Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul

Instituto De Matemática

Programa de Pós-Graduação Em Matemática

Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional

Claudinei Garcia Portela

Quadriláteros Convexos Inscritos e Circunscritos

Campo Grande-2021

Claudinei Garcia Portela

Quadriláteros Convexos Inscritos e Circunscritos

Trabalho apresentado como requisito para aprovação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Orientador Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini.

Campo Grande-2021

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida.

A minha esposa e filha, motivo maior de todo meu empenho em ser uma pessoa melhor, sem as quais não conseguiria enfrentar todos os desafios que o curso estabelece.

Aos colegas de curso, que sempre me auxiliaram nas dificuldades e dúvidas, dividindo conhecimentos e experiências.

Aos professores, pelos ensinamentos que nos auxiliaram em nosso crescimento profissional, em especial ao meu orientador pela paciência e apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho revisamos condições para que um quadrilátero convexo seja inscrito ou circunscrito em um círculo, ou seja, os teoremas de Ptolomeu e Pitot, além de algumas fórmulas sobre suas áreas fornecidas por Brahmagupta e Bretschneider. Apresentamos também condições para a inscrição de um quadrilátero circunscrito. Um quadrilátero que pode ser inscrito e circunscrito em algum par de círculos é conhecido como quadrilátero bicêntrico. Por fim, destacamos algumas propriedades do quadrilátero pipa, as condições para que um quadrilátero circunscrito seja um quadrilátero pipa.

Palavras-chave: Quadrilátero, Área, Quadrilátero Bicêntrico, Quadrilátero Pipa.

Abstract

In this work we review conditions for a convex quadrilateral to be inscribed or circumscribed in a circle, that is, the theorems of Ptolemy and Pitot, in addition to some formulas about their areas given by Brahmagupta and Bretschneider. We also present conditions for the inscription of a circumscribed quadrilateral. A quadrilateral that can be both inscribed and circumscribed on some pair of circles is known bicentric quadrilateral. Finally, we highlight some properties of a kite quadrilateral and the conditions for a circumscribed quadrilateral to be a kite one.

Keywords: Quadrilateral, Area, Bicentric Quadrilateral, Kite Quadrilateral.

Sumário

Resumo I

Abstract I

Introdução 1

1 Resultados Preliminares 4

1.0.1 Fórmula para a área de um quadrilátero qualquer . . . 7

2 Quadriláteros 9

2.1 Quadrilátero Circunscritível . . . 9

2.2 Pitot . . . 10

2.3 Quadrilátero inscritível . . . 13

2.3.1 Ptolomeu . . . 16

2.3.2 Hiparco . . . 18

3 Quadriláteros Bicêntricos 20

3.1 Condições para um quadrilátero circunscrito ser inscrito . . . 20

3.2 Cordas e bimedianas . . . 24

3.3 Sobre a área de quadriláteros inscritíveis . . . 29

3.3.1 Fórmula de Brahmagupta . . . 32

3.4 Área de quadriláteros bicêntricos . . . 34

3.5 Exercícios Propostos . . . 36

4 Quadrilátero Pipa 40

4.1 Condições para um quadrilátero circunscrito ser uma pipa . . . 41

4.2 Exercícios Propostos 46

5 Considerações Finais **51**

Introdução

O ensino da matemática no ensino médio deve proporcionar aos estudantes as condições efetivas para comunicação, argumentação, confronto e compreensão de situações-problema, escolhas e proposições; enfim, para que tomem gosto pelo conhecimento e aprendam a aprender e aplicar a matemática no seu cotidiano contribuindo para o seu contexto social, cultural e econômico.

O perfil do aluno que está inserido no Ensino Médio sofreu muitas modificações nos últimos anos, principalmente por influência de mudanças sociais e culturais vivenciadas pela sociedade, motivadas tanto pelas evoluções tecnológicas ocorridas nos últimos tempos quanto pela expansão do acesso dos alunos a essa etapa de ensino em todo Brasil. No entanto, ainda que as tecnologias e outras inovações estejam presentes na vida de muitos jovens, considerando a extensão territorial do pais e sua diversidade cultural, não é possível traçar um perfil único para o jovem matriculado no Ensino Médio devido à pluralidade de indivíduos, com diferentes características e interesses. Por esse motivo, na atualidade, é esperado que o ensino seja organizado de modo que o aluno passe a ter participação ativa no processo de aprendizado, ou seja, torne-se agente da construção do próprio conhecimento. Nesse sentido, o professor deve se posicionar como um mediador e como avaliador de processos, isto é, aquele que ajuda a fornecer as informações necessárias e faz intervenções que auxiliam, o aluno a ter condições de construir seu conhecimento, restruturando o processo quando necessário.

Trabalhos recentes na área da Educação Matemática, com enfoque nos processos de formação conceitual e de resolução de problemas, envolvendo a geometria, têm sido desenvolvidos por vários pesquisadores (VIANA2000, REZI2001, MORACO2006, PROENÇA2008) , os quais mostraram que o ensino de geometria ainda continua sendo deixado de lado ou realizado de forma distante da pretendida nas escolas.

O ensino geralmente é baseado em uma concepção que visa somente a prática de reprodução de exercícios e a memorização de fórmulas prontas e acabadas, e sabe-se que os alunos ao receberem o conteúdo matemático de forma pronta e acabada podem apresentar uma dificuldade maior para realizar abstrações e aplicar os conceitos em outras situações.

Isso pode estar relacionado a formação do professor de matemática, pois alguns estudos (PAVANELLO1993, PASSOS2000, ALMOULOUD2004, CRESCENTI2005) têm evidenciado a falta de domínio dos professores para conduzir um ensino de qualidade em geometria, baseado, entre outras situações, no domínio do conteúdo e de formas diversificadas de ensino. Sabemos que o professor quando vai ensinar geometria, além de investigar o que o aluno sabe sobre determinado conceito, ele tem que ter domínio sobre os conceitos, ou seja, saber o que ensina.

Visando contribuir com o objetivo do Profmat, produzimos este trabalho, deixando claro que nossa ambição não é de mostrar ao professor como ensinar, mas sim produzir um material de pesquisa que auxilie o profissional na busca pelo seu aprimoramento profissional.

Entre os inúmeros conteúdos de geometria presentes no currículo de matemática, destacamos os quadriláteros inscritos e circunscritos, dando um foco especial ao quadrilátero pipa. Falamos sobre as condições de inscrição e circunscrição de quadriláteros convexos na circunferência, citamos as propriedades de um quadrilátero pipa e as condições para que um quadrilátero circunscrito seja pipa e também falamos sobre o quadrilátero bicêntrico.

Durante a pesquisa notamos o tratamento inexpressivo dado aos quadriláteros inscritos e circunscritos nos livros da educação básica e a dificuldade em encontrar material sobre o quadrilátero pipa, figura presente na vida de muitos alunos. Outra realidade encontrada foi a exclusão de determinados teoremas e mesmo quando presentes, eram simplesmente apresentados aos estudantes sem demonstrações.

Por isso, nesse trabalho apresentamos demonstrações de teoremas, como: Pitot, Ptolomeu, Hiparco, Stewart, Bretscheneider e Brahmagupta, possibilitando a compreensão da natureza da matemática, ciências cujas teorias são comprovadas, não pela experimentação, mas sim pela demonstração.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. No primeiro capítulo descrevemos alguns resultados preliminares. Tais resultados irão nos auxiliar nas demonstrações dos capítulos seguintes. Os conceitos e demonstrações sobre quadriláteros inscritos e circunscritos, bem como alguns teoremas ligados a eles estão no capítulo 2. No capítulo 3 apresentamos a definição de quadrilátero bicêntrico e uma condição para que um quadrilátero circunscrito seja inscrito, ou seja, bicêntrico. Além disso, algumas fórmulas que nos permitem calcular as áreas desses quadriláteros finalizam o capítulo. O capítulo 4 aborda o conceito de quadrilátero pipa e as condições necessárias para que um quadrilátero circunscrito seja pipa.

Diante de tudo que foi exposto inicialmente sobre o ensino da geometria, a escolha do tema contribui com a produção em geometria.

Capítulo 1

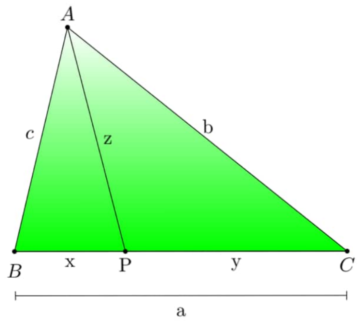
Resultados Preliminares

Iniciamos a construção do nosso trabalho apresentando resultados da geometria euclidiana, de modo a tornar a leitura do trabalho agradável e atingir o maior número de leitores. Para tanto, falaremos sobre o teorema de Stewart e, em seguida, sobre a área de um triângulo inscrito que nos auxiliará na demonstração de uma fórmula para a área de um quadrilátero inscrito apresentada no Capítulo 3. Por fim, apresentaremos duas fórmulas para o cálculo da área de quadriláteros quaisquer. Aqui destacamos o Teorema 1.4 que implicará na fórmula de Brahmagupta dada no Capítulo 3.

Teorema 1.1. *Seja ABC um triângulo de lados $AB = c, AC = b, BC = a$. Se P é um ponto sobre o lado BC, tal que $BP = x, CP = y$ e $AP = z$, então:*

$$b^2x + c^2y = a(xy + z^2)$$

Figura 1.1: Triângulo ABC e um ponto P sobre o lado BC



Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Se $\angle APC = \theta$, então $\angle APB = 180° - \theta$. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo APC e APB para calcular $AC = b$, e $AB = c$, respectivamente, obtemos:

$$b^2 = z^2 + y^2 - 2yz\cos(\theta) \tag{1.1}$$

$$c^2 = z^2 + x^2 - 2xz\cos(180^\circ - \theta) \tag{1.2}$$

onde usamos que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$. Multiplicamos a equação 1.1 por x e a 1.2 por y, temos,

$$b^2x = z^2x + y^2x - 2yzx\cos(\theta) \tag{1.3}$$

e

$$c^2y = z^2y + x^2y + 2xzy\cos(\theta) \tag{1.4}$$

Somamos as equações 1.3 e 1.4 para eliminar os termos que contém $\cos(\theta)$ e obtemos

$$\begin{aligned} b^2x + c^2y &= y^2x + x^2y + z^2x + z^2Y \\ &= xy(x+y) + z^2(x+y) \end{aligned}$$

Substituindo $x + y = a$ chegamos ao resultado desejado:

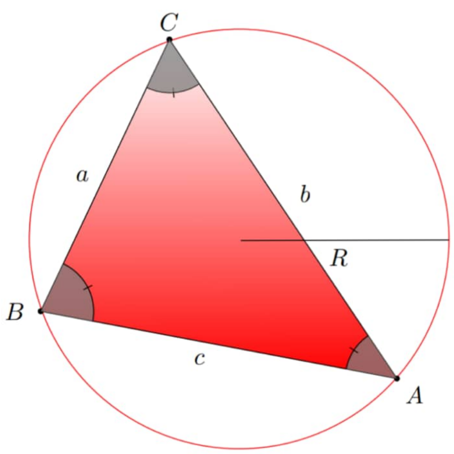
$$b^2x + c^2y = a(xy + z^2).$$

□

Teorema 1.2. *Se ABC é um triângulo de lados $AB = c, AC = b, BC = a$, de ângulos internos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e inscrito no círculo de raio R, então:*

$$(ABC) = \frac{abc}{4R}$$

Figura 1.2: Triângulo ABC inscrito na circunferência de raio R



Demonstração. Recordemos a fórmula em (1.5) que fornece a área de um triângulo em função do seno de um dos seus ângulos internos e dos lados adjacentes a ele,

$$(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2} \tag{1.5}$$

De acordo com a lei dos senos, temos $\text{sen}\hat{A} = \dfrac{a}{2R}$. Substituindo em (1.5) segue o resultado. □

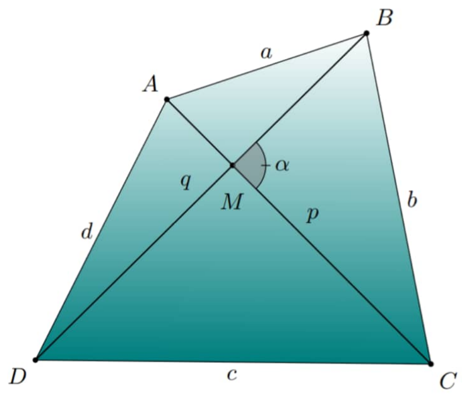
Teorema 1.3. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de diagonais $AC = p$ e $BD = q$ que formam entre si um ângulo α. Então,*

$$(ABCD) = \tfrac{1}{2} p \cdot q \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Demonstração. Seja M o ponto de encontro das diagonais de $ABCD$. Tendo em vista a Figura 1.3, podemos calcular a área do quadrilátero da seguinte forma

$$(ABCD) = (ABM) + (BCM) + (CDM) + (DAM) \tag{1.6}$$

Figura 1.3: Quadrilátero convexo de diagonais AC e BD.



