

LUSIVAL PEREIRA DOS SANTOS

**COMPREENDENDO DIFICULDADES DE
APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – CURSO DE MESTRADO
CAMPO GRANDE - MS
2002**

FICHA CATALOGRÁFICA

Santos, Lusival Pereira dos.

Compreendendo Dificuldades de Aprendizagem de Conceitos Geométricos. Campo Grande – MS: [S.N], 2002.

Orientador: Luiz Carlos Pais

Dissertação de Mestrado em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

1. Conceitos geométricos; 2. Representações;
3. Articulação; I Santos, Lusival Pereira dos. II. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. III. Compreendendo Dificuldades de Aprendizagem de Conceitos Geométricos.

LUSIVAL PEREIRA DOS SANTOS

**COMPREENDENDO DIFICULDADES DE
APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Professor Doutor Luiz Carlos Pais.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – CURSO DE MESTRADO
CAMPO GRANDE - MS
2002**

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Prof^a. Dr^a. Marilena Bittar

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

DEDICATÓRIA

*A Sara, esposa dedicada, batalhadora e companheira e aos
meus filhos Luis, Lusival Junior e Anelise, pelos momentos de ausência*

AGRADECIMENTOS

A Deus, doador de todas as coisas, amigo de todas as horas e em que encontro razão para acreditar na vida e ter esperança de um futuro melhor.

A meus pais, Waldemar e Luzia, responsáveis pela minha formação; e aos meus irmãos Waldemir, Waldenir, Wanderley e Eleuza, pelo incentivo.

Ao professor doutor Luiz Carlos Pais, orientador e amigo, co-responsável pela elaboração desta pesquisa.

Ao professor doutor Saddo Ag Almouloud, que se dispôs a avaliar, criticar e sugerir este trabalho.

À professora doutora Marilena Bittar, pelas sugestões e comentários que enriqueceram a presente pesquisa.

Ao professor doutor José Luiz Magalhães de Freitas, pelo apoio no processo de levantamento bibliográfico.

Aos professores doutores do Programa de Mestrado em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, representados, no meu período de estudo, pela Prof^a. Dr^a. Sonia Urt e Prof. Dr. Antonio Carlos no Nascimento Osório, pelas valiosas aulas e influência em minha formação acadêmica.

À equipe técnica-administrativa da Secretaria do Programa de Mestrado em Educação (Jaqueline, Tatiana e Anderson), sempre prontos a ajudar os mestrandos, mesmo quando são, acometidos de “amnésia passageira” e esquecem os prazos a serem cumpridos.

Aos meus colegas de Mestrado, que fizeram dos estudos uma ponte para conquistar novas amizades.

À professora Iéve Garcia da Silveira Martinez, pela sua disponibilidade e críticas no processo de escrita desta pesquisa.

HOMENAGEM ESPECIAL

*Ao amigo e Deputado Estadual Waldir Neves e aos meus colegas de trabalho,
representados por Adrianne Bertola Carvalho, pela compreensão, incentivo e apoio.*

RESUMO

Esta pesquisa aborda questões relacionadas à aprendizagem da geometria e visa compreender por que os alunos, geralmente, têm dificuldades na aprendizagem de construção de conceitos geométricos, principalmente, em atividades que exigem articulação entre a dimensão conceitual e os seus diversos registros de representações. Foram consultados vários estudiosos da cognição humana, entre os quais, Piaget, que relaciona a geometria com a conscientização do espaço, com a representação e com a construção do conhecimento matemático; e Duval, que analisa a importância e a necessidade do aluno compreender o estatuto das representações na aprendizagem da geometria, pois os objetos geométricos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão do uso de algum sistema de representação. A pesquisa de campo foi realizada com alunos da 8ª série do ensino fundamental através da realização de quatro atividades, sendo três em sala de aula e uma no laboratório de informática, com a finalidade de proporcionar ao pesquisador elementos necessários para analisar, compreender e descrever como os alunos coordenam a conceitualização dinâmica dos objetos matemáticos da geometria com as suas representações estáticas. O resultado da pesquisa aponta dificuldades de aprendizagem na construção de conceitos geométricos, relacionadas à representação conceitual e à capacidade de abstração e generalização, essenciais na elaboração do conhecimento matemático. A mídia informática apresentou-se com ferramenta de grande potencial frente aos obstáculos inerentes à visualização de objetos tridimensionais.

Palavras chave: conceitos geométricos; representações; articulação.

ABSTRACT

This research treats questions related to the phenomenon of learning geometry, in particular regarding the elaboration of geometrical concepts by 8th grade fundamental school children. The analysis is of a didactic and cognitive character, as it aims at understanding why, in general, students have difficulty in apprehending the construction of geometrical concepts, especially in activities that demand articulation between the conceptual dimension and their varied registers of semiotic representations. The conception of the construction of knowledge in geometry assumed in this research is one that privileges the life of the student and the experiences lived in the world of geometry which, according to Merleau-Ponty, has extra emphasis on perception. Since the apprehension of concepts in geometry is a process of a cognitive nature and of multiple dimensions, various specialists on human cognition were consulted, among them Frege, Piaget, Gardner, Guitierrez, Duval and Levy, constituting the framework of reference of this research on the phenomenon investigated. An analysis was made on how the students coordinate a dynamic conceptualization of mathematical concepts in geometry, with their static representations, such as natural language symbolic speech, figurative registers, graphic representation, etc. The results of the research depict difficulties in conceptual elaboration of the students researched regarding language, the representation of geometrical concepts and the capacity for abstraction and generalization, essential for the formation of plane and spatial geometrical concepts. Computer media presented great potential facing the obstacles inherent to the visualization of three-dimensional objects.

Keywords: Geometrical conceptions, semiotic conceptions, articulation

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do cubo, pirâmide e paralelepípedo	59
Figura 2 – Representação gráfica de uma função.....	65
Figura 3 – Desenho do aluno “V”	94
Figura 4 – Desenho do aluno “X”	95
Figura 5 - Desenho do aluno “Y”	96
Figura 6 - Desenho do aluno “W”	97
Figura 7 – Desenho do aluno “Alfa”	98
Figura 8 - Desenho do aluno “Beta”	101
Figura 9 – Desenho do aluno “Q”	104
Figura 10 - Desenho do aluno “R”	104
Figura 11 – Desenho do aluno “S”	105
Figura 12 - Desenho do aluno “T”	105
Figura 13 – Desenho do aluno “U”	106
Figura 14 – Cubo em perspectiva paralela	120
Figura 15 - Tipos de processos cognitivos	126

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A - QUADRO Nº 01.....	141
ANEXO B - QUADRO Nº 01.....	145
ANEXO C - QUADRO Nº 01.....	148
ANEXO D - QUADROS DE Nº 01 A 10 - ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO.....	151
ANEXO E - QUADROS DE Nº 01 A 06 - ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO.....	169
ANEXO F - QUADROS DE Nº 01 A 05 - ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO.....	177

SUMÁRIO

RESUMO.....	07
ABSTRACT.....	08
LISTA DE FIGURAS.....	11
LISTA DE ANEXOS.....	12
INTRODUÇÃO.....	13
CAPÍTULO I - TRAJETÓRIA DE CONSTRUÇÃO DA PESQUISA.....	15
1.1 Origem da pesquisa.....	15
1.2 Delimitação do objeto de pesquisa.....	19
CAPÍTULO II - CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA.....	23
2.1 Problemas do ensino da geometria.....	23
2.2 O dilema do currículo da geometria.....	28
2.3 A geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais	30
2.3.1 A geometria no Referencial Curricular Nacional (RCN).....	31
2.3.2 A geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais.....	33
2.4 Uma análise da presença da geometria nos livros didáticos.....	36
2.4.1 Articulação entre geometria plana e geometria espacial.....	39
2.5 Aprendizagem da geometria no cenário da informática.....	44
2.6 A geometria como temática de pesquisa.....	46
CAPÍTULO III - ESCOLHA DE UM REFERENCIAL TEÓRICO.....	48
3.1 Reflexões teóricas sobre a construção de conceitos.....	48
3.1.1. Construção de conceitos.....	51
3.1.2. Por que os conceitos são complexos?.....	53
3.1.3 Visualização, imagens mentais e representação.....	56
3.1.4. Uma abordagem cognitiva da representação de conceitos geométricos.....	59
3.1.5 A busca de uma linguagem dinâmica.....	66

CAPÍTULO IV - DESCRIAÇÃO DA METODOLOGIA DA PESQUISA.....	71
4.1 Uma introdução ao pensamento fenomenológico.....	71
4.2 A pesquisa na perspectiva fenomenológica.....	73
4.3 Concepção fenomenológica de educação matemática.....	75
4.4 Construção de conceitos geométricos na visão fenomenológica	77
4.5 Problema e objetivos da pesquisa.....	78
4.6 Sujeitos colaboradores da pesquisa.....	80
4.7 Procedimentos metodológicos da pesquisa.....	80
4.8 Como os resultados foram construídos.....	83
 CAPÍTULO V - CONVERGÊNCIAS E CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
5.1. Compreendendo dificuldades de aprendizagem dos alunos.....	85
5.1.1. Análise do desenvolvimento individual dos alunos na primeira atividade.....	86
5.1.2. Análise do desenvolvimento individual dos alunos na segunda atividade.....	93
5.1.3. Análise do desenvolvimento individual dos alunos na terceira atividade.....	102
5.1.4. Análise do desenvolvimento individual dos alunos na Quarta atividade.....	110
5.2. Em busca da convergência dos resultados.....	113
5.2.1 Primeiro nível de convergência: confluências temáticas.....	114
5.2.2 Segundo nível de convergência: categorias abertas.....	123
5.3. Um retorno ao território teórico.....	128
5.4. Limites e perspectiva.....	131
 REFERÊNCIAS	133
 ANEXOS	140

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática é um dos mais novos campos de pesquisa educacional no Brasil, quando comparada a outras áreas historicamente consolidadas, como a didática e a psicopedagogia. Fortemente influenciada por autores franceses, o seu principal foco de interesse é a compreensão, interpretação e descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis de escolaridade.

Acompanhando a tendência de valorização dessa temática, a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, no seu Programa de Mestrado em Educação, oferece vagas para a linha de pesquisa “Educação em Ciências, Matemática e Tecnologias Educacionais”.

A presente pesquisa, que tem por título: “Compreendendo Dificuldades de Aprendizagem de Conceitos Geométricos”, insere-se neste contexto e visa compreender por que os alunos têm dificuldades na elaboração conceitual, sobretudo, quando necessitam articular o conceito geométrico com os seus diversos sistemas de representações.

O Capítulo I descreve sucintamente a trajetória de construção da pesquisa, delimitando, inclusive, o objeto de estudo. Destaca que o ato de pesquisar está intimamente relacionado à vivência e ao mundo pré-reflexivo do pesquisador.

O Capítulo II aborda a problemática do ensino de geometria no Brasil, iniciando pela discussão do estágio de abandono pela qual a mesma passou, principalmente, nas décadas de 70 e 80. Mostra como os Parâmetros Curriculares Nacionais, acompanhando a tendência mundial, valoriza o estudo da geometria plana e espacial, desde a educação infantil. Tece comentários sobre: a presença da geometria nos livros didáticos, o problema do currículo; a aprendizagem da geometria no cenário da mídia informática e a geometria como temática de pesquisa.

O Capítulo III demarca o quadro de referência teórica da pesquisa, mediante a inserção do pesquisador no universo da visualização, construção e representação de conceitos geométricos, principalmente com base nos estudos de Piaget, Frege e Duval. Considerando que a informática pode ser um importante suporte pedagógico para a exploração de conceitos geométricos, houve a necessidade de se recorrer a estudiosos das novas tecnologias da comunicação e da informação, como Papert e Pierre Lévy.

O Capítulo IV traça o caminho metodológico adotado pela pesquisa, discute questões relacionadas ao pensamento fenomenológico e mostra como acontece uma investigação educacional nessa perspectiva. Aborda a concepção fenomenológica de educação

matemática e a construção de conceitos geométricos, segundo essa corrente filosófica. É, nessa parte da pesquisa, que também são definidos, claramente, os objetivos do trabalho, quem são os sujeitos colaboradores e os procedimentos metodológicos utilizados.

E por último, o Capítulo V descreve as dificuldades de aprendizagem de conceitos geométricos, manifestadas pelos alunos, à luz das teorias analisadas, e apresenta um breve relato das limitações e perspectivas da pesquisa.

CAPÍTULO I

TRAJETÓRIA DE CONSTRUÇÃO DA PESQUISA

*A descoberta científica é, sem dúvida,
provocada pela tensão gerada pelo problema.*
(SEVERINO, 1992, p. 112).

A presente pesquisa pertence ao campo da Educação Matemática e tem como foco a aprendizagem da geometria. A escolha do tema e do objeto da pesquisa como também de todas as demais ações envolvidas nesta atividade de investigação originou-se a partir da vivência deste pesquisador na área educacional, particularmente, como professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio.

A experiência profissional e o mundo pré-reflexivo¹ do pesquisador ocupam um papel relevante neste trabalho, entendidos, sobretudo, como experiência vivenciada na busca do conhecimento e não como prática repetitiva e utilitária que o termo possa sugerir.

Para compreensão melhor do desenvolvimento desta investigação científica, faz-se necessário relatar o seu processo de amadurecimento, bem como delimitar claramente a sua temática e o seu objeto de estudo.

1 Origem da Pesquisa

O interesse por um assunto de pesquisa, assim como a situação que deu origem à primeira intuição ou idéia sobre o objeto a ser pesquisado podem ser motivados por diversas razões. Neste caso particular, a motivação vem do desejo de compreender algumas dificuldades dos alunos relacionadas à aprendizagem matemática, e em particular, à construção de conceitos geométricos.

O ponto de partida da pesquisa está intrinsecamente relacionado à observação da realidade empírica e às experiências pessoais do investigador no campo de trabalho na área

¹ O termo pré-reflexivo é empregado nesta investigação como sendo o conjunto de todas as experiências prévias do pesquisador as quais, pela reflexão persistente e laboriosa, serve de base para o desenvolvimento de toda a

educacional. Machado (1998) afirma que o ato de pesquisar está profundamente ancorado na história pessoal do pesquisador, pois a escolha da problemática da pesquisa é algo que representa um conflito desafiante e perturbador para ele. Declara, ainda, que um indivíduo, para ser digno do título de pesquisador, autor e criador, precisa se constituir sobre seus próprios passos, sobre sua trajetória de vida, única, original e, a partir daí, interagir com o universo de outros autores.

Severino (1992, p. 09), que dedicou em sua obra um capítulo sobre a metodologia do trabalho científico para a pós-graduação, ressalta que:

A temática deve ser realmente uma problemática vivenciada pelo pesquisador, ela deve lhe dizer respeito. Não, evidentemente, a um nível puramente sentimental, mas a nível da avaliação da relevância e da significação dos problemas abordados para o próprio pesquisador, a vista de sua relação com o universo que o envolve.

Pais (1999) compartilha desta idéia ao afirmar que não existe nenhum pesquisador que seja totalmente desprovido de uma experiência prévia. Logo, quando ele busca compreender determinado fenômeno, os seus conhecimentos prévios constituem-se no *a priori* sobre os quais se colocarão as interrogações primeiras na busca da compreensão do fenômeno interrogado.

É com base nesse pensamento que se pode afirmar que a escolha do tema, que significa eleger uma parcela delimitada de um assunto para o desenvolvimento da pesquisa pretendida, bem como o seu objeto de estudo, foi se cristalizando ao longo da carreira profissional do pesquisador. Apesar desta investigação vir sendo construída ao longo de vários anos da trajetória do magistério, a sua formalização, através de um projeto de pesquisa, deu-se como uma exigência para o ingresso no Programa de Mestrado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, no ano de 2000.

Os primeiros contatos deste pesquisador com o ensino de geometria ocorreu há mais de 25 anos, como professor de matemática no ensino fundamental e médio. No decorrer de toda a vivência em sala de aula e, posteriormente, em funções de direção e de assessoramento pedagógico, foi possível constatar que em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, pois os objetos matemáticos² são essencialmente de natureza abstrata.

trajetória da pesquisa. Em outras palavras, é um modo de compreensão do homem, ainda não desenvolvido de modo reflexivo.

² Objetos matemáticos, como números, formas, propriedades, relações, estruturas, conceitos, teoremas, postulados, axiomas etc., são caracterizados pela sua natureza essencialmente abstrata, sendo acessíveis, somente, através de representações.

A apreensão dos mesmos só é possível, basicamente, através do uso de diferentes signos³ que funcionam como interface entre o conhecimento, o pensamento e a linguagem.

A experiência, como professor de matemática do antigo Curso Normal, que formava professores para atuarem nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, foi essencial para a descoberta, ainda que empiricamente, de que os alunos egressos desse curso, que não gostavam de geometria, geralmente manifestavam desinteresse por este conteúdo também no exercício do magistério.

Essa constatação pode configurar-se como uma das explicações para o fato de que muitos alunos chegam à 5ª série do ensino fundamental sem o domínio de conceitos geométricos elementares, pois, seus professores não deram a devida importância ao conteúdo geométrico nas quatro primeiras séries do ensino fundamental. Ao contrário, davam ênfase quase que exclusivamente ao trabalho com números, álgebra e teoria de conjuntos, ainda influenciados pelo movimento da matemática moderna.

Lorenzato (1995), ao desenvolver uma pesquisa envolvendo 225 professores que lecionavam nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, com cerca de 10 anos de experiência no magistério, chegou à conclusão de que apenas 8% deles admitiam que ensinavam geometria a seus alunos. O autor da pesquisa enfatiza que ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece e que talvez seja esta mais uma razão para o relativo abandono deste ensino nas escolas.

O fato de ter exercido o mandato de membro titular do Conselho Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul e o cargo de Diretor Geral de Recursos Humanos da Secretaria de Estado de Educação - órgão responsável pela coordenação das políticas de administração de pessoal, de capacitação de recursos humanos e de tecnologia educacional - contribuiu grandemente para o amadurecimento desta pesquisa.

Foi nesse momento, que este pesquisador buscou, com maior intensidade, estudar a utilização das tecnologias da comunicação e da informação na Educação, em especial, a televisão, o vídeo e o computador, como uma alternativa a mais para ampliar as possibilidades do ensino e da aprendizagem escolar, sobretudo em relação à visualização e à representação de figuras geométricas espaciais.

Ao analisar dados estatísticos referentes ao desempenho dos alunos da rede estadual de ensino de Mato Grosso do Sul, com a finalidade de elaborar projetos de capacitação de professores, mais uma vez ficava evidente a situação deficitária do ensino de matemática, pois

³ Signos são palavras, expressões, desenhos, gráficos, esquemas, numeral, símbolos e até mesmo gestos utilizados como citação de outro objeto ou acontecimento.

os maiores índices de reprovação concentravam-se justamente nesta disciplina. Daí, não ser difícil deduzir que os alunos também apresentavam dificuldades na aprendizagem da geometria.

Uma delas estava relacionada à atividade cognitiva de ler e interpretar desenhos de figuras geométricas e destacar suas propriedades, principalmente quando envolvia a leitura de perspectiva⁴. As dificuldades também eram evidentes em situação de aprendizagem que exigia o estabelecimento de relações entre as diversas estratégias de representação de um mesmo conceito e a sua dimensão conceitual.

É importante fazer uma distinção entre o desenho e a figura geométrica. Arsac (1992) foi buscar em Platão a explicação para a diferença entre o desenho e a figura: a figura geométrica é um objeto ideal e o desenho uma representação imperfeita do mesmo. Em outras palavras, o desenho é um modelo de figura geométrica. É um suporte material que permite trabalhar com a abstração da figura geométrica, expressando-a na folha de papel, na tela de computador, no quadro de sala de aula, e assim por diante.

Os termos desenho e figura, no entanto, às vezes aparecem nos livros didáticos como sinônimos de representação de um conceito geométrico. A palavra “figura” também pode aparecer com um duplo sentido: pode ser o desenho ou ainda o próprio conceito. Nesta pesquisa, a expressão figura sempre estará relacionada ao conceito geométrico existente no campo da abstração e o desenho à sua representação.

Por outro lado, com a crescente popularização da tecnologia digital, os sistemas de representação do conhecimento matemático, que tradicionalmente têm caráter estático, tipo “lápiz e papel” ou “giz e quadro-negro”, ganharam dinamismo na tela do computador através da manipulação direta sobre as representações. Um exemplo disso é a possibilidade de manipular elementos de um desenho geométrico através do “Cabri Géomètry”, que é um programa bastante conhecido como ferramenta para construções em geometria. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem.

Esse novo cenário despertou o interesse particular deste pesquisador pelo uso pedagógico da informática na aprendizagem da geometria. A justificativa é simples: cada vez mais as escolas estão levando o computador para as salas de aula e este recurso didático, com suas ferramentas, pode oferecer novas formas de construção e disseminação do conhecimento.

Como se vê, a trajetória profissional e outras experiências de vida do pesquisador influenciaram na escolha do tema da pesquisa. Como a temática da aprendizagem da

⁴ Perspectiva é considerada, nesta pesquisa, como uma técnica de desenho que permite destacar, em uma superfície plana, propriedades características do espaço tridimensional.

geometria é um campo bastante amplo, e ainda, para que a pesquisa seja possível, foi necessário determinar os aspectos que mais interessam nesta investigação, o seu campo de observação e os seus limites.

Para facilitar a compreensão daquilo que se pretende confrontar, buscou-se não somente formular o problema da pesquisa, mas também, limitar o seu objeto de estudo.

2 Delimitação do Objeto de Pesquisa

Toda a problemática da pesquisa gira em torno da seguinte questão: se os alunos são habitantes de um mundo cujo modelo é tridimensional, por que geralmente têm dificuldade na articulação entre os conceitos da geometria plana e os da geometria espacial, principalmente, em atividades que exigem um certo domínio das habilidades de visualização e de representação de sólidos geométricos?

Em outras palavras, por que os alunos geralmente demonstram mais facilidade para concretizarem as noções abstratas da geometria no plano do que no espaço? Apesar dos alunos estarem acostumados a lidar com objetos tridimensionais no seu dia-a-dia, tais como, cubos, esferas, cilindros, pirâmides, paralelepípedos e outros, nem sempre é fácil ampliar para ele os horizontes, ou seja, sair do plano e passar para o espaço e vice-versa.

As razões pelos quais os alunos apresentam dificuldades de fazer esta articulação pode estar relacionada à forte ênfase que é dada ao estudo de figuras planas no ensino fundamental, como retas, ângulos, polígonos, círculos, relegando o estudo das figuras espaciais a um plano secundário.

Fonseca et al. (2001), ao pesquisar o ensino de geometria e a formação do professor nos ciclos iniciais do ensino fundamental, ressalta que geralmente o estudo de figuras planas precede a dos sólidos, numa organização mais voltada para o método tradicional do que para as propostas pedagógicas que valorizam a experiência e a manipulação como ponto de partida da aprendizagem de conceitos geométricos.

Nesta perspectiva, pode-se afirmar que um dos obstáculos à aprendizagem da geometria espacial é a não exploração, por parte do professor, em sala de aula, de atividades de manipulação de objetos geométricos.

Fonseca ressalta ainda que os conteúdos geométricos devem ser trabalhados em sala de aula desde a educação infantil e sugere que o estudo da geometria espacial deveria,

inclusive, vir antes da geometria plana, acompanhando a tendência mundial para o ensino de geometria.

Na realidade, o propósito desta investigação não é discutir se o ensino da geometria deve começar pelas figuras planas ou pelas figuras espaciais ou por ambas, entretanto, vários pesquisadores têm revelado que a dificuldade de articulação entre o plano e o espaço pode estar ligada à valorização excessiva do estudo de figuras planas.

Levanta-se a hipótese também de que uma das razões pelos quais os alunos apresentam dificuldades de fazer essa articulação está relacionada à falta de compreensão do funcionamento das representações semióticas⁵ mais utilizadas na aprendizagem da geometria nas duas primeiras etapas da educação básica: a língua natural (os enunciados), a escrita simbólica (escrita algébrica, as fórmulas) e a representação figural (os desenhos, os gráficos).

A representação na língua natural é concebido nessa pesquisa como sendo a escrita discursiva do tipo: “se duas retas distintas possuem uma perpendicular comum, então elas não se interceptam”. A representação na escrita simbólica é caracterizado pelo uso de símbolos próprios do campo de um determinado conhecimento, como a geometria: **AB//CD**, onde **AB** e **CD** são retas. E por último, a representação figural é distinguido pela utilização de desenhos, como o de uma pirâmide ou de uma reta.

Por outro lado, o uso de uma linguagem dotada de movimento, propiciada pelos novos recursos tecnológicos da informática, tem se mostrado inovadora e eficaz para a dinamização do ensino da geometria. Em função disso, a outra dimensão da pesquisa está relacionada ao pressuposto de que a utilização do computador na sala de aula pode constituir um recurso pedagógico de grande potencial frente aos obstáculos inerentes à construção de conceitos geométricos.

Com base nessas considerações é que foi delimitado o presente objeto para fins de investigação:

“Dificuldades de aprendizagem na articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial, principalmente no processo de visualização e representação de conceitos geométricos”.

Com o objetivo de melhor esclarecer o sentido deste objeto, torna-se necessário detalhar algumas de suas dimensões: em primeiro lugar, busca-se compreender melhor como os alunos articulam as informações obtidas através da leitura de desenhos com seus

⁵ “Representações semióticas são produções constituídas pelo uso de símbolos pertencendo a um sistema de representação que tem condições próprias de significado e de funcionamento”. (DUVAL, 1993, p. 39).

invariantes conceituais, quando lhes são exigidos o domínio de conceitos relacionados à geometria plana e à geometria espacial, concomitantemente. Posteriormente, identificar possíveis dificuldades manifestadas pelos estudantes quanto à abstração e à generalização de conceitos, à elaboração da representação plana e ao uso da linguagem na descrição de figuras geométricas planas e espaciais.

Em segundo lugar, a problemática da representação de conceitos geométricos está relacionada à semiótica, disciplina especializada no estudo da representação do pensamento através de vários tipos de signos perceptíveis pelos sentidos do corpo humano. Apesar de existirem várias teorias visando a compreensão geral dos signos, a questão está particularmente direcionada para a compreensão do fenômeno, caracterizado pelo uso de signos representativos na elaboração de conceitos geométricos, baseada na teoria de “Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão Matemática”, proposta pelo psicólogo francês Raymond Duval (1993).

E por último, levanta-se a expectativa de que, através do uso do computador, os alunos possam realizar uma variedade de experimentos, diferente da manipulação de modelos concretos ou do desenho sobre uma folha de papel, que favoreça a visualização e a leitura de objetos tridimensionais. Em outras palavras, o que se pretende é procurar compreender e descrever algumas limitações que o aluno enfrenta, referentes à visualização e à representação de figuras geométricas, principalmente as espaciais, segundo o modelo tradicional de aprendizagem, ou seja, apenas com lápis e papel, e investigar de que forma o uso do computador em sala de aula pode favorecer a expansão do conhecimento geométrico no ensino fundamental.

É interessante esclarecer ainda, que a visão adotada nesta pesquisa parte do pressuposto de que a construção de conceitos geométricos é um fenômeno cognitivo condicionado por aspectos do plano psicológico da compreensão humana; pelo plano epistemológico, que caracteriza a própria natureza dos conceitos matemáticos, e pelo plano lógico, que trata do desafio da articulação entre o entendimento objetivo e a elaboração da objetividade do saber. Além disso, o conceito não é considerado uma dimensão isolada da sua representação.

CAPÍTULO I

TRAJETÓRIA DE CONSTRUÇÃO DA PESQUISA

*A descoberta científica é, sem dúvida,
provocada pela tensão gerada pelo problema.*
(SEVERINO, 1992, p. 112).

A presente pesquisa pertence ao campo da Educação Matemática e tem como foco a aprendizagem da geometria. A escolha do tema e do objeto da pesquisa como também de todas as demais ações envolvidas nesta atividade de investigação originou-se a partir da vivência deste pesquisador na área educacional, particularmente, como professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio.

A experiência profissional e o mundo pré-reflexivo⁶ do pesquisador ocupam um papel relevante neste trabalho, entendidos, sobretudo, como experiência vivenciada na busca do conhecimento e não como prática repetitiva e utilitária que o termo possa sugerir.

Para compreensão melhor do desenvolvimento desta investigação científica, faz-se necessário relatar o seu processo de amadurecimento, bem como delimitar claramente a sua temática e o seu objeto de estudo.

1 Origem da Pesquisa

O interesse por um assunto de pesquisa, assim como a situação que deu origem à primeira intuição ou idéia sobre o objeto a ser pesquisado podem ser motivados por diversas razões. Neste caso particular, a motivação vem do desejo de compreender algumas dificuldades dos alunos relacionadas à aprendizagem matemática, e em particular, à construção de conceitos geométricos.

⁶ O termo pré-reflexivo é empregado nesta investigação como sendo o conjunto de todas as experiências prévias do pesquisador as quais, pela reflexão persistente e laboriosa, serve de base para o desenvolvimento de toda a trajetória da pesquisa. Em outras palavras, é um modo de compreensão do homem, ainda não desenvolvido de modo reflexivo.

O ponto de partida da pesquisa está intrinsecamente relacionado à observação da realidade empírica e às experiências pessoais do investigador no campo de trabalho na área educacional. Machado (1998) afirma que o ato de pesquisar está profundamente ancorado na história pessoal do pesquisador, pois a escolha da problemática da pesquisa é algo que representa um conflito desafiante e perturbador para ele. Declara, ainda, que um indivíduo, para ser digno do título de pesquisador, autor e criador, precisa se constituir sobre seus próprios passos, sobre sua trajetória de vida, única, original e, a partir daí, interagir com o universo de outros autores.

Severino (1992, p. 09), que dedicou em sua obra um capítulo sobre a metodologia do trabalho científico para a pós-graduação, ressalta que:

A temática deve ser realmente uma problemática vivenciada pelo pesquisador, ela deve lhe dizer respeito. Não, evidentemente, a um nível puramente sentimental, mas a nível da avaliação da relevância e da significação dos problemas abordados para o próprio pesquisador, a vista de sua relação com o universo que o envolve.

Pais (1999) compartilha desta idéia ao afirmar que não existe nenhum pesquisador que seja totalmente desprovido de uma experiência prévia. Logo, quando ele busca compreender determinado fenômeno, os seus conhecimentos prévios constituem-se no *a priori* sobre os quais se colocarão as interrogações primeiras na busca da compreensão do fenômeno interrogado.

É com base nesse pensamento que se pode afirmar que a escolha do tema, que significa eleger uma parcela delimitada de um assunto para o desenvolvimento da pesquisa pretendida, bem como o seu objeto de estudo, foi se cristalizando ao longo da carreira profissional do pesquisador. Apesar desta investigação vir sendo construída ao longo de vários anos da trajetória do magistério, a sua formalização, através de um projeto de pesquisa, deu-se como uma exigência para o ingresso no Programa de Mestrado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, no ano de 2000.

Os primeiros contatos deste pesquisador com o ensino de geometria ocorreu há mais de 25 anos, como professor de matemática no ensino fundamental e médio. No decorrer de toda a vivência em sala de aula e, posteriormente, em funções de direção e de assessoramento pedagógico, foi possível constatar que em matemática toda a comunicação se estabelece com

base em representações, pois os objetos matemáticos⁷ são essencialmente de natureza abstrata. A apreensão dos mesmos só é possível, basicamente, através do uso de diferentes signos⁸ que funcionam como interface entre o conhecimento, o pensamento e a linguagem.

A experiência, como professor de matemática do antigo Curso Normal, que formava professores para atuarem nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, foi essencial para a descoberta, ainda que empiricamente, de que os alunos egressos desse curso, que não gostavam de geometria, geralmente manifestavam desinteresse por este conteúdo também no exercício do magistério.

Essa constatação pode configurar-se como uma das explicações para o fato de que muitos alunos chegam à 5ª série do ensino fundamental sem o domínio de conceitos geométricos elementares, pois, seus professores não deram a devida importância ao conteúdo geométrico nas quatro primeiras séries do ensino fundamental. Ao contrário, davam ênfase quase que exclusivamente ao trabalho com números, álgebra e teoria de conjuntos, ainda influenciados pelo movimento da matemática moderna.

Lorenzato (1995), ao desenvolver uma pesquisa envolvendo 225 professores que lecionavam nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, com cerca de 10 anos de experiência no magistério, chegou à conclusão de que apenas 8% deles admitiam que ensinavam geometria a seus alunos. O autor da pesquisa enfatiza que ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece e que talvez seja esta mais uma razão para o relativo abandono deste ensino nas escolas.

O fato de ter exercido o mandato de membro titular do Conselho Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul e o cargo de Diretor Geral de Recursos Humanos da Secretaria de Estado de Educação - órgão responsável pela coordenação das políticas de administração de pessoal, de capacitação de recursos humanos e de tecnologia educacional - contribuiu grandemente para o amadurecimento desta pesquisa.

Foi nesse momento, que este pesquisador buscou, com maior intensidade, estudar a utilização das tecnologias da comunicação e da informação na Educação, em especial, a televisão, o vídeo e o computador, como uma alternativa a mais para ampliar as possibilidades do ensino e da aprendizagem escolar, sobretudo em relação à visualização e à representação de figuras geométricas espaciais.

⁷ Objetos matemáticos, como números, formas, propriedades, relações, estruturas, conceitos, teoremas, postulados, axiomas etc., são caracterizados pela sua natureza essencialmente abstrata, sendo acessíveis, somente, através de representações.

⁸ Signos são palavras, expressões, desenhos, gráficos, esquemas, numeral, símbolos e até mesmo gestos utilizados como citação de outro objeto ou acontecimento.

Ao analisar dados estatísticos referentes ao desempenho dos alunos da rede estadual de ensino de Mato Grosso do Sul, com a finalidade de elaborar projetos de capacitação de professores, mais uma vez ficava evidente a situação deficitária do ensino de matemática, pois os maiores índices de reprovação concentravam-se justamente nesta disciplina. Daí, não ser difícil deduzir que os alunos também apresentavam dificuldades na aprendizagem da geometria.

Uma delas estava relacionada à atividade cognitiva de ler e interpretar desenhos de figuras geométricas e destacar suas propriedades, principalmente quando envolvia a leitura de perspectiva⁹. As dificuldades também eram evidentes em situação de aprendizagem que exigia o estabelecimento de relações entre as diversas estratégias de representação de um mesmo conceito e a sua dimensão conceitual.

É importante fazer uma distinção entre o desenho e a figura geométrica. Arsac (1992) foi buscar em Platão a explicação para a diferença entre o desenho e a figura: a figura geométrica é um objeto ideal e o desenho uma representação imperfeita do mesmo. Em outras palavras, o desenho é um modelo de figura geométrica. É um suporte material que permite trabalhar com a abstração da figura geométrica, expressando-a na folha de papel, na tela de computador, no quadro de sala de aula, e assim por diante.

Os termos desenho e figura, no entanto, às vezes aparecem nos livros didáticos como sinônimos de representação de um conceito geométrico. A palavra “figura” também pode aparecer com um duplo sentido: pode ser o desenho ou ainda o próprio conceito. Nesta pesquisa, a expressão figura sempre estará relacionada ao conceito geométrico existente no campo da abstração e o desenho à sua representação.

Por outro lado, com a crescente popularização da tecnologia digital, os sistemas de representação do conhecimento matemático, que tradicionalmente têm caráter estático, tipo “lápiz e papel” ou “giz e quadro-negro”, ganharam dinamismo na tela do computador através da manipulação direta sobre as representações. Um exemplo disso é a possibilidade de manipular elementos de um desenho geométrico através do “Cabri Géomètry”, que é um programa bastante conhecido como ferramenta para construções em geometria. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem.

Esse novo cenário despertou o interesse particular deste pesquisador pelo uso pedagógico da informática na aprendizagem da geometria. A justificativa é simples: cada vez

⁹ Perspectiva é considerada, nesta pesquisa, como uma técnica de desenho que permite destacar, em uma superfície plana, propriedades características do espaço tridimensional.

mais as escolas estão levando o computador para as salas de aula e este recurso didático, com suas ferramentas, pode oferecer novas formas de construção e disseminação do conhecimento.

Como se vê, a trajetória profissional e outras experiências de vida do pesquisador influenciaram na escolha do tema da pesquisa. Como a temática da aprendizagem da geometria é um campo bastante amplo, e ainda, para que a pesquisa seja possível, foi necessário determinar os aspectos que mais interessam nesta investigação, o seu campo de observação e os seus limites.

Para facilitar a compreensão daquilo que se pretende confrontar, buscou-se não somente formular o problema da pesquisa, mas também, limitar o seu objeto de estudo.

2 Delimitação do Objeto de Pesquisa

Toda a problemática da pesquisa gira em torno da seguinte questão: se os alunos são habitantes de um mundo cujo modelo é tridimensional, por que geralmente têm dificuldade na articulação entre os conceitos da geometria plana e os da geometria espacial, principalmente, em atividades que exigem um certo domínio das habilidades de visualização e de representação de sólidos geométricos?

Em outras palavras, por que os alunos geralmente demonstram mais facilidade para concretizarem as noções abstratas da geometria no plano do que no espaço? Apesar dos alunos estarem acostumados a lidar com objetos tridimensionais no seu dia-a-dia, tais como, cubos, esferas, cilindros, pirâmides, paralelepípedos e outros, nem sempre é fácil ampliar para ele os horizontes, ou seja, sair do plano e passar para o espaço e vice-versa.

As razões pelos quais os alunos apresentam dificuldades de fazer esta articulação pode estar relacionada à forte ênfase que é dada ao estudo de figuras planas no ensino fundamental, como retas, ângulos, polígonos, círculos, relegando o estudo das figuras espaciais a um plano secundário.

Fonseca et al. (2001), ao pesquisar o ensino de geometria e a formação do professor nos ciclos iniciais do ensino fundamental, ressalta que geralmente o estudo de figuras planas precede a dos sólidos, numa organização mais voltada para o método tradicional do que para as propostas pedagógicas que valorizam a experiência e a manipulação como ponto de partida da aprendizagem de conceitos geométricos.

Nesta perspectiva, pode-se afirmar que um dos obstáculos à aprendizagem da geometria espacial é a não exploração, por parte do professor, em sala de aula, de atividades de manipulação de objetos geométricos.

Fonseca ressalta ainda que os conteúdos geométricos devem ser trabalhados em sala de aula desde a educação infantil e sugere que o estudo da geometria espacial deveria, inclusive, vir antes da geometria plana, acompanhando a tendência mundial para o ensino de geometria.

Na realidade, o propósito desta investigação não é discutir se o ensino da geometria deve começar pelas figuras planas ou pelas figuras espaciais ou por ambas, entretanto, vários pesquisadores têm revelado que a dificuldade de articulação entre o plano e o espaço pode estar ligada à valorização excessiva do estudo de figuras planas.

Levanta-se a hipótese também de que uma das razões pelos quais os alunos apresentam dificuldades de fazer essa articulação está relacionada à falta de compreensão do funcionamento das representações semióticas¹⁰ mais utilizadas na aprendizagem da geometria nas duas primeiras etapas da educação básica: a língua natural (os enunciados), a escrita simbólica (escrita algébrica, as fórmulas) e a representação figural (os desenhos, os gráficos).

A representação na língua natural é concebido nessa pesquisa como sendo a escrita discursiva do tipo: “se duas retas distintas possuem uma perpendicular comum, então elas não se interceptam”. A representação na escrita simbólica é caracterizado pelo uso de símbolos próprios do campo de um determinado conhecimento, como a geometria: **AB//CD**, onde **AB** e **CD** são retas. E por último, a representação figural é distinguido pela utilização de desenhos, como o de uma pirâmide ou de uma reta.

Por outro lado, o uso de uma linguagem dotada de movimento, propiciada pelos novos recursos tecnológicos da informática, tem se mostrado inovadora e eficaz para a dinamização do ensino da geometria. Em função disso, a outra dimensão da pesquisa está relacionada ao pressuposto de que a utilização do computador na sala de aula pode constituir um recurso pedagógico de grande potencial frente aos obstáculos inerentes à construção de conceitos geométricos.

Com base nessas considerações é que foi delimitado o presente objeto para fins de investigação:

¹⁰ “Representações semióticas são produções constituídas pelo uso de símbolos pertencendo a um sistema de representação que tem condições próprias de significado e de funcionamento”. (DUVAL, 1993, p. 39).

“Dificuldades de aprendizagem na articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial, principalmente no processo de visualização e representação de conceitos geométricos”.

Com o objetivo de melhor esclarecer o sentido deste objeto, torna-se necessário detalhar algumas de suas dimensões: em primeiro lugar, busca-se compreender melhor como os alunos articulam as informações obtidas através da leitura de desenhos com seus invariantes conceituais, quando lhes são exigidos o domínio de conceitos relacionados à geometria plana e à geometria espacial, concomitantemente. Posteriormente, identificar possíveis dificuldades manifestadas pelos estudantes quanto à abstração e à generalização de conceitos, à elaboração da representação plana e ao uso da linguagem na descrição de figuras geométricas planas e espaciais.

Em segundo lugar, a problemática da representação de conceitos geométricos está relacionada à semiótica, disciplina especializada no estudo da representação do pensamento através de vários tipos de signos perceptíveis pelos sentidos do corpo humano. Apesar de existirem várias teorias visando a compreensão geral dos signos, a questão está particularmente direcionada para a compreensão do fenômeno, caracterizado pelo uso de signos representativos na elaboração de conceitos geométricos, baseada na teoria de “Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão Matemática”, proposta pelo psicólogo francês Raymond Duval (1993).

E por último, levanta-se a expectativa de que, através do uso do computador, os alunos possam realizar uma variedade de experimentos, diferente da manipulação de modelos concretos ou do desenho sobre uma folha de papel, que favoreça a visualização e a leitura de objetos tridimensionais. Em outras palavras, o que se pretende é procurar compreender e descrever algumas limitações que o aluno enfrenta, referentes à visualização e à representação de figuras geométricas, principalmente as espaciais, segundo o modelo tradicional de aprendizagem, ou seja, apenas com lápis e papel, e investigar de que forma o uso do computador em sala de aula pode favorecer a expansão do conhecimento geométrico no ensino fundamental.

É interessante esclarecer ainda, que a visão adotada nesta pesquisa parte do pressuposto de que a construção de conceitos geométricos é um fenômeno cognitivo condicionado por aspectos do plano psicológico da compreensão humana; pelo plano epistemológico, que caracteriza a própria natureza dos conceitos matemáticos, e pelo plano lógico, que trata do desafio da articulação entre o entendimento objetivo e a elaboração da

objetividade do saber. Além disso, o conceito não é considerado uma dimensão isolada da sua representação.

