi e Murty provaram o seguinte.

**Teorema 2.7** [6] *Todo brace de ordem seis ou mais possui ao menos duas arestas magras.*

A bi-contracção de um vértice de grau dois em um grafo simples (sem arestas paralelas) não necessariamente resulta em um grafo simples. Portanto, se  $e$  é uma aresta magra de um brace simples  $G$ , o brace  $\widehat{G - e}$  pode não ser simples. Uma aresta magra  $e$  de um brace simples  $G$  é *estritamente magra* se o brace  $\widehat{G - e}$  também for simples. Por exemplo, toda aresta do  $K_{3,3}$ , e do  $B_8$ , é magra mas nenhuma delas é estritamente magra. Pode-se verificar que todo brace de McCuaig possui várias arestas magras; contudo, nenhuma delas é estritamente magra. McCuaig mostrou que estes são na verdade os únicos braces simples com essa propriedade. Denote por  $\mathcal{G}$  o conjunto composto por  $K_2$ ,  $C_4$  e todos os braces de McCuaig.

**Teorema 2.8** [12] [TEOREMA DE MCCUAIG] *Todo brace simples  $G \notin \mathcal{G}$  possui uma aresta estritamente magra.*

Carvalho, Lucchesi e Murty [4] apresentaram uma prova alternativa do teorema de McCuaig usando a existência de uma aresta magra. Em [6], os mesmos autores estabeleceram uma versão mais forte do teorema de McCuaig.

Para uma aresta estritamente magra  $e$  de um brace simples  $G$ , o *índice* de  $e$ , denotado por  $\text{índice}(e)$ , é o número de vértices de grau dois em  $G - e$ . Claramente,  $\text{índice}(e) \in \{0, 1, 2\}$ , dependendo de quantos extremos de  $e$  são cúbicos em  $G$ . A seguinte proposição pode ser facilmente verificada; veja as Figuras 3.1 e 3.2.

**Proposição 2.9** *Seja  $e$  uma aresta estritamente magra de um brace simples  $G$  e seja  $H := \widehat{G - e}$ . Então,  $n_H = n_G - \text{índice}(e)$  e  $m_H = m_G - 1 - 2 \cdot \text{índice}(e)$ .  $\square$*

## 2.2 Braces minimais

Lembre-se de que um brace  $G$  é minimal se, para cada aresta  $e \in E(G)$ , o grafo  $G - e$  não é um brace. Uma aresta  $e$  de um brace simples  $G$  é *supérflua* se  $G - e$  ainda for um brace. Em outras palavras, uma ‘aresta superflua’ é o mesmo que uma ‘aresta estritamente magra de índice zero’. Portanto, um brace minimal é um brace desprovido de arestas superfluas. Como qualquer aresta superflua deve unir dois vértices não cúbicos, a seguinte afirmação é válida.

**Proposição 2.10** *Seja  $G$  um brace de ordem seis ou mais. Se o conjunto de todos os vértices não cúbicos é um conjunto independente, então  $G$  é um brace minimal.  $\square$*

Seja  $G$  um brace minimal que não é membro do conjunto  $\mathcal{G}$ . Pelo teorema de McCuaig,  $G$  possui uma aresta estritamente magra, digamos  $e$ . Como  $G$  é minimal, temos que  $\text{índice}(e) \in \{1, 2\}$ . Suponha que  $H$  denote o brace simples  $\widehat{G - e}$ . O brace  $H$  pode não ser minimal. Nesse caso, podemos escolher um conjunto  $F \subset E(H)$  tal que  $J := H - F$  é um brace minimal. Desta maneira, podemos obter um brace minimal menor  $J$ . Note que cada membro de  $F$  é uma aresta supérflua de  $H$ . Além disso,  $F = \emptyset$  se, e somente se,  $H$  for um brace minimal. Isso nos leva à seguinte definição.

**Definição 2.11** [PAR DE PRESERVAÇÃO DA MINIMALIDADE] *Para um brace minimal  $G$ , um par  $(e, F)$  é um par de preservação da minimalidade se  $e$  é uma aresta estritamente magra de  $G$  com o menor índice possível e  $F$  é um subconjunto de arestas de  $H := \widehat{G - e}$  tal que o grafo  $H - F$  é um brace minimal.*

Na definição acima, como cada aresta de  $H$  é a uma aresta de  $G$ , pode-se ver  $F$  como um subconjunto de  $E(G)$ . A Figura 2.3 mostra um exemplo de um brace minimal  $G$  com um par de preservação da minimalidade  $(e, \{f\})$  onde  $\text{índice}(e) = 1$ .

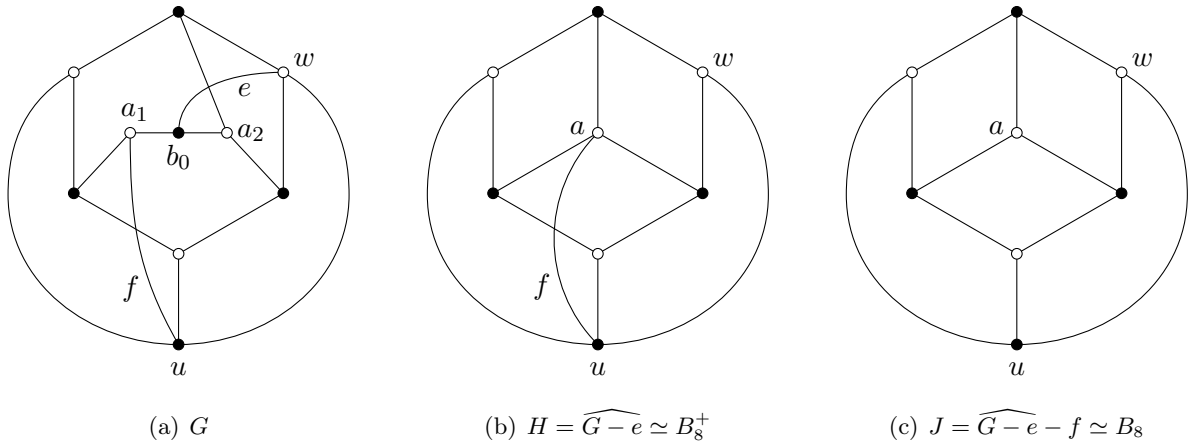


Figura 2.3:  $(e, \{f\})$  é um par de preservação da minimalidade do brace minimal  $G$

O próximo resultado é uma consequência imediata do teorema de McCuaig.

**Corolário 2.12** *Todo brace minimal  $G \notin \mathcal{G}$  tem um par de preservação da minimalidade  $(e, F)$  para cada aresta estritamente magra  $e$ .  $\square$*

O próximo resultado segue da proposição 2.9.

**Proposição 2.13** *Suponha que  $(e, F)$  denote um par de preservação da minimalidade de um brace minimal  $G$ , e seja  $J := \widehat{G - e - F}$ . Então  $n_J = n_G - \text{índice}(e)$  e  $m_J = m_G - 1 - 2 \cdot \text{índice}(e) - |F|$ .  $\square$*

O Corolário 2.12 pode ser visto como uma ferramenta de indução para braces minimais; no entanto, não é particularmente útil pelo seguinte motivo. Se  $(e, F)$  é um par de preservação da minimalidade de

um brace  $G$ , então o brace minimal  $J := \widehat{G - e} - F$  pode ser arbitrariamente menor em tamanho do que  $G$  dependendo da cardinalidade do conjunto  $F$ . Por outro lado, parece intuitivo que, para um brace minimal  $G \notin \mathcal{G}$  deve-se conseguir encontrar um par de preservação da minimalidade  $(e, F)$  tal que o conjunto  $F$  é “pequeno”. Isto é de fato uma consequência de nosso teorema principal (3.13).

**Corolário 2.14** *Todo brace minimal  $G \notin \mathcal{G}$  possui um par de preservação da minimalidade  $(e, F)$  tal que  $|F| \leq \text{índice}(e) + 1$ .*

Além dessas informações quantitativas sobre o par de preservação da minimalidade  $(e, F)$ , nosso teorema principal (3.13) também fornece informações qualitativas: por exemplo, cada membro de  $F$  está distante de uma unidade, em termos de quantidade de arestas, de uma aresta estritamente magra  $e$ .

Suponha que  $e$  denote qualquer aresta (removível) de um brace simples  $G$  de ordem seis ou mais. Note que  $e$  não é supérflua se, e somente se, o grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G - e$  possuir um corte justo não trivial. Pode-se agora deduzir o seguinte resultado da proposição 2.2.

**Corolário 2.15** *Seja  $G[A, B]$  um brace simples de ordem seis ou mais. Uma aresta  $e$  de  $G$  não é supérflua se, e somente se, existirem partições  $(A_1, A_2)$  de  $A$  e  $(B_1, B_2)$  de  $B$  tais que  $|B_1| = |A_1| + 1$  e a aresta  $e$  for a única aresta ligando um vértice de  $A_1$  a um vértice de  $B_2$ .*  $\square$

Por exemplo, o brace  $Q_{10}^+$ , mostrado na Figura 2.4, possui precisamente uma aresta ligando dois vértices não cúbicos, e ela não é supérflua (pelo Corolário 2.15). Consequentemente,  $Q_{10}^+$  é um brace minimal.

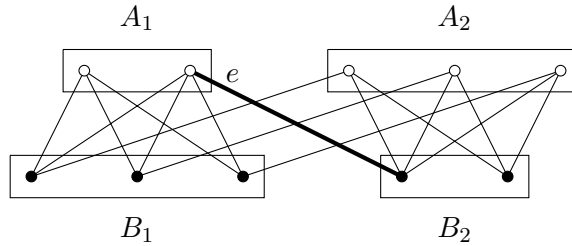


Figura 2.4: A aresta  $e$  não é supérflua em  $Q_{10}^+$

## 2.3 Braces minimais pequenos

Observe que  $K_{3,3}$  é o único brace simples de ordem seis. Usando o Corolário 2.15, pode-se inferir que  $B_8$  é o único brace minimal simples de ordem oito.

**Proposição 2.16** *Os únicos braces minimais de ordem máxima oito são  $K_2, C_4, K_{3,3}$  e  $B_8$ .*

Demonstração: Seja  $G[A, B]$  um brace minimal com oito vértices. Pela proposição 2.5,  $G$  é 3-conexo. Logo,  $G$  tem grau mínimo três. Seja  $e$  uma aresta de  $G$ . Como  $e$  não é supérflua, pelo Corolário 2.15, deduzimos que  $e$  possui um extremo de grau três. Como  $e$  é uma aresta qualquer, concluímos que toda aresta de  $G$  tem um extremo de grau três. Isto implica que  $G$  é cúbico, já que  $G$  tem apenas quatro vértices em cada bipartição.

Considere o complemento  $\overline{G}$  de  $G$ , que tem o mesmo conjunto de vértices de  $G$  e possui o conjunto de arestas  $\{ab : ab \notin E(G), a \in A, b \in B\}$ . Então todo vértice tem grau um em  $\overline{G}$ , ou seja, as arestas de  $\overline{G}$  constituem um emparelhamento perfeito. Resumindo, temos que  $G$  é o grafo obtido do grafo bipartido completo com quatro vértices  $K_{4,4}$  pela remoção de um emparelhamento perfeito. Esse grafo é único e é isomorfo ao  $B_8$ .  $\square$

**Proposição 2.17** *Os únicos grafos bipartidos cúbicos simples de ordem dez são  $M_{10}$  e  $Q_{10}$ .*

Demonstração: Seja  $G$  um grafo bipartido cúbico simples de ordem dez. Considere o seu complemento bipartido  $\overline{G}$ . Então todo vértice tem grau dois em  $\overline{G}$ , ou seja,  $\overline{G}$  é formado por uma união de circuitos pares. Mais precisamente,  $\overline{G}$  é um circuito com 10 vértices ou é a união de um circuito com 4 vértices com outro de 6 vértices. No primeiro caso,  $G$  é isomorfo ao grafo  $M_{10}$ , e no segundo,  $G$  é isomorfo ao grafo  $Q_{10}$ .  $\square$

**Proposição 2.18** *Os únicos braces minimais de ordem dez são  $M_{10}$ ,  $B_{10}$  e  $Q_{10}^+$ .*

Demonstração: Seja  $G[A, B]$  um brace minimal de ordem dez. Se  $G$  for cúbico então, pela proposição 2.17,  $G$  é isomorfo ao grafo  $M_{10}$ . Agora assumamos que  $G$  não é cúbico e seja  $T$  o conjunto dos vértices não cúbicos.

Inicialmente, suponhamos que  $T$  é um conjunto independente. Neste caso,  $T$  tem precisamente dois vértices, digamos  $a$  e  $b$ , ambos com grau precisamente quatro. Consequentemente,  $G - a - b$  é um grafo bipartido 2-regular, ou seja,  $G - a - b$  é formado por um circuito de tamanho oito ou dois circuitos de tamanho quatro.

Se  $G - a - b$  é formado por dois circuitos  $C_1$  e  $C_2$  então  $V(C_1) \cup \{a\}$  ou  $V(C_1) \cup \{b\}$  seria a borda de um corte justo não trivial de  $G$ , o que não pode ocorrer. Concluímos então que  $G - a - b$  é isomorfo ao  $C_8$  e, neste caso,  $G$  é isomorfo ao  $B_{10}$ .

Agora suponhamos que  $T$  não é um conjunto independente e seja  $e := ab$  uma aresta que liga  $a \in A \cap T$  a  $b \in B \cap T$ . Como o brace  $G$  é minimal, a aresta  $e$  não é supérflua. Pelo Corolário 2.15, existem partições  $(A_1, A_2)$  de  $A$  e  $(B_1, B_2)$  de  $B$  tais que  $|B_1| = |A_1| + 1$  e a aresta  $e$  é a única aresta que liga um vértice em  $A_1$  a um vértice em  $B_2$ . Como  $a$  e  $b$  são vértices não cúbicos, cada um dos conjuntos  $B_1$  e  $A_2$  possuem pelos menos três vértices. Consequentemente,  $|B_1| = |A_2| = 3$  e cada um dos subgrafos induzidos  $G[A_1 \cup B_1]$  e  $G[A_2 \cup B_2]$  é isomorfo ao  $K_{2,3}$ . Pela proposição 2.3, o subgrafo induzido  $G[A_2 \cup B_1]$  possui um emparelhamento perfeito. Esses fatos implicam que o brace  $Q_{10}^+$  é um subgrafo de  $G$ . Como  $G$  é um brace minimal, concluímos que  $G$  é isomorfo a  $Q_{10}^+$ .  $\square$

**Definição 2.19** [EXPANSÃO QUADRÁTICA] *Suponha que  $S$  seja um conjunto independente de um grafo bipartido conexo  $H[A, B]$  que contenha precisamente dois vértices de  $A$  e dois de  $B$ . Digamos que  $S := \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$  onde  $a_1, a_2 \in A$  e  $b_1, b_2 \in B$ . O grafo  $G$  obtido de  $H$  pela adição de dois novos vértices  $a_0$  e  $b_0$  e cinco novas arestas  $a_0b_1, a_0b_2, b_0a_1, b_0a_2$  e  $a_0b_0$  é chamado de uma expansão quadrática de  $H$ . Referimos aos vértices de  $S$  como vértices de expansão.*

O grafo  $Q_{10}$ , mostrado na Figura 2.5(a), possui um conjunto independente único  $S := \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$  que contém dois vértices em cada parte de  $V(G)$ . Denote por  $Q_{12}$  a expansão quadrática de  $Q_{10}$  mostrada na Figura 2.5(b).