Aplicando a fórmula (1.5) para cada um dos quatro triângulos do segundo membro da equação 1.6, obtemos:

$$\begin{aligned}
(ABCD) &= \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha)(AM \cdot BM + BM \cdot CM + CM \cdot DM + DM \cdot AM) \\
&= \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha)[BM(AM + CM) + DM(AM + CM)] \\
&= \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha)(AM + CM)(BM + DM) \\
&= \frac{1}{2} p \cdot q \cdot \text{sen}(\alpha)
\end{aligned}$$

□

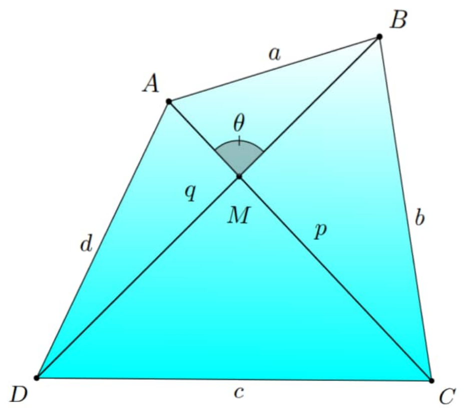
1.0.1 Fórmula para a área de um quadrilátero qualquer

A fórmula publicada em 1939 pelo matemático americano Julian Lowell Collidge expressa a área de um quadrilátero (convexo) qualquer em função dos comprimentos de seus lados e diagonais [2,6].

Teorema 1.4 (Fórmula de Coolidge). *Seja $ABCD$ um quadrilátero (convexo) cujas medidas dos lados são $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$. Sejam $AC = p$ e $BD = q$ suas diagonais. Então, a área do quadrilátero $ABCD$, é igual :*

$$(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}$$

Figura 1.4: Quadrilátero de lados a, b, c, d.



Demonstração. Conforme vimos, Teorema 1.3, a área do quadrilátero pode ser obtida pela fórmula:

$$(ABCD) = \frac{1}{2}pq\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Elevamos ao quadrado ambos os lados para obtermos

$$(ABCD)^2 = \frac{1}{4}[p^2q^2 - (pq\cos(\theta))^2] \tag{1.7}$$

Na figura 1.4 no quadrilátero $ABCD$ as diagonais interceptam-se em um ponto M, desse modo:

$$AM = x,\ BM = z,\ CM = y,\ DM = w$$

Além disso,

$$\angle AMB = \angle DMC = \theta \quad \text{e} \quad \angle AMD = \angle BMC = 180^\circ - \theta$$

A lei dos cossenos aplicada aos triângulos $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMD, \triangle DMA$ e a igualdade $\cos(180° - \theta) = -\cos(\theta)$, implicam:

$$\begin{aligned}
a^2 &= z^2 + x^2 - 2zx\cos(\theta) \\
b^2 &= z^2 + y^2 + 2zy\cos(\theta) \\
c^2 &= w^2 + y^2 - 2wy\cos(\theta) \\
d^2 &= w^2 + x^2 + 2wx\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
a^2 + c^2 &= z^2 + x^2 - 2zx\cos(\theta) + w^2 + y^2 - 2wy\cos(\theta) \\
&= z^2 + x^2 + w^2 + y^2 - 2(zx + wy)\cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^2 + d^2 &= z^2 + y^2 + 2zy\cos(\theta) + w^2 + x^2 + 2wx\cos(\theta) \\
&= z^2 + y^2 + w^2 + x^2 + 2(zy + wx)\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Fazendo $b^2 + d^2 - (a^2 + c^2)$, temos:

$$\begin{aligned}
b^2 + d^2 - (a^2 + c^2) &= 2(zy + wx)\cos(\theta) + 2(zx + wy)\cos(\theta) \\
&= 2(zy + wx + zx + wy)\cos(\theta) \\
&= 2[z(y + x) + w(y + x)]\cos(\theta) \\
&= 2[(z + w).(y + x)]\cos(\theta) \\
&= 2pq\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2} = pq\cos(\theta) \tag{1.8}$$

Após substituição de (1.8) em (1.7) concluímos a demonstração. □

Capítulo 2

Quadriláteros

Nesse capítulo reproduziremos as demonstrações dos teoremas de Pitot, Ptolomeu e Hiparco [5]. O Teorema de Pitot fornece condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja circunscritível. Relações entre os lados e as diagonais de um quadrilátero inscritível fazem parte dos teoremas de Ptolomeu e Hiparco, esses dois últimos serão utilizados no Capítulo 3 para demonstrar a área de um quadrilátero inscrito. O Teorema 2.2 fornece uma interessante fórmula para a área de um quadrilátero circunscritível, este será aplicado no Capítulo 4.

2.1 Quadrilátero Circunscritível

Definição 2.1. *Um quadrilátero (convexo) é circunscritível (ou tangente) se existe um círculo tangente aos seus quatro lados.*

Proposição 2.1. *Sejam* Γ *um círculo de centro O e P um ponto exterior ao mesmo. Se A, B pertencem à* Γ *são tais que PA e PB são tangentes a* Γ*, então, $PA = PB$.*

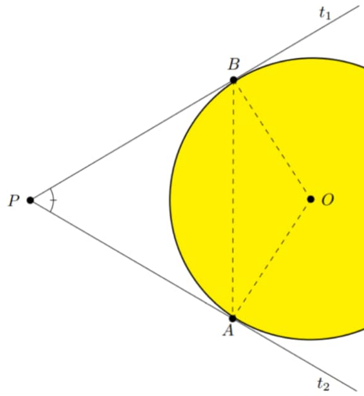
Demonstração. Considere o triângulo APB como PA é tangente a circunferência em A e AB é uma corda da circunferência, temos que $\angle BAP$ é um ângulo de segmento e, portanto,

$$B\hat{A}P = \frac{A\hat{O}B}{2} \tag{2.1}$$

Analogamente, BP é tangente a circunferência no ponto B e AB é uma corda da circunferência, temos também que $\angle ABP$ é um ângulo de segmento e, portanto,

$$A\hat{B}P = \frac{A\hat{O}B}{2} \tag{2.2}$$

Figura 2.1: Círculo de centro O e ponto externo P.



De (2.1) e (2.2) temos,

$$B\hat{A}P = A\hat{B}P$$

Assim, o triângulo APB é isósceles de base AB, portanto $AP = BP$.

□

2.2 Pitot

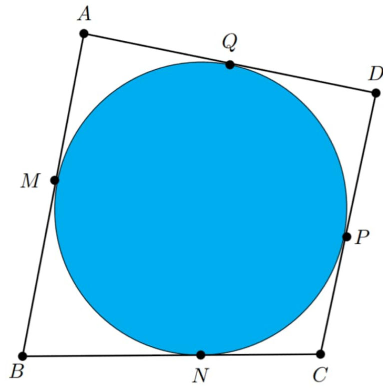
Henri Pitot (nascimento, França em 3 de maio de 1695. Morte, Aramon em 27 de dezembro de 1771) foi um engenheiro francês especializado em hidráulica. Começou os seus estudos em matemática e astronomia em Paris, se tornando assistente do físico Reaumur em 1723. Utilizou o rio Sena para testar várias das suas teorias e instrumentos. Pitot começou a se interessar pelos problemas dos fluídos tendo efetuado análises críticas de várias teorias da época que considerava infundadas, inventou um instrumento para medir a velocidade dos fluidos e que é conhecido hoje pelo seu nome, o tubo de Pitot. (*fonte: wikpédia*)

Existe uma condição para que o quadrilátero seja circunscritível, a qual será apresentada e demonstrada no teorema a seguir.

Teorema 2.1 (Pitot)**.** *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cujas medidas dos lados são $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$. $ABCD$ é circunscritível se, e só se, $a + c = b + d$.*

Demonstração. Inicialmente supomos que o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível, sendo assim o círculo inscrito tangencia os lados AB, BC, CD e DA nos pontos M, N, P e Q, respectivamente.

Figura 2.2: Quadrilátero circunscrito e pontos de tangencia.



Então, aplicando a proposição 2.1, obtemos:

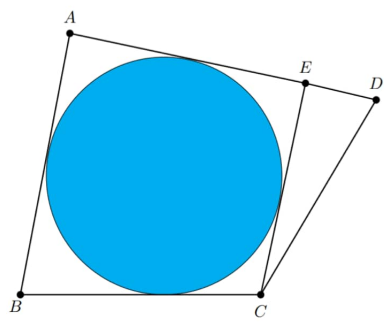
$$AM = AQ,\ DQ = DP,\ CP = CN \quad \text{e} \quad BN = BM$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AM} + \overline{MB}) + (\overline{CP} + \overline{PD}) \\
&= \overline{AQ} + \overline{BN} + \overline{CN} + \overline{DQ} \\
&= (\overline{AQ} + \overline{DQ}) + (\overline{BN} + \overline{CN}) \\
&= \overline{AD} + \overline{BC}
\end{aligned}$$

Agora supomos $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ e $ABCD$ não circunscritível. As bissetrizes dos ângulos internos $\angle DAB$ e $\angle ABC$ de $ABCD$ se intersectam em um ponto O, logo O é o centro de um círculo que tangencia os lados AD, AB e BC de $ABCD$, mas não tangencia o lado CD já que por hipótese o quadrilátero $ABCD$ não é circunscritível.

Figura 2.3: Quadrilátero $ABCD$ não circunscrito.



Seja $\overline{CE}$ a semirreta que tangencia o círculo. Suponhamos E pertencente a semirreta AD e entre A e D os demais casos são análogos. Por construção, na figura 2.3 $ABCE$ é um quadrilátero circunscritível e pelo que foi provado na primeira parte,

$$\overline{AB}+\overline{CE}=\overline{AE}+\overline{BC} \Rightarrow \overline{AB}=\overline{AE}+\overline{BC}-\overline{CE}$$

Mas, como $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ por hipótese, substituindo $\overline{AB}$ obtemos

$$\overline{AE}-\overline{CE}=\overline{AD}-\overline{CD} \Rightarrow \overline{CD}-\overline{CE}=\overline{AD}-\overline{AE}=\overline{DE}$$

ou ainda

$$\overline{CD}-\overline{CE}=\overline{DE} \Rightarrow \overline{CD}=\overline{CE}+\overline{DE}.$$

Impossível, pois tal igualdade contradiz a desigualdade triangular no triângulo CDE. Portanto, se temos $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$ o quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. □

É imediato, do Teorema de Pitot, que todo quadrilátero $ABCD$ que tem dois pares de lados adjacentes congruentes é circunscritível. Doravante, tal quadrilátero será chamado de Pipa. A pergunta que surge é, quando a recíproca é verdadeira? Isto é, sob que condições um quadrilátero circunscritível é uma Pipa? Responderemos essa pergunta no Capítulo 4 e, para isso, precisaremos do próximo resultado [10].

Teorema 2.2 (Área de quadrilátero circunscritível)**.** *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível cujas medidas dos lados são $AB=a, BC=b, CD=c$ e $DA=d$. Sejam $AC=p$ e $BD=q$ suas diagonais. Então, a área do quadrilátero $ABCD$, é igual*

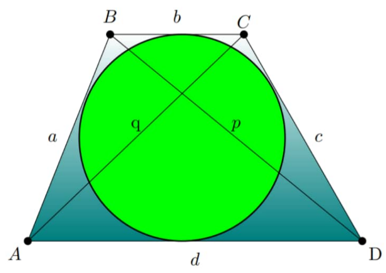
$$(ABCD)=\frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2-(ac-bd)^2}$$

Demonstração. Por hipótese $ABCD$ é circunscritível então, de Pitot, $a+c=b+d$. Elevando ao quadrado ambos os lados

$$2(ac-bd)=b^2+d^2-a^2-c^2 \tag{2.3}$$

Da fórmula de Coolidge 1.4 e (2.3) segue que

Figura 2.4: Quadrilátero circunscritível



$$(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{4(pq)^2 - [2(ac-bd)]^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac-bd)^2}$$

□

2.3 Quadrilátero inscritível

Definição 2.2. *Dizemos que um quadrilátero é inscritível (ou cíclico) se existir um círculo passando por seus vértices.*

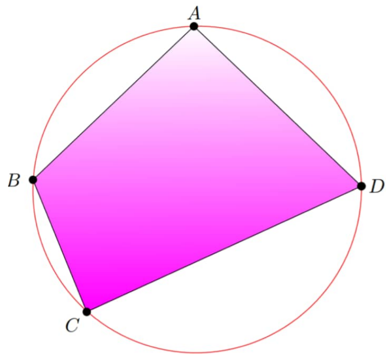
A seguir apresentamos duas condições para que um quadrilátero seja inscritível [5].

Teorema 2.3. *Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível se, e só se, uma das condições a seguir for satisfeita:*

(a) $\hat{A} + \hat{C} = 180°$

(b) $\angle BAC = \angle BDC$

Figura 2.5: Quadrilátero inscritível



Demonstração. Provaremos primeiro o item (a). Suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero inscritível.