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

A Geometria se constitui em um campo de conhecimento muito importante para a descrição e a inter-relação do homem com o espaço em que vive, podendo ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo, portanto, fundamental na formação dos alunos.
(PASSOS, 2000, p. 1)

Para se estudar qualquer fenômeno educacional é preciso confrontar os dados, as evidências e as informações coletadas sobre determinado assunto com o conhecimento teórico acumulado a respeito dele. É uma etapa importante da pesquisa porque possibilita obter informações mais atualizadas a respeito do tema ou problema a ser pesquisado e conhecer opiniões a respeito de aspectos relacionados à investigação pretendida.

Por esta razão, busca-se neste momento tecer alguns comentários a respeito da problemática do ensino de geometria, uma vez que algumas das dificuldades de aprendizagem na elaboração de conceitos geométricos guardam uma estreita relação com essa temática, especialmente quando o aluno percorre o caminho em dois movimentos diferentes, ou seja, do plano para o espaço e do espaço para o plano, em atividades de visualização e representação de conceitos.

2.1 Problemas do Ensino da Geometria

O ensino de geometria no Brasil passou por um estágio de abandono, principalmente nas décadas de 70 e 80, conforme demonstram as pesquisas realizadas por vários estudiosos brasileiros, como Pavanello (1989), Perez (1991), Lorenzato (1995), Gravina (1996), Passos (2000), Fonseca (2001) e outros.

Pavanello (1993, p. 7-16) discute a problemática resultante do abandono do ensino de geometria no artigo: “O abandono do ensino da geometria no Brasil - causas e conseqüências”, onde ressalta que a reforma do ensino advinda com o Movimento da Matemática Moderna contribuiu sobremaneira para o esvaziamento deste ensino no país e que

os livros didáticos e os programas curriculares lançados sob a orientação desse Movimento tinham como preocupação maior as estruturas algébricas e a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos.

De acordo com Pavanello, a geometria passou a ser trabalhada numa abordagem intuitiva, mediante a utilização de teoremas como se fossem postulados, sem nenhuma preocupação com a sistematização das noções primitivas e empiricamente elaboradas.

Enfatiza ainda que o esvaziamento do ensino de geometria acentuou-se mais ainda quando procurou desenvolvê-lo sob o enfoque das transformações, pois os professores, por não dominarem essa abordagem, acabaram deixando de ensinar a geometria por esse e qualquer outro enfoque.

Pavanello afirma também que a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Grau, conhecida como a Lei 5692/71, ao permitir que o professor elaborasse o seu próprio programa curricular “de acordo com as necessidades da clientela”, acabou favorecendo o abandono do ensino de geometria no Brasil. O resultado dessa “boa intenção” foi que o professor priorizou o ensino de aritmética e as noções de conjuntos nos cursos do então 1º grau e a geometria, quando não era eliminada, aparecia apenas do 2º grau, hoje ensino médio.

Passos (2000), referindo-se aos estudos de Castelnuovo (1889), afirma que o Movimento da Matemática Moderna chegou a propor o fim de Euclides nas escolas, sob a alegação de que a forma como a geometria axiomatizada vinha sendo ensinada era a mesma de vários séculos atrás e que precisava ser renovada.

Em outras palavras, o ensino da geometria euclidiana da forma como era tradicionalmente ensinada deveria ser substituído por uma matemática “mais viva, mais motivadora, que correspondia à investigação moderna”. (PASSOS, 2000, p. 56). Segundo Passos, o resultado desta idéia foi que acabou não acontecendo nem uma coisa nem outra, ou seja, os alunos deixaram de estudar a geometria euclidiana na sua abordagem clássica e também na perspectiva modernista.

Fonseca *et al.* (2001, p. 17), em um trabalho publicado sobre a aprendizagem da geometria nas quatro primeiras séries do ensino fundamental, relata que a preocupação com o ensino de geometria no Brasil intensificou-se, principalmente, a partir da década de 80; entretanto, ainda são tímidas e discretas as mudanças neste quadro de quase ausência deste ensino nas séries iniciais da escolarização.

Apesar da pesquisa estar voltada para o ensino da geometria nos dois primeiros ciclos da educação básica, Fonseca acredita que o despreparo do professor e o descaso com

esta temática extrapolam o contexto específico de 1ª a 4ª série do ensino fundamental e permeiam outros níveis e etapas da educação básica.

Uma das razões citadas que comprometem o ensino de geometria no primeiro nível do ensino fundamental é o fato de o professor tomar, como referência para as suas aulas, basicamente, o livro didático, sem conhecer e analisar a proposta do autor e suas concepções de matemática e de ensino.

Nesse contexto, Fonseca defende a necessidade do professor investigar o que tem sido proposto pelos autores de livros didáticos, como também o que preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Numa das atividades da referida pesquisa, foi solicitado aos professores que fizessem um levantamento dos conteúdos trabalhados em sala de aula, confrontando a sua prática pedagógica com as propostas curriculares dos órgãos oficiais.

Após a análise do material coletado, chegou-se a conclusões semelhantes à de outras pesquisas sobre esta mesma temática, conforme o relatado abaixo, de forma resumida:

- os professores descreveram com maior riqueza de detalhes o trabalho com números e operações matemáticas, enquanto que o tópico de geometria foi descrito de maneira sumária. Segundo Fonseca, isto pode demonstrar tanto a não familiaridade com o conteúdo de geometria como até mesmo o descaso por esta matéria;
- o conteúdo de geometria apareceu sempre no final das listas, presumindo-se que o mesmo é sempre abordado no final do programa de cada série;
- o estudo de figuras planas precede a dos sólidos, numa organização mais voltada para o método cartesiano e tradicional do que às propostas pedagógicas que valorizam a experiência e a manipulação como ponto de partida da aprendizagem de conceitos geométricos. De acordo com Fonseca, a tendência atual é do estudo da geometria espacial preceder ou antepor o da geometria plana;
- falta de um trabalho sistemático com sólidos geométricos, pelo fato dos professores não dominarem alternativas metodológicas, tais como, exploração de materiais manipulativos, planificações, construções, etc;
- ênfase no estudo centrado na apresentação formal dos conteúdos em detrimento da exploração de conceitos, especialmente numa fase inicial da escolaridade, quando são introduzidas as noções de ponto, reta, plano, segmento, semi-retas e ângulos.

Catunda *et al* (1988, p. 11), ao abordar, também, as questões relativas ao ensino de geometria no Brasil, afirma que “A geometria ensinada na maioria das escolas brasileiras é a

geometria de Euclides na sua apresentação milenar, excessivamente formal, e no seu aspecto exclusivamente de medida”.

Na verdade, não há nenhum demérito em ensinar a geometria euclidiana nas escolas, pois, segundo Lindquist e Shulte (1994), Euclides deve permanecer e ser ensinado. Para estes pesquisadores americanos, o problema não está no seu conteúdo, mas na forma como é abordado em sala de aula.

Essa posição é compartilhada por Catunda *et al* (1988, p. 13), ao citar um trabalho produzido por Bruce Meserve, apresentado no 2º Congresso Internacional de Educação Matemática, em 1973, em Exeter, Inglaterra, onde esse autor diz que a declaração “abaixo Euclides” não deve ser entendida como sinônimo de “abaixo a geometria”, mas, sobretudo, como “uma forte indicação de que a geometria deve ser ensinada como uma matéria viva e em crescimento, em vez de uma coleção de regras velhas”.

Catunda ressalta que “é preciso mergulhar fundo nos problemas do ensino da geometria e indagar as causas de seu fracasso” (CATUNDA, *et al* 1988, p. 11); questionar, inclusive, o porquê da geometria não ser ensinada na maioria das escolas e por que os alunos brasileiros, em geral, não gostam de geometria ou têm muita dificuldade em construir o seu conhecimento geométrico.

O autor apresenta quatro razões pelas quais o ensino de geometria quase desapareceu dos programas curriculares das unidades escolares do Brasil, a exemplo do que ocorreu em outras partes do mundo:

1. o ensino de geometria não se renovou e, com isso, ela perdeu o seu vigor;
2. os professores, na sua maioria, não dominam os conhecimentos da geometria e, por isso, excluem a geometria dos seus planos de curso;
3. os livros textos, para o ensino fundamental, apresentam uma geometria que, além de milenar, se limitam a definir figuras e seus elementos;
4. no passado, a geometria euclidiana era, em geral, ensinada a alunos da faixa etária de 14 a 16 anos. Hoje, essa faixa etária baixou para 12 a 14 anos. Essa mudança acarreta, de acordo com o autor, dificuldades para o ensino da geometria por falta de maturidade dos alunos quanto ao aspecto dedutivo que a geometria envolve, sendo este essencial para a sua compreensão. (CATUNDA, *et al* 1988, p. 11-12).

Passos (2000, p. 60) enfoca o despreparo do professor no trabalho com a geometria como sendo uma das causas para o baixo aproveitamento dos alunos nesta matéria e para o “esvaziamento” dos conteúdos geométricos nas escolas. Afirmar que “A forma com que a geometria vem sendo abordada em sala de aula pode estar contribuindo negativamente para o

desenvolvimento do conhecimento geométrico dos estudantes, até mesmo de conceitos mais simples”.

Cita também a pesquisa produzida por Gravina (1996), onde se constata que muitos alunos ingressavam nos cursos de licenciatura em matemática sem terem atingido os níveis mentais de dedução e do rigor em geometria. Na sua opinião, parte do problema pode ser atribuída aos programas e metodologias de ensino das escolas de origem desses universitários. O trabalho aborda também o desenvolvimento de conceitos de geometria em ambientes computacionais e a importância das tecnologias de informação e comunicação no processo de ensino e de aprendizagem da geometria.

Outra pesquisa, que revela aspectos do problema do ensino de geometria no Brasil, consiste no estudo de Campos (2001, p. 85), o qual relata alguns argumentos que o professor mais usa para justificar a sua omissão em relação ao ensino de geometria:

- Não ensino geometria porque minha formação foi deficiente nesta parte, já que fiz bacharelado e não licenciatura.
- Nunca aprendi geometria, como vou ensinar?
- Aprendi geometria de maneira abstrata. Decorava os teoremas. Acho que não deve ser assim, mas também não sei como fazer diferente.
- Desenho geométrico? Deus me livre! Isso deveria ser uma disciplina para ser dada por outro professor.

Com base nesses relatos, pode-se concluir que os problemas do ensino de geometria são muitos, como a má formação acadêmica do professor; o próprio modelo pedagógico para este aprendizado; a falta de democratização de acesso às novas tecnologias da comunicação e da informação, e, ainda, a forte influência, nas escolas de ensino fundamental, da axiomatização da geometria euclidiana, que na maioria dos casos se reduz à memorização de nomes das figuras e de fórmulas utilizadas para calcular áreas e volumes.

Campos (2001), que coordenou a publicação de registros dos trabalhos desenvolvidos ao longo de dois anos pelo Programas de Estudo e Pesquisa no Ensino de Matemática (PROEM) da PUC/SP, envolvendo cerca de 1.200 professores de Matemática, também relata alguns problemas relativos ao ensino e aprendizagem da geometria no Brasil. Uma das questões tratadas no trabalho busca responder a seguinte indagação: O que aconteceu com o ensino de geometria? Segundo Campos, uma das causas da deficiência deste ensino se deu porque os professores, em geral:

Abraçaram ferozmente o ensino da Álgebra, nos seus aspectos mais estruturados do ponto de vista matemático, mais *mecanizantes*, do ponto de vista pedagógico,

carregaram na linguagem da Teoria de Conjuntos, oca e sem significado para o aluno e [...] ignoraram a Geometria! (CAMPOS, 2001, p. 81).

A pesquisa revela que essa abordagem pedagógica secundarizou o papel do ensino de geometria nos oito primeiros anos de escolaridade, que é a de “fundamentar as relações geométricas básicas”. (CAMPOS, 2001, p. 81). Além disso, as manifestações dos professores pesquisados mostram que os problemas do ensino de geometria no Brasil estão ligados a outras questões, tais como:

- a “formação geométrica” do professor, muitas vezes, é inadequada e, outras vezes, inexistente;
- o professor geralmente desconhece os vários tratamentos metodológicos que podem ser dados a este ensino;
- muitas vezes, as condições de trabalho a que esse profissional é submetido não lhe permitem desenvolver um ensino de geometria de modo que a aprendizagem seja significativa para o aluno. (p. 85-86).

Esses são alguns dos problemas encontrados na prática pedagógica do ensino de geometria, entretanto, não é interesse deste pesquisador aprofundar a discussão a respeito da formação do professor, das concepções teóricas e paradigmas e nem da metodologia de ensino no contexto dessa temática. O foco da pesquisa, com já foi mencionado anteriormente, está voltado para as dificuldades de aprendizagem na construção de conceitos geométricos, sobretudo em relação à articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial e suas representações.

2.2 O Dilema do Currículo da Geometria

Lindquist e Shulte (Org.) (1994), afirmam, categoricamente, que quase todas as pesquisas sobre a geometria escolar nos Estados Unidos decorrem de dois problemas principais: o fraco desempenho dos alunos e um currículo ultrapassado.

De maneira geral, o mesmo pode ser dito em relação ao ensino de geometria no Brasil. A maioria dos trabalhos sobre geometria produzidos no Brasil traz como pano de fundo estas duas problemáticas, ou seja, o problema do desempenho do aluno ou da aprendizagem da geometria e o dilema do currículo.

Em função disso, pressupõe-se que a forma como o currículo do ensino de geometria é organizado e desenvolvido na escola pode interferir negativamente na aprendizagem de

conceitos. Dessa forma, é preciso ter uma visão clara a respeito do que se ensina, a quem, quando, como, onde e para quem na definição de qualquer proposta pedagógica.

Ao abordarem o dilema do currículo, Lindquist e Shulte afirmam que não há concordância com relação à natureza da geometria que deveria ser ensinada desde as primeiras séries do ensino fundamental até a faculdade e nem mesmo como e quando ensinar. (LINDQUIST E SHULTE, 1994, p. 25). Na verdade, atualmente já existe um certo consenso entre os pesquisadores e especialistas da área quanto ao que e como ensinar no âmbito do conhecimento geométrico, entretanto, na avaliação desses autores, o problema curricular é bastante complicado, pois a questão não envolve apenas o conteúdo, mas também a sua abordagem, ou seja, o encadeamento lógico em que esse conteúdo deve ser colocado.

Lindquist e Shulte citam que o trabalho produzido por Allendoerfer (1969, p. 28), vários anos antes, chegou a mesma conclusão: “o dilema fundamental subjacente ao problema do currículo de geometria está no fato de não haver concordância nem mesmo quanto a seu objeto e nem com relação à sua abordagem”.

Na tentativa de corrigir as falhas do currículo, oferecem três sugestões. Em primeiro lugar, tornar clara a semântica usada nas discussões de geometria. Isso equivale dizer que precisam ser eliminadas as confusões semânticas, ou seja, distinguir, corretamente, os termos utilizados, como, por exemplo, o que são geometria formal e geometria informal ou intuitiva? Em segundo lugar, elevar o nível e a quantidade das discussões sobre o currículo de geometria, pois “muitos professores, além de despreparados para ensinar o conteúdo, estão despreparados para perceber que poderia haver alternativas viáveis.” (ALLEENDOERFER, 1969, p. 32). E, por último, analisar, de uma perspectiva curricular, as várias maneiras de formar conceitos em geometria, ou seja, refletir as diferentes concepções que as pessoas têm de geometria, pois, geralmente cada uma das visões leva a objetivos e justificativas diferentes.

Lindquist e Shulte destacam seis maneiras de considerar a geometria, o que eles chamam de dimensões: a geometria como visualização, construção e medida de figuras (a dimensão medida-visualização); a geometria como estudo do mundo real, físico (a dimensão mundo real-físico); a geometria como veículo para representar outros conceitos matemáticos (a dimensão representação); a geometria como um exemplo de sistema matemático (a dimensão suporte-matemático); a geometria do ponto de vista histórico e do desenvolvimento das idéias (a dimensão sócio-cultural) e a geometria particularmente estudada pelos psicólogos, envolvendo imagens mentais e cognição (a dimensão cognitiva de compreensão).

Esses pesquisadores concluem afirmando que o aperfeiçoamento do currículo exige uma tomada de decisão a respeito de quais conteúdos devem ser incluídos ou retirados dos

programas curriculares de cada série escolar. Esta não é uma decisão fácil, pois, como foi mostrado, não há consenso sobre o que, como e nem quando ensinar.

Além disso, esses pesquisadores afirmam, categoricamente, que a decisão dos professores sobre a geometria a ser ensinada em sala de aula é profundamente influenciada pela geometria que eles tiveram, por aquilo que está contido nos manuais didáticos e pelo que é exigido pelos sistemas de avaliação. A passagem da geometria plana para espacial, e vice versa, como também a articulação entre a dimensão conceitual e a sua representação estão inseridas nesse contexto.

2.3 A Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e mesmo o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil, elaborados pelo Ministério da Educação (MEC), são enfáticos em defenderem o ensino de geometria desde os primeiros anos escolares, dada a sua importância para a formação geral das crianças. Enfatizam ainda uma permanente articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial, como também com as outras áreas da matemática, sobretudo, a aritmética e a álgebra.

A relevância deste ensino pode ser justificada com base no seguinte argumento, expresso nos documentos oficiais do MEC para a educação infantil e para o ensino fundamental: primeiramente, porque ajuda o aluno a desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive e, em segundo lugar, pelo seu caráter prático e utilitário.

Esses documentos, acompanhando a tendência mundial para o ensino de geometria, propõem que os conteúdos geométricos sejam trabalhados em sala de aula desde a Educação Infantil, perpassando todas as etapas da educação básica. Além disso, defendem que a proposta pedagógica da escola deve explicitar, de maneira clara, as posições que assumem em relação a “por que”, “o que” e “como” ensinar geometria.

Sugerem ainda que a aprendizagem da geometria comece pelo estudo das figuras espaciais, explorando a manipulação de objetos concretos, a observação de suas características e propriedades e o espaço ao seu redor. Essa orientação nem sempre é seguida pelos educadores em sala de aula, pois geralmente dão maior destaque para os estudos das figuras geométricas planas em detrimento da exploração da percepção espacial.

A dificuldade de articulação entre a dimensão plana e a espacial na elaboração conceitual pode estar ligada à forte ênfase que é dada ao estudo de figuras planas no ensino fundamental, como retas, ângulos, polígonos, círculos, relegando o estudo das figuras espaciais a um plano secundário.

Fonseca et al. (2001), ao pesquisar o ensino de geometria e a formação do professor nos ciclos iniciais do ensino fundamental, ressalta que geralmente o estudo de figuras planas precede a dos sólidos, numa organização mais voltada para o método tradicional, de memorização de definições, de conceitos, do que para as propostas pedagógicas que valorizam a experiência e a manipulação de objetos materiais que podem ser associados à forma de alguns conceitos geométricos estudados no ensino fundamental. Segundo Pais (1996), essa manipulação poderia estabelecer uma relação dialética efetiva entre teoria e prática.

Na realidade, o propósito desta investigação não é discutir se o ensino da geometria deve começar pelas figuras planas ou pelas figuras espaciais ou por ambas, entretanto, vários pesquisadores têm revelado que uma das dificuldades de formação de conceitos de figuras geométricas tridimensionais pode estar ligada à valorização excessiva do estudo de figuras planas.

2.3.1 A Geometria no Referencial Curricular Nacional (RCN)

As crianças estão imersas em um universo tridimensional desde o seu nascimento e convivem, desde os primeiros anos de vida, com diversas situações envolvendo noções sobre o espaço, através da observação e da sua própria atuação no mundo a sua volta.

Por isso, acertadamente, o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RCN) salienta a idéia de que cada criança desenvolve o seu conhecimento geométrico a partir de suas experiências vividas, da reflexão e da comunicação de idéias e representações.

Segundo o documento, a criança desenvolve o pensamento geométrico “por meio de suas percepções, do contato com a realidade e das soluções que encontra para os problemas” (p. 299), sendo que as primeiras noções geométricas que elas exploram estão ligadas ao estabelecimento de sistemas de referência, identificação de posições e comparação de distâncias.

Esta publicação do MEC sugere a divisão dos conteúdos de geometria em dois blocos: 1) grandezas e medidas e 2) espaço e forma.

No bloco “grandezas e medidas”, o documento propõe que o professor comece a exploração das noções de medida de comprimento, de peso, de volume e de tempo em sala de aula, a partir das atividades cotidianas das crianças, pois desde a tenra idade elas têm contato com certos aspectos das medidas.

O estudo das propriedades geométricas de objetos e figuras, com relação a formas, tipos de contorno, dimensão, faces planas, lados retos, etc, bem como das representações planas de figuras bidimensionais e tridimensionais aparece no segundo bloco denominado de “espaço e forma”.

O RCN enfatiza que a criança da faixa etária de zero a seis anos está pronta para iniciar a construção da sua concepção espacial, primeiramente, através da exploração do espaço ao seu redor e, posteriormente, por meio da percepção e da maior coordenação de movimentos.

Desta maneira, “descobrem profundidades, analisam objetos, formas, dimensões, organizam mentalmente seus deslocamentos.” (p. 230). Além disso, por meio do contato e da manipulação de objetos, começam a perceber as relações espaciais contidas nos mesmos.

O RCN enfatiza ainda que as crianças percebem as relações espaciais contidas nos objetos, fundamentalmente por meio do contato e da manipulação. Para coordenar as informações que percebem do espaço, elas precisam ter oportunidades de observá-las, descrevê-las e representá-las. Existem várias maneiras de fazer uma representação. De acordo com o documento, o uso do desenho “é uma forma privilegiada de representação, na qual as crianças podem expressar suas idéias e registrar informações”. (p. 232). Como se vê, o RCN sinaliza que o uso do desenho para representar figuras geométricas espaciais deve fazer parte dos currículos escolares desde a educação infantil.

Com relação às abordagens dos conteúdos, o documento questiona a concepção de aprendizagem predominante nos currículos tradicionais de geometria, restrita à memorização, repetição e associação. Essa visão platônica e logicista, que impregna os programas curriculares numa perspectiva tradicional, constitui um problema para a aprendizagem da geometria, pois, nessa concepção, a memorização é mais valorizada do que a criatividade e a compreensão.

Outro paradigma que o documento critica é a idéia de que o desenvolvimento do raciocínio abstrato da criança deve começar apenas a partir da manipulação de modelos materiais, pois “essa concepção resulta da idéia de que primeiro trabalha-se o conceito concreto para depois trabalhá-lo no abstrato”. (p. 209).

Esse ponto de vista é questionável, porque, na prática, estas duas realidades, o concreto e o abstrato, não estão dissociadas, ou seja, a ação física, entendida como a manipulação de objetos, não está separada da ação intelectual, compreendida neste contexto como sendo as representações formais, definições e sistematizações.

2.3.2 A Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais

Um dos primeiros desafios na elaboração de um currículo de matemática para o ensino fundamental a ser desenvolvido nacionalmente consiste na definição dos conteúdos. Essa problemática é abordada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os dois primeiros ciclos do ensino fundamental, que correspondem às quatro primeiras séries dessa etapa da educação básica.

a) Séries iniciais do ensino fundamental

Segundo os PCNs (2001), há um razoável consenso de que os currículos devam contemplar o estudo dos números e das operações, do espaço e das formas e o estudo das grandezas e medidas, abrangendo os campos da aritmética, da álgebra e da geometria.

Por outro lado, a discussão é complexa quando se trata da seleção e organização dos conteúdos para cada ciclo ou série, pois o desafio que se apresenta é o de identificar quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes e em que medida contribui para o desenvolvimento intelectual do aluno, tanto com relação à “construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos”. (PCNs, 2001, p. 53).

Uma das questões que gera controvérsias entre professores e pesquisadores é se o ensino da geometria espacial deve vir antes da plana ou não. Apesar dos PCNs darem indicativos de que o ensino da geometria deva começar pela exploração de objetos tridimensionais - pois o espaço se apresenta para as crianças de forma essencialmente prática, ou seja, elas constroem suas primeiras noções espaciais por meio dos sentidos e dos movimentos – em nenhum momento, enfatiza a predominância de uma sobre a outra. Pelo contrário, evoca uma articulação permanente entre ambas. Por exemplo, ao fazer a exploração

do cubo em sala de aula, o professor pode introduzir conceitos de ponto, plano, reta, ângulo, diagonal, arestas, e assim por diante.

Um dos argumentos para o início do estudo de geometria a partir de figuras espaciais é de que as crianças teriam muito mais facilidade para desenvolver o pensamento geométrico através da percepção de objetos e figuras tridimensionais, especialmente por meio da visão e do tato, do que mediante a forte abstração da geometria plana, com suas retas, pontos, paralelas, vértices e assim por diante.

Não se pretende polemizar a esse respeito, por isso é adotada nesta pesquisa a postura de que deve haver uma permanente articulação entre os conceitos da geometria plana e da geometria espacial desde os primeiros anos escolares.

Com relação à organização dos conteúdos, os mesmos se encontram agrupados em dois blocos. No bloco “Espaço e Forma”, é ressaltada a importância da geometria no ensino fundamental, especialmente pelo fato dela propiciar o desenvolvimento do aluno com relação à compreensão do mundo em que vive, sua descrição e representação.

Além disso, o estudo das noções geométricas estimula o aluno a desenvolver algumas habilidades, tais como, a observação e a percepção. Possibilita ainda ao aluno estabelecer conexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, seja na exploração de objetos do mundo físico, na pintura, na escultura e no artesanato no contexto da sala de aula.

Entre os conteúdos relacionados nos PCNs nesse bloco, encontram-se:

- Percepção das relações entre tamanho e forma no espaço.
- Formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem.
- Semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.
- Construção e representação de formas geométricas.

Os PCNs salientam que os objetos existentes no espaço são a principal fonte de trabalho para a criança fazer a exploração das formas, e que é dessa exploração que resulta o reconhecimento de figuras espaciais, como, cubos, cilindros, etc., e figuras planas, como, quadrados, círculos, triângulos e também a identificação de cada uma de suas propriedades. (PCNs, 2001, p. 128).

Com relação à representação plana (desenho) de conceitos geométricos, o documento enfatiza que a finalidade não se resume à valorização da capacidade do aluno de ler e

interpretar representações gráficas ou desenhos, mas que ele avance na formação de conceitos e use os conhecimentos da geometria para também descrever e interpretar a realidade.

Os conteúdos que compõem o bloco “Grandezas e Medidas” são destacados por sua “forte relevância social e seu evidente caráter prático e utilitário”. Nesse sentido, reveste-se de real importância o estudo de unidades de tempo e temperatura, unidades usuais de medida e grandezas mensuráveis do dia-a-dia, tais como, comprimento, massa, capacidade, superfície e outras, porque mostra “claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano”. (PCNs, 2001, p. 56).

b) Séries finais do ensino fundamental

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os quatro últimos anos do ensino fundamental (1998) também dão destaque ao ensino de geometria. Este documento norteador fornece elementos para se ampliar o debate sobre esta área de ensino com respeito à formação do professor, à produção de livros e outros materiais didáticos e à construção da cidadania.

Outro aspecto relevante do documento é que ele aponta a resolução de problemas como ponto de partida para o ensino de matemática na sala de aula, seja na álgebra, na aritmética ou na geometria, ao colocar que “o estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente”. (PCNs, 2001, p. 51).

Os PCNs apontam, como um dos obstáculos que impedem os professores de mudarem a sua prática pedagógica numa perspectiva que privilegia a resolução de problemas e a participação ativa do aluno, a organização linear e bastante rígida dos conteúdos. (PCNs, 2001, p. 138).

O eixo deste documento é a construção da cidadania, por isso enfatiza a melhoria da qualidade da aprendizagem escolar, a participação crítica do aluno e o combate às causas das elevadas taxas de repetência escolar.

No que concerne à Geometria, assim como aos outros campos da matemática, a proposta dos PCNs é que o ensino seja trabalhado numa perspectiva de transversalidade e apresentam os conteúdos não só na dimensão de conceitos mais também na dimensão de procedimentos e atitudes.

Nessa etapa da educação básica, o aluno deve reorganizar e ampliar os conhecimentos sobre espaço e forma e também sobre grandezas e medidas, abordados nos

ciclos anteriores. Deve ser capaz, por exemplo, de estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista.

O documento em análise propõe que, ao concluir o ensino fundamental, o aluno seja capaz de fazer distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria. É neste nível de ensino também que o educando passa a estudar a geometria de maneira mais formal e axiomática e se depara com as exigências de um raciocínio dedutivo.

Resumindo, o estudo dos conteúdos do bloco Espaço e Forma tem como ponto de partida a análise das figuras pelas observações, manuseios, representação e interpretação dos conceitos geométricos, ou seja, visa ao desenvolvimento das habilidades de percepção espacial e a de codificação e decodificação de desenho, entre outros.

Por sua vez, no bloco Grandezas e Medidas, um dos objetivos é auxiliar o aluno a desenvolver noções referentes à quantificação de grandezas do mundo físico, principalmente em relação a áreas e volumes; a consolidar e ampliar a noção de número e a favorecer a aplicação de noções geométricas.

2.4 Uma Análise da Presença da Geometria nos Livros Didáticos

A dificuldade de articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial, e ainda, com suas variadas formas de representação, também pode estar associada à utilização de livros didáticos inadequados. No passado, muitos desses livros apresentavam propostas pedagógicas baseadas apenas na memorização de conteúdos, de figuras, sem estimularem a compreensão dos conceitos estudados e nem valorizarem o uso de diferentes maneiras de representação conceitual.

Por outro lado, os autores de livros didáticos geralmente apresentavam os conteúdos de geometria nas últimas páginas de suas publicações. Por sua vez, os professores elaboravam os seus planejamentos anuais com bases nos referidos manuais e quase sempre não conseguiam cumprir o programa previsto até o encerramento do calendário escolar. Resultado, os conteúdos de geometria quase sempre listados no final do livro não eram abordados em sala de aula. Esta prática contribuiu de certa forma para acentuar o abandono desse ensino, principalmente, nas décadas de 60 e 70.

A partir da década de 80, a geometria começou a ganhar o seu devido espaço nos currículos escolares e também nos manuais didáticos. O Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil e Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, acompanhando a tendência mundial, resgataram a importância da Geometria para a formação geral do aluno.

O reflexo desse novo momento manifestou-se também em vários livros didáticos. Os conteúdos geométricos não só ganharam mais espaço em boa parte desses livros, como também, em alguns casos, as suas primeiras páginas, com novas abordagens, exemplos, motivações e aplicações. Bigode (2000), na Coleção Matemática Hoje, Volume 7, por exemplo, reservou o primeiro capítulo para a geometria aplicada a medidas de capacidade e de volumes.

Os autores de livros didáticos nacionalmente conhecidos, Imenes & Lellis (1997), também colocaram conteúdos de geometria no primeiro capítulo dos volumes 5 e 8 da Coleção de Matemática para o ensino fundamental, correspondentes à 5ª e 8ª séries, respectivamente. O estudo sobre construções geométricas aparece em todos os volumes e a exploração do desenho é enfatizada como recurso pedagógico para representar figuras geométricas espaciais.

Giovanni, Castrucci e Giovani Junior (1998) inseriram a geometria em todos os volumes da Coleção “A Conquista da Matemática – Nova” para alunos da 5ª a 8ª série do ensino fundamental. No volume dirigido à 7ª série, dos treze capítulos que compõem o livro, seis são específicos para os conteúdos de geometria, o que demonstra a importância que os autores deram a este campo do conhecimento. Além disso, o livro traz inúmeros exemplos de aplicações do conhecimento advindo da geometria às resoluções de problemas do cotidiano.

Lima (1997), no seu livro para alunos da 3ª série do ensino fundamental, escreveu um capítulo inteiro para o estudo de figuras geométricas planas e espaciais, o que mostra que a relação entre o plano e o espacial aparece desde as séries iniciais. No volume para a 2ª série, aborda conteúdos sobre superfícies planas e superfícies arredondadas, apresenta o estudo de sólidos geométricos e, inclusive, insere a noção de perspectiva, sem, contudo, defini-la.

Giovanni & Parente (1999), no volume 5 da Coleção “Aprendendo Matemática”, dedica uma unidade para o estudo de percepção geométrica. Estes autores, em consonância com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, iniciam o trabalho com figuras espaciais. Os alunos são levados a reconhecer os principais sólidos geométricos, identificar faces, arestas e vértices, e, ainda, desenhar os principais sólidos geométricos. Só depois que os

alunos ganham familiaridade com as figuras geométricas espaciais é introduzido o estudo de figuras geométricas planas.

Neste momento da aprendizagem, os alunos devem ser capazes de identificar ponto, reta e plano como idéias intuitivas, reconhecer quando uma figura geométrica é plana ou não, identificar e desenhar sólidos geométricos vistos de diferentes perspectivas.

O fato da geometria ganhar mais espaço nos manuais didáticos, por si só, não vai resolver os problemas do ensino da geometria no Brasil e da aprendizagem de conceitos, mas já é um grande passo nesta direção, ao lado de outras medidas que já foram elencadas em tópicos anteriores.

Fonseca et al (2001) desenvolveu uma pesquisa onde analisou alguns livros didáticos da 1ª. a 4ª. série do ensino fundamental. Uma de suas conclusões é que os autores de livros didáticos, na maioria dos casos, tinham uma proposta clara voltada para o desenvolvimento da percepção espacial por meio da leitura e da representação dos conceitos espaciais através de desenhos.

Essa questão mereceu atenção em seu trabalho, pois, um dos objetivos da geometria é o desenvolvimento da percepção espacial, muito bem enfatizado pelos documentos oficiais do MEC para o ensino de geometria na educação infantil e no ensino fundamental.

Como se pode ver, a geometria tem ganhado mais espaço nos livros didáticos e a idéia de que deve haver permanente articulação entre conceitos da dimensão plana e da dimensão espacial está, de certa forma, também contemplada nessas coleções.

Outro fator que pode contribuir para a melhoria do ensino de geometria e, conseqüentemente, influir positivamente na aprendizagem matemática é o fato do MEC ter instituído uma sistemática de avaliação dos livros didáticos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). A avaliação periódica dessas obras, com base em critérios que privilegiem propostas pedagógico-metodológicas inovadoras, deverá contribuir para a melhoria do ensino, pois o livro didático exerce grande influência sobre o processo de aprendizagem escolar, definindo o ritmo, a seriação, o conteúdo e muitas vezes até mesmo a metodologia adotada em sala de aula.

Uma escolha inadequada do livro didático, além de exigir atenção redobrada do professor para sanar erros conceituais e outros problemas que o mesmo possa apresentar, pode induzir o aluno ao erro e promover confusões conceituais e contradições; resumindo, dificultar ainda mais a sua aprendizagem.

Segundo o Guia de Livros Didáticos – 1ª a 4ª séries (PNLD, 2000-2001), no âmbito do ensino de matemática, o livro didático deve assumir uma postura voltada à compreensão

dos conceitos, à apropriação de uma linguagem matemática significativa e ao desenvolvimentos de competências e habilidades, além de estimular a prática da observação, investigação, análise, síntese e generalização.

Em passado bastante recente, existia pouca preocupação com a qualidade dos livros didáticos. No caso das coleções de matemática, não só traziam, freqüentemente, equívocos envolvendo conceitos de geometria e de outras áreas da matemática, mas também utilizavam-se de propostas pedagógicas baseadas, principalmente, na memorização de conteúdos. Fatores como esses dificultam ainda mais a aprendizagem escolar, em particular, a da construção de conceitos geométricos.

2.4.1 Articulação entre Geometria Plana e Geometria Espacial

Retomando a questão inicial da presença da geometria nos livros didáticos de matemática, é oportuno fazer um recorte e verificar como a geometria plana e a geometria espacial estão articuladas nessas coleções, com base nas avaliações publicadas pelo MEC no Guia de Livros Didáticos – 1ª a 4ª série (2000) e Guia de Livros Didáticos – 5ª a 8ª séries (2001), pois essa articulação favorece a elaboração do conhecimento geométrico ao nível do ensino fundamental.

Em relação aos livros de matemática de 1ª a 4ª série do ensino fundamental, integrantes do Programa Nacional do Livro Didático, pode-se afirmar categoricamente que as formas geométricas são bastante exploradas em quase todas as coleções, incluindo as figuras espaciais, como o cubo, o paralelepípedo, a esfera, e, com menor ênfase, o cilindro e o cone. As planificações e os contornos para obtenção de formas planas também são trabalhados.

As atividades de observação e comparação de figuras planas e espaciais são exploradas em vários livros desde as primeiras séries do ensino fundamental, como no “Matemática ao vivo – 1ª série”, de Imenes, Jakubovic e Lellis (2000), da editora Scipione. No livro “Matemática todo dia”, também para a 1ª série, dos autores Siedel, Isolani, França, e Melão (2000), da Editora Módulo, a construção das noções relacionadas ao espaço e às figuras planas e espaciais está contemplada. Além disso, a diferenciação entre sólido e plano é feita pela estimulação da percepção visual, por meio de atividades e que desafiam as crianças a descobrir quadrados em cubos, círculos no cilindro e no cone, através de contornos das faces dos sólidos.

A distinção entre figuras bidimensionais e tridimensionais também é trabalhada no livro “Matemática no Planeta Azul – 1ª série”, de Nunes e Pires (2000), da Editora FTD. A partir do cubo, por exemplo, trabalham-se faces, planificação e quadrados.

O problema da articulação entre figuras geométricas planas e espaciais aparece em alguns livros desde as séries iniciais, particularmente com relação ao uso inadequado da linguagem matemática no que se refere a sólidos geométricos. Isso foi constatado no livro da 1ª série do ensino fundamental “Matemática – estudo contextualizado”, de Duarte, Porto e Prado (2000), da Editora do Brasil, onde pirâmide e outras figuras espaciais são confundidas com figuras planas devido ao uso incorreto de termos da geometria.

Outra ressalva, que o Guia de Livros Didáticos – 1ª a 4ª série (p. 328) faz com relação a esse mesmo problema, aparece na obra “Tempo de Construir – 1ª série”, de Starepravo (2000), da Editora Renascer, onde o cubo é chamado de “pequenas regiões em forma de quadrados”.

O uso de termos inadequados, que pode gerar dificuldades na distinção das figuras geométricas, foi encontrado também no livro “É divertido aprender matemática – 1ª série”, de Wakabayshi, da Editora FTD, onde o autor cria uma classificação para sólidos geométricos que não é matemática: “empilháveis e não empilháveis”, que, de acordo com o Guia (p. 339), “em nada auxilia o aluno no desenvolvimento da intuição geométrica e da visão espacial”.

A introdução de uma linguagem geométrica precisa, significativa, sem se incorrer em exageros para a faixa etária, pode ser notada no livro “Novo Tempo – 2ª série”, de Imenes, Jakubovic e Lellis (2000), da editora Scipione.

Ainda com relação ao ensino de geometria na primeira série, em várias obras, a geometria é introduzida a partir de objetos do cotidiano do aluno, como no livro “Do quanto ao porquê”, de Vieira e França (2000), da Editora Access, onde a manipulação de paralelepípedos e cilindros é explorada, para, em seguida, trabalhar o retângulo, o quadrado, o triângulo e o círculo, sem, contudo, discutir suas propriedades. O objetivo é apenas desenvolver a percepção visual e o reconhecimento de formas.

Em vários livros de matemática para a 2ª série avaliados pelo PNLD, a geometria é tratada de forma adequada, com boa articulação entre os conteúdos, com ênfase para o desenvolvimento do pensamento geométrico, da percepção visual e da percepção espacial. Trazem atividades que levam os alunos a identificarem as características dos sólidos, como, o cubo, o paralelogramo, a pirâmide, o cilindro, o cone, a esfera e outros. No livro “É divertido aprender matemática”, de Kyiosen e Wakabayashi (2000), da Editora FTD, após estudar os

principais sólidos geométricos associados ao cotidiano do aluno, os autores apresentam as principais figuras geométricas planas a partir das faces dos sólidos.

Em boa parte dos títulos para a 3ª série do ensino fundamental, o estudo das figuras geométricas planas e espaciais é retomado e aprofundado, inclusive com a identificação de suas propriedades e a introdução de novos conceitos. É explorada a representação das formas, encontradas nos objetos, através de desenhos e as vistas em perspectivas, como no livro “Matemática todo dia”, de Siedel, Isolani, França e Melão (2000), da Editora Módulo.

Em alguns livros, com problemas detectados pela avaliação do MEC, os autores pecam, às vezes, pelo excesso de formalismo e, às vezes, pelo uso inadequado da linguagem, carregada de imprecisões, principalmente em relação à geometria.

Na contra-mão da tendência mundial, a obra “PROMAT 3” – Projeto Oficina de Matemática, dos autores Grasseschi, Andretta e Santos (2000), da Editora FTD, trabalha o desenvolvimento da visão espacial posterior ao estudo de figuras planas.

A maioria dos livros de matemática para a 4ª série do ensino fundamental, analisado no Guia de Livros Didáticos, retoma a geometria por meio de atividades de reconhecimento de figuras planas e espaciais; do manuseio de embalagens que lembram sólidos geométricos, para fazer classificações; da construção de conceitos; da exploração das formas presentes nos objetos vistas em perspectivas e do estudo das principais figuras geométricas e seus elementos, com o objetivo de desenvolver a visão geométrico-espacial, a identificação de propriedades das figuras, o desenvolvimento do raciocínio geométrico e a ampliação de conceitos da geometria plana e da geometria espacial.

Com base na avaliação dos livros didáticos para a 1ª a 4ª série do ensino fundamental, realizada pelo MEC, a visualização das formas geométricas e o estudo das figuras planas e espaciais são trabalhados adequadamente em boa parte dos livros, através da observação de embalagens, suas formas, semelhanças e diferenças.

O Guia de Livros Didáticos – 5ª a 8ª série (2001), ao fazer a avaliação dos livros didáticos de matemática para essa etapa do ensino fundamental, pautou-se pelos princípios de que as coleções têm de expor e formular corretamente conceitos, expô-los ao nível cognitivo e às experiências de vida dos alunos, “tendo o cuidado de aprofundar gradativamente os conceitos, procurando integrá-los, e evitando as confusões conceituais, as contradições e a indução ao erro.” (2001, p. 142). Além disso, usou, como critério de classificação, o fato de apresentar e desenvolver os conteúdos de maneira objetiva e correta, levando em conta a linguagem própria da matemática, o desenvolvimento de várias habilidades cognitivas e a adequação e a pertinência didático-metodológicas.

Segundo o Guia, embora se tenha verificado uma nítida melhoria nos livros didáticos avaliados, persistem ainda inadequações e problemas que podem comprometer o ensino e a aprendizagem da matemática. No campo da geometria, foram apontadas algumas questões que comprometem a qualidade de várias coleções, tais como: o tratamento estereotipado da mesma, privilegiando a nomenclatura e a apresentação de formas geométricas; pouca preocupação com a exploração de conceitos de figuras planas e espaciais; desequilíbrio e falta de inter-relação entre as apresentações experimental, intuitiva e formal dos conteúdos.

