UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FERNANDO RIBEIRO FREITAS

APLICAÇÕES DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS

CAMPO GRANDE - MS
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FERNANDO RIBEIRO FREITAS

APLICAÇÕES DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS

Orientadora: Profª. Drª. Rubia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2021

APLICAÇÕES DE MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS

FERNANDO RIBEIRO FREITAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Rubia Mara de Oliveira Santos - UFMS

Alex Ferreira Rossini - UFMS

Jair da Silva - UFPR

Campo Grande - MS

2021

Agradecimentos

Agradeço à Deus em primeiro lugar, pois é Deus que traz o sentido de minha existência e me dá forças para lidar com a vida cada vez mais sobrecarregada, com prazos para cumprir, com momentos de tensão e de estresse. Admitir que Deus é o senhor da minha vida e permitir que ele trabalhe pela minha vida me motiva a chegar longe e alcançar objetivos. Eu te agradeço por ter me fortalecido para chegar ao fim deste objetivo. Obrigado, meu Pai.

Agradeço aos meus pais, Tânia e Edmilson, por me incentivarem a estudar e proporcionar meios para facilitar minha trajetória nos estudos. A minha irmã, Thayane, por me suportar e me ouvir em momentos difíceis. A minha família, agradeço pelo amor e pelo carinho que vocês tem comigo, pelo suporte e motivação que vocês me proporcionam para eu lutar pelos meus sonhos.

Aos meus amigos de mestrado, o apoio e a motivação de vocês foram essenciais para o cumprimento dessa trajetória. Agradeço aos meus amigos de profissão, Maiara e Anderson, pelo suporte e pelo auxílio que tiveram comigo, a experiência do mestrado de vocês ajudou no meu processo de estudos.

Agradeço a todos os professores que compartilharam os seus conhecimentos durante o mestrado, em especial a professora Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos, por acreditar em mim, pelas palavras de apoio e de conforto, suas experiências e orientações foram fundamentais para a realização deste trabalho e me ajudou a prosseguir da melhor forma possível.

Resumo

Esta dissertação apresenta algumas aplicações de modelos de otimização de portfólios. O desenvolvimento do trabalho é feito inicialmente com os conceitos fundamentais sobre finanças, cujo objetivo é facilitar a compreensão da teoria moderna de otimização de portfólios. Em seguida, será apresentado o modelo média-variância e o modelo de precificação de ativos. Com o intuito de tomar decisões seguras para investir e despertar o interesse em estudantes e professores serão realizadas aplicações utilizando esses modelos em portfólios. E por fim uma aplicação no Ensino.

Palavras-chave: Aplicações, Portfólio, Investimentos.

Abstract

This dissertation approaches some applications of portfolio optimization models. The development of the work is done with the fundamental concepts of finance, whose objective is to facilitate the understanding of the modern portfolio theory. Then, will be introduced the mean-variance analysis and the capital asset pricing model. In order to make safe decisions to invest and arouse interest in students and teachers to carry out using these models in portfolios. And finally an application in Education.

Keywords: Applications, Portfolio, Investments.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

B3	Bolsa de Valores Oficial do Brasil
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BNDS	Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CDI	Certificado de Depósito Interbancário
EBIT	Earnings Before Interest and Taxes
ENEF	Estratégia Nacional de Educação Financeira
FBEF	Fórum Brasileiro de Educação Financeira
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Eduação Nacional
PIB	Produto Interno Bruto
ROI	Return On Investment
TEV	Total Enterprise Value

Introdução

O trabalho pioneiro na área de *otimização de portfólio* foi o modelo média-variância proposto pelo economista Harry Max Markowitz em 1952. A teoria do portfólio estabelece que decisões relacionadas à seleção de investimentos devem ser tomadas com base na relação risco-retorno. O Modelo de Markowitz possibilita que se calcule o risco de uma carteira de investimentos, sem importar se a carteira é composta por renda fixa, ações ou qualquer outro ativo. Um fato importante é que usando o Modelo de Markowitz é possível construir carteiras de investimento em que o risco é inferior ao ativo de menor risco da carteira [18].

No início do século XXI, houve um aumento notável no uso de modelagem financeira e ferramentas de otimização na gestão de portfólio de ações. Além da pressão das empresas de gestão de ativos para reduzir custos e manter um desempenho mais estável e previsível, três outras tendências gerais contribuíram para esse aumento. Primeiramente, ressurgiu um interesse em modelos preditivos para retornos de ativos. Os *modelos preditivos* assumem que é possível fazer previsões condicionais de retornos futuros, um objetivo que antes era considerado não alcançável pela teoria financeira clássica. Em segundo, a ampla disponibilidade de pacotes de software sofisticados e especializados permitiu gerar e explorar essas previsões no gerenciamento de portfólio, muitas vezes em combinação com técnicas de otimização e simulação. Terceiro, o aumento contínuo na velocidade do computador e a redução simultânea nos custos de hardware tornou acessível até mesmo para pequenas empresas [12].

O uso de técnicas de modelagem se popularizou no gerenciamento de portfólio, aumentando a importância em relação a confiança que os profissionais podem ter em modelos teóricos. Consequentemente, há um nível maior de interesse no assunto de estimativa e otimização robustas na gestão moderna de portfólio. Durante anos, a robustez foi um ingrediente crucial nos campos de engenharia, estatística e pesquisa operacional e existe agora um reconhecimento generalizado da necessidade de uma abordagem disciplinada para a análise e gestão de investimentos [12].

Ensino de Educação Financeira na Educação Básica

A mobilização da sociedade civil, o desenvolvimento da economia brasileira e com mais pessoas acessando produtos e serviços financeiros levou ao surgimento de inúmeras iniciativas voltadas a mudar a realidade financeira do brasileiro. Dessas iniciativas surge a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), uma mobilização em torno da promoção de ações de educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal no Brasil. O objetivo da ENEF, criada através do Decreto Federal 7.397/2010, e renovada pelo Decreto Federal nº 10.393, de 9 de junho de 2020, é contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes, disseminar a educação financeira e previdenciária e aumentar a eficiência e solidez do sistema financeiro. A nova ENEF reúne representantes de 8 órgãos e entidades governamentais, que juntos integram o Fórum Brasileiro de Educação Financeira (FBEF) [25].

Os programas da nova ENEF são guiados pelo Plano Diretor, sua Deliberação e seus Anexos, documentos que consolidam a atuação da Estratégia Nacional de Educação Financeira. As ações da nova ENEF são compostas pelos programas transversais e setoriais, coordenados de forma centralizada, mas executados de modo descentralizado [25]. Dentre os programas transversais da ENEF encontra-se o Programa Educação Financeira nas Escolas que propõe levar a educação financeira para o ambiente escolar. As áreas principais são, o Ensino Fundamental e Médio, e o seu objetivo é contribuir para o desenvolvimento da cultura de planejamento, prevenção, poupança, investimento e consumo consciente nas futuras gerações de brasileiros. Ao se trabalhar a educação financeira, securitária, previdenciária e fiscal desde os anos iniciais da vida escolar, contribui-se com a construção das competências necessárias para que os estudantes enfrentem os desafios sociais e econômicos da sociedade, e também para o exercício da cidadania.

O documento que orienta o tratamento da educação financeira nas escolas foi elaborado a partir de contribuições de especialistas de diversas áreas, garantindo uma postura participativa e cooperativa. Ele parte de uma problemática atual e apresenta um conjunto de princípios que devem nortear as ações necessárias para se atingir uma situação futura desejada. Essa proposta tem como característica a flexibilidade, para permitir sua adaptação aos diferentes contextos escolares.

Ensino de Probabilidade e Estatística na Educação Básica

Conforme a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), a Base deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil [6].

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica. Orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a Base soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva [6].

Além disso, a BNCC e currículos têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação Básica, uma vez que tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação. São essas decisões que se adequam as proposições da BNCC à realidade local, considerando a autonomia dos sistemas ou das redes de ensino e das instituições escolares, como também o contexto e as características dos alunos. Essas decisões precisam, igualmente, ser consideradas na organização de currículos e propostas adequados às diferentes modalidades de ensino (Educação Especial, Educação de Jovens e Adultos, Educação do Campo, Educação Escolar Indígena, Educação Escolar Quilombola, Educação a Distância), atendendo-se às orientações das Diretrizes Curriculares Nacionais.

Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Dentre os temas está incluso a saúde, vida familiar e social, educação para o consumo, educação financeira e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural (Parecer CNE/CEB nº 11/2010 e Resolução CNE/CEB nº 7/2010). Na BNCC, essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada.

A BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. Nessa direção, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, dentre elas estão a unidade sobre *Números* e a unidade sobre *Probabilidade e Estatística*, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

Conforme a BNCC (p.268) "A unidade temática *Números* tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades." Um aspecto considerado nesta temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Com isso, favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro.

A unidade temática sobre *Probabilidade e Estatística* trata da incerteza e do tratamento de dados são estudados. Conforme a BNCC (p.274) "Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia." Nesta unidade merece o destaque para o uso de tecnologias como calculadoras, para avaliar e comparar resultados, e planilhas eletrônicas, que ajudam na construção de gráficos e nos cálculos das medidas de tendência central.

O Google Colaboratory

O *Google Colaboratory*, ou *Google Colab*, é um ambiente de desenvolvimento *Python* executado no navegador usando o Google Cloud que permite ler, desenvolver e rodar códigos que agrupam células de códigos, chamados de notebooks, compartilhá-los com outros programadores, fazer modificações e manter salvos online [14]. A execução do software para escrever é fornecido pela nuvem de computadores do Google, o Google Cloud. Isso permite ao usuário a possibilidade de processar dados gratuitamente.

O Google Colab é hospedado pelo Jupyter Notebook, um software de código aberto que também disponibiliza um ambiente online para a utilização de notebooks e é quem possibilita o modo de como os códigos, as anotações e as marcações são organizados e dispostos no Colab. A diferença entre utilizar o Jupyter Notebook instalado no computador e utilizar o Google Colab é que com ele não é necessário realizar configurações no computador, basta acessá-lo e começar a programar.

O Google Colab foi construído com o objetivo de incentivar a pesquisa e o estudo de tecnologias voltadas à inteligência artificial, *Machine Learning* e ciência de dados. Estudantes, cientistas de dados e pesquisadores em *Inteligência Artificial* podem fazer o uso do Google Colab pela simplicidade e para facilitar os seus trabalhos. Para acessar o Google Colab é necessário ter uma conta no Google e acesso à internet. O acesso ao Colab está disponível em https://colab.research.google.com/, nesta página encontra-se mais informações sobre as funcionalidades do Google Colab e os primeiros passos para utilizar o ambiente interativo.

O uso deste ambiente tem diversos benefícios para o aprendizado em programação, pois tem fácil acessibilidade, não é necessário baixar nenhum arquivo, o que é necessário para o desenvolvimento dos códigos está totalmente hospedado pelo Google Cloud e o ambiente de execução e a linguagem é acessível através de um navegador web. Um dos grandes atrativos do Python é a quantidade de bibliotecas e frameworks disponíveis para se trabalhar com essa linguagem, e no Google Colab não é diferente. No Colab é possível acessar bibliotecas pré-instaladas, com isso reduz o tempo de importação e facilita o aproveitamento de recursos. Dentre as bibliotecas disponíveis estão a Numpy, Pandas, Matplotlib, Scikit-learn e a TensorFlow, voltada a machine learning. Nesta dissertação foram utilizadas a Numpy, Pandas, Mathplotlib, Seaborn e Plotly.express.

Objetivos

O conceito sobre investimentos abrange diferentes aspectos da vida, podendo ser trabalhado com investimentos intelectuais, sociais e culturais. *Investir* é então uma aplicação de tempo, energia, atenção, dedicação e estudo, que se reverte em novos recursos no futuro. O *investimento financeiro* é todo gasto e aplicação de capital cuja intenção seja produzir uma renda. É uma forma de fazer o dinheiro ter uma rentabilidade sem necessidade de esforços físicos ou intelectuais constantes, como é comum no trabalho. Essa prática em investir busca estabilidade, liberdade e segurança financeira. A vantagem é que para começar a investir não é necessário de um grande montante de capital ainda que essa restrição possa limitar as suas possibilidades quando se trata de aplicações.

A *motivação* para o desenvolvimento deste trabalho surgiu com o desafio e a divulgação em investir. O investidor deve estar preparado para lidar com o rendimento esperado, que é a expectativa sobre os futuros ganhos, e com os possíveis riscos de perda que cada um dos ativos apresenta em um horizonte temporal que representa o tempo que o investimento leva para gerar uma rentabilidade. Assim, esta dissertação tem como *objetivo* apresentar conceitos básicos de finanças, introduzir a Teoria Moderna de Portfólio, modelos de otimização de portfólio e mostrar que aplicações destes modelos contribuem ao investidor tomar decisões para alcançar uma melhor rentabilidade em seus investimentos. Sendo assim, a dissertação está organizada como segue:

O Capítulo 2 aborda conceitos fundamentais sobre finanças, a idealização e o desenvolvimento da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz, os conceitos de retorno, variância, correlação, diversificação, fronteira eficiente para formular os modelos de Média-Variância de Markowitz e o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros.

O Capítulo 3 é destinado às aplicações do Modelo Média-Variância, do Modelo de Precificação de Ativos e da diversificação de ativos utilizando a estratégia de investimentos *Deep Value Investing*. Por fim, uma aplicação no Ensino com o propósito de compreender a construção da matriz de covariância.

No Capítulo 4 serão apresentados as conclusões e os trabalhos futuros.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Para o desenvolvimento do tema proposto para o trabalho faz-se necessária a construção de um embasamento teórico a fim de compreender a teoria moderna de portfólio e as aplicações destes modelos matemáticos que serão discutidas no capítulo 3. Os conceitos e as definições foram retirados de [2, 3, 5, 10, 11, 12, 13, 18, 19, 21, 22, 23].

1.1 Conceitos Básicos em Finanças

O termo *Finanças* de uma forma geral, trata-se do processo, instituições, mercados e instrumentos envolvidos na transferência de fundos entre pessoas, empresas e governos. Todos os indivíduos e organizações obtêm receitas ou levantam fundos, gastam ou investem. Analisando este conceito todas as pessoas tem envolvimento com as finanças. Decisões financeiras são tomadas a todo o momento. Assim, é preciso entender de assuntos financeiros e tomar as decisões financeiras corretas e a área de finanças que permite entender como as pessoas utilizam o dinheiro e se organizam é a de *Finanças Pessoais*. Normalmente, o estudo das finanças pessoais é dividido em duas categorias: as *finanças comportamentais* e as *finanças técnicas*. As *finanças comportamentais* visam, sobretudo, entender como fatores mentais e emocionais interferem na forma de lidar com o dinheiro. As *finanças técnicas* é dedicada a estudar sobre dívidas, financiamentos e investimentos, aproximando mais aos números e conceitos do que à psicologia por trás das decisões. É o que permite avaliar tipos de investimentos e criar estratégias de multiplicação de capital, como a criação de um controle financeiro pessoal detalhado e preciso e um aprofundamento em conhecimentos sobre como investir de acordo com cada objetivo individual.

Investimento pode ser descrito como sendo a aplicação do dinheiro poupado em algo que possa trazer um ganho financeiro ou rendimento. Os *ativos financeiros* são os produtos disponíveis no mercado financeiro e de capitais para serem negociados, como ações, fundos imobiliários, depósitos bancários e títulos públicos. *O mercado financeiro e de capitais* é uma estrutura de transações de compra e venda de valores mobiliários, como ações, moedas nacionais, mercadorias, a exemplo dos commodities, e outros bens e títulos. O objetivo deste ambiente de negócios, que pode tanto ser social como virtual, é conectar quem precisa de dinheiro com quem quer investir, sejam pessoas físicas ou jurídicas. O lucro dos agentes envolvidos dá-se por taxas de juros, valores de corretagem, diferenças vindas da flutuação dos mercados, entre outros. As transações entre os investidores do mercado financeiro são promovidas por instituições intermediárias. São elas: Banco Central, bancos estatais e privados, corretoras de valores, distribuidoras de títulos, fundos de investimentos e bolsa de valores. O mercado financeiro brasileiro é controlado por autoridades monetárias e de apoio como o Conselho Monetário Nacional e o Banco Central, e entre suas funções estão garantir o cumprimento da política monetária nacional. Há também a atuação do Comissão de Valores Monetários, do Banco do Brasil, do Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), da Caixa Econômica Federal e do Conselho de Recursos do Sistema Financeiro Nacional. Estes órgãos constituem o Sistema Financeiro Nacional, que regulamenta as trocas estabelecidas no mercado financeiro, de forma a organizar as transações e garantir a viabilização e legalidade dessas operações entre os chamados poupadores e tomadores. O *portfólio* ou a *carteira de investimentos* é a formação de um grupo de ativos financeiros que pertencem a um investidor, pessoa física ou jurídica.