Pelo teorema do ângulo inscrito

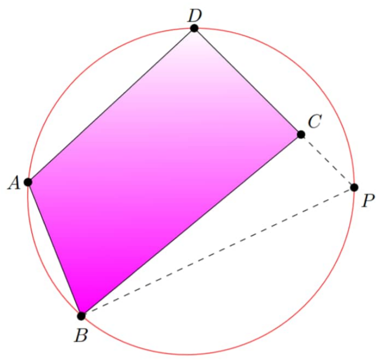
$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{\widehat{BCD}}{2}+\frac{\widehat{BAD}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

De modo análogo, $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$. Portanto, os ângulos opostos do quadrilátero são suplementares.

Suponha $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$. Consideremos a circunferência que passa pelos pontos A, B e D. Queremos provar que o ponto C também pertence a esta circunferência. Por absurdo, suponha que isso não acontece, o que nos leva a considerar dois casos:

1° Caso: C é interior à circunferência, conforme a figura 2.6:

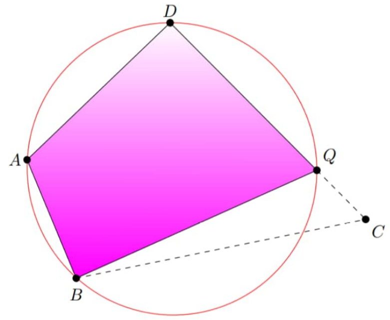
Figura 2.6: Quadrilátero $ABCD$ não inscritível



Prolongando o lado CD, este intercepta a circunferência no ponto P, logo $ABPD$ é inscritível, ou seja, $\hat{A}+\hat{P}=180^\circ$. Note que o $\angle DCB$ é externo ao triângulo CPB. Então, pelo teorema do ângulo externo $\angle DCB = \angle CPB + \angle PBC$. Dessa forma $\angle DCB > \angle CPB$ e $\hat{A} + \hat{C} = 180°$. Como $\hat{A} + \hat{P} = 180°$, concluímos que $\hat{C} = \hat{P}$ absurdo. Portanto, o ponto C não é interior à circunferência.

2° Caso: C é exterior à circunferência.

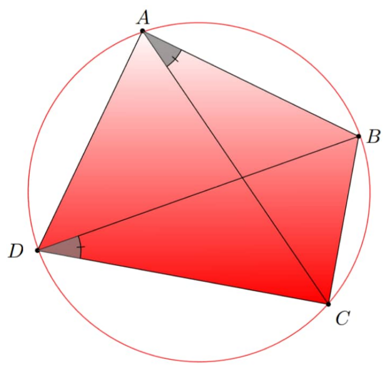
Figura 2.7: Quadrilátero $ABCD$ com vértice C exterior à circunferência.



Neste caso, CD intersepta a circunferência no ponto Q. Dessa forma, o quadrilátero $ABQD$ é inscritível, ou seja, $\hat{A} + \hat{Q} = 180°$. Sendo $\angle BQD$ ângulo externo ao triângulo BCQ, pelo teorema do ângulo externo, $\angle BQD = \angle CBQ + \angle BCQ$. Ou seja, $\angle BQD > \angle BCQ$. Por outro lado , $\hat{A} + \hat{C} = 180°$. Logo, $\hat{C} = \hat{Q}$, o que é absurdo. Portanto, o ponto C não é externo à circunferência. Se C não é interior e nem exterior à circunferência, concluímos que C pertence à circunferência, ou seja, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

Provaremos agora o item (b). Considere $ABCD$ um quadrilátero inscritível como indica a figura 2.8. Então pelo teorema do ângulo inscrito temos, $\angle CDB = \angle CAB = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2}$

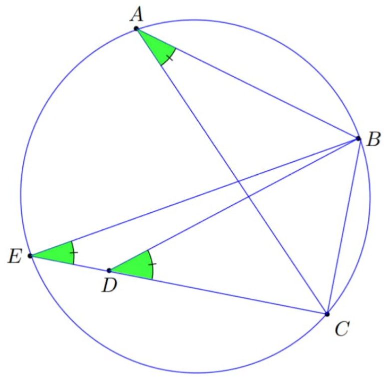
Figura 2.8: Quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD



Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\angle CDB = \angle CAB$. Suponha, por absurdo que

$ABCD$ não é inscritível. Seja E a intersecção do prolongamento do segmento CD com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC, como indica a figura 2.9:

Figura 2.9: Quadrilátero $ABCD$ não inscritível com D interior à circunferência



Assim, $\angle CDB = \angle CAB = \angle CEB$, o que é absurdo pelo teorema de medida de ângulo inscrito e ângulo excêntrico interno. De maneira análoga podemos demonstrar que o ponto D não pode ser externo. Logo o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

$\square$

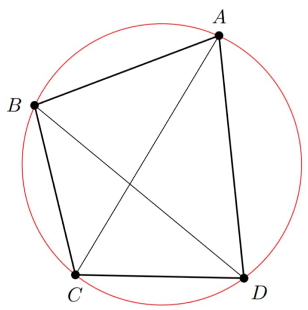
2.3.1 Ptolomeu

Claudio Ptolomeu viveu em torno de E.C. Seu principal trabalho, o *Almagesto*, permite datar aproximadamente sua vida, pois nele Ptolomeu se refere a observações que fez de efemérides astronômicas, cujas datas conhecemos. O nome grego original desta obra é *A coleção matemática*, ou seja, *A sintaxe matemática*, que foi traduzido pelos árabes como *Megale sintaxis*, *Megisto* e por fim *Almagesto*. O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do Sistema Solar, supondo que a Terra está em seu centro. Ptolomeu desenvolveu a trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro livro de sua obra. O capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). Ptolomeu usou sua tabela de cordas para desenvolver vários problemas, como calcular o comprimento de uma sombra, bem como para tratar vários outros problemas de astronomia. Com as técnicas expostas em seu livro, Ptolomeu resolve qualquer triângulo, decompondo-o convenientemente em triângulos retângulos. A exposição da trigonometria contida no *Almagesto* foi padrão, até ao renascimento. [12].

Teorema 2.4 (Ptolomeu)**.** *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$, e diagonais $AC = p$ e $BD = q$. Então,*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Isto é, o produto dos comprimentos das diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos.

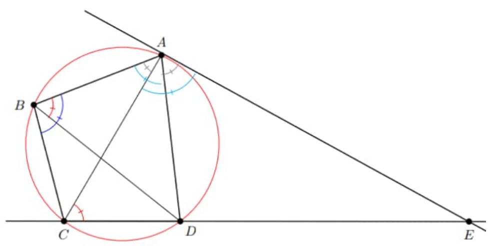


Demonstração. Vamos olhar $\angle BAC$, agora traçamos uma reta suporte ao lado DC e tomamos um ponto E nesta reta, de forma que $\angle BAC = \angle DAE$. Já que o $ABCD$ é inscritível, $\angle CBA = \angle ADE$ então pelo caso de semelhança A.A,

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE$$

Desse modo:

Figura 2.10: Quadrilátero inscrito com reta suporte ao lado DC.



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow AB \cdot DE = AD \cdot BC \tag{2.4}$$

Veja que $\angle ABD = \angle ACD$, pois ambos subtendem o mesmo arco AD. Podemos ver que $\angle BAD = \angle CAE$. Logo $\Delta ABD \sim \Delta ACE$, assim: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{AD}{AE}$, portanto, $AC \cdot BD = AB \cdot CE$. Temos que $CE = CD + DE$, substituindo CE temos:

$$AC \cdot BD = AB \cdot (CD + DE)$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AB \cdot DE$$

Como temos de (2.4) que $AB \cdot DE = AD \cdot BC$. Logo,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

□

2.3.2 Hiparco

Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.E.C. Como no caso de muitos matemáticos gregos, pouco sabemos sobre sua vida. A maior parte que conhecemos sobre ela é devida a Ptolomeu, o qual cita vários resultados de Hiparco sobre trigonometria e astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos. Hiparco tem sido considerado como o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas. Temos notícia da tabela de Hiparco devido a fontes indiretas, sobretudo ao *Almagesto* de Ptolomeu. é provável que a divisão do círculo em 360 partes tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco. Ele provavelmente seguiu a ideia do matemático grego Hipsiclo, o qual por sua vez tinha dividido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônia. [12].

A seguir apresentamos o Teorema de Hiparco, para que nos próximos capítulos possamos utilizá-los em algumas demonstrações.

Teorema 2.5 (Hiparco)**.** *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível de lados $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$, e diagonais $AC = p$ e $BD = q$. Então,*

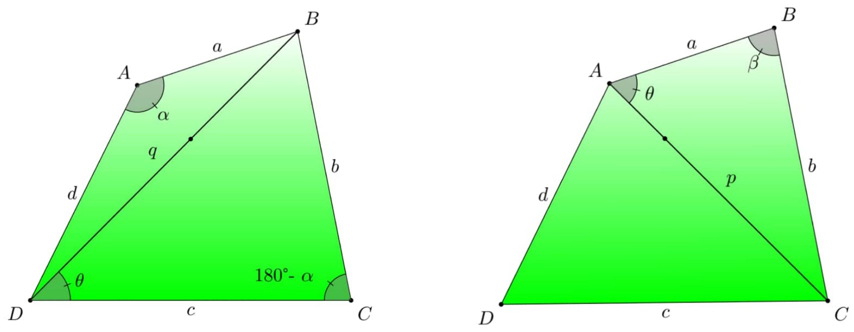
$$\frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Demonstração. Como o quadrilátero é inscritível, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ e $\angle BAC = \angle BDC = \theta$. Sejam $\alpha = \angle BAD$ e $\beta = \angle ABC$. Primeiramente, vamos utilizar a lei dos senos para provar a razão:

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)} \tag{2.5}$$

De acordo com as figuras 2.11 temos, respectivamente:

Figura 2.11: Quadriláteros de diagonais $BD = q$ e $AC = p$



((a)) figura ((b)) figura

$$\frac{p}{\text{sen}(\beta)} = \frac{b}{\text{sen}(\theta)} \quad \text{e} \quad \frac{q}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\theta)}$$

Assim,

$$\frac{p}{\text{sen}(\beta)} = \frac{q}{\text{sen}(\alpha)} \iff \frac{p}{q} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)} \tag{2.6}$$

Agora utilizamos a fórmula do seno para a área de um triângulo para determinar a área do quadrilátero $ABCD$ de duas maneiras distintas para mostrar a identidade:

$$\frac{(ad+bc)}{(ab+cd)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)}$$

A área do quadrilátero $ABCD$ é dada por:

$$(ABCD) = (ABD) + (BCD) = \frac{ad\text{sen}(\alpha)}{2} + \frac{bc\text{sen}(\alpha)}{2}$$

ou

$$(ABCD) = (ABC) + (CDA) = \frac{ab\text{sen}(\beta)}{2} + \frac{cd\text{sen}(\beta)}{2}$$

Logo,

$$(ABD) + (BCD) = (ABC) + (CDA)$$

Daí,

$$(ad+bc)\text{sen}(\alpha) = (ab+cd)\text{sen}(\beta) \Leftrightarrow \frac{ad+bc}{ab+cd} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)} \tag{2.7}$$

As equações (2.6) e (2.7) implicam o resultado desejado. □

Capítulo 3

Quadriláteros Bicêntricos

Quando dizemos que um quadrilátero é bicêntrico, isso quer dizer que é um quadrilátero a um só tempo inscritível e circunscritível, neste capítulo apresentaremos as condições para que um quadrilátero seja bicêntrico, e demonstraremos algumas fórmulas para calcular sua área. Também iremos apresentar fórmulas para o cálculo das bimedianas e da corda tangente.

3.1 Condições para um quadrilátero circunscrito ser inscrito

Para que seja bicêntrico, o quadrilátero deve ser:

a) Inscritível, o que significa que seus vértices devem pertencer a uma mesma circunferência.

b) Circunscritível, quando os quatro lados são tangentes a uma mesma circunferência.

De acordo com o item (a) notamos que paralelogramos genéricos, losangos (com exceção dos quadrados) e trapézios (com exceção dos isósceles) não podem ser bicêntricos, pois esses possuem ângulos suplementares que são adjacentes, não opostos.

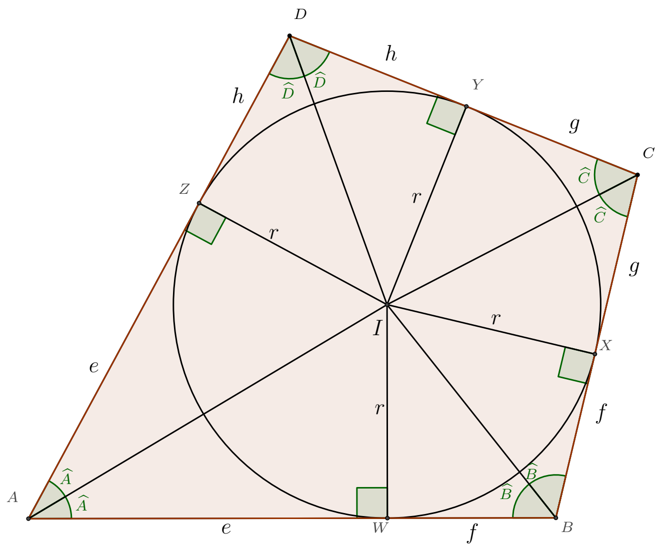
Já pelo item (b) notamos que paralelogramos genéricos e retângulos (com exceção dos quadrados) não podem ser bicêntricos, uma vez que possuem somas iguais de pares de lados, mas eles são adjacentes, e não opostos. Vamos apresentar então, quais as condições necessárias para verificar se um quadrilátero convexo é bicêntrico.

Uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero circunscrito $ABCD$ seja também inscrito é dada por uma proporção entre os segmentos das tangentes, traçadas ao círculo inscrito a partir de seus quatro vértices [13]

Teorema 3.1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito. Então, $ABCD$ é inscrito se, e somente se,*

$$\frac{AW}{WB} = \frac{DY}{YC} \quad ou \quad \frac{e}{f} = \frac{h}{g} \tag{3.1}$$

Figura 3.1: Quadrilátero circunscrito com comprimentos tangentes e, f, g, h.



Fonte: artigo [14], pág:50.

Demonstração. Dado o quadrilátero convexo $ABCD$ na figura 3.1, sejam $2\hat{A}, 2\hat{B}, 2\hat{C}$ e $2\hat{D}$ seus ângulos internos. Isso permite que se escreva $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 180°$ sendo $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ ângulos agudos. Vamos supor que $ABCD$ seja um quadrilátero inscrito, então

$$\hat{A}+\hat{C} = \hat{B}+\hat{D} = 90°$$

E sendo ângulos complementares e agudos temos que:

$$\text{sen}\hat{A} = \cos\hat{C}, \ \text{sen}\hat{C} = \cos\hat{A}, \ \text{sen}\hat{B} = \cos\hat{D}, \ \text{sen}\hat{D} = \cos\hat{B}$$

Ou seja,

$$\tan\hat{A}\cdot\tan\hat{C} = \tan\hat{B}\cdot\tan\hat{D} = 1 \Rightarrow \frac{r}{e}\cdot\frac{r}{g} = \frac{r}{f}\cdot\frac{r}{h} = 1 \Rightarrow \frac{e}{f} = \frac{h}{g}$$

Por outro lado, se $ABCD$ não é cíclico, uma das somas das metades dos ângulos opostos de $ABCD$, $(\hat{A}+\hat{C})$ ou $(\hat{B}+\hat{D})$, é maior que $90°$ e a outra é menor, pode-se supor que $\hat{A}+\hat{C} > 90°$ e $\hat{B}+\hat{D} < 90°$. E pelo fato dos pares de ângulos $(\hat{A},\hat{C})$ e $(\hat{B},\hat{D})$ serem agudos

$$0 > \tan(\hat{A}+\hat{C}) = \frac{\tan\hat{A}+\tan\hat{C}}{1-\tan\hat{A}\cdot\tan\hat{C}}$$
$$0 < \tan(\hat{B}+\hat{D}) = \frac{\tan\hat{B}+\tan\hat{D}}{1-\tan\hat{B}\cdot\tan\hat{D}}$$

Assim,

$$\tan\hat{A}\cdot\tan\hat{C} > 1 > \tan\hat{B}\cdot\tan\hat{D}$$

ou seja, $\tan\hat{A}\cdot\tan\hat{C} \neq \tan\hat{B}\cdot\tan\hat{D}$. Portanto $\dfrac{e}{f} \neq \dfrac{h}{g}$. Isso prova que (3.1) é condição necessária e suficiente para que o quadrilátero circunscrito seja também inscrito. □

Existe uma outra propriedade que nos permite verificar se um quadrilátero circunscrito é também inscrito, ou seja, um quadrilátero bicêntrico [7].

Teorema 3.2. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscrito com diagonais $AC = p$ e $BD = q$. Sejam e, f, g, h os comprimentos dos segmentos tangentes. O quadrilátero $ABCD$ é inscrito se, e somente se,*

$$\frac{p}{q} = \frac{e+g}{f+h}$$

Demonstração. Suponhamos que $ABCD$ seja também cíclico. Denote por k a proporção dada em (3.1), então

$$e = kf \quad \text{e} \quad h = kg$$

De acordo com a figura 3.1 e o Teorema 2.5 (Teorema de Hiparco), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \frac{ad+bc}{ab+cd} \\
&= \frac{(e+f)\cdot(h+e)+(f+g)\cdot(g+h)}{(e+f)\cdot(f+g)+(g+h)\cdot(h+e)} \\
&= \frac{(kf+f)\cdot(kg+kf)+(f+g).(g+kg)}{(kf+f)\cdot(f+g)+(g+kg)\cdot(kg+kf)} \\
&= \frac{fk\cdot(k+1)\cdot(f+g)+(f+g)\cdot(k+1)\cdot g}{f\cdot(k+1)\cdot(f+g)+gk\cdot(k+1)\cdot(f+g)} \\
&= \frac{(k+1)\cdot(f+g)\cdot(kf+g)}{(k+1)\cdot(f+g)\cdot(f+kg)} \\
&= \frac{(kf+g)}{(f+kg)} = \frac{e+g}{f+h}
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $ABCD$ seja um quadrilátero circunscrito, onde seja válido a relação

$$\frac{p}{q} = \frac{e+g}{f+h}$$

Vamos verificar a proporção $\frac{e}{f} = \frac{h}{g}$ e concluir do Teorema 3.1 que $ABCD$ é inscrito. Recordemos que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 180°$, sendo $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ ângulos agudos. Como $\tan(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}) = 0$ vale a igualdade

$$\tan(\hat{A}+\hat{B}) + \tan(\hat{C}+\hat{D}) = 0 \tag{3.2}$$

pois

$$\tan(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}) = \frac{\tan(\hat{A}+\hat{B}) + \tan(\hat{C}+\hat{D})}{1-\tan(\hat{A}+\hat{B}).\tan(\hat{C}+\hat{D})}$$

Das expressões para encontrar a tangente da soma entre arcos e de (3.2)

$$\tan(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{\tan(\hat{A}) + \tan(\hat{B})}{1-\tan(\hat{A})+\tan(\hat{B})} \quad \text{e} \quad \tan(\hat{C}+\hat{D}) = \frac{\tan(\hat{C}) + \tan(\hat{D})}{1-\tan(\hat{C})+\tan(\hat{D})}$$

obteremos

$$(\tan\hat{A}+\tan\hat{B})\cdot(1-\tan\hat{C}\cdot\tan\hat{D}) + (\tan\hat{C}+\tan\hat{D})\cdot(1-\tan\hat{A}\cdot\tan\hat{B}) = 0 \tag{3.3}$$

De acordo com a figura e calculando a tangente dos ângulos temos:

$$\tan\hat{A} = \frac{r}{e},\ \tan\hat{B} = \frac{r}{f},\ \tan\hat{C} = \frac{r}{g},\ \tan\hat{D} = \frac{r}{h} \tag{3.4}$$

Substituindo 3.4 em 3.3 tem-se,

$$\frac{r}{e}+\frac{r}{f}+\frac{r}{g}+\frac{r}{h} = \frac{r}{e}\cdot\frac{r}{f}\cdot\frac{r}{g}+\frac{r}{e}\cdot\frac{r}{f}\cdot\frac{r}{h}+\frac{r}{e}\cdot\frac{r}{g}\cdot\frac{r}{h}+\frac{r}{f}\cdot\frac{r}{g}\cdot\frac{r}{h}$$

Daí,

$$r^2 = \frac{e\cdot f\cdot g+e\cdot f\cdot h+e\cdot g\cdot h+f\cdot g\cdot h}{e+f+g+h} \tag{3.5}$$

Vamos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo ABD para obtermos q:

$$q^2 = (e+f)^2+(e+h)^2-2(e+f)\cdot(e+h)\cdot\cos 2\hat{A}$$

Pela fórmula para o cosseno de um arco duplo e desde que $\tan\hat{A} = \dfrac{r}{e}$ tem-se

$$\cos 2\hat{A} = \frac{1-\tan^2\hat{A}}{1+\tan^2\hat{A}} = \frac{e^2-r^2}{e^2+r^2}$$

Logo,

$$q^2 = (e+f)^2+(e+h)^2-2\cdot(e+f)\cdot(e+h)\cdot\frac{e^2-r^2}{e^2+r^2}$$

Substituindo (3.5), teremos:

$$
\begin{aligned}
q^2 &= (e+f)^2 + (e+h)^2 - 2\cdot(e+f)\cdot(e+h)\cdot\frac{e^2\cdot(e+f+g+h) - (e\cdot f\cdot g + e\cdot f\cdot h + e\cdot g\cdot h + f\cdot g\cdot h)}{(e+f)\cdot(e+g)\cdot(e+h)}\\
&= \frac{(e+g)\cdot(f^2+h^2) + 2\cdot e\cdot g\cdot(f+h) + 2\cdot(e\cdot f\cdot g + e\cdot f\cdot h + e\cdot g\cdot h + f\cdot g\cdot h)}{e+g}\\
&= \frac{(e+g)\cdot(f+h)^2 + 4(e\cdot f\cdot g + e\cdot g\cdot h)}{e+g}\\
&= \frac{f+h}{e+g}\cdot[(e+g)(f+h) + 4eg]
\end{aligned}
$$

De maneira análoga podemos encontrar a outra diagonal:

$$p^2 = \frac{e+g}{f+h}\cdot[(e+g)(f+h) + 4fh]$$

Então,

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{(e+g)^2}{(f+h)^2}\cdot\frac{(e+g)(f+h) + 4fh}{(e+g)(f+h) + 4eg} \tag{3.6}$$

Por hipótese,

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{(e+g)^2}{(f+h)^2}$$

então a equação (3.6) implica que

$$fh = eg$$

□

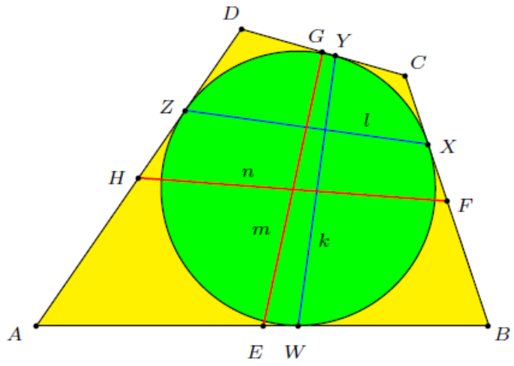
3.2 Cordas e bimedianas

Já vimos que um quadrilátero circunscrito é um quadrilátero com um círculo inscrito, ou seja, um círculo tangente aos quatro lados. Chamaremos a distância dos quatro vértices aos pontos de tangencia de comprimentos tangentes.

Definição 3.1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero circunscritível.*

1) Uma corda é o segmento de reta que liga os pontos em dois lados opostos onde o círculo é tangente a esses lados de $ABCD$.

Figura 3.2: Quadrilátero circunscrito com as cordas tangentes e bimedianas.



2) Uma bimediana de ABCD é o segmento de reta que liga os pontos médios de dois lados opostos.

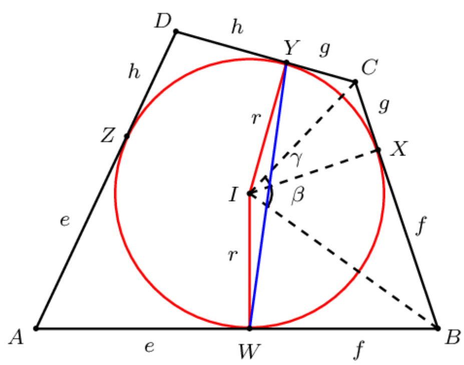
Para que possamos demonstrar algumas das propriedades (Teorema 4.1, Cap. 4) para que um quadrilátero circunscritível seja uma Pipa, iremos nesta seção, apresentar uma fórmula para o comprimento das cordas tangentes em termos dos comprimentos tangentes e, em seguida, uma fórmula para determinar as bimedianas [8].

Teorema 3.3. *Os comprimentos das cordas de tangência em um quadrilátero circunscrito são respectivamente:*

$$k = \frac{2(efg + fgh + ghe + hef)}{\sqrt{(e+f)(g+h)(e+g)(f+h)}} \quad e \quad l = \frac{2(efg + fgh + ghe + hef)}{\sqrt{(e+f)(f+g)(e+g)(f+h)}}$$

Demonstração. Seja I o centro da circunferência, vamos tomar os ângulos β e γ definidos na figura 3.3.