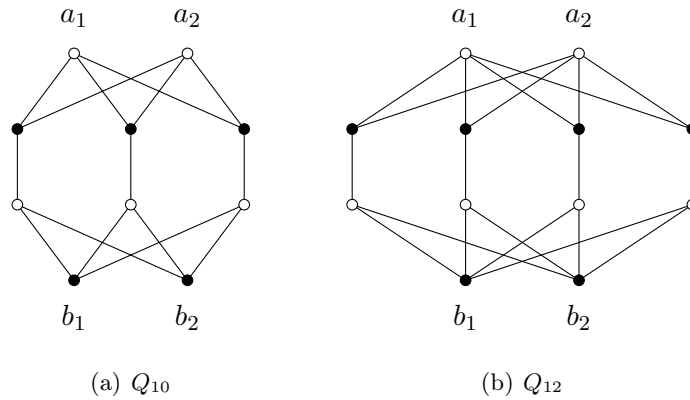


Figura 2.5: O brace minimal  $Q_{12}$  é a expansão quadrática de  $Q_{10}$ , onde  $S := \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$

**Proposição 2.20** *Os únicos braces minimais de ordem 12 e tamanho 20 ou mais são  $B_{12}$  e  $Q_{12}$ .*

Demonstração: Seja  $G[A, B]$  um brace minimal de ordem 12 e tamanho 20 ou mais e seja  $T$  seu conjunto de vértices não cúbicos. Claramente, cada um dos conjuntos  $T \cap A$  e  $T \cap B$  são não vazios (senão o tamanho de  $G$  seria 18). Assuma que  $E_T$  denote o conjunto de arestas que possuem os dois extremos em  $T$ .

Primeiro suponha que  $T$  é um conjunto independente (isto é,  $E_T = \emptyset$ ). Logo,  $G$  tem grau máximo cinco. Se existir um vértice com grau cinco, então  $|T \cap A| = |T \cap B| = 1$ . Consequentemente,  $G - T$  é um grafo bipartido conexo 2-regular. Como  $G$  é 3-conexo,  $G - T$  é isomorfo ao grafo  $C_{10}$  e, neste caso,  $G$  é isomorfo a  $B_{12}$ . Caso contrário,  $|T \cap A| = |T \cap B| = 2$ , e cada membro de  $T$  possui grau exatamente quatro. Neste caso, observe que  $G - T$  tem quatro componentes, cada um isomorfo ao grafo  $K_2$ . Logo,  $G$  é isomorfo a  $Q_{12}$ .

Agora suponha que  $T$  não é um conjunto independente. Nosso objetivo é chegar a uma contradição, mas isso requer alguns argumentos não tão claros, como veremos a seguir.

Seja  $e := ab$  um membro de  $E_T$ . Como  $e$  não é supérflua, pelo Corolário 2.15, existem partições  $(A_1, A_2)$  de  $A$  e  $(B_1, B_2)$  de  $B$  tais que  $|B_1| = |A_1| + 1$  e  $e$  é a única aresta ligando um vértice de  $A_1$  com um vértice em  $B_2$ .

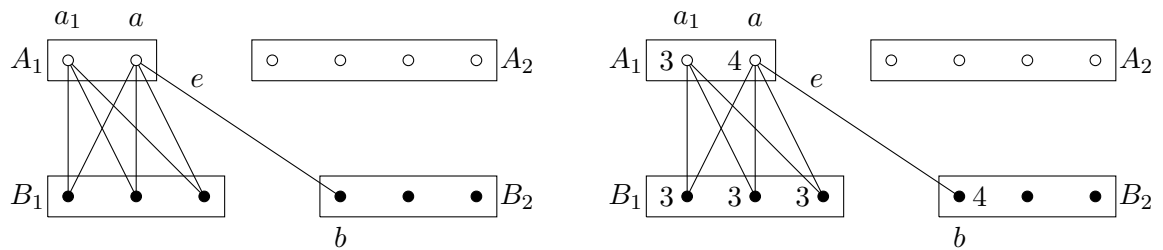
Como cada extremo de  $e$  é não cúbico, um dos dois conjuntos  $B_1$  e  $A_2$  possui cardinalidade três e o outro cardinalidade quatro. Ajuste a notação para que  $|B_1| = 3$  e  $|A_2| = 4$ . Veja a Figura 2.6(a). Suponha que  $a_1$  denote o único membro de  $A_1 - a$ . Observe que  $N_G(a) = B_1 \cup \{b\}$  e  $N_G(a_1) = B_1$ . Em particular, provamos o seguinte.

**2.20.1** Cada aresta  $f \in E_T$  tem um extremo cujo grau é precisamente quatro, digamos  $v$ , tal que existe um vértice cúbico  $v'$  que satisfaz  $N_G(v') = N_{G-f}(v)$ .  $\square$

O grau do vértice  $b$  pode ser quatro ou cinco; vamos mostrar que é quatro. Suponha o contrário, ou seja, que  $b$  tem grau cinco. Logo,  $N_G(b) := A_2 \cup \{a\}$ . Por um simples argumento de contagem, deve existir um vértice não cúbico, digamos  $a_2$ , em  $A_2$ . Como  $f_2 := a_2b$  é um membro de  $E_T$ , usando a afirmação 2.20.1, podemos inferir que  $a_2$  possui grau precisamente quatro e que existe um vértice cúbico  $a'$  que satisfaz a relação  $N_G(a') = N_{G-f_2}(a_2) = N_G(a_2) - b$ . Como cada membro de  $A_2$  é adjacente a  $b$ , temos que  $a' = a_1$ . Consequentemente,  $N_G(a_2) = B_1 \cup \{b\}$ . Isto implica que  $N_G(B_2 - b) \subseteq A_2 - a_2$ , o que contradiz a proposição 2.3. Portanto,  $b$  possui grau quatro. Em particular, agora provamos o seguinte.

**2.20.2** Para cada aresta  $f \in E_T$ , cada extremo de  $f$  tem grau quatro. (Por consequência,  $|T \cap A| = |T \cap B| = 2$  e cada vértice em  $T$  possui grau quatro.)  $\square$

Agora, vamos provar que cada vizinho de  $a$ , distinto de  $b$ , é cúbico. Suponha por contradição que existe um vértice  $b_1 \in B_1$  que é não cúbico. Assim,  $b_1$  tem grau quatro e  $f_1 := ab_1$  é uma aresta em  $E_T$ . Pela afirmação 2.20.1, ou existe um vértice cúbico  $a'$  que satisfaz  $N_G(a') = N_{G-f_1}(a) = (B_1 - b_1) \cup \{b\}$ , ou, caso contrário, existe um vértice cúbico  $b'$  que satisfaz  $N_G(b') = N_{G-f_1}(b_1) = N_G(b_1) - a$ . No segundo caso, note que  $b' \in B_2$  (visto que cada vértice em  $B_1$  é adjacente ao vértice  $a$ ); entretanto, isso implica que existe uma aresta que une os vértice  $b' \in B_2$  e  $a_1 \in A_1$ , o que é uma contradição. No primeiro caso, note que  $a' \in A_2$ , o que implica que  $N_G(B_2 - b) \subseteq A_2 - a'$ . Isso contradiz a proposição 2.3. Portanto, cada vizinho de  $a$  é cúbico; veja a Figura 2.6(b).



(a) Aresta  $e$  é a única ligando os conjuntos  $A_1$  e  $B_2$     (b) O número ao lado de um vértice indica o seu grau

Figura 2.6: Ilustração para a prova da proposição 2.20

Em particular, estabelecemos a seguinte afirmação.

**2.20.3** Para cada aresta  $f \in E_T$ , os extremos de  $f$  possuem grau precisamente quatro (em  $G$ ) e pelo menos um deles tem grau exatamente um no subgrafo induzido  $G[T]$ .  $\square$



Seja  $w \in A$  e  $u \in B$  vértices de  $T$  distintos de  $a$  e  $b$ . Note que  $w \in A_2$  e  $u \in B_2$ . Pela proposição 2.3, o grafo  $G - a - a_1 - b - u$  possui emparelhamento perfeito. Logo, as três arestas unindo  $B_1$  e  $A_2$  constituem um emparelhamento. Isso implica que  $w$  tem exatamente um vizinho em  $B_1$ . Consequentemente,  $w$  é adjacente a todos os vértices de  $B_2$ . Logo,  $wb, wu \in E(G)$ . Observe que o subgrafo induzido  $G[T]$  contém um caminho de tamanho três:  $(a, b, w, u)$ . Deste modo, a aresta  $bw \in E_T$  contradiz a afirmação 2.20.3.

Isso completa a prova da proposição 2.20. □

## Capítulo 3

# Uma ferramenta de indução para braces minimais

Neste capítulo, vamos apresentar uma ‘versão de geração’ de braces minimais utilizando o teorema de McCuaig (3.5) sobre a existência de arestas estritamente magras. Essa versão serve como base para a solução do problema de estabelecer um limite superior para o número de arestas em um brace minimal, que será abordado no Capítulo 4. O material deste e do próximo capítulo é parte do artigo [7].

Primeiramente vamos definir algumas operações chamadas de ‘expansão’; elas serão úteis para demonstrarmos nosso teorema principal (3.13).

### 3.1 Operações de expansão

Para um grafo bipartido conexo simples  $H[A, B]$  e dois vértices não adjacentes  $a \in A$  e  $b \in B$ ,  $H + ab$  denota o grafo obtido de  $H$  pela adição da aresta  $ab$ . Note que se  $H$  é um brace então, pelo Corolário 2.4,  $H + ab$  é um brace simples e  $ab$  é uma aresta estritamente magra de índice zero de  $H + ab$ ; neste caso, dizemos que  $H + ab$  é obtido de  $H$  por uma *expansão de índice zero*. Vamos agora definir outras duas operações de expansão em braces simples — cada uma podendo ser vista como o reverso de remover uma aresta estritamente magra (de índice um ou dois) e efetuar o procedimento de retração no grafo resultante. Para isso, vamos primeiro definir uma ‘bi-subdivisão’ de um vértice não cúbico.

Suponha que  $a$  seja um vértice de grau quatro ou mais em um grafo bipartido simples coberto por emparelhamentos  $H$ . Suponha que um grafo bipartido  $G$  seja obtido de  $H$  pela substituição do vértice  $a$  por dois novos vértices  $a_1$  e  $a_2$ . Distribua as arestas de  $H$  incidentes a  $a$  entre  $a_1$  e  $a_2$ , tais que cada um receba pelo menos duas arestas, e então adicione um novo vértice  $b_0$  e duas novas arestas:  $b_0a_1, b_0a_2$ . Dizemos que  $G$  é obtido a partir de  $H$  pela *bi-subdivisão de  $a$  em  $a_1b_0a_2$*  e denotamos essa operação por  $G := H\{a \rightarrow a_1b_0a_2\}$ . É imediato verificar que  $G$  é também coberto por emparelhamentos. Observe que  $H$  pode ser obtido de  $G$  pela bi-contracção do vértice  $b_0$ .

Agora podemos definir as expansões mencionadas anteriormente.

**Definição 3.1** [EXPANSÃO DE ÍNDICE UM] *Escolha dois vértices, digamos  $a$  e  $w$ , de um brace simples  $H$  que pertencem à mesma parte tal que pelo menos um deles, digamos  $a$ , tenha grau quatro ou mais. Um*

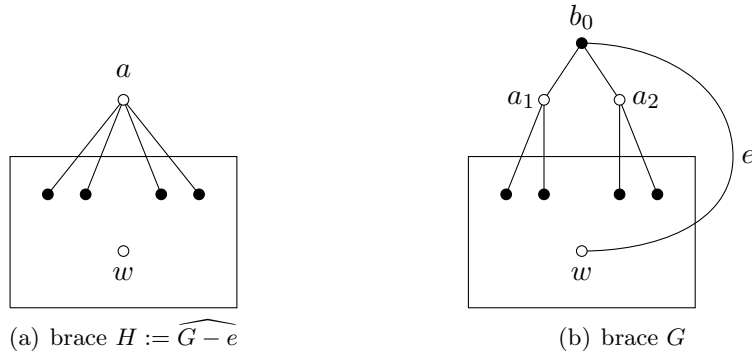


Figura 3.1: O grafo  $G$  é obtido de  $H$  por uma expansão de índice um

grafo  $G$  é obtido a partir de  $H$  por uma expansão de índice um se  $G := H\{a \rightarrow a_1b_0a_2\} + b_0w$  (Veja a Figura 3.1).

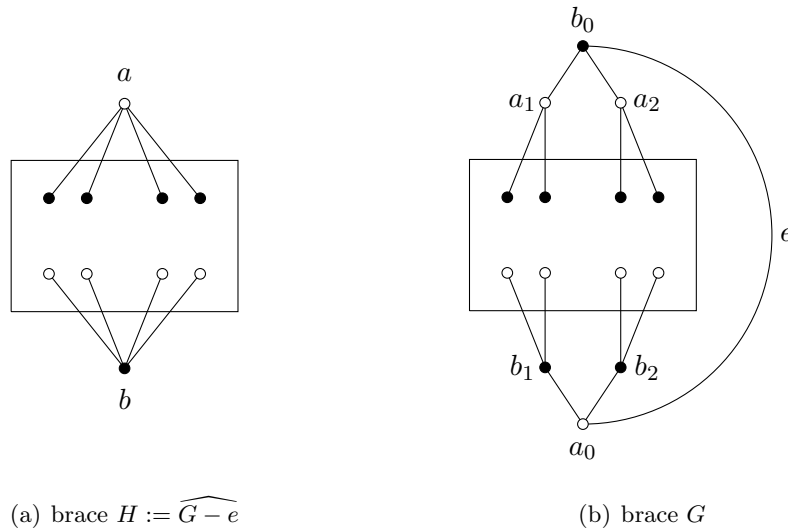


Figura 3.2: O grafo  $G$  é obtido de  $H$  por uma expansão de índice dois

**Definição 3.2** [EXPANSÃO DE ÍNDICE DOIS] Escolha dois vértices de grau quatro ou mais, digamos  $a$  e  $b$ , de um brace simples  $H$  que pertencem a partes distintas. Um grafo  $G$  é obtido a partir de  $H$  por uma expansão de índice dois se  $G := H\{a \rightarrow a_1b_0a_2\}\{b \rightarrow b_1a_0b_2\} + a_0b_0$  (Veja a Figura 3.2).