A *diversificação*, é definida como o modo com que o investidor divide sua carteira de investimentos nos diversos ativos financeiros, contribuindo assim para a redução dos riscos de perda. O *risco* é visto como uma possibilidade de que algum acontecimento desfavorável venha a ocorrer. Em um investimento, ele está diretamente ligado à probabilidade de se ganhar menos que o esperado e pode ser classificado de duas formas: *diversificável* e *não diversificável*. O *risco diversificável* refere-se aos riscos que afetam um número pequeno de empresas. Problemas no processo de produção e perda de gestores importantes são alguns exemplos de riscos que podem afetar o desempenho de uma empresa e, consequentemente, o valor de seus papéis. O *risco não diversificável*, ou o *risco de mercado*, como é conhecido, refere-se a fatores externos que têm impacto sobre o mercado de ações em geral, o segmento no qual a empresa atua ou sobre as próprias companhias. Variações nos preços das matérias-primas, oscilações nas taxas cambiais, desastres naturais, crises econômicas globais e mudanças em regimes de governo são alguns exemplos desses riscos. Este é o mais preocupante, pois refere-se a acontecimentos que afetam o mercado como um todo. Na formação de uma carteira de investimentos, a diversificação tem um papel importante, pois através dela pode-se incluir ativos com maior e menor nível de risco de rentabilidade, de vários tipos de mercados, reduzindo assim o risco geral da carteira de perdas provocadas por uma rentabilidade baixa ou negativa de um único ativo. É essencial destacar que a diversificação reduz apenas o risco diversificável. Isso se deve ao fato de que, quando se diversifica um investimento, o capital total pode sofrer baixa relativa a acontecimentos que afetam apenas um dos ativos que compõem a carteira, podendo os outros ativos reduzir as perdas totais.

Os *indicadores* são elementos que possuem como objetivo apontar ou mostrar algo a alguém, expressando o desempenho de processos durante um período ou impondo atitudes, e podem ser considerados guias eficientes e seguros para análises profundas de diferentes cenários, permitindo um olhar abrangente, técnico e comparativo da realidade. Os *indicadores financeiros* são ferramentas que funcionam como métricas de desempenho de um negócio. Eles são muito utilizados para avaliação das empresas, identificando aspectos positivos e negativos da companhia.

Os principais indicadores financeiros são: O *Return On Investment (ROI)*, *Retorno sobre Investimento*, calcula o desempenho e demonstra o quanto um investidor ou uma empresa ganhou, ou perdeu, com um investimento. O ROI é utilizado como um indicador de retorno de investimentos, comparando os custos que ocorreram no processo,

$$\text{ROI} = \frac{\text{Ganhos do investimento} - \text{Custos do investimento}}{\text{Custos do investimento}} \tag{1.1}$$

O *Total Enterprise Value (TEV)* é um indicador que mostra o quanto um comprador deve pagar para adquirir uma empresa, é a soma do valor de mercado (o quanto a empresa vale) com a sua dívida líquida (dívida menos o caixa).

$$\text{TEV} = \text{Valor de mercado} + \text{Dívida Líquida}$$

O *Earnings Before Interest and Taxes (EBIT)* é utilizado para encontrar o resultado das operações de uma empresa. Se o EBIT estiver positivo significa que a empresa de alguma forma consegue gerar lucros com o seu negócio. O motivo de utilizar o EBIT se sustenta na teoria de que, através desse número, tem-se condições de identificar se a operação da empresa consegue render bons resultados. De forma sucinta, o EBIT é calculado por:

$$\text{EBIT} = \text{Lucro Líquido} + \text{Juros} + \text{Impostos}$$

A *Margem Líquida*, que representa qual é a parte do lucro de cada venda que efetivamente sobra para a empresa, já descontando todos os custos (incluindo impostos). O cálculo da margem líquida é

$$\text{Margem Líquida} = \frac{\text{Lucro Líquido}}{\text{Total de Vendas}}$$

A *Liquidez* é a facilidade de um ativo ser transformado em dinheiro sem perdas significativas em seu valor. Esse conceito se refere à agilidade com que um investidor consegue se desfazer de um investimento para voltar a ter dinheiro na mão sem que, para isso, precise ter prejuízo. E a *Liquidez Corrente*, é um indicador de análise de crédito, que revela quanto a empresa possui de recursos disponíveis para quitar suas obrigações com terceiros. Este indicador, portanto, indica a capacidade de pagamento de uma empresa, calculado por

$$\text{Liquidez Corrente} = \frac{\text{Ativo Circulante}}{\text{Passivo Circulante}}$$

O *ativo circulante* corresponde aos bens e direitos da empresa de curto prazo, como caixa e disponibilidades. O *passivo circulante* remete aos valores de capital de terceiros de curto prazo. Ou seja, quanto a empresa tem de dívidas no período.

Os *índices de mercado*, são utilizados para apontar o desempenho do mercado de ações e auxiliar na hora de fazer investimentos, sejam eles de curto, médio ou longo prazo. Alguns índices de mercado apontam qual deve ser o comportamento geral do mercado financeiro no futuro. Eles refletem questões sociais, políticas e econômicas que afetam o mercado e transformam essas questões em uma informação quantitativa, que é mais facilmente interpretável. Outros índices de mercado apontam se um ativo do mercado financeiro é uma boa opção de investimento ou não. A análise desses indicadores pode ser feita observando uma única empresa e considerando sua posição em relação a alguns parâmetros ou, ainda, comparando duas ou mais empresas entre si. Dentre os principais indicadores de mercado no Brasil, pode-se destacar a Taxa Selic, Taxa de Certificado de Depósito Interbancário (CDI), a taxa de câmbio entre Dólar e Real, Ibovespa e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA).

A *Taxa Selic* é a taxa básica de juros da economia brasileira, criada em 1979 e utilizada pelo Banco Central para manipular a inflação e o Produto Interno Bruto (PIB), como um instrumento das chamadas políticas monetárias, servindo como base para os empréstimos interbancários, ela também influencia a vida comum de todos os brasileiros. Como a Taxa Selic guia as taxas cobradas pelos bancos em suas respectivas linhas de crédito, ela afeta a incidência de juros sobre empréstimos, financiamentos, cartões de crédito e afins. E por ela oferecer um retorno baixo, mas que, de modo geral, tem apelo aos investidores e o risco é bastante reduzido. Taxas que possuem uma rentabilidade esperada em um investimento com risco muito baixo são chamadas de *Taxa Livre de Risco*, que servem de referência no universo do mercado financeiro, e das finanças em geral, para comparar diferentes opções de investimento.

O *Ibovespa* é o principal índice da bolsa de valores do Brasil e é amplamente utilizado para distinguir a comparação entre dois ativos em renda variável. O Ibovespa tem uma função muito importante, pois ele serve como referência para os ganhos e perdas do mercado de ações no Brasil. Ele também serve como parâmetro para *fundos de índices* como o BOVA11. *Fundo de índice* é o nome dado a um tipo específico de fundo de investimentos, especialmente caracterizado por seguir um índice financeiro para a escolha de títulos que irão compor a carteira. Os fundos de índice possuem as mesmas características dos demais fundos de investimentos. Isso significa que eles também são formados a partir da "união" de vários investidores que, a partir da aquisição de cotas, somam os seus aportes para a compra de determinados títulos. Através de fundos como o BOVA11, o investidor consegue investir em algo que pode lhe proporcionar ganhos bem semelhantes ao índice Ibovespa.

A *volatilidade* é uma das ferramentas mais importantes para quem atua no mercado de ações. É definida como a variação do preço de ações em um determinado período de tempo. Mercados que se movem lentamente são mercados de baixa volatilidade e os que se movem rapidamente são mercados de alta volatilidade. Essa variação do preço das ações pode ser vista através dos *dados históricos* ou *séries históricas* de um determinado ativo. Um ativo tem como objetivo acompanhar o resultado de indicadores ou de índices, e os dados históricos podem ter um uso prático de serem usados como testes de estratégia para supererar esses indicadores ou índices em questão, pois a escolha de uma estretégia baseada em dados pode fazer a diferença no retorno esperado.

1.2 Teoria Moderna de Portfólio

A teoria do portfólio determina que decisões, relacionadas à seleção de investimentos, devem ser tomadas baseadas na relação risco-retorno. Para contribuir nesse processo, modelos de otimização de portfólio têm sido desenvolvidos, para serem efetivos. Esses modelos devem ser capazes de quantificar os níveis de risco e retorno de investimentos. O desejo do investidor, de modo geral, quando cria um portfólio, é a maximização do lucro, minimizando o risco e a perda do que foi investido. Para que isso seja realizado, o investidor precisa utilizar de modelos matemáticos que sigam estes princípios.

Os conceitos que incluem a Teoria de Otimização de Portfólio tem sido ferramentas fundamentais para o desenvolvimento e para a evolução do conhecimento em mercado financeiro e tomadas de decisões. A contribuição para essa evolução quantitativa e qualitativa no mercado financeiro, teve início com a publicação da Teoria Moderna de Portfólio de Harry Markowitz [18]. Este método permite a aquisição de carteiras de variância mínima para cada nível de retorno médio esperado (retorno esperado). Para cada nível de retorno esperado, os portfólios eficientes minimizam o risco, que é medido pela variância ou desvio padrão dos retornos passados obtidos através dos dados históricos.

O uso dessa teoria para modelar portfólios do mercado financeiro parte-se da premissa de que os investidores devem considerar o retorno esperado um fator desejável, e a variância dos retornos um fator indesejável. Portanto, relaciona-se o retorno esperado do portfólio $E(R_p)$ a sua variância total (V), que corresponde ao risco total do portfólio. Markowitz mostra que para se obter um portfólio com risco menor e um mesmo nível de retorno, é necessário aplicar o princípio da diversificação dos investimentos no portfólio, procurando uma baixa correlação entre eles, considerando que os investidores aceitam os valores de retornos de cada ativo, de acordo com a distribuição de probabilidades de seus retornos e que os investidores avaliam as carteiras apenas com base no retorno esperado e no desvio padrão dos retornos sobre um período estipulado. Para determinada taxa de retorno, os investidores tendem a minimizar o risco do investimento e para um dado nível de risco, os investidores tendem a maximizar o retorno do investimento. Para esclarecer a Teoria de Portfólios de Markowitz serão analisados os conceitos sobre retorno, variância, correlação, diversificação e fronteira eficiente.

O *retorno* da carteira pode ser representado pela média dos retornos obtidos ao longo do tempo, sendo portanto igual ao valor esperado do dado histórico disponível. O Retorno de um ativo individual (R_i) pode ser calculado usando a equação 1.1 e o retorno esperado do portfólio por:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_i)$$

onde, w_i representa a taxa de participação de cada ativo na composição da carteira e $E(R_i)$ representa o retorno individual médio esperado do ativo i.

A avaliação do risco do modelo de Markowitz é dada pela variância do portfólio que leva em conta a variância do retorno (σ_i^2) de cada ativo e a covariância entre todos os pares de ativos do portfólio (σ_{ij}). Estes são obtidos a partir do dado histórico de retornos de cada ativo (R_i). Assim, para cada R_i, têm-se t observações históricas de retornos, onde T corresponde a um período de tempo, discretizando em anos, meses, semanas, dias, entre outros, dependendo do tipo de informação disponível. Os dados históricos de retornos pode ser representado por uma matriz do tipo:

$$S = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{T1} & \cdots & \rho_{TN} \end{bmatrix}$$

onde ρ_{ti} corresponde ao retorno do ativo i para o período de observação t.

Se por um lado cada ativo contribui para compor o retorno esperado do portfólio, por outro lado contribui também para compor o risco total do portfólio. Dado um histórico de retornos de cada ativo i, quanto maior for a variância da série σ_i^2, maior será o risco de i.

A partir do dado histórico, defini-se a *variância* dos ativos:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\rho_{ti} - \overline{\rho_i})^2$$

Mas como a média de cada dado de retorno para um ativo, em particular, corresponde ao seu retorno esperado $E(R_i)$, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\rho_{ti} - E(R_i))^2$$

E a *covariância* entre dois ativos i e j é dada por:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\rho_{ti} - E(R_i))(\rho_{tj} - E(R_j))$$

onde, $E(R_i)$ e $E(R_j)$ representam o retorno médio esperado dos ativos i e j, respectivamente.

Assim, a matriz das covariâncias, que corresponde à covariância entre todos os pares de ativos é representada por:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Essa avaliação permite prever o quão relacionados estão dois ativos diferentes. Ativos com alto grau de correlação tendem a ser afetados de maneira semelhante diante de determinadas oscilações. Ou seja, investimentos de um mesmo ramo de atividade, estarão sujeitos e serão afetados pelas mesmas adversidades econômicas. Logo, a pretensão é buscar a *diversificação* dos investimentos do portfólio, visando minimizar o efeito mencionado. Faz-se necessário calcular a covariância entre os ativos.

A relação ou não entre ativos de uma carteira irá determinar a minimização do risco. A principal variável para determinar a melhor relação entre os ativos foi denominada por Markowitz de *correlação* e mensura o risco. O coeficiente de correlação entre dois ativos mede o grau de variação entre eles. Quanto maior sua tendência a se moverem simultaneamente, mais alto é seu coeficiente de correlação. A *correlação* entre dois ativos é dada por:

$$\mathrm{corr}(R_i, R_j) = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

1.2.1 Exemplo de Coeficiente de Correlações Diferentes

Considere uma carteira com dois ativos, o coeficiente entre os ativos varia entre -1 e 1, sendo 1 a correlação positiva perfeita, -1 a correlação negativa perfeita e 0 a inexistência de correlação. A Figura 1.1 ilustra uma carteira com dois ativos A e B de correlação igual a 1, eles se movem na mesma direção, o que não proporciona uma melhora na carteira. Isto ocorre porque os ativos reagem da mesma maneira ao mercado, sendo possivelmente do mesmo setor.

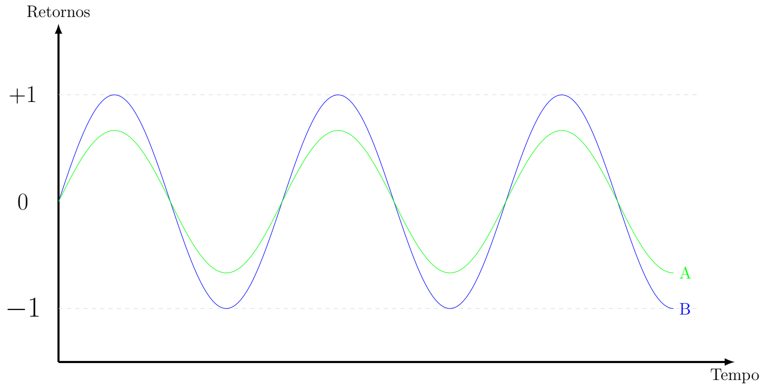

Figura 1.1: Correlação positiva perfeita = 1

Na Figura 1.2 tem-se uma correlação negativa igual a -1, que pode reduzir o risco da carteira a zero ou próximo disso, mantendo o retorno. Isso ocorre porque os ativos A e B reagem a maneiras opostas ao mercado, e possivelmente são ativos de setores diferentes.

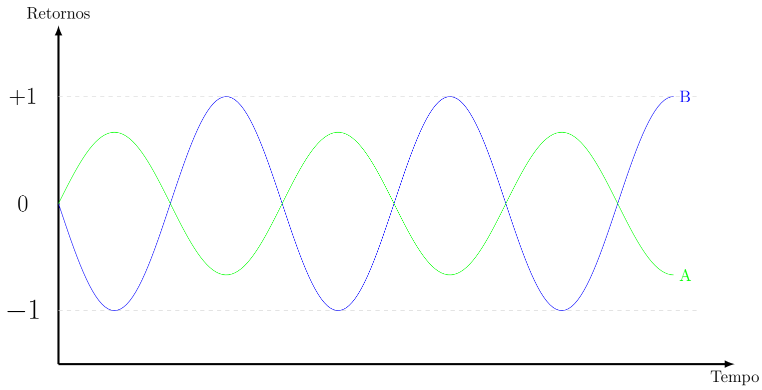

Figura 1.2: Correlação negativa perfeita = -1

A Figura 1.3 considera os ativos A e B de correlação nula. Uma carteira formada por estes ativos não terá redução de riscos através da diversificação.