Figura 3.3: Quadrilátero circunscrito com centro da circunferência I



Fonte: artigo [8], pg:120.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo WYI para determinar $WY = k$ obtemos:

$$k^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(2\beta + 2\gamma) = 2r^2[1 - \cos(2\beta + 2\gamma)]$$

Usando a fórmula de adição de arcos tem-se:

$$\frac{k^2}{2r^2} = 1 - \cos(2\beta)\cdot\cos(2\gamma) + \operatorname{sen}(2\beta)\cdot\operatorname{sen}(2\gamma). \tag{3.7}$$

As fórmulas de ângulo duplo fornecem as identidades:

$$\cos(2\beta) = \frac{1 - tg^2(\beta)}{1 + tg^2(\beta)} = \frac{r^2 - r^2 tg^2(\beta)}{r^2 + r^2 tg^2(\beta)} = \frac{r^2 - f^2}{r^2 + f^2} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{sen}(2\beta) = \frac{2tg(\beta)}{1 + tg^2(\beta)} = \frac{2rf}{r^2 + f^2} \tag{3.9}$$

De forma semelhante podemos determinar as fórmulas

$$\cos(2\gamma) = \frac{r^2 - g^2}{r^2 + g^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\gamma) = \frac{2rg}{r^2 + g^2} \tag{3.10}$$

a única diferença é que utilizamos g em vez de f.

Substituindo (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.7), obtemos:

$$\frac{k^2}{2r^2} = 1 - \frac{r^2 - f^2}{r^2 + f^2}\cdot\frac{r^2 - g^2}{r^2 + g^2} + \frac{2rf}{r^2 + f^2}\cdot\frac{2rg}{r^2 + g^2} = \frac{2r^2(f+g)^2}{(r^2 + f^2)\cdot(r^2 + g^2)}$$

ou seja,

$$k^2 = (2r^2)^2\cdot\frac{(f+g)^2}{(r^2 + f^2)\cdot(r^2 + g^2)} \tag{3.11}$$

Trabalhando com $(r^2 + f^2)$, onde $r = \sqrt{\dfrac{efg + fgh + ghe + hef}{e + f + g + h}}$ temos:

$$\begin{aligned}
r^2 + f^2 &= \frac{efg + fgh + ghe + hef + f^2(e + f + g + h)}{e + f + g + h} \\
&= \frac{e(fg + fh + gh + f^2) + f(gh + f^2 + fg + fh)}{e + f + g + h} \\
&= \frac{(e + f)[g(f + h) + f(h + f)]}{e + f + g + h} \\
&= \frac{(e + f)(f + g)(f + h)}{e + f + g + h}
\end{aligned}$$

Podemos calcular $(r^2 + g^2)$ da mesma maneira. Assim teremos:

$$r^2 + g^2 = \frac{(e+g)(f+g)(g+h)}{e+f+g+h}$$

Substituindo (r^2+f^2) e (r^2+g^2) em (3.11), temos:

$$k^2 = (2r^2)^2 \cdot \frac{(f+g)^2(e+f+g+h)^2}{(e+f)(f+g)(f+h)(e+g)(f+g)(g+h)}$$

$$k = 2r^2 \cdot \frac{e+f+g+h}{\sqrt{(e+f)(f+h)(h+g)(g+e)}}$$

Usando $r = \sqrt{\dfrac{efg+fgh+ghe+hef}{e+f+g+h}}$ temos:

$$k = \frac{2(efg+fgh+ghe+hef)}{\sqrt{(e+f)(f+h)(h+g)(g+e)}}$$

De maneira análoga podemos demonstrar a fórmula para l. Assim:

$$l = \frac{2(efg+fgh+ghe+hef)}{\sqrt{(e+h)(f+g)(e+g)(f+h)}}$$

□

Teorema 3.4. *Seja $ABCD$ um quadrilátero, em que $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p$ e $DB = q$. A medida das bimedianas são respectivamente:*

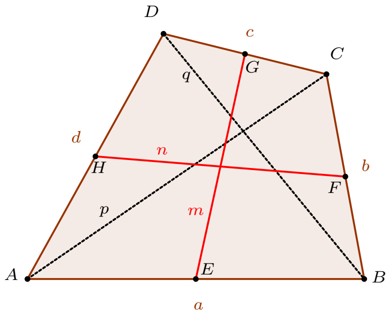
$$n = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2+a^2-b^2+c^2-d^2} \quad e \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-a^2+b^2-c^2+d^2}$$

Demonstração. Vamos usar a relação de Stewart (Teorema 3.12), porém, neste caso, como estaremos utilizando as medianas, a ceviana dividirá o lado em segmentos congruentes, ou seja, $x = y = \frac{a}{2}$ e a relação de Stewart torna-se:

$$z^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \tag{3.12}$$

Considerando o triângulo $\triangle BHC$ na figura 3.4 e aplicando a fórmula 3.12

Figura 3.4: Quadrilátero de bimedianas FH e EG



$$n^2 = \frac{2(HC^2 + HB^2) - b^2}{4} \tag{3.13}$$

Considerando o triângulo $\triangle ACD$ na figura 3.4 e aplicando a fórmula 3.12, temos:

$$HC^2 = \frac{2(p^2 + c^2) - d^2}{4} \tag{3.14}$$

Considerando o triângulo $\triangle ABD$ na figura 3.4 e aplicando a fórmula 3.12, temos:

$$HB^2 = \frac{2(q^2 + a^2) - d^2}{4} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) e (3.14) em (3.13), temos:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{4}\left[2\left(\frac{2(p^2 + c^2 + q^2 + a^2) - 2d^2}{4}\right) - b^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[4\left(\frac{p^2 + c^2 + q^2 + a^2 - d^2}{4}\right) - b^2\right] \\ &= \frac{1}{4}(p^2 + c^2 + q^2 + a^2 - d^2 - b^2) \end{aligned}$$

ou seja,

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + c^2 + q^2 + a^2 - d^2 - b^2}$$

Vamos determinar a outra bimediana. Considerando o triângulo $\triangle ABG$ na figura 3.4 e aplicando a fórmula 3.12, temos:

$$m^2 = \frac{2(GB^2 + GA^2) - a^2}{4} \tag{3.16}$$

Considerando o triângulo $\triangle BCD$ na figura 3.4 e aplicando a fórmula 3.12, temos:

$$GB^2 = \frac{2(b^2 + q^2) - c^2}{4} \tag{3.17}$$

Considerando o triângulo $\triangle ACD$ na figura 3.4 e aplicando a fórmula 3.12, temos:

$$GA^2 = \frac{2(p^2 + d^2) - c^2}{4} \tag{3.18}$$

Substituindo (3.18) e (3.17) em (3.16), temos:

$$
\begin{aligned}
m^2 &= \frac{1}{4}\left[2\left(\frac{2(b^2+q^2+p^2+d^2)-2c^2}{4}\right)-a^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4\left(\frac{b^2+q^2+p^2+d^2-c^2}{4}\right)-a^2\right] \\
&= \frac{1}{4}(b^2+q^2+p^2+d^2-c^2-a^2)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+q^2+p^2+d^2-c^2-a^2}$$

□

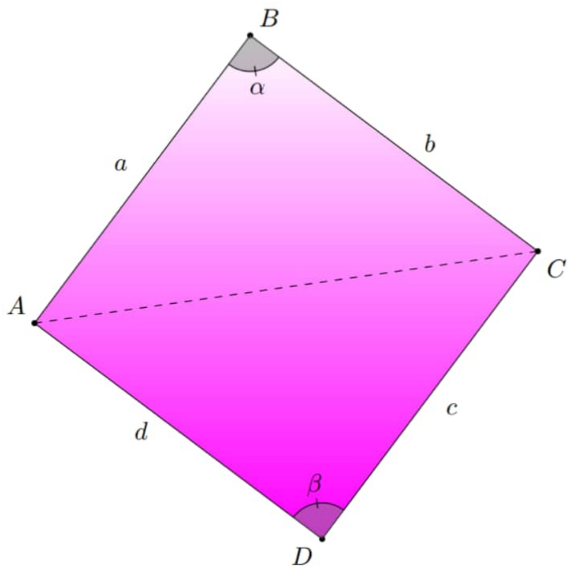
3.3 Sobre a área de quadriláteros inscritíveis

A fórmula para área de quadriláteros convexos quaisquer (Teorema 3.5), teve como centralidade o trabalho de Brahmagupta. O matemático indiano Brahmagupta (628 dC) foi o primeiro matemático a fornecer a fórmula para a área de um quadrilátero inscritível. Atribui-se ao matemático alemão Carl Anton Bretschneider (1808-1878), que publicou em 1842, uma fórmula para área de quadriláteros quaisquer em termos dos comprimentos dos lados, semiperímetro e de um par de ângulos opostos [4]. Para uma demonstração da fórmula de Bretschneider de forma mais clara e organizada veja a referência [2].

Teorema 3.5 (Fórmula de Bretschneider). *Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer com $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$ e dois ângulos internos opostos entre si de medidas α e β, então sua área pode ser calculada por*

$$(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Figura 3.5: Quadrilátero de diagonal AC



Demonstração. Considerando a diagonal AC na figura 3.5 temos $(ABCD) = (ABC) + (ACD)$. Então,

$$4(ABCD) = 2ab\text{sen}(\alpha) + 2cd\text{sen}(\beta) \tag{3.19}$$

Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos ABC e ACD, obteremos

$$2ab\cos(\alpha) - 2cd\cos(\beta) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \tag{3.20}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados de (3.19), e tendo em vista (3.20), produzimos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
16(ABCD)^2 &= 4a^2b^2\text{sen}^2(\alpha) + 4c^2d^2\text{sen}^2(\beta) + 8abcd\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\\
&= 4a^2b^2 - 4a^2b^2\cos^2(\alpha) + 4c^2d^2 - 4c^2b^2\cos^2(\beta) + 8abcd\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\\
&= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (2ab\cos(\alpha) - 2cb\cos(\beta))^2 - 8abcd\big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\big)\\
&= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\alpha+\beta)\\
&= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd\big(1 + \cos(\alpha+\beta)\big)\\
&= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = G \cdot H$$

sendo

$$G = (2ab + 2cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (a+b)^2 - (c-d)^2$$

e

$$H = (2ab + 2cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = (c+d)^2 - (a-b)^2$$

Prosseguindo, ainda temos

$$\begin{aligned}(2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 &= \left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]\\ &= \left[(a+b+c-d)(a+b-c+d)\right]\left[(a-b+c+d)(-a+b+c+d)\right]\\ &= (2s-2d)(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)\\ &= 16(s-d)(s-c)(s-b)(s-a)\end{aligned}$$

com $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ semiperímetro do quadrilátero. Finalmente, após substituição

$$(ABCD)^2 = (s-d)(s-c)(s-b)(s-a) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

e a demonstração está completa ao aplicarmos a raiz quadrada. $\square$

Observação 3.5.1. *Usando as notações do Teorema 3.5 a desigualdade*

$$(ABCD) \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

fornece um limitante superior para a área desse quadrilátero. A pergunta que surge é: sob que condições a igualdade ocorre? Ou ainda, se o comprimento dos lados do quadrilátero são dados, em que condições a área é máxima?

Considerando a observação anterior e o Teorema 3.5, respondemos.

Questão 1: Se o comprimento dos lados do quadrilátero são dados, quando a área é máxima? Nas notações do Teorema 3.5, a área máxima é obtida quando $\cos\left(\frac{B+D}{2}\right) = 0$, isto é, quando $\hat{B} + \hat{D} = 180°$. Portanto, a área é máxima quando o quadrilátero for inscritível (cíclico)

Questão 2: Suponha que você deseja construir um quadrilátero $ABCD$ cujos lados tenham a mesma medida, isto é, digamos que $AB = BC = CD = DA = a$, qual quadrilátero construir de sorte a obter a maior área possível? A resposta é um quadrado.

3.3.1 Fórmula de Brahmagupta

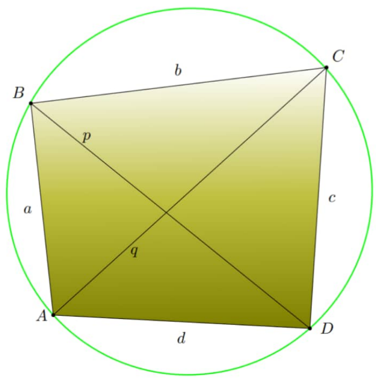
Brahmagupta faleceu na Índia, em 670. Entre suas descobertas está a generalização natural da fórmula de Heron para os quadriláteros cíclicos, tão importante que é considerada como a mais notável descoberta da geometria Hindu.

Teorema 3.6 (Brahmagupta)**.** *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DA = d$. Então a área é dada por:*

$$(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

sendo s seu semiperímetro.

Figura 3.6: Quadrilátero inscrito de diagonais p e q.



Demonstração. Por hipótese $ABCD$ na figura 3.6 é inscritível, logo $pq = ac + bd$ (Teorema de Ptolomeu). Pela fórmula de Coolidge (Teorema 1.4)

$$\begin{aligned} 16(ABCD)^2 &= 4p^2q^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\ &= (2ac + 2bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \end{aligned}$$

Da prova do Teorema 3.5 vimos a identidade

$$(2ac + 2bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

substituindo a demonstração da fórmula está completa.