A prática de colocar a geometria em grandes blocos temáticos, concentrados em determinadas séries e nos capítulos finais dos volumes de cada coleção, é repetida em algumas obras, como, por exemplo, no livro “Matemática – idéias e desafios” de Onaga e Mori, da Editora Saraiva.

A articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial é favorecida em várias coleções, como a de Imennes e Lellis (2001), intitulada “Matemática”, da Editora Scipione, onde a organização dos assuntos reflete uma concepção não-linear de currículo, ou seja, um tema é tratado em vários pontos da coleção e de diferentes formas, “respeitando-se, dessa maneira, o prolongado processo de aquisição do conhecimento dos conceitos e procedimentos matemáticos.” (p. 159). Essa forma de organizar os conteúdos é compatível com a proposta de um currículo em espiral, pois os tópicos matemáticos são tratados em momentos sucessivos, ao longo das séries, em graus progressivos de extensão e complexidade.

A coleção é elogiada também pela correção conceitual, pois os conteúdos são inicialmente apresentados em seus aspectos mais intuitivos e por meio de atividades experimentais, os conceitos vão sendo gradual e parcialmente formalizados. Destaca-se ainda pela utilização de exemplos que mostram uma multiplicidade de representações, tais como: a escrita simbólica da matemática, a língua natural ou materna e os desenhos; e pela recomendação do uso de recursos tecnológicos, como o computador, o vídeo e a calculadora.

A coleção “Matemática Hoje é feita assim”, de autoria de Bigode (2001) e publicado pela Editora FTD, procura articular adequadamente os conceitos da geometria plana e os da geometria espacial, trazendo capítulos interessantes sobre a geometria do espaço, a representação de sólidos e atividades que favorecem a articulação entre os conhecimentos novos e os já adquiridos.

Na obra “Matemática na vida e na escola”, de Rego, Rubinstein, Borges, Marques e Portela (2001), da Editora Brasil, o estudo dos sólidos geométricos e das figuras planas é retomado na 5ª série, e dada maior ênfase ao desenho de figuras espaciais, envolvendo

perspectivas, na 8ª série. O emprego de modelos físicos que representam figuras geométricas é freqüente na referida coleção.

A preocupação com a distinção entre os vários significados de um mesmo termo ou palavra, utilizados na escrita simbólica matemática e na língua natural como, por exemplo, “círculo”, “aresta” e outros, aparecem na coleção de Spinelli e Souza (2001), denominada de “Matemática” e publicada pela Editora Ática. Do ponto de vista da língua natural, o círculo pode estar associado à idéia de relação proximal de um grupo de pessoas, ou seja, “o círculo íntimo”, e não uma figura geométrica onde “todos os seus pontos se encontram equidistantes de um centro”. A palavra “aresta” na geometria tem o sentido de um “segmento de reta comum a duas faces adjacentes de um poliedro (aresta do cubo)” e o sentido de “aparafusar as arestas”, na língua natural. A transferência de termos de um contexto para outro muitas vezes é uma fonte de dificuldades para a aprendizagem geométrica, sobretudo quando expressões próprias da geometria plana são usadas inadequadamente na geometria espacial e vice-versa.

Na coleção “Matemática e interação”, de Isolani, Miranda, Anzzolin e Melão (2001), da Editora Módulo, a escolha dos conteúdos, incluindo-se aí os geométricos, está bastante sintonizada com as tendências atuais da educação matemática. Os conceitos geométricos são satisfatoriamente distribuídos em todos os volumes da obra; contém unidades sobre a geometria dos sólidos e a das figuras planas, e atividades que procuram estimular no aluno a habilidade de visualização e de representação, além da capacidade de observar regularidades, fazer conjecturas e generalizar, entre outros.

O mesmo não acontece com a coleção “Matemática na medida certa”, de Jakubovic, Lellis e Centurión (2001), da Editora Scipione, pois os avaliadores do MEC criticam a distribuição dos conteúdos em grandes blocos concentrados em determinadas séries e a opção por uma proposta de currículo linear, na qual cada tema é abordado, especificamente e de forma quase completa, apenas em determinadas séries. Essa forma de distribuir os conteúdos pode dificultar a aprendizagem que envolve a necessidade de articulação de conceitos da geometria plana e da espacial, principalmente se o professor seguir rigorosamente o livro didático.

A coleção PROMAT – Projeto Oficina de Matemática, dos autores Silva, Andretta e Grasseschi (2001), da Editora FTD, começa o volume dedicado à 5ª série com uma revisão de temas já estudados em geometria, incluindo, ponto, reta, plano, segmento, polígono, circunferência, ângulo e figuras planas e espaciais. Os conteúdos de geometria são tratados acertadamente em todos os volumes dessa obra, segundo o método de descoberta e validação que se baseia em atividades que recorrem ao desenho ou a materiais concretos.

Segundo a análise do MEC, contida no Guia de Livros Didáticos – 5ª a 8ª série (p. 202), a obra “Matemática em movimento”, de Longen (2001) da Editora do Brasil, explora “a geometria integrando plano e espaço” e faz um “adequado encadeamento do estudo dos conceitos geométricos”. Fatores como esses são fundamentais para a criação de uma ambiente favorável à superação de dificuldades com relação a articulação correta entre a dimensão plana e a dimensão espacial, como também, entre o conceito geométrico e os diversos sistemas de representação.

Essas articulações, diferentemente de uns 30 a 40 anos atrás, podem ser melhor exploradas através dos recursos das novas tecnologias da comunicação e da informação, em suas diferentes formas e uso. Apesar dos computadores e da Internet ainda não estarem disponíveis na maioria das escolas, sobretudo nas salas de aula, eles já começam fazer parte do ensino e da aprendizagem escolar, como novas possibilidades educacionais, e a integrar muitas experiências no campo da Educação.

2.5 Aprendizagem da Geometria no Cenário da Informática

A introdução e a disseminação da tecnologia, em particular, da informática, na sociedade e na Educação, provocaram novas maneiras de comunicação entre as pessoas e com o mundo, como, também, novas formas de produzir e dominar o conhecimento.

Miskulin (1999), apresenta uma visão das tendências atuais da Educação Matemática frente às novas tecnologias, enfatizando a aplicabilidade da linguagem computacional Logo - Geometria da Tartuga, que, por meio de comandos simples, executa movimentos de deslocamentos e de giros na tela do computador, permitindo a construção de desenhos geométricos mais precisos. Em seu trabalho, realizou um estudo de caso onde foi utilizado o Logo como ambiente propício para a exploração de conceitos geométricos.

Segundo essa autora, diante do cenário tecnológico, espera-se que a escola contribua para a formação de indivíduos críticos, conscientes e livres, plenamente integrados com os avanços tecnológicos e que tenham habilidades relacionadas à tomada de decisão e à resolução de problemas. (p. 187).

Ressalta também que a abordagem da Educação Matemática neste contexto merece e necessita de reflexões e estudos cada vez mais profundos dos pesquisadores e que “torna-se inconcebível que a Matemática seja tratada de forma tradicional”. (p. 190).

Declara que Papert, um estudioso sobre o uso das tecnologias na Educação, chegou a afirmar que a introdução de computadores no ensino da Matemática provocaria profundas mudanças na concepção de nossa cultura sobre conhecimento e aprendizagem (p. 193); e cita o trabalho de Noss *et al.* (1996), que nesta mesma linha de raciocínio, enfaticamente, afirma o seguinte:

[...] o computador tem desempenhado uma parte central em nossa estória. Ele tem oferecido uma “janela” em direção aos caminhos pelos quais o aprendizado matemático, pode se tornar descentralizado e apreciado como uma parte da realidade social e cultural, mais do que somente, habilidades isoladas desconectadas da vida real. O computador tem acrescido as possibilidades de raciocínios de ambientes matemáticos de aprendizagem, nos quais a interação e a compreensão são mutuamente construtivos. (p. 197).

Miskulin recorre ao pesquisador brasileiro D’Ambrosio (1990), que ao abordar o uso de aparato tecnológico na Educação, ressalta que a não utilização de recursos da informática na aprendizagem da matemática, sobretudo nas escolas voltadas para as camadas populares, significa “condenar os estudantes a uma subordinação total a subempregos” (p. 188), ou seja, a aceitarem os piores empregos, pois qualquer empresa, banco ou magazine exigem de seus empregados no mínimo, os conhecimentos básicos de computação.

Com a chegada da calculadora eletrônica, do computador e outras tecnologias, o currículo tradicional de matemática tornou-se obsoleto e ultrapassado, entretanto, e o ensino dessa disciplina pode ser enriquecido e a relação dos alunos com esta área do conhecimento mais atrativa e interessante.

Com relação ao ensino de geometria nesta perspectiva, Miskulin (1999, p. 198) afirma que:

Uma das novas ferramentas que pode ser usada nas salas de aula são os programas de computadores dando uma representação tridimensional de objetos espaciais e permitindo aos usuários transformar esses objetos dinamicamente (transformações como rotações, traduções, amplificação ou seção por planos).

A literatura acadêmica demonstra o crescimento do número de pesquisas voltadas para a utilização da informática na aprendizagem da geometria. Gutiérrez (1996), por exemplo, enfatiza o uso de computadores no processo de visualização geométrica. Em seu trabalho, este autor analisa as variáveis relacionadas à visualização geométrica e as diversas maneiras como os estudantes recorrem às imagens mentais e habilidades de visualização no momento de resolverem problemas em ambientes computacionais.

Gravina (1996), em outra pesquisa, aborda a construção de conceitos de geometria com a ajuda de programas de computadores como o *Cabri Géométry* e o *Geoplan*. Mostra que estes softwares dinamizam o ensino, favorecem a superação de obstáculos de aprendizagem, e, sob a ação de movimento no desenho, evidenciam uma nova abordagem do currículo.

Valente e Valente (1998) também revela como está sendo explorada a utilização do computador em vários projetos do ensino da matemática, inclusive na geometria.

Vale ressaltar novamente a potencialidade de ambientes informatizados para a Educação Matemática, e, em particular, na exploração e formação de conceitos geométricos. A necessidade de uma melhor compreensão de noções relevantes nesse contexto, como a interatividade, o movimento, a visualização e outras, deve ocupar o centro de interesse de professores e pesquisadores, interessados no estudo da construção do conhecimento geométrico frente às novas tecnologias da comunicação e da informação.

2.6 A Geometria como Temática de Pesquisa

Vários dados revelam o interesse dos pesquisadores do campo da Educação Matemática pela temática da geometria como foco de suas investigações e produção de trabalhos de cunho científico. Esse fato pode ser comprovado através da análise dos trabalhos apresentados em eventos de abrangência nacional, relacionados à Educação Matemática.

De um total de 536 trabalhos apresentados no VI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática⁷ (1998), 103 foram relacionados ao ensino de geometria, ou seja, 19.2% deles. No VII ENEM⁸, cerca de 30% dos trabalhos apresentados nas Oficinas organizadas para o evento traziam a geometria como temática de estudo.

Outro dado interessante é que, do universo de trabalhos sobre o ensino de geometria, a maioria estava relacionada à visualização e representação de figuras geométricas espaciais e à informática educativa. Nesse contexto, a percepção espacial destacou-se como um importante foco de interesse dos educadores, acompanhando o destaque que é dado a essa questão pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do ensino fundamental, que são uma referência para o ensino brasileiro na atualidade.

⁷ O VI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática foi realizado nos dias 21 a 24 de Julho de 1998, na cidade de São Leopoldo/RS.

⁸ O VII ENEM aconteceu nos dias 19 a 23 de julho de 2001, na cidade do Rio de Janeiro/RJ.

Por outro lado, a ênfase que vem sendo dado à geometria pelos pesquisadores e educadores brasileiros nesta era da imagem e do movimento, contribui para o desenvolvimento de uma cultura informática no ensino e na aprendizagem de conceitos geométricos. Além disso, favorece a utilização de recursos didáticos, como a simulação, abrindo outras possibilidades no processo de desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Em vários desses estudos e experiências estão implícitos que a elaboração de conceitos matemáticos exige conexões entre temas de diferentes campos da matemática, como por exemplo, ser capaz de articular conceitos da geometria plana e da geometria espacial e utilizar diferentes registros de representações semióticas.

CAPÍTULO III

ESCOLHA DE UM REFERENCIAL TEÓRICO

O estudo da geometria é fundamental para o desenvolvimento do pensamento espacial. Ensiná-la e aprendê-la não são uma tarefa fácil, ainda mais quando o estudo envolve o processo de construção e representação de conceitos geométricos em situação de aprendizagem que demanda a necessidade de articular conceitos da geometria plana e da geometria espacial. Levar o aluno a adquirir conhecimento conceitual geométrico significativo é um desafio didático difícil, pois exige o desenvolvimento de competências e habilidades especiais relacionadas à abstração, generalização, indução, dedução, visualização, representação, entre outras.

Por isso, faz-se necessário proceder neste momento a uma inserção no universo teórico a respeito da elaboração conceitual, com o objetivo de reunir subsídios à análise dos dados da pesquisa.

Esse quadro teórico de referência funciona como um ponto de apoio para compreender como os alunos coordenam a conceitualização dinâmica dos objetos matemáticos da geometria com as suas representações estáticas; como organizam a passagem da língua natural para a escrita simbólica da matemática e vice-versa, sem gerar ruptura e possibilitando a apropriação significativa do conceito, e, por último, como os alunos reagem diante do desafio de aprenderem geometria em ambientes informatizados, dotados de uma linguagem dinâmica que traz ao mesmo tempo movimento, som, imagem e interatividade.

3.1 Reflexões Teóricas sobre a Construção de Conceitos

A aprendizagem de conceitos é um fenômeno cognitivo de múltiplas facetas, envolvendo especificidades psicológicas, epistemológicas, históricas, sociais e outras. Uma dessas facetas está relacionada à psicologia cognitiva da compreensão humana, particularmente, ligada à inteligência. A relação entre a aprendizagem e a inteligência tem

sido alvo de inúmeras pesquisas no campo da psicologia educacional e produzido grandes debates nas áreas de Psicologia e de Educação.

Araujo e Chadwick (2001) afirmam que, apesar das controversas, existe um razoável consenso a respeito de alguns aspectos:

- todas as pessoas têm inteligência;
- a inteligência é parte da carga genética do ser humano;
- problemas físicos ou psicológicos podem afetar o desenvolvimento da inteligência;
- existe uma certa relação entre as etapas do desenvolvimento cognitivo e a inteligência;
- o desenvolvimento da inteligência é progressivo, e por último,
- apesar das fortes divergências sobre o impacto do ambiente na inteligência, há consenso de que existe interação entre ambos.

Esse autores afirmam ainda que:

As pessoas que possuem uma estrutura intelectual mais desenvolvida aprendem mais rapidamente, armazenam informações de forma mais eficaz, recuperam-nas com maior facilidade, lembram melhor o que aprendem e sabem usar melhor o que aprenderam para aplicar em situações familiares ou novas. (p. 26).

Essa idéia é compartilhada nesta pesquisa, como também o pressuposto de que todas as pessoas têm inteligência e que o desenvolvimento da mesma pode facilitar a construção de conceitos na aprendizagem escolar. Gardner (1994) propôs a teoria de que o indivíduo possui múltiplas inteligências segundo suas áreas de preferências e as utiliza de formas diversas para compreender e expressar o mundo.

Com base no pensamento desse autor, cabe ao professor não só procurar identificar uma área de preferência do aluno, como a matemática, por exemplo, para ajudá-lo a ter o maior sucesso possível de aprendizagem nessa área, como também, estimulá-lo a ter êxito em áreas em que ele demonstre menor interesse. Para tanto, é necessário propiciar condições favoráveis à aprendizagem do aluno, através de atividades e experiências estimulantes nas áreas em que ele tiver mais dificuldade

Do ponto de vista mais geral, a idéia de inteligência adotada nesta pesquisa é caracterizada pela capacidade para aprender, reter, recuperar informação e aplicar conhecimentos, ou ainda, habilidade de identificar e resolver problemas e implementar soluções práticas. Por sua vez, a noção de aprendizagem está associada ao processo de

construção do conhecimento pelo sujeito que aprende, “numa articulação entre seu aparelho biológico, suas estruturas psico-afetiva e psico-cognitiva e nas interações com o meio social do qual faz parte e onde está inserido”. (WEISS; CRUZ, 1999, p. 42).

O estudo da relação entre a inteligência e a aprendizagem que interessa à educação matemática porque o conhecimento produzido a respeito dessa questão vai alimentar a prática pedagógica.

O psicólogo norte-americano Howard Gardner revolucionou conceitos sobre conhecimento, aprendizagem e educação ao criar a teoria de inteligências múltiplas, com base em estudos realizados em neurobiologia, a partir das origens biológicas da capacidade humana para resolver problemas. A leitura desse autor deve-se ao fato dele valorizar as potencialidades do homem, expressas sob a forma de inteligências. O resultado da sua pesquisa aponta sete tipos “naturais” de inteligência humana: lingüística, lógico-matemática, espacial, musical, corporal-cinestésica, interpessoal e intrapessoal.

Gardner (1994) afirma que as inteligências, descritas no seu trabalho, estão presentes em todas as pessoas e que elas operam como uma família, apesar de serem independentes. A presente investigação priorizou apenas três delas: a inteligência lógico-matemática, a inteligência espacial e a lingüística, por estarem intimamente relacionados à construção de conceitos geométricos.

Para esse pesquisador, a inteligência lógico-matemático é desenvolvida levando-se em conta a forma com que o pensamento é estruturado num determinado contexto cultural, a partir de um confronto com o mundo dos objetos, ou seja:

Ao longo do curso do desenvolvimento das competências lógico-matemáticas, prossegue-se dos objetos para as afirmativas, das ações para as relações entre as ações, do domínio sensório-motor para o domínio da pura abstração – enfim, para os ápices da lógica e da ciência. A cadeia é longa e complexa, mas não precisa ser misteriosa: as raízes das regiões mais elevadas do pensamento lógico, matemático e científico podem ser encontradas nas ações simples de crianças pequenas sobre objetos físicos do seu mundo. (GARDNER, 1994, p. 100-101).

Por sua vez, a inteligência espacial se desenvolve a partir das observações visuais do sujeito da aprendizagem, dando-lhe capacidade de perceber, por exemplo, um objeto sob diferentes ângulos. Segundo Andreis (1999), esse tipo de inteligência favorece a capacidade de ver, observar, ler, representar e analisar o mundo tridimensionalmente em todas as situações e circunstâncias vivenciadas e materializadas no cotidiano.

E por último, o desenvolvimento da inteligência lingüística, tanto oral como escrita, não está intimamente ligada ao mundo dos objetos físicos, como acontece com as outras duas formas de inteligências mencionadas anteriormente. A sua aquisição depende de fatores psicológicos e sociais. A capacidade lingüística se origina da esfera auditivo-oral e muitas vezes é prejudicada pela dificuldade da criança em decodificar símbolos.

3.1.1 Construção de Conceitos

A formação de conceitos geométricos é de fundamental interesse para esta pesquisa, haja vista que uma aprendizagem significativa envolve necessariamente a elaboração permanente de conceitos, noções e idéias, principalmente em situações que requeiram operações precisas de pensamento. Neste caso, as operações são baseadas no reconhecimento de invariantes conceituais e nas articulações e rupturas entre os conhecimentos do aluno e situações vivenciadas por ele.

Para compreender como os conceitos geométricos são construídos pelo aluno, é necessário, inicialmente, refletir sobre o significado da palavra conceito. Frege (1848-1925), conhecido como o fundador da moderna lógica matemática, deixou uma grande contribuição não só a respeito do significado deste termo, como também com relação ao desenvolvimento do pensamento matemático e da construção de conceitos.

O interesse particular pela teoria de Frege neste trabalho deve-se ao fato deste autor ter dedicado boa parte de sua vida à busca da "construção de conceitos", o que ele chamava de "elementos últimos". Na obra "Ideografia, uma Linguagem por Fórmulas do Pensamento Puro Modelada sobre Aritmética", publicada em 1879, Frege ressalta que o conceito pertence ao nível do conhecimento da idéia, enquanto que a representação do mesmo pertence ao nível da imaginação. Afirma também que os conceitos são construídos pelo próprio aluno através de processos mentais e que estes são representados pela utilização livre da imaginação, e por fim, ressalta a importância da intuição, da visualização e da representação na elaboração conceitual.

Os estudos de Frege dão ênfase também à construção precisa dos conceitos e à formulação de uma linguagem simbólica e artificial, de tal forma que o aluno possa elaborar as suas relações cognitivas através da codificação e decodificação dessas linguagens, entre as quais, o desenho.

O psicólogo Jean Piaget também pesquisou a cognição e a construção de conceitos. A menção da teoria piagetiana nessa pesquisa deve-se ao fato desse pesquisador ter percebido, em seus estudos, a importância da Geometria para o desenvolvimento cognitivo e a elaboração conceitual, e ainda ter interessado diretamente em observar e descrever as interações entre sujeito e objeto na construção do conhecimento.

Segundo Gravina e Santarosa (1999, p. 75):

A teoria de desenvolvimento cognitivo, proposta por J. Piaget, ajuda a compreender que o pensamento matemático não é, em essência, diferente do pensamento humano mais geral, no sentido de que ambos requerem habilidades como intuição, senso comum, apreciação de regularidades, senso estético, representação, abstração e generalização, etc [...] A diferença que pode ser considerada é no universo de trabalho: na Matemática os objetos são de caráter abstrato e são rigorosos os critérios para o estabelecimento de verdades.

Em sua busca, Piaget estabeleceu a noção de abstração empírica e abstração reflexionante. A primeira, entendida como o conhecimento resultante da percepção adquirida por meio da manipulação de objetos físicos, ou seja, obtida pelo contato direto com o objeto. A segunda, caracterizada como aquela abstração obtida a partir de objetos não percebidos realmente. De acordo com Fainguelernt (1999, p. 26):

A abstração reflexionante apoia-se nas formas de como o indivíduo capta o conteúdo em todas suas atividades cognitivas, para delas retirar certos caracteres e usá-los para outras finalidades que poderão ser novas adaptações ou novos problemas.

A abstração empírica encontra-se no plano perceptivo ou sensório-motor, o que Piaget (1993, p. 26) chama de espaço perceptivo. Segundo Fainguelernt, ela se apoia sobre “os objetos físicos ou sobre aspectos materiais da própria ação, tais como deslocamentos”, através da exploração dos sentidos visual, tátil e outros.

A abstração reflexionante diz respeito à forma de como o conteúdo é captado ou aos esquemas mentais ou ainda atividades cognitivas construídas na relação sujeito - objeto. É reflexionante porque exige a transposição do material, do empírico para o abstrato e reconstrói o conhecimento de forma a acomodá-lo em um patamar superior. Esse processo é chamado de “evolução mental”. (PIAGET, 1993, p. 26).

A epistemologia genética de Piaget apresenta a construção do conhecimento relacionado com o espaço e o tempo, ou seja, o conhecimento se faz, quase sempre, pela interação do sujeito com o objeto numa determinada situação, em algum lugar do espaço e ao

longo de um intervalo de tempo. Este pensamento é válido para qualquer forma de conhecimento, seja ele do campo do senso comum, do saber escolar e até do campo científico.

Segundo Fainguelernt, “as teorias piagetianas relacionam fundamentalmente a geometria com a conscientização do espaço, com a representação e com a construção do objeto matemático” (p. 60), aspectos importantes para esta pesquisa.

Piaget e Inhelder (1993) – que já tinham percebido a importância de se trabalhar a geometria visando à construção de conceitos geométricos - indicam que os primeiros conceitos que as crianças desenvolvem no processo de construção do espaço são os do tipo topológicos. Isso quer dizer que o conceito de espaço tem origem na consciência do seu próprio corpo em relação a proximidade, separação, ordem ou sucessão espacial, fechamento e continuidade, entre outros.

Fainguelernt declara que Piaget, ao propor a sua teoria da concepção do espaço e da geometria construída pela criança, afirma que as relações espaciais são desenvolvidas de forma progressiva e em dois planos distintos e interligados: o plano perceptivo ou sensório-motor (espaço perceptivo) e o plano representativo ou intelectual (espaço de representação). O primeiro plano está ligado ao desenvolvimento da percepção a partir da motricidade, enquanto que o segundo plano está relacionado à representação do espaço a partir das intuições mais elementares, como a das relações topológicas de vizinhança, entre outras.

Enfatiza, ainda, que a intuição do espaço aparece de duas formas bem distintas: num momento, ligada às figurações estáticas, quando evoca uma figura plana e, em outro, quando são expressas suas características. A partir dessas e de outras idéias, Piaget (1993) cria um novo espaço, o da representação ou da imaginação, como sendo a imagem mental do espaço real em que o sujeito está atuando.

3.1.2 Por que os Conceitos são Complexos?

Ao procurar compreender dificuldades de articulação entre a dimensão conceitual e a diversidade de signos representativos, faz-se necessário tecer alguns comentários sobre a natureza e a complexidade de um conceito.

A palavra conceito, na perspectiva desta pesquisa, refere-se às idéias gerais e abstratas desenvolvidas no âmbito de uma área específica do saber, com o objetivo de sintetizar a essência de um conhecimento. As suas três grandes características são: a abstração, a generalização e a complexidade.

Para Deleuze e Guattari (2000, p. 27), não há conceitos simples. A complexidade é inerente à essência de qualquer conceito e este aspecto é de real interesse do ponto de vista pedagógico, pois, como ensinar geometria sem entender a complexidade inerente à formação de conceitos?

Por que os conceitos são complexos? Estes autores afirmam que a complexidade está no fato de não existir conceito de um só componente, pois cada um deles é, pelo menos, duplo, ou triplo, etc. Além disso, os conceitos não são criados do nada, pelo contrário, sempre são formados a partir de outros conceitos. Até mesmo o primeiro conceito pelo qual uma determinada área do conhecimento começa possui vários componentes.

Por exemplo, o conceito de cubo é formado a partir do conceito de quadrado e outros; o conceito de quadrado, por sua vez, é formado pelo de segmento de reta, de ponto, de vértice. Da mesma forma, o conceito de segmento de reta é construído a partir do conceito de reta e este é um conceito fundamental da geometria, na qual está presente a intuição, que também é um conceito.

Embora Deleuze e Guattari estivessem referindo-se ao conceito do ponto de vista filosófico, é possível, com certa reserva, transportar as suas idéias, de maneira análoga, para a área educacional, mais especificamente, ao campo da geometria.

Esses autores ressaltam que todo conceito tem uma história, remete a um problema, sem os quais não teria sentido e é também uma questão de articulação, corte e superposição. Neste sentido, geralmente, existe num conceito “pedaços ou componentes vindos de outros conceitos que respondiam a outros problemas e supunham outros planos [...] cada conceito opera um novo corte, assume novos contornos, deve ser reativado ou recortado.” (p. 29-30).

Outra idéia destacada por Deleuze e Guattari (1977) e que interessa a esta pesquisa é a da existência de múltiplas conexões entre os componentes conceituais, que eles denominam, metaforicamente, de rizomas. O conceito de rizoma é proposto não para negar, mas apenas para redimensionar a ilustração linear da árvore do conhecimento com suas raízes, tronco, galhos, folha e frutos, permitindo uma reordenação no imaginário cognitivo. Esta ilustração linear, ordenada e seqüencial passou a ser insuficiente para explicar a atual complexidade do mundo do conhecimento.

Para inspirar uma nova ordem na organização dos saberes, o modelo do rizoma proposto por Deleuze e Guattari realça que não é conveniente imaginar um núcleo dominante dos saberes, dando a idéia de abertura a outras filiações e por isso contrário à postura rígida e seqüencial de apresentar os conteúdos.

O interesse em discutir essa questão decorre do fato de que grande parte dos professores optam pela introdução do estudo de geometria no ensino fundamental a partir da exploração de figuras planas. Essa idéia reforça a concepção de que primeiro o aluno deve construir conceitos da geometria plana para depois elaborar conceitos da geometria tridimensional, apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais sugerirem o estudo das figuras espaciais desde os primeiros anos escolares.

Numa estrutura rizomática não há o predomínio de uma estrada real por onde todos devem passar. Nela, pode-se penetrar através de qualquer um de seus filamentos, pois, todos se comunicam entre si. Não há sentido em tentar estabelecer um centro coordenador no rizoma, uma vez que, todas as suas pontas são centros que se comunicam entre si.

Os saberes não se desenvolvem obedecendo a uma lógica arborescente de evolução, mas segundo uma rede de conexões bem mais complexas. Os rizomas procuram ligações preferencialmente num mesmo plano de significado, evitando os desafios da consistência externa. Quando se processam ramificações externas, buscando realidades ulteriores, a complexidade da formação de conceito é bem maior.

Os princípios adotados na criação da noção de rizoma procuram negar qualquer tentativa de fazer valer o império de uma pretensa certeza absoluta como se fosse possível estabelecer um único caminho para a obtenção da verdade. Por conseguinte, este referencial certamente permitirá esboçar uma epistemologia dos saberes geométricos e como resultado mais imediato novas práticas pedagógicas que favoreçam a construção de conceitos, tanto no plano como no espaço.

Essa forma de entender a construção conceitual é mais um indicativo da inconveniência de se tentar estabelecer uma única estrutura seqüencial na aprendizagem dos conteúdos geométricos, pois cada conceito é formado por uma malha de *conexões* com outros conceitos.

O enfoque aqui não seria mais à questão da sucessão de conceitos mas sim à questão da aderência dos conceitos constituintes ao conceito maior. O ato da criatividade manifesta-se mais intensamente na habilidade necessária para proceder esta aderência. Por exemplo, o conceito geométrico de cubo está em conexão com vários outros conceitos: quadrado, ângulo, perpendicularidade e assim por diante. O diedro determinado pelos semi-planos, suportes de dois quadrados adjacentes, associa-se a uma situação de perpendicularidade.

Há uma conexão entre todos esses conceitos e é a forma como esta conexão se estabelece que caracteriza o conceito maior do cubo. Ao se criar um novo conceito, o

interesse maior está, portanto, na coerência e na consistência da arquitetura elaborada por essa síntese. São esses atributos da criação que dão sentido ao objeto criado.

Nesse caso específico, as idéias aqui discutidas fortalecem o pressuposto da inexistência de uma linearidade absoluta na aprendizagem da geometria, como, por exemplo, a partir da dimensão plana para só então chegar à dimensão espacial. Pelo contrário, deve haver uma permanente articulação entre os conceitos da geometria plana e os da geometria espacial para que haja uma significativa aprendizagem dos conceitos geométricos.

3.1.3 Visualização, Imagens Mentais e Representação

Vários estudos sobre a elaboração conceitual no ensino de matemática ressaltam a importância da visualização e da representação como fatores imprescindíveis para uma aprendizagem significativa de conceitos no campo da geometria. A dificuldade de elaboração de conceitos geométricos no ensino fundamental pode ser decorrente da falta de domínio da habilidade de visualização e de transformar conceitos, que são abstratos, em imagens mentais ou em diferentes formas de representações visíveis, como o desenho e o modelo material.

De maneira geral, o termo visualização está relacionado à habilidade de perceber, de gerar, de descobrir, de interpretar, de comunicar e de refletir a partir das imagens visuais, entretanto, para Gutiérrez, citado por Miskulin (1999), a visualização é um tipo de atividade de raciocínio “baseada no uso de elementos visuais e espaciais, tanto mentais quanto físicos, desenvolvidos para resolver problemas ou provar propriedades.” (MISKULIN, 1999, p. 291).

Gutiérrez afirma que os termos visualização, imagens mentais e pensamento espacial podem ser considerados como equivalentes e que a maioria dos artigos relacionados à visualização são publicações de revistas ou de periódicos da Psicologia, quase sempre relacionados aos estágios de desenvolvimento do ser humano no âmbito da psicologia cognitiva. Ressalta que apesar do estudo da visualização ser necessário para a construção do conhecimento matemático, poucas publicações existem nesta área.

Esse autor destaca que os quatro principais elementos visuais e espaciais são: as imagens mentais, as representações externas, os processos de visualização e as habilidades de visualização. Passos (2000) transcreve o entendimento desse pesquisador sobre os elementos visuais e espaciais constituintes do raciocínio baseado na visualização, da seguinte forma:

[...] uma imagem mental é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito matemático ou propriedade.

[...] uma representação externa pertinente à visualização é qualquer tipo de representação gráfica ou verbal de conceitos ou propriedades incluindo figuras, desenhos, diagramas, etc., que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e produzir raciocínio visual.

[...] um processo de visualização é uma ação física ou mental, onde imagens mentais estão envolvidas. (p. 92).

Com relação às habilidades espaciais relacionadas à visualização, Passos ressalta que Gutiérrez distribuiu estas habilidades em duas classes:

I -Habilidade de visualização espacial: 1) *habilidade de imaginar a rotação de um objeto descrito, o deslocamento de um sólido e as mudanças relativas de posição de objetos no espaço*; 2)*habilidade de visualizar uma configuração na qual há movimento entre partes*; 3) *habilidade em compreender movimentos imaginários em três dimensões e manipular objetos na imaginação*; 4) *habilidade de manipular ou transformar a imagem de um modelo espacial em outro arranjo*.

II - Habilidade de orientação espacial: 1) *habilidade de determinar relacionamentos entre diferentes objetos espaciais*; 2) *habilidade de reconhecer a identidade de um objeto quando é visto de diferentes ângulos ou quando o objeto é movido*; 3) *habilidade de considerar relações espaciais onde a orientação do corpo do observador é essencial*; 4) *habilidade de perceber modelos espaciais e compará-los entre si*; 5) *habilidade de permanecer orientado (não se confundir) por variadas orientações nas quais um objeto espacial pode ser apresentado*; 6) *habilidade de preencher modelos espaciais ou manter orientação relativa a objetos no espaço* (p. 91).

Passos também enfatiza a importância da visualização na aprendizagem da geometria ao afirmar que apesar da utilidade dessas duas habilidades para a aprendizagem da geometria, a maioria dos professores quase não explora essas habilidades em sala de aula. (p. 80).

Nesta pesquisa, o termo visualização é concebido como habilidade de raciocinar visualmente com base em imagens mentais e como sendo um processo cognitivo relacionado à capacidade de relacionar objetos matemáticos, que são abstratos, com suas representações e vice-versa. Esse processo envolve a compreensão de representações visuais, do vocabulário matemático e a tradução de relações abstratas e informação não figurativa em formas visuais.

A capacidade de visualização é fundamental para a aprendizagem da geometria, principalmente quando se exige que o aluno represente no plano figuras espaciais que estivesse vendo através de um recurso material ou apenas imaginando.

Para um melhor entendimento a respeito da formação de conceitos geométricos é necessário recorrer também aos estudos sobre a construção de imagens mentais. Esse assunto ocupa uma posição destacada no campo da psicologia cognitiva, principalmente, por

possibilitar uma forma bem ampla de representação do conhecimento humano e estarem associadas ao processo de visualização e de representação plana de figuras geométricas.

Conforme afirma Passos (1999, p. 86), citando Gutiérrez (1996), a maioria dos psicólogos educacionais e pesquisadores de educação matemática utilizam o termo - imagem mental – com o seguinte sentido: “[...] uma imagem mental é uma representação mental de um conceito ou propriedade matemática, contendo informação baseada em elementos pictóricos, gráficos ou diagramáticos.” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 6, tradução da pesquisadora).

A noção de imagem mental que serve como referência para esta investigação está relacionada, por exemplo, à capacidade do aluno de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de uma figura geométrica, na ausência delas. Essas imagens são idéias abstratas e, portanto, estranhas à sensibilidade exterior do aluno. Pelo fato de pertencerem ao mundo da abstração, podem ser relacionadas aos conceitos geométricos, cujas duas grandes características são a generalidade e a abstração.

Na aprendizagem da geometria é requerida do aluno uma razoável habilidade para a formação de imagens mentais, principalmente na resolução de problemas associados a conceitos geométricos, demonstração de teoremas e representação de noções geométricas. Quando o aluno se depara com questões onde aparecem frases do tipo “ imagine uma reta paralela a um plano”; “a distância de um ponto a um plano”; “seja uma reta tangente a um círculo”; “seja a diagonal principal de um cubo” e outras, há um forte apelo para a utilização de imagens mentais. Isso porque, nesse caso, o aprendiz pode recorrer ao uso dessas imagens para facilitar o desenvolvimento do seu raciocínio na execução das atividades propostas, como, por exemplo, a de construir um desenho.

Neste trabalho tem-se o entendimento de que o desenho, também denominado de representação plana, é um importante recurso didático para o ensino da matemática, largamente utilizado para representar conceitos, noções e idéias. Não é uma exclusividade dessa área do conhecimento, uma vez que é usualmente explorado por quase todas as disciplinas escolares.

Provavelmente o uso acentuado do desenho, não só na matemática, deve-se ao seu potencial como um recurso de comunicação, mundialmente reconhecido desde os tempos mais remotos da história da civilização. Os povos primitivos foram os primeiros a utilizá-lo para transmitir mensagens e informações.

Gutiérrez (1998) destaca que quando há a necessidade de recorrer à representação de objetos espaciais através de desenhos, como, por exemplo, fazer a representação plana do conceito geométrico de cubo, de pirâmide ou cilindro, o aluno tem de vencer alguns

obstáculos de natureza cognitiva. Estes obstáculos podem estar relacionados a sua capacidade de visão espacial, a sua habilidade para desenhar figuras espaciais na dimensão plana ou, quando for o caso, a sua capacidade de interpretar corretamente as representações apresentadas por outras pessoas.

Esse autor realizou uma pesquisa com alunos americanos corresponde aos estudos da 6ª série do ensino fundamental brasileiro, que consistia na elaboração do desenho de um sólido geométrico da família dos poliedros, colocado em uma mesa à sua frente. O resultado demonstrou que existe dificuldade de conciliação de elementos do conceito geométrico entre aquilo que o estudante “viu” (visão espacial) e o desenho (representação) construído. Para o aluno “A”, o modelo tridimensional era de um cubo; ao aluno “B”, de uma pirâmide e ao aluno “C”, o modelo era de um paralelepípedo. Veja como as crianças construíram as suas respectivas representações planas dos poliedros:

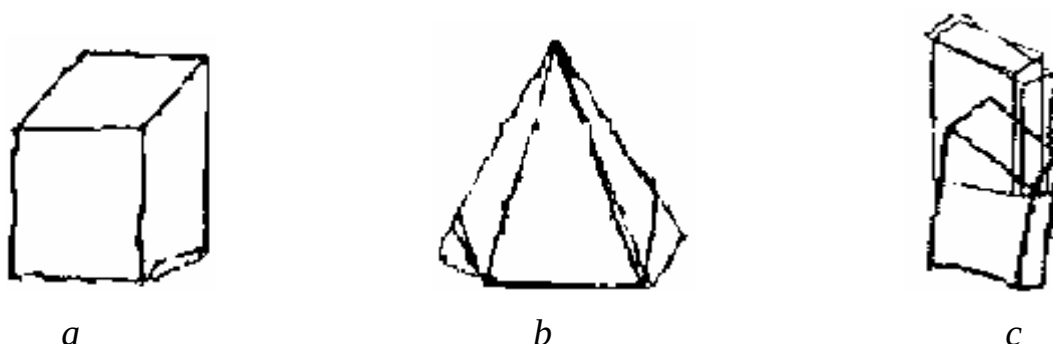


Figura 1 – Representação do cubo, pirâmide e paralelepípedo (GUTIÉRREZ, 1998, p. 206). (Citado por Passos: 2000, p. 183)

Na análise dos desenhos acima, pode-se perceber a complexidade do desenvolvimento da tarefa de representação de conceitos geométricos, especialmente de objetos tridimensionais, pois há a necessidade do uso da perspectiva para colocar em destaque a terceira dimensão do objeto dado. Todos os três alunos demonstraram dificuldade para representar as faces não aparentes dos modelos que lhes foram apresentados.

3.1.4 Uma Abordagem Cognitiva da Representação de Conceitos Geométricos

Para compreender as dificuldades e desafios que muitos alunos têm na construção de conceitos do conhecimento matemático, particularmente, referente à articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial, e destes, com as suas diferentes formas

de representação (linguagem natural, escrita simbólica, linguagem figural e outras), largamente utilizadas no ensino e a na aprendizagem da geometria, este pesquisador optou pela teoria de “Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão Humana”, do psicólogo francês Raymond Duval.

O interesse em utilizar a teoria de registros de representações semióticas de Duval (1993) para estudar o fenômeno da representação de conceitos geométricos, decorre do fato desse referencial permitir uma análise da multiplicidade de relações envolvidas entre o conceito (representado) e a representação (representante), principalmente, no que diz respeito às articulações entre o plano material e particular das representações e seu confronto com a elaboração da generalidade e da abstração inerentes aos conceitos geométricos.

A escolha dessa teoria justifica-se também pelo fato de existir uma forte proximidade entre os conceitos propostos por ela e a visão fenomenológica, adotada como caminho metodológico desta pesquisa. O pesquisador Duval numa determinada situação se refere à temática da representação como “modo fenomenológico das representações”.

O tema da representação de conceitos geométricos está relacionada à semiótica, disciplina especializada no estudo do estatuto da representação do pensamento, através dos vários sistemas ou “famílias” de signos, perceptíveis pelos sentidos externos do corpo humano. Não é interesse desta pesquisa estudar as implicações dessa disciplina no processo de comunicação, sobretudo, na aprendizagem escolar. O que se pretende é abordar questões didáticas referentes à compreensão do fenômeno, caracterizado pelo uso de diferentes registros representativos de conceitos geométricos, como, a língua natural, a escrita simbólica e o registro figural e outros, na elaboração conceitual, uma vez que cada um desses sistemas de representação tem significado de natureza simbólica e o seu principal papel é a conceituação do real.

Na perspectiva de Duval (1993), os conceitos matemáticos podem ser estudados e apreendidos, a partir das relações estabelecidas entre quatro pólos da cognição humana: o plano interno e externo das representações e o caráter da consciência e da não-consciência do significado desses conceitos.

O plano interno é caracterizado pelas representações de natureza subjetiva e mental do sujeito e o plano externo, pela transposição dessa subjetividade na direção da objetividade da representação, como construir um desenho, um enunciado, um gráfico e, assim por diante. Por sua vez, a consciência pode ou não intervir como uma das categorias fundamentais da aprendizagem, caracterizando, assim, os outros dois pólos da cognição humana. Ela não

intervém quando o sujeito executa certas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para a sua realização, como no caso do trabalho com algoritmos computacionais.

a) Representações mentais

Na confluência do plano interno e com o consciente da cognição humana, estão as representações mentais, também chamadas de imagens mentais, as quais são associadas pelo sujeito cognitivo aos conceitos visados. Elas não podem ser confundidas com as representações semióticas, pois o plano da interioridade não permite que as mesmas constituam um elemento de linguagem, enquanto que as de natureza semióticas constituem um suporte mais estável para o conhecimento, com vistas à elaboração da objetividade, justamente por serem um meio de comunicação.