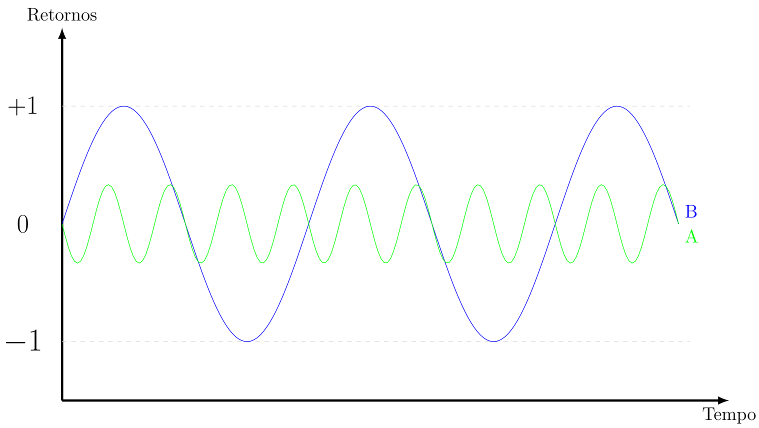

Figura 1.3: Correlação nula = 0

Com esta análise verifica-se que um dos princípios da teoria do portfólio é a redução do risco não sistemático a zero através da inclusão de ativos em uma carteira. Com isso, a desvalorização de um ativo seria neutralizada pela valorização do outro, favorecendo possibilidades de se reduzir uma parte do risco diversificável, à medida que cresce o número de ativos. Observa-se na Figura 1.4 que conforme se amplia a diversificação da carteira por meio da inclusão de mais ativos, seu risco total decresce em função da eliminação do risco diversificável. Esse comportamento é limitado pela presença do risco sistemático, comum a todos os ativos. A partir de certo número de ativos, o risco da carteira se mantém praticamente estável, correspondendo unicamente a sua parte não diversificável.

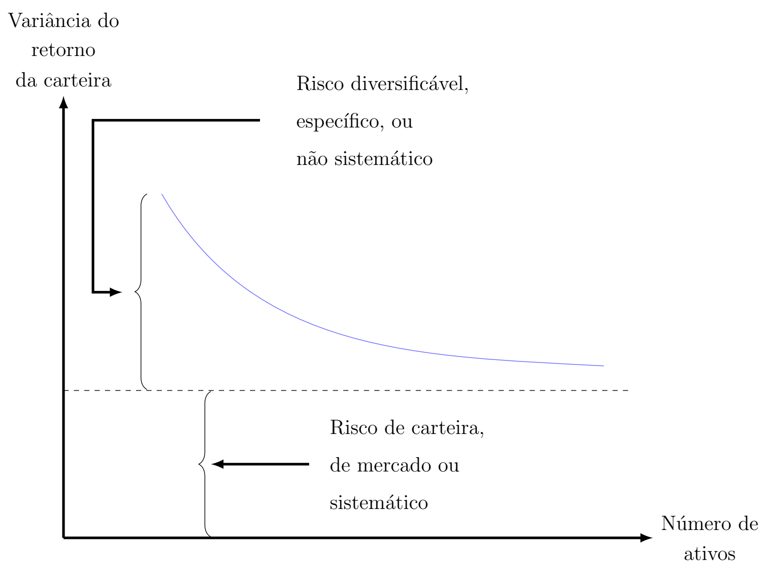

Figura 1.4: Relação entre o risco e a quantidade de ativos na carteira

O risco de um ativo pode ser reduzido por meio da diversificação, permanecendo somente o elemento sistemático, que está relacionado com o comportamento do mercado. Dessa forma, ao compor uma carteira de ativos, a medida relevante passa a ser o risco sistemático, já que o outro componente pode ser eliminado pela diversificação de ativos.

1.2.2 Fronteira Eficiente

Dado um conjunto de ativos, é possível combiná-los formando novas carteiras. Considere o plano cartesiano bi-dimensional no qual x e y são coordenadas que representam o risco e o retorno esperado, respectivamente, e o conjunto formado por todos os portfólios eficientes com todos os possíveis pares de portfólio eficiente. Este conjunto forma a *Fronteira Eficiente*.

Através da teoria de Markowitz, os investidores podem determinar todas as carteiras ótimas, no sentido risco e retorno, e formar a Fronteira Eficiente. Esta, por sua vez, pode ser descrita como o melhor conjunto possível de carteiras, isto é, todas as carteiras têm o mínimo nível de risco para dado nível de retorno. Os investidores se concentrariam na seleção de uma melhor carteira na Fronteira Eficiente e ignorariam as demais consideradas inferiores.

A Figura 1.5 é a visualização da Fronteira Eficiente, onde a parte superior da borda é formada por todo o conjunto de carteiras ótimas.

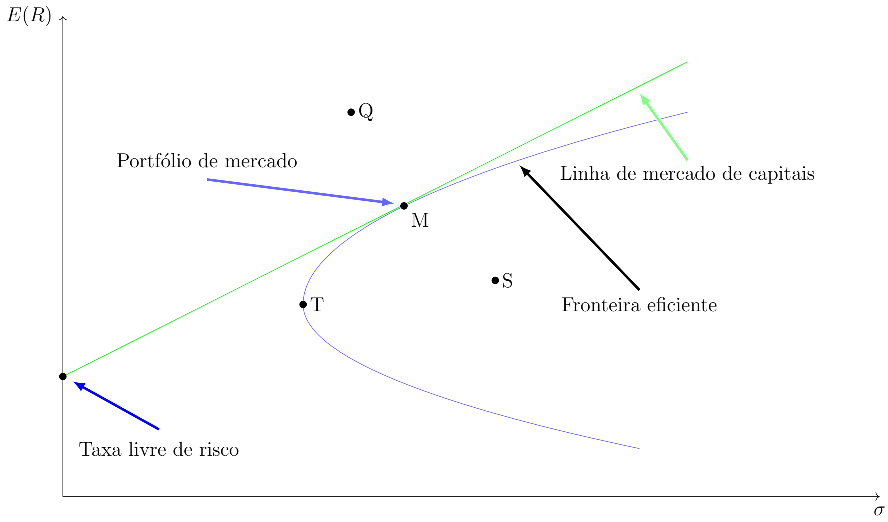

Figura 1.5: Fronteira Eficente de Markowitz

Existem várias terminologias oriundas do estudo sobre Fronteira Eficiente:

- Portfólios de variância mínima são chamados de portfólios de média-variância.
- O grupo formado por todos estes portfólios é chamado de Fronteira Eficiente.
- Adicionando o ativo livre de risco, a fronteira eficiente se torna uma linha reta no sistema de coordenadas retorno esperado/risco (desvio-padrão). Esta linha é chamada de *linha de mercado de capitais*.
- o ponto de tangência da fronteira eficiente com somente ativos de risco e a linha de capitais de mercado é chamado *portfólio tangente* ou *portfólio de mercado*.

A curva de Fronteira Eficiente contém as carteiras com menor nível de risco e maior nível de retorno. Dentro dessa curva, pode-se encontrar diferentes perfis de risco e retorno, os quais devem se adequar ao perfil do investidor. A curva representa as melhores carteiras para diferentes perfis de risco. A grande maioria dos investidores está interessada em manter sempre o retorno desejado. Para isso, uma questão a ser considerada é a possibilidade de reduzir o risco do portfólio, mantendo a expectativa de retorno constante, aumentando o universo de ativos.

Assim, o modelo de Markowitz [18], recomenda que o retorno esperado para um conjunto de ativos é a média ponderada dos retornos esperados para cada ativo individual. Já o risco deste conjunto de ativos não é a média dos riscos dos ativos individuais, mas uma função das variâncias individuais de cada ativo e de uma parcela das covariâncias entre os ativos, calculadas dois a dois. O problema existente para a aplicação da teoria proposta por Markowitz naquela época, devido a quantidade e certa dificuldade dos cálculos necessários ao seu desenvolvimento, levou Sharpe [22] a desenvolver um modelo simplificado. Em seu modelo, diferentemente de Markowitz, não parte do pressuposto que os retornos entre os ativos estão correlacionados entre si, mas sim com um índice único, chamado de *Índice Beta* β, que compara a volatilidade do ativo para com o mercado, ao invés da utilização de covariância. Assim, diminui os cálculos a serem efetuados, ainda que tenha uma eventual perda de precisão, dadas as simplificações introduzidas. O cálculo do Índice Beta utiliza-se a variação conjunta da rentabilidade do investimento com o mercado, calculando a covariância entre estes dois rendimentos, dividindo pela variância do mercado.

Em 1966, William F. Sharpe desenvolveu o que hoje é conhecido como Índice Sharpe [23], este índice indica o retorno que um investimento oferece descontando o quanto um investidor teria se tivesse escolhido por outro investimento menos arriscado. Para fazer essa comparação, o Índice Sharpe baseia-se no retorno de um ativo (R_i), no rendimento do investimento com a taxa livre de risco (R_F) que é base da comparação e na volatilidade do ativo σ_i que se deseja analisar, que pode ser calculado por:

$$I_{\text{Sharpe}} = \frac{R_i - R_F}{\sigma_i}$$

Um alto valor no Índice Sharpe geralmente indica que o ativo em questão compromete a superar o desempenho médio de outras aplicações correndo poucos riscos. Um valor baixo após o cálculo do índice, entretanto, pode ser sinal de que o ativo tenha uma gestão passiva e pouco preocupada em fazer com que seus investidores corram menos riscos.

Um *modelo matemático* que se utiliza da taxa livre de risco para analisar o retorno e risco de investimentos para decidir qual é a melhor escolha de ativos para compor a carteira é o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), *Modelo de Precificação de Ativos Financeiros*. Esse modelo busca calcular um equilíbrio entre o risco e a rentabilidade e, com isso, atribuir uma precificação aos ativos com risco de uma carteira de investimentos. Além do investimento em ativos financeiros, o modelo permite identificar o valor de um projeto, como em um processo produtivo. O cálculo leva em consideração a parte dos riscos do investimento, com a parte livre de riscos, ou menos arriscada possível:

$$E(R) = R_F + \beta(E(R_M) - R_F)$$

onde, $E(R)$ é o retorno esperado que o modelo busca calcular, R_F é a taxa de juros livre de risco, β é o Índice Beta, que relaciona a direção que um investimento toma conforme variações no mercado, ou seja, o risco do investimento comparado a variações na Bovespa, e $E(R_M)$ é o retorno do indicador de mercado. O modelo utiliza a rentabilidade do mercado como um todo. É possível, neste caso, utilizar a rentabilidade do Índice Bovespa no período selecionado.

1.3 Modelo Média-Variância

A partir dos conceitos que descrevem a média, a variância entre ativos e visando obter portfólios eficientes, é possível formular o modelo clássico de Markowitz para a otimização de portfólios da seguinte maneira:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_i) \tag{1.2}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{1.4}$$

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.5}$$

A equação 1.2 apresenta o retorno esperado do portfólio, a equação 1.3 apresenta a variância total do portfólio. A equação 1.4 indica que a taxa de participação w_i de cada investimento deve totalizar 100% do investimento do portfólio. A equação 1.5 impõe a não-negatividade ao conjunto de investimentos w_i.

O problema de média-variância pode ser formulado como um problema de otimização não-linear, cujo objetivo é obter o valor mínimo de variância para determinado nível de retorno desejado. A equação 1.3 é definida sendo a função objetivo a ser minimizada e a equação 1.2 corresponde a uma restrição de retorno mínimo desejado indicada por $E(R_0)$, conforme a equação 1.6 .

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \qquad & V = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}w_iw_j \\
\text{sujeito a:} \qquad & \sum_{i=1}^{N} w_iE(R_i) \geq E(R_0) \\
& \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Alternativamente, é possível modelar o problema de otimização definindo a equação 1.2 como função objetivo, maximizando o retorno esperado, sujeito a um nível máximo de risco que o investidor está disposto a assumir. A equação 1.3 é uma restrição de risco. Assim, a formulação do problema é:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \qquad & \sum_{i=1}^{N} w_iE(R_i) \\
\text{sujeito a:} \qquad & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}w_iw_j \leq V \\
& \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\
& w_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned}$$

1.4 Modelo de Precificação de Ativos Financeiros

Em um portfólio onde não é notável a presença de ativos com e sem riscos, a fronteira eficiente de cada investidor será levada em conta seus níveis de aversão ao risco, de maneira que cada investidor apresentará uma fronteira eficiente diferente. Em contrapartida, na presença de ativos livres de risco, as carteiras escolhidas por qualquer investidor podem ser identificadas sem levar em conta suas preferências de risco.

A Figura 1.6 exemplifica a curva BC de fronteira eficiente sem ativo livre de risco, enquanto ABC representa o conjunto de carteiras de variação mínima.

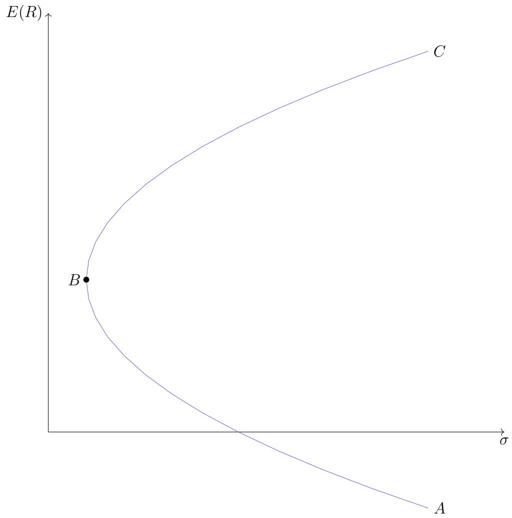

Figura 1.6: Fronteira Eficente sem ativo livre de risco

Quando é introduzido ativos livres de risco, a carteira de qualquer investidor pode ser identificada sem levar em conta as preferências de risco do investidor. Este portfólio encontra-se no ponto de tangência P_i entre a fronteira eficiente de ativos original e na reta que passa pelo retorno sem risco R_F (no eixo vertical) e pelo ponto de tangência P_i. Isso é ilustrado na Figura 1.7, onde P_i representa o portfólio de risco do investidor. Os investidores satisfazem suas preferências de risco, combinando o portfólio P_i com ativos livres de risco.

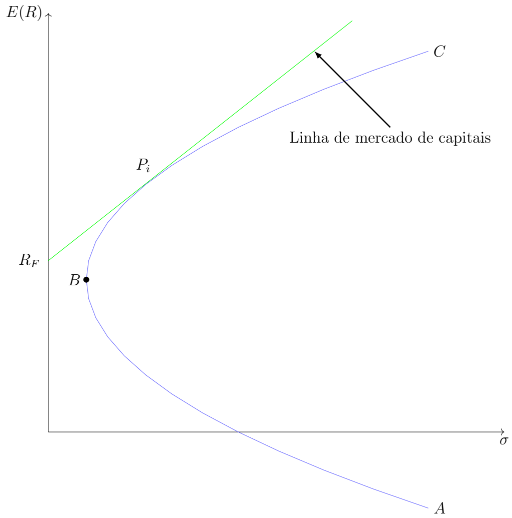

Figura 1.7: Fronteira Eficiente com ativo livre de risco

Se todos os investidores têm expectativas homogêneas e todos tem ativos com a mesma taxa de retorno, então cada um deles terão uma fronteira eficiente como o da Figura 1.7. Além disso, todas as fronteiras serão idênticas. O portfólio de ativos de risco P_i de qualquer investidor será idêntica ao portfólio de ativos de risco de qualquer outro investidor. Se todos os investidores mantêm o mesmo portfólio de risco, então esse é o *portfólio de mercado M* ou a *carteira de mercado M*.

A reta representada na Figura 1.7 é a linha de mercado de capitais. Todos os investidores terão carteiras em algum lugar ao longo da linha do mercado de capitais, e todas as carteiras eficientes estariam ao longo da linha de mercado de capitais. No entanto, nem todos os ativos ou as carteiras encontram-se ao longo da linha do mercado de capitais.

Assim, a função do Modelo de Precificação de Ativos (CAPM) é:

$$E(R_i) = R_F + \beta_i(E(R_M) - R_F) \tag{1.7}$$

onde, $E(R_i)$ representa o retorno esperado, R_F o retorno do ativo livre de risco, $E(R_M)$ o retorno do indicador de mercado e β_i o risco sistemático.

A partir da derivação da fronteira eficiente, sabe-se que todas as carteiras de ativos com e sem risco, exceto aqueles que são eficientes, encontram-se abaixo da linha de mercado de capitais. Através dessa observação, tem-se o teorema a seguir.