Cabe aqui uma demonstração mais simples. Sendo $ABCD$ inscritível seus pares de ângulos opostos são suplementares e do Teorema 3.5 teremos $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, ou seja, a fórmula de Brahmagupta é um caso particular da Fórmula de Bretschneider. $\square$

As fórmulas são dadas como exercícios no livro texto do curso de geometria [5] do Profmat. Suas demonstrações têm como objetivo servir de material de apoio para os futuros alunos do curso.

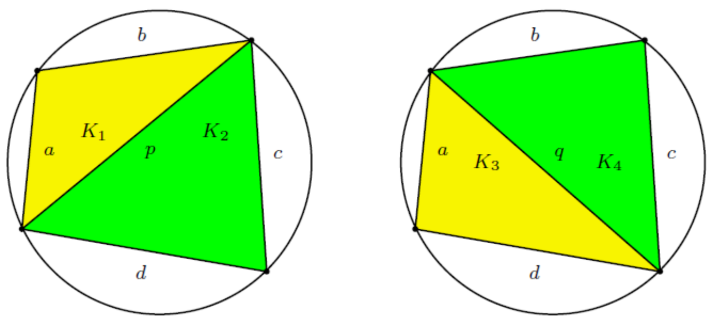
Teorema 3.7. *Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível, se $a, b, c,$ e d denotam os comprimentos dos lados, p e q os comprimentos das diagonais, R o raio do círculo circunscrito, e $(ABCD)$ a área do quadrilátero, então:*

$$p = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\ ,\ q = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

$$(ABCD) = \frac{1}{4R}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos provar a fórmula para a área do quadrilátero inscrito.

Figura 3.7: Quadriláteros inscritos.



Fonte: artigo [1], pg:148.

Pelo Teorema 1.2 e a partir das figuras 3.7 podemos calcular a área do quadrilátero de duas maneiras distintas

$$(ABCD) = K_1 + K_2 = \frac{pab}{4R} + \frac{pcd}{4R} = \frac{p(ab+cd)}{4R}$$

$$(ABCD) = K_3 + K_4 = \frac{qad}{4R} + \frac{qbc}{4R} = \frac{q(ad+bc)}{4R}$$

Portanto,

$$(ABCD)^2 = \frac{p(ab+cd)}{4R}\cdot\frac{q(ad+bc)}{4R} = \frac{pq(ab+cd)(ad+bc)}{(4R)^2}$$

Substituindo $pq = ac+bd$, ($ABCD$ é inscritível) a demonstração da área fica completa.

Vamos determinar as fórmulas para as diagonais. Pelos teoremas de Ptolomeu e Hiparco (veja Teoremas 2.4, 2.5)

$$pq = ac + bd \quad \text{e} \quad \frac{p}{q} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Sendo assim temos:

$$p^2 = pq \cdot \frac{p}{q} = (ac + bd) \cdot \frac{(ad + bc)}{(ab + cd)} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

logo

$$p = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

Da mesma forma,

$$q^2 = pq \cdot \frac{q}{p} = (ac + bd) \cdot \frac{(ad + cd)}{(ad + bc)} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$$

então

$$q = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

□

3.4 Área de quadriláteros bicêntricos

Um quadrilátero bicêntrico é um quadrilátero convexo simultaneamente inscritível (cíclico) e circunscritível (tangente). Para tal quadrilátero propomos apresentar fórmulas para determinar sua área [9].

Teorema 3.8. *A área do quadrilátero bicêntrico é igual a raiz quadrada do produto de seus lados.*

$$(ABCD) = \sqrt{abcd}$$

Demonstração. Seja $ABCD$ com lados $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$. Como o quadrilátero é inscritível, podemos usar a fórmula de Brahmagupta para calcular sua área, ou seja:

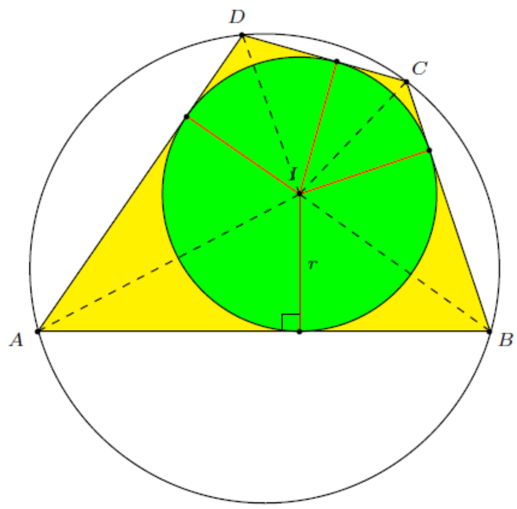
$$(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{3.21}$$

Em que s é seu semiperímetro. No entanto, $a + c = b + d$, pois $ABCD$ também é circunscritível. Seu semiperímetro pode ser calculado por: $s = \dfrac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d$. Desta maneira,

$$s - a = c, \ s - c = a, \ s - b = d, \ s - d = b$$

Substituindo em (3.21) a demonstração termina. □

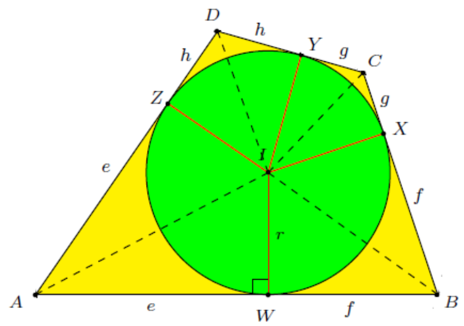
Figura 3.8: Quadrilátero bicêntrico com circunferência inscrita de raio r



Fonte: artigo [9], pg:159.

Lema 3.1. *A área do quadrilátero circunscritível $ABCD$ é dada por $(ABCD) = rs$, onde r é o raio da circunferência inscrita e s o semiperímetro.*

Figura 3.9: Quadrilátero bicêntrico com pontos de tangência W, X, Y, Z



Demonstração. O quadrilátero pode ser dividido em oito triângulos, como indica a figura 3.9, logo:

$$
\begin{aligned}
(ABCD) &= (AIW) + (WIB) + (BIX) + (XIC) + (CIY) + (YID) + (DIZ) \\
&= \frac{er}{2} + \frac{er}{2} + \frac{fr}{2} + \frac{fr}{2} + \frac{gr}{2} + \frac{gr}{2} + \frac{hr}{2} + \frac{hr}{2} \\
&= er + fr + gr + hr \\
&= r(e + f + g + h) = rs
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.9. *A área do quadrilátero bicêntrico é dada por*

$$(ABCD) = \sqrt{(e+f+g+h)\cdot(efg+fgh+ghe+hef)}$$

Demonstração. Vimos no Lema 3.1 que a área pode ser obtida utilizando a fórmula $(ABCD) = rs$, como $s = e+f+g+h$ e $r = \sqrt{\dfrac{efg+fgh+ghe+hef}{e+f+g+h}}$, após substituição obteremos:

$$\begin{aligned}(ABCD) &= \sqrt{\frac{efg+fgh+ghe+hef}{e+f+g+h}\cdot(e+f+g+h)}\\ &= \sqrt{\frac{(e+f+g+h)^2(efg+fgh+ghe+hef)}{e+f+g+h}}\\ &= \sqrt{(e+f+g+h)(efg+fgh+ghe+hef)}\end{aligned}$$

□

3.5 Exercícios Propostos

Problema 1 Determine o valor máximo da área de quadrilátero com lados $3,3,5,7$.

Resolução: A área de um quadrilátero qualquer é dada por:

$$(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Temos que $s = \frac{3+3+5+7}{2} = 9$, logo,

$$(ABCD) = \sqrt{6.6.4.2 - 3.3.5.7\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$(ABCD) = \sqrt{288 - 315.\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Temos o valor máximo quando $\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$. Assim,

$$(ABCD) = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

Problema 2 Em um quadrilátero $ABCD$ de lados 2,4,4,6 e área $8\sqrt{3}$. Demonstre que existe uma circunferência circunscrita no quadrilátero $ABCD$.

Resolução: A área de um quadrilátero qualquer é dada por:

$$(ABCD) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Assim,

$$8\sqrt{3} = \sqrt{6.4.4.2 - 2.4.4.6.\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$(8\sqrt{3})^2 = \left(\sqrt{192 - 192\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)^2$$

$$192 = 192 - 192\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$192\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

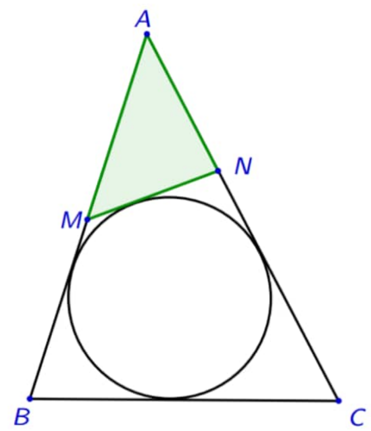
$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ$$

$$\alpha+\beta = 180^\circ$$

Logo o quadrilátero é inscritível, ou seja, possui uma circunferência circunscrita.

Problema 3 É dado o triângulo ABC. Os pontos M e N dos lados AB e AC, respectivamente são tais que o segmento MN é tangente a circunferência inscrita em ABC. Demonstre que o perímetro do triângulo AMN é constante.



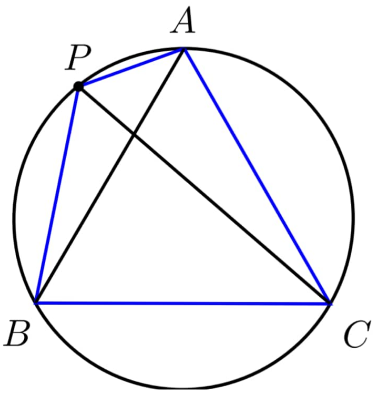
Resolução: Sejam $AB = c, BC = a, CA = b, AM = x, MN = y, NA = z$. Como $BCNM$ é circunscritível temos,

$$BC + NM = BM + CN \Rightarrow a + y = c - x + b - z.$$

Isto significa que $x + y + z = b + c - a$. O perímetro do triângulo AMN é constante.

Problema 4 Sejam ABC um triângulo equilátero e P um ponto sobre o arco menor $\widehat{AB}$ do círculo circunscrito a ABC, então: $PA + PB = PC$.

Resolução Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível $APBC$, obtemos:

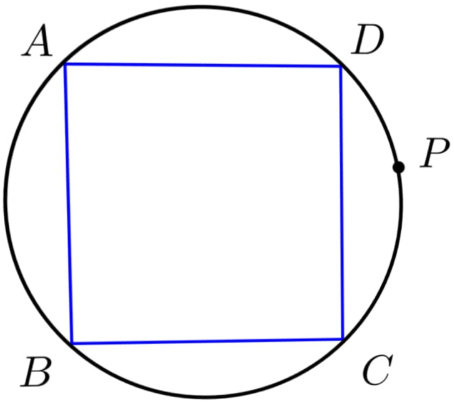


$$AB.PC = PA.BC + AC.PB$$

Denotando $AB = BC = AC = a$ e substituindo na igualdade acima, segue que:

$$a.PC = PA.a + a.PB \Rightarrow PC = PA + PB$$

Problema 5 Sejam $ABCD$ um quadrado e P um ponto sobre o círculo circunscrito a $ABCD$, situado sobre o arco menor $\widehat{CD}$.



Demonstre que o comprimento de pelo menos um dos segmentos AP, BP, CP é um número irracional.

Resolução Denotando $AB = BC = CD = AD = a$, obtemos $AC = BD = a\sqrt{2}$. Sem perda de generalidade podemos supor que $P \neq C, D$. Aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero inscritível $ABCP$, obtemos:

$$AC.BP = AP.BC + CP.AB \Rightarrow a\sqrt{2}.BP = AP.a + CP.a \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{AP + CP}{BP}.$$

Portanto, se as medidas dos segmentos AP, BP, CP fossem todas dadas por números racionais, então $\sqrt{2}$ seria um número racional, o que não é verdade. Logo, pelo menos uma dessas medidas é um número irracional.

Capítulo 4

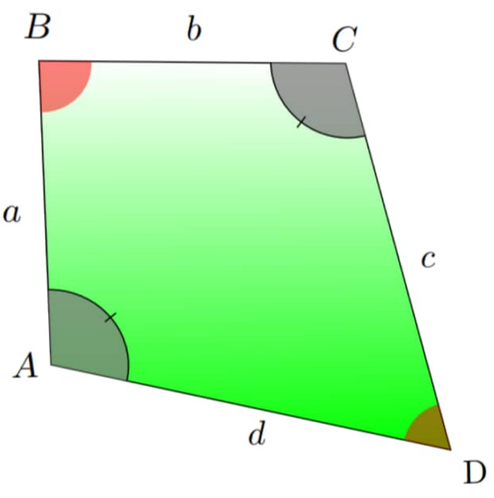
Quadrilátero Pipa

Ao ler a revista de matemática para professor-RPM, me chamou a atenção um artigo que abordava o quadrilátero pipa, nele os autores Jahn e Bongiovanni (2013) [3], relatam a pouca utilização do quadrilátero pipa no ensino, dando exemplos de conteúdos matemáticos que poderiam ser explorados utilizando esse quadrilátero.