De acordo com essa teoria desenvolvida por Duval (1993, p. 10):

As representações mentais são aquelas que permitem uma ‘visualização’ do objeto na ausência total de qualquer significante perceptível. Elas são geralmente identificadas às imagens mentais enquanto entidades psicológicas, tendo uma relação às vezes com a percepção e com o pensamento conceitual.

Uma das dificuldades na aprendizagem geométrica é caracterizar a existência do processo de formação de imagens mentais, tendo em vista sua intensa subjetividade e a inexistência de um signo ou linguagem capaz de expressá-la no plano da interioridade. Segundo Pais (1996), pode-se inferir que o aluno na aprendizagem da geometria tem uma imagem mental associada a um modelo material ou a um desenho, quando ele é capaz de descrever propriedades desse modelo ou desenho, na ausência total de qualquer significante perceptível.

A existência de representações mentais não resolve por si só o problema da aprendizagem, pois não seria possível articular esse conhecimento com o meio externo. Daí a importância das representações externas e conscientes na formação de conceitos geométricos, como a língua natural, os esquemas gráficos e tabelas, a representação figural e a escrita simbólica.

b) Representações semióticas

Como se sabe, toda a comunicação em matemática se estabelece através de representações, pois os objetos matemáticos, como os conceitos, as propriedades, as noções e os postulados são essencialmente abstratos e precisam ser representados, materializados, seja

por uma escrita, por símbolos ou uma notação para que o conhecimento, seja objetivado. Além disso, um mesmo objeto matemático tem diferentes formas de representação.

Particularmente interessam a esta pesquisa as representações semióticas, que segundo Duval, fazem parte de sistema particular de signos que podem ser estudadas a partir de relações estabelecidas entre o pólo externo da cognição humana e o caráter da consciência dos significados do conceito, como são as figuras geométricas (desenho), a escrita simbólica (algébrica, vetorial) e as línguas. Cada um desses signos tem regras próprias que permitem ao aluno efetuar e controlar ele próprio a diversidade de caminhos matemáticos que lhe são propostos numa representação conceitual.

Língua Natural e Escrita Simbólica

A linguagem, seja ela natural ou simbólica, está no centro de interesse da presente pesquisa e pode ser considerada como um registro de representação semiótica, na perspectiva de Duval. Com base nos estudos desse autor, busca-se compreender as dificuldades manifestadas pelos alunos na articulação entre essas duas linguagens, consideradas como sendo um sistema de representação da realidade expressas por signos.

Língua natural é entendida, neste contexto, como aquela decorrente da primeira língua que o sujeito aprende e a utiliza para se comunicar com outras pessoas no seu dia-a-dia. Um exemplo de uma representação semiótica na linguagem natural é a definição do tipo: “cubo é um prisma que tem as seis faces quadradas”.

A escrita simbólica (neste caso, a linguagem geométrica) refere-se ao discurso matemático, ou seja, “é a articulação inteligível dos aspectos matemáticos compreendidos, interpretados e comunicados pelo homem, dentro de uma civilização”. (DANYLUK, 1998, p. 19). Exemplo: $AB \parallel CD$, onde AB e CD são retas.

Um dos grandes desafios para os alunos no ensino da geometria é justamente articular de forma adequada o uso da linguagem natural e da escrita simbólica de tal forma que favoreça a construção de conceitos geométricos. Segundo Machado (1987, p. 97) é nesse campo que “se originam as maiores dificuldades relativas ao ensino (de Matemática) e que exige reflexões mais profundas e análises mais pormenorizadas que poderiam caracterizar novos trabalhos”.

Uma hipótese levantada neste trabalho é de que existe uma relação de impregnação mútua entre o discurso matemático e a língua natural e que é necessário o professor

compreender a essencialidade dessa impregnação para propor ações que visem à superação de dificuldades de aprendizagem da matemática, sobretudo na construção de conceitos geométricos e na elaboração da própria linguagem geométrica.

A escrita simbólica da matemática, assim como qualquer sistema lingüístico, utiliza-se de signos para comunicar significados matemáticos. A leitura dessa linguagem ocorre a partir da compreensão e da interpretação dos signos e das relações implícitas naquilo que se quer expressar.

A correta articulação entre a língua natural e a linguagem matemática expressa na escrita simbólica ou mesmo através do uso de termos formais, tem se mostrado como uma fonte de dificuldade para a aprendizagem do aluno, sobretudo, em nível semântico e na relação de troca de termos “anfíbios”, ora com origem em uma, ora com origem em outra. A observação das seguintes frases, expressões ou palavras pode ajudar a entender melhor o que se afirma:

- aparar as arestas;
- ver de um outro ângulo;
- círculo íntimo;
- quina do cubo.

Nesse aspecto, conjectura-se que o aluno possa vir a ter dificuldade na sua aprendizagem devido a incorreta articulação entre a escrita simbólica da matemática e a linguagem natural, denominada de obstáculos de natureza lingüística, por exemplo, atribuir a um termo um sentido essencialmente diferente daquele estabelecido pelo contexto do conhecimento geométrico.

Representações Figurais

Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações. O desenho, na perspectiva de Duval (1993), é descrito como uma representação semiótica e um meio de externalizar as representações internas, também denominadas de imagens mentais.

A representação de figuras geométricas planas ou espaciais, através do desenho, é um trabalho cognitivo de certa complexidade, pois exige a articulação entre os elementos característicos da figura, que é abstrata, e as regras do desenho técnico, para que o conceito possa ser evidenciado. Além disso, tais dificuldades acentuam-se quando os alunos precisam recorrer ao uso de perspectiva para colocar em destaque a terceira dimensão do objeto

matemático tridimensional. Como uma das funções do desenho é transmitir informações, os alunos podem ter problemas relacionados a sua codificação e leitura.

Duval ressalta o uso do desenho como suporte material importantíssimo de representação conceitual no campo da geometria, especialmente pelo fato de fornecer uma ilustração visual de conceitos geométricos, que são objetos matemáticos de natureza abstrata e genérica.

Registros de Representação - Tratamento e Conversão

Com já foi mencionado anteriormente, a matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, aqueles que não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão do uso de algum sistema de representação, tais como: desenhos, códigos, tabelas, esquemas gráficos, algoritmos, palavras e outros. Outra idéia importante, a ser destacada neste contexto, é que um mesmo objeto matemático pode ser representado por diferentes registros de representação, por exemplo, o conceito de pirâmide pode ser representado por um enunciado de palavras, por um desenho, e outros

Na opinião de Duval (1993), a originalidade da atividade matemática em relação aos outros campos do conhecimento está na utilização simultânea de, pelo menos, dois registros de representação e na possibilidade de trocar, momentaneamente, de registro. Em outras palavras, a elaboração conceitual em matemática supõe a coordenação de pelo menos dois registros de representações semióticas.

Duval destaca que as representações semióticas podem passar por dois tipos de transformações: o tratamento e a conversão.

A transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica, permanecendo no mesmo sistema, é denominada de tratamento. Explicando melhor, é a transformação de uma representação semiótica dentro do próprio registro onde ela foi formada, ou seja, a mudança é empreendida sobre um registro de representação e resulta em uma outra representação do mesmo sistema, sem alterar a natureza do registro anterior. Resumindo, o tratamento é uma transformação interna a um registro.

Um caso particular de tratamento, em relação aos desenhos de figuras geométricas, é a reconfiguração, caracterizada pela decomposição de um desenho em muitos outros sub-desenhos, permitindo a comparação de áreas e a transposição de elementos através de

transformações (rotações e simetrias). Outra situação de tratamento pode ser observada na escrita vetorial, conforme o seguinte exemplo: $AB = CD$ então $AC = BD$.

Duval afirma que, na maioria dos casos, o professor faz uso desse tipo de transformação, procurando o melhor registro de representação a ser utilizado para que o aluno adquira a compreensão matemática, entretanto, a transformação que ele considera mais significativa é a conversão, que ocorre toda a vez que a transformação resulta na obtenção de um outro registro, preservando o conceito representado.

A conversão distingue do tratamento, que se estabelece dentro do registro, pelo fato de acontecer entre registros diferentes. Um exemplo disso é a conversão do conceito de paralelepípedo, expresso na linguagem geométrica (representação textual) em desenho (representação gráfica), ou vice-versa.

Geralmente, as dificuldades de compreensão de conceitos geométricos aumentam todas as vezes que a situação de aprendizagem exige articulação entre os diferentes registros de representações semióticas, principalmente, quando se trata de uma conversão.

Segundo Duval, provavelmente o maior interesse pelo tratamento na aprendizagem da geometria deve-se ao fato do mesmo possibilitar justificação e prova, como no exemplo, a seguir: os pontos A, B e C formam um triângulo equilátero, então $AB = AC = BC$.

A atividade de conversão, no contexto da prática pedagógica cotidiana, é tida como secundária no processo de elaboração conceitual, porque não se presta a essa finalidade, ou seja, é apenas uma transformação representacional, por exemplo, a função $f(x) = x^2$ pode igualmente ser representada através do seguinte gráfico:

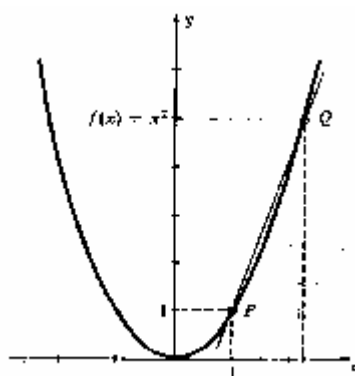


Figura 2 – Representação Gráfica da Função $y = f(x) = x^2$

Na opinião desse pesquisador, secundarizar a atividade de conversão de registros de representações semióticas é um equívoco, pois, enquanto que a transformação por tratamento deve ser valorizada do ponto de vista matemático, a transformação por conversão deve ser

valorizada do ponto de vista cognitivo, pois conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Duval destaca ainda que numa transformação é possível distinguir dois tipos de variações: as variações estruturais e as cognitivas. As estruturais são variações internas a um registro, que transformam uma representação em outra, porém, dentro de um único registro. Além disso, a representação que é obtida, a partir dessas variações estruturais, é identificável à anterior. Em suma, essas variações são peculiares de uma transformação por tratamento. Exemplo:

$$2 + 3 = 5 \text{ e } 1 + 4 = 5.$$

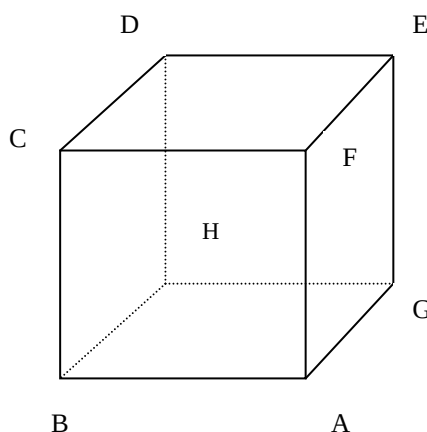
As variações cognitivas são, também variações estruturais que ocorrem entre dois registros. Se for considerado o registro de saída “A” e o registro de chegada “B”, a representação convertida (“B”) não será identificável ao registro de saída “A”. É o caso do exemplo:

Escrita simbólica

Registro figural

ABCDEFGH é um cubo

(A)



(B)

Como na aprendizagem da geometria, o aluno dispõe de vários registros de representação, como desenhos, modelos materiais, enunciados, a utilização consciente desses e de outros sistemas de representação é essencial para a construção do conhecimento

geométrico. Duval enfatiza que a diversidade dos registros de representações semióticas tem um papel central na aquisição de conhecimentos matemáticos, e que o progresso na aquisição desses conhecimentos depende da capacidade do aluno coordenar esses diferentes registros.

Esse autor esclarece que a passagem de um registro para outro parece natural, por isso não é levado a sério no ensino. Na verdade é um grande desafio cognitivo, uma vez que na conversão, os conteúdos das representações não são os mesmos, apesar de representarem o mesmo objeto.

Com base na teoria, proposta por Duval, é possível conjecturar que algumas das dificuldades de aprendizagem na articulação de conceitos geométricos decorre da falta de coordenação entre os vários registros de representação. De outra forma, o que garante a apreensão global e qualitativa do objeto matemático, a sua conceitualização, não é somente a quantidade de registros de representação possível de um mesmo objeto, mas também a coordenação entre esses diversos registros para fins de controle ou de exploração.

3.1.5 A busca de uma linguagem dinâmica

A presença de Papert, no quadro teórico desta pesquisa, deve-se ao fato dele destacar a necessidade de se ter ferramentas que auxiliem o aluno a construir o seu próprio conhecimento. Um dos suportes pedagógicos, mencionados em sua obra, é o computador, daí a necessidade de compreender o papel das novas tecnologias na educação e incorporá-las à escola. Esse autor desenvolveu uma linguagem de programação, chamada Logo, de fácil compreensão e manipulação, partindo, basicamente, da exploração de atividades espaciais e desenvolvimento de conceitos numéricos e geométricos.

Papert, citado por Fainguelernt (1999), fundamentado na psicologia piagetiana, criou a teoria do Construcionismo. Como ele mesmo explica: “o construcionismo é gerado sobre a suposição de que os indivíduos farão melhor descobrindo por si mesmos o conhecimento específico de que precisam” (p. 34), utilizando-se para isto de suportes pedagógicos. Em outras palavras, é uma reconstrução teórica a partir do construtivismo piagetiano, que valoriza a construção mental do sujeito, apoiada por materiais disponíveis no ambiente para a sua exploração.

Piaget acreditava que o processo de formalização do pensamento “tinha como base a maturação biológica, seguida de processos de interação com o meio, originando os estágios universais de desenvolvimento” (WEISS E CRUZ, 1999, p. 34). Papert acrescenta que esses

estágios também são determinados pelos recursos materiais disponíveis às crianças. Por isso, viu na informática uma maneira de potencializar a aprendizagem e produzir mudanças significativas no desenvolvimento intelectual dos aprendizes.

Papert amplia, então, a visão de intervenção no mundo do aprendiz, defendida por Piaget. Miskulin (1999, p. 233) procura esclarecer melhor esta idéia, recorrendo às próprias palavras de Papert:

Minha perspectiva é mais intervencionista. Meus objetivos são educacionais, não apenas entendimento. Então o meu próprio pensamento eu tenho dado uma grande ênfase em duas dimensões implícitas mas não elaboradas no trabalho de Piaget: um interesse em estruturas intelectuais que poderiam desenvolver-se como opostas daquelas que de fato desenvolvem-se na criança e o ‘design’ do ambiente de aprendizagem que são significativas à elas (computador). (PAPERT, 1980, p. 61, tradução de Miskulin).

Miskulin afirma também que Simonson *et al.* (1997) referem-se à teoria Construcionista de Papert da seguinte forma:

A fundamentação teórica do trabalho de Papert pode ser embasada na área de inteligência artificial e nas teorias de Jean Piaget. [...] Papert acredita que o computador é melhor usado em educação como um ‘objeto para se pensar sobre’ e não como ‘uma máquina provedora de informações.’ (p. 233).

Valente (1993) também salienta que o construcionismo é uma abordagem baseada nos princípios construtivistas de Piaget, criado, principalmente, para definir o tipo de aprendizagem que acontece em ambiente computacional, mediado por uma linguagem de programação.

Papert não nega que o aluno constrói o conhecimento em sua mente, interiormente, entretanto, enfatiza que “a melhor maneira de construir o conhecimento é construir algo palpável externamente.” (FAINGUELERNT; 1999, p. 34).

Em outras palavras, um dos pressupostos de sua teoria é a de que o conhecimento se constrói com o auxílio da interação externa. Neste sentido, o computador ou qualquer outro material concreto que se enquadre ao projeto de aprendizagem pode ser útil e permitir uma variedade de atividades matemáticas interessantes.

O professor, neste contexto, deve entender que a informática pode se transformar em importante suporte pedagógico para a exploração de conceitos geométricos porque ela oferece, entre outros recursos, o de movimento e de interatividade que podem ampliar as possibilidades de ensino e de aprendizagem da geometria.

Preocupado com questões como esta é que o filósofo e especialista em novas tecnologias da comunicação, o francês Pierre-Lévy, propõe uma nova espécie de interface, denominada por esse autor de ideografia dinâmica, uma nova escrita, uma linguagem de imagens dinâmicas, que facilita a passagem à abstração e à construção de conhecimentos.

A ideografia dinâmica envolve a idéia, quase utópica, de estabelecer uma linguagem computacional tão próxima quanto possível da estrutura mental do ser humano. Um dos principais objetivos dessa forma de expressão lingüística, através dos recursos digitais, é o fato de aprimorar a articulação entre a elaboração de conceitos e a linguagem.

Na opinião desse pesquisador, a tela do computador é um meio de comunicação capaz de aglutinar a imagem animada (movimento), a interação (interatividade) e a abstração, elementos necessários para a simulação de modelos mentais⁹, e estes, por sua vez, “constituem o principal processo cognitivo subjacente ao raciocínio, ao aprendizado, à compreensão e à comunicação.” (LÉVY, 1998, p. 19). A informática, nesse contexto, pode ser um instrumento de auxílio ao raciocínio, o mais próximo possível do funcionamento cognitivo espontâneo.

Segundo esse autor, a ideografia dinâmica propõe uma imagem animada e interativa e explora as possibilidades semióticas e cognitivas oferecidas pelas representações digitais, pois é uma linguagem de signos visuais em movimento.

Outra idéia tratada na sua obra é a de que “existe pensamento sem língua; mas esse pensamento nem por isso é desprovido de signos que são as imagens mentais.” (p. 93). Em outras palavras, não existe pensamento sem signo, daí a proposta da ideografia dinâmica de abrir novos domínios ao pensamento e à expressão através de ideogramas¹⁰ ou desenhos em movimento no vídeo do computador.

Como a geometria trabalha com diversos signos representativos de conceitos matemáticos, levanta-se a hipótese de que o uso de imagens dinâmicas e interativas no computador (representação por objetos), a probabilidade dos alunos terem mais sucesso na elaboração conceitual é maior, em função da possibilidade de poder efetuar cálculos, simulações, inferências e comparações sem ter de recorrer a operações lógicas formais.

⁹ Modelos mentais “corresponde a um conjunto estruturado de ideogramas (repertório), isto é, uma coleção de objetos, com todas as suas propriedades e regras a guiar suas interações.” (LÉVY, 1998, p. 105).

¹⁰ “Os ideogramas isentam entidades, relações ou ações da maneira mais evidente e mais intuitiva para os membros de uma mesma cultura.” (LÉVY, 1998, p. 160).

CAPÍTULO IV

DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA DA PESQUISA

Uma das questões primordiais para o desenvolvimento de uma pesquisa em qualquer área do conhecimento passa, sem dúvida, pela definição do método a ser utilizado durante a investigação, pois é ele que determina como o estudo do pesquisador será conduzido na construção de determinado conhecimento.

A opção pela fenomenologia, como caminho metodológico para direcionar a pesquisa, deve-se ao fato dessa corrente filosófica possibilitar um método rigoroso de descrição e investigação de fenômenos vivenciados de forma consciente pelo sujeito do conhecimento e dar valor à vivência do pesquisador em relação ao objeto específico da reflexão, pois o problema que gerou a pesquisa não pode ser estranho ao seu campo de experiências vividas.

Por ser uma pesquisa qualitativa, a generalização estatística não ocorre. Em lugar disso, trabalha-se com as descrições individuais vivenciadas pelos sujeitos.

4.1 Uma Introdução ao Pensamento Fenomenológico

A **fenomenologia** teve a sua origem no pensamento do filósofo Edmund Husserl (1859-1938). Este termo, composto pelas palavras “fenômeno” e “logos”, significa o estudo, a ciência ou a teoria dos fenômenos. Em outras palavras, é o estudo daquilo que se manifesta, que aparece ou que se revela à consciência do sujeito cognoscente.

Segundo Pais (1999), o primeiro passo para uma aproximação com o pensamento fenomenológico é a busca de uma atitude intelectual reflexiva e a substituição lenta e gradual da visão naturalista por uma forma mais rigorosa de pensar. Nesse sentido, a fenomenologia se apresenta muito mais como uma postura do que como um método de descrição de fenômenos vivenciados pelo sujeito durante o processo de elaboração do conhecimento. A descrição fenomenológica, de acordo com esse autor, “não tem a finalidade de proceder explicações causais, mas apenas compreender os fatos observados. Por esta razão, exige-se

que as teorias já incorporadas à consciência do pesquisador sejam postas em suspensão, isto é, a descrição não pode basear-se em teorias prévias”.

Colocar todo o conhecimento prévio em suspensão significa investigar as fontes primárias, *ir-às-coisas-mesmas*. Nesse ponto, para atender a proposta fundamental de Husserl relativa à construção de uma ciência do rigor, é necessário observar duas regras imprescindíveis do pensamento fenomenológico: “não recorrer a nenhum dado científico como fundamento teórico disponível a princípio; não carregar para a região da filosofia o modelo discursivo próprio das ciências” (BICUDO; CAPPELLETI, 1999, p. 122). Essas duas posições fenomenológicas contrariam o pensamento cartesiano, tendo em vista que o mesmo estabelece “uma continuidade entre o discurso filosófico e o discurso científico”. (MOURA, 1989, p. 26).

A consciência, entendida pela fenomenologia como a essência da intencionalidade¹¹, torna-se diferente daquela concebida pelo senso comum ou pela atitude natural, como sendo coisa, recipiente, formadora e parte do mundo. Ela não é entendida como algo abstrato e geral, mas sim como consciência de alguma coisa que o sujeito esteja vivenciando. Sendo assim, a mesma só existe como consciência de algo. É por isso que é concebida também como sinônimo de intencionalidade.

Husserl concebe a intencionalidade como sendo a essência da consciência e ao mesmo tempo o seu guia, possibilitando assim a percepção do fenômeno tal como ele se apresenta, se mostra e se revela ao sujeito. Este pensador procurou demonstrar essa idéia através do exemplo da percepção de uma figura geométrica na forma de cubo. Como a percepção de figuras geométricas sólidas é de fundamental valor para esta pesquisa, torna-se oportuno recorrer ao exemplo do próprio Husserl para ampliar o entendimento sobre intencionalidade.

A ilustração é de um objeto na forma de um cubo colocado diante de um determinado aluno, para que este passe a descrevê-lo tal qual se mostra à sua consciência. É evidente de que seja qual for o ângulo em que o aluno se coloca, de forma alguma ele vai apreender as suas seis faces ao mesmo tempo. De um determinado ângulo, o aluno vai perceber duas ou três faces do cubo. Se mudar de posição, outras duas ou três faces vão se mostrar, no entanto, aquelas, que haviam se mostrado anteriormente, agora ficam escondidas. Se continuar contornando o cubo, outras faces vão se lhe mostrar, desaparecendo as anteriores. O aluno não conseguirá apreender de uma só vez as seis faces do cubo, ou seja, a

¹¹ “Intencionalidade é o movimento da consciência, que sempre está atenta, dirigindo-se para algo.” (BICUDO, 2000, p. 39).

sua percepção não se completa totalmente; entretanto, se lhe perguntar o que é que ele percebeu, vai dizer que aquilo que lhe foi mostrado é um cubo. Como o aluno chegou a essa conclusão nessa descrição empírica? Husserl explica que a sua consciência, guiada pela intencionalidade, juntou todos os modos do cubo se mostrar, deu-lhe uma ordem e um sentido de tal forma que o aluno pudesse afirmar que percebeu um cubo, embora o mesmo não tenha se mostrado completamente. Portanto, a consciência contém mais do que se percebe.

Outra questão que merece ser destacada no pensamento fenomenológico é a *subjetividade*. Giles (1989, p. 67) afirma que Husserl a vê como a “a única fonte (transcendental) de todo conhecimento, absoluto e objetivamente válido, pois é na subjetividade da consciência, e apenas lá, que encontramos a objetividade absoluta”.

Conforme esse autor, a subjetividade está intimamente ligada à vivência, à experiência do sujeito e é através dela que aquilo que é se manifesta à consciência, ou seja, tudo o que existe está contido objetivamente nos próprios atos subjetivos, pelos quais aquilo que “é” está presente na consciência (GILES, 1989, p. 69). Na sua opinião, para que o conhecimento se torne inteiramente verdadeiro e válido faz-se necessário que a consciência transcendental, ou seja, aquela formada a partir da subjetividade do sujeito, rompa os limites da individualidade e do particular, para chegar a uma constituição intersubjetiva onde o objeto se constitui em objeto para uma pluralidade de sujeitos e tenha um caráter plenamente objetivo. A isso se dá o nome de *intersubjetividade*.

4.2 A Pesquisa na Perspectiva Fenomenológica

Ao conduzir uma pesquisa segundo a abordagem fenomenológica, o pesquisador não busca simplesmente um método, mas sim uma clareza para aquilo que quer compreender. Nessa busca de clareza a perspectiva básica inicial do trabalho é a descrição dos fenômenos. (BICUDO, 2000, p. 141).

O ponto de partida de uma pesquisa fenomenológica é a experiência vivenciada pelo pesquisador no *mundo-da-vida*¹², através da sua consciência ainda pré-reflexiva. Essa postura inicial do pesquisador é caracterizada como sendo aquela fase em que “há algo sobre o qual o pesquisador tem dúvidas, quer conhecer, mas que ainda não está bem explicitado

¹² Husserl entende o mundo-da-vida como sendo o mundo da nossa atitude natural, o campo das experiências pré-científicas, a fonte do sentido dos conceitos científicos, a origem e o fundamento das ciências objetivas, a dimensão interior do sujeito e da história e um ponto de partida para a fenomenologia transcendental.

para ele” (BICUDO: 1994, p. 27). A consciência dele começa a se tornar reflexiva à medida que o fenômeno vai sendo desvelado.

Na busca de compreensão do objeto, o pesquisador procura encontrar a essência do fenômeno e passa a descrevê-lo a partir do seu mundo real vivido, da sua vivência, com o intuito de desvendar o fenômeno além da aparência e investigar as fontes primárias do conhecimento em questão.

Portanto, uma tarefa fundamental para o pesquisador no método fenomenológico é a descrição do fenômeno, aqui entendida como sendo um caminho de aproximação daquilo que é percebido ou que se mostra tal como ele é.

Husserl refere-se a esse modo de pesquisar como sendo a descrição exaustiva do fenômeno e dos invariantes percebidos. A reflexão sobre tais invariantes é que vai permitir compreender e conduzir à essência do fenômeno investigado.

A pesquisa fenomenológica adota uma postura onde o pesquisador deve proceder a suspensão de juízo diante do fenômeno interrogado, ou seja, abandonar os preconceitos e teorias prévias em relação ao fenômeno que se estuda, sem que isto signifique uma atitude neutra e objetiva por parte do pesquisador.

A análise dos dados da pesquisa é processada em dois grandes momentos da organização prática de uma abordagem fenomenológica: o primeiro deles é a Análise Ideográfica e o segundo, a Análise Nomotética.

O primeiro momento é quando o pesquisador passa a destacar certas partes contidas no discurso descritivo do sujeito investigado, tidas como fundamentais para a compreensão do fenômeno. Em outras palavras, o pesquisador dirige toda a sua intencionalidade para destacar idéias representadas pelos diversos tipos de signos, contidos no discurso analisado, que entende estarem relacionados com o seu objeto de estudo. Aquelas idéias que mais lhes chamaram a atenção e que julga essenciais para a descrição do fenômeno são chamadas de *unidades de significado*, sendo estas fontes importantes para análises.

A análise ideográfica pode ser caracterizada por três fases bem distintas: a primeira é constituída pela leitura *detalhada do discurso*, tantas vezes quanto for necessário para começar a desvelar o significado do fenômeno. Essa leitura é realizada segundo a própria consciência do pesquisador, guiada pela sua intencionalidade e por uma percepção engajada e comprometida no campo fenomenal específico. A segunda fase consiste no *levantamento das unidades de significado* que se destacam na análise dos discursos. São pequenas frases que, muitas vezes, precisam ser traduzidas numa linguagem mais clara e precisa ou desenhos ou até mesmo, expressões que, para a consciência do pesquisador, são significativos e pertinentes

à estrutura fenomenal. A terceira e última fase da análise ideográfica é reservada para o pesquisador estabelecer o chamado *discurso interpretativo*, ainda no nível individual de cada discurso.

O segundo grande momento de análise numa perspectiva fenomenológica é denominada de análise nomotética e indica “um movimento de passagem do nível individual para o geral, ou seja, move-se do aspecto psicológico individual para o psicológico geral da manifestação do fenômeno.” (MACHADO, 1994, p. 43).

Nesse momento, as várias unidades de significação ganham normatividade ou generalidade, isto é, são agrupadas e analisadas segundo pontos de convergências ou de correspondências ocorridas ao longo da análise ideográfica e que caracterizam a estrutura geral do fenômeno.

Pode-se dizer então que a análise nomotética busca apreender uma certa regularidade, normatividade, generalidade possível a partir de tudo o que foi destacado na análise ideográfica. Em resumo, este é o momento em que se tem a visualização do fenômeno numa dada perspectiva¹³ que certamente poderá ser complementada por outros olhares.

4.3 Concepção Fenomenológica de Educação Matemática

A fenomenologia, como método de investigação, de acordo com Bicudo (1999, p. 12-13), traz uma contribuição à Educação no sentido de que ela não impõe uma verdade teórica ou ideológica preestabelecida, mas sim, adota uma postura de busca pelo sentido e pelo significado daquilo que se faz; sendo a análise, a crítica e a reflexão componentes básicos dessa concepção.

Nessa abordagem, a Educação é tida como *fenômeno* “que se mostra a consciência que, em sua intencionalidade, abarca, fazendo com que o seu sentido se dê nos seus diversos modos de aparecer” (BICUDO, 1999, p. 28). A palavra “fenômeno” é entendida aqui como sendo aquilo que se mostra ou se manifesta à *consciência*, que guiada pela *intencionalidade* possibilita a percepção do fenômeno, ou seja, daquilo que é mostrado.

Conforme essa perspectiva, a essência do fenômeno Educação está relacionada a uma atividade essencialmente humana no *mundo-vida*, este compreendido como sendo o campo universal das experiências vividas. Em se tratando de Educação, o mundo-vida envolve as experiências vivenciadas na escola, na prática pedagógica, onde estão, por

exemplo, alunos, professores, demais componentes da comunidade escolar e objetos culturais construídos ao longo da história. Rezende (1990, p. 47) confirma essa idéia ao afirmar que a aprendizagem no olhar fenomenológico é concebida como sendo “uma experiência tipicamente humana.”

Dessa forma, a percepção do fenômeno não se dá de forma isolada e independente do mundo e das coisas que o cercam. Bicudo (1994, p. 19) destaca que:

É importante que seja destacado que o que é visto não é percebido de maneira isolada, mas em uma região de fenômenos co-percebidos. Forma-se um campo de percepção, onde estão presentes o fenômeno posto em foco e outros co-percebidos. Sujeito e fenômeno estão no mundo-vida junto com outros sujeitos, co-presenças que percebem fenômenos.

A Educação Matemática também é vista pela fenomenologia como fenômeno, ou seja, como um todo que se mostra à consciência no seu mundo-vida, ou seja, no seu cotidiano. Nesse aspecto, a fenomenologia busca apreender as invariantes dos diversos modos pelos quais o fenômeno se manifesta na percepção.

Os objetos matemáticos, nesse enfoque, são objetos ideais, ou seja, constituídos na intuição, na subjetividade psíquica. Entretanto, sua idealidade transcende esta esfera, e através, da intersubjetividade, apresenta-se no mundo-vida, se mostrando à consciência. De outra forma, a idealidade dos objetos matemáticos não permanece apenas no campo abstrato das idéias, mas está presente nas experiências vividas pelo sujeito cognoscente.

Bicudo (1999, p. 38) enfatiza que essa idealidade “se mantém como objetiva e passível de ser percebida e desenvolvida mediante evidência, imaginação, raciocínio lógico, fazeres práticos e teóricos” e que os objetos matemáticos são então lançados para a esfera da intersubjetividade que lhes dá caracteres objetivos na cultura pela linguagem, seja ela, falada, escrita em símbolos da linguagem ordinária ou matemática, demonstrada, e assim por diante.

O professor de matemática, na concepção fenomenológica, trabalha com a percepção, explorando os modos como os objetos matemáticos se mostram ao aluno, a si mesmo e aos demais envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem. Privilegia a percepção do eu e do outro e elege atividades que favoreçam a multiplicidade dada na percepção e nas experiências individuais.

A reflexão a respeito do conhecimento que está sendo apreendido pela consciência do sujeito é outro ponto importante numa perspectiva fenomenológica. Neste ponto,

¹³ Perspectiva neste contexto é entendida como sendo um tipo de “olhar” do sujeito em relação ao objeto da

professores e alunos devem voltarem-se para as próprias ações, para compreendê-las, analisá-las e criticá-las.

Ao assumir uma postura fenomenológica na área da Educação Matemática, deve-se ter em mente a necessidade de buscar sentido e significado de tudo aquilo que se faz ao ensinar e ao aprender matemática.

4.4 Construção de Conceitos Geométricos na Visão Fenomenológica

A concepção de construção do conhecimento geométrico, assumido por esta pesquisa, é aquela que privilegia a vivência do aluno, suas experiências vividas no mundo geométrico, e que tem como primado a percepção. Em outras palavras, a gênese da elaboração de conceitos é concebida numa perspectiva fenomenológica, ou seja, é tida como fenômeno que se mostra à consciência do aluno através da percepção.

O conceito de percepção está baseado nos trabalhos de Merleau-Ponty (1994). Na sua opinião, a percepção não é uma operação intelectual que visa coordenar os dados dos sentidos, nem uma ciência do mundo e nem mesmo um ato ou uma posição deliberada, mas sim, o pano de fundo onde se dão todos os acontecimentos. Em outras palavras, a percepção é um fenômeno psíquico, ou seja, que ocorre na mente do sujeito, sendo esta determinada pelos sentidos, pelas experiências prévias do indivíduo e pelas suas percepções explícitas.

Esse autor enfatiza que o sujeito só percebe algo quando faz sentido para ele. Nesse aspecto, a percepção não é auto-evidente e nem única, depende da perspectiva e da intencionalidade do sujeito. Merleau-Ponty defende a idéia de que a percepção de um fenômeno nem sempre é aquilo que se mostra imediatamente, pois, aquilo que é percebido, em qualquer natureza, admite ambigüidades ou contradição e somente uma consciência reflexiva¹⁴ tende a construir uma percepção menos confusa do que uma consciência natural¹⁵.

Para esse pesquisador, “a percepção assume a primazia do processo reflexivo. Isto quer dizer que o mundo-percebido é o fundamento, sempre suposto, de toda a racionalidade, de todos os valores, de toda a existência” (BICUDO & ESPÓSITO, 1997, p. 26). De outra forma, a percepção é a própria presença do sujeito no momento em que o conhecimento é construído por ele.

percepção.

¹⁴ Consciência reflexiva é aquela resultante de ações de análise e de reflexão.

¹⁵ Consciência natural é aquela que ainda não foi tematizada de modo a poder ser desdobrada em ações de análise e de reflexão.

Nessa abordagem, a percepção espacial, como espaço geométrico se dá numa relação intencional entre o corpo-próprio¹⁶ - entendido como campo perceptivo e prático - e o mundo, que na expressão de Merleau-Ponty (1994, p. 6) “não é um objeto do qual possuo comigo a lei de constituição, ele é o meio natural e o campo de todos os meus pensamentos e de todas as minhas percepções explícitas”.

Concluindo, o enfoque, que esta pesquisa dá à construção do conhecimento da geometria, privilegia a experiência do corpo-próprio que venha a constituir a rede de significações¹⁷ do mundo geométrico.

4.5 Problema e Objetivos da Pesquisa

Esta pesquisa é conduzida pelo seguinte problema: por que geralmente os alunos do ensino fundamental têm dificuldades de aprendizagem na construção de conceitos geométricos, especialmente em atividades que exigem articulação entre os conceitos da geometria plana e da geometria espacial e os seus diversos registros de representações semióticas?

A generalidade e a abstração dos conceitos geométricos são construídas progressivamente, num processo que envolve, necessariamente, o uso de diferentes tipos de signos para representar o objeto matemático. É nesse processo de conceitualização que o aluno lança mão de recursos que lhe são mais próximos e disponíveis, ou seja, as representações, através de modelos materiais, de desenhos, de imagens mentais e da escrita, entre outras formas distintas de representação de conceitos.

Como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental destacam que o aluno deve desenvolver o pensamento geométrico através da exploração do espaço e de suas representações e a da articulação entre a geometria plana e a geometria espacial (INTRODUÇÃO AOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS – PCN, 1998, p. 60), é de se esperar que o aluno conclua essa etapa da educação básica sabendo interpretar e

¹⁶ Merleau-Ponty explica o significado de *Corpo-próprio* da seguinte maneira: “O corpo não é um objeto. Pela mesma razão, a consciência que tenho dele não é um pensamento, quer dizer, não posso decompô-lo e recompô-lo para formar dele uma idéia clara. Sua unidade é sempre implícita e confusa. Ele é sempre outra coisa que aquilo que ele é, sempre sexualidade ao mesmo tempo em que liberdade, enraizado na natureza do próprio momento em que se transforma pela cultura, nunca fechado em si mesmo e nunca ultrapassado. Quer se trate do corpo do outro ou do meu próprio corpo. Não tenho outro meio de viver o corpo humano senão vivê-lo, quer dizer retomar por minha conta o drama que o traspassa e confundir-se com ele”. **Fenomenologia da percepção**. Trad. Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1994, p. 269.

¹⁷ Rede de significações é constituída pela experiência vivida, que ao ser expressa pela linguagem, revela não só a percepção do sujeito, mas também a marca da história e da cultura na qual o sujeito está inserido.

realizar operações com uma diversidade de signos representativos dos conceitos objetivados. Por mais simples que possa parecer, o estabelecimento da relação entre o conceito e a suas representações, essa articulação, em muitos casos, tem se demonstrado como um grande desafio para o sujeito cognitivo.

Em função desse problema, o objetivo geral desta pesquisa é identificar e procurar compreender dificuldades na aprendizagem de conceitos geométricos, sobretudo quando o aluno precisa transitar da geometria plana para a geometria espacial, e vice-versa, e ainda, coordenar os diversos tipos de registros de representações semióticas para apreender o objeto matemático envolvido.

Paralelamente, busca-se também compreender as possibilidades metodológicas e pedagógicas a partir da introdução do computador na aprendizagem da geometria.

No desenvolvimento das atividades em sala de aula, procura-se, também, focalizar as manifestações dos alunos com relação a questões bem específicas, tais como:

a) verificar de que forma a linguagem utilizada pelo aluno ou pelos autores de livros didáticos pode ser uma possível fonte de dificuldade no processo de aprendizagem da geometria e caracterizar a impregnação da linguagem do cotidiano dos sujeitos pesquisados na linguagem matemática, com o intuito de desvelar se aquela dificulta a compreensão de conceitos geométricos. Revelar, ainda, como o aluno articula a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática, de modo que expresse uma aprendizagem significativa.

b) revelar relações entre o fenômeno interrogado e os conceitos de representação e de visualização;

c) compreender como a representação plana (o desenho) de conceitos geométricos espaciais pode, ao invés de facilitar, dificultar a elaboração conceitual e as suas dificuldades para articular as informações obtidas através da leitura das representações planas com as invariantes conceituais;

d) explicitar possíveis contribuições da informática na representação de figuras geométricas espaciais.

4.6 Sujeitos Colaboradores da Pesquisa

Esta pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 29 alunos da 8ª série do ensino fundamental, do período vespertino, da uma escola pública da cidade de Campo Grande - Mato Grosso do Sul.

A escola oferece o ensino fundamental, em três turnos, para aproximadamente 900 alunos provenientes da classe social média-baixa; possui uma grande tradição na cidade, pois, encontra-se em funcionamento há mais de 50 anos.

Dos 29 alunos que participaram da pesquisa, 27 tinham 14 anos de idade e dois eram maiores de 15 anos, ou seja, todos pertenciam à mesma faixa etária. Na escolha dos sujeitos da pesquisa, levaram-se em conta alguns fatores, tais como: a manifestação favorável à execução da pesquisa por parte da equipe técnico-administrativa e pedagógica da escola; a concordância dos alunos e seus responsáveis em participar da experiência e o fato do estabelecimento de ensino possuir uma sala de informática educativa, pois uma das atividades foi desenvolvida com a ajuda do computador.

A escolha de alunos em nível da 8ª série do ensino fundamental é plenamente pertinente, tendo em vista que os mesmos estão concluindo a segunda etapa da educação básica, o que pressupõe que eles já detenham conhecimentos básicos de conceitos da geometria plana e da geometria espacial.

4.7 Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

A realização da pesquisa de campo ocorreu através da inserção do pesquisador em sala de aula para a realização de quatro atividades em dois encontros.

No primeiro encontro, o pesquisador foi apresentado à turma pela coordenadora pedagógica, que, juntamente com a professora da sala de aula, acompanhou toda a explicação inicial dada pelo pesquisador referente às atividades que se seguiram.

Foram apresentados os objetivos e a metodologia da pesquisa e explicado aos alunos que não se tratava de uma avaliação dos seus conhecimentos com intuito de mensurar, qualificar ou mesmo atribuir conceito individual ou coletivo. Além disso, foram orientados para que não colocassem o nome nas atividades, garantindo, assim, o anonimato.

Os alunos foram divididos aleatoriamente em grupos, de acordo com o número de atividades a serem desenvolvidas. Assim, cada grupo realizou um tipo de atividade. Cada uma delas tinha um objetivo bem específico, sem necessariamente uma depender da outra, daí não ser preciso que todos os alunos fizessem as mesmas atividades. Por outro lado, a definição do número de alunos por grupo foi determinado por conveniências de natureza prática e condições satisfatórias de observação da parte do pesquisador. O número reduzido de estudantes que trabalhou com o computador, por exemplo, se deve a este último critério, pois

é mais fácil observar o desempenho dos sujeitos pesquisados na sala de informática com um grupo menor.

Dez alunos desenvolveram a primeira atividade, estruturada em duas partes. Primeiramente, foi-lhes solicitado que descrevessem com suas próprias palavras, da maneira, a mais detalhada possível, os significados das seguintes palavras: ponto, vértice, ângulo, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo. O interesse do pesquisador foi investigar como os alunos utilizam a linguagem matemática para descrever conceitos geométricos e verificar de que forma os termos provenientes da linguagem do cotidiano podem dificultar a correta articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial.