Teorema 1.1. *Existe um único valor P_i de ativos de risco tal que qualquer portfólio eficiente pode ser construído como uma combinação do valor P_i e do ativo livre de risco.*

Demonstração: Considere um ponto qualquer na região eficiente, construa uma reta entre o ativo livre de risco e aquele ponto. Denota-se o ângulo entre a linha traçada e o eixo horizontal por θ. Para qualquer portfólio M de ativos de risco, a tangente do ângulo θ é dada por:

$$\tan\theta = \frac{\overline{R}_M - R_F}{\sigma_M}$$

onde $\overline{R}_M$ é o retorno esperado do portfólio M, R_F é o retorno esperado do ativo livre de risco e σ_M é o desvio padrão do portfólio M. ∎

A relação linear entre o beta e o retorno pode ser analisada na figura 1.8 .

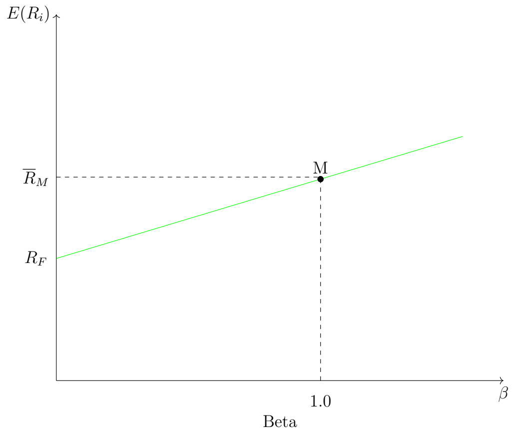

Figura 1.8: Relação Retorno-Beta

Logo, o CAPM diz que o retorno esperado é igual à taxa sem risco, acrescido de um prêmio pelo risco de se investir nesse ativo, de modo que se observa uma relação linear positiva entre o risco sistemático e a rentabilidade esperada.

Capítulo 2

Aplicações aos Problemas de Otimização de Portfólio

O objetivo principal deste capítulo consiste em exibir as aplicações dos modelos de Markowitz e o Modelo de Precificação de Ativos Financeiros (CAPM) em carteiras de portfólios. Além disso, será apresentada uma aplicação envolvendo o princípio de diversificação de ativos utilizando como estratégia de investimento o *Deep Value Investing* juntamente com o Modelo Média-Variância. Por fim, uma aplicação no Ensino.

2.1 Aplicação da Fronteira de Markowitz - Cenário com 2 ativos

O critério para esta aplicação utiliza-se de dados históricos de ativos para estimar os retornos e riscos esperados, de modo a evitar a subjetividade e a dificuldade em fazer previsões. Isso parte do pressuposto que os dados passados são relevantes na determinação de dados futuros. Nesta aplicação foram utilizados os dados históricos das ações de duas empresas de capital aberto na Bolsa de Valores Oficial do Brasil (B3) [8], os dados dos ativos selecionados foram adquiridos da base de dados do Yahoo Finanças [26] as análises foram feitas mensalmente, no período de 2 anos, de 31 de dezembro de 2018 a 30 de novembro de 2020.

A Fronteira Eficiente de Markowitz entre 2 ativos foi construída através do editor de planilhas Excel® 16.0 para armazenar os dados referentes as cotações dos ativos da Magazine Luiza S.A. (MGLU3.SA) e da Lojas Renner S.A. (LREN3.SA).

O retorno mensal dos ativos e do portfólio foram calculados com uma taxa de participação de 50% de cada ativo no período analisado, conforme a Tabela 2.1, e a média, a variância, o desvio padrão, a covariância e a correlação dos ativos presentes na Tabela 2.2.

Data	Magazine Luiza S.A. MGLU3.SA Fechamento	Lojas Renner S.A. LREN3.SA Fechamento	Magazine Luiza S.A. MGLU3.SA Retorno (%)	Lojas Renner S.A. LREN3.SA Retorno (%)	Portfólio Retorno (%)
30 de nov. de 2020	24,92	43,47	6,68%	-2,53%	2,07%
31 de out. de 2020	23,36	44,6	-5,04%	19,28%	7,12%
01 de out. de 2020	24,6	37,39	10,41%	-5,34%	2,54%
01 de set. de 2020	22,28	39,5	-3,84%	-8,80%	-6,32%
01 de ago. de 2020	23,17	43,31	15,62%	5,69%	10,65%
01 de jul. de 2020	20,04	40,98	12,65%	-1,44%	5,60%
01 de jun. de 2020	17,79	41,58	11,33%	8,45%	9,89%
01 de mai. de 2020	15,98	38,34	31,74%	1,54%	16,64%
01 de abr. de 2020	12,13	37,76	27,42%	14,60%	21,01%
01 de mar. de 2020	9,52	32,95	-22,79%	-37,03%	-29,91%
31 de jan. de 2020	12,33	52,33	-9,40%	-7,22%	-8,31%
31 de dez. de 2019	13,61	56,4	17,02%	2,38%	9,70%
30 de nov. de 2019	11,63	55,09	5,92%	8,49%	7,20%
31 de out. de 2019	10,98	50,78	1,10%	2,07%	1,59%
01 de out. de 2019	10,86	49,75	20,40%	0,71%	10,55%
01 de set. de 2019	9,02	49,4	2,15%	-0,16%	1,00%
01 de ago. de 2019	8,83	49,48	10,10%	6,52%	8,31%
01 de jul. de 2019	8,02	46,45	24,92%	0,80%	12,86%
01 de jun. de 2019	6,42	46,08	7,72%	7,09%	7,40%
01 de mai. de 2019	5,96	43,03	2,58%	4,64%	3,61%
01 de abr. de 2019	5,81	41,12	10,67%	7,28%	8,97%
01 de mar. de 2019	5,25	38,33	-0,38%	1,19%	0,40%
31 de jan. de 2019	5,27	37,88	-2,77%	-4,87%	-3,82%
31 de dez. de 2018	5,42	39,82			

Tabela 2.1: Cotação e Retorno dos 2 ativos

	Magazine Luiza S.A. MGLU3.SA Retorno (%)	Lojas Renner S.A. LREN3.SA Retorno (%)	Portfólio Retorno (%)
Média	7,57%	1,01%	4,29%
Variância	0,014915666	0,010787262	0,009827665
Desvio Padrão	12,21%	10,39%	9,91%
Covariância	0,006803865		
Correlação	0,536387629		

Tabela 2.2: Dados Estatísticos dos 2 ativos e do portfólio

Para construir o gráfico da Fronteira de Markowitz foram realizadas combinações na taxa de participação dos ativos de 5% em 5% e calculado a média, a variância e o desvio padrão dos ativos conforme a Tabela 2.3. Tem-se que os valores do desvio padrão são representados por valores em x e os valores da média são representados por valores em y.

Taxa de Participação				
MGLU3.SA	**LREN3.SA**	**Média**	**Variância**	**Desvio Padrão**
0,00%	100,00%	1,01%	0,010787262	10,39%
5,00%	95,00%	1,34%	0,01041916	10,21%
10,00%	90,00%	1,67%	0,010111535	10,06%
15,00%	85,00%	2,00%	0,009864385	9,93%
20,00%	80,00%	2,33%	0,009677711	9,84%
25,00%	75,00%	2,65%	0,009551513	9,77%
30,00%	70,00%	2,98%	0,009485792	9,74%
35,00%	65,00%	3,31%	0,009480546	9,74%
40,00%	60,00%	3,64%	0,009535776	9,77%
45,00%	55,00%	3,97%	0,009651482	9,82%
50,00%	50,00%	4,29%	0,009827665	9,91%
55,00%	45,00%	4,62%	0,010064323	10,03%
60,00%	40,00%	4,95%	0,010361457	10,18%
65,00%	35,00%	5,28%	0,010719067	10,35%
70,00%	30,00%	5,61%	0,011137153	10,55%
75,00%	25,00%	5,93%	0,011615715	10,78%
80,00%	20,00%	6,26%	0,012154753	11,02%
85,00%	15,00%	6,59%	0,012754268	11,29%
90,00%	10,00%	6,92%	0,013414258	11,58%
95,00%	5,00%	7,25%	0,014134724	11,89%
100,00%	0,00%	7,57%	0,014915666	12,21%

Tabela 2.3: Retorno e Risco dos 2 ativos variando a taxa de participação

Através do gráfico da Figura 2.1 observa-se que a Lojas Renner S.A. tem o retorno mais baixo de $1,01\%$ com um risco de $10,39\%$ e que a Magazine Luiza S.A. tem o maior retorno de $7,57\%$ com um risco mais alto que o da Lojas Renner S.A. de $12,21\%$.

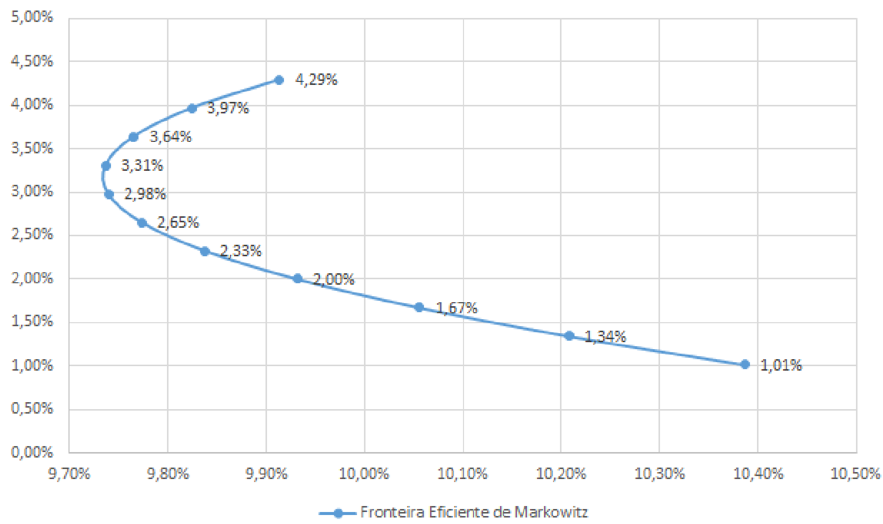

Figura 2.1: Fronteira Eficente de Markowitz Para os 2 ativos

O *portfólio de risco mínimo* é aquele que consegue dentre as combinações gerar um retorno maior correndo um menor risco. Logo, é possível visualizar que o portfólio de risco mínimo ocorre quando é investido 65% na Lojas Renner S.A. e 35% na Magazine Luiza S.A. gerando um retorno médio de $3,31\%$ com um risco de $9,74\%$.

2.2 Aplicação - Cenário com 6 ativos

Quando se considera uma quantidade maior que 2 ativos as taxas de participação de ativos podem ser variadas, isso faz com que aumente a quantidade de cálculos para gerar a fronteira eficiente. Assim, para viabilizar uma aplicação com um maior número de ativos foi utilizado *Google Colaboratory* [14], um documento executável que permite escrever códigos Phyton no navegador, para implementar o Modelo Média-Variância. O código utilizado na aplicação se encontra no Apêndice A, e por utilizar dados on line do Yahoo Finanças o código fica sujeito a adaptações.

Considerando o cenário com 5 ativos do mercado brasileiro foi adotado a estratégia de investimentos de Luiz Barsi Filho [9], o maior investidor pessoa física do Brasil, que utiliza da análise fundamentalista para examinar os fundamentos, o histórico de dividendos e a saúde financeira, perspectiva do setor e comprometimento do gestor. Foi escolhido 1 ativo para ser usado como referência para verificar se a carteira tem um rendimento maior ou menor que o índice Ibovespa. Os principais pontos para a escolha de uma boa ação são:

- Setores cujos produtos ou serviços são consumidos por longos períodos de tempo, que são considerados setores perenes, dentre eles estão o setor bancário, transmissão e distribuição de energia elétrica, papel e celulose.

- Empresas Lucrativas e que tenham boa gestão.

- Empresas que distribuem dividendos regularmente.

As 5 ações escolhidas, segundo os critérios supracitados são: Itaú Unibanco (ITUB3.SA), o maior banco do Brasil; a TAESA (TAEE3.SA), um dos maiores grupos privados de transmissão de energia elétrica do Brasil em termos de Receita Anual Permitida (RAP); a Unipar Carbocloro (UNIP3.SA), empresa química fabricante de cloro, soda e derivados para usos industriais; a Klabin (KLBN3.SA), a maior produtora e exportadora de papéis do Brasil, com foco na produção de celulose, papéis e cartões para embalagens, embalagens de papelão ondulado e sacos industriais, além de comercializar madeira em toras; e o Grupo Energisa (ENGI3.SA), composta por 18 empresas, 13 delas empresas de distribuição de energia elétrica, o sexto maior Grupo de distribuição de energia do Brasil. E a ação utilizada para comparar com o índice Ibovesa foi o BOVA11, que é um fundo de índice que apresenta rentabilidade semelhante ao Ibovespa (IBOV), o principal índice da B3, a Bolsa de valores brasileira, e por ser uma cotação mais acessível. Portanto, é possível começar a investir nesse ativo mesmo com pouco dinheiro.

Primeiramente foi adquirido os dados históricos da base de dados do Yahoo Finanças [26], no período de 5 anos, de 2016 a 2020 conforme a Tabela 2.4, que contém 1242 dados (linhas) de cada um dos 6 ativos (colunas).

	Ativos					
Data	**ITUB3.SA**	**TAEE3.SA**	**UNIP3.SA**	**KLBN3.SA**	**ENGI3.SA**	**BOVA11.SA**
2016-01-04	10.639608	6.562332	2.779724	2.100812	2.392282	41.099998
2016-01-05	10.865295	6.562332	2.779724	2.100812	2.392282	41.180000
2016-01-06	10.800815	6.562332	2.779724	2.100812	2.392282	40.500000
2016-01-07	10.671846	6.562332	2.779724	2.100812	2.392282	39.470001
2016-01-08	10.837661	6.562332	2.779724	2.100812	2.392282	39.340000
...	...	...	...	...	...	...
2020-12-22	27.236879	11.000000	45.950001	5.220000	16.161219	112.250000
2020-12-23	27.651653	10.970000	46.750000	5.110000	16.742628	113.139999
2020-12-28	28.076303	11.210000	47.000000	5.090000	16.752481	114.699997
2020-12-29	27.967672	11.200000	46.950001	5.210000	16.693356	114.970001
2020-12-30	27.582525	11.200000	48.900002	5.390000	16.762337	114.650002

Tabela 2.4: Dados Históricos dos 6 ativos

Foi gerado um arquivo no formato *csv* para salvar essa base de dados, caso ocorra algum problema na comunicação dos dados, como uma falha no servidor do Yahoo Finanças, alteração de nome de algum ativo da bolsa, ou alteração na biblioteca utilizada. A Tabela 2.5 contém os dados estatísticos das cotações dos ativos no período analisado, contendo a quantidade de dados observados, a média, desvio padrão, o valor mínimo e máximo de cada ativo, através desta tabela foram feitos alguns gráficos para realizar a análise de dados.

	Ativos					
	ITUB3.SA	**TAEE3.SA**	**UNIP3.SA**	**KLBN3.SA**	**ENGI3.SA**	**BOVA11.SA**
Quantidade	1242.000000	1242.000000	1242.000000	1242.000000	1242.000000	1242.000000
Média	22.094043	7.212610	19.348316	4.635559	8.751082	77.553543
Desvio Padrão	5.544078	1.443817	12.718730	1.230359	3.942694	18.893810
Valor Mínimo	9.916484	4.719513	2.594699	2.100812	2.038414	36.450001
25%	18.205039	5.747649	4.009305	4.011260	5.336030	62.200001
50%	22.298738	7.151644	25.881572	4.635306	8.901560	76.500000
75%	26.934077	8.371744	30.053031	5.300899	12.339122	93.749998
Valor Máximo	31.322224	11.277073	48.267452	8.435992	17.442291	115.209999

Tabela 2.5: Dados Estatísticos dos 6 ativos

O *primeiro* foi um histograma (Figura 2.2) dos ativos para tornar fácil a visualização dos dados históricos, verificando a frequência do valor de cotações e a variação de cada ativo no decorrer destes 5 anos, no eixo x tem-se o valor das cotações de cada ativo e no eixo y tem-se a contagem de quantas vezes cada faixa de valores aparecem no período analisado.