Neste capítulo apresentaremos a definição e algumas propriedades deste quadrilátero.

Definição 4.1. *Um quadrilátero $ABCD$ é uma pipa se admite dois pares de lados consecutivos congruentes.*

Figura 4.1: Quadrilátero pipa.



Note que todo losango é uma pipa. Mas, nem toda pipa é um losango. Algumas propriedades imediatas do quadrilátero pipa são:

1) uma diagonal o divide em dois triângulos isósceles; a outra (eixo de simetria) divide em dois triângulos congruentes.

2) dois dos ângulos internos são iguais.

3) se a e b são os comprimentos dos lados não congruentes e θ é o ângulo entre esses lados, então a área é $ab\text{sen}(\theta)$.

4) é circunscritível, pois seus lados satisfazem a condição do Teorema de Pitot.

4.1 Condições para um quadrilátero circunscrito ser uma pipa

De acordo com a propriedade 4 citada sobre o quadrilátero pipa, temos que toda pipa é um quadrilátero circunscrito. Nesta seção iremos apresentar as condições para que um quadrilátero circunscrito seja um pipa [10].

Teorema 4.1. *Para um quadrilátero $ABCD$ circunscrito (a+c=b+d), as seguintes afirmações são equivalentes:*

(I) $ABCD$ é um quadrilátero pipa.

(II) A área $(ABCD)$ é a metade do produto das medidas das suas diagonais.

(III) As diagonais de $ABCD$ são perpendiculares.

(IV) As cordas tangentes de $ABCD$ são congruentes.

(V) Um par de comprimentos tangentes opostos de $ABCD$ são congruentes.

(VI) As bimedianas de $ABCD$ são congruentes.

(VII) Os produtos das medidas das alturas em relação aos lados opostos nos triângulos não sobrepostos formados pelas diagonais de $ABCD$ são iguais.

(VIII) Os produtos das medidas dos lados opostos de $ABCD$ são iguais, ou seja, $ac = bd$.

(IX) O incentro de $ABCD$ encontra-se na maior diagonal.

Demonstração. Considerando $ABCD$ circunscrito com lados $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, sejam p, q as medidas das diagonais, θ o ângulo entre as diagonais, l e k o comprimento das cordas. Usaremos como estratégia para demonstrar o teorema verificar se o item (I) é equivalente ao item (VIII) em seguida, mostraremos que cada um dos itens (II) a (VII) são equivalentes a (VIII) e depois que (I) e (IX) são equivalentes. Dessa forma, teremos (I) ⇒ (II) ⇒ (III) ⇒ (IV) ⇒ (V) ⇒ (VI) ⇒ (VII) ⇒ (VIII) ⇒ (XI).

(I)⇒(VIII) Pela definição, um quadrilátero convexo que tem dois pares de lados consecutivos congruentes é chamado de quadrilátero pipa, então $a = b$ e $c = d$, portanto, $ac = bd$. Logo, se o quadrilátero circunscrito é um quadrilátero pipa, então o produto das medidas dos lados opostos do quadrilátero é igual.

(VIII)⇒(I) Por hipótese, $ac = bd$, e sendo um quadrilátero circunscrito, pelo teorema 2.1, temos $a + c = b + d$, então:

$$\begin{aligned} a(a+c) &= a(b+d) \\ a^2 + \underline{ac} &= ab + ad \\ \underline{bd} - ab &= ad - a^2 \\ b(d-a) &= a(d-a) \end{aligned}$$

Se $d \neq a$ então temos $b = a$, sendo assim, de $a + c = b + d$ temos $c = d$ e o quadrilátero é pipa. Se $d = a$ de $a + c = b + d$ temos $b = c$ e o quadrilátero é pipa. Logo, se o produto das medidas dos lados opostos de um quadrilátero circunscrito são iguais, então o quadrilátero circunscrito é um quadrilátero pipa.

(II) ⇔ (VIII) De acordo com o Teorema 2.2, a área do quadrilátero é dada por:

$$(ABCD) = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2}$$

Assim, para que a área do quadrilátero seja dada por: $(ABCD) = \dfrac{1}{2}pq$ é necessário que $ac = bd$. Logo, a área do quadrilátero circunscrito é a metade do produto das suas diagonais se, e somente se, os produtos das medidas dos lados opostos do quadrilátero são iguais.

(III) ⇔ (VIII) Pelo Teorema 1.3, a área de um quadrilátero é dada por $(ABCD) = \frac{1}{2}pq\text{sen}(\theta)$, sendo θ o ângulo entre as diagonais p, q. Como por hipótese as diagonais são perpendiculares $(ABCD) = \frac{1}{2}pq$. Pelo Teorema 2.2 vimos que a área também é dada por $(ABCD) = \frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2 - (ac - bd)^2}$, e como vimos, para que $(ABCD) = \frac{1}{2}pq$ é necessário que $ac = bd$. Logo, as diagonais do quadrilátero circunscrito são perpendiculares se, e somente se, os produtos das medidas dos lados opostos são iguais.

(IV) $\Leftrightarrow$ (VIII) Uma corda tangente é o segmento que liga os pontos em dois lados opostos onde o círculo é tangente a esses lados. Sendo k e l as cordas tangentes, pelo Teorema 3.3 temos:

$$\frac{k}{l} = \frac{2(efg+fgh+ghe+hef)}{\sqrt{(e+f)(g+h)(e+g)(f+h)}} \cdot \frac{\sqrt{(e+h)(f+g)(e+g)(f+h)}}{2(efg+fgh+ghe+hef)} = \frac{\sqrt{bd}}{\sqrt{ac}}$$

Logo:

$$\left(\frac{k}{l}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{bd}}{\sqrt{ac}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{k}{l} = \frac{bd}{ac}$$

Sendo $K = l \iff ac = bd$. Logo, as cordas tangentes do quadrilátero circunscrito são congruentes se, e somente se, os produtos das medidas dos lados opostos do quadrilátero são iguais.

(VIII)$\Leftrightarrow$(V) O comprimento da tangente é a distância do vértice ao ponto de tangência. No caso do quadrilátero em questão vamos tomar os quatro comprimentos como sendo e, f, g, h onde $a = e+f, b = f+g, c = g+h, d = h+e$. Temos que:

$$\begin{aligned}
ac = bd &\iff (e+f)(g+h) = (f+g)(h+e) \\
&\iff eg+eh+fg+fh = fh+fe+gh+ge \\
&\iff eg+eh+fg+fh-fh-ef-gh-eg = 0 \\
&\iff eh-ef+fg-gh = o \\
&\iff e(h-f)-g(h-f) \\
&\iff (e-g)(h-f) = 0
\end{aligned}$$

A igualdade é verdadeira quando pelo menos um par de comprimentos tangentes opostos são congruentes, ou seja $e = g$ ou $f = h$. Logo, os produtos das medidas dos lados opostos de um quadrilátero circunscrito são iguais se, e somente se, pelo menos um par de comprimento tangentes opostos é congruente.

(VI)$\Leftrightarrow$(VIII) A bimediana é um segmento de linha que liga os pontos médios de dois lados opostos. Verificamos através do Teorema 3.4 que o comprimento das bimedianas k, l são:

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2-a^2+b^2-c^2+d^2} \quad \text{e} \quad l = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2+a^2-b^2+c^2-d^2}$$

Igualando $k = l$ obteremos:

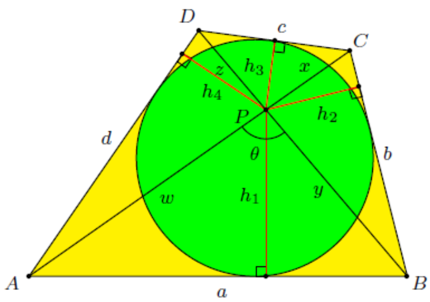
$$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 0 \tag{4.1}$$

Pelo Teorema de Pitot (2.1): $a + c = b + d$. Elevando ao quadrado ambos os lados

$$a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = 2bd - 2ac$$

Sendo assim teremos: $a^2+c^2 = b^2+d^2 \Leftrightarrow 2bd-2ac = 0 \Leftrightarrow ac = bd$. Daí e da equação 4.1 vale que $ac = bd$. Portanto, $k = l \Leftrightarrow a^2+c^2 = b^2+d^2 \Leftrightarrow ac = bd$. Logo, as bimedianas do quadrilátero circunscrito são congruentes se, e somente se, os produtos das medidas dos lados opostos do quadrilátero são iguais.

Figura 4.2: Quadrilátero circunscrito de diagonais AC e BD.



Fonte: artigo [10], pág:168.

(VII)⇔(VIII) As diagonais são segmentos de reta que ligam dois vértices não consecutivos. No caso, as diagonais dividem o quadrilátero em quatro triângulos. Seja P o ponto de intersecção das diagonais do quadrilátero circunscrito $ABCD$ que divide as diagonais AC e BD nas partes w, x e y, z respectivamente. Tomamos na figura 4.2 $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle CDP$, $\triangle DAP$ e suas respectivas alturas h_1, h_2, h_3, h_4 em relação aos lados a, b, c, d. Podemos calcular a área de cada triângulo de duas maneiras diferentes, obtendo assim,

$$ah_1 = wy\,\text{sen}(\theta) \tag{4.2}$$

$$bh_2 = xy\,\text{sen}(\theta) \tag{4.3}$$

$$ch_3 = xz\,\text{sen}(\theta) \tag{4.4}$$

$$dh_4 = wz\text{sen}(\theta) \tag{4.5}$$

Sabendo que θ é o ângulo entre as diagonais e usamos: $\text{sen}(\pi-\theta) = \text{sen}(\theta)$. Multiplicando membro a membro 4.2 por 4.4 e 4.3 por 4.5 obtemos:

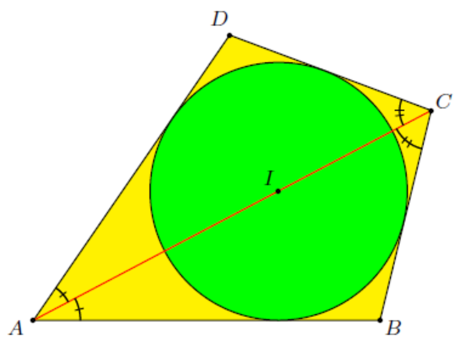
$$ach_1h_3 = wyxz\text{sen}^2(\theta) = bdh_2h_4$$

Consequentemente:

$$h_1h_3 = h_2h_4 \iff ac = bd$$

Logo, os produtos das medidas das alturas dos lados opostos do quadrilátero circunscrito em relação aos lados opostos nos triângulos não sobrepostos formados pelas diagonais são iguais se, e somente se, os produtos das medidas dos lados opostos do quadrilátero são iguais.

Figura 4.3: Quadrilátero pipa



Fonte: artigo [10], pág:168.

(I)⇔(IX)

Dada a figura 4.3, então temos $AD = BA$ e $DC = CB$ por definição e $AD + CB = DC + AB$ pelo teorema de Pitot. Um quadrilátero pipa é um quadrilátero circunscrito e o seu incentro está na interseção das bissetrizes dos ângulos. Para que possamos demonstrar basta provarmos que a sua diagonal mais longa é também uma bissetriz.

Seja AC a diagonal mais longa do quadrilátero pipa que o divide em dois triângulos ADC e ABC. Observando os triângulos temos: $AD = AB, DC = BC$ e AC lado comum. Assim $ADC \equiv ABC$ pelo caso LLL, logo, AC é bissetriz do quadrilátero e o incentro está na diagonal mais longa. Por outro lado, se o incentro estiver na diagonal mais longa em um quadrilátero circunscrito sabemos que ela divide o quadrilátero em dois triângulos ADC e ABC onde se observa: $\angle DAC = \angle BAC$, $\angle DCA = \angle BCA$, e AC é o lado comum. Assim, ADC e ABC são congruentes pelo caso ALA e $AD = AB$ e $DC = BC$, logo $ABCD$ é um quadrilátero pipa pois possui dois pares de lados adjacentes congruentes, encerrando assim a nossa demonstração. $\square$

Corolário 4.1.1. *Seja $ABCD$ um quadrilátero de lados $AB = a, BC = b, CD = c$ e $DA = d$, e diagonais $AC = p$ e $BD = q$. Se $ABCD$ é uma Pipa e tem área $(ABCD) = \sqrt{abcd}$ então $ABCD$ é bicêntrico.*

Demonstração. Sendo $ABCD$ uma Pipa temos $ac = bd$ e $(ABCD) = \frac{pq}{2}$, pelo Teorema 4.1. Por hipótese,

$$(ABCD) = \sqrt{abcd} = ac = bd$$

Das identidades envolvendo a área temos

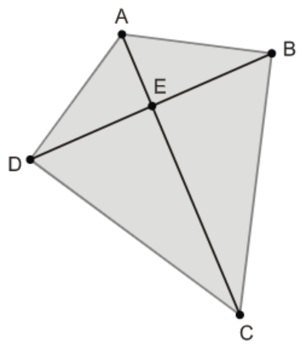
$$pq = 2ac = ac + bd$$

Logo, pelo Teorema 2.4 (Teorema de Ptolomeu) $ABCD$ é inscritível; portanto, bicêntrico. $\square$

4.2 Exercícios Propostos

Problema 1 (UERJ-2011) Para construir a pipa representada na figura 4.4 pelo quadrilátero $ABCD$, foram utilizados duas varetas, linha e papel. As varetas estão representadas pelos segmentos AC e BD. A linha utilizada liga as extremidades A, B, C, D das varetas, e o papel reveste a área total da pipa. Os segmentos AC e BD são perpendiculares em E, e os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ são retos. Se os segmentos AE e EC medem, respectivamente, $18cm$ e $32cm$, determine o comprimento total da linha, representada por $AB + BC + CD + DA$.