Em seguida, foi solicitado aos mesmos alunos que reconhecessem os nomes de algumas das figuras geométricas trabalhadas anteriormente, cujas propriedades estavam expressas na linguagem formal da matemática. O interesse do pesquisador foi verificar como os alunos articulavam o conceito com a linguagem matemática.

A segunda atividade, que também estava dividida em duas partes, foi realizada por doze alunos, organizados em duplas. Após a explicação das regras da atividade, os componentes de cada dupla foram colocados em ambientes separados, formando dois grupos de sete participantes, de tal forma que não houvesse qualquer tipo de comunicação entre os companheiros das duplas.

Cada um deles deveria então descrever uma figura geométrica na forma de cubo ou de pirâmide ou de cilindro, que lhe foi apresentado em uma folha de papel, utilizando a linguagem matemática (enunciado matemático) e com tamanha riqueza que o seu companheiro de dupla pudesse representá-lo através de um desenho.

Terminada a tarefa, o pesquisador recolheu as descrições de cada aluno do primeiro grupo e as entregou aos companheiros da dupla que estavam em outro espaço físico, solicitando deles que representassem por meio de desenhos os sólidos geométricos descritos pelos seus colegas. O objetivo dessa tarefa foi explorar a habilidade de leitura, interpretação e representação plana associada a conceitos geométricos espaciais, através do modo de descrição dos alunos.

A terceira atividade, dividida em duas partes, foi desenvolvida por cinco alunos. Inicialmente foi fixado no canto superior e à esquerda da carteira escolar de cada aluno um modelo geométrico em forma de cubo, construído em cartolina, para que todos os participantes visualizassem segundo uma mesma perspectiva. Em seguida, foi-lhes solicitado que fizessem um desenho do objeto material que estava fixado sobre a sua carteira, da

maneira como o percebia segundo aquele ponto de vista. Foi ressaltado, ainda, que não esquecessem de representar faces ocultas.

Concluída esta primeira etapa, os cinco alunos passaram para a segunda parte da atividade que consistia em descrever detalhadamente o objeto material fixado sobre as suas carteiras escolares. As descrições também foram objeto de análise posteriormente. O interesse do pesquisador consistiu em verificar as dificuldades que o aluno demonstra na representação associada ao conceito geométrico de cubo, ao articular termos usuais de sua identificação lingüística à realização de um desenho em perspectiva.

A quarta e última atividade foi desenvolvida no laboratório de informática pelos mesmos cinco alunos que desenvolveram a atividade anterior. Todos eles receberam um disquete contendo um programa que permitia visualizar um cubo na tela do computador através de três câmaras distintas. Após instalado o referido programa, cada aluno passou a identificar as seis faces do cubo segundo a perspectiva de cada câmara. Em outras palavras, o aluno procurou relatar quais as faces do cubo podiam ser visualizadas segundo a posição de cada câmara.

O intuito do pesquisador nessa atividade foi verificar quais as dificuldades manifestadas pelos alunos em face do uso do computador e colher suas opiniões a respeito da aprendizagem de visualização do cubo em ambiente informatizado. A opção pela figura geométrica de um cubo se deve a dois motivos: primeiro, porque é uma figura bastante familiar aos alunos, largamente explorada sob o ponto de vista da visualização desde a educação infantil. Em segundo lugar, porque os alunos que participaram dessa situação de aprendizagem já haviam trabalhado na atividade anterior com a visualização e a representação do cubo e isso favorecia a comparação de dificuldades de aprendizagem entre ambos os cenários.

4.8 Como os Resultados da Pesquisa foram Construído

Este tópico busca evidenciar como os resultados da pesquisa foram construídos e se referem à análise fenomenológica dos dados obtidos, tanto através das atividades escritas, desenvolvidas em sala de aula pelos alunos pesquisados, como também de seus discursos gravados em fita e transcritos *in verbatim*.

A primeira fase da análise, denominada **ideográfica**, “busca tornar visível a ideologia presente na descrição ingênua dos sujeitos, podendo para isso lançar mão de

ideogramas ou símbolos expressando idéias” (BICUDO; CAPPELLETTI, 1999, p. 119). É um momento especial onde o pesquisador busca evidenciar a ideologia que permeia o discurso expresso pelos alunos participantes da pesquisa. Ele mergulha no mundo da descrição, em direção ao mundo-vida e ao pensar dos sujeitos, de tal forma que aquilo que o impressiona possa chegar à evidência das experiências e convertam-se em “unidades de significados¹⁸”. (BICUDO; ESPÓSITO, 1994, p. 40-41).

As unidades, que compõem a presente pesquisa, foram retiradas dos discursos dos alunos, expressos por meio de atividades em sala de aula e entrevistas semi-estruturadas. Essas unidades não existem *a priori*, só se manifestam a partir da reflexão e da perspectiva adotadas, pelo pesquisador na investigação. Elas emergem dos textos, de acordo com a leitura que deles faz o investigador, ou como destaca Martins e Bicudo (1989, p. 99), elas “existem somente em relação à atitude, disposição e perspectiva do pesquisador.”

Na busca das unidades de significados, foram primeiramente transcritos os discursos dos alunos, contidos nos Anexos A, B e C. Após a transcrição e várias leituras dos discursos, foram extraídas 113 unidades de significados, conforme mostra os Anexos D, E e F.

Concluída a etapa da identificação das unidades de significado pelo pesquisador, iniciou-se um outro processo, denominado de *redução fenomenológica*, dando origem a 103 discursos articulados (ver Anexo D, E e F), correspondentes a cada uma das unidades retiradas dos textos dos alunos. Estes discursos, também chamados de asserções articuladas “indicam o mais fielmente possível as idéias articuladas do discurso do sujeito” (BICUDO; ESPÓSITO, p. 41, 1994).

Nesta tarefa de destacar as unidades de significados dos registros dos alunos, mediante o que pode ser chamado de análise interpretativa, o pesquisador precisa muitas vezes se colocar na perspectiva deles para compreender como eles pensam ou pretendiam expressar o seu pensamento.

Este caminho imaginativo na abordagem fenomenológica, onde o pesquisador procura esclarecer as palavras utilizadas no discurso, no enunciado, nos registros ou no pensamento do sujeito, recebe o nome de redução fenomenológica, como já foi explicitado anteriormente, ou, ainda, de *variação imaginativa*.

¹⁸ Unidades de significado são “unidades da descrição ou do texto que fazem sentido para o pesquisador a partir da interrogação formulada”. BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia: confrontos e avanços**. São Paulo: Cortez, 2000, p. 81.

De acordo com Martins, (1992, p. 60), a variação imaginativa é “a técnica usual comum para realizar a redução fenomenológica”, ou seja, o movimento que se inicia com a interrogação e vai se avançando na direção de revelar o fenômeno estudado.

Na próxima fase da construção dos resultados da pesquisa, denominada de análise nomotética, o pesquisador trabalha com os dados oriundos da análise idiográfica e busca as relações de convergências e divergências entre as unidades de significado analisadas individualmente, na fase análise anterior.

Bicudo e Cappelletti (1999, p. 120) afirmam que “esses agrupamentos formam uma síntese dos julgamentos consistentes dos dados nas descrições ingênuas dos sujeitos”. A partir desta análise, chega-se à elaboração de uma *matriz nomotética* que é construída com base no cruzamento das unidades de significado.

Na primeira convergência, as unidades de significado foram agrupadas em nove confluências temáticas que explicitam a compreensão e a interpretação do pesquisador na região do inquérito investigado.

Em seguida, foi realizada uma nova convergência na direção de pontos articuladores de significados mais abrangentes, denominados de categorias abertas. Estas categorias, em número de três, revelam ao pesquisador a estrutura geral do fenômeno, que, ao interpretá-las, busca a generalidade do fenômeno estudado.

CAPÍTULO V

CONVERGÊNCIAS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao indagar por que os alunos têm tantas dificuldades na aprendizagem de conceitos geométricos, principalmente em atividades que exigem articulação entre conceitos da geometria plana e da dimensão espacial, e ainda, entre a dimensão conceitual e as suas diversas maneiras de representação, este pesquisador procura desvelar e compreender essa problemática, a partir das manifestações dos sujeitos estudados, focalizando a linguagem escrita e falada dos estudantes pesquisados e os desenhos por eles construídos.

O destaque da linguagem nesta investigação é procedente, pois a pesquisa qualitativa, na modalidade fenomenológica, trabalha com descrições individuais, constituídas pelos relatos dos sujeitos que vivenciam o fenômeno. Bicudo (2000, p. 74) destaca esta idéia ao afirmar que:

A investigação fenomenológica trabalha sempre com o qualitativo, com o que faz sentido para o sujeito, com o fenômeno posto em suspensão, como percebido e manifesto pela linguagem; e trabalha também com o que se apresenta como significativo ou relevante no contexto no qual a percepção e a manifestação ocorrem.

A linguagem é fundamental para desvelar a essência do fenômeno numa abordagem fenomenológica. Esse desvelamento ocorre a partir da interpretação dada pelo pesquisador às assertivas dos sujeitos pesquisados, à luz da sua vivência. Em função disso, é apresentado, neste tópico, uma análise do desenvolvimento percebido e interpretado dos registros individuais dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

5.1 Compreendendo Dificuldades de Aprendizagem dos Alunos

Na tentativa de entrar em contato direto como o fenômeno interrogado, o pesquisador volta-se para a interpretação do desenvolvimento da aprendizagem de construção de conceitos

geométricos de cada aluno, descrevendo e comentando o modo particular como as atividades foram realizadas.

É um momento muito especial da pesquisa, pois o observador-investigador percorre uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, focalizando os aspectos que lhe sejam significativos, pois os dados necessários para a análise do fenômeno interrogado só manifestam à consciência que está voltada para conhecê-los, e são eles, que após serem interpretados, consolidarão basicamente os resultados da pesquisa.

5.1.1 Análise do Desenvolvimento Individual dos Alunos na Primeira Atividade

Nesta atividade um grupo de alunos, fez uma descrição, detalhada em uma folha de papel impressa, do significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulo, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

Para facilitar a análise das manifestações escritas dos sujeitos pesquisados, foram sintetizadas as suas descrições:

a) ponto:

Aluno A - é um sinal que finaliza uma frase.

Aluno C - é uma união de vértices.

Aluno D - serve para unir as retas.

Aluno E - é uma certa parte que serve para localizar uma área.

Aluno G - é usado para determinar o final de alguma frase, texto, verso, etc.

Aluno H - não precisa ter diâmetro específico.

Aluno I - usamos pontos nas retas para definir alguns ângulos.

Aluno J - é quando você termina uma frase e quer colocar o ponto.

Alunos B e F - não souberam descrever.

b) vértice:

Aluno C - são retas que se encontram em um ponto.

Aluno D - são lados da figura.

Aluno E - é a parte de uma figura e se localiza nos lados de uma certa figura.

Aluno F - é uma *linha deitada*.

Aluno G - é uma *linha reta*.

Aluno H - é um lado ao contrário.

Aluno J - é uma *linha que anda reta*.

Alunos A, B, e I - não souberam descrever.

c) ângulo:

Aluno B – é cada *lateral* de uma figura geométrica.

Aluno C - é formado por dois ou mais vértices.

Aluno E - é a medida em graus de uma certa figura.

Aluno G - é uma reta cujos lados tem uma medida em graus.

Aluno H - é a *quina* de uma figura geométrica.

Aluno I – são diferentes formas geométricas formadas por retas.

Aluno J - são as diferentes formas geométricas formadas por retas.

Alunos A, D e F - não souberam descrever.

d) aresta:

Aluno C - lado de um triângulo. Ex: aresta x aresta x aresta.

Aluno D - lado de um triângulo.

Alunos A, B, E, F,G, H, I e J - não souberam descrever.

e) diagonal:

Alunos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J - não souberam descrever.

f) paralelismo:

Alunos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J - não souberam descrever.

g) perpendiculares:

Aluno C - são duas retas que se encontram.

Alunos A, B, D, E, F, G, H, I, e J - não souberam descrever.

h) perspectiva:

Alunos A,B, C, D, E, F, G, H, I e J - não souberam descrever.

i) triângulo:

Aluno A - é uma figura de três lados, formada por três linhas do mesmo tamanho.

Aluno B - uma figura com três lados iguais.

Aluno C - uma figura de três lados iguais.

Aluno D - uma figura de três lados.

Aluno E - é uma figura geométrica de três lados iguais.

Aluno F - é uma figura geométrica com três lados, pois dois lados são verticais e um horizontal.

Aluno G - é uma figura que tem os três lados iguais.

Aluno H - é uma figura geométrica com os tamanhos dos lados iguais.

Aluno I - é uma figura com três ângulos do mesmo tamanho.

Aluno J - é uma forma que tem três *cantos* e três lados da mesma *espessura*.

j) quadrado:

Aluno A - é uma figura de quatro lados, formada por quatro *linhas* do mesmo tamanho.

Aluno B - é uma figura com quatro lados iguais.

Aluno C - é uma figura de quatro lados iguais.

Aluno D - é uma figura de quatro lados iguais.

Aluno E - é uma figura geométrica de quatro lados iguais.

Aluno F - é uma figura geométrica que contém quatro lados iguais.

Aluno G - é uma figura que tem quatro lados iguais.

Aluno H - é uma figura geométrica.

Aluno I - uma forma com quatro lados do mesmo tamanho.

Aluno J - é uma forma que tem *quatro cantos* e cada lado da *mesma espessura*.

k) retângulo:

Aluno A - é uma figura de quatro lados, formada por duas *linhas* do mesmo tamanho.

Aluno B - é uma figura de quatro lados, mas *a lateral é mais larga*.

Aluno C - é uma figura com dois lados iguais e dois diferentes.

Aluno D - uma figura de lados diferentes, sendo dois iguais e dois diferentes.

Aluno E - é uma figura geométrica de quatro lados, dois maiores e dois menores.

Aluno F - é uma figura geométrica que também contém quatro lados, sendo dois lados maiores e os outros dois lados menores.

Aluno G - é uma figura que dois lados são maiores e outros dois menores.

Aluno H - é uma figura geométrica.

Aluno I - uma forma com quatro lados, cujas laterais iguais e as retas de baixo e de cima maiores que as laterais e também do mesmo tamanho.

Aluno J - é uma forma que tem *quatro cantos* e quatro lados não todos iguais.

l) cubo:

Aluno A - é formado por seis quadrados do mesmo tamanho.

Aluno B - é um quadrado com vários lados.

Aluno F - é uma espécie de um dado.

Alunos C, D, E, G, H, I e J - não souberam descrever.

m) pirâmide:

Aluno A - é formada por três triângulos e (01) um quadrado.

Aluno B - é um triângulo.

Aluno F - é uma espécie de triângulo.

Aluno H - é uma *figura egípcia*.

Aluno I - é uma forma com um triângulo nas laterais e na frente e no fundo.

Aluno J - é uma antiga forma usada pelos egípcios comparada ao triângulo.

Alunos C, D, E e G - não souberam descrever.

n) paralelepípedo:

Aluno A - é comprido, formado por dois círculos em cada ponto de um tubo.

Aluno B - são pedras pequenas.

Aluno I - tem seis lados.

Alunos C, D, E, F, G, H e J - não souberam descrever.

No momento seguinte, os alunos deveriam reconhecer os conceitos geométricos expressos na linguagem matemática, dando o nome de cada uma deles. A finalidade foi caracterizar a impregnação da linguagem do cotidiano na linguagem matemática dos sujeitos pesquisados e verificar se a mesma dificulta a compreensão de conceitos geométricos.

Veja como os alunos nomearam as figuras expressas pelos conceitos abaixo:

a). *Polígono de três lados e de três ângulos* - apenas o aluno “E” não relacionou a descrição como sendo de um triângulo. Para ele, se referia a uma pirâmide.

b). *Ponto comum a dois lados de um ângulo, a dois lados de um polígono ou a três ou mais arestas de uma figura espacial* - Nenhum aluno respondeu a essa questão, demonstrando assim que não sabiam que se tratava do conceito de vértice.

c). *Figura geométrica limitada por uma superfície cilíndrica fechada e por duas seções planas paralelas, ou ainda, corpo roliço e alongado, de diâmetro igual em todo o comprimento* - O aluno “A” associou a um paralelepípedo e os alunos “D” e “E” a um cubo. Os demais disseram que não sabiam. Nenhum deles associou corretamente ao conceito de um cilindro.

d). *Figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo chamado centro* - os alunos “F” e “G” disseram que se tratava de uma pirâmide e os demais não souberam responder. Não houve acerto nesta questão, pois se tratava de uma circunferência.

e). *Figuras geométricas espaciais da família dos prismas cujas faces são quadradas* - Os alunos “F”, “G” e “H” disseram que era um retângulo, os demais deixaram a questão em branco. Nenhum deles associou corretamente ao conceito de cubo.

f). *Figura geométrica espacial que tem as faces paralelas duas a duas* - Os alunos “A” e “E” afirmaram se tratar de um retângulo. O aluno “B”, um paralelogramo. Os alunos “F” e “G” associaram a descrição ao conceito de perpendiculares e o aluno “H” descreveu como sendo um quadrado. Mais uma vez, nenhum deles deu a resposta correta, ou seja, um paralelepípedo.

g). *Projeções que permitem representar um objeto tridimensional no plano bidimensional, ou seja, permitem desenhar uma figura geométrica espacial numa folha de papel* - O aluno “C” escreveu que se tratava de um retângulo e o sujeito “E”, de uma reta. Os demais não sabiam e nem quiseram arriscar uma resposta. Nenhum deles deu a resposta correta, ou seja, que se tratava da perspectiva.

h). *É uma figura formada por duas semi-retas de mesma origem* - o aluno “A” respondeu pirâmide, o “E”, triângulo e o aluno “G” perpendicular. Não houve associação correta ao conceito de ângulo.

i). *Poliedro em que uma das faces é um polígono qualquer e as outras são triângulos com um vértice comum* - todos deixaram a resposta em branco, demonstrando que não sabiam a resposta correta. A descrição trata-se do conceito de pirâmide.

j). *Polígono que tem os quatros ângulos e os quatro lados com a mesma medida* – O aluno “B” respondeu quadrilátero e todos os demais afirmaram se tratar de um quadrado. Praticamente todos conseguiram identificar o conceito de quadrado.

Síntese das Manifestações dos Alunos

Neste item são analisadas algumas dificuldades de aprendizagem dos alunos, envolvidos na primeira atividade. Essas dificuldades muitas vezes passam despercebidas pelo professor no cotidiano escolar e dificultam a construção de conceitos geométricos por parte dos aprendizes. Essa análise busca compreender os desafios da passagem da língua natural, também chamada de ordinária ou cotidiana, para a linguagem matemática, de tal forma que possibilite a apropriação sintática e semântica desta última, de modo que os alunos possam utilizá-la para expressar seus conhecimentos e construir conceitos geométricos.

A linguagem escrita é uma ferramenta importante que participa efetivamente da construção dos conhecimentos matemáticos, entretanto, se essa mesma linguagem não for adequada à formulação de princípios, teoremas, enunciados, conceitos, será co-responsável por inúmeros erros, ambigüidades, mal-entendidos e confusão conceitual. Isso ocorre com frequência, como aconteceu com vários alunos nesta atividade ao associarem a noção geométrica de “ponto” ao sinal gráfico de pontuação gramatical (Alunos “A”, “G” e “J”). O aluno “F” descreveu o cubo como sendo um “dado”; o aluno “B” enunciou paralelepípedo como sendo “pedras pequenas” e o aluno “I” escreveu que pirâmide “é uma forma com um triângulo nas laterais e na frente e no fundo”.

Uma outra questão que merece destaque é a impregnação mútua entre a língua natural e a linguagem matemática, fortemente evidenciada nas descrições da maioria dos sujeitos pesquisados. O aluno “A” descreveu o vértice como uma “linha deitada” e o aluno “G”, uma “linha reta”. Para o aluno “H” ângulo é a “quina” de uma figura geométrica. Por sua vez, o aluno “J” enunciou o triângulo como sendo uma figura que tem três “cantos”. Exemplos como esses mostram as enredadas relações entre ambas as linguagens, constituindo, às vezes, fonte de dificuldade para a elaboração conceitual.

Machado (1998) trata da mediação intrínseca da língua natural (denomina na obra de língua materna) na construção de conhecimentos matemáticos e atribui a falta de clareza sobre esta questão como responsável pelas dificuldades mais frequentes no ensino e na aprendizagem da matemática. Esse autor resume o seu ponto de vista sobre o assunto da seguinte maneira:

Entre a Matemática e a Língua Materna existe uma relação de impregnação mútua. Ao considerarem-se estes dois temas enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo de funções que desempenham, uma complementaridade nas metas que perseguem, uma imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. É necessário reconhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem à superação das dificuldades com o ensino de Matemática. (MACHADO, 1998, p. 10).

Concordando com Machado, na perspectiva desta pesquisa é fundamental reconhecer o papel importante da linguagem do cotidiano na elaboração do conhecimento, pois assim como a linguagem matemática, constitui um sistema de representação, “construídos a partir da realidade e a partir dos quais se constrói o significado dos objetos, das ações, das relações” (p. 83), sem ela não nos construiríamos a nós mesmos enquanto seres humanos.

A dificuldade de articulação da linguagem para descrever os conceitos da geometria plana e da geometria espacial também é notória. A maioria dos alunos conseguiu descrever as figuras planas, entretanto, quando lhe foi solicitada para fazer a mesma coisa em relação às figuras espaciais, demonstrou mais dificuldade. Termos próprios da geometria plana foram utilizados fora do contexto na geometria espacial. Por exemplo, o aluno “A” escreveu que a pirâmide é formada por “três triângulos e (01) quadrado” e o “F” como sendo “uma espécie de triângulo”.

Por outro lado, a construção de conceitos passa necessariamente pela formação de imagens mentais, que é uma forma de representação do conhecimento humano. Para o aluno enunciar, de forma descritiva, as propriedades inerentes a um conceito geométrico, principalmente na ausência desses elementos, como foi o caso, em geral, tem que recorrer às imagens mentais construídas e armazenadas conscientemente do objeto matemático. Embora seja complexo atestar se um aluno tem ou não imagens de uma figura, o fato dele não ser capaz de enunciar suas propriedades pode ser um indício de que aquela figura ainda não foi apreendida pelo sujeito cognitivo de forma satisfatória.

Frege (1980) afirma que os conceitos são construídos pelo próprio aluno através de processos mentais, e, para isso, utiliza livremente a sua imaginação. A linguagem simbólica,

com o objetivo de “substituir” e “suplementar” a língua natural foi uma das grandes contribuições desse autor à construção do pensamento matemático.

Num segundo momento da atividade, os alunos deveriam reconhecer as figuras descritas na linguagem matemática. A maior parte deles teve dificuldade para identificar o conceito dado. Quando foi solicitado que nomeassem a figura geométrica espacial que tem “as faces paralelas duas a duas”, nenhum deles disse se tratar do paralelepípedo, ao contrário, uns afirmaram se tratar de um retângulo; outros, de um paralelogramo ou de uma perpendicular e um deles associou a descrição ao quadrado. Da mesma forma, nenhum dos alunos conseguiu reconhecer o cubo quando se descreveu uma figura geométrica espacial da família dos prismas, cujas faces são quadradas.

As questões aqui mencionadas revelam a extrema necessidade de compreender as relações entre a linguagem cotidiana (tanto na sua forma oral quanto na forma escrita) e a linguagem matemática, como um pressuposto básico para a superação de dificuldades de construção de conceitos geométricos e para estimular a formação de boas imagens mentais, que, neste contexto, são fundamentais para o processo cognitivo de representação de conceitos geométricos.

Nota-se também a dificuldade de abstração dos alunos diante de duas representações que não são semelhantes. De acordo com a abordagem cognitiva de Duval (1993), a conversão de um sistema de representação conceitual para outro é um tipo de transformação muitas vezes não compreendido pelos alunos, pelo fato de não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.

5.1.2 Análise do Desenvolvimento Individual dos Alunos na Segunda Atividade

Esta atividade foi desenvolvida por 12 alunos, divididos em duplas, sendo que um dos alunos de cada uma das duplas recebeu uma folha de papel impresso onde deveria descrever detalhadamente o desenho da figura geométrica que lhe fora dado. Era fundamental que o aluno descrevesse corretamente as características ou propriedades da figura, com base no desenho, usando a linguagem matemática, sem, contudo, mencionar o seu nome, para que o colega de dupla pudesse desenvolver a segunda parte da atividade, que consistia em construir o desenho da mesma figura, apenas com base na descrição dos atributos mencionados na descrição.

A seguir é apresentado o registro do desenvolvimento da atividade de cada uma das duplas:

Dupla 1: (A figura dada foi de uma pirâmide de base quadrada, representada em perspectiva paralela) - O aluno “K” descreveu a figura da seguinte maneira: *“Esta figura possui quatro lados, é pontiaguda, se parece com uma torre de energia, sua parte de baixo é quadrada. Podemos compará-la com um triângulo”*.

Com base na descrição dada, o aluno “V” - colega de equipe - construiu a figura abaixo:

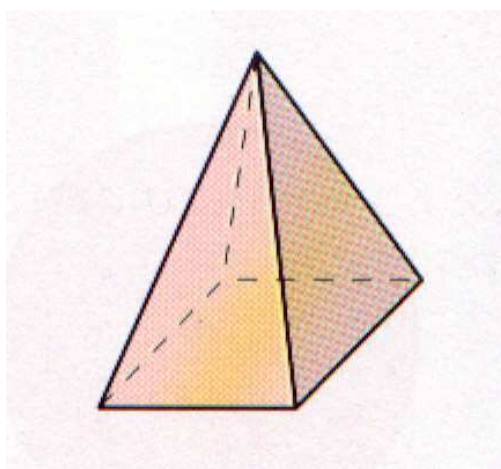


Figura dada - pirâmide de base quadrada

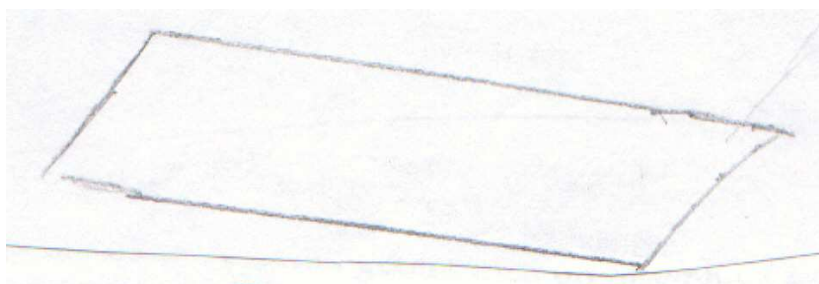


Figura 3 – desenho do aluno “V”

Na descrição, o aluno “K” associa a pirâmide a uma torre de energia. Vários livros de matemática associam sólidos geométricos a objetos da vida real, como é o caso da obra “Matemática 2 – vivência & construção” (2000), de Luiz Roberto Dante, publicado pela

Editora Ática, que relaciona o prisma, a pirâmide, o cone e o cilindro com objetos do cotidiano.

O aluno percebe que a sua base é quadrada, no entanto, considera essa base como um dos “lados” da pirâmide, já que ele afirma que a figura possui quatro lados. Na realidade, alguns livros didáticos também usam a expressão “lado” para denominar a face de uma figura espacial.

O seu companheiro de equipe não conseguiu representar a idéia através de um desenho, pois julgou se tratar de um paralelogramo.

Dupla 2: (A figura dada foi a de um cilindro, representada em perspectiva paralela) - O aluno “L” descreveu a figura da seguinte maneira: *“Esta figura tem como base dois círculos e duas retas paralelas na vertical. Estes círculos ficam em cima e em baixo dessas duas retas paralelas”*.

Com base nesta descrição, o aluno “X” construiu o desenho a seguir:

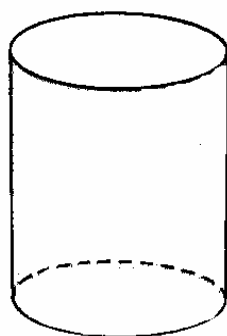


Figura dada – cilindro

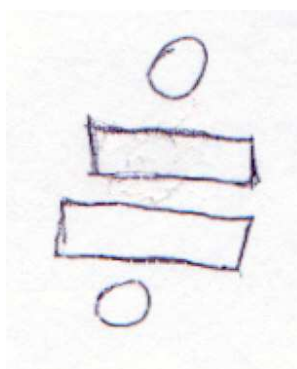


Figura 4 – desenho do aluno “X”

Ao descrever a representação plana de um cilindro, o aluno “L” identificou corretamente as bases da figura, mas confundiu as regras do desenho com o conceito

representado, ao afirmar a existência de “duas retas paralelas na vertical”. Por outro lado, o seu companheiro de dupla interpretou “essas duas retas” como sendo dois retângulos.

É muito comum o aluno confundir o conceito com a sua representação, ou seja, misturar a representação do objeto matemático com o próprio objeto matemático. A distinção entre o conceito e a sua representação, tratada por Duval (1993), é fundamental para a aquisição do conhecimento geométrico. A confusão pode ocorrer também entre o desenho e as regras do desenho, como foi manifestado neste caso.

Dupla 3: (A figura dada foi a de um cilindro, representada em perspectiva paralela) - O aluno “M” descreveu a figura da seguinte forma: *“Este desenho tem um círculo na plataforma e outro em cima. Todo mundo conhece esse desenho. A forma geométrica do desenho é igual a uma lata de óleo”*.

Tomando como base a descrição do companheiro de dupla, o aluno “Y” construiu o desenho a seguir:

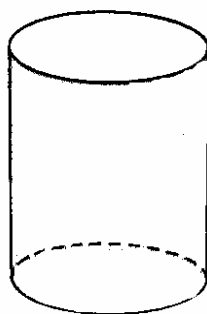


Figura dada – cilindro

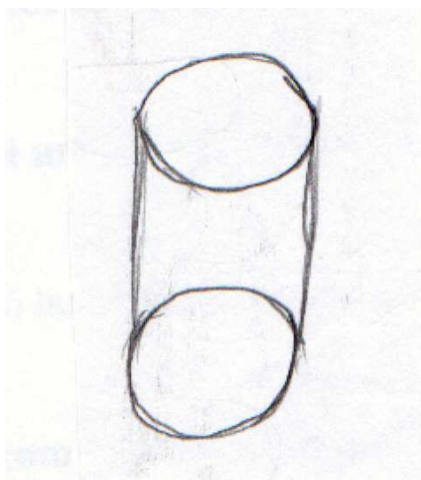


Figura 5 – desenho do aluno “Y”

O aluno que descreveu a figura não forneceu nenhuma propriedade conceitual do cilindro na linguagem matemática. Dizer que a figura é semelhante a uma lata de óleo foi a “senha” para o seu colega fazer o desenho.

Ao construir o desenho, o aluno encarregado desta tarefa, usou traços contínuos para representar os círculos de base, o que pode induzir ao erro de leitura do mesmo. A representação de uma parte não aparente do objeto por um traço contínuo, muitas vezes favorece uma leitura ambígua do desenho, especialmente por parte de pessoas que não estão familiarizadas com aquela figura.

O uso de convenções diferentes para representar um sólido pode gerar equívocos pelo modo impróprio de associar a representação ao objeto representado.

Dupla 4: (A figura dada foi a de um cubo, desenhado em perspectiva paralela) – o aluno “N” descreveu o desenho do seguinte modo: *“Tem seis lados. Tem oito cantos. Tem doze retas”*.

Baseado nesta descrição, aluno “W”, companheiro de dupla, construiu o desenho abaixo:

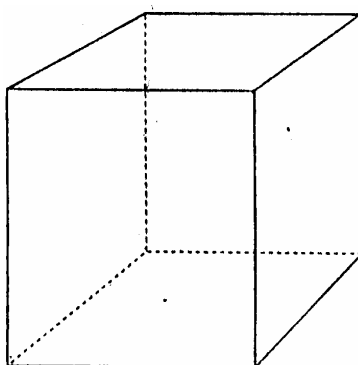


Figura dada – Cubo

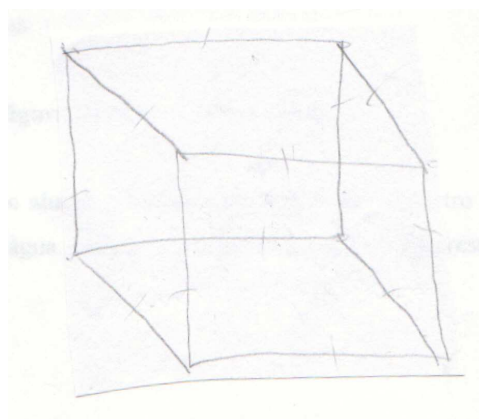


Figura 6 – desenho do sujeito “W”

O aluno menciona corretamente três características particulares do cubo, ou seja, o número de “lados” (faces), o número de “cantos” (vértices) e o número de “retas” (arestas). Com estas informações, o seu companheiro de dupla construiu o desenho de um cubo, porém, para mostrar as arestas, não aparentes do sólido, não fez uso de projeções tracejadas, recurso técnico que ajuda a dar uma imagem mais real daquilo que está sendo visto. Esse problema aparece inclusive em livros didáticos como, por exemplo, no volume 1, da coleção Vitória-Régia – matemática (2000), de Amaral e Alpendre, editado pela IBEP, onde a representação tridimensional das figuras é imprecisa justamente por não adotar a convenção apropriada para revelar arestas não aparentes.

Dupla 5: (a figura dada foi a de uma pirâmide, desenhado em perspectiva paralela) – O aluno “O” descreveu a pirâmide da seguinte forma: *“Ela tem quatro lados, dependendo do modo que eu o vejo, sendo dois lados maiores que se encontram em um ponto no alto. O lado de baixo tem linhas retas e tem quatro pontos. Tem a forma de um triângulo. Essas formas se encontram às vezes no Egito”*.

Valendo-se desta descrição, o aluno “Alfa” construiu o desenho a seguir:

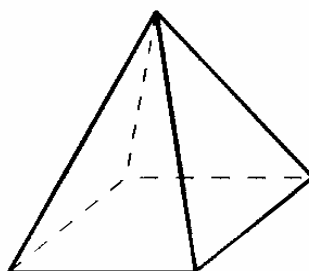


Figura dada – pirâmide de base quadrada

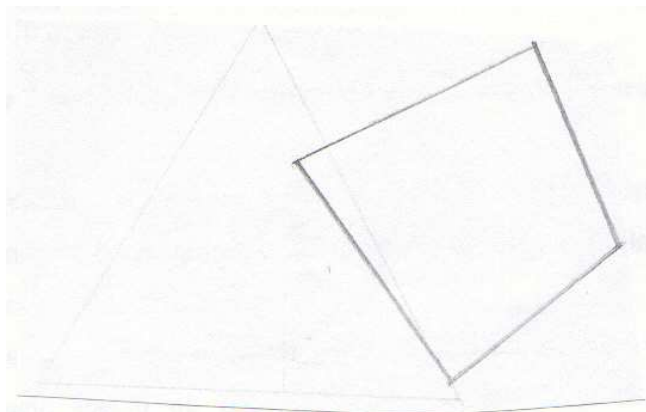


Figura 7 – desenho do aluno “Alfa”

O aluno que descreveu a pirâmide não mencionou os principais atributos da figura. Utilizou a palavra “lado” para se referir às faces da pirâmide e teve dificuldade para decodificar o desenho porque não conseguiu ler a perspectiva. Isso ficou evidente quando afirmou “que os dois lados maiores se encontram em um ponto no alto”. Na realidade, ele estava se referindo às duas faces visíveis. Denominou de “lado de baixo” a base quadrada da pirâmide.

Com base na informação dada, a respeito da figura, o aluno “U” pensou, inicialmente, se tratar de um triângulo, no entanto, devido à dica de que a figura possui quatro lados, apagou o que havia feito e construiu um quadrilátero, conforme mostra o desenho acima. A expressão “lado”, própria da geometria plana, quando utilizada no contexto da geometria espacial pode dificultar a compreensão do conceito estudado, como ocorreu nesta atividade.

A falta de percepção espacial foi demonstrada pelo aluno “O”, ao fazer a descrição do desenho. As faces aparentes da pirâmide, para ele, são maiores que as faces não aparentes; o que não é verdade, pois todas as faces são iguais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil abordam a questão da percepção espacial, especialmente sobre a construção e representação do espaço, em particular, do geométrico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares de Matemática – 1ª a 4ª série do ensino fundamental (2001, p. 69), os alunos devem aprender a ler e a interpretar desenhos geométricos desde as séries iniciais, pois “a exploração de conceitos e procedimentos relativos a espaço e forma é que possibilita ao aluno a construção de relações para a compreensão do espaço a sua volta”.

Por sua vez, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - 5ª a 8ª série do ensino fundamental (1998, p. 65) sinalizam que o ensino de Matemática deve oferecer situações de aprendizagem que levem o aluno a “estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações”.

O aluno deve também ser capaz de fazer a distinção, em contextos variados, “de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria” (Idem, p. 72-73).

Esse mesmo documento (p. 122-123) menciona ainda que, como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve três objetos de natureza diferentes:

- O espaço físico, ele próprio – ou seja, o domínio das materializações;

- A geometria, concebida como modelização desse espaço físico – domínio das figuras geométricas;
- O(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais – domínio das representações gráficas.

A partir desses objetos, esse documento destaca três questões relativas à aprendizagem que estão interligadas e interagem entre si. São elas: o desenvolvimento das habilidades de percepção espacial; a elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo e, por último, a codificação e a decodificação de desenhos.

Essas três questões da aprendizagem são fontes de numerosas dificuldades para muitos alunos, especialmente quando se trata da visualização e representação de conceitos geométricos, como foi detectado nessa atividade.

Por outro lado, o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (2001) ressalta que o desenho é uma forma privilegiada de representação e de trabalhar a percepção do espaço.

Facilmente pode-se concluir que o objeto de estudo desta pesquisa tem interfaces com as questões relacionadas à percepção espacial, codificação e decodificação de desenhos e ao uso da linguagem como forma de expressar conceitos geométricos.

Dupla 6: (a figura dada foi a de um cubo, desenhado em perspectiva paralela) – o aluno “P” fez a descrição da figura do seguinte modo: *“Esse desenho tem de frente quatro lados iguais. Tem dois quadrados. Parece uma caixa d’água. Parece com uma caixa quadrada de presente fechada. É espacial”*.

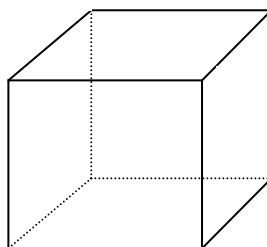


Figura dada – cubo

Baseado nesta descrição, o aluno “Beta” elaborou o desenho abaixo:

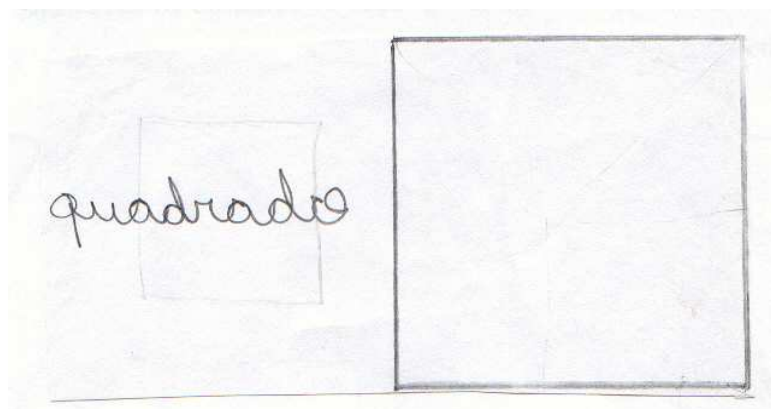


Figura 8 – desenho do aluno “Beta”

O aluno “P”, segundo a teoria de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática, proposta por Duval, demonstra dificuldade para fazer a conversão de um registro de representação do conceito geométrico para outro. O desenho fornecido ao aluno, trata-se de um registro particular, a saber, pertence ao sistema de todos os desenhos, normalmente utilizados na representação de figuras geométricas espaciais. Entretanto, o aluno ao dizer, na língua natural, que a figura “tem dois quadrados”, não reconhece as outras quatro faces do cubo, também formadas por quadrados.

O fato dele relacionar o desenho de um cubo a uma caixa d’água e uma caixa de presente fechada, denota que ele ainda está bastante preso ao aspecto material, e tem dificuldade para abstrair o conceito representado.

O colega, ao ler a descrição, mesmo com a informação de que era uma figura espacial, desenhou uma figura geométrica plana de quatro lados, sinalizando possível dificuldade para fazer a articulação correta entre conceitos da geometria plana e conceitos da geometria espacial.

Síntese das Manifestações dos Alunos

A questão da impregnação entre a língua natural e a linguagem matemática aparece novamente na segunda atividade da pesquisa de campo. O aluno “K” descreveu a pirâmide como sendo “pontiguda” e semelhante a uma “torre de energia”; o aluno “M” associa o cilindro a uma “lata de óleo” e o aluno “P”, por sua vez, afirma que o cubo parece uma “caixa

d'água". Alguns denominaram as faces dos sólidos de "lados"; outros, as arestas de "retas" e um deles denominou a base de "plataforma".

Da análise dessas expressões da língua natural fica patente que os alunos têm dificuldades para enunciar figuras geométricas espaciais num outro sistema de representação; neste particular, na linguagem matemática. A teoria de representações semióticas de Duval e o estudo da impregnação mútua entre a linguagem do cotidiano e linguagem matemática podem ser duas boas ferramentas para o professor compreender como os alunos constroem seus conhecimentos geométricos.

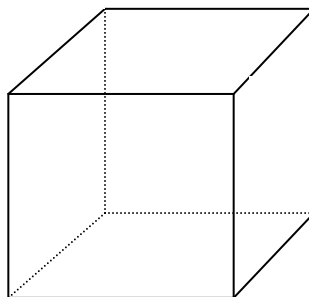
Na perspectiva de Duval (1993), passar de uma representação para outra é mudar a maneira como um conhecimento é representado. Não se trata de uma tarefa simples, pois implica capacidade de mobilização de registros e reconhecer que o registro convertido não é congruente ao anterior, embora conserve a referência ao mesmo objeto matemático.

A elaboração do desenho foi prejudicada, em parte, pela maneira imprecisa de descrever as propriedades das figuras. Apenas os alunos "Y" e "W" conseguiram desenhar as figuras com base na descrição do colega, apesar de não estarem corretas do ponto de vista técnico (Figura 5 e 6).

Nesse caso, o problema está relacionado ao uso da técnica de representação por meio de uma perspectiva, que é um recurso cuja propriedade é despertar no leitor a imagem correspondente ao objeto representado pelo desenho. Do ponto de vista didático, é preciso desenvolver a técnica de representação por uma perspectiva, dentro dos limites inerentes ao ensino fundamental, para que o aluno possa ter condições de codificar e decodificar as informações geométricas expressas pelo desenho.