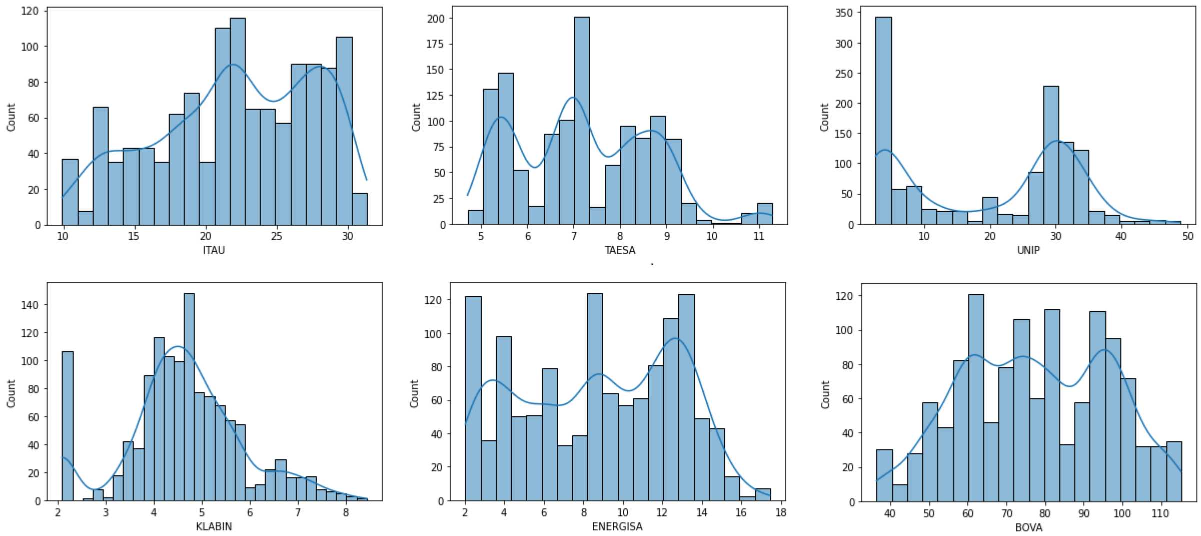

Figura 2.2: Histograma dos 6 ativos

O *segundo* foi um *Box Plot*, diagrama de caixa (Figura 2.3), para visualizar o valor mínimo e o valor máximo de cada ação. No *Box Plot* é possível visualizar o valor mínimo na primeira linha vertical, 25% das cotações na segunda linha vertical, a mediana na terceira linha vertical, 75% das cotações na quarta linha vertical e o valor máximo na quinta linha vertical. Observa-se que na ação da KLBN3.SA tem um *outlier*, isso significa que houve uma subida repentina da ação que acabou saindo fora do padrão da base de dados. Portanto, o *Box Plot* é interessante para identificar ações que tiveram uma valorização alta repentina ou uma desvalorização alta repentina.

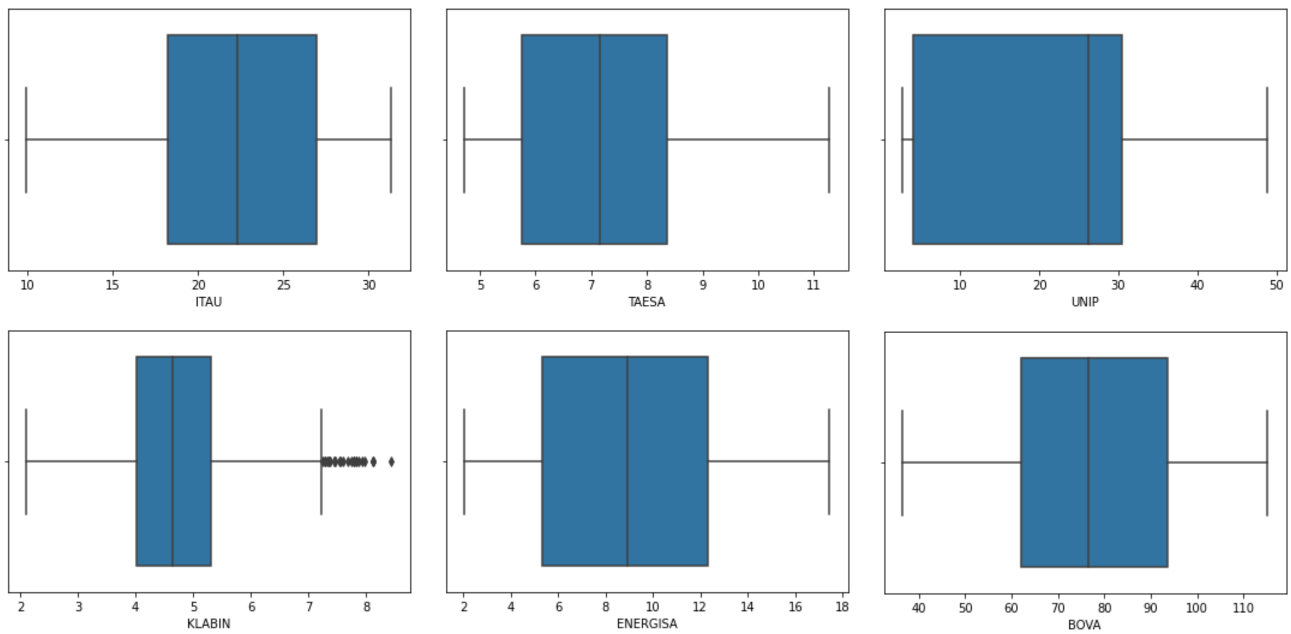

Figura 2.3: *Boxplot* dos 6 ativos

E o *terceiro* foi o gráfico de linhas com o histórico das ações (Figura 2.4). Para fazer o comparativo entre as ações foi preciso normalizar os valores das ações para analisar o crescimento proporcional de cada uma delas. A importância deste gráfico é a possibilidade de visualizar o comportamento da valorização ou desvalorização da carteira de investimentos.

Foi calculado o retorno anual de cada ativo, multiplicando o retorno médio diário por 246 (média de dias por ano que a Bolsa funciona), e o retorno médio anual da carteira, somando o retorno dos ativos exceto o BOVA11 e dividindo por 5 para comparar se a composição da carteira tem um melhor ou pior desempenho que o índice Ibovespa.

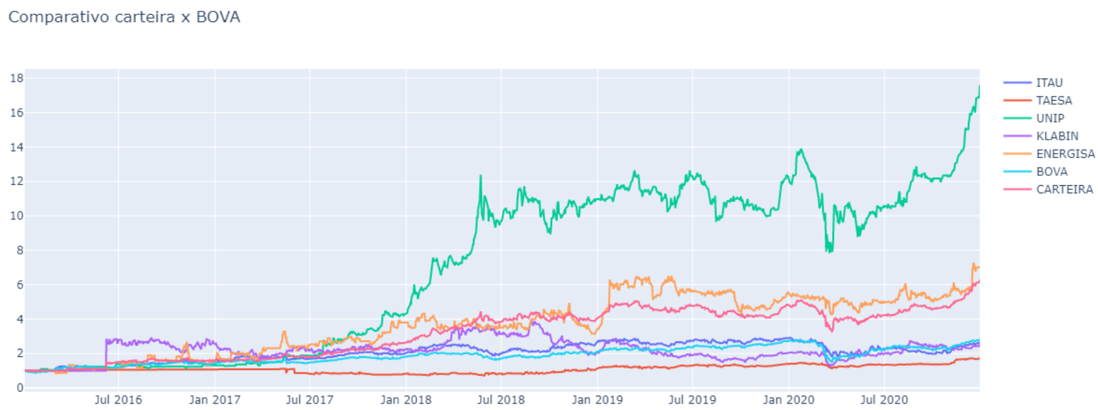

Figura 2.4: Histórico do preço das ações - normalizado

Pela Figura 2.5 é possível visualizar que com essa composição, a carteira composta por esses ativos com uma mesma taxa de participação já supera o índice Ibovespa tendo assim um melhor retorno, porém não o mais eficiente.

Figura 2.5: Comparativo Carteira x BOVA11

Por fim, de acordo com os cálculos, o maior retorno obtido foi do ativo UNIP3.SA e o pior desempenho foi do ativo TAEE3.SA (Tabela 2.6).

Ativos	Retorno (%)
ITAU	23.337882
TAESA	16.510067
UNIP	66.295147
KLABIN	45.131770
ENERGISA	61.780884
BOVA	24.249759

Tabela 2.6: Retorno Médio Anual dos 6 ativos

Além dos retornos, calculou-se a variância e a covariância dos ativos, os quais estão dispostos no gráfico de calor da Figura 2.6, que representa a volatilidade dos ativos, quanto mais vermelho indica maior risco e mais azul menor risco. Assim, o ativo da KLBN3.SA apresenta a maior variância, a ENGI3.SA a segunda maior variância, e a maior covariância dos ativos ITUB3.SA e BOVA11.SA.

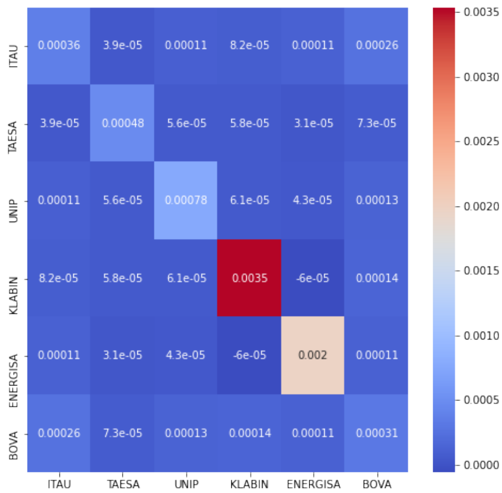

Figura 2.6: Volatilidade dos 6 ativos

Para obter a carteira eficiente foi necessário gerar 10000 carteiras randômicas com diversas taxas de participações e calcular o Índice Sharpe de cada uma delas utilizando a Taxa Selic dos anos de 2016 a 2020. Com isso, tem-se o gráfico das carteiras na Figura 2.7, onde os pontos do gráfico representam as 10000 carteiras, no eixo x tem-se a volatilidade esperada e no eixo y tem-se o retorno esperado da carteira.

A carteira de risco mínimo é a que apresenta o melhor Índice Sharpe representada pelo ponto vermelho com um retorno esperado de $39,80\%$ e com uma volatilidade esperada de $23,22\%$.

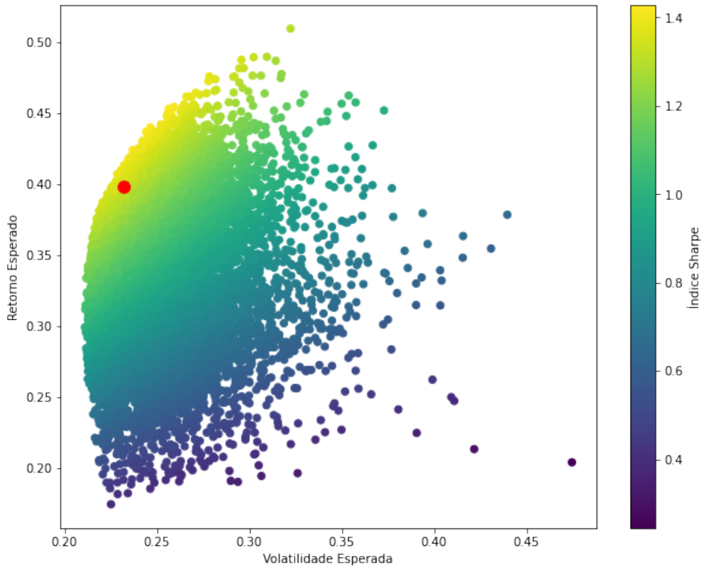

Figura 2.7: Fronteira Eficiente de Markowitz para os 6 ativos

Portanto, a carteira de risco mínimo conta com uma taxa de participação de $34,05\%$ de ITUB3.SA, $9,92\%$ de TAEE3.SA $30,26\%$ de UNIP3.SA, $10,28\%$ de KLBN3.SA, $9,21\%$ de ENGI3.SA e $6,28\%$ de BOVA11.SA. Pela Figura 2.8 é possível confirmar que o comportamento do gráfico da carteira com taxas de participações iguais com a carteira otimizada são parecidos, ou seja, elas tem volatilidades semelhantes porém a carteira otimizada apresenta um melhor retorno. Para exemplificar, caso uma pessoa física investisse um valor de $R\$5000,00$ na carteira de risco mínimo no final desses 5 anos ela teria um valor de $R\$37297,49$.

Figura 2.8: Comparativo: Carteira x Carteira Otimizada

2.3 Aplicação - Precificação de 5 ativos com CAPM

Nesta aplicação é utilizado o Modelo de Precificação de Ativos (CAPM). A base de dados utilizada é a mesma que da seção 3.2, com os ativos Itaú, Taesa, Unip, Klabin e Energisa, analisadas no mesmo período, de 2016 a 2020. O objetivo desta aplicação é comparar a carteira com o índice Ibovespa. O código utilizado nesta aplicação se encontra no Apêndice B, e por utilizar dados on line do Yahoo Finanças o código fica sujeito a adaptações. Primeiramente foi feito o cálculo do índice Beta para todas as ações do portfólio, que pode ser encontrado usando a Regressão Linear ou usando a covariância e a variância dos 5 ativos com o BOVA11 que é o ativo utilizado para comparar com o índice Ibovespa.

Para determinar o índice Beta foi utilizada a regressão linear simples, uma técnica estatística que busca comparar a taxa de retorno de um ativo com o BOVA11, que pode ser apresentada por de uma reta. Considerando, BOVA11 $\times$ ITUB3.SA, a reta que aproxima os dados dos retornos é

$$y = 0.8266413682322937x + 0.00013371453782834076$$

conforme a Figura 2.9. Assim, tem-se que 0.8266413682322937 é o Beta do ativo da ITUB3.SA.

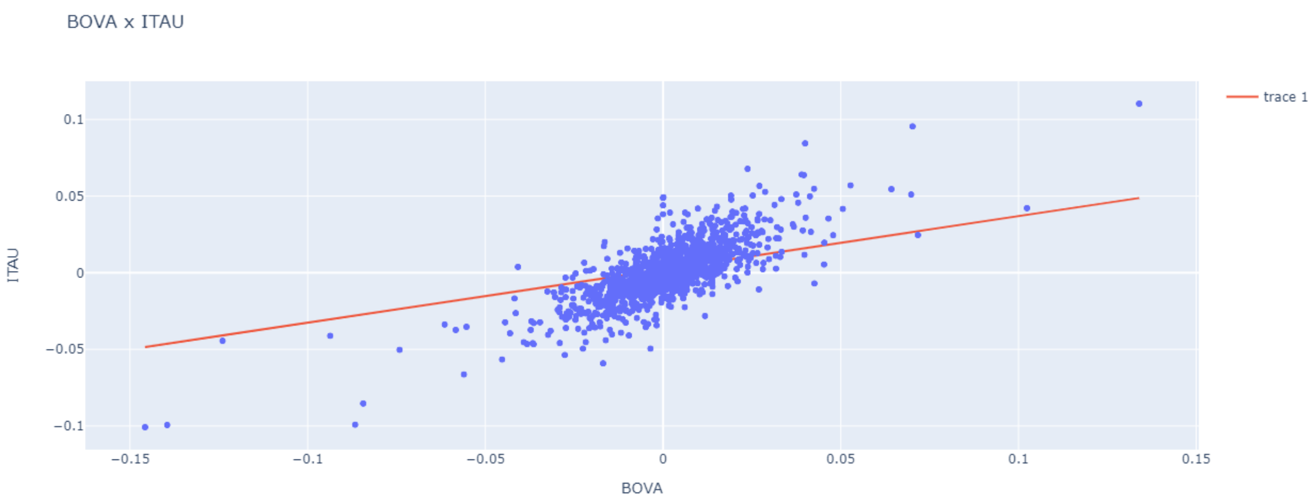

Figura 2.9: Comparativo dos Retornos: BOVA x ITAU

O outro modo para encontrar o Beta do ativo da ITUB3.SA é feito por

$$\beta_{ITAU} = \frac{\text{Covariância entre ITAU e BOVA11}}{\text{Variância do BOVA11}}$$

Assim,

$$\beta_{ITAU} = \frac{0.06378675621012052}{0.07716376007956556} = 0.8266413682322937$$

Encontrado o Beta das 5 ações o próximo passo foi calcular o retorno esperado de cada ativo através da Equação 1.7. Assim, a Tabela 2.7 apresenta o retorno esperado de cada ativo. Nota-se pela Tabela 2.7 que um investimento feito no ativo ITUB3.SA tem o melhor ganho de 21.42% de retorno compensado pelo risco em investir neste ativo, enquanto a TAEE3.SA tem o menor ganho de 11.76% de retorno compensado pelo risco em investir no ativo. O interessante dessa métrica é combiná-la com outros cálculos já feitos.