Por conveniência, dizemos que um grafo  $G$  é obtido de um brace simples  $H$  por uma operação de expansão se  $G$  for obtido de  $H$  por uma expansão de índice zero, um ou dois. McCuaig provou o seguinte.

**Proposição 3.3** [12] Todo grafo obtido a partir de um brace simples  $H$  por uma operação de expansão é também um brace simples.

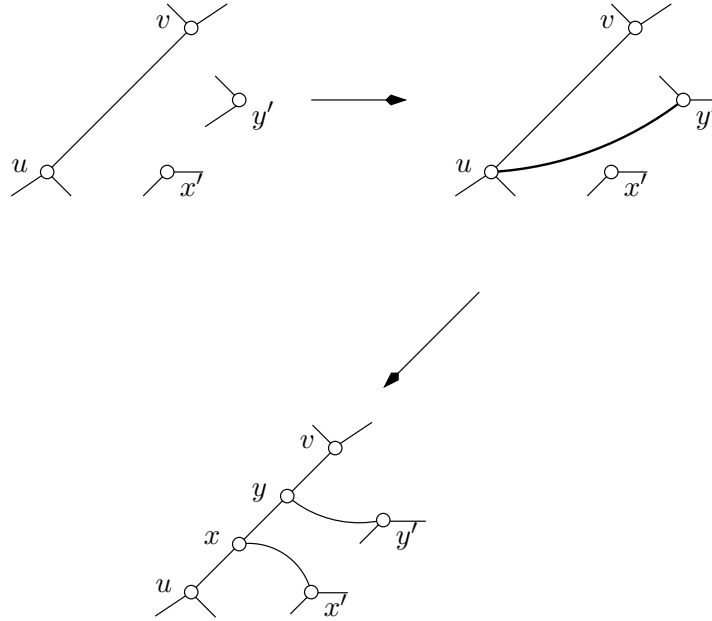


Figura 3.3: Expansão quadrática

Por exemplo, pode-se verificar que uma expansão quadrática de um brace simples pode ser obtida pela adição de uma aresta seguido de uma expansão de índice um. Veja a Figura 3.3. Essa observação, acompanhada da proposição 3.3, produz o seguinte.

**Corolário 3.4** *Uma expansão quadrática de um brace simples é também um brace simples.*  $\square$

Seja  $H[A, B]$  um brace simples. Observe que, se  $G := H\{a \rightarrow a_1 b_0 a_2\} + b_0 w$ , para algum  $a, w \in A$ , então  $e := b_0 w$  é uma aresta estritamente magra de índice um de  $G$ . Por outro lado, se  $G := H\{a \rightarrow a_1 b_0 a_2\}\{b \rightarrow b_1 a_0 b_2\} + a_0 b_0$ , para algum  $a \in A$  e  $b \in B$ , então  $e := a_0 b_0$  é uma aresta estritamente magra de índice dois de  $G$ . Em ambos os casos, o grafo  $H$  é isomorfo a  $\widehat{G - e}$ . O Teorema de McCuaig (Teorema 2.8) pode ser reescrito da seguinte forma.

**Teorema 3.5** *Todo brace simples  $G \notin \mathcal{G}$  pode ser obtido a partir de um brace simples (menor) por uma operação de expansão.*

Seja  $G$  um brace simples de ordem seis ou mais. Pela proposição 2.5,  $G$  é 3-conexo. Portanto, todo vértice de  $G$  tem grau pelo menos três. Seja  $e$  uma aresta estritamente magra de  $G$ . Então os possíveis vértices de grau dois em  $G - e$  são os extremos de  $e$ . Em  $G - e$ , um vértice de grau dois é chamado de *vértice interno* e cada um de seus vizinhos é referido como um *vértice externo*. Logo,  $G - e$  possui exatamente  $\text{índice}(e)$  vértices internos e  $2 \cdot \text{índice}(e)$  vértices externos (Veja as Figuras 3.1 e 3.2). Nas próximas duas subseções, vamos provar alguns lemas; estes culminarão na prova do teorema principal (3.13) deste capítulo.

### 3.1.1 Índice um

Ao longo desta subseção, vamos assumir que  $G$  é um brace minimal e que  $e := b_0w$  é uma aresta estritamente magra de índice um de  $G$ , onde  $b_0$  é o extremo cúbico de  $e$ . Também vamos assumir que o brace  $H := \widehat{G - e}$  não é minimal; logo,  $H$  possui aresta(s) supérflua(s). Denote por  $a_1$  e  $a_2$  os vértices externos de  $G - e$  e por  $a$  o vértice de contração de  $H$  (Veja Figura 3.1).

**Lema 3.6** *Seja  $f$  uma aresta supérflua de  $H$ . Então,  $G - e$  possui um vértice externo cúbico que é um extremo de  $f$ , ao passo que o outro extremo de  $f$  é não cúbico.*

Demonstração: Relembre a definição 3.1 e observe o seguinte. Se os vértices  $a_1$  e  $a_2$  possuírem grau pelo menos três em  $G - f$ , então  $G - f$  pode ser obtido do brace  $H - f$  por uma expansão de índice um; logo,  $G - f$  é um brace (pela proposição 3.3). Isso é uma contradição. Segue que  $a_1$  ou  $a_2$  é um extremo cúbico de  $f$ . Claramente o outro extremo de  $f$  é não cúbico.  $\square$

**Lema 3.7** *Sejam  $f_1$  e  $f_2$  arestas supérfluas de  $H$ . Então  $G - e$  possui um vértice externo cúbico que é um extremo comum entre  $f_1$  e  $f_2$ .*

Demonstração: Pelo Lema 3.6, para  $i \in \{1, 2\}$ , cada aresta  $f_i$  tem precisamente um extremo cúbico em  $G$  que reside em  $\{a_1, a_2\}$ . Suponha que  $f_i$  seja incidente a  $a_i$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . Então,  $a_1$  e  $a_2$  são ambos vértices cúbicos em  $G$ . Logo,  $a$  tem grau exatamente quatro em  $H$ ; conseqüentemente,  $a$  é um vértice de grau dois em  $H - f_1 - f_2$ , o que é uma contradição, pois  $H - f_1 - f_2$  é um brace. Portanto, o extremo cúbico de  $f_1$  é o mesmo que o de  $f_2$ .  $\square$

Note que se  $(e, F)$  é um par de preservação da minimalidade de  $G$  então quaisquer dois membros distintos de  $F$  satisfazem o Lema 3.7. Temos então a seguinte consequência imediata.

**Corolário 3.8** *Se  $(e, F)$  é um par de preservação da minimalidade de  $G$ , então  $G - e$  possui um vértice externo cúbico  $v$  tal que  $F \subset \partial(v)$ . Assim,  $|F| \in \{1, 2\}$ .*  $\square$

**Lema 3.9** *Suponha que  $(e, F)$  seja um par de preservação da minimalidade do grafo  $G$  tal que  $|F| = 2$ . Então, para cada  $f \in F$ , o extremo não cúbico de  $f$  não é adjacente ao extremo não cúbico de  $e$ . Conseqüentemente,  $G$  é isomorfo a uma expansão quadrática do brace minimal  $J := \widehat{G - e - F}$ .*

Demonstração: Seja  $F := \{f_1, f_2\}$ . Invocamos o Lema 3.7 e ajustamos a notação tal que  $a_1$  é o vértice externo cúbico que é extremo de  $f_1$  e  $f_2$ . Vamos denotar por  $u_1$  e  $u_2$  os extremos não cúbicos de  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente. Suponha que  $J := H - F$ . Portanto,  $J$  é um brace minimal (Veja a Figura 3.4).

Queremos provar que  $wu_1, wu_2 \notin E(G)$ . Por simetria, é suficiente provar que  $wu_2 \notin E(G)$ . Suponha por contradição que  $wu_2 \in E(G)$ . Veja a Figura 3.5. Então  $w$  e  $u_2$  são adjacentes em  $J$  também. Neste caso, podemos obter o grafo  $G' := G - wu_2$  a partir do brace  $J' := J + wu_2$  por uma expansão de índice

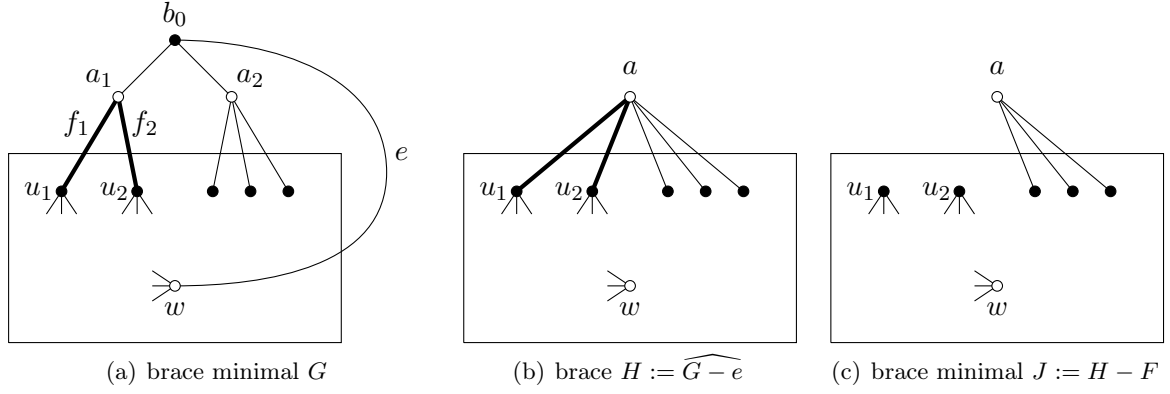


Figura 3.4:  $(e, F)$  é um par de preservação da minimalidade onde  $\text{índice}(e) = 1$  e  $F = \{f_1, f_2\}$

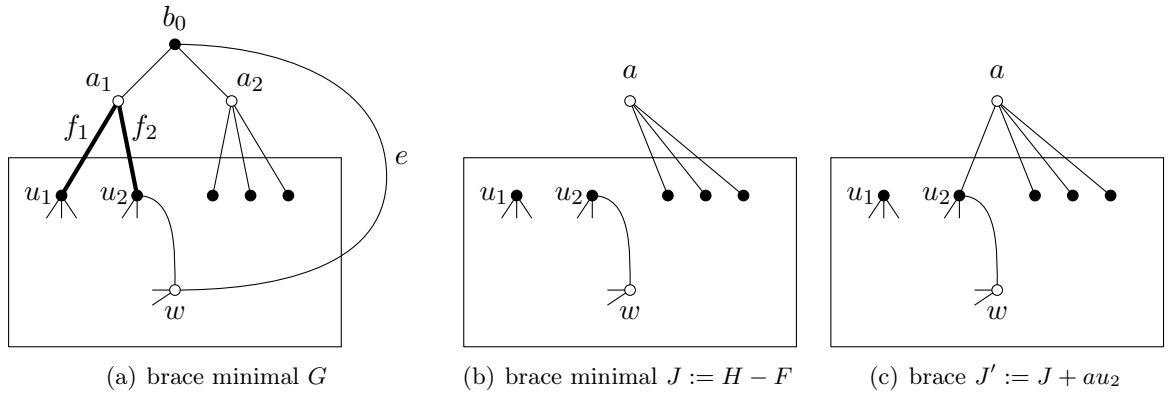


Figura 3.5: Ilustração para prova do Lema 3.9

um. Mais precisamente,  $G' = J'\{u_2 \rightarrow u_2 a_1 b_0\} + a_1 u_1$ . Pela proposição 3.3,  $G'$  é um brace, contrariando a hipótese de que  $G$  é minimal.

Concluimos que  $wu_1, wu_2 \notin E(G)$ . Consequentemente,  $S := \{a, w, u_1, u_2\}$  é um conjunto independente de  $J$  com dois vértices em cada parte da bipartição. Logo,  $G$  é isomorfo a uma expansão quadrática de  $J$  (com  $a_1$  e  $b_0$  nos papéis dos vértices de expansão). Isso completa a prova do Lema 3.9.  $\square$

### 3.1.2 Índice dois

Ao longo desta subseção, assumimos que  $G$  é um brace minimal desprovido de arestas estritamente magras de índice um e que  $e := a_0 b_0$  é uma aresta estritamente magra de índice dois. Denotamos por  $a_1, a_2$  e  $b_1, b_2$  os vértices externos de  $G - e$ , tais que  $a_1$  e  $a_2$  são adjacentes a  $b_0$ , e  $b_1$  e  $b_2$  são adjacentes a  $a_0$ . Veja a Figura 3.2.

Também assumimos que o brace simples  $H := \widehat{G - e}$  não é minimal. Logo,  $H$  possui aresta(s) supérflua(s). Sejam  $a$  e  $b$  os vértices de contração de  $H$  resultantes das bi-contração de  $b_0$  e  $a_0$  em  $G - e$ , respectivamente.

Como  $e$  é uma aresta estritamente magra, o grafo  $H$  é simples. Logo,  $H$  possui no máximo uma aresta ligando  $a$  a  $b$ . Isso implica que  $G$  possui no máximo uma aresta com um extremo em  $\{a_1, a_2\}$  e o outro em  $\{b_1, b_2\}$ ; resumindo,  $G$  possui precisamente uma dessas arestas se, e somente se,  $ab \in E(H)$ .

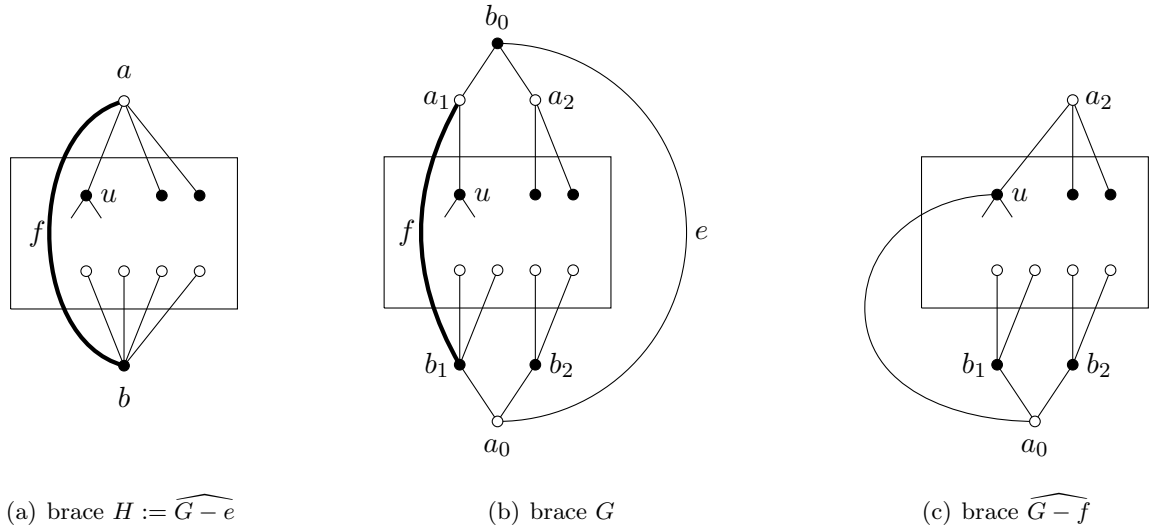


Figura 3.6: Ilustração para a prova do Lema 3.10

**Lema 3.10** *Seja  $f$  uma aresta supérflua de  $H$ . Então  $G - e$  tem um vértice externo cúbico que é um extremo de  $f$ ; o outro extremo de  $f$  é um vértice não cúbico não externo ou outro vértice externo cúbico.*

Demonstração: Relembre a definição 3.2 e observe o seguinte. Se cada um dos vértices  $a_1, a_2, b_1, b_2$  possuir grau pelo menos três em  $G - f$ , então  $G - f$  pode ser obtido do brace  $H - f$  por uma expansão de índice dois; portanto,  $G - f$  é um brace (pela proposição 3.3), o que é uma contradição. Concluímos então que um dos vértices  $a_1, a_2, b_1, b_2$  é um extremo cúbico de  $f$ . Ajuste a notação tal que  $a_1$  seja um extremo cúbico de  $f$ . Claramente, se o outro extremo de  $f$  não está em  $\{b_1, b_2\}$  então ele não é cúbico.