5.1.3 Análise do Desenvolvimento Individual dos Alunos na Terceira Atividade

Esta atividade foi desenvolvida por cinco alunos, praticamente da mesma estatura. Foi fixado na carteira escolar de cada um deles, no lado esquerdo e na mesma posição, um cubo feito em cartolina. Em seguida, o pesquisador solicitou que eles fizessem um desenho daquele objeto material, segundo aquele ângulo de visão. Na folha de atividade havia um lembrete para que não esquecessem de representar a parte oculta do objeto.



Representação do cubo em perspectiva paralela (desenho esperado)

Da análise das representações planas construídas pelos alunos, pode-se depreender o seguinte:

O aluno “Q” representou apenas as faces do cubo acessíveis à visão, ou seja, ele não usou a perspectiva ou as linhas tracejadas, que dariam uma representação melhor do objeto real. Normalmente os alunos têm dificuldade na construção de desenhos que exigem conhecimento de projeções como técnicas de desenho.

A exemplo do aluno “Q”, muitos estudantes de matemática têm dificuldade no campo da geometria projetiva porque seus professores deixaram de ensinar até mesmo regras básicas para a construção de um desenho geométrico.

Atualmente, os autores de livros didáticos dão pouca importância ao ensino de regras do desenho, quando muito, tratam-nas como se fossem simplesmente convenções impossíveis de serem teorizadas ou, no mínimo, explicáveis aos alunos. No passado, antes do movimento da matemática moderna, os livros destinados ao ensino da matemática traziam algumas regras de representação das figuras geométricas, mas pouco a pouco foram sendo deixadas de lado.

Vale ressaltar que o desenho, ao invés de ser um elemento facilitador da aprendizagem, pode constituir um obstáculo para o aluno se o mesmo não for construído adequadamente ou se houver uso inadequado de suas regras.

Não há, nesse caso, nenhuma afirmação categórica no sentido de que o desenho seja sempre uma fonte de dificuldade para a aprendizagem da geometria. O que se conjectura é que, dependendo de uma série de elementos, tais como, a percepção do leitor, a qualidade técnica do desenho, a ausência ou não de traços pontilhados e a presença de outros elementos gráficos, pode dificultar a aprendizagem ao invés de facilitá-la.

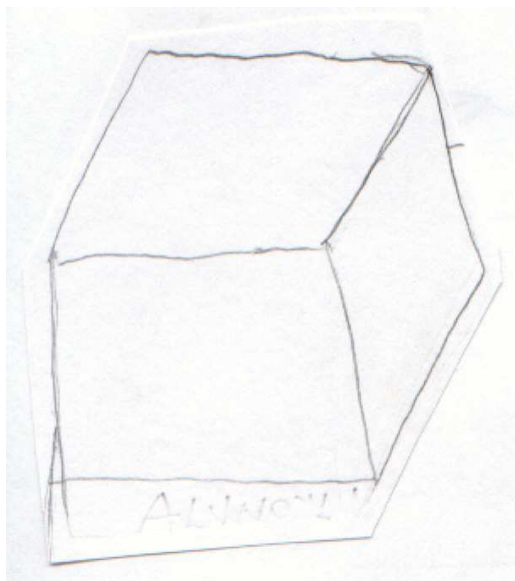


Figura 9 – desenho do aluno “Q”

O aluno “R” construiu o desenho utilizando-se da perspectiva, dando a idéia de profundidade. Ele representou as faces não aparentes da figura, demonstrando, assim, que as faces do cubo não estão no mesmo plano.

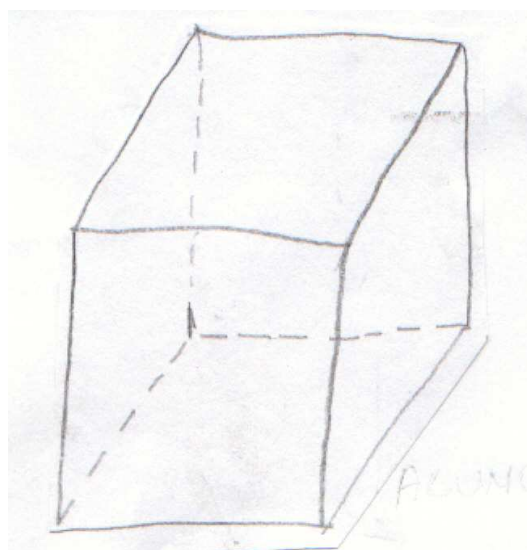


Figura 10 – desenho do aluno “R”

O desenho construído pelo aluno “S” dá uma impressão de profundidade, no entanto, das três faces aparentes do cubo em cartolina, o aluno representou duas, pois a terceira face

que ele construiu como se estivesse acessível à sua visão, na realidade, estava oculta. Isso pode ser facilmente percebido, na comparação do desenho dado com o elaborado por ele.

Pode se deduzir do desenho que o aluno “S” tem um certo conhecimento a respeito de representação plana de figuras geométricas espaciais.

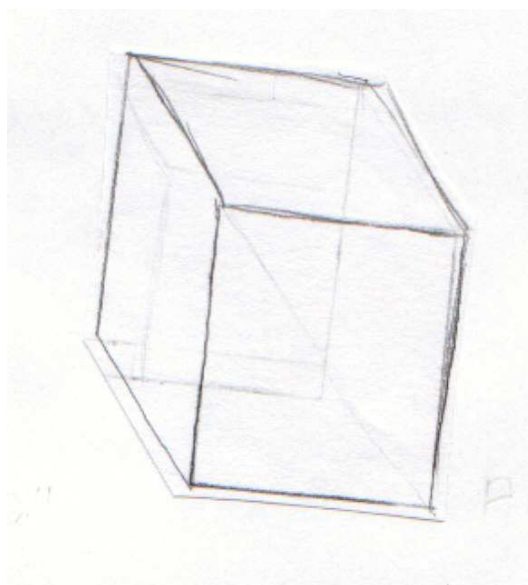


Figura 11 – desenho do aluno “S”

O desenho do aluno “T” mostra as três faces visíveis do cubo, construído em cartolina que estava colocado a sua frente sobre a carteira. Apesar de não guardar proporcionalidade, o desenho dá dimensão de profundidade. Os traços que representam as arestas não aparentes foram feitos numa tonalidade mais clara.

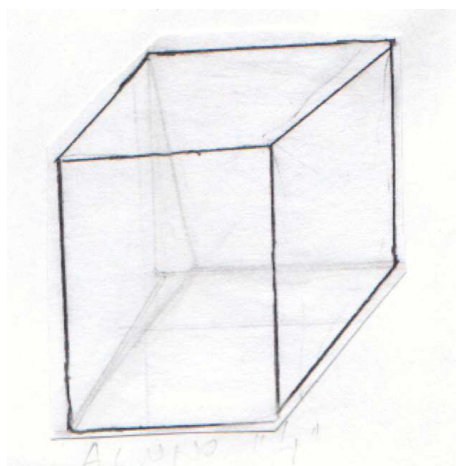


Figura 12 – desenho do aluno “T”

O aluno “U” fez o desenho cubo sem destacar as faces não aparentes, segundo o modelo que lhe foi apresentado e na posição mencionada anteriormente. O aluno utilizou régua, uma ferramenta básica na construção do desenho; e, apesar da inexistência de tracejados para melhor representar as faces ocultas da figura, conseguiu imprimir nele a noção de profundidade.

Infelizmente o ensino de técnicas do desenho quase que desapareceu do ensino de matemática. Isso pode ser facilmente comprovado pela análise dos livros didáticos. Praticamente nenhum deles traz noções de construção gráfica e do domínio de instrumentos de desenho como a régua, o compasso, o transferidor e o esquadro. É um engodo supor que os aspectos técnicos do desenho serão apreendidos de uma forma espontânea em nível da educação básica, sobretudo, a da perspectiva. Diante desse fato, os alunos geralmente têm dificuldade para construir o desenho e também para decodificar uma representação em perspectiva.

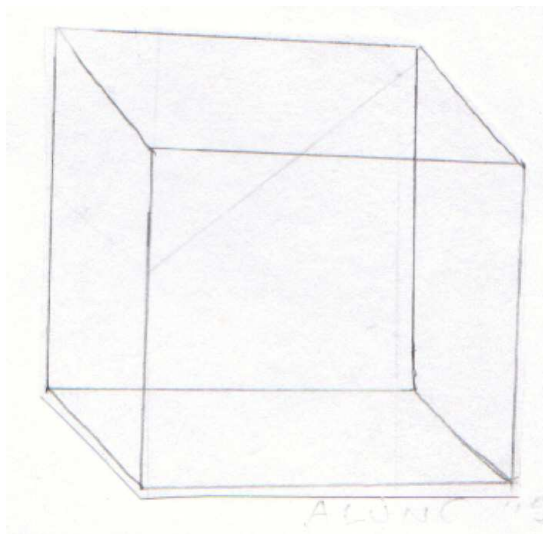


Figura 13 – desenho do aluno “U”

Para encerrar esta atividade, o pesquisador solicitou que cada um dos cinco alunos fizesse uma descrição detalhada do objeto material que estava fixado sobre a carteira, utilizando a linguagem geométrica. O resultado foi o seguinte:

Aluno “Q” - “Ele está à direita, tem seis lados todos iguais. É azul e está sobre a mesa na ponta. Só aparece três lados. Deve ter 10 centímetros”.

Aluno “R” - “O objeto possui quatro ângulos, doze arestas. Possui altura, largura e diâmetro”.

Aluno “S” - “É um cubo formado por seis quadrados iguais, exatamente seis partes iguais”.

Aluno “T” - “É um cubo com seis lados iguais”.

Aluno “U” - “Este objeto parece com um quadrado, mas tem seis lados”.

Síntese das Manifestações dos Alunos

Os alunos que participaram dessa atividade não demonstraram familiaridade com as propriedades conceituais do cubo. Ainda que não estivesse sendo exigido o uso da linguagem matemática na descrição, esperava-se que o modelo material apresentado fosse descrito com mais precisão. Alguns deles não conseguiram destacar a dimensão espacial, do cubo, limitaram-se a afirmar que se tratava de uma figura semelhante ao quadrado ou que era formada por seis quadrados. Demonstraram também pouca habilidade na construção do desenho.

Fainguelernt (1999) afirma que o conceito geométrico é ligado a uma definição matemática; tem diversos atributos relevantes que devem ser reconhecidos em qualquer contexto em que ele esteja inserido e que, para construí-lo, é preciso entender as inter-relações entre seus elementos. Além disso, ressalta que o mesmo é sempre uma síntese de vários outros conceitos. Por exemplo, o conceito de pirâmide é formado por outros “sub-conceitos”, tais como: de triângulos, de vértices, de arestas, de faces.

Vale ressaltar que todo e qualquer conceito é formado por um certo número de invariantes, ou seja, são elementos que se encontram presentes em todos os casos particulares do mesmo. Entre os invariantes do conceito de cubo, os alunos poderiam ter citados números de faces, de arestas, de vértices, de ângulos retos das faces quadradas, de diedros, de triedros, de diagonais principais e secundárias, entre outros.

Cavalca (1998) realizou uma pesquisa com estudantes universitários e chegou à conclusão de que muitos deles tinham dificuldades de aprendizagem na passagem da geometria analítica plana para a geometria analítica espacial porque não tinham capacidade de

visão espacial e nem sabiam relacionar adequadamente objetos tridimensionais às suas representações planas.

A dificuldade de projetar a terceira dimensão sobre uma superfície bidimensional e de fazer a leitura dessa representação em perspectiva tem impedido a construção de conceitos geométricos espaciais, não só no ensino superior mas também ao nível da educação básica.

Geralmente os alunos não conseguem construir ou ler um desenho geométrico, especialmente quando se trata de figuras tridimensionais, devido a sua própria natureza, ou seja, de ser uma generalização do conceito representado e existente no mundo da abstração e de ser sempre uma representação limitada daquele conceito. Além disso, não estão familiarizados com a técnica de perspectiva.

Gravina (1996) constatou que muitos alunos que ingressaram no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, além de demonstrarem não ter atingido os níveis mentais de dedução e de rigor em geometria, confundiam propriedades do desenho de figuras geométricas tridimensionais com as propriedades do conceito geométrico representado.

Outro problema detectado na pesquisa foi a limitação imposta pelo tratamento estereotipado de certos desenhos geométricos na aprendizagem da geometria. Em outras palavras, o fato de livros didáticos e mesmo o professor em sala de aula desenhar determinadas figuras geométricas sempre na mesma posição em relação ao plano pode interferir negativamente na compreensão dos conceitos. Gravina aponta que esse padrão de representação pode passar a idéia de que existe uma única posição em relação ao plano para representar graficamente um conceito geométrico.

Existe uma convicção de que os desenhos são supostamente apreendidos pelos alunos de uma forma quase espontânea, tanto no que se refere a sua produção como a sua leitura, em nível do ensino fundamental. Audibert (1990), no entanto, contraria essa idéia ao dizer que há uma série de detalhes gráficos do desenho cujo significado não é evidente ao aluno. Em outras palavras, existem determinadas regras de construção de desenhos que não podem ser apreendidas implicitamente.

Por esta razão, o referido pesquisador defende o ensino de regras básicas para a realização de um desenho em nível de ensino fundamental, incluindo aí a representação em perspectiva. Segundo Pais (2000, p. 196), “a natureza experimental do conhecimento geométrico exige o domínio de uma técnica mínima e de um relativo domínio dos instrumentos de desenhos tais como a régua, o compasso, o transferidor e o esquadro”.

Na realidade, estes autores não estão defendendo a implantação do desenho técnico no ensino fundamental, entretanto, entendem que a ausência do ensino de algumas regras do desenho, nesta etapa da educação básica, dificulta a aprendizagem da geometria. Pelo menos as questões referentes às regras de representação plana, ao uso adequado de pontilhados, à variação dos ângulos de fuga e das retas oblíquas, entre outras, deveriam ser ensinadas neste nível de escolaridade.

As questões pedagógicas relacionados ao uso do desenho na geometria espacial também são assuntos abordados por Parzyz (1988), destacando as relações existentes entre a percepção visual do aluno e a essência do saber geométrico, ou seja, entre aquilo que o aluno vê e o que ele sabe. Baldy (1987), um pesquisador francês, também investigou alguns aspectos importantes da representação, através da análise da leitura de desenhos em perspectiva paralela - aquela que preserva, no desenho, o paralelismo existente no conceito representado - por adultos de cursos profissionalizantes.

Lima (1996), ao ressaltar o uso do desenho como representação de uma demonstração geométrica, diz que este instrumento cognitivo funciona como um mapa, um guia; e interage com o raciocínio, potencializando-o e agilizando-o.

Esse autor mostra que quanto mais completo for o desenho tanto mais útil será em relação aos objetivos a que se destina. Se estiver ocultando dados essenciais, ele pode induzir ao erro, “como um falso mapa da mina despista os caçadores da arca do tesouro” (p. 22).

Para que o desenho possa ser utilizado como um instrumento cognitivo numa demonstração geométrica, Lima enfatiza que esse recurso didático deve apresentar as seguintes características: simplicidade, clareza, completude e precisão.

Apesar desta pesquisa não estar voltada para a utilização do desenho no contexto da demonstração geométrica, podem-se considerar necessárias estas mesmas características na representação plana de figuras geométricas espaciais.

O desenho é largamente utilizado nos dias atuais para representar conceitos, noções ou apenas idéias na aprendizagem da geometria. A descoberta da técnica da perspectiva, que coloca em evidência a terceira dimensão do espaço, deu um impulso ainda maior ao uso do desenho, não só na matemática mas também em outras áreas do conhecimento humano.

Por outro lado, o uso inadequado deste recurso didático pode resultar em uma inversão didática em relação à sua finalidade inicial, ou seja, o desenho passa a ser uma fonte de dificuldade à aprendizagem da geometria.

5.1.4 Análise do Desenvolvimento Individual dos Alunos na Quarta Atividade

Esta atividade foi desenvolvida na sala de informática da escola. Os alunos que participaram desse momento da pesquisa foram os mesmos da atividade anterior, para que o pesquisador tivesse oportunidade de analisar o desenvolvimento individual deles com relação à visualização da figura geométrica de um cubo, em dois momentos: no cenário das representações estáticas (o desenho numa folha de papel) e no cenário dinâmico da informática (a tela do computador).

Apesar dos alunos não terem familiaridade com o computador, pois a sala de informática havia sido inaugurada recentemente, não ficaram apreensivos e nem demonstraram nervosismo. Eles já tinham tido algumas aulas naquele laboratório, razão pelo qual tinham um certo domínio básico da máquina.

Cada um deles recebeu um disquete contendo o programa “Internet Space Builder”, que é um software que cria ambientes virtuais para a internet. Com esse programa, é possível visualizar uma figura tridimensional vistas de vários ângulos de visão.

A tarefa consistia em identificar as faces do cubo, com a ajuda de três câmeras. Cada uma delas mostrava o cubo numa perspectiva, ou seja, sob um ponto de vista. Para facilitar o trabalho do aluno, as faces eram identificáveis por cores, bastava clicar na câmera que ela mostrava o objeto de estudo daquela posição.

O objetivo não era verificar o grau de acerto dos alunos, mas, prioritariamente, compreender suas expressões, suas manifestações diante da mídia informática, um recurso tecnológico que pode favorecer mudanças ou avanços do conhecimento e até mesmo novas propostas pedagógicas.

Síntese das Manifestações dos Alunos

Dos cinco alunos, dois terminaram a atividade rapidamente e com 100% de acerto. Os outros três demoraram um pouco mais para visualizar o cubo e anotar quais as faces que estavam sendo vistas segundo a posição de cada uma das três câmeras, entretanto, também concluíram a tarefa satisfatoriamente. Isso quer dizer que a maioria conseguiu identificar todas as faces do cubo sobre três ângulos de visão diferentes.

Quando o pesquisador perguntou a opinião de cada um deles sobre a atividade de visualização do cubo em ambiente informatizado, foram unânimes na aprovação da metodologia adotada.

O aluno “Q” (ver Anexo F, quadro nº 01) usou a expressão “para mim foi melhor”, dando a idéia de que preferia trabalhar com uma figura espacial no computador a fazê-lo, através dos recursos, tradicionalmente, utilizados em sala de aula. Destaca positivamente a possibilidade de mexer a figura na tela do computador. Além disso, enfatiza que não tem como ver todas as faces do cubo se a figura for desenhada numa folha de papel.

O aluno “R” (ver Anexo F, quadro nº 02) destaca a possibilidade de movimento permitido pelo computador. Ao relatar que o “cubo foi girando” denota que a figura descrevia movimentos circulares na tela do computador e por isso facilitava a percepção das suas faces. Uma expressão interessante utilizada por esse aluno foi a seguinte: “fui descobrindo”; no sentido de que à medida que a figura se movimentava, ele próprio apreendia o objeto progressivamente. É como se estivesse afirmando, a apreensão total do cubo ia ocorrendo na proporção que percebia cada uma das suas faces.

O aluno “S” (ver Anexo F, quadro nº 03) afirma categoricamente que “foi mais fácil visualizar o cubo com o computador”, numa demonstração de que de outra forma seria mais difícil desenvolver a atividade solicitada pelo pesquisador, ou seja, da maneira como trabalhou na atividade anterior: com lápis e papel. Ele concluiu seus comentários enfatizando que é melhor aprender geometria num ambiente informatizado do que apenas utilizando os recursos pedagógicos tradicionais.

O aluno “T” (ver Anexo F, quadro nº 04) concorda com seus colegas entrevistados anteriormente, ao mencionar que “o problema ficou mais fácil”, dando a entender que a visualização do cubo e a interpretação daquilo que estava sendo visto foram facilitadas pelo computador. Destaca também a possibilidade de movimentar o objeto e vê-lo de perspectivas diferentes. Ele cita explicitamente que é mais fácil aprender geometria com a ajuda do computador do que apenas usando lápis e uma folha de papel.

O último aluno entrevistado, de codinome “U” (ver Anexo F, quadro nº 05), ressalta dois recursos que o computador pode oferecer: a interatividade e o movimento e declara que, se o cubo estivesse sido desenhado numa folha de papel, levaria mais tempo para completar a mesma atividade. Isso quer dizer que, do ponto de vista desse aluno, o computador pode, inclusive, otimizar o tempo.

Em resumo, pelo menos três questões podem ser levantadas a partir dos discursos desses alunos com relação ao ensino e a aprendizagem da geometria em ambientes informatizados: 1) mudanças de paradigmas; 2) interatividade, e 3) movimento (linguagem dinâmica).

Com relação ao primeiro ponto levantado, Marcelo Borba¹⁹, na obra organizada por Bicudo (1999, p. 294) enfatiza o papel das mídias em geral no processo de construção do conhecimento e, particularmente, o papel da informática no desenvolvimento do pensamento matemático. Baseado numa interpretação das idéias de Pierre-Lévy (1993), esse autor ressalta que “o pensamento humano é reorganizado quando uma nova mídia, como as mídias informáticas, é incorporada ao cotidiano dos estudantes”, e que sempre ocorre mudanças paradigmáticas diante de um novo cenário tecnológico.

Com certeza, a introdução do computador na escola vai impor mudanças na prática do professor, nas dinâmicas de sala de aula, no currículo e na própria maneira de pensar do aluno. Isso é facilmente percebido pela leitura de diversos autores sobre as novas tecnologias, entre eles, Lévy (1993), cujas idéias também são referenciais para esta pesquisa, e pela própria prática pedagógica no seu dia-a-dia.

Ao estudar a introdução do computador no ensino da matemática, particularmente, na aprendizagem da geometria, faz-se necessário procurar compreender melhor as noções de interatividade e de movimento (segundo e terceiro aspectos mencionados anteriormente) presentes neste contexto e muito bem explicitados pelos alunos que participaram desta última atividade.

Na era da imagem e do movimento, a geometria pode ser melhor explorada em sala de aula, através do uso de computadores e programas que tornam esse ensino mais dinâmico, aproveitando, inclusive, a experiência dos alunos em vídeo-games.

O sucesso do uso do computador, como uma tecnologia capaz de ampliar as condições de aprendizagem, depende da forma como ocorre a relação entre o usuário e as informações contidas nos programas utilizados. Acredita-se que quanto mais interativa for esta relação, maior será a chance de elaborar novos conhecimentos.

Este é um dos principais argumentos para o estudo da interatividade no contexto da inserção dos computadores no ensino e na aprendizagem da geometria. Por esse motivo, sua análise torna-se, ainda, mais pertinente para a caracterização do computador como um recurso didático, pela possibilidade do saber aprendido tornar-se mais significativo, na medida em que aumentam as oportunidades de interação do usuário com os dados oferecidos pelo programa.

Nesse sentido, o estudo da interatividade contribui para uma melhor compreensão do processo de aprendizagem. Se as ações do sujeito cognitivo, diante do computador, não forem correspondidas, de maneira satisfatória, pela configuração do programa, em questão, a

¹⁹ Coordenador do Grupo de Pesquisa em Informática (GPIMEM), outras Mídias e Educação Matemática; do Departamento de Matemática - UNESP, Rio Claro, São Paulo.

aprendizagem tende a igualar-se com os suportes mais estáticos, tais como, as páginas do livro.

Por outro lado, o movimento também é uma noção didática comumente associada à interatividade e pode ser definida como uma operação sobre uma representação ou um modelo de um evento, fenômeno ou objeto. Em outras palavras, trata-se de um momento específico de uma situação de aprendizagem na qual o sujeito tem possibilidade de perceber e de manipular parâmetros, invariantes ou aspectos que intervêm diretamente na elaboração dos conceitos e dos conhecimentos em questão.

As noções abordadas, acima, constituem uma das dimensões do fenômeno estudado nesta pesquisa, podendo futuramente vir a ser parte de uma investigação mais ampla sobre as manifestações práticas das noções de interatividade e de movimento na aprendizagem da geometria.

No processo de visualização e representação de figuras tridimensionais em ambientes computacionais, os recursos da interatividade e de movimento contribuem sobremaneira para a expansão do conhecimento geométrico.

Esta reflexão é oportuna, especialmente neste momento em que se pretende mostrar a importância e a conveniência de desenvolver a aprendizagem escolar em ambientes informatizados.

5.2 Em Busca da Convergência dos Resultados

O fenômeno da construção de conceitos geométricos em situações de aprendizagem da geometria que exijam uma correta articulação entre conceitos da geometria plana e da geometria espacial, e ainda, entre a dimensão conceitual e a sua representação, como já foram detalhados anteriormente, é investigado em sujeitos que se encontram na fase de conclusão do ensino fundamental. Isso pressupõe, pelo menos em tese, que os mesmos já estejam num estágio mais avançado do processo de construção das idealidades matemáticas, particularmente, com relação à visualização, à leitura e à representação de figuras geométricas.

Para compreender essas dificuldades, este pesquisador explicita, nesse momento, as convergências detectadas, mediante as análises e respectivas interpretações a partir das unidades de significado que constam dos Anexos A ao F.

5.2.1 Primeiro Nível de Convergência: confluências temáticas

A análise dos dados é feita mediante um processo contínuo de interpretações e convergências de resultados das unidades de significado, sempre na direção da interrogação formulada.

Na busca dessa convergência, as unidades de significado dos discursos analisados nesta pesquisa, perfazendo o total de 113 asserções, foram cruzadas entre si e confluíram para nove temáticas, ou seja, nove convergências relacionadas à interrogação do fenômeno:

a) Influência da língua natural

Foram agrupadas nesta temática aquelas unidades marcadas por uma forte influência da linguagem não formal da matemática na descrição de conceitos geométricos. Como exemplo, pode ser citada a unidade “35F” onde o sujeito assim se expressa: “vértice é uma *linha deitada*”, ou ainda, a unidade “49H” que expressa o conceito de ângulo da seguinte forma: “ângulo é a *quina* de uma figura”. Tanto a expressão “linha deitada” como a palavra “quina”, são termos provenientes da linguagem do cotidiano que podem constituir obstáculos à correta compreensão dos respectivos conceitos.

A influência da língua natural no modo de descrever a figura geométrica na linguagem matemática ficou evidenciada também no discurso do aluno “A” (4A), quando afirma que o retângulo é formado por duas “linhas do mesmo tamanho”, ao invés de segmentos de retas.

O mesmo problema aparece quando o aluno passa da língua natural para a escrita simbólica. Apesar de ambas terem natureza semiótica e até uma função de complementaridade no processo de representação de um objeto matemático, a passagem de um registro para outro não é espontâneo. Com base nos estudos de Duval (1993) sobre representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão matemática, é possível afirmar que o sucesso do aluno na aprendizagem de conceitos geométricos, em qualquer um dos casos citados acima, dependerá do movimento contínuo de alternância entre o conceito e as suas diversas maneiras de representação, incluindo a língua natural, a linguagem matemática, a escrita simbólica e outras.

De acordo com Gardner (1994), autor da teoria das inteligências múltiplas, a linguagem é o foco central da atenção de alguns domínios de especialização, principalmente

para o escritor e o poeta; porém, com maior frequência, ela aparece como uma ferramenta de outros domínios, como é o caso do ensino de matemática.

Com base nessa teoria, é possível conjecturar que se os alunos desenvolverem satisfatoriamente suas inteligências múltiplas, em particular, a lógico-matemática, a espacial e a lingüística terão menos dificuldades para estabelecerem relações entre o conceito e as suas diferentes maneiras de representação.

Apesar da teoria das inteligências múltiplas ser relativamente nova e não ter ainda um alto grau de operacionalização e instrumentação que permita identificar claramente cada tipo de inteligência na prática; é possível abordá-la do ponto de vista dos interesses dos alunos por cada uma de suas áreas, como também, da perspectiva dos estilos e preferências de aprendizagem deles.

b) Conflito de linguagem: plana x espacial

Nessa temática, foram reunidas todas as unidades que revelam algum tipo de dificuldade de articulação entre a linguagem da geometria plana e da geometria espacial, ou seja, o aluno usa indevidamente termos da geometria plana para descrever figuras geométricas tridimensionais e vice-versa. Isso revela o verdadeiro problema, a falta de compreensão conceitual. Por exemplo, na unidade “25D”, o sujeito afirma que “arestas são *lados* de um triângulo”. *Arestas* é um termo próprio da geometria espacial, enquanto que a expressão *lados* esta muito mais relacionada à geometria plana.

Os parâmetros curriculares nacionais são enfáticos em defenderem a articulação entre os conceitos da geometria plana e os da geometria espacial desde as séries iniciais. A dificuldade dessa articulação pode ser proveniente da forte ênfase que é dada ao estudo de figuras planas no ensino fundamental.

O aluno “B” (12B) demonstra o mesmo problema quando afirma que “o cubo é um quadrado de vários lados”. Ocorre que o conceito de cubo não foi criado do nada, ele tem componentes que foram tomados de outros conceitos. Nesse caso específico, o cubo tomou “emprestado” os conceitos de quadrado, de arestas, de ângulos e de outros. Pelo fato do aluno não entender que esses “sub-conceitos” do cubo são inseparáveis, apesar de distintos, cometem erros conceituais dessa maneira. Não dá para afirmar, portanto, que o cubo é um quadrado ou um conjunto de arestas.

Na visão de Deleuze e Guattari (1992), a compreensão de um conceito sempre remete à compreensão de outros conceitos. Parece evidente, portanto, que, no transcorrer do

processo de aprendizagem, o sujeito precise partir de um determinado nível de compreensão de alguns conceitos preliminares para esclarecer outras idéias, noções e outros conceitos. Mas, essa estratégia, mesmo necessária, não significa que os conceitos preliminares, componentes de outros conceitos, tenham consistência em si próprios. Na opinião desses autores, qualquer conceito sempre é “relativo a seus próprios componentes, aos outros conceitos, ao plano a partir do qual se delimita, aos problemas que se supõe deva resolver [...]” (p. 33).

c) Generalizações apressadas

Essa confluência temática está bastante relacionada ao senso comum, com generalizações fáceis e imediatas. Em outras palavras, a atitude natural, alimentada pelas chamadas intuições primeiras ou convicções naturais, formadas acerca do mundo, sobrepuja a atitude reflexiva e pode ofuscar a razão na busca de novos conhecimentos. A unidade de significado “3B” retrata muito bem esse aspecto: “a pirâmide é um triângulo”. Se o aluno adotasse uma postura reflexiva, veria que apenas as faces da pirâmide são formadas por triângulos. As generalizações apressadas e inconsistentes são fontes de dificuldade para a construção de conceitos geométricos.

d) Confusão entre figuras geométricas planas e espaciais

Essa temática refere-se ao recurso da comparação entre figuras geométricas planas e espaciais que alguns alunos utilizaram na descrição dos conceitos solicitados. Na unidade “72K”, o sujeito relata que a pirâmide podia ser comparada a um triângulo e na unidade “12B”, o sujeito afirma que “o cubo é um quadrado de vários lados”.

Comparar é uma atitude própria do ser humano, e, em muitos casos, necessária. Os livros didáticos de matemática utilizam-se desse recurso com frequência, no entanto, um comparação irrefletida dificulta a elaboração conceitual e, ao invés de ajudar, dificulta a compreensão matemática.

Apesar dos alunos serem habitantes de um mundo cujo modelo é tridimensional, paradoxalmente, a maioria demonstra enorme dificuldade ao expressar adequadamente o seu pensamento acerca das formas geométricas espaciais. Nem mesmo o fato de existirem variados modelos materiais de figuras geométricas do espaço ao alcance deles - que é um campo propício ao desenvolvimento da percepção - tem evitado confusões entre conceitos da dimensão plana e espacial.

e) Dificuldade para reconhecer elementos conceituais

Ao analisar as unidades de significado, ficou evidente que algumas delas revelam que os alunos tinham uma certa dificuldade para reconhecer ou identificar elementos característicos do conceito. Por exemplo, na unidade “5A”, o sujeito declara que “o cubo é formado por seis quadrados do mesmo tamanho”. Os elementos conceituais, do cubo, tais como, número de faces e de arestas, tipo de ângulos, a forma geométrica das faces e outros, não foram mencionados na descrição.

O desenho é uma forma de representação do conceito geométrico. A leitura deste tipo de representação muitas vezes exige o conhecimento da noção de projeção ou perspectiva, além de algumas técnicas e regras do desenho. Por isso, determinados alunos têm dificuldade para identificar as invariantes conceituais, a partir da leitura do desenho, como foi o caso do sujeito “P”, na unidade “97P”, ao descrever o cubo como sendo uma figura que “tem de frente quatro lados iguais”.

Para o aluno construir um conceito geométrico, como por exemplo, o de um cubo, é preciso recorrer à noção de representação. Damm (2000, p. 137) afirma, com base nos estudos de Duval, que “não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação”.

Ressalta ainda que experiências em salas de aula e várias pesquisas realizadas sobre a compreensão do funcionamento dos registros de representações semióticas, geralmente utilizadas na aprendizagem da geometria, sobretudo o registro da língua natural (os enunciados), o registro figural (desenho) e o registro simbólico (escrita algébrica, as fórmulas), revelam dificuldades de aprendizagem na construção de representações, e, por isso, deveria receber atenção especial dos professores e pesquisadores da educação matemática, pois a matemática trabalha com objetos abstratos, necessitando, para sua apreensão, do uso de maior número possível de representações.

Apreender uma figura geométrica implica a capacidade de reconhecer seus elementos conceituais, e, para isso, quanto mais contato o aluno tiver com as diferentes maneiras de representar o objeto matemático mais facilidade ele terá para construir o conhecimento desejado.

f) Dificuldade de articulação entre os estágios das operações concretas e das operações abstratas

Alguns alunos relacionaram o conceito geométrico com o modelo (objeto material) e tiveram dificuldade para percorrer o caminho concreto-abstrato-concreto, como ocorreu com o sujeito F, na unidade “39F”, ao afirmar que “cubo é uma espécie de dado”. Por certo, esse aluno já manipulou um modelo material na forma de um cubo, conhecido como dado. Sair do conhecimento experimental e passar para o campo da abstração demonstrou ser um desafio para ele. Acontece que, mesmo os alunos das séries finais do ensino fundamental, muitas vezes demonstram dificuldades na articulação entre os estágios das operações concretas e das operações abstratas.

Segundo Gravina e Santarosa (1999, p. 74), a teoria de desenvolvimento cognitivo de J. Piaget mostra que “toda a aprendizagem depende fundamentalmente de ações coordenadas do sujeito, quer sejam de caráter concreto ou caráter abstrato”. Embora Piaget²⁰ (1974) não estivesse preocupado diretamente em estudar a aprendizagem escolar, mas, sim, o processo evolutivo das estruturas cognitivas, as suas pesquisas revelam, por exemplo, como o aluno chega à generalização e à abstração conceitual.

Essa teoria destaca três estágios básicos do processo evolutivo das estruturas cognitivas da criança, particularmente relacionados à construção de esquemas de natureza lógico-matemática: no primeiro estágio, denominado de pré-operatório, o aprendiz apoia-se em ações sensório-motor sobre modelos materiais e através de exercícios de repetição espontânea busca a generalização da ação; no segundo estágio, chamado operatório, a criança ainda depende de modelos concretos para que as ações se constituam em conceitos, mas já consegue fazer as primeiras operações mentais com vista à abstração e generalidade conceitual; e no terceiro e último, estágio das operações sobre objetos abstratos, a criança finalmente atinge o pensamento puramente abstrato, sem a necessidade de recorrer às ações concretas ou de modelos materiais.

Piaget ressalta que só faz sentido falar de aprendizagem na medida em que o conhecimento é elaborado em função da experiência, seja ela do tipo físico ou do tipo lógico-matemático ou dos dois. Esclarece, ainda, que é a representação mental que permite a transição da ação sensório-motor à ação abstrata.

Como os conceitos geométricos são eminentemente abstratos, as suas apreensões pela consciência do sujeito cognitivo ocorrem através de operações e das relações estabelecidas entre o concreto e o abstrato. Esse processo envolve necessariamente as habilidades de percepção, visualização e representação.

²⁰ PIAGET, J. Aprendizagem e Conhecimento. In: PIAGET, J. & GRÉCO, P. **Aprendizagem e Conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

g) O computador como mediador da aprendizagem

Todos os alunos entrevistados disseram, de alguma forma, que o computador, entendido como sendo a máquina e os programas computacionais, facilita o desenvolvimento da atividade solicitada e, conseqüentemente, contribui para uma aprendizagem significativa. Essa idéia pode ser ilustrada através da unidade “105S” onde o sujeito diz que “é melhor aprender geometria com o computador”. A expressão “é melhor” denota que já vivenciou outras formas de aprender geometria, no entanto, essa última superou as demais.

A receptividade dos cinco alunos em relação à aprendizagem da geometria em ambientes informatizados e os resultados positivos alcançados no desenvolvimento da tarefa revelam que o computador pode ser um recurso tecnológico importante para a construção e disseminação do conhecimento geométrico.

Para o aluno “T”, com a mediação do computador, o problema que ele tinha para resolver ficou mais fácil, e concluiu relatando que “tem mais possibilidade trabalhar com o computador do que numa folha de papel” (109T). A constatação de que a utilização dos aplicativos computacionais poderiam enriquecer o processo ensino-aprendizagem e desenvolver várias habilidades nos estudantes, e ainda, tornar a relação do aluno com a matemática mais próxima, atrativa e humana, foi explicitada e enfatizada por Papert (1988, 1994).

Nos discursos dos alunos (ver Anexo F, quadros de 01 a 05) está implícita a idéia de que o computador, como uma interface para a aprendizagem da geometria, é uma forma inovadora de aprender. É preciso, no entanto, manter cautela a esse respeito, pois, dependendo da forma como a máquina é utilizada, pode reforçar ainda mais os paradigmas do ensino tradicional.

Lévy (1993, p. 102) destaca que os computadores, no contexto das novas tecnologias, “são redes de interfaces abertas a novas conexões, imprevisíveis, que podem transformar radicalmente seu significado e uso”. Esse autor ressalta que a principal tendência desse domínio é a digitalização (conectar o cinema, a radiotelevisão, o jornalismo, as telecomunicações, a música, a informática e outras técnicas de comunicação e processamento de informações), daí a importância da incorporação dessa tecnologia também na sala de aula.

h) O computador favorece a visualização

As unidades que confluíram para essa temática destacam que o computador oferece um ambiente favorável ao desenvolvimento da habilidade de visualização. Na unidade “102S”, por exemplo, o aluno ressalta que “foi mais fácil visualizar o cubo com o computador”. Ao fazer essa afirmação, logicamente ele estava comparando a atividade desenvolvida na sala de informática com aquela realizada anteriormente, onde só podia utilizar recursos tradicionais, como lápis e papel. O aluno “U” também expressou esse mesmo pensamento: “se fosse numa folha de papel seria mais difícil encontrar todos os lado do cubo” (113U).

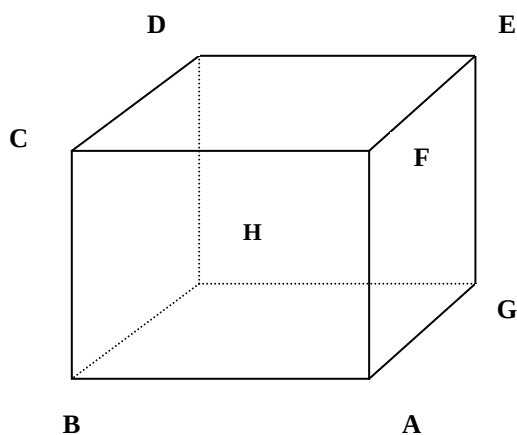


Figura 14 – cubo em perspectiva paralela

Este desenho acima representa o conceito de cubo através de uma perspectiva usual, que recebe o nome de perspectiva paralela isométrica. O cubo contém oito vértices os quais podem ser facilmente percebidos quando se manipula um objeto material.

Quando o aluno manipula um cubo em cartolina, por exemplo, ele pode perceber rapidamente a existência dos oito vértices, entretanto, na ausência de um objeto material, contemplando a leitura da ilustração acima, e, supondo ainda que o aluno não tenha o domínio do conceito de cubo, a percepção predominante se dá através da visão, sem a manipulação do objeto material, exigindo maior grau de abstração.

Neste exemplo, o desenho se apresenta como um elemento estático. Os pontos de “A” a “G”, que são claramente visíveis, representam sete vértices do cubo. O oitavo vértice, identificado pela letra “H”, encontra-se representado pela confluência de três traços pontilhados que representam as arestas não aparentes do cubo, porque no objeto material ele não é diretamente visível.

Pelo fato do desenho ser estático, os alunos podem ter dificuldade no reconhecimento das propriedades geométricas, com base na leitura da representação, ou seja, há um código na utilização da perspectiva cuja aprendizagem se faz necessária no estudo da geometria.

Uma das alternativas para minimizar esse problema pode estar na inserção do computador nas salas de aula, permitindo que o ensino de geometria seja dinâmico e fuja da estaticidade tal qual é ensinado tradicionalmente.

Segundo Fainguelernt (1999, p. 53), Papert argumenta o seguinte: “O computador veio introduzir uma dimensão dinâmica à investigação sobre visualização, pois as representações de figuras planas e espaciais na tela podem ser manipuladas e transformadas de diferentes maneiras”.

Os alunos que passaram por essa experiência na sala de informática confirmam essas palavras, como foi o caso do aluno “R”, ao mencionar que “o cubo foi girando” e ele foi “descobrimos os lados do cubo” (97R e 98).

A visualização é uma habilidade muito importante para a construção do conhecimento matemático. Frege²¹, também citado por Fainguelernt, destaca que “os processos mentais de formação do conceito se realizam visualmente através da representação deste pela liberdade de imaginar”. (p. 56).

Miskulin (1999), referindo-se à pesquisa de Gutiérrez (1996) - que estudou a utilização de computadores no processo de visualização geométrica, através de software interativo para geometria em três dimensões – afirma que a visualização sempre foi reconhecida como “uma componente necessária para o ensino e a aprendizagem da geometria” e que só foi relegada no período do “movimento da matemática moderna”.

Nos dias atuais, com a crescente popularização dos computadores e outras ferramentas da multimídia, os professores e alunos podem usar esses recursos para representar tridimensionalmente figuras geométricas espaciais, como também, resolver problemas relacionados à visualização geométrica.

i) O ambiente interativo favorece a aprendizagem

Essa última confluência temática destaca os recortes dos discursos dos alunos que salientam a interatividade como um recurso computacional que favorece a aprendizagem geométrica. O fato de interagir com a máquina e poder movimentar e girar a figura foram considerados relevantes para o desenvolvimento da atividade solicitada. Um dos sujeitos da pesquisa, na unidade “107T”, afirma que foi mais fácil visualizar o cubo no computador

²¹ FREGE, G. *Écrits logiques et philosophiques*. Trad. Claude Imbert. Paris: Éditions du Seuil, 1971. (Collection L'Ordre Philosophique).