Ativos	Retorno Esperado $E(R_i)$
ITAU	21.41658265341971
TAESA	11.760988565296502
UNIP	14.56354091260903
KLABIN	15.173620719781573
ENERGISA	13.644180155843097

Tabela 2.7: Retorno Esperado dos 5 ativos

Logo, o cálculo do CAPM do portfólio eficiente da seção 3.2 é realizado através da equação 1.2, onde os w_i são as taxas de participações do portfólio eficiente:

$$E(R_p) = 0,3405*21,42+0,0992*11,76+0,3026*14,56+0,1028*15,17+0,0921*13,65 = 15,68$$

Portanto, o portfólio eficiente tem um ganho de $15,68\%$ de retorno compensado pelo risco de se investir neste portfólio.

2.4 Aplicação - Cenário com 20 ativos

O objetivo desta aplicação é mesclar uma estratégia de seleção de ações, o *Deep Value Investing* [27], com o modelo Média-Variância de Markowitz. O *Deep Value Investing* segue a premissa de que o mercado financeiro não é totalmente eficiente. Isso faz com que ações fiquem precificadas acima ou abaixo do seu valor real. O motivo disso ocorrer pode ser por ter problemas na administração ou descrença sobre o futuro da empresa, perspectivas ruins no setor ou por ter o preço das ações cair muito constantemente. Dessa forma, caso um investidor compre uma ação descontada em relação ao seu valor real, e se as expectativas do mercado sobre a ação não se concretizarem e não der bons resultados, o investidor pode ter maiores ganhos no longo prazo.

O critério para escolher os 20 ativos desta aplicação por *Value Investing* são:

- A ação deve ter mais de $R\$200,00$ de liquidez diária.
- Remover empresas com Margem Ebit negativa do ranking.
- Listar as ações restantes por TEV/Ebit.
- Escolher as 20 ações com TEV/Ebit mais baixo.
- Rebalancear a carteira trimestralmente.

Seguir esses critérios faz com que os ativos selecionados sejam os mais bem negociados da bolsa, elimina as ações que dão prejuízo, que estão em recuperação judicial ou cujos papéis valem centavos e ordenar os ativos em que a razão do Valor Total da Firma (Valor de Mercado + Dívida Líquida) e o Lucro Operacional da empresa no período de escolha seja o mais baixo.

Foram selecionados 20 ativos presentes na B3 [8] conforme a Tabela 2.8. Os dados históricos dos ativos selecionados foram adquiridos da base de dados do Yahoo Finanças [26] e as análises foram feitas diariamente no período de 5 anos, de 2016 a 2020. Foram observados 1242 dados e calculados a média, desvio padrão, valor mínimo e máximo que cada um dos ativos atingiu durante esse período de acordo com a Tabela 2.9

Ativos	
MNPR3.SA	PFRM3.SA
MRFG3.SA	TAEE3.SA
WIZS3.SA	JBSS3.SA
ALUP11.SA	CMIG4.SA
TRPL4.SA	POSI3.SA
GOAU3.SA	EQTL3.SA
SEER3.SA	UNIP3.SA
CPLE3.SA	CSMG3.SA
SMLS3.SA	VALE3.SA
SBSP3.SA	BOVA11.SA

Tabela 2.8: 20 ativos selecionados na B3

Ativos	Quantidade	Média	Desvio Padrão	Valor Mínimo	25%	50%	75%	Valor Máximo
MNPR3.SA	1242.000000	3.823728	1.446092	1.900000	2.650000	3.190000	5.065000	7.100000
MRFG3.SA	1242.000000	7.987338	3.008776	4.904859	6.034657	6.625515	8.714530	17.869112
WIZS3.SA	1242.000000	8.966186	2.371270	5.061675	7.112474	8.787411	10.161046	16.038658
ALUP11.SA	1242.000000	17.962954	4.821787	7.581772	14.745896	16.432737	22.829967	28.595663
TRPL4.SA	1242.000000	13.910080	4.507398	6.482629	10.584508	11.392358	18.666039	26.651421
GOAU3.SA	1242.000000	5.273452	1.919452	0.897171	3.964772	5.502421	6.746684	9.625727
SEER3.SA	1242.000000	17.415366	5.585340	4.659341	13.901977	15.738793	21.922871	31.917297
CPLE3.SA	1242.000000	2.828057	1.743981	0.783060	1.534861	1.776701	4.420864	7.521785
SMLS3.SA	1242.000000	25.387870	9.077126	5.614783	19.769906	24.752284	31.359332	48.328125
SBSP3.SA	1242.000000	34.912891	11.800282	14.400975	25.927906	30.399213	44.913534	63.698132
PFRM3.SA	1242.000000	9.268708	35.427165	3.100000	4.400000	5.760000	7.879985	444.000000
TAEE3.SA	1242.000000	6.704283	1.342060	4.386893	5.342569	6.647615	7.781725	10.482292
JBSS3.SA	1242.000000	14.125218	6.749969	5.626042	8.902293	10.697366	20.816147	31.406322
CMIG4.SA	1242.000000	7.301736	2.550787	2.588987	5.339155	6.062815	9.873926	12.517577
POSI3.SA	1242.000000	3.302004	1.621968	1.185166	2.242689	3.099339	3.619104	11.040193
EQTL3.SA	1242.000000	13.894223	4.888677	5.874737	10.187526	12.101844	17.928874	25.453173
UNIP3.SA	1242.000000	18.825381	12.374976	2.524571	3.900944	25.182061	29.240777	46.962910
CSMG3.SA	1242.000000	11.828609	4.250302	2.288311	9.066231	11.096511	15.674707	19.757368
VALE3.SA	1242.000000	36.321551	15.323389	7.039796	24.257576	40.175711	46.562443	84.015129
BOVA11.SA	1242.000000	77.553543	18.893810	36.450001	62.200001	76.500000	93.749998	115.209999

Tabela 2.9: Dados estatísticos dos 20 ativos

O ativo BOVA11.SA serviu como indicador de desempenho de mercado e foi calculado o retorno anual de cada ativo, multiplicando o retorno médio diário por 246 (média de dias por ano que a Bolsa opera), e o retorno médio anual da carteira, somando o retorno dos 19 ativos, exceto o BOVA11.SA e dividindo por 19, conforme a Tabela 2.10.

Ativo	Retorno (%)	Ativo	Retorno (%)
MNPR3.SA	64.785501	**PFRM3.SA**	1995.254778
MRFG3.SA	27.763572	**TAEE3.SA**	16.510076
WIZS3.SA	14.637600	**JBSS3.SA**	29.869827
ALUP11.SA	25.377857	**CMIG4.SA**	36.924300
TRPL4.SA	28.775796	**POSI3.SA**	43.828964
GOAU3.SA	52.446228	**EQTL3.SA**	30.525270
SEER3.SA	31.747340	**UNIP3.SA**	66.295146
CPLE3.SA	44.530860	**CSMG3.SA**	39.718146
SMLS3.SA	21.761633	**VALE3.SA**	52.957418
SBSP3.SA	28.445538	**BOVA11.SA**	24.249759

Tabela 2.10: Retorno Médio anual dos 20 ativos

Observa-se pela Tabela 2.10 que o ativo PRFM3.SA teve o maior retorno médio, porém a alta foi repentina e manteve-se por um curto período em alta que pode ser ser visto na Figura 2.10. O segundo maior retorno foi do ativo UNIP3.SA e três ativos que tiveram o pior desempenho foram WIZS3.SA, TAEE3.SA e SMLS3.SA.

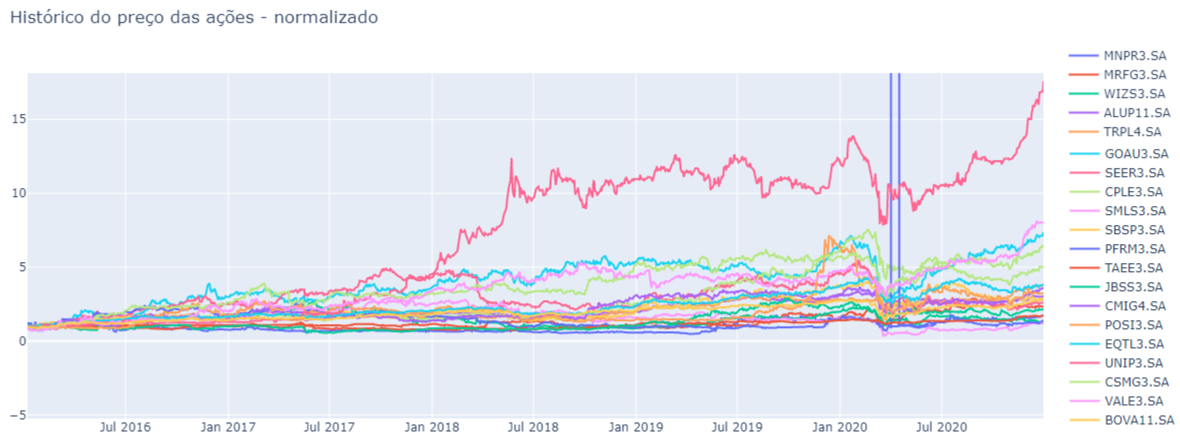

Figura 2.10: Histórico do Preço de Ações - normalizado

Os cálculos da variância, do desvio padrão, da covariância e da correlação foram utilizados para medir os riscos da carteira e na sequência foram gerados portfólios aleatórios para determinar a taxa de participação de cada ativo para obter a carteira otimizada. Assim, a taxa de participação da carteira de risco mínimo foi organizada na Tabela 2.11.

Ativo	Participação(%)	Ativo	Participação (%)
MNPR3.SA	7.459657	**PFRM3.SA**	6.628306
MRFG3.SA	0.200698	**TAEE3.SA**	9.220533
WIZS3.SA	6.128189	**JBSS3.SA**	0.038185
ALUP11.SA	7.241891	**CMIG4.SA**	4.953554
TRPL4.SA	4.821200	**POSI3.SA**	7.859084
GOAU3.SA	2.174071	**EQTL3.SA**	5.923910
SEER3.SA	1.915521	**UNIP3.SA**	6.980297
CPLE3.SA	7.355304	**CSMG3.SA**	2.822815
SMLS3.SA	1.635518	**VALE3.SA**	8.876049
SBSP3.SA	0.854359	**BOVA11.SA**	6.910861

Tabela 2.11: Taxa de Participação dos 20 ativos

Comparando essa aplicação com o cenário de 6 ativos é possível concluir que: com a inclusão de mais ativos que satisfaçam os critérios do *Value Investing* é possível observar que o risco diminui e o retorno também diminui, porém o risco diminui mais que o retorno com a inclusão de ativos e é isso que o investidor deve levar em conta para compor a carteira de investimentos. Considerando o mesmo valor inicial de investimento da seção 3.2, de $R\$5000,00$, na carteira de risco mínimo com 20 ativos, no final de 5 anos o investidor teria um valor de $R\$22609,93$. Há uma diferença de 14% entre o retorno de 6 ativos e com 20 ativos, porém o risco diminui com o acréscimo de ativos.

2.5 Aplicação no Ensino - Matriz de Covariância

Partindo do pressuposto da BNCC (p.274) de que "todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas" o objetivo desta seção é mostrar que conceitos estatísticos e de finanças podem ser trabalhados no Ensino de maneira a despertar a curiosidade aos estudantes. Com este intuito, serão apresentados os conceitos necessários para compreender a matriz de covariância.

A *covariância* ou *variância conjunta* é a média do grau de interdependência linear entre duas variáveis. O cálculo de covariância é

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

onde, x_i e y_i são os dados da série x e y no momento i, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são as médias de x e y, respectivamente, n é a quantidade de dados observados e $\sigma_{x,y}$ é a covariância entre x e y.

Utiliza-se da covariância para compreender a direção da relação entre as variáveis. Valores de covariância positivos indicam que valores acima da média de uma variável estão associados a valores médios acima da outra variável e abaixo dos valores médios são igualmente associados. Valores de covariância negativos indicam que valores acima da média de uma variável estão associados com valores médios abaixo da outra variável.

Compreender o cálculo da covariância é muito importante para quem trabalha com investimentos pois é uma maneira de fazer a comparação entre duas variáveis. Transferindo este conceito para o mundo dos investimentos, seria basicamente entender o que acontece com o preço do ativo x quando o preço do ativo y aumenta ou diminui. Assim uma covariância positiva entre ativos indica que um ativo acompanha a subida ou a descida do outro, e a covariância negativa entre ativos indica movimentações opostas ao outro, ou seja, se um subir o outro cai ou se um cair o outro sobe. Para compreender a construção da matriz de covariância, considere apenas dois ativos x e y com 12 dados históricos (observações), observe que essas informações são organizadas na matriz:

$$S = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ \rho_{12,1} & \rho_{12,2} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

onde os elementos da primeira coluna correspondem ao retorno do ativo x e os elementos da segunda coluna correspondem ao retorno do ativo y no período de 12 observações.

A partir desta matriz é que se define a *variância* e *covariância* entre os ativos x e y durante essas 12 observações, de modo que a *variância dos ativos* x e y são dadas, respectivamente por:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x,x} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}(\rho_{tx} - \overline{\rho_x})^2 \tag{2.2}$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y,y} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}(\rho_{ty} - \overline{\rho_y})^2 \tag{2.3}$$

E a *covariância entre os ativos* x e y durante essas 12 observações é dada por:

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}(\rho_{tx} - E(R_x))(\rho_{ty} - E(R_y)) \tag{2.4}$$

onde, $E(R_x)$ e $E(R_y)$ representam o retorno médio esperado dos ativos x e y, respectivamente.

E por fim, a variância de ativos e a covariância entre os ativos x e y podem ser organizada em uma estrutura chamada de *matriz de covariâncias*, onde os elementos diagonais da matriz contêm as variâncias dos ativos, e os elementos fora da diagonal contêm as covariâncias entre os ativos x e y, representada por:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} \end{bmatrix}$$

Para a construção da matriz de covariância entre 2 ativos, foram selecionados os ativos da Drogasil, uma rede de drogarias, e da CVC, uma companhia de viagens. Os dados históricos dos ativos foram coletados da base de dados do Yahoo Finanças [26] as análises foram feitas mensalmente no ano de 2020. As 12 observações foram organizadas na Tabela 2.12, de modo que os dados correspondem a matriz S definida em 2.1.