Agora suponha que o outro extremo de  $f$  está em  $\{b_1, b_2\}$ ; ajuste a notação tal que  $f := a_1b_1$ . Assuma que  $b_1$  é não cúbico. Denote por  $u$  o vizinho de  $a_1$  que é distinto de  $b_0$  e  $b_1$  (Figura 3.6). Observe que o grafo  $\widehat{G - f}$  pode ser obtido a partir do brace  $\widehat{H - f}$  por uma expansão de índice um. Mais precisamente,  $\widehat{G - f} := (\widehat{H - f})\{b \rightarrow b_1a_0b_2\} + a_0u$ . Logo  $\widehat{G - f}$  é um brace (pela proposição 3.3). Consequentemente,  $f$  é uma aresta estritamente magra de índice um, contrariando a hipótese de  $G$  ser desprovido de arestas desse tipo. Portanto,  $b_1$  também é cúbico.  $\square$

**Lema 3.11** *Seja  $f$  uma aresta supérflua de  $H$ . Então, em  $G - e$ ,  $f$  une dois vértices externos, ou  $f$  é adjacente a uma aresta que liga dois vértices externos.*

Demonstração: Pelo Lema 3.10,  $G - e$  possui um vértice externo cúbico que é um extremo de  $f$ . Ajuste a notação para que  $a_1$  seja um extremo cúbico de  $f$ . Se o outro extremo de  $f$  residir em  $\{b_1, b_2\}$ , então a prova está terminada.

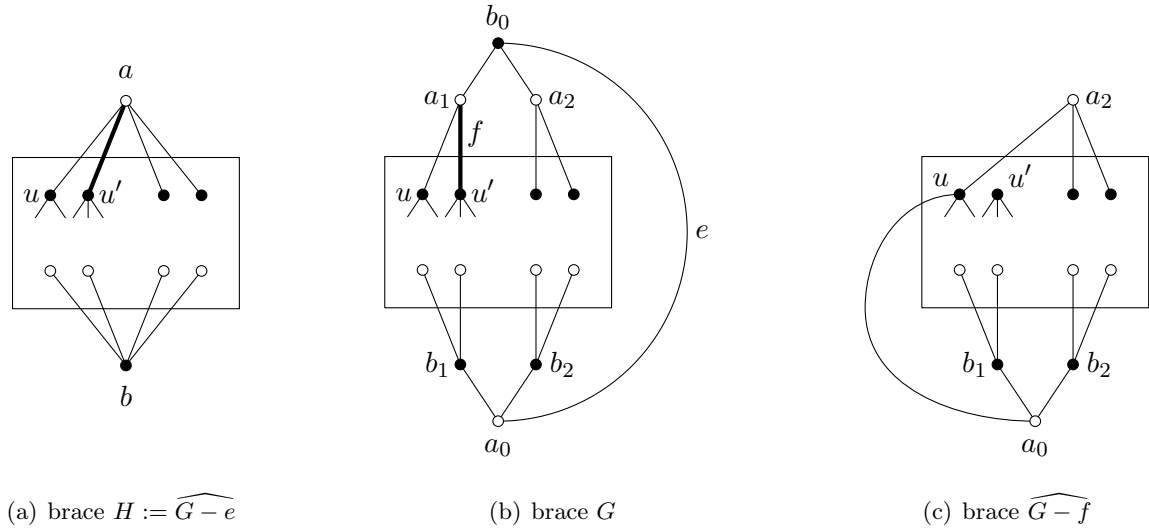


Figura 3.7: Ilustração para prova do Lema 3.11

Agora suponha que  $f$  não incide em  $\{b_1, b_2\}$  e denote por  $u'$  o extremo não cúbico de  $f$ . Assuma que  $a_1b_1, a_1b_2 \notin E(G)$ . Denote por  $u$  o vizinho de  $a_1$  que é distinto de  $b_0$  e  $u'$ . Então  $u \notin \{b_1, b_2\}$  (Figura 3.7). Observe que o grafo  $\widehat{G - f}$  pode ser obtido do brace  $H - f$  por uma expansão de índice um. Mais precisamente,  $\widehat{G - f} := (H - f)\{b \rightarrow b_1a_0b_2\} + a_0u$ . Logo,  $\widehat{G - f}$  é um brace (pela proposição 3.3). Consequentemente,  $f$  é uma aresta estritamente magra de índice um, contrariando a hipótese de  $G$  ser desprovido de arestas desse tipo. Portanto,  $a_1b_1$  ou  $a_1b_2$  é uma aresta de  $G$ ; donde  $f$  é adjacente a uma aresta que liga dois vértices externos.  $\square$

**Corolário 3.12** *Se  $(e, F)$  é um par de preservação de minimalidade de  $G$ , então  $G - e$  possui dois vértices externos adjacentes  $u$  e  $w$  tais que  $F \subset \partial(\{u, w\})$ . Além disso, se  $F \cap \partial(u) \neq \emptyset$  então  $u$  é cúbico; da mesma forma, se  $F \cap \partial(w) \neq \emptyset$  então  $w$  é cúbico. Consequentemente,  $|F| \in \{1, 2, 3\}$ .  $\square$*

### 3.2 Teorema principal

O teorema seguinte resume os resultados anteriores.

**Teorema 3.13** [TEOREMA PRINCIPAL] *Todo brace minimal  $G \notin \mathcal{G}$  possui um par de preservação de minimalidade  $(e, F)$  tal que  $F = \emptyset$  ou  $F$  satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Se o índice( $e$ ) = 1 então  $G - e$  possui um vértice externo, digamos  $v$ , tal que  $F \subset \partial(v)$ .*
- (ii) *Se o índice( $e$ ) = 2 então  $G - e$  possui dois vértices externos adjacentes, digamos  $u$  e  $w$ , tais que  $F \subset \partial(u) \cup \partial(w)$ .*
- (iii) *Para cada  $f \in F$ , um extremo de  $f$  é cúbico se, e somente se, ele for um vértice externo.*



Consequentemente,  $|F| \leq \text{índice}(e) + 1$ . Além disso, se o  $\text{índice}(e) = 1$  e  $|F| = 2$  então  $G$  é isomorfo a uma expansão quadrática do brace minimal  $J := \widehat{G - e - F}$ .

Demonstração: Pelo Corolário 2.12,  $G$  possui um par de preservação da minimalidade  $(e, F)$ . Como  $\overline{G}$  é minimal, então  $\text{índice}(e) \in \{1, 2\}$ . Se  $F = \emptyset$ , o teorema está provado. Suponha que  $F \neq \emptyset$ . Se  $\text{índice}(e) = 1$ , pelo Corolário 3.8 e Lema 3.9, a prova está completa. Se  $\text{índice}(e) = 2$ , Pelo Lema 3.10 e pelo Corolário 3.12, a prova está completa.  $\square$

## Capítulo 4

# Uma aplicação

Nesta seção, como uma aplicação do teorema principal (3.13), vamos estabelecer um limite superior para o número de arestas em braces minimais. Mais precisamente, vamos provar que se  $G$  é um brace minimal (onde  $n_G \geq 6$ ) então  $m_G \leq 5 \cdot n_G - 10$ . Norine e Thomas [16] provaram um resultado semelhante para bricks.

Vamos começar definindo uma família infinita  $\mathcal{Q}$  de braces minimais, com cada um dos membros atingindo esse limite superior; o seu menor membro é o brace  $Q_{12}$  (Figura 2.5(b)). Para  $n \geq 7$ , definimos o grafo  $Q_{2n}$  como a expansão quadrática de  $Q_{2n-2}$ , onde os vértices não cúbicos de  $Q_{2n-2}$  correspondem aos vértices de expansão. Como  $Q_{2n}$  contém exatamente quatro vértices não cúbicos, a expansão é única. Seja  $\mathcal{Q} := \{Q_{2n} : n \geq 6\}$ . Como  $Q_{12}$  é um brace simples, pelo Corolário 3.4 cada membro de  $\mathcal{Q}$  é um brace simples. Ademais, pela proposição 2.10, cada membro de  $\mathcal{Q}$  é um brace minimal. Pela fórmula da soma dos graus dos vértices, deduzimos que se  $G \in \mathcal{Q}$  então  $m_G = 5 \cdot n_G - 10$ .

**Corolário 4.1** *Seja  $(e, F)$  um par de preservação da minimalidade do brace minimal  $G$ , e seja  $J := \widehat{G - e - F}$ . Assuma que  $m_J \leq 5 \cdot n_J - 10$ . Então, temos o seguinte:*

(i)  $m_G \leq 5 \cdot n_G - 10$ .

(ii) *Se  $m_G = 5 \cdot n_G - 10$  então  $m_J = 5 \cdot n_J - 10$ ,  $\text{índice}(e) = 1$  e  $|F| = 2$ ; conseqüentemente,  $G$  é isomorfo a uma expansão quadrática de  $J$ .*

Demonstração: Pela proposição 2.13,  $n_J = n_G - \text{índice}(e)$  e  $m_G = m_J + 1 + 2 \cdot \text{índice}(e) + |F|$ . Pelo Teorema 3.13,  $|F| \leq \text{índice}(e) + 1$ . Vamos considerar dois casos dependendo do índice de  $e$ .

Primeiro considere o caso em que  $\text{índice}(e) = 1$ . Usando as equações e as desigualdades acima, temos que  $m_G = m_J + 3 + |F| \leq (5 \cdot n_J - 10) + 3 + 2 = 5 \cdot n_J - 5 = 5 \cdot n_G - 10$ . Conseqüentemente, temos a desigualdade  $m_G \leq 5 \cdot n_G - 10$ ; a igualdade vale se, e somente se,  $m_J = 5 \cdot n_J - 10$  e  $|F| = 2$ . Nesse caso, pela última parte do teorema 3.13, podemos inferir que  $G$  é isomorfo a uma expansão quadrática de  $J$ .

Agora considere o caso em que  $\text{índice}(e) = 2$ . Usando as mesmas equações e desigualdades temos que  $m_G = m_J + 5 + |F| < (5 \cdot n_J - 10) + 5 + 5 = 5 \cdot n_J = 5 \cdot n_G - 10$ . Neste caso, a desigualdade estrita  $m_G < 5 \cdot n_G - 10$  ocorre. Isso completa a prova do Corolário 4.1.  $\square$

Agora estamos prontos para provar o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 4.2** *Seja  $G$  um brace minimal que não está em  $\{K_2, C_4, K_{3,3}, B_8, B_{10}, Q_{10}^+\}$ . Então  $m_G \leq 5 \cdot n_G - 10$  e a igualdade vale se, e somente se,  $G \in \{M_{10}, B_{12}\} \cup \mathcal{Q}$ .*

Demonstração: Seja  $G[A, B]$  um brace minimal que não está em  $\{K_2, C_4, K_{3,3}, B_8, B_{10}, Q_{10}^+\}$ . Vamos provar o teorema por indução em  $n_G$ . Pelas proposições 2.16 e 2.18, o teorema é válido quando  $n_G \leq 5$ . Suponha então que  $n_G \geq 6$ .

Se  $G$  é cúbico então  $m_G = 3 \cdot n_G < 5 \cdot n_G - 10$ . Podemos então assumir que  $G$  é não cúbico. Pode-se verificar, usando a proposição 2.20, que o teorema vale quando  $n_G = 6$ . Podemos supor então que  $n_G \geq 7$ . Se  $G$  é uma roda dupla então  $m_G = 4 \cdot n_G - 4 < 5 \cdot n_G - 10$ . Podemos assumir que  $G$  não é uma roda dupla. Consequentemente,  $G \notin \mathcal{G}$ .

Pelo teorema principal (3.13),  $G$  possui um par de preservação da minimalidade  $(e, F)$ . Denote por  $J$  o brace minimal  $\widehat{G - e - F}$ . Note que  $n_J = n_G - \text{índice}(e)$ , com  $\text{índice}(e) \in \{1, 2\}$ . Logo,  $n_J \geq 5$ .

Suponha que  $J \in \{B_{10}, Q_{10}^+\}$ . Nesse caso,  $n_J = 5$  e  $m_J = 16$ . Consequentemente,  $\text{índice}(e) = 2$  e  $n_G = 7$ . Pela proposição 2.13,  $m_G = m_J + 1 + 2 \cdot \text{índice}(e) + |F|$  onde  $|F| \leq 3$ . Segue que  $m_G \leq 24 < 25 = 5 \cdot n_G - 10$ . A conclusão desejada se mantém.

Portanto,  $J$  é um brace minimal que não está em  $\{K_2, C_4, K_{3,3}, B_8, B_{10}, Q_{10}^+\}$ . Como  $n_J < n_G$ , pela hipótese de indução,  $m_J \leq 5 \cdot n_J - 10$  e a igualdade vale se, e somente se,  $J \in \{M_{10}, B_{12}\} \cup \mathcal{Q}$ .

Pelo Corolário 4.1, inferimos que  $m_G \leq 5 \cdot n_G - 10$ . Como  $n_G \geq 7$ , precisamos provar que se  $m_G = 5 \cdot n_G - 10$  então  $G \in \mathcal{Q}$ .

Assuma que  $m_G = 5 \cdot n_G - 10$ . Pelo Corolário 4.1,  $m_J = 5 \cdot n_J - 10$ . Logo,  $J \in \{M_{10}, B_{12}\} \cup \mathcal{Q}$ . Ademais,  $J$  possui um conjunto independente  $S$  com dois vértices em cada bipartição e  $G$  é isomorfo a uma expansão quadrática de  $J$ . Vamos denotar  $A'$  e  $B'$  a bipartição de  $J$  e sejam  $a_0$  e  $b_0$  os novos vértices de  $G$  tais que  $A = A' \cup \{a_0\}$  e  $B = B' \cup \{b_0\}$ .