“porque dava para girar de cabeça para baixo, para os lados, aumentar, diminuir”, ou seja, houve interação sujeito-máquina.

O ambiente interativo, propício à aprendizagem, foi destacado por todos os alunos. É caso dos alunos “S” que declarou, “a gente pode mexer a figura” (103S) e “U”, que afirmou, “eu apertei um botão lá, fez girar a figura e aí fica mais fácil visualizar a figura” (111U).

Gravina (1996), que aborda a aprendizagem da geometria em ambientes computacionais e explicita a contribuição da geometria dinâmica na superação de dificuldades dos estudantes, enfatiza que os programas como o Cabri Géomètre e o Geoplan,

constituem ferramentas poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado. Nesses ambientes, conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural, a habilidade de perceber representações diferentes de uma mesma configuração de desenvolve; controle sobre configurações geométricas leva à descoberta de propriedades novas e interessantes. (MISKULIN, 1999, p. 203).

O fato desses programas serem interativos possibilita aos alunos a ação de movimento no desenho, e que, a partir da manipulação concreta, estes passem à manipulação abstrata, atingindo níveis mentais superiores de argumentação, dedução, rigor, abstração e generalização.

Pierre-Lévy (1998) publicou uma obra voltada para as novas ciências cognitivas e para a invenção de uma linguagem de imagens animadas, através do computador, onde, tacitamente, enfatiza as vantagens e possibilidades dessa inovadora linguagem para o desenvolvimento da cognição humana, entre as quais, o seu caráter interativo.

5.2.2 Segundo Nível de Convergência: categorias abertas

Na busca de uma generalidade - já que cada fenômeno não pode ser percebido num todo absoluto e único - realizou-se um novo agrupamento das unidades de significado mediante a redução e a variação imaginativa. Em outras palavras, as nove temáticas deram origem a três grandes convergências, comumente denominadas categorias abertas²² (ver Anexo H). Essas categorias revelam a estrutura do fenômeno estudado e oferecem ao

²² Categorias abertas são “constructos que apresentam grandes convergências de unidades de significado já analisadas e interpretadas. Indicam os aspectos estruturantes do fenômeno investigado e abrem-se à metacompreensão considerando a interrogação, o percebido, o analisado, o diálogo estabelecido na intersubjetividade autor/sujeitos/autores/região de inquérito”. BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia: confrontos e avanços**. São Paulo: Cortez; 2000, p. 82.

pesquisador o fundamento para o movimento de transcendência reflexiva, caracterizado pela passagem do particular para o mais geral, ou seja, ir além do imediatamente dado.

As três grandes categorias, consideradas nesta pesquisa não como verdades universais, mas como generalidades elaboradas a partir das análises dos dados obtidos junto aos sujeitos estudados, são as seguintes:

a) A linguagem como fonte de dificuldade

A primeira categoria aberta está relacionada com o fenômeno lingüístico e tem muito a ver com a relação nem sempre harmoniosa entre a língua natural, entendida como a primeira língua que a criança aprende e usa no seu cotidiano, e a linguagem matemática. Segundo Machado (1998, p. 9), a linguagem não raras vezes é um foco de onde “se originam as maiores dificuldades relativas ao ensino (de Matemática) e que exige reflexões mais profundas e análises mais pormenorizadas que poderiam caracterizar novos trabalhos”. Ao serem analisados as unidades de significado das confluências temáticas (CT₁) – influência da língua natural e (CT₂) - conflito de linguagem: plana x espacial ficou evidente que a articulação entre a linguagem não formal e a linguagem formal da matemática, como também a transferência de termos da geometria plana para a geometria espacial e vice-versa, podem constituir-se em fontes de dificuldades para os alunos na formação de conceitos geométricos. Esta idéia está claramente posta nas unidades “1A”, “41G” e “61J”, onde os sujeitos descrevem o ponto, uma noção básica da geometria, como sendo o sinal de pontuação que encerra uma frase ou período gramatical. Outro aluno pesquisado, conforme está expresso na unidade “18C”, afirma que “arestas são lados de um triângulo”. Como se sabe, o termo “aresta” é utilizado para nomear o segmento de reta, comum a duas ou mais faces de uma figura espacial, enquanto que a palavra “lado” é mais utilizada para identificar o segmento de reta de uma figura plana, como o polígono (triângulo, quadrado, pentágono, etc.). Portanto, não cabe dizer que aresta é o lado de um triângulo. A transferência inadequada de termos da geometria plana para a espacial e vice-versa também aparece como obstáculo à construção de conceitos.

Como já mencionado no primeiro Capítulo deste trabalho, a apreensão dos objetos matemáticos só é possível, basicamente, através do uso de diferentes signos, como palavras, expressões, desenhos e outros. Para articular adequadamente conceitos da geometria plana e da geometria espacial na elaboração de novos conceitos geométricos, sem dúvida nenhuma o aluno vai precisar dominar o uso de diferentes representações semióticas, incluindo a língua

natural e a linguagem matemática. Esta categoria mostra que a linguagem pode ser uma fonte importante de dificuldades na construção de conceitos da geometria.

b) Dificuldade de abstração e generalização no processo de formação de conceitos

Essa categoria surgiu a partir da reflexão sobre a própria reflexão do pesquisador em relação às Confluências Temáticas (CT₃, CT₄, CT₅ e CT₆): generalizações apressadas; confusão entre figuras geométricas planas e espaciais; dificuldade para reconhecer elementos conceituais e dificuldade de articulação entre os estágios das operações concretas e das operações abstratas, respectivamente.

Quando o aluno descreve o cubo como sendo “uma espécie de dado” (39F) e a pirâmide, “uma espécie de triângulo” (38F), ou ainda, que o vértice é “uma linha reta” (42G), demonstra a dificuldade de abstração e generalização, essenciais para a compreensão geométrica.

A matemática é por natureza abstrata. Os conceitos relacionados aos objetos matemáticos, particularmente às figuras planas e espaciais, existem no mundo das abstrações. Segundo Machado (1998, p. 46), a própria idéia de número é uma abstração “que transcende todas as possíveis instâncias empíricas”. Nesta pesquisa, vários alunos demonstram dificuldade para reconhecer elementos conceituais. Uma das causas pode ser atribuída à dificuldade de abstração, especialmente pelo fato dos conceitos serem eminentemente abstratos.

Nem sempre a educação escolar valoriza a aprendizagem de conceitos. Pelo contrário, dá mais valor à memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Dessa forma, o ensino fica mais voltado para a reprodução de modelos do que para a compreensão conceitual.

Uma das dificuldades para a aprendizagem de conceitos pode ser atribuída ao fato dos mesmos não pertencerem ao mundo imediato da materialidade e sim ao da abstração. Para se chegar à generalidade e à abstração dos conceitos, o aluno precisa percorrer um caminho que não é linear e desenvolver habilidades cognitivas fundamentais para a construção de conceitos, como, por exemplo, a de estabelecer articulação entre os estágios das operações concretas e das operações abstratas. A falta de articulação entre o concreto, o real, o palpável e o abstrato, o imaginário, o concebido, no processo de construção de conceitos, compromete a aprendizagem matemática.

A confusão estabelecida por vários alunos entre figuras planas e espaciais, caracterizou-se como dificuldades de aprendizagem relacionadas à elaboração conceitual, notadamente em situações que exigem articulação entre conceitos da geometria plana. Um exemplo que merece ser citado, encontra-se na unidade “6A” onde o sujeito afirma que a pirâmide regular de base quadrada “é formada por três triângulos e um quadrado”. Essa confusão pode ser decorrente tanto da dificuldade de abstração de objetos tridimensionais, como da deficiência do aluno em relação à escrita matemática discursiva, que é um dos registros de representações semióticas de conceitos geométricos.

A dificuldade de abstração e generalização pode estar relacionada ainda à falta de desenvolvimento da habilidade de visualização e de interpretação e representação conceitual. Fainguelernt (1999) recorre aos estudos de Duval (1995) para explicar que o processo de visualização no aprendizado da geometria está intimamente relacionado aos processos de construção de figuras, através de ferramentas (régua, compasso, esquadros e software), e de raciocínio e comprovação, ligado à demonstração (teoremas, axiomas e definições).

A relação entre estes três processos cognitivos pode ser esquematizada como mostra a figura:

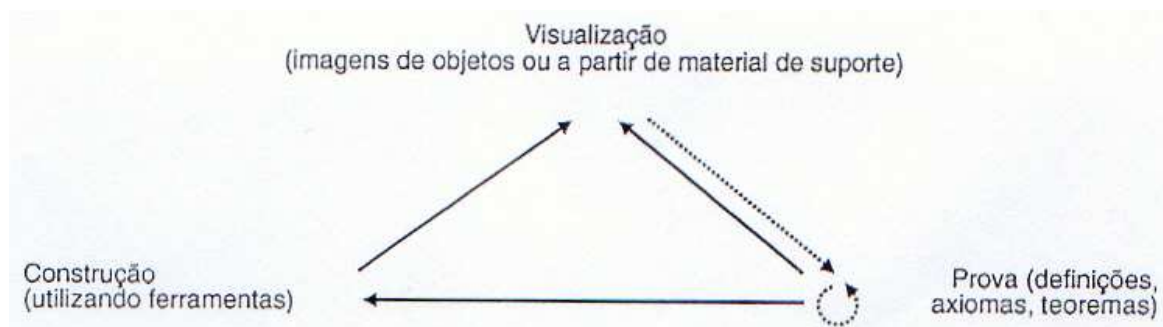


Figura 15 - Tipos de processos cognitivos (DUVAL, 1995), citados por Fainguelernt (1999, p. 54).

Fainguelernt ressalta que, apesar dos três tipos de processos cognitivos estarem conectados, os mesmos podem ser realizados independentemente uns dos outros. Em outras palavras, a visualização não depende da construção e nem da prova. Desse modo, a visualização pode ser vista como um apoio intuitivo, algumas vezes necessário para se achar a prova.

Enfatiza ainda a importância da visualização não só pelo valor desta noção para a exploração e descrição do espaço, e, em particular, de objetos tridimensionais²³, mas também “pelo tipo de processos mentais envolvidos que são necessários e podem ser transferidos tanto para as outras partes da Matemática como para outras áreas do conhecimento.” (p.53).

Com base nos estudos de Duval, Fainguelernt destaca que “não podemos formar uma imagem de um conceito, identificar suas características e dar exemplos sem visualizar seus elementos” (p.56). Por outro lado, o desenvolvimento da habilidade de visualização é fundamental para a execução da tarefa de representação na aprendizagem da geometria. Essas duas questões, aliadas à dificuldade para decodificar o desenho e ao fato do aluno às vezes ficar preso ao aspecto figural do objeto, sem refletir sobre suas propriedades conceituais, foram igualmente evidenciadas nas atividades desenvolvidas. Um exemplo típico está na descrição de retângulo, feita pelo aluno G (ver unidade 46G), onde ele afirma que “é uma figura que tem dois lados maiores e dois lados menores”. O aluno não se deu conta de que o quadrado também é um retângulo, tendo em vista que os atributos relevantes dessa figura é ser um quadrilátero com todos os seus ângulos retos.

Damm (1999) destaca a possibilidade de ocorrer confusões entre a representação e o próprio conceito matemático. No decurso da aprendizagem, quando ainda não se tem uma relativa estabilidade conceitual, o aluno pode tomar o representante (desenho) como sendo o próprio representado (a figura geométrica), abrindo espaço para interpretações inadequadas que podem se constituírem em dificuldades à expansão da compreensão do conceito.

Um exemplo dessa possível confusão se dá quando o aluno, em situação de leitura de uma representação do cubo em perspectiva paralela, fixa sua compreensão somente no conjunto gráfico do desenho em si mesmo, não conseguindo estabelecer conclusões corretas entre os ângulos interno da face do cubo com suas respectivas representações sobre a superfície plana do desenho. Nesse caso específico, o conhecimento geométrico fica obstruído pela utilização do próprio desenho e a potencialidade da representação conceitual não é devidamente utilizada pelo aluno.

A dificuldade de abstração e generalização no processo de formação de conceitos geométricos se deu, em grande parte, pela falta de habilidade dos alunos em relação ao reconhecimento de elementos conceituais, tanto de figuras planas como de espaciais;

²³ A expressão *objetos tridimensionais* é utilizada, nesta pesquisa, para identificar um elemento material que pode ser associado ao conceito geométrico espacial, familiar aos alunos do ensino fundamental, como, por exemplo, um cubo construído em madeira ou cartolina.

problemas para percorrer o caminho concreto-abstrato-concreto; confundir figuras planas com figuras espaciais, e ainda, a falta de habilidade de visualização e de representação.

c) O computador facilita a visualização da figura geométrica tridimensional

A terceira e última categoria aponta para uma nova forma de aquisição do conhecimento, ou seja, a integração da informática nas situações de ensino e aprendizagem. Esta convergência surgiu com base no processo de redução de outras três confluências temáticas: CT₈ – o computador como mediador da aprendizagem; CT₉ – o computador favorece a visualização e CT₁₀ – o ambiente interativo proporcionado pelo computador torna a aprendizagem mais fácil e interessante. Na unidade de significado “111U”, entre outras, o sujeito revela o pensamento, segundo o que o ambiente computacional estimula o desenvolvimento de diferentes habilidades dos alunos e pode minimizar as suas dificuldades relacionadas à construção de conceitos geométricos, ao se expressar da seguinte maneira: “eu apertei um botão lá, fez girar a figura e aí fica mais fácil visualizar a figura”. O caráter exploratório da geometria no computador e a dinâmica dos movimentos, que está máquina possibilita à aprendizagem, estão implícitos em vários discursos dos alunos.

É importante aprofundar estudos sobre essa temática objetivando transcender algumas das dificuldades que permeiam este ensino, com reflexos negativos para a aprendizagem da geometria, especialmente quando o aluno realiza atividades que envolvem a visualização e a representação de conceitos.

Concluindo, a pesquisa evidenciou que o computador pode contribuir para a superação de dificuldades de aprendizagem na elaboração de conceitos geométricos, particularmente, quando precisa articular conceitos da geometria plana e da geometria espacial, e também relacionar o conceito com as suas representações. Os recursos do movimento, da interatividade, da simulação propiciaram um ambiente exploratório inovador e prazeroso para o ensino da geometria.

5.3 Um Retorno ao Território Teórico

O entendimento deste pesquisador é de que a pesquisa, no campo da educação matemática e numa perspectiva fenomenológica, jamais poderá ser considerada concluída, no sentido pleno da palavra, porque o fenômeno interrogado é múltiplo e o pesquisador não

consegue abarcar todas as suas dimensões. Em função da necessidade de apresentar um texto conclusivo da construção, análise e resultado deste trabalho acadêmico, esboça-se, nesse momento, algumas reflexões finais sobre essa investigação, à luz do quadro teórico-metodológico que a delineou.

Em primeiro lugar, o caminho metodológico adotado foi a fenomenologia. A construção do conhecimento geométrico nessa abordagem valoriza a percepção e considera que o conhecimento não é nato, mas, sim, construído pelo sujeito ao longo da vida, numa relação dinâmica, temporal, histórica e indissociável entre o sujeito e o objeto matemático, em estudo.

No caso particular dessa investigação, a percepção é considerada como o ponto-chave da construção do conhecimento geométrico. De acordo com Merleau-Ponty (1994; p. 6), a mesma “não é uma ciência do mundo, não é mesmo um ato, uma tomada de posição deliberada; ela é o fundo sobre o qual todos os atos se destacam e ela é pressuposta por eles”. Esse trabalho foi desenvolvido e fundamentado nesse pressuposto, pois a construção do conhecimento na concepção fenomenológica tem, como preeminência, a percepção, e as experiências vividas de especialidades e de temporalidades são de real valor para a aprendizagem.

Segundo Bicudo (2000, p. 42-43), na construção do conhecimento geométrico numa visão fenomenológica, o tempo, o espaço e a perspectiva não são concebidos como objetivamente dados, enquanto parte do mundo físico, como os concebem o racionalismo²⁴ e o intelectualismo²⁵, “mas vistos como experiência vivida pelo corpo-próprio”, que percebe e expõe o percebido pela linguagem. O corpo-próprio faz um movimento intencional em direção ao percebido e constitui a base do conhecimento geométrico, expresso pela linguagem, que lhe dá significado.

Em segundo lugar, as reflexões sobre o fenômeno estudado, apontaram para uma diversidade de aspectos, ligados às dificuldades de aprendizagem na elaboração de conceitos geométrico, entre os quais, destacam-se: a linguagem, os desafios da abstração e generalização de conceitos, questões concernentes à visualização e representação conceitual e o uso didático do computador no ensino e na aprendizagem da geometria.

²⁴ Racionalismo é uma corrente epistemológica que defende a lógica da razão como a fonte principal do conhecimento. Na visão do pensamento racionalista, “um conhecimento é verdadeiro somente quando é logicamente necessário e universalmente válido. Esse conhecimento só pode ser alcançado pela razão” (BAZARIAN, 1988, p. 100).

²⁵ O intelectualismo considera tanto a experiência como a razão fontes do conhecimento.

No que se refere à linguagem, ficaram evidenciadas as questões mencionadas por Machado (1998), relativas às articulações entre a língua natural (linguagem materna ou cotidiana) e a linguagem matemática, como, por exemplo, o fato dos alunos pesquisados utilizarem termos provenientes da linguagem natural, tais como: lado, canto, quina, entre vários outros, para se referirem à conceitos geométricos, que têm um sentido estabelecido na linguagem matemática.

Duval (1993) salienta que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são diretamente perceptíveis, senão, através da utilização de um sistema de representação que os permite designar. Nesse contexto, tanto a língua natural como a linguagem matemática (escrita simbólica, escrita algébrica, registro figural e outras) exercem um papel fundamental no processo de elaboração conceitual, pois funcionam como uma interface entre o sujeito e o objeto.

A dificuldade de abstração no processo de formação de conceitos, nesta pesquisa, foi evidenciada através da análise dos vários instrumentos, como os desenhos, as descrições e os comentários realizados pelos alunos. Percebe-se, claramente, a dificuldade para reconhecer elementos conceituais, construir e interpretar desenhos de figuras geométricas, principalmente, tridimensionais.

Nesse sentido, um dos maiores desafios está relacionado ao uso da perspectiva. Apesar de estar presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, propostos pelo MEC e até constar de alguns livros didáticos, como em Imenes et al., 2001, raramente é abordada em aulas de geometria.

Bicudo (1999, p. 162) destaca que “a abstração matemática amplia as possibilidades de aplicação deste saber e, geralmente, oferece dificuldades à compreensão dos aprendizes”. De fato, a dificuldade de abstração na construção de conceitos geométricos, mostra-se como um enorme desafio para a maioria dos alunos pesquisados, principalmente, porque eles não têm domínio dos sistemas de representação e não compreendem as escritas matemáticas, e por isso, têm dificuldade para articular as expressões simbólicas com os seus significados, e ainda, o conceito às suas variadas formas de representação.

Essa questão foi amplamente estudada por Duval, que atribui algumas das dificuldades de formação do conceito às relações que devem ser estabelecidas entre as representações e a dimensão conceitual, pois, segundo ele, a apreensão conceitual dos objetos matemáticos pelos alunos só será possível se forem capazes de fazer a coordenação entre os vários registros de representação do mesmo objeto.

Como o fenômeno da aprendizagem de conceitos geométricos é múltiplo, as dificuldades identificadas na pesquisa também estão relacionadas à visualização, considerada, neste trabalho, como uma atividade cognitiva, baseada no uso de imagens mentais, representações externas (desenho, modelos materiais, gráficos), processos de visualização e habilidades de visualização, descritos por Gutiérrez e transcritos por Passos (2000).

Os dados mostram que alguns alunos confundiram as figuras planas com as figuras espaciais, outros revelaram dificuldade para representar no desenho a idéia de profundidade, ou para ler as informações contidas nele e, ainda, vários se mostraram presos a determinados aspectos figurais e, por isso, só conseguiram identificar as figuras geométricas apenas em uma posição, ou seja, da forma como sempre aparece nos livros didáticos, e, finalmente, outros não conseguiram associar o conceito à representação dada. Como alcançar a abstração e a generalidade matemática, se empecilhos à aprendizagem escolar como esses não forem removidos ou pelo menos atenuados?

O aluno que não dispuser de capacidade abstração suficiente para estabelecer a relação entre o conceito matemático e os seus diferentes sistemas de representação, e ainda, não souber ler e interpretar as escritas matemáticas e não ser capaz de fazer a articulação entre conceitos da geometria plana e conceitos da geometria espacial, terá muitas dificuldades para apropriar-se do saber geométrico. A mudança desse quadro, depende, em grande parte, de propostas de inovação pedagógica e de se repensar alguns pontos, por exemplo: procurar compreender como o aluno compreende, constrói e organiza o conhecimento e redefinir a relação aluno-professor-saber escolar, tornando-a mais pessoal e afetiva.

5.4 Limites e Perspectivas

O fenômeno da aprendizagem da geometria é um processo cognitivo de múltiplas dimensões. Por mais que o pesquisador queira compreendê-lo na sua totalidade, sempre existirá outras perspectivas e modos de percebê-lo. Além disso, o conhecimento é dinâmico e se renova constantemente.

A maior limitação desta pesquisa é justamente considerá-la acabada. Machado (1998, p. 157), ao concluir uma de suas obras, expressa muito bem esse sentimento, ao afirmar que “ainda que tenhamos consciência dos poucos passos que avançamos no sentido da operacionalização das idéias acordadas, sentimo-nos como em uma promissora viagem que, ao invés de estar chegando ao fim, certamente apenas acabou de começar”.

Ao longo deste trabalho, este pesquisador deparou-se com vários problemas relacionados às dificuldades de aprendizagem de construção de conceitos geométricos pelos alunos; porém, dada a impossibilidade de compreendê-los a todos numa única pesquisa, foi necessário delimitar o objeto do estudo, de forma bem caracterizada e com limites bem definidos. Por isso, não foram aprofundadas as análises ligadas aos problemas do currículo de geometria, da formação geométrica dos professores, das questões de natureza epistemológicas, do texto didático e da introdução das mídias informáticas na sala de aula, entre outros. A atenção foi dirigida, prioritariamente, para a compreensão de como os alunos articulam o conceito de figuras geométricas planas e espaciais com os diferentes registros de representações semióticas, na atividade cognitiva de elaboração conceitual.

No cenário da construção de conceitos geométricos, abrem-se novas perspectivas para alunos e professores, pois, no campo da Educação Matemática, no Brasil e no mundo, têm sido realizadas várias pesquisas, como aquelas citadas nesta investigação, que apontam para o desenvolvimento de novas práticas pedagógicas e de várias habilidades cognitivas, necessárias à construção de um conhecimento matemático significativo.

Espera-se que este trabalho, limitado, como já foi mencionado anteriormente, possa contribuir a futuras pesquisas relacionadas ao desenvolvimento do pensamento geométrico, especialmente, diante da necessidade de favorecer a reorganização do pensamento dos alunos em face das possibilidades oferecidas pelas tecnologias da comunicação e da informação. A formação de professores de geometria, no contexto tecnológico, sobretudo, na área das mídias informáticas, é extremamente necessárias à Educação Matemática.

A semiótica, entendida como a ciência que estuda os signos e que busca dar significado e significantes a todas as linguagens, inclusive às geométricas, é um campo muito fértil de pesquisa, pois toda a comunicação em matemática é expressa em símbolos, notações e outros. No processo de aprendizagem da geometria no ensino fundamental, as representações semióticas, tais como, os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas, as representações gráficas e a língua natural, são largamente utilizadas; por isso, uma característica importante dessa atividade cognitiva é a necessidade de mobilizar uma diversidade de registros de representação semiótica. Aprofundar estudos, no sentido de investigar as possíveis contribuições dessa ciência para a aprendizagem da matemática, é de real importância para a compreensão conceitual.

REFERÊNCIAS

ANDREIS, A. M. **A representação espacial nas séries iniciais do ensino fundamental**. Ijuí: UNIJUÍ, 1999.

ARSAC, G. et al. **Iniciation au raisonnement déductif au collège**. Presses Universitaires de Lyon: França, 1992.

AUDIBERT, G. **La perspective cavalière**. Publication APMEP, n. 75, Paris, 1990.

BALDY, R.; DUVAL, J. **Écriture et com paraisons de volumes in PC**. Bulletin de Psychologie, n. 386, 00. 617-624, Paris, 1987.

BARROS, J. P. D. de; D'AMBROSIO, U. **Computadores, escola e sociedade**. São Paulo: Scipione, 1990.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

_____.; ESPOSITO, V. H. C. **Pesquisa qualitativa em educação – um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Editora Unimep, 1994.

_____.; CAPPELLETTI, I. F. (Orgs.). **Joel Martins... um seminário avançado em fenomenologia**. São Paulo: EDUC – Editora da PUC/SP, 1997.

_____. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

_____.; CAPPELLETTI, I. F. (Orgs.). **Fenomenologia – uma visão abrangente da educação**. São Paulo: Editora Olho d'água, 1999.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia – confrontos e avanços**. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

BIGODE, A. J. L. **A Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000. 7 v.

BONAFE, F. Quelques Hypothèses et résultats sur l'enseignement de la géométrie de l'espace ... **Boletim da APMEP**, Paris, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil**. Brasília: MEC/SEF, 2001. 3 v.

_____. _____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** (1ª a 4ª série). Brasília: MEC/SEF/2001, 3 v.

_____. _____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** (3º. e 4º. ciclos). Brasília: MEC/SEF/1998.

_____. _____. Secretaria de Educação Fundamental. **Guia de livros didáticos: (1ª. a 4ª. Séries)**. PNLD 2000/2001. Brasília: MEC/SEF/2000.

_____. _____. Secretaria de Educação Fundamental. **Guia de livros didáticos: (5ª. a 8ª. Séries)**. PNLD 2002. Brasília: MEC/SEF/2001.

CAMPOS, T. M. M. (Coord.). **Transformando a prática das aulas de matemática**. São Paulo: PREM, 2001.

CATUNDA, O. *et al.* **As transformações geométricas e o ensino de geometria**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1988.

CAVALCA, A. P. V. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. São Paulo: EDUC, 1998.

DAMN, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. ... *et al.* **Educação matemática: uma introdução**, p. 135-153. São Paulo: EDUC, 2000.

DANYLUK, O. **Alfabetização matemática: as primeiras manifestações da escrita infantil**. Porto Alegre: Sulina; Passo Fundo; Ediupf, 1998.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: arte ou técnica de explicar ou conhecer**. São Paulo: Editora Ática, 1990.

_____. As Novas Possibilidades Oferecidas pela Informática. In: **Ciências, informática e sociedade – uma coletânea de textos**. p. 25-28. Brasília: Universidade de Brasília – Faculdade de Educação, 1994.

DELEUZE, G.; GUATTARI, F. **Os mil platôs**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1997.

_____. **O que é filosofia**. Rio de Janeiro: Editora 34, 2000.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et ciencies cognitives**, v. 5. IREM-ULP, Strasbourg: 1993. p. 37-65.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática – representação e construção em geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FAZENDA, I. (Org.). **Novos enfoques da pesquisa educacional**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1992.

FONSECA, M. C. F. R., et al. **O ensino de geometria no ensino fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FREGE, G. **Lógica e filosofia da linguagem**. Seleção, introdução, trad. e notas de Paulo Alcoforado. São Paulo: Cultrix/Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

FREGE, G. **Sobre a justificação científica de uma conceitografia**: os fundamentos da aritmética. Seleção e tradução de Luís Henrique dos Santos. 2. Ed. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Os Pensadores).

GARDNER, H. **Estruturas da mente**: a teoria das inteligências múltiplas. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.

_____. **Inteligências múltiplas**: a teoria na prática. Tradução Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1995.

GILES, T. R. **História do existencialismo e da fenomenologia**. São Paulo: EPU, 1989.

GIOVANI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. J. **A conquista da matemática – nova**. São Paulo: FTD, 1998. (Coleção 5ª a 8ª série do ensino fundamental).

GIOVANNI, J. R.; PARENTE, E. **Aprendendo Matemática**. São Paulo: FTD, 1999. 5. v.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma abordagem para o aprendizado da geometria. In: **Anais do VIII Simpósio Brasileiro de Informática da Educação**, nov/96.

_____.; SANTAROSA, L. M. C. A Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Revista Informática na Educação**: teoria & prática. v. 2, nº. 1, maio. Porto Alegre: PGIE-UFRGS, 1999.

GUTIERREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-Dimensionales em la ensenanza de la geometria espacial. In: **Revista EMA**. Bogotá, Colombia, v. 3. n. 3, p. 193-220.

_____. **Visualization in 3-dimensional geometry**. In Search of a Framework. Departamento de Didáctica de la Matemática – Universidade de Valencia – Spain. PME 20TM Proceedings – july – 8/12, Vol. 1, p. 1-19, 1996.

HUSSERL, E. **A crise da humanidade européia e a filosofia**. Introdução e tradução Urbano Ziles. Porto Alegre: Edipucrs, 1996.

HUSSERL, E. **A filosofia como ciência de rigor**. Coimbra, 1965.

_____. **A idéia da fenomenologia**. Lisboa: Edições 70, 1972.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1997. 5 v. e 8 v.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro pensamento na era da informática**. Tradução Carlos I. da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, P. **A ideografia dinâmica: rumo a uma imaginação artificial?** São Paulo: Edições Loyola, 1998.

LIMA, M. A. B. **Registrando descobertas: matemática**. Rio de Janeiro: Ediouro, 1997 (Coleção 1ª a 4ª série do ensino fundamental).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinado geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

_____.; NASSER, L. (Coord.). **Geometria: na era da imagem e do movimento**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

LORENZATO, S. Por que não Ensinar Geometria? **A educação matemática em revista – geometria**, Blumenau: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano III, p. 3-13, 1º. Sem. 1995.

MACHADO, A. M. N. A dimensão subjetiva da pesquisa. **Revista Espaço Pedagógico**, Faculdade de Educação da Universidade de Passo Fundo. V. 5, n. 1, dezembro/1998, p. 103 – 118.

MACHADO, O. V. M. **Pesquisa qualitativa:** modalidade fenômeno situado. In: BICUDO, M. A. V. & ESPÓSITO, V.H.C. (orgs.). PESQUISA QUALITATIVA EM Educação> um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Unimep, 1994, pp. 35-46.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 4. Ed. São Paulo: Cortez, 1998.

_____. **Matemática e realidade:** análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática. 5. Ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MACHADO, S. D. et al. **Educação Matemática: uma introdução.** 2. Ed. São Paulo: EDUC, 2000.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V. **A Pesquisa qualitativa em psicologia – fundamentos e recursos básicos.** São Paulo: Editora Moraes; EDUC – Editora da PUC-SP, 1989.

_____. **Estudos sobre existencialismo, fenomenologia e educação.** São Paulo: Moraes, 1983.

MARTINS, M. A. M. **Estudo da evolução do ensino secundário no Brasil e no Estado do Paraná com ênfase na disciplina de matemática.** (Dissertação de Mestrado). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 1984.

MERLEAU-PONTY, M. **Sobre a fenomenologia da linguagem.** São Paulo: Abril, 1984. (Coleção Pensadores).

_____. **Fenomenologia da percepção.** Trad. de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria.** (Tese de Doutorado). Campinas: Unicamp, 1999.

MOURA, C. A. R. **Crítica da razão na fenomenologia.** São Paulo: Edusp/Nova Stella, 1989.

PAIS, L. C. Algumas considerações sobre um processo de pesquisa coletiva em educação matemática. Publicado na **Revista Zetetiké** nº 03, p. 97-104. Campinas: Unicamp, 1995.

_____. Intuição, experiência e teoria Geométrica. **Revista Zetetiké** nº 6. Campinas, 1996.

PAIS, L. C. **Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au collège**: Pratiques d'élèves, analyse de livres. Tese de doutorado defendida na Universidade de Montpellier II, França, 1991.

_____.; FREITAS J. L. M. **Um estudo dos processos de provas no ensino e na aprendizagem da geometria no ensino fundamental**. Rio Claro: Bolema13, 1999.

_____. **Fundamentos teóricos metodológicos da educação matemática**: uma abordagem fenomenológica. Campo Grande: UFMS, 1999 (mimo).

PAPERT, S. **Logo**: computadores e educação. São Paulo: Editora Brasiliense, 1988.

_____. **A máquina das crianças**: repensando a escola na era da informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PARZYZ, B. La représentation du “perçu” et du “su” dans les dessins de la géométrie de l'espace. **Bulletin de l'APMEP**, n. 364, Paris, 1988.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica**: a geometria na sala de aula. (Tese de Doutorado). Campinas: Unicamp, 2000.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM. Ano I, n. 1, março/1993, p. 7-17.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. (Tese de Doutorado). Campinas: UNICAMP, 1991.

PIAGET, J. Aprendizagem e conhecimento. In: PIAGET, J. & GRÉCO, P. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Tradução Bernardina M. de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1993.

REZENDE, A. **Concepção fenomenológica da educação**. São Paulo: Cortez, 1990.

SEVERINO, A. J. et al. **Novos enfoques da pesquisa educacional**. (Org.) FAZENDA, Ivani. São Paulo: Cortez, 1992, 2ª ed.

VALENTE, J. A.; VALENTE A. B. **Logo**: conceitos, aplicações e projetos. São Paulo: McGraw-Hill, 1998.

VALENTE, J. A.; VALENTE A. B. **Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação**. Brasília: MEC, 1999. (Coleção Informática na Educação).

_____. **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. Campinas: UNICAMP, 1993.

_____. Informática na educação: conformar ou transformar. In: **VIII ENDIPE**, Vol. II. Florianópolis, 1996.

VALENTE, J. A. Por quê o computador na educação? In: VALENTE, J. A. (Org.). **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. Campinas: Gráfica Central da Unicamp, 1993.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática no Brasil**. São Paulo: ANNABLUME Editora, 1999.

ZILLES, U. **A fenomenologia husserliana como método radical**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 1996.

ANEXOS

ANEXO A**QUADRO N° 01**

ANEXO A

Quadro Nº 01

Discurso escrito por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

Descrição produzida pelo Aluno “A”

O ponto é um sinal que finaliza uma frase. O triângulo é uma figura de três lados, formada por três linhas do mesmo tamanho. O quadrado é uma figura de quatro lados, formada por quatro linhas do mesmo tamanho. O retângulo é uma figura de quatro lados, formada por duas linhas do mesmo tamanho. O cubo é formado por seis quadrados do mesmo tamanho. A pirâmide é formada por três triângulos e um quadrado e o paralelepípedo é comprido e formado por dois círculos em cada ponto de um tubo.

Descrição produzida pelo aluno “B”

Ângulo é cada lateral de uma figura geométrica. Triângulo é uma figura com três lados iguais. Quadrado é uma figura com quatro lados iguais. Retângulo é uma figura de quatro lados, mas a lateral é mais larga. Cubo é um quadrado de vários lados. Pirâmide é um triângulo e paralelepípedos são pedras pequenas.

Descrição produzida pelo aluno “C”

Ponto é uma união de vértices. Vértices são retas que se encontram em um ponto. Ângulos são formados por dois ou mais vértices. Arestas são os lados de um triângulo do tipo aresta x

aresta x aresta. Perpendiculares são duas retas que se encontram. Triângulo é uma figura de três lados iguais. Quadrado é uma figura de quatro lados iguais. Retângulo é uma figura com dois lados iguais e dois diferentes.

Descrição produzida pelo aluno “D”

Ponto serve para unir as retas. Vértices são lados da figura. Arestas são lados de um triângulo. Triângulo é uma figura de três lados. Quadrado é uma figura de quatro lados iguais. Retângulo é uma figura de lados diferentes, sendo dois iguais e dois diferentes.

Descrição produzida pelo aluno “E”

É uma certa parte que serve para localizar uma área que é chamada de ponto. Vértice é a parte de uma figura. O vértice se localiza nos lados de uma certa figura. Ângulo é a medida em graus de uma certa figura. Triângulo é uma figura geométrica de três lados iguais. Quadrado é uma figura geométrica de quatro lados iguais. Retângulo é uma figura geométrica de quatro lados, dois maiores e dois menores.

Descrição produzida pelo aluno “F”

Vértice é uma linha deitada. Triângulo é uma figura geométrica com três lados, pois dois lados são verticais e um horizontal. Quadrado é uma figura geométrica que contém quatro lados iguais. Retângulo é uma figura geométrica que também contém quatro lados, sendo dois lados maiores e os outros dois lados menores. Cubo é uma espécie de dado. Pirâmide é uma espécie de triângulo.

Descrição produzida pelo aluno “G”

É usado para determinar o final de alguma frase, texto, verso, etc. Vértice é uma linha reta. Ângulo é uma reta cujos seus lados têm uma medida em graus. Triângulo é uma figura que têm os três lados iguais. Quadrado é uma figura que tem quatro lados iguais. Retângulo é uma figura em que dois lados são maiores e outros dois menores.

Descrição produzida pelo aluno “H”

Ponto não precisa ter diâmetro específico. Vértice é um lado ao contrário. Ângulo é a quina de uma figura geométrica. Triângulo é uma figura geométrica com os tamanhos dos lados iguais. Quadrado é uma figura geométrica. Retângulo é uma figura geométrica. Pirâmide é uma figura egípcia.

Descrição produzida pelo aluno “I”

Usamos pontos nas retas para definir alguns ângulos. Ângulos são diferentes formas geométricas formadas por retas. Triângulo é uma figura com três ângulos do mesmo tamanho. Quadrado é uma forma com quatro lados do mesmo tamanho. Retângulo é uma forma com quatro lados, cujas laterais são iguais e as retas de baixo e de cima são maiores que as laterais e também do mesmo tamanho. Pirâmide é uma forma com um triângulo nas laterais e na frente e no fundo. Paralelepípedo tem seis lados.

Descrição produzida pelo aluno “J”

É quando você termina uma frase e quer colocar o ponto. Vértice é uma linha que anda reta. Ângulos são as diferentes formas geométricas formadas por retas. Triângulo é uma forma que tem três cantos e três lados da mesma espessura. Quadrado é uma forma que tem quatro cantos e cada lado da mesma espessura. Retângulo é uma forma que tem quatro cantos e quatro lados não todos iguais. Pirâmide é uma antiga forma usada pelos egípcios comparada ao triângulo.

ANEXO B**QUADRO N° 01**

ANEXO B

QUADRO Nº 01

O aluno “K” descreveu o desenho de uma pirâmide regular de base quadrada da seguinte maneira:

Esta figura possui quatro lados, é pontiaguda, se parece com uma torre de energia, sua parte de baixo é quadrada. Podemos compará-la com um triângulo.

O aluno “L” descreveu o desenho de um cilindro da seguinte maneira:

Esta figura tem como base dois círculos e duas retas paralelas na vertical. Estes círculos ficam em cima e em baixo dessas duas retas paralelas.

O aluno “M” descreveu o desenho de um cilindro da seguinte maneira:

Este desenho tem um círculo na plataforma e outro em cima. Todo mundo conhece esse desenho. A forma geométrica do desenho é igual a uma lata de óleo.

O aluno “N” descreveu o desenho de um cubo da seguinte maneira:

Tem seis lados. Tem oito cantos. Tem doze retas.

O aluno “O” descreveu o desenho de uma pirâmide regular de base quadrada da seguinte maneira:

Ela tem quatro lados, dependendo do modo que eu vejo, sendo dois lados maiores que se encontram em um ponto no alto. O lado de baixo tem linhas retas e tem quatro pontos. Tem a forma de um triângulo. Essas formas se encontram às vezes no Egito.

O aluno “P” descreveu o desenho de um cubo da seguinte maneira:

Esse desenho tem de frente quatro lados iguais. Tem dois quadrados. Parece uma caixa d'água. Parece com uma caixa quadrada de presente fechada. É espacial.

FONTE: Discurso escrito por alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em se fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado tratava de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

ANEXO C

QUADRO N° 01

ANEXO C**QUADRO Nº 01**

Entrevista realizada com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da cidade de Campo Grande – MS, após o entrevistado ter participado de uma atividade na sala de informática que consistia do seguinte: com a ajuda de um programa de computador o aluno visualizava um cubo através de três câmeras em posições diferentes. O sujeito pesquisado deveria identificar as seis faces do referido desenho, de acordo com a perspectiva de cada câmera. Em seguida, expressar a sua opinião a respeito do uso do computador no processo de visualização de um desenho tridimensional.

Entrevista com o aluno “Q”

Para mim foi melhor porque através do computador a gente vai mexendo, vendo as formas dele e como ele se atualiza virando. Fica melhor também para gente entender como o cubo está atualizado, como o cubo está se movimentando, o tamanho, os lados dele. O computador favorece para a gente entender melhor. No papel a gente vai desenhar o cubo e não tem como ver os lados dele, mas no computador a gente entende melhor o movimento dele.

Entrevista com o sujeito “R”

Eu fui clicando, peguei o mouse, cliquei na figura, aí o cubo foi girando e eu fui descobrindo os lados do cubo. O computador me ajudou porque eu fui clicando e fui olhando a parte da figura de cima, de baixo, dos lados. Eu percebi que através do computador a gente pode desenvolver muito, ver muitas coisas reais que a gente pensa que não vai conseguir ver. O computador faz coisas que nós mesmos não conseguiríamos sem ele e o movimento.

Entrevista com o sujeito “S”

Foi mais fácil visualizar o cubo com o computador porque a gente pode mexer a figura, ver os lados. No papel não teríamos a mesma facilidade. É melhor aprender geometria com o computador porque ajuda a compreender melhor, ele permite mexer a figura, ver os lados, ver as cores.

Entrevista com o Sujeito “T”

Com a ajuda do computador foi melhor encontrar as faces do cubo porque dava para girar, de cabeça para baixo, para os lados, aumentar, diminuir, fazer tudo, e o problema ficou mais fácil. Tem mais possibilidade trabalhar com o computador do que numa folha de papel.

Entrevista com o Sujeito “U”

Foi bem mais fácil ver o cubo com o computador. Eu apertei um botão lá, fez girar a figura e aí fica mais fácil visualizar a figura. Se fosse numa folha de papel seria bem mais difícil encontrar todos os lados do cubo porque na folha de papel a gente tem de prestar muita atenção, no computador também, só que no computador é mais fácil. No computador eu consigo ver todas as faces mais rápido, no papel é mais demorado.