Data	Cotação dos Ativos Drogasil	CVC
31 de dez. de 2020	24,89	19,04
30 de nov. de 2020	24,98	20,58
31 de out. de 2020	25,79	18,23
01 de out. de 2020	24,01	12,28
01 de set. de 2020	23,34	16,13
01 de ago. de 2020	21,48	18,3
01 de jul. de 2020	24,73	20,8
01 de jun. de 2020	22,02	17,07
01 de mai. de 2020	21,78	13,55
01 de abr. de 2020	20,84	12,98
01 de mar. de 2020	20,23	10,44
31 de jan. de 2020	23,82	24,21

Tabela 2.12: Cotação dos ativos da Drogasil e CVC

Considerando o ativo da Drogasil sendo x e o ativo da CVC sendo y foi calculado o retorno médio, a variância e a covariância dos ativos conforme 2.2, 2.3 e 2.4:

$$\begin{aligned}\overline{x} =& \frac{24,89+24,98+25,79+24,01+23,34+21,48+24,73+22,02+21,78+20,84+20,23+23,82}{12} \\ =& 23,1592\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} =& \frac{1}{12}[(24,89-23,1592)^2+(24,98-23,1592)^2+(25,79-23,1592)^2+(24,01-23,1592)^2+ \\ &+(23,34-23,1592)^2+(21,48-23,1592)^2+(24,73-23,1592)^2+(22,02-23,1592)^2+ \\ &+(21,78-23,1592)^2+(20,84-23,1592)^2+(20,23-23,1592)^2+(23,82-23,1592)^2+] \\ =& \frac{1}{12}[(1,7308)^2+(1,8208)^2+(2,6308)^2+(0,8508)^2+ \\ &+(0,1808)^2+(-1,6792)^2+(1,5708)^2+(-1,1392)^2+ \\ &+(-1,3792)^2+(-2,3192)^2+(-2,9292)^2+(0,6608)^2] \\ =& \frac{1}{12}[2,9958+3,3154+6,9213+0,7239+0,0327+2,8196+2,4675+ \\ &+1,2977+1,9021+5,3785+8,5800+0,4367] = \frac{36,8713}{12} = 3,0726\end{aligned}$$

$$\overline{y} = \frac{19,04 + 20,58 + 18,23 + 12,28 + 16,13 + 18,3 + 20,8 + 17,07 + 13,55 + 12,98 + 10,44 + 24,21}{12}$$

$$=16,9675$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y,y} =& \frac{1}{12}[(19,04 - 16,9675)^2 + (20,58 - 16,9675)^2 + (18,23 - 16,9675)^2 + (12,28 - 16,9675)^2 + \\
& (16,13 - 16,9675)^2 + (18,3 - 16,9675)^2 + (20,8 - 16,9675)^2 + (17,07 - 16,9675)^2 + \\
& (13,55 - 16,9675)^2 + (12,98 - 16,9675)^2 + (10,44 - 16,9675)^2 + (24,21 - 16,9675)^2 \\
=& \frac{1}{12}[(2,0725)^2 + (3,6125)^2 + (1,2625)^2 + (-4,6875)^2 + \\
& + (-0,8375)^2 + (1,3325)^2 + (3,8325)^2 + (0,1025)^2 + \\
& + (-3,4175)^2 + (-3,9875)^2 + (-6,5275)^2 + (7,2425)^2] \\
=& \frac{1}{12}[4,2953 + 13,0502 + 1,5939 + 21,9727 + 0,7014 + 1,7756 + \\
& + 14,6881 + 0,0105 + 11,6793 + 15,9002 + 42,6083 + 52,4538] = \frac{180,7290}{12} = 15,0608
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,y} =& \sigma_{y,x} = \frac{1}{12}[(24,89 - 23,1592)(19,04 - 16,9675) + (24,98 - 23,1592)(20,58 - 16,9675) + \\
& + (25,79 - 23,1592)(18,23 - 16,9675) + (24,01 - 23,1592)(12,28 - 16,9675) + \\
& + (23,34 - 23,1592)(16,13 - 16,9675) + (21,48 - 23,1592)(18,3 - 16,9675) + \\
& + (24,73 - 23,1592)(20,8 - 16,9675) + (22,02 - 23,1592)(17,07 - 16,9675) + \\
& + (21,78 - 23,1592)(13,55 - 16,9675) + (20,84 - 23,1592)(12,98 - 16,9675) + \\
& + (20,23 - 23,1592)(10,44 - 16,9675) + (23,82 - 23,1592)(24,21 - 16,9675)] \\
=& \frac{1}{12}[(1,7308)(2,0725) + (1,8208)(3,6125) + (2,6308)(1,2625) + \\
& + (0,8508)(-4,6875) + (0,1808)(-0,8375) + (-1,6792)(1,3325) + \\
& + (1,5708)(3,8325) + (-1,1392)(0,1025) + (-1,3792)(-3,4175) + \\
& + (-2,3192)(-3,9875) + (-2,9292)(-6,5275) + (0,6608)(7,2425)] \\
=& \frac{1}{12}[3,5872 + 6,5778 + 3,3214 - 3,9883 - 0,1514 - 2,2375 + \\
& + 6,0202 - 0,1168 + 4,7133 + 9,2477 + 19,1201 + 4,7861] \\
=& \frac{50,8799}{12} = 4,24
\end{aligned}$$

Logo, a matriz de covariância:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,0726 & 4,24 \\ 4,24 & 15,0608 \end{bmatrix}$$

Portanto, ter ativos com covariância positiva na carteira representa um risco maior. O ideal é ter ativos com covariância negativa, pois a perda com a desvalorização de um ativo pode ser compensada pela valorização de outro. E a importância de organizar essas informações é justamente conseguir fazer o gerenciamento do risco da carteira de investimentos.

Conclusão

Nessa dissertação foram apresentadas de maneira sucinta informações sobre o ensino de educação financeira na educação básica, documentos que norteiam a educação brasileira no ensino de números, probabilidade e estatística, e o ambiente de desenvolvimento *Google Colab* que permite o processo de dados das aplicações.

Foi construído um referencial teórico com o intuito de compreender a teoria moderna de portfólios. Foram apresentados conceitos sobre retorno, variância, correlação, diversificação e fronteira eficiente para formalizar o modelo média-variância de Markowitz. Através do modelo de precificação de ativos financeiros foi possível minimizar o risco identificando o maior retorno de um portfólio para cada nível de risco assumido com a inclusão de um ativo livre de risco à fronteira eficiente de Markowitz.

Com as aplicações utilizando o modelo da média-variância, conclui-se que é possível construir um portfólio que possui um retorno maior que o mercado correndo riscos praticamente iguais ao do mercado. Com a aplicação do modelo de precificação de ativos verificou-se o retorno de um portfólio compensado pelo risco de se investir no portfólio. A aplicação com 20 ativos mostra o princípio da diversificação de ativos e a estratégia de investimentos *Deep Value Investing* que pode ser adotada por investidores na escolha de ativos para compor o portfólio. E por fim, a aplicação no Ensino sobre matrizes de covariância mostra a importância de organizar informações para fazer o gerenciamento do risco das carteiras de investimentos.

Como trabalhos futuros pretende-se explorar o uso de técnicas de Machine Learning na automatização de processos e nas negociações que são usados para modelar o comportamento dos instrumentos financeiros para prever quais operações no mercado de ações que serão lucrativas, fazendo um contraponto do estudo realizado que se utiliza de dados passados para prever e otimizar os retornos. Uma vantagem do uso de algoritmos de Machine Learning é que eles operam em intervalos de tempo onde uma pessoa seria incapaz de operar, reduzindo significativamente a necessidade de o investidor se dedicar ao acompanhamento do mercado.

Referências Bibliográficas

[1] *Adler,I., Karmarkar N., Resende,M.G.C. and Veiga, G.* An implementation of Karmarkar's algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, 44:297-335, 1989.

[2] *Araújo, E. A. T.; Oliveira, V. C.; Silva, W. A. C. CAPM em estudos brasileiros: uma análise da pesquisa*, Revista de Contabilidade e Organizações, vol. 6, n. 15. pp. 95-122, 2012.

[3] *Arce, P. B. E. Aplicação da Teoria do Portfólio para Otimização de Carteiras de Contratos de Energia Elétrica e Gestão de Risco*, Dissertação de Mestrado, USP, 2014.

[4] *Arenales, M., Armentano, V., Morabito, R. e Yanasse, H. Pesquisa operacional.* Rio de Janeiro, Elsevier, 2011.

[5] *Assaf Neto, A. Mercado Financeiro*, Atlas, 2006.

[6] Base Nacional Comum Curricular, 2021. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Accesso em Junho de 2021.

[7] *Berti, L.F. Redução de Iterações dos Métodos de Pontos Interiores com Iteração continuada*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2016.

[8] B3. Brasil, Bolsa, Balcão. Disponível em http://www.b3.com.br/. Acesso em Junho de 2021.

[9] Clube do Valor, *Luiz Barsi: Conheça a História e os Principais Ensinamentos do "Rei dos Dividendos", o Maior Investidor da Bolsa Brasileira*, 2020. Disponível em https://clubedovalor.com.br/blog/luiz-barsi/. Acesso em Junho de 2021.

[10] Dicionário Financeiro, 2021. Disponível em https://www.dicionariofinanceiro.com/. Accesso em Junho de 2021.

[11] *Elton, E.; Gruber, M. J.; Goetzmann, W. N.; Brown S. J. Modern portfolio theory and investments analysis*, Wiley, 2014.

[12] *Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. e Focardi, S. M. Robust Portfolio Optimization and Management* John Wiley & Sons, 2007.

[13] Glossário de Finanças e Investimentos. Mais Retorno, 2021. Disponível em https://maisretorno.com/portal/glossario-financas-investimentos. Accesso em Abril de 2021.

[14] Google Colaboratory, 2021. Disponível em https://colab.research.google.com/notebooks/intro. Acesso em Junho de 2021.

[15] *Granatyr, J. Python para Finanças: Análise de Dados e Machine Learning*, 2021. Disponível em https://www.udemy.com/course/python-para-financas-analise-de-dados-e-machine-learning/. Acesso em Junho de 2021.

[16] *Karmarkar, N.* A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373-395,1984.

[17] *Maculan, N. e Fampa, M. H. C* Otimização Linear. Brasília, Editora UnB, 2006.

[18] *Markowitz, H. M. Portfolio selection*, Journal of finance, 1952, v.7, pp.77-91

[19] *Pinto, R. P. L. J. M. Análise e Implementação de Modelos de Seleção de Portfólios com Heidge de Opções*, Tese de Doutorado, UFPB, 2006.

[20] *Reilly, F.K., Brown, K. C. Investment Analysis Portfolio Management*, South Western Colege Pub, 2002.

[21] *Ross, S. A.; Randolph, W.; Jaffe, J. F. Corporate Finance*, Irwin/McGraw-Hill, 1999.

[22] *Sharpe, William F. A simplified model for portfolio analysis.* Management science, v. 9, n. 2, p. 277-293, 1963.

[23] *Sharpe, William F. Mutual Fund Performance.* The Journal of Business, vol. 39, no. 1, 1966, pp. 119–138. JSTOR. Disponível em https://www.jstor.org/stable/2351741. Accesso em Junho de 2021.

[24] *Silva, Jair da. Uma família de algoritmos para programação linear baseada no algoritmo de Von Neumann*, Tese de Doutorado, Unicamp, 2009.

[25] Vida e Dinheiro, 2021. Disponível em https://vidaedinheiro.gov.br/enef/. Accesso em Junho de 2021.

[26] Yahoo Finanças, 2021. Disponível em https://br.financas.yahoo.com/. Acesso em Junho de 2021.

[27] *Yee, K. Deep Value Investing, Fundamental Risks, and the Margin of Safety*, The Journal of Investing, 2008.

Apêndice A

Aplicação - 6 Ativos

Importação das bibliotecas

[308]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
from pandas_datareader import data
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from scipy import stats
import plotly.express as px
```

Base de dados com 6 ativos

[309]:
```
acoes = ['ITUB3.SA', 'TAEE3.SA', 'UNIP3.SA','KLBN3.SA','ENGI3.SA', 'BOVA11.
↪SA']
```

[310]:
```
acoes_df = pd.DataFrame()
for acao in acoes:
  acoes_df[acao] = data.DataReader(acao, data_source='yahoo',␣
↪start='2016-01-04', end='2020-12-30')['Adj Close']
```

[311]:
```
acoes_df
```

[312]:
```
acoes_df = acoes_df.rename(columns={'ITUB3.SA':'ITAU','TAEE3.SA':
↪'TAESA','UNIP3.SA':'UNIP','KLBN3.SA':'KLABIN','ENGI3.SA':
↪'ENERGISA','BOVA11.SA':'BOVA'})
```

[313]:
```
acoes_df.isnull().sum()
```

[314]:
```
acoes_df.shape
```

[315]:
```
acoes_df.dropna(inplace=True)
```

[316]:
```
acoes_df.shape
```

[317]:
```
acoes_df.isnull().sum()
```

[318]:
```
acoes_df.to_csv('6acoes.csv')
```

[319]:
```
acoes_df = pd.read_csv('6acoes.csv')

acoes_df
```

[320]:
```
acoes_df.columns[1:]
```

[321]:
```
acoes_df.describe()
```

Visualização

[322]:
```
sns.histplot(acoes_df['ITAU'], bins=20, kde= True);
```

[323]:
```
sns.histplot(acoes_df['TAESA'], bins=20, kde= True);
```

[324]:
```
sns.histplot(acoes_df['UNIP'], bins=20, kde= True);
```

[325]:
```
sns.histplot(acoes_df['KLABIN'], bins=30, kde= True);
```

[326]:
```
sns.histplot(acoes_df['ENERGISA'], bins=20, kde= True);
```

[327]:
```
sns.histplot(acoes_df['BOVA'], bins=20, kde= True);
```

[328]:
```
sns.boxplot(x = acoes_df['ITAU']);
```

[329]:
```
sns.boxplot(x = acoes_df['TAESA']);
```

[330]:
```
sns.boxplot(x = acoes_df['UNIP']);
```

[331]:
```
sns.boxplot(x = acoes_df['KLABIN']);
```

[332]:
```
sns.boxplot(x = acoes_df['ENERGISA']);
```

[333]:
```
sns.boxplot(x = acoes_df['BOVA']);
```

[334]:
```
acoes_df.plot(x = 'Date', figsize = (15,7), title = 'Histórico do preço das␣
↪ações');
```

[335]:
```
acoes_df
```

[336]:
```
acoes_df_normalizado = acoes_df.copy()
for i in acoes_df_normalizado.columns[1:]:
  acoes_df_normalizado[i] = acoes_df_normalizado[i] /␣
↪acoes_df_normalizado[i][0]
```

[337]:
```
acoes_df_normalizado
```

[338]:
```
acoes_df_normalizado.plot(x = 'Date', figsize = (15,7), title = 'Histórico␣
↪do preço das ações - normalizado');
```

Taxa de Retorno Simples

[341]:
```
dataset = pd.read_csv('6acoes.csv')
```

[342]:
```
dataset.shape
```

[343]:
```
dataset
```

[344]:
```
len(dataset)
```

[345]:
```
((dataset['ITAU'][len(dataset) - 1] - dataset['ITAU'][0]) /␣
↪dataset['ITAU'][0]) * 100
```

[346]:
```
((dataset['TAESA'][len(dataset) - 1] - dataset['TAESA'][0]) /␣
↪dataset['TAESA'][0]) * 100
```

[347]:
```
((dataset['UNIP'][len(dataset) - 1] - dataset['UNIP'][0]) /␣
↪dataset['UNIP'][0]) * 100
```

[348]:
```
((dataset['KLABIN'][len(dataset) - 1] - dataset['KLABIN'][0]) /␣
↪dataset['KLABIN'][0]) * 100
```

[349]:
```
((dataset['ENERGISA'][len(dataset) - 1] - dataset['ENERGISA'][0]) /␣
↪dataset['ENERGISA'][0]) * 100
```

[350]:
```
((dataset['BOVA'][len(dataset) - 1] - dataset['BOVA'][0]) /␣
↪dataset['BOVA'][0]) * 100
```

[351]:
```
dataset['Retorno Simples ITAU'] = (dataset['ITAU'] / dataset['ITAU'].
↪shift(1)) - 1
dataset['Retorno Simples TAESA'] = (dataset['TAESA'] / dataset['TAESA'].
↪shift(1)) - 1
dataset['Retorno Simples UNIP'] = (dataset['UNIP'] / dataset['UNIP'].
↪shift(1)) - 1
dataset['Retorno Simples KLABIN'] = (dataset['KLABIN'] / dataset['KLABIN'].
↪shift(1)) - 1
dataset['Retorno Simples ENERGISA'] = (dataset['ENERGISA'] /␣
↪dataset['ENERGISA'].shift(1)) - 1
dataset['Retorno Simples BOVA'] = (dataset['BOVA'] / dataset['BOVA'].
↪shift(1)) - 1
```

[352]:
```
dataset
```

[353]:
```
dataset['Retorno Simples ITAU'].plot(figsize = (12,5));
```

[354]:
```
dataset['Retorno Simples TAESA'].plot(figsize = (12,5));
```

[355]:
```
dataset['Retorno Simples UNIP'].plot(figsize = (12,5));
```

[356]:
```
dataset['Retorno Simples KLABIN'].plot(figsize = (12,5));
```

[357]:
```
dataset['Retorno Simples ENERGISA'].plot(figsize = (12,5));
```

[358]:
```
dataset['Retorno Simples BOVA'].plot(figsize = (12,5));
```

[359]:
```
(dataset['Retorno Simples ITAU'].mean() * 246) * 100
```

[360]:
```
(dataset['Retorno Simples TAESA'].mean() * 246) * 100
```

[361]:
```
(dataset['Retorno Simples UNIP'].mean() * 246) * 100
```

[362]:
```
(dataset['Retorno Simples KLABIN'].mean() * 246) * 100
```

[363]:
```
(dataset['Retorno Simples ENERGISA'].mean() * 246) * 100
```

[364]:
```
(dataset['Retorno Simples BOVA'].mean() * 246) * 100
```

Retorno de carteira de ações

[365]:
```
dataset = pd.read_csv('6acoes.csv')
dataset
```

[366]:
```
dataset_normalizado = dataset.copy()
for i in dataset_normalizado.columns[1:]:
  dataset_normalizado[i] = (dataset_normalizado[i] /␣
 ↪dataset_normalizado[i][0])
```

[367]:
```
dataset_normalizado
```

[368]:
```
dataset_normalizado.plot(x = 'Date', figsize=(15, 7));
```

[369]:
```
dataset_normalizado.drop(labels=['Date'], axis=1, inplace=True)
```

[370]:
```
retorno_carteira = (dataset_normalizado / dataset_normalizado.shift(1)) - 1
retorno_carteira.head()
```

[371]:
```
retorno_anual = retorno_carteira.mean() * 246
retorno_anual
```

[372]:
```
retorno_anual = retorno_anual * 100
retorno_anual
```

[373]:
```
pesos_carteira1 = np.array([0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.0])
```

[374]:
```
pesos_carteira1.sum()
```

[375]:
```
np.dot(retorno_anual, pesos_carteira1)
```

[376]:
```
pesos_carteira2 = np.array([0.1, 0.2, 0.2, 0.4, 0.1, 0.0])
```

[377]:
```
pesos_carteira2.sum()
```

[378]:
```
np.dot(retorno_anual, pesos_carteira2)
```

Gráfico da carteira x BOVA

[379]:
```
dataset = pd.read_csv('6acoes.csv')
```

[380]:
```
dataset_normalizado = dataset.copy()
for i in dataset_normalizado.columns[1:]:
  dataset_normalizado[i] = (dataset_normalizado[i] /␣
 ↪dataset_normalizado[i][0])
```

[381]:
```
dataset_normalizado['CARTEIRA'] = (dataset_normalizado['ITAU'] +␣
 ↪dataset_normalizado['TAESA'] + dataset_normalizado['UNIP'] +␣
 ↪dataset_normalizado['KLABIN'] + dataset_normalizado['ENERGISA']) / 5
dataset_normalizado
```

[383]:
```
dataset_normalizado.plot(title= 'Comparativo carteira x BOVA', x = 'Date',␣
 ↪figsize=(20, 10));
```

[384]:
```
dataset_normalizado.drop(['ITAU', 'TAESA', 'UNIP', 'KLABIN', 'ENERGISA'],␣
 ↪axis = 1, inplace= True)
dataset_normalizado
```

[386]:
```
dataset_normalizado.plot(title= 'Comparativo carteira x BOVA', x = 'Date',␣
 ↪figsize=(20, 10));
```

Risco Médio Anual das Ações

[387]:
```
dataset.drop(labels = ['Date'], axis=1, inplace=True)
dataset
```

Retorno

[388]:
```
taxas_retorno = (dataset / dataset.shift(1)) - 1
taxas_retorno
```

Desvio Padrão

[390]:
```
taxas_retorno.std() * 100
```

[394]:
```
taxas_retorno.std() * 246
```

[395]:
```
math.sqrt(246) # Anualizar
```

[396]:
```
taxas_retorno.std() * math.sqrt(246)
```

Correlação entre ações

[398]:
```
dataset
```

[399]:
```
taxas_retorno
```

[400]:
```
taxas_retorno.cov()
```

[401]:
```
taxas_retorno.corr()
```

[402]:
```
plt.figure(figsize=(8,8))
sns.heatmap(taxas_retorno.corr(), annot=True);
```

Risco de um Portfólio

[403]:
```
dataset.columns
```

[404]:
```
pesos1 = np.array([0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.0])
```

[405]:
```
pesos1.sum()
```

[406]:
```
taxas_retorno.cov() * 246
```

[407]:
```
np.dot(taxas_retorno.cov() * 246, pesos1)
```

[409]:
```
variancia_portfolio1 = np.dot(pesos1, np.dot(taxas_retorno.cov() * 246,␣
 ↪pesos1))
variancia_portfolio1
```

[410]:
```
volatilidade_portfolio1 = math.sqrt(variancia_portfolio1)
volatilidade_portfolio1
```

[411]:
```
pesos2 = np.array([0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0])
```

[412]:
```
variancia_portfolio2 = np.dot(pesos2, np.dot(taxas_retorno.cov() * 246,␣
 ↪pesos2))
variancia_portfolio2
```

[413]:
```
volatilidade_portfolio2 = math.sqrt(variancia_portfolio2)
volatilidade_portfolio2
```

Alocação e Otimização do Portfólio

Alocação aleatória de ativos

[425]:
```
dataset = pd.read_csv('6acoes.csv')
dataset
```

[427]:
```
len(dataset.columns)-1
```

[428]:
```
dataset.loc[len(dataset) - 1]['BOVA']
```

[428]: 114.6500015258789

[429]:
```
def alocacao_ativos(dataset, dinheiro_total, seed = 0, melhores_pesos = []):
  dataset = dataset.copy()