Pode-se verificar que  $M_{10}$ , mostrado na Figura 2.2(a) na página 7, não possui um conjunto independente com dois vértices em cada bipartição. Logo,  $J$  é isomorfo a  $B_{12}$  ou  $J \in \mathcal{Q}$ .

Primeiro considere o caso em que  $J$  é isomorfo a  $B_{12}$ . Denote por  $a \in A'$  e  $b \in B'$  os vértices não cúbicos de  $J$ . Salvo simetria,  $B_{12}$  possui um único conjunto independente  $S := \{a_1, b_1, a_2, b_2\}$  com dois vértices em cada bipartição — como mostrado na Figura 4.1(a). Logo,  $G$  é isomorfo ao grafo mostrado na Figura 4.1(b). Mostraremos uma contradição provando que  $G - f$  é um brace — onde  $f := a_1 b_1$ . Pela proposição 2.3, para cada conjunto não vazio  $Z \subset A$  tal que  $|Z| < |A| - 1$ , a desigualdade  $|N_G(Z)| \geq |Z| + 2$  ocorre em  $G$ . Basta então verificar que  $|N_{G-f}(Z)| \geq |Z| + 2$  ocorre em  $G - f$ .

Comparando os grafos  $G$  e  $G - f$ , apenas precisamos verificar essa propriedade para os conjuntos  $Z$  que satisfazem  $\{a_1\} \subseteq Z \subseteq \{a, a_0, a_1\}$ , pois qualquer vértice de  $A$  que não está em  $\{a, a_0, a_1\}$  é adjacente a  $b$  e, consequentemente, qualquer conjunto  $Z$  que contém um vértice fora de  $\{a, a_0, a_1\}$  satisfaz  $|N_{G-f}(Z)| = |N_G(Z)| \geq |Z| + 2$ . Pode-se verificar que, para cada conjunto  $Z$  que satisfaz  $\{a_1\} \subseteq Z \subseteq \{a, a_0, a_1\}$ , a desigualdade  $|N_{G-f}(Z)| \geq |Z| + 2$  é assegurada. Logo,  $f$  é uma aresta supérflua em  $G$ , o que é uma contradição. (Por simetria, qualquer aresta de  $G$  cujos extremos são não cúbicos, é supérflua.)

Agora considere o caso em que  $J \in \mathcal{Q}$ . Seja  $T := \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$  um conjunto de vértices não cúbicos de  $J$  e  $w_i u_i \in E(J)$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n_J - 2\}$  — como mostrado na Figura 4.2(a). Consideramos

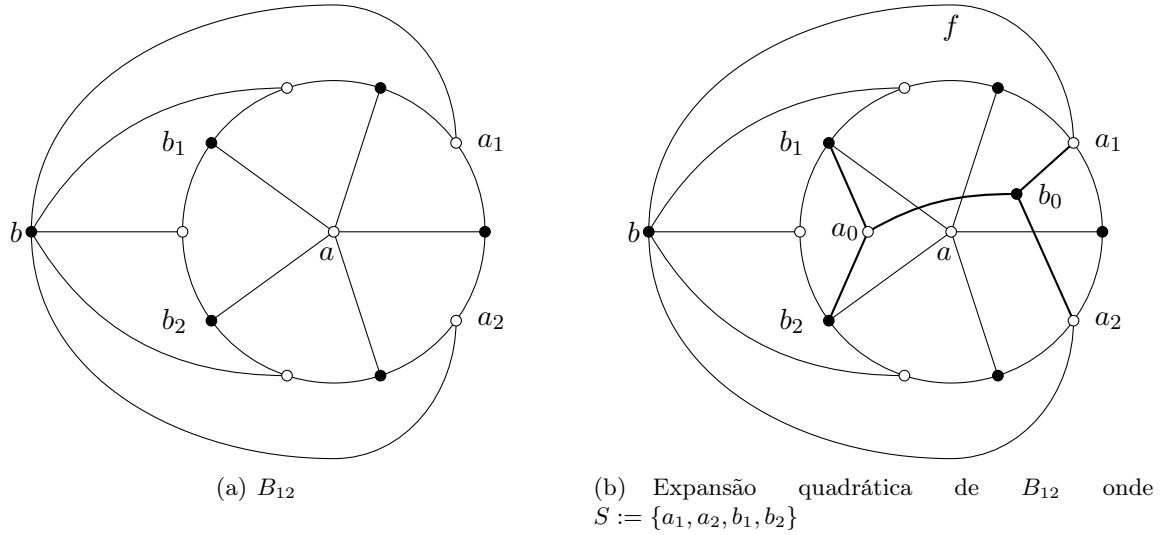


Figura 4.1: Uma expansão quadrática de  $B_{12}$  que não é um brace minimal

dois subcasos dependendo se  $T$  intercepta o conjunto independente  $S$  ou não.

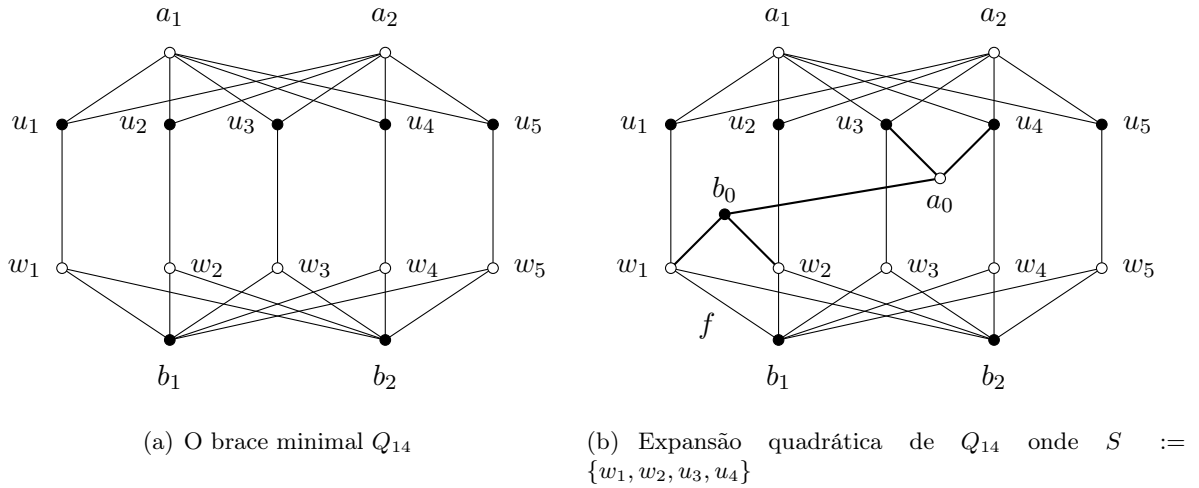


Figura 4.2: Uma expansão quadrática de  $Q_{14}$  que não é um brace minimal.

Primeiro suponha que  $S \cap T = \emptyset$ . Ajuste a notação tal que  $S := \{w_1, w_2, u_3, u_4\}$ ; veja a Figura 4.2(b). Novamente vamos chegar a uma contradição mostrando que  $G - f$  é um brace — onde  $f := b_1 w_1$ . Pela proposição 2.3, para cada conjunto não vazio  $Z \subset A$  tal que  $|Z| < |A| - 1$ , tem-se  $|N_G(Z)| \geq |Z| + 2$ . Vamos mostrar que  $|N_{G-f}(Z)| \geq |Z| + 2$ . Pela comparação dos grafos  $G$  e  $G - f$ , precisamos checar esta desigualdade apenas para os conjuntos  $Z$  tais que  $\{w_1\} \subseteq Z \subseteq \{w_1, a_0, a_1, a_2\}$ . Pode-se verificar que, para cada conjunto  $Z$  que satisfaz  $\{w_1\} \subseteq Z \subseteq \{w_1, a_0, a_1, a_2\}$ , a desigualdade  $|N_{G-f}(Z)| \geq |Z| + 2$  é válida. Assim,  $f$  é uma aresta supérflua em  $G$ , uma contradição. (Por simetria, qualquer aresta de  $G$  cujos extremos são não cúbicos é supérflua.)

Agora suponha que  $S \cap T \neq \emptyset$ . Observe que, nesse caso,  $S = T$ . Consequentemente,  $G \in \mathcal{Q}$ , pela

definição da família  $\mathcal{Q}$ . Isso completa a prova do Teorema 4.2.

□

## Capítulo 5

# Geração de bricks e braces minimais

Neste capítulo, vamos apresentar um teorema de geração para bricks e braces minimais, obtendo assim uma ferramenta unificada para a geração desses grafos. Mais precisamente, mostraremos que todo brace minimal pode ser obtido a partir do  $K_{3,3}$  ou do cubo por uma sequência de operações que chamaremos de expansão. Mostraremos também que todo brick minimal pode ser obtido de forma similar.

O teorema de geração de braces minimais é de nossa autoria em conjunto com Nishad Kothari [7], e o teorema de geração de bricks minimais é de autoria de Norine-Thomas [16]. Na verdade, o teorema de geração de bricks minimais de Norine-Thomas inspirou a nossa investigação para provar um teorema para geração de braces minimais. Ao terminar o nosso teorema de geração de braces minimais, notamos que a mesma idéia poderia ser aplicada para provar o teorema de geração de bricks minimais.

Portanto, a prova que apresentaremos para a geração de bricks minimais é uma prova alternativa à de Norine-Thomas. Ela é praticamente igual à prova do teorema de geração de braces minimais. Na verdade, os dois teoremas são provados de uma única vez, ou seja, em um único resultado. A nossa prova deixa evidente que um caso faltou ser analisado na prova de Norine-Thomas. O caso foi reportado e uma nova versão do artigo [16] foi escrita incluindo o caso.

### 5.1 Famílias especiais de bricks e braces

No Capítulo 2, descrevemos três famílias de braces: prismas, escada Möbius e roda dupla. Esses grafos foram denominados braces de McCuaig. Vamos relembrar essa descrição e descrever outras famílias de bricks que denominaremos bricks de Norine-Thomas.

- Uma *roda ímpar* é um grafo simples obtido a partir de um ciclo ímpar pela adição de um novo vértice que é ligado a todo vértice do ciclo. Toda roda ímpar é um brick.
- Uma *roda dupla* de ordem  $2n$  (onde  $n \geq 4$ ), denotada como  $B_{2n}$ , é um grafo bipartido simples obtido a partir de um ciclo  $C_{2n-2}$  pela adição de dois vértices não adjacentes, cada um com grau  $n - 1$ . Toda roda dupla é um brace.
- Um *prisma* é um grafo obtido a partir de dois ciclos  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  de tamanho  $n \geq 3$  e disjuntos nos vértices, pela adição das arestas  $u_i$  e  $v_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $n$  for ímpar, o prisma é um brick, e se  $n$  for par, o prisma é um brace.

- Uma *escada de Möbius* é um grafo composto por um ciclo par  $(u_1, u_2, \dots, u_{2n})$ , onde  $n \geq 2$ , e  $n$  arestas com extremos  $u_i$  e  $u_{n+i}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Se  $n$  é ímpar, a escada de Möbius é um brick, e se  $n$  é par, a escada de Möbius é um brace.
- Uma *escadaria* é o grafo obtido a partir de um prisma com pelo menos seis vértices pela remoção da aresta  $u_1u_2$  e realizando a contração das arestas  $u_1v_1$  e  $u_2v_2$ . Toda escadaria é um brick (Figura 5.1(a)).
- Um *prismoide* é um grafo obtido a partir de um caminho com vértices  $v_1, v_2, \dots, v_t$ ,  $t \geq 4$ , pela adição de dois vértices distintos  $x, y$  e arestas  $xv_i$  e  $yv_j$  para  $i = 1, t$  e todos os índices pares  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  e  $j = 1, t$  e todos os índices ímpares  $j \in \{1, 2, \dots, t\}$  (Figura 5.1(b)). Se  $t \geq 2$  e a aresta  $xy$  for também adicionada, então o grafo resultante é uma *prismoide estendido*. Todo prismoide ou prismoide estendido é um brick.

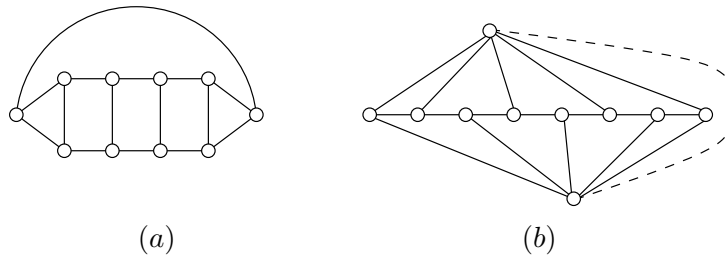


Figura 5.1: (a) escadaria e (b) prismoide

Um *brick de Norine-Thomas* é qualquer brick que é um prisma, uma roda ímpar, uma escada de Möbius, uma escadaria, um prismoide, um prismoide estendido ou o grafo de Petersen.

## 5.2 Arestas estritamente magras e seus índices

Na seção 2.1, introduzimos os conceitos de aresta magra e estritamente magra para braces. Esses conceitos se estendem para bricks. Dizemos que uma aresta  $e$  de um brick (brace)  $G$  é *magra* se  $\widehat{G - e}$  é um brick (brace). Uma aresta magra  $e$  de um brick (brace) simples  $G$  é *estritamente magra* se o brick (brace)  $\widehat{G - e}$  também for simples. O Teorema 2.8 garante que todo brace simples distinto dos braces de McCuaig possui uma aresta estritamente magra. Norine-Thomas provaram um resultado análogo para bricks.

**Teorema 5.1** [17] *Todo brick simples que não é um brick de Norine-Thomas possui uma aresta estritamente magra.*

Suponha que  $G$  seja um brick (brace) e seja  $e$  uma aresta estritamente magra de  $G$ . Então  $G - e$  tem no máximo dois vértices de grau dois. O índice de  $e$ , denotado por  $\text{índice}(e)$  e apresentado na seção 2.1, pode ser expandido da seguinte forma (Figura 5.2):

**Definição 5.2** [ÍNDICES DE ARESTAS ESTRITAMENTE MAGRAS]

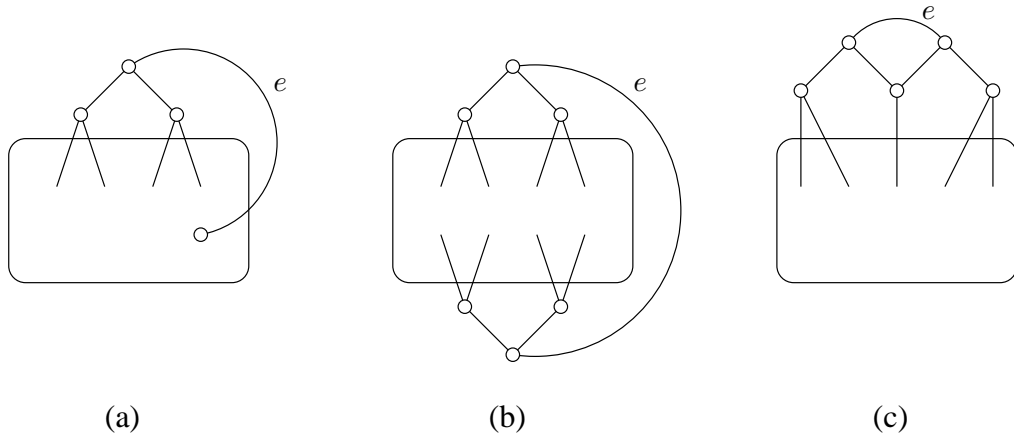


Figura 5.2: Aresta  $e$  de índice (a) um, (b) dois, e (c) três

- i) **zero**, se  $G - e$  é um brick (brace);
- ii) **um**, se  $G - e$  tem precisamente um vértice de grau dois;
- iii) **dois**, se  $G - e$  tem dois vértices de grau dois cuja distância em  $G - e$  é pelo menos três;
- iv) **três**, se  $G - e$  tem dois vértices de grau dois cuja distância em  $G - e$  é dois. Nesse caso,  $G$  é um brick.