Figura 4.4: Problema 1



Resolução: Sejam $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p, DB = q$. Já que $\angle ABC = 90° = \angle ADC$, então pelo teorema 2.3 $ABCD$ é inscritível. Daí podemos concluir por semelhança que $AB + BC + CD + DA = a + b + c + d = 2(a + b)$. Ou ainda, que:

$$(AB + BC + CD + DA)^2 = 4(a^2 + b^2 + 2ab) \tag{4.6}$$

O $\triangle ABC$ é reto em B, logo

$$a^2 + b^2 = 50^2 \tag{4.7}$$

Por $ABCD$ ser cíclico, pelo teorema 2.4:

$$pq = ac + bd = 50q \tag{4.8}$$

Pelas relações do $\triangle ABC$

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 = 18.32 \Rightarrow q = 48 \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9), (4.8), (4.7) em (4.6),

$$(AB + BC + CD + DA)^2 = 4(50^2 + 50.48)$$

$$(AB + BC + CD + DA)^2 = 4[50(50 + 48)]$$

$$(AB + BC + CD + DA)^2 = 4(50.98)$$

$$(AB + BC + CD + DA) = 140$$

Problema 2 (IFMA- Geometria Plana) A diagonal AC divide o quadrilátero $ABCD$ em dois triângulos, sendo ABC um triângulo isósceles e ACD um triângulo equilátero. Se $AB = 12m$, a área do quadrilátero $ABCD$ é:

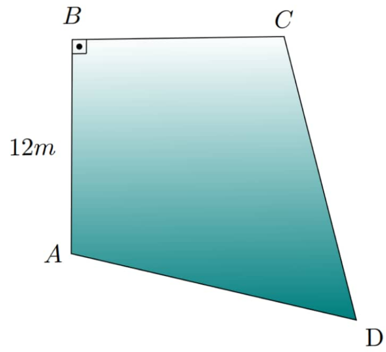
a) $36(1+2\sqrt{3})m^2$

b) $144(1+\sqrt{3})m^2$

(c) $72(1+\sqrt{2})m^2$

(d) $72(1+\sqrt{3})m^2$

(e) $72(1+2\sqrt{3})m^2$



Resolução: Como ABC é isósceles, temos: $AB = BC = 12cm$. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC = 12\sqrt{2}m^2$$

Sendo o $\triangle ACD$ equilátero, temos: $AC = AD = 12\sqrt{2}m$. É fácil observar que: $\angle BAD = 45° + 60°$

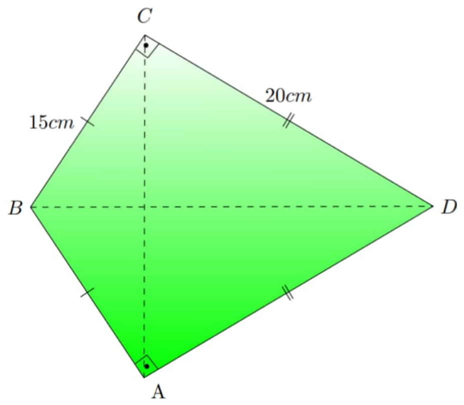
Por definição o quadrilátero $ABCD$ é pipa, logo sua área pode ser obtida utilizando a fórmula:

$$\begin{aligned}(ABCD) &= BA \cdot AD \cdot \text{sen}\hat{A}\\ &= 12.12\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\\ &= 72(1+\sqrt{3})m^2.\end{aligned}$$

Portanto a resposta correta é a alternativa d.

Problema 3 A pipa é um quadrilátero que tem dois lados consecutivos e dois ângulos opostos com medidas iguais. Observe a figura 4.5: os lados e ângulos congruentes estão marcados de forma igual. Para construir uma pipa de papel de seda são colocadas duas varetas perpendiculares, nas diagonais do quadrilátero. Quantos centímetros de vareta, no mínimo, foram usados para construir a pipa representada na figura 4.5?

Figura 4.5: Problema 3



Resolução: Sejam $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = p, BD = q$. Como $BCD = 90°$. Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo BDC:

$$BD = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25cm$$

Como $\angle BAD = \angle BCD = 90°$, pelo teorema 2.3 o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

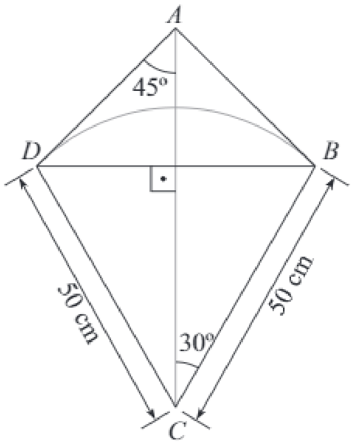
Agora aplicarmos o teorema 2.4, para encontrarmos AC,

$$pq = ac + bd$$
$$25p = 15.20 + 15.20$$
$$p = \frac{600}{25} = 24cm$$

Portanto, foram usados $25 + 24 = 49cm$ de vareta para construir a pipa representada na figura 4.5.

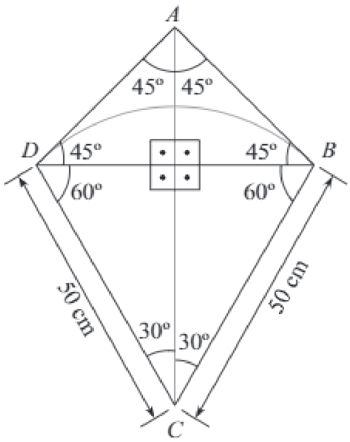
Problema 4 (Unicamp- 2010) O papagaio (também conhecido como pipa, pandorga ou arraia) é um brinquedo muito comum no Brasil. A figura 4.6 mostra as dimensões de um papagaio simples, confeccionado com uma folha de papel que tem o formato do quadrilátero $ABCD$, duas varetas de bambu e um pedaço de linha. Uma das varetas é reta e liga os vértices A e C da folha de papel. A outra, que liga os vértices B e D, tem o formato de um arco de circunferência e tangencia as arestas AB e AD nos pontos B e D, respectivamente.

Figura 4.6: Problema 4



Calcule a área do quadrilátero de papel que forma o papagaio.

Resolução Do enunciado, temos:



$$\triangle CDE \cong \triangle CEB$$

$$\triangle AED \cong \triangle AEB$$

$$DE = BE = AE$$

Aplicando as razões trigonométricas no triângulo retângulo CED, temos:

$$\text{sen}30° = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DE}{50} \Rightarrow DE = 25cm.$$
$$\cos 45° = \frac{DE}{DA} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25}{DA} \Rightarrow DA = 25\sqrt{2}cm$$

A área pedida, em cm^2, pode ser obtida aplicando a fórmula $(ABCD) = a.b.\text{sen}(\theta)$. Logo,

$$\begin{aligned}(ABCD) &= 25\sqrt{2}.50.\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\\ &= 625(1+\sqrt{3})cm^2\end{aligned}$$

Capítulo 5

Considerações Finais

A tecnologia em especial tem mudado cada vez mais rápido a forma como as crianças e adolescentes acessam, se identificam e se relacionam com o estudo e a aprendizagem. A instituição escolar, de modo geral, precisa acompanhar o ritmo dessas transformações e oferecer novas metodologias que se alinhem com os novos cenários. Tem-se discutido muito sobre estratégias didáticas mais adequadas ou eficazes para o estudante aprender e compreender o conhecimento matemático, estimulando a compreensão da matemática e suas relações com a vida acadêmica, profissional, cultural e social do estudante. Nessa perspectiva, é importante que o conhecimento adquirido na escola auxilie o estudante a fazer escolhas conscientes, argumentando logicamente suas posições e compreendendo de que modo a matemática contribui para seu desenvolvimento pessoal, cultural e social. As abordagens educacionais, tanto no âmbito curricular quanto em relação ás metodologias de ensino, destacam cada vez mais o protagonismo do estudante na construção do conhecimento,a ampliação de repertório cultural e a formação de um sujeito de direitos. Isso implica mudanças ou ampliação de práticas pedagógicas que deem suporte a esse processo.

Nesse sentido, os docentes nas suas respectivas unidades de ensino passam a ser fundamentais para a proposição de situações didáticas que considerem o perfil de seus estudantes e as necessidades locais. Se nos métodos tradicionais o professor tinha um papel centralizador das informações necessárias, respondia às questões dos estudantes e avaliava seus desempenhos, hoje, o que se espera é que os estudantes tenham participação ativa no processo de aprendizagem e que o professor atue como orientador, instigue e auxilie no processo de produção de conhecimento.Diante disso, é fundamental que a formação docente leve em conta tanto os saberes conceituais quanto os metodológicos. Na medida em que o professor se apropria desses saberes, terá mais repertório e estratégias para integrá-los e relacioná-los, organizando suas aulas por meio de situações de aprendizagem que contextualizem os conteúdos.

Para contribuir com esta ideia neste trabalho estudamos os quadriláteros inscritos e circunscritos, apresentamos as demonstrações das propriedades necessárias para que um quadrilátero seja circunscrito mais conhecido como teorema de Pitot, para que o professor em posse desse conhecimento tenha mais confiança em trabalhar este conteúdo em sala de aula.Assim como os quadriláteros inscritos acompanhados dos teoremas que os cercam como o teorema de Ptolomeu e Hiparco sendo possível assim explorar diversos exercícios em sala. Também foram apresentadas as condições para que um quadrilátero circunscrito seja inscrito, ou seja, bicêntrico e fórmulas para determinar a sua área.

Por fim, demonstramos as condições necessárias para que um quadrilátero circunscrito seja um pipa, um quadrilátero que pode ser explorado no ensino de geometria em sala.Embora não tenha apresentado nenhuma proposta didática utilizando os conhecimentos apresentados no trabalho devido ao tempo e a impossibilidade de por em prática e demonstrar os resultados obtidos neste tempo de pandemia deixo aqui a recomendação da leitura dos artigos [11] e [14] que apresentam uma proposta de ensino utilizando pipa e o quadrilátero bicêntrico. Espero que o trabalho atinja o maior numero de leitores, principalmente os professores já que são os mesmos que tornam os conceitos e os conteúdos matemáticos passíveis de serem aprendidos, fornecendo as informações necessárias, as quais os alunos ainda não têm condições de obter sozinhos, o que exige do professor o domínio do conteúdo e conhecimentos pedagógicos.

Referências Bibliográficas

[1] C. Alsina and R. B. Nelsen. On the diagonals of a cyclic quadrilateral. In *Forum Geom*, volume 7. Citeseer, 2007.

[2] C. Alsina and R. B. Nelsen. *A Cornucopia of Quadrilaterals*, volume 55. American Mathematical Soc., 2020.

[3] A. P. J. V. Bongiovanni. Pipa ou "papagaio“: um quadrilátero também notável. *Revista do Professor de Matemática*, (80), 2013.

[4] C. A. Bretschneider. Untersuchung der trigonometrischen relationen des geradlinigen viereckes. *Archiv der Math*, 2, 1842.

[5] A. Caminha. Geometria-coleção profmat, 2013.

[6] J. Coolidge. A historically interesting formula for the area of a quadrilateral. *The American Mathematical Monthly*, 46(6), 1939.

[7] M. Hajja. A condition for a circumscriptible quadrilateral to be cyclic. In *Forum Geom*, volume 8, 2008.

[8] M. Josefsson. Calculations concerning the tangent lengths and tangency chords of a tangential quadrilateral. In *Forum Geom*, volume 10, 2010.

[9] M. Josefsson. The area of a bicentric quadrilateral. In *Forum Geom*, volume 11, 2011.

[10] M. Josefsson. When is a tangential quadrilateral a kite. In *Forum Geom*, volume 11, 2011.

[11] E. H. R. Motinaga. Uma proposta de ensino de geometria construindo pipas. 2013.

[12] T. Roque and J. B. P. de Carvalho. Tópicos de história da matemática, 2012.

[13] A. Sinefakopoulos. 10804. *The American Mathematical Monthly*, 107(5), 2000.

[14] A. L. B. Vianna et al. O problema das quatro guaritas: Uma oportunidade para o estudo dos quadriláteros bicêntricos. 2017.