  if seed != 0:
    np.random.seed(seed)

  if len(melhores_pesos) > 0:
    pesos = melhores_pesos
  else:
    pesos = np.random.random(len(dataset.columns)-1)
    #print(pesos, pesos.sum())
    pesos = pesos / pesos.sum()
    #print(pesos, pesos.sum())

  colunas = dataset.columns[1:]
  #print(colunas)
  for i in colunas:
    dataset[i] = (dataset[i] / dataset[i][0])

  for i, acao in enumerate(dataset.columns[1:]):
    #print(i, acao)
    dataset[acao] = dataset[acao] * pesos[i] * dinheiro_total
```

```
    dataset['soma valor'] = dataset.sum(axis = 1)

    datas = dataset['Date']
    #print(datas)

    dataset.drop(labels = ['Date'], axis = 1, inplace = True)
    dataset['taxa retorno'] = 0.0

    for i in range(1, len(dataset)):
      dataset['taxa retorno'][i] = ((dataset['soma valor'][i] / dataset['soma␣
↪valor'][i - 1]) - 1) * 100

    acoes_pesos = pd.DataFrame(data = {'Ações': colunas, 'Pesos': pesos * 100})

    return dataset, datas, acoes_pesos, dataset.loc[len(dataset) - 1]['soma␣
↪valor']
```

[430]:
```
dataset, datas, acoes_pesos, soma_valor = alocacao_ativos(pd.
↪read_csv('6acoes.csv'), 5000, 10)
```

[ ]:
```
dataset
```

[431]:
```
datas
```

[432]:
```
acoes_pesos
```

[433]:
```
soma_valor
```

Mais cálculos no portfólio

Retorno acumulado em todo o período

[438]:
```
dataset.loc[len(dataset) - 1]['soma valor'] / dataset.loc[0]['soma valor'] -␣
↪1
```

Desvio padrão

[439]:
```
dataset['taxa retorno'].std()
```

Índice Sharpe

[440]:
```
(dataset['taxa retorno'].mean() / dataset['taxa retorno'].std()) * np.
 ↪sqrt(246)
```

[441]:
```
dinheiro_total = 5000
```

[442]:
```
soma_valor - dinheiro_total
```

[443]:
```
taxa_selic_2016 = 14.25
taxa_selic_2017 = 12.25
taxa_selic_2018 = 6.50
taxa_selic_2019 = 5.0
taxa_selic_2020 = 2.0
```

[444]:
```
valor_2016 = dinheiro_total + (dinheiro_total * taxa_selic_2016 / 100)
valor_2016
```

[445]:
```
valor_2017 = valor_2016 + (valor_2016 * taxa_selic_2017 / 100)
valor_2017
```

[446]:
```
valor_2018 = valor_2017 + (valor_2017 * taxa_selic_2018 / 100)
valor_2018
```

[447]:
```
valor_2019 = valor_2018 + (valor_2018 * taxa_selic_2019 / 100)
valor_2019
```

[448]:
```
valor_2020 = valor_2019 + (valor_2019 * taxa_selic_2020 / 100)
valor_2020
```

[449]:
```
rendimentos = valor_2020 - dinheiro_total
rendimentos
```

[450]:
```
ir = rendimentos * 15 / 100
ir
```

[451]:
```
valor_2020 - ir
```

[452]:
```
taxa_selic_historico = np.array([12.75, 14.25, 12.25, 6.5, 5.0, 2.0])
taxa_selic_historico.mean() / 100
```

[452]: 0.08791666666666666

[453]:
```
(dataset['taxa retorno'].mean() - taxa_selic_historico.mean() / 100) /␣
↪dataset['taxa retorno'].std() * np.sqrt(246)
```

Otimização de portfólio - randômico

[454]:
```
import sys
1 - sys.maxsize
```

[455]:
```
def alocacao_portfolio(dataset, dinheiro_total, sem_risco, repeticoes):
  dataset = dataset.copy()
  dataset_original = dataset.copy()

  lista_retorno_esperado = []
  lista_volatilidade_esperada = []
  lista_indice_sharpe = []

  melhor_indice_sharpe = 1 - sys.maxsize
  melhores_pesos = np.empty
  melhor_volatilidade = 0
  melhor_retorno = 0

  for _ in range(repeticoes):
    pesos = np.random.random(len(dataset.columns) - 1)
    pesos = pesos / pesos.sum()

    for i in dataset.columns[1:]:
      dataset[i] = dataset[i] / dataset[i][0]

    for i, acao in enumerate(dataset.columns[1:]):
```

```
    dataset[acao] = dataset[acao] * pesos[i] * dinheiro_total

  dataset.drop(labels = ['Date'], axis = 1, inplace=True)

  retorno_carteira = np.log(dataset / dataset.shift(1))
  matriz_covariancia = retorno_carteira.cov()

  dataset['soma valor'] = dataset.sum(axis = 1)
  dataset['taxa retorno'] = 0.0

  for i in range(1, len(dataset)):
    dataset['taxa retorno'][i] = np.log(dataset['soma valor'][i] /␣
↪dataset['soma valor'][i - 1])

  #indice_sharpe = (dataset['taxa retorno'].mean() - sem_risco) /␣
↪dataset['taxa retorno'].std() * np.sqrt(246)
  retorno_esperado = np.sum(dataset['taxa retorno'].mean() * pesos) * 246
  volatilidade_esperada = np.sqrt(np.dot(pesos, np.dot(matriz_covariancia␣
↪* 246, pesos)))
  indice_sharpe = (retorno_esperado - sem_risco) / volatilidade_esperada

  if indice_sharpe > melhor_indice_sharpe:
    melhor_indicesharpe = indice_sharpe
    melhores_pesos = pesos
    melhor_volatilidade = volatilidade_esperada
    melhor_retorno = retorno_esperado

  lista_retorno_esperado.append(retorno_esperado)
  lista_volatilidade_esperada.append(volatilidade_esperada)
  lista_indice_sharpe.append(indice_sharpe)
```

```
        dataset = dataset_original.copy()


    return melhor_indice_sharpe, melhores_pesos, lista_retorno_esperado,␣
 ↪lista_volatilidade_esperada, lista_indice_sharpe, melhor_volatilidade,␣
 ↪melhor_retorno
```

[457]:
```
indice_sharpe, melhores_pesos, ls_retorno, ls_volatilidade,␣
 ↪ls_indice_sharpe, melhor_volatilidade, melhor_retorno =␣
 ↪alocacao_portfolio(pd.read_csv('6acoes.csv'), 5000, taxa_selic_historico.
 ↪mean() / 100, 10000)
```

[458]:
```
indice_sharpe, melhores_pesos
```

[460]:
```
_, _, acoes_pesos, soma_valor = alocacao_ativos(pd.read_csv('6acoes.csv'),␣
 ↪5000, melhores_pesos=melhores_pesos)
```

[ ]:
```
acoes_pesos, soma_valor
```

[464]:
```
melhor_retorno, melhor_volatilidade
```

[465]:
```
plt.figure(figsize=(10,8))
plt.scatter(ls_volatilidade, ls_retorno, c = ls_indice_sharpe)
plt.colorbar(label = 'Índice Sharpe')
plt.xlabel('Volatilidade Esperada')
plt.ylabel('Retorno Esperado')
plt.scatter(melhor_volatilidade, melhor_retorno, c = 'red', s = 100);
```

Apêndice B

CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Importação das bibliotecas e tratamento da base de dados

[1]:
```
import pandas as pd
import numpy as np
import plotly.express as px
```

[3]:
```
dataset = pd.read_csv('acoes.csv')
dataset
```

[4]:
```
dataset.drop(labels = ['Date'], axis = 1, inplace = True)
```

[5]:
```
dataset_normalizado = dataset.copy()
for i in dataset.columns:
  dataset_normalizado[i] = dataset[i] / dataset[i][0]
dataset_normalizado
```

[6]:
```
dataset_taxa_retorno = (dataset_normalizado / dataset_normalizado.shift(1))␣
 ↪- 1
dataset_taxa_retorno
```

[7]:
```
dataset_taxa_retorno.fillna(0, inplace=True)
dataset_taxa_retorno.head()
```

[7]:

	ITAU	TAESA	UNIP	KLABIN	ENERGISA	BOVA
0	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000000
1	0.021212	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001947
2	-0.005935	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.016513

```
3 -0.011941    0.0    0.0      0.0        0.0 -0.025432
4  0.015538    0.0    0.0      0.0        0.0 -0.003294
```

[8]:
```
dataset_taxa_retorno.mean() * 246
```

Cálculo do parâmetro BETA para um ativo

BETA com regressão linear

[10]:
```
figura = px.scatter(dataset_taxa_retorno, x = 'BOVA', y = 'ITAU', title =␣
 ↪'BOVA x ITAU')
figura.show()
```

[11]:
```
beta, alpha = np.polyfit(x = dataset_taxa_retorno['BOVA'], y =␣
 ↪dataset_taxa_retorno['ITAU'], deg = 1)
print('beta:', beta, 'alpha:', alpha, 'alpha (%):', alpha * 100)
```

```
beta: 0.8266413682322937 alpha: 0.00013371453782834076 alpha (%):
0.013371453782834075
```

[19]:
```
0.8266413682322937 * 0.09551391 + .00013371453782834076
```

[54]:
```
figura = px.scatter(dataset_taxa_retorno, x = 'BOVA', y = 'ITAU', title =␣
 ↪'BOVA x ITAU')
figura.add_scatter(x = dataset_taxa_retorno['BOVA'], y = beta *␣
 ↪dataset_taxa_retorno['BOVA'] + alpha)
figura.show()
```

BETA com covariância e variância

[21]:
```
matriz_covariancia = dataset_taxa_retorno.drop(columns = ['TAESA', 'UNIP',␣
 ↪'KLABIN', 'ENERGISA']).cov() * 246
matriz_covariancia
```

[24]:
```
cov_itau_bova = matriz_covariancia.iloc[1, 0]
cov_itau_bova
```

[25]:
```
variancia_bova = dataset_taxa_retorno['BOVA'].var() * 246
variancia_bova
```

[26]:
```
beta_itau = cov_itau_bova / variancia_bova
beta_itau
```

Cálculo CAPM para uma ação

[31]:
```
beta
```

[32]:
```
rm = dataset_taxa_retorno['BOVA'].mean() * 246
rm
```

[33]:
```
taxa_selic_historico = np.array([14.25, 12.25, 6.5, 5.0, 2.0])
rf = taxa_selic_historico.mean() / 100
rf
```

[34]:
```
capm_itau = rf + (beta * (rm - rf))
capm_itau
```

Cálculo do BETA para todas as ações

[35]:
```
betas = []
alphas = []
for ativo in dataset_taxa_retorno.columns[0:-1]:
  #print(ativo)
  beta, alpha = np.polyfit(dataset_taxa_retorno['BOVA'],␣
 ↪dataset_taxa_retorno[ativo], 1)
  betas.append(beta)
  alphas.append(alpha)
```

[36]:
```
betas
```

[37]:
```
alphas
```

[38]:
```
def visualiza_betas_alphas(betas, alphas):
  for i, ativo in enumerate(dataset_taxa_retorno.columns[0:-1]):
```

```
    #print(i, ativo)
    print(ativo, 'beta:', betas[i], 'alpha:', alphas[i] * 100)
```

[39]:
```
visualiza_betas_alphas(betas, alphas)
```

```
ITAU beta: 0.8266413682322937 alpha: 0.013371453782834075
TAESA beta: 0.2317273193804141 alpha: 0.04423563896377451
UNIP beta: 0.40440211793163516 alpha: 0.22944311377183055
KLABIN beta: 0.4419912134233593 alpha: 0.1397800066456447
ENERGISA beta: 0.3477571694000984 alpha: 0.2166866009462614
```

[40]:
```
np.array(alphas).mean() * 100
```

Cálculo CAPM para o portfólio

[41]:
```
rf
```

[42]:
```
rm
```

[43]:
```
capm_empresas = []
for i, ativo in enumerate(dataset_taxa_retorno.columns[0:-1]):
  #print(i, ativo)
  capm_empresas.append(rf + (betas[i] * (rm - rf)))
```

[44]:
```
capm_empresas
```

[45]:
```
def visualiza_capm(capm):
  for i, ativo in enumerate(dataset_taxa_retorno.columns[0:-1]):
    print(ativo, 'CAPM:', capm[i] * 100)
```

[46]:
```
visualiza_capm(capm_empresas)
```

[52]:
```
pesos = np.array([0.2,0.2,0.2,0.2,0.2])
```

[53]:
```
capm_portfolio = np.sum(capm_empresas * pesos) * 100
capm_portfolio
```