### 5.3 Expansões

Na seção 3.1, definimos três operações de expansão para braces: de índice zero, índice um e índice dois. Essas operações são similares para bricks e cada uma pode ser vista como o reverso de remover uma aresta estritamente magra e efetuar o procedimento de retração dos vértices de grau dois no grafo resultante. Vamos agora definir uma nova expansão exclusiva para bricks, a expansão de índice três, que é o reverso de remover uma aresta estritamente magra de índice três e efetuar o procedimento de retração dos vértices de grau dois no grafo resultante.

**Definição 5.3** [EXPANSÃO DE ÍNDICE TRÊS] Escolha um vértice, digamos  $a$ , de um brick simples  $H$  tal que  $a$  tenha grau pelo menos cinco. Um grafo  $G$  é obtido a partir de  $H$  por uma expansão de índice três se  $G := H\{a \rightarrow b_1a_1b_2a_2b_3\} + a_1a_2$  tal que  $b_1$  e  $b_3$  têm pelo menos dois vizinhos e  $b_2$  tem pelo menos um vizinho em  $H - a$  (Figura 5.3).

Em qualquer um dos casos de expansão de índice 0, 1, 2 ou 3, dizemos que  $G$  é uma *expansão linear* de  $H$ .

**Teorema 5.4** ([2], [5], [12]) Uma expansão linear de um brick (brace) é um brick (brace).



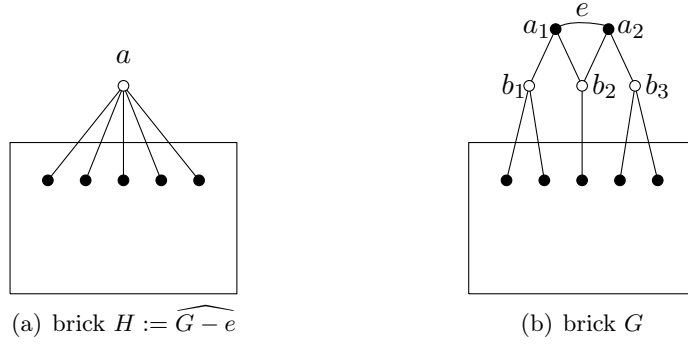


Figura 5.3: O grafo  $G$  é obtido de  $H$  por uma expansão de índice três

Seja  $G$  um brick (brace) minimal e seja  $e$  uma aresta estritamente magra de  $G$ . Seja  $H := \widehat{G - e}$ . Então  $H$  é obtido de  $G - e$  pela bicontração dos vértices de grau dois. Os vértices de  $H$  resultantes das bicontrações dos vértices de grau dois de  $G - e$  são chamados de *vértices de contração*. Portanto,  $H$  tem um ou dois vértices de contração. O seguinte lema contém os argumentos principais usados na prova do teorema 5.7, o teorema principal deste capítulo. Os itens (i), (ii) e (iii) correspondem aos lemas 3.6, 3.7 e 3.10.

**Lema 5.5** *Seja  $G$  um brick (brace) minimal, e seja  $e$  uma aresta estritamente magra de  $G$ . Seja  $H := \widehat{G - e}$ . Suponha que  $H$  não é um brick (brace) minimal. Seja  $F \subseteq E(H)$  tal que  $J := H - F$  é um brick (brace) minimal. Então*

- (i) *toda aresta de  $F$  é incidente a um vértice de contração de  $H$  (e conseqüentemente, com um vértice externo de  $G$ );*
- (ii) *um vértice externo de  $G$  incidente a uma aresta de  $F$  tem grau três em  $G$ ;*
- (iii) *suponha que o índice( $e$ )  $\in \{1, 2\}$ . Então  $F$  tem no máximo duas arestas incidentes a cada vértice de contração de  $H$ . Além disso, se  $F$  tem duas arestas incidentes a um mesmo vértice de contração de  $H$ , essas duas arestas são incidentes ao mesmo vértice externo em  $G$ ;*
- (iv) *suponha que o índice( $e$ ) = 3. Então  $G$  é um brick. Denote por  $b_1, b_2$  e  $b_3$  os vértices externos de  $G$ , onde  $b_2$  é o vizinho dos dois extremos de  $e$ . Suponha também que  $F$  tem uma aresta  $f_1$  incidente a  $b_1$  ou  $b_3$ . Então  $f_1$  é uma aresta estritamente magra de índice um de  $G$ .*

Demonstração: Se  $F$  contém uma aresta  $f$  que não é incidente a qualquer vértice de contração de  $H$  ou é incidente a um (ou dois) vértice(s) externo(s) que possui(em) grau quatro ou mais em  $G$ , então  $G - f$  é um expansão linear de  $H - f$  e pelo teorema 5.4,  $G - f$  é um brick (brace), contradizendo a minimalidade de  $G$ . Isto prova os itens (i) e (ii).

O item (iii) segue a partir dos dois primeiros e pelo fato de que todo vértice (incluindo os vértices de contração) têm grau pelo menos três em  $J$ . Mais precisamente, suponha que  $F$  tenha duas arestas incidentes a um vértice de contração de  $H$ , digamos  $a$ , e que essas duas arestas são incidentes a vértices externos distintos, digamos  $a_1$  e  $a_2$ , em  $G$ . Pelo item (ii),  $a_1$  e  $a_2$  têm grau três em  $G$ . Isso implica que

$a$  tem grau quatro em  $H$  e grau dois em  $J$ . Isso é uma contradição, pois  $J$  é um brick. O mesmo ocorre se  $F$  tem três arestas incidentes a um vértice de contração de  $H$ .

Para provar o item (iv), observe inicialmente que uma aresta estritamente magra de índice três é parte de um triângulo. Logo,  $G$  é um brick neste caso. Além disso, o brick  $H$  é simples, pois  $e$  é uma aresta estritamente magra de  $G$ . Seja  $a$  o vértice de contração de  $H$  que é extremo de  $f_1$ . Como  $f_1 \in F$ , ambos os extremos de  $f_1$  têm grau quatro ou mais em  $H$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $f_1$  é incidente ao vértice externo  $b_1$  de  $G$  e que  $b_1a_1$  é uma aresta de  $G$  (Figura 5.4(b)), onde  $a_1$  é um extremo de  $e$ . Pelo item (ii),  $b_1$  tem grau três em  $G$ . Portanto,  $b_1$  é o único extremo de  $f_1$  com grau três em  $G$ . Logo, o grafo  $\widehat{G - f_1}$  é obtido de  $G - f_1$  pela bi-contração do vértice  $b_1$  (Figura 5.4(c)).

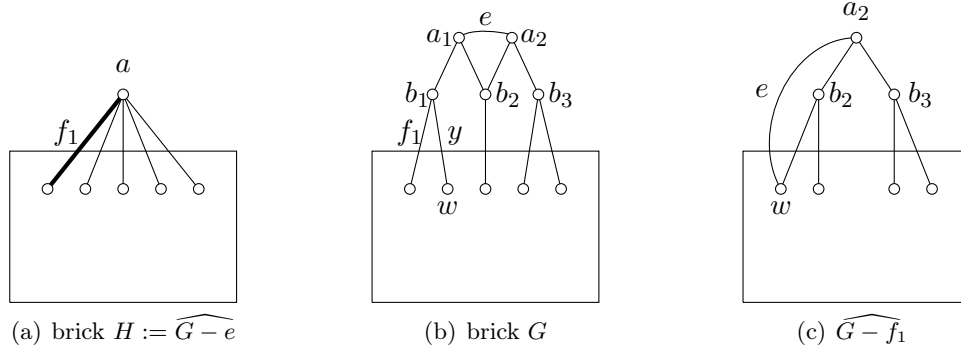


Figura 5.4: Ilustração para a prova do Lema 5.5

Vamos mostrar que  $\widehat{G - f_1}$  é uma expansão linear do brick  $H - f_1$ . Mais precisamente, seja  $y$  a aresta incidente a  $b_1$  distinta de  $f_1$  e  $b_1a_1$ , e seja  $w$  o extremo de  $y$  distinto de  $b_1$ . O grafo  $\widehat{G - f_1}$  pode ser obtido de  $H - f_1$  pela bi-subdivisão do vértice  $a$  e pela ligação do novo vértice interno ao vértice  $w$ . Portanto,  $\widehat{G - f_1}$  é uma expansão de  $H - f_1$ . Pelo Teorema 5.4,  $\widehat{G - f_1}$  é um brick. Além disso,  $\widehat{G - f_1}$  é simples, pois é uma expansão de um grafo simples. Logo,  $f_1$  é uma aresta estritamente magra de índice um em  $G$ .  $\square$

## 5.4 Expansões adicionais

Seja  $H$  um grafo. Sejam  $u, v \in V(H)$  vértices adjacentes. A *bi-subdivisão* da aresta  $uv$  significa substituir a aresta por um caminho de comprimento três, digamos um caminho com os vértices  $u, x, y, v$ , nesta ordem. Seja  $H'$  o grafo obtido a partir de  $H$  por essa operação. Dizemos que  $x, y$  (nesta ordem) são os *novos* vértices. Portanto  $y, x$  são os novos vértices resultantes da bi-subdivisão da aresta  $uv$ .

Seja  $H$  um grafo, sejam  $u, v \in V(H)$  vértices distintos e seja  $H'$  o grafo obtido a partir de  $H + uv$  pela bi-subdivisão de  $uv$ , onde os novos vértices são  $x, y$ . Seja  $x' \in V(H) - \{u\}$  e  $y' \in V(H) - \{v\}$  vértices não necessariamente distintos tais que ambos não pertencem a  $\{u, v\}$ . Nessas circunstâncias, dizemos que  $H' + xx' + yy'$  é uma expansão *quase-quadrática* de  $H$  (Figura 5.5(a)). Dizemos que a aresta  $uv$  é a *base* dessa expansão. Dizemos que esta é uma expansão *quadrática* de  $H$  se  $u$  e  $v$  não são adjacentes em  $H$ .

Agora sejam  $u, v, H', x, y$  como acima e sejam  $a, b \in V(H)$  não necessariamente distintos tais que  $\{u, v\} \neq \{a, b\}$  e se  $a = b$  então  $a \notin \{u, v\}$ . Se  $a \neq b$ , então seja  $H''$  o grafo obtido a partir de  $H' + ab$

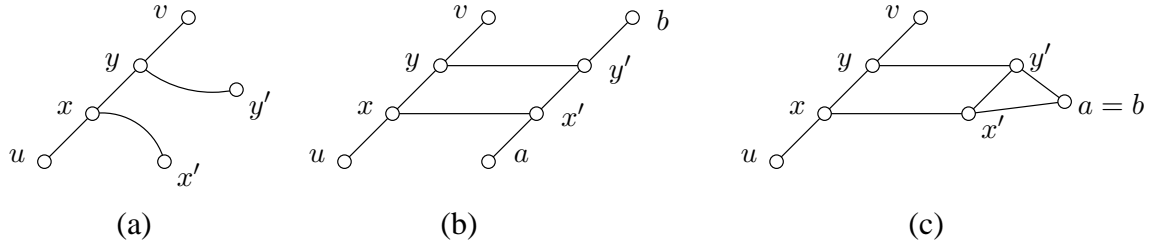


Figura 5.5: Expansões (a) quase-quadrática e quase-quártica com (b)  $a \neq b$  e (c)  $a = b$

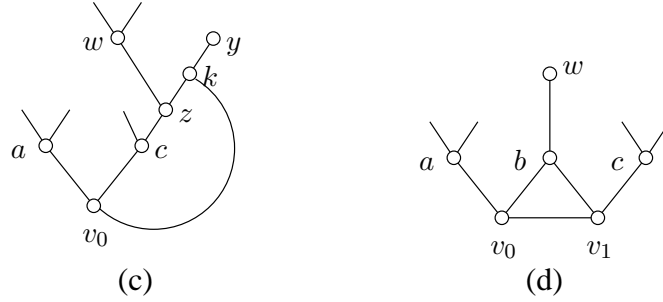


Figura 5.6: Expansões (c) bilinear e (d) pseudolinar

pela bi-subdivisão de  $ab$  e sejam  $x'$ ,  $y'$  os novos vértices. Se  $a = b$ , então seja  $H''$  o grafo obtido a partir de  $H'$  pela adição de novos vértices  $x'$ ,  $y'$  e novas arestas  $ax'$ ,  $x'y'$  e  $y'a$ . Então o grafo  $H'' + xx' + yy'$  é chamado de expansão *quase-quártica* de  $H$  (Figura 5.5(b) e 5.5(c)). Dizemos que as arestas  $uv$  e  $ab$  são as *bases* dessa expansão. Denominamos esta expansão de *quártica* de  $H$  se  $uv$  ou  $ab$  (ou ambas) não pertencerem a  $E(H)$ .

Sejam  $x$  e  $w$  vértices distintos e não vizinhos de  $H$ . Seja  $H'$  o grafo obtido a partir de  $H$  pela bi-subdivisão do vértice  $x$ , onde  $v_0$  é o novo vértice interno e  $a$ ,  $c$  são os novos vértices externos. Assuma que ambos  $a$  e  $c$  possuem grau pelo menos três e que eles não possuem vizinhos em comum com exceção de  $v_0$ .

Seja  $y$  um vizinho de  $c$  distinto de  $v_0$ . Seja  $H''$  o grafo obtido a partir de  $H'$  pela bi-subdivisão da aresta  $cy$  onde os novos vértices são  $z$  e  $k$ . Dizemos que o grafo  $H'' + v_0k + zw$  é uma expansão *bilinear* de  $H$  (Figura 5.6(a)).

Agora, seja  $H''$  o grafo obtido a partir de  $H'$  pela bi-subdivisão da aresta  $v_0c$  onde os novos vértices são  $b$  e  $v_1$ . Dizemos que o grafo  $H'' + v_0v_1 + bw$  é uma expansão *pseudolinar* de  $H$  (Figura 5.6(b)).

Finalmente, dizemos que  $G$  é uma *expansão* de  $H$  (i) se  $G$  é uma expansão linear, quase-quadrática, quadrática, quase-quártica, quártica, bilinear ou uma expansão pseudolinar de  $H$  e (ii) se  $H$  é bipartido então  $G$  é também bipartido. Portanto, uma expansão pseudolinar não é permitida para grafos bipartidos. Note que uma expansão de um grafo simples também é simples.

Expansões quase-quadrática, quadrática, quase-quártica, quártica e pseudolinar são combinações de duas ou mais expansões lineares. Por exemplo, usando a notação acima, se  $u$  e  $v$  são adjacentes em  $H$  então uma expansão quase-quadrática de  $H$  pode ser obtida por uma expansão linear de  $H + uy'$ . As outras expansões são similarmente obtidas. Logo, o seguinte resultado é um corolário do teorema 5.4.

**Corolário 5.6** *Uma expansão de um brick (brace) simples é um brick (brace) simples.*

## 5.5 Geração de bricks e braces minimais

**Teorema 5.7** [GERAÇÃO DE BRICKS E BRACES MINIMAIS] *As seguintes afirmações são válidas:*

- *Todo brick minimal, com exceção do grafo de Petersen, pode ser obtido a partir do  $K_4$  ou do prisma triangular através de expansões, de tal forma que todos os grafos intermediários são bricks minimais;*
- *Todo brace minimal com pelo menos seis vértices pode ser obtido a partir do  $K_{3,3}$  ou do cubo através de expansões, de tal forma que todos os grafos intermediários são braces minimais.*

Demonstração: Um brick que é um prisma, prismoide, escada Möbius, roda ímpar ou uma escadaria pode ser obtido a partir do  $K_4$  ou do prisma triangular por uma sequência de expansões quase-quadráticas ou quase-quárticas de tal forma que todos os grafos intermediários são prismas, prismoides, escadas Möbius, rodas ímpares ou escadarias, respectivamente. Um prismoide estendido distinto do  $K_4$  não é um brick minimal. Portanto, o teorema é válido para os bricks de Norine-Thomas.

Um brace que é um prisma, escada Möbius ou uma roda dupla pode ser obtido a partir do  $K_{3,3}$  ou do cubo por uma uma sequência de expansões quase-quadráticas ou quase-quárticas de tal forma que todos os grafos intermediários são prismas, escadas Möbius ou rodas duplas, respectivamente. Portanto, o teorema é válido para os braces de McCuaig.

Seja  $G$  um brick (brace) minimal e suponha que  $G$  não é um brick de Norine-Thomas e nem um brace de McCuaig. Pelos teoremas 2.8 e 5.1,  $G$  possui uma aresta estritamente magra  $e$ . Como  $G$  é minimal,  $\text{índice}(e) \in \{1, 2, 3\}$  se  $G$  for um brick ou  $\text{índice}(e) \in \{1, 2\}$  se  $G$  for um brace.

Seja  $e$  uma aresta estritamente magra de  $G$  e seja  $H := \widehat{G - e}$ . Pela definição de aresta estritamente magra,  $H$  é um brick (brace) simples. Se  $H$  é minimal então  $G$  é uma expansão linear de  $H$ . Assuma então que  $H$  não é minimal. Logo, existe  $\emptyset \neq F \subseteq E(H)$  tal que  $J := H - F$  é um brick (brace) minimal. Vamos mostrar que  $G$  é uma expansão de  $J$ .

**Caso 1:**  $e$  tem índice um.

Então  $e$  possui um único extremo, digamos  $b_0$ , de grau três em  $G$ , e  $H := \widehat{G - e}$  é obtido a partir de  $G - e$  pela bi-contracção de  $b_0$ . Sejam  $a_1$  e  $a_2$  os vizinhos de  $b_0$  em  $G - e$ . Pelos itens (i) e (iii) do lema 5.5, temos que  $|F| \leq 2$  e pelo item (ii), toda aresta de  $F$  é incidente com o vértice de contracção de  $H$ , digamos  $a$ .

Assuma inicialmente que  $F = \{f_1\}$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $f_1$  é incidente a  $a_1$  em  $G$ . Pelo item (ii) do lema 5.5,  $a_1$  tem grau três em  $G$ . Então,  $G$  pode ser obtido a partir de  $J := H - F$  por uma expansão quase-quadrática e uma aresta  $f$  é a base da expansão. (Figura 5.7).

Agora assumamos que  $F = \{f_1, f_2\}$ . Assim,  $f_1$  e  $f_2$  são incidentes a  $a_1$  em  $G$ . Logo, similarmente ao caso anterior,  $G$  também pode ser obtido de  $J := H - F$  por uma expansão quadrática.

**Caso 2:**  $e$  tem índice dois.

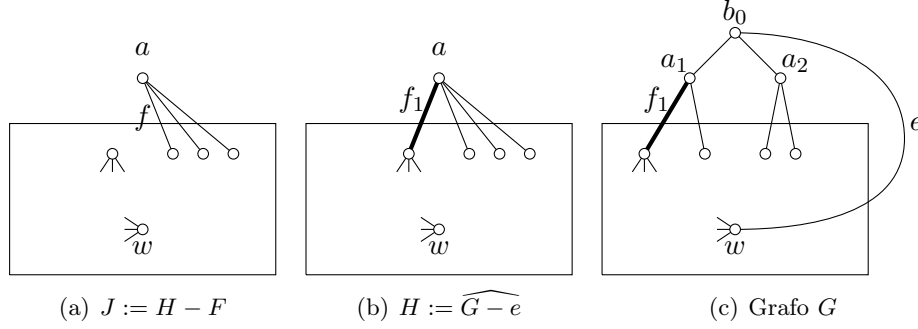


Figura 5.7: A aresta estritamente magra  $e$  tem índice 1

Vamos denotar  $e := a_0b_0$  e vamos denotar por  $a$  e  $b$  os vértices de contração de  $H$  resultantes das bi-contrações de  $a_0$  e  $b_0$  em  $G - e$ , respectivamente. Além disso, vamos denotar por  $a_1, a_2$  e  $b_1, b_2$  os vértices externos de  $G - e$ , de forma que  $a_1$  e  $a_2$  são adjacentes a  $b_0$ , e  $b_1$  e  $b_2$  são adjacentes a  $a_0$ .

Pelos itens (i) e (iii) do lema 5.5, toda aresta de  $F$  é incidente a  $a$  ou  $b$  em  $H$  e  $F$  possui no máximo duas arestas incidentes a  $a$  ou  $b$ . Portanto,  $|F| \leq 4$ . Além disso, se  $F$  possui duas arestas incidentes ao um mesmo vértice de contração de  $H$ , essas duas arestas são incidentes ao mesmo vértice externo em  $G$ . Podemos então assumir, sem perda de generalidade, que toda aresta de  $F$  é incidente com os vértices  $a_1$  ou  $b_1$  em  $G$ . Pelo item (ii) do lema 5.5, se  $a_1$  é incidente a uma aresta de  $F$  então  $a_1$  tem grau três em  $G$ . O mesmo vale para  $b_1$ . O seguinte lema será útil. (Note que ele apresenta as ideias já mostradas no lema 3.11).

**Lema 5.8** *Suponha que  $F$  possui uma aresta, digamos  $f$ , incidente a  $a_1$  e nenhuma aresta liga  $a_1$  a  $b_1$  ou  $b_2$ . Então  $f$  é uma aresta estritamente magra de índice um em  $G$ . (O mesmo vale se  $F$  possui uma aresta incidente a  $b_1$  e nenhuma aresta liga  $b_1$  a  $a_1$  ou  $a_2$ .)*

Demonstração: Pelo item (ii) do lema 5.5,  $a_1$  tem grau três em  $G$ . Como  $a_1$  não é vizinho de  $\{b_1, b_2\}$ , o extremo de  $f$  distinto de  $a_1$  não é um vértice de contração em  $H$ . Como  $H - f$  é um brick (brace),  $a_1$  é o único extremo de  $f$  com grau três em  $G$ . Portanto,  $\widehat{G - f}$  é obtido a partir de  $G - f$  pela bi-contração do vértice  $a_1$ . Como  $a_1$  não possui vizinhos em  $\{b_1, b_2\}$ , o grafo  $\widehat{G - f}$  é simples.

Como  $H$  é um brick (brace) simples,  $H - f$  também é um brick (brace) simples. Assim,  $\widehat{G - f}$  pode ser obtido de  $H - f$  por uma expansão linear de índice um do vértice  $b$  (veja a Figura 3.7). Pelo Corolário 5.6,  $\widehat{G - f}$  é um brick (brace) simples. Logo,  $f$  é uma aresta estritamente magra de índice um de  $G$ .  $\square$

**Subcaso 2.1:**  $F = \{f_1\}$ .

Pelo item (i) do lema 5.5, podemos assumir que  $f_1$  é incidente a  $a_1$  em  $G$ . Se nenhuma aresta liga  $a_1$  a  $b_1$  ou  $b_2$  então, pelo lema 5.8,  $f$  é uma aresta estritamente magra de índice um em  $G$ . Nesse caso, podemos trocar  $e$  por  $f$  e terminar pelo caso 1. Podemos então assumir que existe uma aresta  $y$  ligando  $a_1$  a  $b_1$  ou  $b_2$ , digamos  $b_1$ , em  $G$ . Podemos ter  $y = f_1$  ou não.

Se  $y = f_1$  então  $b_1$  possui grau três em  $G$ . Nesse caso,  $G$  pode ser obtido por uma expansão quase-quártica de  $J$  (Figura 5.8). Se  $y \neq f_1$  então  $G$  pode ser obtido por uma expansão bilinear de  $J$  (Figura 5.9).

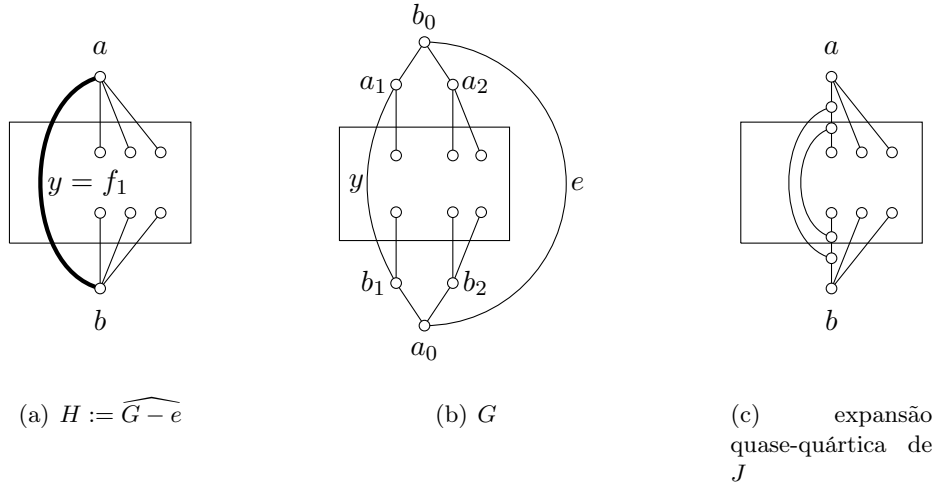


Figura 5.8:  $G$  é isomorfo a uma expansão quase-quártica de  $J$

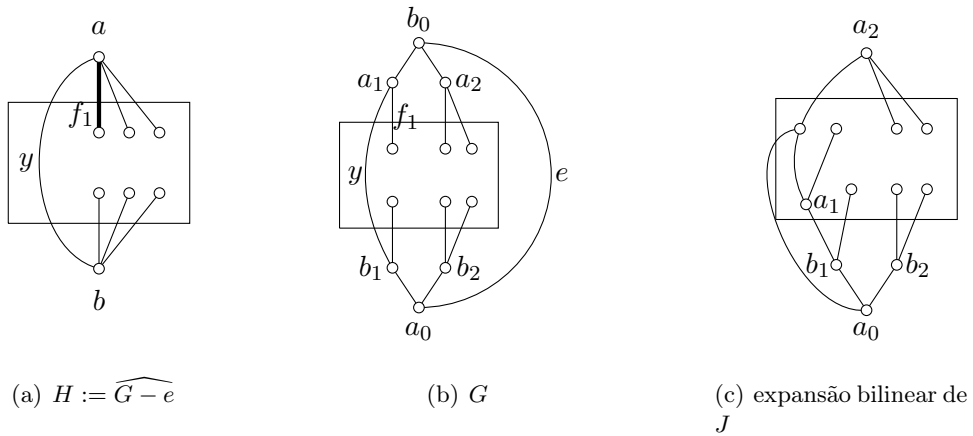


Figura 5.9:  $G$  é isomorfo a uma expansão bilinear de  $J$

**Subcaso 2.2:**  $F = \{f_1, f_2\}$ .

Pelo itens (i) e (iii) do lema 5.5, podemos assumir que toda aresta de  $F$  incidente a  $a$  em  $H$  é incidente a  $a_1$  em  $G$  e toda aresta de  $F$  incidente a  $b$  em  $H$  é incidente a  $b_1$  em  $G$ . Além disso, se uma aresta de  $F$  incide em  $a_1$  então  $a_1$  tem grau três em  $G$ . O mesmo vale para  $b_1$ . Temos então, a menos de simetrias, os seguintes casos para serem analisados de acordo com as incidências de  $f_1$  e  $f_2$  em  $a$  e  $b$  em  $H$ .

1.  $f_1$  e  $f_2$  são ambas incidentes a  $a$  e a  $b$ ;
2.  $f_1$  incide em  $a$  e em  $b$  e  $f_2$  incide somente em  $a$  (e não em  $b$ );
3.  $f_1$  incide somente em  $a$  e  $f_2$  incide somente em  $b$ ;
4.  $f_1$  e  $f_2$  são ambas incidentes a  $a$  e nenhuma delas é incidente a  $b$ .

O primeiro caso não pode ocorrer, pois  $H$  é um brick simples. No segundo, podemos assumir que  $f_1 := a_1b_1$  e  $f_2$  incide em  $a_1$  em  $G$ . Neste caso,  $G$  é uma expansão quártica de  $J$  (Figura 5.10).

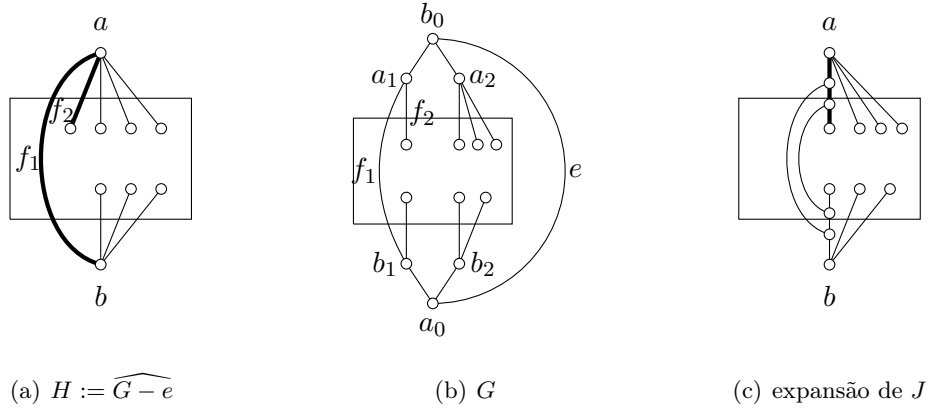


Figura 5.10:  $G$  é uma expansão quártica de  $J$

No terceiro caso, pelo lema 5.8, existe uma aresta  $y$  ligando  $a_1$  a  $b_1$  ou  $b_2$ . Se  $y$  liga  $a_1$  a  $b_2$  então não pode existir aresta ligando  $b_1$  a  $a_2$ , pois  $H$  é simples. Pelo mesmo lema 5.8,  $f_2$  é uma aresta estritamente magra de índice um de  $G$ , o que nos permite terminar pelo caso 1. Podemos assumir então que  $y$  liga  $a_1$  a  $b_1$ . Temos dois subcasos a serem analisados.

Se  $f_1$  e  $f_2$  não são adjacentes em  $G$  então  $G$  é uma expansão quártica de  $J$  (Figura 5.11).

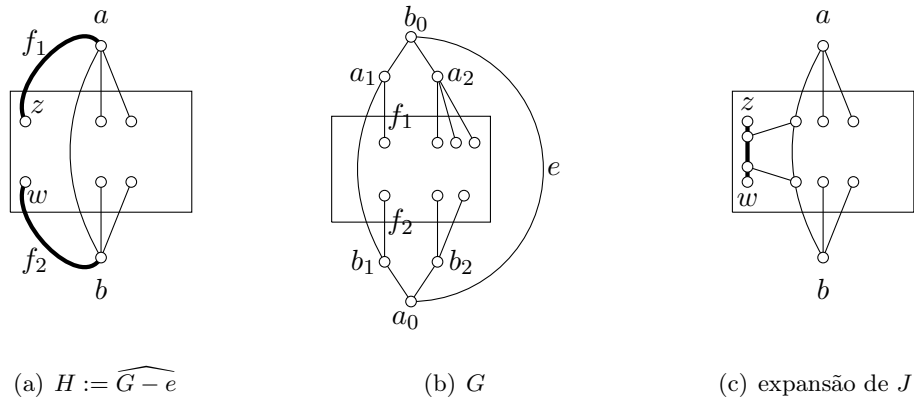


Figura 5.11:  $G$  é uma expansão quártica de  $J$

Se  $f_1$  e  $f_2$  são adjacentes em  $G$  então  $G$  também é uma expansão quártica de  $J$  (Figura 5.12). Este é o caso em que  $a = b$  na definição de expansão quártica. Este é o caso que faltou ser analisado na prova de Norine-Thomas.

No quarto caso, podemos assumir que  $f_1$  e  $f_2$  são incidentes a  $a_1$  em  $G$ . Logo,  $a_1$  tem grau três em  $G$ . Deduzimos daí que nenhuma aresta liga  $a_1$  a  $b_1$  ou  $b_2$  em  $G$ . Pelo lema 5.8,  $f_1$  é uma aresta estritamente magra de índice um de  $G$ . O mesmo vale para  $f_2$ . Podemos então terminar pelo caso 1.

**Subcaso 2.3:**  $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ .

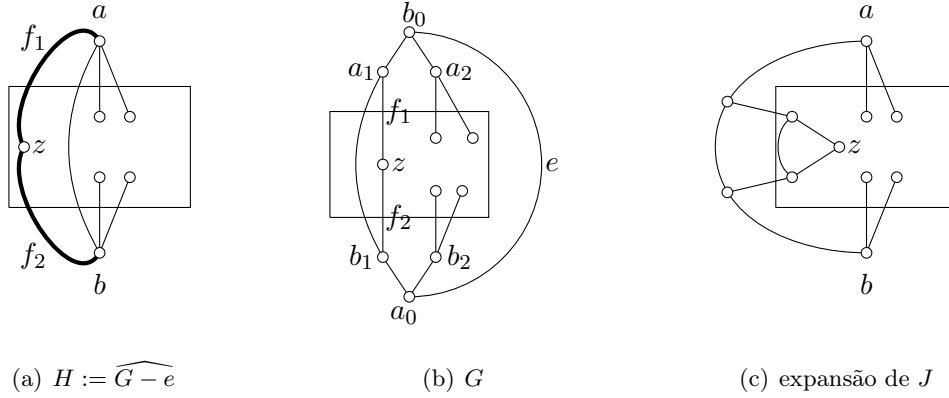


Figura 5.12:  $G$  é uma expansão quártica de  $J$

Pelo lema 5.5, podemos assumir que  $f_1$  e  $f_2$  incidem em  $a$ , e portanto em  $a_1$  em  $G$ , e que  $f_3$  incide em  $b$ , e portanto em  $b_1$  em  $G$ . Pelo lema 5.8, podemos assumir que  $f_1$  também incide em  $b_1$  em  $G$ . Logo,  $a_1$  e  $b_1$  têm grau três em  $G$ . Neste caso,  $G$  é uma expansão quártica de  $J$  (Figura 5.13).

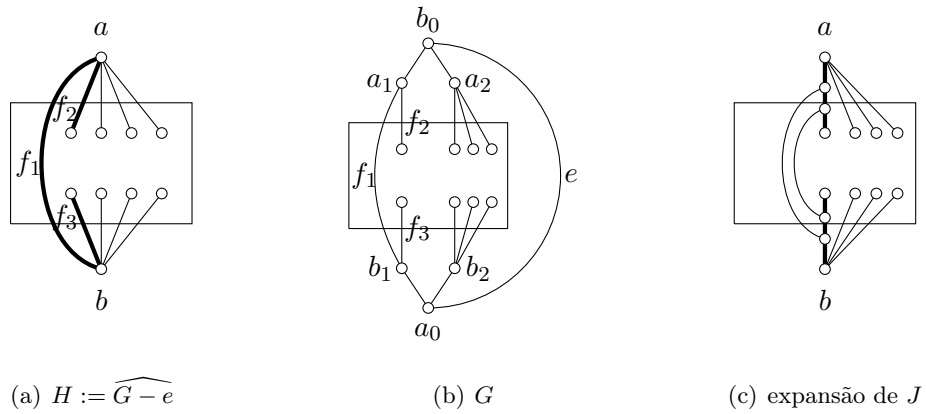


Figura 5.13:  $G$  é uma expansão quártica de  $J$

**Subcaso 2.4:**  $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ .

O único caso possível é aquele em que  $f_1$  e  $f_2$  são ambas incidentes apenas a  $a$ ,  $f_3$  e  $f_4$  são ambas incidentes apenas a  $b$  em  $H$ . Contudo, pelo lema 5.8,  $f_1$  seria uma aresta estritamente magra de índice um em  $G$ . O mesmo vale para as arestas  $f_2, f_3$  e  $f_4$ . Podemos então terminar pelo caso 1.

**Caso 3:**  $e$  tem índice três.

Neste caso,  $G$  é um brick e  $H$  é obtido a partir de  $G - e$  pela bi-contracção dos dois extremos  $a_1$  e  $a_2$  de  $e$ , cuja distância em  $G - e$  é dois. Suponha que  $b_1$  e  $b_2$  sejam os vizinhos de  $a_1$  e que  $b_2$  e  $b_3$  sejam os vizinhos de  $a_2$  em  $G - e$ . Seja  $a$  o vértice de contracção de  $H$ .

Pelo item (iv) do lema 5.5, podemos assumir que nenhuma aresta de  $F$  é incidente a  $b_1$  ou  $b_3$  em  $G$ , senão terminamos pelo caso 1. Então as arestas de  $F$  são todas incidentes a  $b_2$  em  $G$ . Pelo item 2 do lema 5.5,  $b_2$  possui grau três em  $G - e$ . Logo,  $|F| = 1$ . Nesse caso,  $G$  é uma expansão pseudolinear de  $J$



(Figura 5.14).

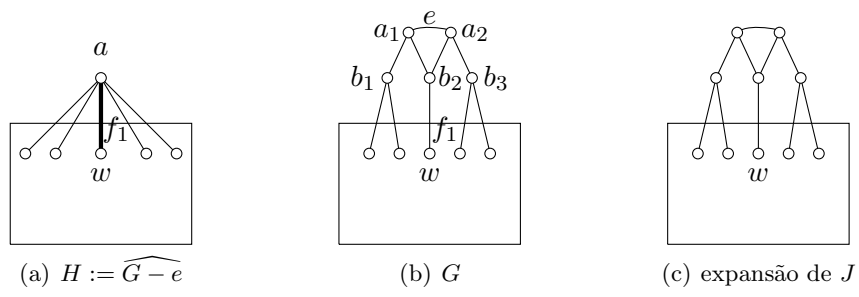


Figura 5.14:  $G$  é a uma expansão pseudolinear de  $J$

□

## Capítulo 6

# Trabalhos futuros

O teorema 2.7 estabelece que todo brace de ordem seis ou mais possui ao menos duas arestas magras. Uma questão que surge naturalmente como consequência deste resultado é determinar quantas arestas magras possui um brace minimal. Um limite inferior para o número de arestas magras em braces minimais seria um resultado relevante. Temos trabalhado para resolver este problema, tivemos alguns progressos, mas ainda não temos uma solução. Este problema parece ter relação com o problema de determinar o número de vértices de grau três em um brace minimal, que é outro problema de interesse. Descrevemos a seguir um pouco mais sobre estes problemas.

Seja  $G = (V, E)$  um brace minimal com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Vamos denotar por  $n_3$  e  $t$  o número de vértices de grau três e o número de arestas magras de  $G$ , respectivamente. Gostaríamos de provar a seguinte conjectura:

**Conjectura 6.1** *Se  $G$  um brace minimal então  $n_3 + t \geq m - n + c$ , onde  $c$  é uma constante.*

Se  $G$  é um brace minimal então  $3n_3 \geq t$ , pois toda aresta magra tem pelo menos um extremo de grau três. Relacionando esse resultado com o da Conjectura 6.1, temos que  $n_3 \geq \frac{m-n-c}{4}$ .

Se  $G$  é um brace minimal então  $m \geq \frac{3n}{2}$ , pois  $G$  tem grau mínimo três. Logo,  $m - n \geq \frac{n}{2}$ . Combinando este resultado com  $n_3 \geq \frac{m-n-c}{4}$ , chegamos ao limite inferior  $n_3 \geq \frac{n}{8} - \frac{c}{4}$  para o número de vértices de grau três em um brace minimal.

Já tivemos um avanço substancial na prova da Conjectura 6.1, mas não vamos apresentá-lo aqui já que é um texto ainda não finalizado. A fundamentação para este estudo encontra-se na referência [11].

Se conseguirmos resolver o problema de determinar o número de arestas magras em braces, gostaríamos também de resolver o problema de determinar o número de arestas magras em bricks.



## Capítulo 7

# Conclusão

Neste trabalho, apresentamos como resultado principal um teorema para construção de braces minimais. Nossa inspiração foram os estudos realizados por McCuaig [12] e seu teorema para geração de braces simples, e Norine-Thomas [16] com seu teorema de geração de bricks minimais.

Como resultado, utilizamos o teorema principal como base de ferramenta para demonstrar uma caracterização estrutural desses grafos. Mostramos que o limiar  $m_G \leq 5n_G - 10$  para qualquer brace minimal  $G$ , onde  $n_G \geq 6$ , é justo e também provamos uma caracterização completa dos braces minimais que alcançam esse limite superior. Por fim, mostramos uma prova unificada para construção de bricks e braces minimais adotando uma abordagem diferente da estabelecida por Norine-Thomas e adicionando um caso que faltou ser analisado na prova original. Grande parte deste trabalho está publicada no artigo [7].

Como mostramos no capítulo 6 novos desafios ainda estão presentes. Com a popularização das nuvens públicas, modelos de computação com necessidade de grande processamento para obtenção de aplicabilidade prática estão saindo do escopo dos artigos científicos e migrando para a rotina dos clientes. Assim, cada vez mais observamos a utilização de aplicações baseadas na teoria dos grafos e suas vertentes se tornando produtos para serem utilizados na modelagem de problemas computacionais como balanceamento e distribuição de cargas, detecção de fraudes (aprendizado de máquina), modelagem de relacionamentos, entre outros. Esses são apenas alguns casos em que emparelhamento em grafos podem ser úteis e podem ser utilizados na solução de problemas de otimização. Esses desafios, e a possibilidade de contribuir com novas soluções, nos motiva a continuar nessa jornada. Dessa forma, talvez as perguntas sem resposta possam gerar resultados e, quem sabe, novas perguntas.



# Referências Bibliográficas

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*. Springer, 2008.
- [2] M. H. Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. How to build a brick. *Discrete Math.*, 306:2383–2410, 2006.
- [3] M. H. Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. How to build a brace. newblock Technical Report IC-05-14, Institute of Computing, University of Campinas, June 2005.
- [4] M. H. Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. Generating simple bricks and braces. Technical Report IC-08-16, Institute of Computing, University of Campinas, July 2008.
- [5] M. H. Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. On the number of perfect matchings in a bipartite graph. *SIAM J. Discrete Math.*, 27(2):940–958, 2013.
- [6] M. H. Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. Thin edges in braces. *The Electronic J. of Combin.*, 22, 2015.
- [7] Phelipe A. Fabres, N. Kothari, and M. H. Carvalho. Minimal braces. *J. Graph Theory*, 96:490–509, 2020.
- [8] C. H. C. Little and F. Rendl. Operations preserving the Pfaffian property of a graph. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, 50:248–275, 1991.
- [9] L. Lovász. Matching structure and the matching lattice. *J. Combin. Theory Ser. B*, 43:187–222, 1987.
- [10] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. Number 29 in Annals of Discrete Mathematics. Elsevier Science, 1986.
- [11] C. L. Lucchesi. Manuscript: Some thoughts on thin edges. 2011.
- [12] W. McCuaig. Brace generation. *J. Graph Theory*, 38:124–169, 2001.
- [13] W. McCuaig. Pólya’s permanent problem. *The Electronic J. of Combin.*, 11, 2004.
- [14] W. McCuaig, N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits. *STOC ’97 Proceedings of the twenty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 402–405, 1997.
- [15] U. S. R. Murty. The Matching Lattice and Related Topics. Preliminary Report, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1994.

- [16] S. Norine and R. Thomas. Minimal bricks. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96:505–513, 2006.
- [17] S. Norine and R. Thomas. Generating bricks. *J. Combin. Theory Ser. B*, 97:769–817, 2007.
- [18] S. Norine and R. Thomas. Minimal bricks. *arXiv:1907.00305v1*, pages 1–10, 2019.
- [19] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits. *Ann. of Math. (2)*, 150:929–975, 1999.
- [20] V. V. Vazirani and M. Yannakakis. Pfaffian orientation of graphs, 0,1 permanents, and even cycles in digraphs. *Discrete Applied Math.*, 25:179–180, 1989.