ANEXO D

QUADROS DE Nº 01 a 10

ANÁLISES IDEOGRÁFICAS - DISCURSO DOS ALUNOS

ANEXO D

QUADRO Nº 01

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “A”
UNIDADES DE SIGNIFICADO
1A. O ponto é um sinal no final de uma frase. 2A. O triângulo é uma figura formada por três linhas do mesmo tamanho. 3A. O quadrado é uma figura de quatro lados, formado por quatro linhas do mesmo tamanho. 4A. O retângulo é uma figura de quatro lados, formada por duas linhas do mesmo tamanho. 5A. O cubo é formado por seis quadrados do mesmo tamanho. 6A. A pirâmide é formada por três triângulos e um quadrado. 7A. O paralelepípedo é comprido.
DISCURSO ARTICULADO
1A. O aluno pesquisado define o sinal gráfico de “ponto”, usado na escrita, para terminar períodos ou frases, ao invés de descrever a sua compreensão a respeito do termo geométrico “ponto”, uma figura básica da geometria que não tem dimensão alguma, por ser considerada muito pequena. 2A. Na percepção do aluno, todo triângulo é uma figura formada por “três linhas” do mesmo tamanho (triângulo equilátero), excluindo os triângulos isósceles e escalenos. Ele utiliza a palavra “linhas” no lugar de segmentos de retas ou mesmo retas, como é usual da linguagem cotidiana. 3A. Ao dizer que o quadrado é formado por “quatro linhas do mesmo tamanho”, o aluno utiliza uma linguagem do cotidiano ao invés da linguagem matemática e demonstra dificuldade para nomear elementos conceituais, além de não mencionar nada a respeito dos ângulos. 4A. O aluno reconhece o retângulo pela representação gráfica de seus lados e não pela medida dos seus ângulos. O retângulo é um quadrilátero especial que tem os quatro ângulos retos.

Usa-se também a expressão do cotidiano “linhas retas” para nomear seus segmentos de retas.

5A. Ao descrever o cubo como uma figura geométrica formada por seis quadrados do mesmo tamanho, não menciona a sua dimensão espacial. Reconhece, no entanto, que as faces do cubo são quadradas.

6A. O aluno associa a descrição de uma pirâmide de base quadrada a uma figura formada por três triângulos e um quadrado. Não identifica a base e nem as faces da pirâmide, como também não ressalta as propriedades invariantes.

7A. Ao descrever o paralelepípedo como sendo uma figura geométrica comprida, o aluno demonstra a força do desenho na representação deste conceito. Geralmente esta figura é desenhada na horizontal, por isso o sujeito pesquisado destaca que ela é comprida, longa ou extensa. Utiliza a linguagem do cotidiano para descrevê-la.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO Nº 02

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “B”
UNIDADES DE SIGNIFICADO
8B. Ângulo é cada lateral de uma figura geométrica. 9B. Triângulo é uma figura com três lados iguais. 10B. Quadrado é uma figura com quatro lados iguais. 11B. Retângulo é uma figura de quatro lados, mas a lateral é mais larga. 12B. O cubo é um quadrado de vários lados. 13B. A Pirâmide é um triângulo. 14B. Paralelepípedos são pedras pequenas.
DISCURSO ARTICULADO
8B. O aluno utiliza a palavra “lateral”, relativa ao lado ou face de uma figura geométrica, para descrever a noção de ângulo, compreendida como sendo a medida em graus da área delimitada por dois segmentos de retas e um vértice em comum. 9B. Para este aluno, o triângulo sempre tem três lados iguais. 10B. O aluno pesquisado identifica uma das propriedades invariantes do quadrado, ou seja, os seus quatro lados têm a mesma medida. 11B. O aluno descreve corretamente o retângulo como sendo uma figura de quatro lados. Utiliza o termo do cotidiano “a lateral é mais larga” para se referir à dimensão de largura. Não reconhece o quadrado como um caso particular de retângulo. A configuração mais usual desta figura determina a compreensão do que é um retângulo. 12B. O aluno descreve o cubo como um quadrado de vários lados, o que indica que ele pode ter dificuldade para articular conceitos entre a geometria plana e a geometria espacial. Ele atribui as propriedades do quadrado ao cubo. 13B. Quando afirma que a pirâmide é como um triângulo, o aluno está associando um conceito da geometria plana a uma figura espacial. Além disso, demonstra dificuldade para reconhecer os elementos conceituais. 14B. O aluno associa o conceito de paralelepípedo a blocos no formato de paralelepípedos

usados, principalmente, em calçamentos de vias públicas. A descrição geométrica sofre a influência de um objeto material. Deixou de descrever ou nomear as propriedades invariantes da referida figura.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 03

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “C”
UNIDADES DE SIGNIFICADO
15C. Ponto é uma união de vértices. 16C. Vértices são retas que se encontram em um ponto. 17C. Ângulos são formados por dois ou mais vértices. 18C. Arestas são lados de um triângulo do tipo aresta x aresta x aresta. 19C. Perpendiculares são duas retas que se encontram. 20C. Triângulo é uma figura de três lados iguais. 21C. Quadrado é uma figura de quatro lados iguais. 22C. Retângulo é uma figura com dois lados iguais e dois diferentes.
DISCURSO ARTICULADO
15C. O aluno associa a definição de “ponto” à extremidade comum de dois segmentos de reta, originando um vértice. Neste caso, ele generaliza a noção geométrica de ponto a partir de um caso particular, pois, o “ponto geométrico” é uma figura fundamental da geometria, sem dimensão e presente em outras situações, tanto na geometria plana como na geometria espacial. 16C. Ao dizer que os vértices “são retas que se encontram em um ponto”, o aluno revela uma certa dificuldade para descrever devidamente este conceito, pois o termo vértice é utilizado na geometria para identificar o ponto de origem de suas semi-retas não contidas na mesma reta. 17C. O aluno relaciona ângulo com vértice. De fato o ângulo é formado por duas semi-retas que têm uma origem comum (vértice); no entanto, não mencionou que “ângulo” é a região convexa ou não-convexa formada por duas semi-retas. Ele não definiu matematicamente o que é um ângulo, mas destacou uma parte importante deste conceito. 18C. O termo “arestas” é comumente utilizado para descrever um segmento de reta comum a duas faces adjacentes de um poliedro. O aluno, no entanto, utiliza-o para se referir aos lados de um triângulo, como se esta figura geométrica fosse espacial. 19C. Quando afirma que perpendiculares “são duas retas que se encontram”, o aluno

demonstra uma compreensão parcial deste conceito ao não mencionar, fundamentalmente, que formam no ponto de intersecção um ângulo de 90° .

20C. O aluno descreve o triângulo como sendo uma figura que tem os “três lados iguais”. Ele toma um tipo particular de triângulo e aplica aos demais que não atendem a esta característica.

21C. O aluno reconhece uma das propriedades invariantes do quadrado, sinalizando um domínio parcial do conceito.

22C. O aluno descreve o conceito de retângulo com base na sua representação gráfica mais usual nos livros didáticos. O retângulo é um quadrilátero especial que tem os quatros ângulos retos. Possui quatro lados paralelos iguais dois a dois, com medida de comprimento e de largura diferentes.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 04

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “D”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

23D. Ponto serve para unir as retas.

24D. Vértices são lados da figura.

25D. Arestas são lados de um triângulo.

26D. Triângulo é uma figura de três lados.

27D. Quadrado é uma figura de quatro lados iguais.

28D. Retângulo é uma figura com dois lados iguais e dois diferentes.

DISCURSO ARTICULADO

23D. O conceito de “ponto” foi generalizado para uma situação bem específica, ou seja, “serve para unir as retas”, limitando assim um princípio fundamental da geometria. O ponto, na verdade, pode determinar um lugar geométrico na própria reta, no plano, no espaço, etc.

24D. O aluno afirma que “vértices são lados da figura”. A descrição deste conceito ficou prejudicada porque vértice é o ponto de origem de duas ou mais semi-retas, enquanto que o termo “lado” geralmente se refere aos segmentos de retas de um polígono regular.

25D. O termo “aresta” não é entendido pelo aluno como um segmento de reta comum adjacente a duas faces de um poliedro (figura geométrica espacial). Ele utiliza um termo próprio da geometria espacial (aresta) como se fosse da geometria plana. Arestas e lados têm o mesmo significado para ele. Além disso, se arestas são lados de um triângulo, como seriam denominados os lados das demais figuras geométricas planas, por exemplo?

26D. O aluno descreve corretamente o conceito de triângulo, pois todo e qualquer triângulo possui três lados.

27D. Apesar de não mencionar que o quadrado também tem quatro ângulos retos, o aluno demonstra que conhece o conceito desta figura geométrica ao mencionar que o mesmo tem quatro lados iguais. Não o distingue do losango.

28D. Para este aluno, todo retângulo tem dois lados iguais e dois diferentes. O aluno não

atentou para a principal propriedade do retângulo que é a de possuir todos os seus ângulos internos retos, ou seja, medindo 90° .

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 05

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “E”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

- 29E.** Ponto é uma certa parte que serve para localizar uma área.
- 30E.** Vértice é parte de uma figura...se localiza nos lados de uma certa figura.
- 31E.** Ângulo é a medida em graus de uma figura.
- 32E.** Triângulo é uma figura geométrica de três lados iguais.
- 33E.** Quadrado é uma figura geométrica de quatro lados iguais.
- 34E.** Retângulo é uma figura geométrica de quatro lados, dois maiores e dois menores.

DISCURSO ARTICULADO

- 29E.** O aluno manifesta a idéia de ponto como sendo um instrumento que serve para localizar uma área. Na realidade, quando se quer localizar uma cidade em um mapa vem a idéia de ponto. Em geometria, ponto não possui dimensões, e juntamente com reta e plano são considerados como idéias intuitivas, ou seja, que se percebem facilmente, e que é evidente e incontestável.
- 30E.** A idéia de que vértice “é parte de uma figura” é uma descrição inconsistente, uma vez que existem figuras geométricas que não têm vértices.
- 31E.** O sujeito relaciona o conceito de ângulo ao conceito de medida em graus.
- 32E.** O aluno reduz o conceito de triângulo a um caso particular de triângulo onde todos os seus lados têm a mesma medida.
- 33E.** O aluno identifica o quadrado como tendo quatro lados com a mesma medida. Não menciona nada sobre a medida dos seus ângulos.
- 34E.** O aluno reconhece o retângulo pela sua configuração gráfica, ou seja, o fato de ser um quadrilátero que possui dois lados paralelos maiores e dois lados paralelos menores. Não faz menção de que é um paralelogramo que tem os quatro ângulos retos.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 06

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “F”

UNIDADES DE SIGNIFICADO
35F. Vértice é uma linha deitada. 36F. Triângulo é uma figura geométrica com três lados, sendo dois lados verticais e um horizontal. 37F. Quadrado é uma figura geométrica que possui quatro lados iguais. 38F. Retângulo é uma figura geométrica que contém quatro lados, sendo dois lados maiores e os outros dois lados menores. 39F. Cubo é uma espécie de dado. 40F. Pirâmide é uma espécie de triângulo.
DISCURSO ARTICULADO
35F. O aluno descreve o vértice como sendo uma “<i>linha deitada</i>” porque na maioria dos casos de representação de um vértice nos livros didáticos e na sala de aula é feita através de uma figura formada por dois segmentos de retas e um ponto de origem comum, cuja medida da área convexa geralmente mede menos de 90°. 36F. O fato de dizer que o triângulo tem três lados, sendo dois verticais e um horizontal, demonstra a influência da estabilidade do desenho para o aluno, ou seja, para ele, sempre o triângulo vai estar colocado no plano numa mesma posição. 37F. Embora o aluno não tenha reconhecido a existência de quatro ângulos retos, identificou uma característica do quadrado, ou seja, possuir quatro lados iguais. 39F. Ao denominar o cubo como uma espécie de dado, o aluno está reduzindo o conceito geométrico a um objeto material. Neste caso, o modelo físico representa o próprio conceito da figura geométrica, em questão. 40F. Ao descrever a pirâmide como uma espécie de triângulo, o sujeito associa uma figura espacial a uma figura plana. Ele não menciona as propriedades invariantes da pirâmide.

Fonte: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 07

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “G”

UNIDADES DE SIGNIFICADOS

41G. Ponto é usado para determinar o final de uma frase, texto, verso, etc.

42G. Vértice é uma linha reta.

43G. Ângulo é uma reta cujos lados têm uma medida em graus.

44G. Triângulo é uma figura que tem os três lados iguais.

45G. Quadrado é uma figura que tem quatro lados iguais.

46G. Retângulo é uma figura que tem dois lados maiores e dois lados menores.

DISCURSO ARTICULADO

41G. Para o aluno da pesquisa, o ponto geométrico é um sinal de pontuação gramatical.

42G. O aluno descreve o vértice como se fosse uma reta. Usa o termo “linha reta” para caracterizá-lo. O vértice é o ponto de origem comum de dois segmentos de retas. O fato de usar a expressão “linha” denota que o aluno identifica nesta figura apenas um dos segmentos de reta.

43G. O aluno considera que ângulo “é uma reta” e que esta “reta” tem “lados” com medidas em graus. Na constituição de um ângulo, ele destaca a “reta” e a unidade padrão de medida, ou seja, o grau; mas não consegue articular estes conceitos para descrever matematicamente o que é um ângulo. A descrição ficou confusa e com erro conceitual.

44G. O aluno reconhece o triângulo como tendo os três lados iguais, esquecendo-se de que, de acordo com as medidas de seus lados, o triângulo pode ser equilátero (os três lados têm a mesma medida), isósceles (dois lados têm a mesma medida) e escaleno (os três lados têm medidas diferentes). O triângulo equilátero geralmente é mais utilizado no dia-a-dia para representar o conceito de triângulo, o que acabou exercendo uma influência na descrição do aluno.

45G. O aluno consegue identificar uma das invariantes deste quadrilátero, ou seja, o número de lados. Não menciona que seus quatro ângulos são retos.

46G. O aluno reconhece o retângulo pela configuração gráfica em relação aos lados da figura, ou seja, sempre com dois lados paralelos maiores e os outros dois menores. Não faz menção de que todos os seus ângulos são retos.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 08

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “H”

UNIDADES DE SIGNIFICADO
47H. O Ponto não precisa ter diâmetro específico. 48H. Vértice é um lado ao contrário. 49H. Ângulo é a quina de uma figura. 50H. Triângulo é uma figura geométrica com o tamanho dos lados iguais. 51H. Quadrado é uma figura geométrica. 52H. Retângulo é uma figura geométrica. 53H. Pirâmide é uma figura egípcia.
DISCURSO ARTICULADO
47H. Em geometria, ponto é uma noção fundamental e intuitiva que não possui “diâmetro”. O aluno identifica corretamente esta característica deste elemento. 48H. A imagem que o aluno tem de um vértice é de um “lado ao contrário”, ou melhor, duas semi-retas unidas por um ponto comum e sentidos diferentes. Ocorre que um vértice geralmente é ilustrado por um ponto “O”, a origem de duas semi-retas, denominado de vértice do ângulo. Estas semi-retas geralmente são denominadas de lados do ângulo. 49H. Ao descrever o ângulo como sendo a “quina” de uma figura geométrica, o aluno associa a idéia de ângulo com vértice. O termo “quina” é uma expressão oriunda da linguagem do cotidiano e não da linguagem formal da geometria e significa ponta, esquina. 50H. A imagem que o aluno tem de um triângulo é de uma figura que possui os três lados com a mesma medida (triângulo equilátero). Exclui os outros tipos de triângulos. 51H. A única característica do quadrado que o aluno identifica é a de ser uma figura geométrica, deixando de mencionar os elementos importantes deste conceito. 52H. A única característica do retângulo que o aluno identifica é a de ser uma figura geométrica. Deixou de mencionar outros elementos importantes deste conceito. 53H. Para ele, pirâmide é uma figura egípcia. O modelo material toma o lugar do conceito.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 09

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “T”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

- 54I.** Usamos pontos nas retas para definir alguns ângulos.
- 55I.** Ângulos são diferentes formas geométricas formados por retas.
- 56I.** Triângulo é uma figura com três ângulos do mesmo tamanho.
- 57I.** Quadrado é uma forma com quatro lados do mesmo tamanho.
- 58I.** Retângulo é uma forma com quatro lados, cujas laterais são iguais e as retas de baixo e de cima são maiores que as laterais e também do mesmo tamanho.
- 59I.** Pirâmide é uma forma com um triângulo nas laterais e na frente e no fundo.
- 60I.** Paralelepípedo tem seis lados.

DISCURSO ARTICULADO

- 54I.** O aluno associa a descrição de “ponto” a retas e ângulos ao mesmo tempo. Ele afirma corretamente que se pode localizar “pontos” nas retas, mas agrega de maneira confusa a idéia de que esses pontos “definem alguns ângulos”.
- 55I.** O aluno não menciona também a região interna formada por duas semi-retas com um mesmo ponto de origem como parte de um ângulo. Reconhece parcialmente os elementos fundamentais da figura de um ângulo.
- 56I.** O aluno afirma que o triângulo sempre tem os três ângulos com a mesma medida. Se fosse aceita esta descrição como correta, todos os triângulos seriam equiláteros, no entanto, existem outros tipos de triângulo de acordo com a medida de seus ângulos, como, por exemplo, o triângulo retângulo. Nos manuais didáticos são encontrados, com frequência, triângulos cujas medidas de cada um de seus ângulos medem menos de 90° .
- 57I.** O quadrado é descrito como tendo quatro lados iguais. O aluno não faz menção das medidas dos seus ângulos.
- 58I.** O aluno diz que o retângulo tem quatro lados paralelos dois a dois, sendo dois lados paralelos maiores e dois menores.

59I. O aluno reconhece que as faces, chamadas por ele de lado da pirâmide, são formadas por triângulos. Não menciona nada a respeito da base desta figura.

60I. O aluno percebe apenas um dos elementos do paralelepípedo: possuir seis faces, denominadas por ele de lados.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

QUADRO N ° 10

ANÁLISE IDEOGRÁFICA – DISCURSO DO ALUNO “J”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

- 61J.** Ponto é quando você termina uma frase.
- 62J.** Vértice é uma linha que anda reta.
- 63J.** Ângulos são as diferentes formas geométricas formadas por retas.
- 64J.** O triângulo é uma forma que tem três cantos e três lados da mesma espessura.
- 65J.** O quadrado tem quatro cantos e cada lado tem a mesma espessura.
- 66J.** O retângulo tem quatro cantos e quatro lados não todos iguais.
- 67J.** Pirâmide é uma antiga forma usada pelos egípcios comparada ao triângulo.

DISCURSO ARTICULADO

- 61J.** O aluno descreve o termo geométrico “ponto” como se fosse um sinal de pontuação com que se encerra um período gramatical.
- 62J.** O aluno não consegue descrever o que é um vértice corretamente. Menciona apenas que é uma “linha reta”, incorporando uma idéia de movimento ao dizer que se trata de uma linha que “anda reta”.
- 63J.** Muito embora o aluno reconheça a necessidade de semi-retas para formar um ângulo, não menciona a região convexa formada pelas duas semi-retas como parte de um ângulo.
- 64J.** Ao afirmar que o triângulo possui “três cantos e três lados da mesma espessura”, o aluno utiliza termos do cotidiano para descrever matematicamente este conceito. A palavra “canto” demonstra que o aluno associa a idéia de triângulo ao vértice e ângulo e “mesma espessura” com segmentos de retas que, por definição, não tem largura.
- 65J.** Ao mencionar que o quadrado tem “quatro cantos e cada canto tem a mesma espessura”, o sujeito relaciona a palavra “canto” ao termo geométrico “vértice” e a idéia de “espessura” ao fato dos segmentos de retas não possuírem largura.
- 66J.** O aluno reconhece que o retângulo tem quatro vértices e quatro lados, mas não menciona os outros elementos invariantes desta figura.

67J. Ao descrever a pirâmide como uma antiga forma usada pelos egípcios e que ela é semelhante a um triângulo, o aluno evoca um objeto material para representar o conceito e estabelece uma relação entre o plano e o espacial.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, em uma folha de papel, sobre o significado geométrico dos seguintes termos: ponto, vértice, ângulos, aresta, diagonal, paralelismo, perpendiculares, perspectiva, triângulo, quadrado, retângulo, cubo, pirâmide e paralelepípedo.

ANEXO E

QUADROS DE Nº 01 a 06

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO

ANEXO E

QUADRO N ° 01

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “K”
UNIDADES DE SIGNIFICADO
68K. Esta figura possui quatro lados. 69K. É pontiaguda. 70K. Parece com uma torre de energia. 71K. Sua parte de baixo é quadrada. 72K. Podemos compará-la com um triângulo.
DISCURSO ARTICULADO
68K. O aluno utiliza a palavra “lados”, que é um termo da geometria plana, para descrever as faces da pirâmide, uma figura geométrica espacial. A expressão “lado” é comumente empregada na descrição de figuras planas e não de figuras espaciais. A pirâmide que lhe foi mostrada tem base quadrada e quatro faces triangulares. 69K. O aluno diz que o desenho é “pontiagudo”, ou seja, que termina em ponta aguçada. Para ele, a pirâmide é uma figura com extremidade estreita. A sua descrição está baseada no fato desta figura possuir um vértice formado pelas arestas das faces triangulares. A palavra “pontiaguda” foi extraída pelo aluno da linguagem do cotidiano e aplicada à descrição de um conceito geométrico. 70K. O aluno associa conceito geométrico de pirâmide a um objeto material encontrado no cotidiano, no caso, uma torre de energia. Ele preferiu recorrer a um objeto parecido e facilmente encontrado no dia-a-dia para descrever a figura dada. 71K. A base da figura é denominada, pelo aluno, como “parte de baixo”. Ele consegue identificar a representação de um quadrado em perspectiva. 72K. O aluno compara a pirâmide com um triângulo. Os elementos invariantes praticamente não são mencionados. Em lugar disso, procura associar uma figura geométrica espacial a uma

figura geométrica plana.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho de uma pirâmide de base quadrada que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado trata-se de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

QUADRO N ° 02

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “L”	
UNIDADES DE SIGNIFICADOS	
73L. Esta figura tem como base dois círculos. 74L. Duas retas paralelas na vertical. 75L. Estes círculos ficam em cima e em baixo.	
DISCURSO ARTICULADO	
73L. A representação dos círculos de base do cilindro é decodificada corretamente pelo aluno. O desenho usual desta figura sempre é construído na vertical, ou seja, uma das duas faces que tem a forma geométrica de um círculo, geralmente, aparece apoiada num plano. O aluno destaca esta característica do cilindro. 74L. O aluno identifica o paralelismo contido na representação do cilindro.. 75L. O aluno utiliza termos da linguagem cotidiana para caracterizar o paralelismo entre as bases do círculo, e idealiza uma imagem do cilindro em uma posição que, para ele, faz sentido.	

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho de um cilindro que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado trata-se de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

QUADRO N ° 03

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “M”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

76M. Este desenho tem um círculo na plataforma e outro em cima.

77M. A forma geométrica do desenho é igual a uma lata de óleo.

78M. Todo mundo conhece esse desenho.

DISCURSO ARTICULADO

76M. O aluno consegue identificar a representação dos círculos de base do cilindro e utiliza termo da linguagem do cotidiano para caracterizar uma das bases desta figura. A palavra “plataforma”, neste caso, tem o sentido de base da figura. Com isto ele quis dizer que o cilindro tem um círculo na base e outro na parte posterior.

77M. O aluno associa a figura a uma lata de óleo utilizado no preparo de alimentos. Hoje, as indústrias utilizam mais os recipientes na forma de garrafa plástica, entretanto, as latas de óleo, no formato cilíndrico, foram amplamente utilizadas.

78M. O aluno diz que o desenho é bastante conhecido, ou seja, qualquer pessoa reconhece um cilindro. A expressão “bastante conhecida” reforça a idéia de que esta figura é familiar à maioria das pessoas.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho de um cilindro que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado trata-se de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

QUADRO N ° 04

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “N”	
UNIDADES DE SIGNIFICADO	
79N. Tem seis lados. 80N. Tem oito cantos. 81N. Tem doze retas.	
DISCURSO ARTICULADO	
79N. O aluno utiliza o termo “lado” para se referir às faces do cubo e destaca uma das propriedades invariantes da figura, ou seja, o número de faces. Embora a expressão “lado” possa ser utilizada para se referir à superfície de um corpo, o apropriado seria dizer face, por se tratar de uma figura espacial. A linguagem do cotidiano prevaleceu sobre a linguagem matemática. 80N. O aluno utiliza o termo “cantos” para nomear o ponto de interseção entre as faces. Apesar de usar um termo extraído da linguagem do cotidiano, ele identifica uma das propriedades invariantes do cubo. 81N. O aluno denomina “retas” as arestas do cubo. Ele identifica uma propriedade invariante do cubo, ou seja, o número de arestas.	

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho de um cubo que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado trata-se de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

QUADRO Nº 05

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “O”
UNIDADES DE SIGNIFICADO 82O. Ela tem quatro lados, dependendo do modo que eu vejo. 83O. Dois lados maiores se encontram em um ponto alto. 84O. O lado de baixo tem linhas retas e tem quatro pontos. 85O. Tem a forma de um triângulo. 86O. Essas formas se encontram às vezes no Egito.
DISCURSO ARTICULADO 82O. O aluno utiliza a palavra “lado” para se referir às faces da pirâmide. Afirma que dependendo da posição do sujeito em relação ao objeto, a figura apresentada tem quatro lados. 83O. O aluno visualiza duas faces da figura e as denomina de “lados maiores”. Ao invés de considerar o vértice como ponto de encontro das arestas, considera-o como o encontro de dois “<i>lados</i>”. Complementa a descrição dizendo que esses “lados” têm um ponto em comum na parte superior, que, na verdade, é um dos vértices da pirâmide. 84O. A expressão “lados” agora é utilizada pelo aluno para se referir às arestas da base da pirâmide. Ele identifica que a base da figura é quadrada, mesmo se tratando de uma representação da base quadrada em perspectiva. Ele utiliza a expressão do cotidiano “<i>lado de baixo</i>” para nomear a referida base. 85O. O aluno compara a pirâmide com um triângulo, utilizando o termo “forma” para expressar esta comparação. Em outras palavras, a pirâmide é parecida com um triângulo. 86O. O aluno compara a pirâmide com as construções encontradas no Egito. As construções aludidas pelo aluno são as famosas pirâmides construídas pelos Faraós do Egito antigo.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho de uma pirâmide regular de base quadrada que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado trata-se de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

QUADRO N ° 06

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “P”
UNIDADES DE SIGNIFICADO
87P. Esse desenho tem de frente quatro lados iguais. 88P. Tem dois quadrados. 89P. Parece uma caixa d’água. 90P. Parece uma caixa quadrada de presente fechada. 91P. É espacial.
DISCURSO ARTICULADO
87P. O aluno denomina de “lado” as quatro arestas da face frontal do cubo e percebe que estes “lados” possuem a mesma medida. 88P. O aluno conseguiu visualizar apenas duas faces do cubo, denominando-as de “lados”. As outras faces mais perspectivadas não foram mencionadas por ele. 89P. O aluno associa a figura geométrica do cubo a um objeto do cotidiano. A caixa d’água imaginada por ele tem a forma de um cubo. 90P. Para este aluno, o cubo é semelhante a uma caixa de presente quadrada e totalmente fechada. Ele associa a forma geométrica do cubo a um objeto material. 91P. O aluno utiliza uma nomenclatura própria da linguagem geométrica e identifica na representação plana um objeto tridimensional.

FONTE: Discurso escrito por um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da periferia da cidade de Campo Grande - MS. A atividade consistia em fazer uma descrição detalhada, na linguagem matemática, em uma folha de papel, do desenho de um cubo que lhe foi entregue pelo pesquisador. O desenho apresentado trata-se de uma representação em perspectiva paralela, com uso de pontilhados, semelhantes aos desenhos que normalmente aparecem nos livros didáticos. A descrição do aluno serviu de base para que outro colega de sala construísse o desenho da figura geométrica descrita, sem que lhe fosse mencionado o nome da respectiva figura.

ANEXO F

QUADROS DE N º 01 A 05

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO

ANEXO F

QUADRO N ° 01

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “Q”

UNIDADES DE SIGNIFICADO
92Q. Para mim foi melhor. 93Q. A gente vai mexendo. 94Q. Entender como o cubo está atualizando. 95Q. No papel a gente vai desenhar o cubo e não tem como ver os lados dele. 96Q. A gente entende melhor o movimento dele.
DISCURSO ARTICULADO
92Q. O aluno ressalta que para ele foi “melhor” estudar geometria num ambiente computacional. As palavras “para mim” demonstram o seu sentimento pessoal em relação ao uso do computador. Entre visualizar o cubo numa folha de papel e em ambiente computacional, ele prefere este último. 93Q. O aluno destaca a possibilidade de “mexer” o desenho na tela do computador. Numa folha de papel ou no quadro de escrever, não seria possível movimentá-la, daí a referência a este recurso da informática. 94Q. A palavra entender, para este aluno, tem o sentido de compreender ou perceber. Ele usa a palavra “atualizando” no sentido de que, através do movimento permitido pelo computador, o cubo vai se mostrando em todas as suas faces. 95Q. A expressão “desenhar” está relacionada à idéia de representar num plano, no caso, numa folha de papel, a figura de um cubo tal como se apresenta à vista. Para este aluno, esse desenho dificulta a visualização de todos os lados da figura. 96Q. Mais uma vez, o aluno destaca a possibilidade, que o computador oferece, de movimentar o desenho e considera que ele compreende como o cubo se mostra.

FONTE: Entrevista com um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Campo Grande - MS. A entrevista foi realizada após o entrevistado ter participado de uma atividade na sala de informática que consistia do seguinte: com a ajuda de um programa de computador o aluno podia visualizar um cubo através de três câmeras em posições diferentes. O aluno pesquisado deveria mencionar, de acordo com a perspectiva de cada câmera, as faces do cubo vistas de cima, de baixo, pela direita, pela esquerda, de frente e atrás. Em seguida, expressar a sua opinião a respeito do uso do computador no processo de visualização.

QUADRO N ° 02

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “R”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

97R. O cubo foi girando.

98R. Fui descobrindo os lados do cubo.

99R. O computador me ajudou.

100R. Através do computador a gente pode desenvolver muito.

101R. O computador faz coisas que nós mesmos não conseguiríamos sem ele.

DISCURSO ARTICULADO

97R. Ao mencionar que “o cubo foi girando”, o aluno destaca o recurso do movimento e da interatividade, permitido pelo computador. A palavra “girando” denota que a figura descrevia movimentos circulares na tela do computador.

98R. A expressão “fui descobrindo” dá a idéia de que à medida que ele movimentava a figura ia percebendo as suas faces. Utiliza a palavra “lados” para denominar as respectivas faces do cubo.

99R. O aluno considera que o computador facilitou o seu trabalho de nomear as faces do cubo.

100R. O aluno ressalta que o computador ajuda a desenvolver os seus conhecimentos de maneira considerável.

101R. Para ele, o computador faz coisas que as pessoas, incluindo ele, não são capazes de fazer sem esta máquina.

FONTE: Entrevista com um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da cidade de Campo Grande - MS. A entrevista foi realizada após o entrevistado ter participado de uma atividade no laboratório de informática que consistia do seguinte: com a ajuda de um programa de computador o aluno podia visualizar um cubo através de três câmeras em posições diferentes. O aluno pesquisado deveria mencionar, de acordo com a perspectiva de cada câmera, as faces do cubo vistas de cima, de baixo, pela direita, pela esquerda, de frente e atrás. Em seguida, expressar a sua opinião a respeito do uso do computador no processo de visualização.

QUADRO N ° 03

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “S”
--

UNIDADES DE SIGNIFICADO
102S. Foi mais fácil visualizar o cubo com o computador. 103S. Porque a gente pode mexer a figura, ver os lados. 104S. No papel não teríamos a mesma facilidade. 105S. É melhor aprender geometria com o computador.
DISCURSO ARTICULADO
102S. O aluno destaca que o computador facilitou a sua tarefa de visualizar e nomear todas as faces do cubo. A expressão “foi mais fácil” demonstra que de outra forma seria mais difícil desenvolver a atividade solicitada pelo pesquisador. 103S. A possibilidade de movimentar a figura no computador é considerada pelo aluno como um recurso que ajuda a visualizar as faces do cubo. Ele denomina de “lado” as faces da figura dada. 104S. O aluno considera mais difícil identificar as faces do cubo desenhadas numa folha de papel do que no computador. 105S. O aluno volta a enfatizar que é melhor aprender geometria com o computador do que apenas utilizando os recursos pedagógicos tradicionais.

FONTE: Entrevista com um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da cidade de Campo Grande - MS. A entrevista foi realizada após o entrevistado ter participado de uma atividade no laboratório de informática que consistia do seguinte: com a ajuda de um programa de computador o aluno podia visualizar um cubo através de três câmeras em posições diferentes. O aluno pesquisado deveria mencionar, de acordo com a perspectiva de cada câmera, as faces do cubo vistas de cima, de baixo, pela direita, pela esquerda, de frente e atrás. Em seguida, expressar a sua opinião a respeito do uso do computador no processo de visualização.

QUADRO N º 04

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “T”
--

UNIDADES DE SIGNIFICADO
106T. Com a ajuda do computador foi melhor encontrar as faces do cubo. 107T. Porque dava para girar de cabeça para baixo, para os lados, aumentar, diminuir. 108T. E o problema ficou mais fácil. 109T. Tem mais possibilidade em trabalhar com o computador do que numa folha de papel.
DISCURSO ARTICULADO
106T. O aluno destaca que “foi melhor” descobrir as faces do cubo com a ajuda do computador. Utiliza o termo “faces” apropriadamente, pois se trata de uma figura geométrica espacial. 107T. Ao descrever a possibilidade de girar a figura no computador, o aluno mostra que ele pode visualizar o cubo de perspectivas diferentes. 108T. O problema colocado para o aluno foi descrever as faces do cubo segundo a perspectiva de cada uma das câmaras previamente selecionadas no programa instalado no computador. Na sua opinião, esta tarefa ficou mais fácil com a ajuda deste suporte pedagógico. 109T. O aluno acredita que é mais fácil aprender geometria com a ajuda do computador do que apenas usando lápis e uma folha de papel.

FONTE: Entrevista com um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da cidade de Campo Grande - MS. A entrevista foi realizada após o entrevistado ter participado de uma atividade no laboratório de informática que consistia do seguinte: com a ajuda de um programa de computador o aluno podia visualizar um cubo através de três câmeras em posições diferentes. O aluno pesquisado deveria mencionar, de acordo com a perspectiva de cada câmera, as faces do cubo vistas de cima, de baixo, pela direita, pela esquerda, de frente e atrás. Em seguida, expressar a sua opinião a respeito do uso do computador no processo de visualização.

QUADRO N ° 05

ANÁLISE IDEOGRÁFICA - DISCURSO DO ALUNO “U”

UNIDADES DE SIGNIFICADO

- 110U.** Foi bem mais fácil ver o cubo com o computador.
- 111U.** Eu apertei um botão lá, fez girar a figura e aí fica mais fácil visualizar a figura.
- 112U.** Se fosse numa folha de papel seria mais difícil encontrar todos os lados do cubo.
- 113U.** No computador eu consigo ver todas as faces mais rápido, no papel é mais demorado.

DISCURSO ARTICULADO

- 110U.** O aluno destaca que foi mais fácil visualizar o cubo com o computador.
- 111U.** O aluno ressalta dois recursos que o computador pode oferecer e que o ajudaram a visualizar a figura dada: a interatividade e o movimento. À medida que ele selecionava uma das câmaras, o cubo girava e assim ficou mais fácil perceber as faces do cubo.
- 112U.** O aluno diz que é mais fácil identificar todas as faces do cubo com a ajuda do computador do que se ele estivesse desenhado numa folha de papel. A sua conclusão logicamente leva em consideração a possibilidade que esta máquina oferece de movimentar a figura, uma vez que ele afirma ser mais difícil executar esta mesma tarefa se o cubo tivesse sido desenhado numa folha de papel.
- 113U.** O aluno afirma que o computador o ajudou a visualizar e denominar as faces do cubo mais rapidamente. Ele acredita que se o cubo estivesse sido desenhado numa folha de papel levaria mais tempo para completar a mesma atividade.

FONTE: Entrevista com um(a) aluno(a) da 8ª série do Ensino Fundamental de uma Escola Pública da cidade de Campo Grande - MS. A entrevista foi realizada após o entrevistado ter participado de uma atividade no laboratório de informática que consistia do seguinte: com a ajuda de um programa de computador o aluno podia visualizar um cubo através de três câmeras em posições diferentes. O aluno pesquisado deveria mencionar, de acordo com a perspectiva de cada câmera, as faces do cubo vistas de cima, de baixo, pela direita, pela esquerda, de frente e atrás. Em seguida, expressar a sua opinião a respeito do uso do computador no processo de visualização.

ANEXO G**QUADRO DE CONVERGÊNCIAS – 01**

ANEXO G

QUADRO DE CONVERGÊNCIAS – 01

UNIDADES DE SIGNIFICADO DOS ALUNOS “A” a “U”	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1A. O ponto é um sinal no final de uma frase.	X		X		X				
2A. O triângulo é uma figura formada por três linhas do mesmo tamanho.	X		X		X				
3A. O quadrado é uma figura de quatro lados, formado por quatro linhas do mesmo tamanho.	X		X		X				
4A. O retângulo é uma figura de quatro lados, formada por duas linhas do mesmo tamanho.	X		X		X				
5A. O cubo é formado por seis quadrados do mesmo tamanho.		X	X	X	X				
6A. A pirâmide é formada por três triângulos e um quadrado.		X	X	X	X				
7A. O paralelepípedo é comprido.	X		X		X				
8B. Ângulo é cada lateral de uma figura geométrica.	X				X				
9B. Triângulo é uma figura com três lados iguais.	X		X		X				
10B. Quadrado é uma figura com quatro lados iguais.	X		X		X				
11B. Retângulo é uma figura de quatro lados, mas a lateral é mais larga.	X		X		X				
12B. O cubo é um quadrado de vários lados.	X	X	X	X	X				
13B. A Pirâmide é um triângulo.		X	X	X	X				
14B. Paralelepípedos são pedras pequenas.	X		X		X	X			
15C. Ponto é uma união de vértices.			X		X				

UNIDADES DE SIGNIFICADO DOS SUJEITOS “A” a “U”	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16C. Vértices são retas que se encontram em um ponto.			X		X				
17C. Ângulos são formados por dois ou mais vértices.					X				
18C. Arestas são lados de um triângulo do tipo aresta x aresta x aresta.	X	X	X		X				
19C. Perpendiculares são duas retas que se encontram.	X	X	X		X				
20C. Triângulo é uma figura de três lados iguais.	X		X		X				
21C. Quadrado é uma figura de quatro lados iguais.	X		X		X				
22C. Retângulo é uma figura com dois lados iguais e dois diferentes.	X		X		X				
23D. Ponto serve para unir as retas.			X		X				
24D. Vértices são lados da figura.					X				
25D. Arestas são lados de um triângulo.		X		X	X				
26D. Triângulo é uma figura de três lados.	X								
27D. Quadrado é uma figura de quatro lados iguais.	X								
28D. Retângulo é uma figura com dois lados iguais e dois diferentes.	X		X		X				
29E. É uma certa parte que serve para localizar uma área.	X		X		X				
30E. Vértice é parte de uma figura ..se localiza nos lados de uma certa figura.					X				
31E. Ângulo é a medida em graus de uma figura.			X		X				
32E. Triângulo é uma figura geométrica de três lados iguais.	X		X		X				

UNIDADES DE SIGNIFICADO DOS SUJEITOS “A” a “U”	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33E. Quadrado é uma figura geométrica de quatro lados iguais.	X				X				
34E. Retângulo é uma figura geométrica de quatro lados, dois maiores e dois menores.	X		X		X				
35F. Vértice é uma linha deitada.	X				X				
36F. Triângulo é uma figura geométrica com três lados, sendo dois lados verticais e um horizontal.	X		X						
37F. Quadrado é uma figura geométrica que possui quatro lados iguais.	X				X				
38F. Retângulo é uma figura geométrica que contém quatro lados, sendo dois lados maiores e os outros dois lados menores.	X		X		X				
39F. Cubo é uma espécie de dado.	X		X		X	X			
40F. Pirâmide é uma espécie de triângulo.	X	X	X	X	X				
41G. É usado para determinar o final de uma frase, texto, verso, etc.	X		X		X				
42G. Vértice é uma linha reta.	X				X				
43G. Ângulo é uma reta cujos seus lados tem uma medida em graus.					X				
44G. Triângulo é uma figura que tem os três lados iguais.	X		X		X				
45G. Quadrado é uma figura que tem quatro lados iguais.	X				X				
46G. Retângulo é uma figura que tem dois lados maiores e dois lados menores.	X		X		X				
47H. O Ponto não precisa ter diâmetro específico.					X				
48H. Vértice é um lado ao contrário.					X				

UNIDADES DE SIGNIFICADO DOS SUJEITOS “A” a “U”	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49H. Ângulo é a quina de uma figura.	X		X		X				
50H. Triângulo é uma figura geométrica com o tamanho dos lados iguais.	X		X		X				
51H. Quadrado é uma figura geométrica.			X		X				
52H. Retângulo é uma figura geométrica.			X		X				
53H. Pirâmide é uma figura egípcia.			X		X	X			
54I. Usamos pontos nas retas para definir alguns ângulos.					X				
55I. Ângulos são diferentes formas geométricas formados por retas.			X		X				
56I. Triângulo é uma figura com três ângulos do mesmo tamanho.			X		X				
57I. Quadrado é uma forma com quatro lados do mesmo tamanho.	X				X				
58I. Retângulo é uma forma com quatro lados, cujas laterais são iguais e as retas de baixo e de cima são maiores que as laterais e também do mesmo tamanho.	X		X		X				
59I. Pirâmide é uma forma com um triângulo nas laterais e na frente e no fundo.		X	X	X	X				
60I. Paralelepípedo tem seis lados.		X			X				
61J. [Ponto] é quando você termina uma frase.	X		X		X				
62J. Vértice é uma linha que anda reta.	X				X				
63J. Ângulos são as diferentes formas geométricas formadas por retas.					X				

UNIDADES DE SIGNIFICADO DOS SUJEITOS “A” a “U”	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64J. O triângulo é uma forma que tem três cantos e três lados da mesma espessura	X		X		X				
65J. O quadrado tem quatro cantos e cada lado tem a mesma espessura.	X		X		X				
66J. O retângulo tem quatro cantos e quatro lados não todos iguais.	X		X		X				
67J. Pirâmide é uma antiga forma usada pelos egípcios comparada ao triângulo.		X	X	X	X	X			
68K. Esta figura possui quatro lados.	X	X			X				
69K. É pontiaguda.	X				X				
70K. Parece com uma torre de energia.	X		X		X	X			
71K. Sua parte de baixo é quadrada.	X								
72K. Podemos compará-la com um triângulo.			X	X					
73L. Esta figura tem como base dois círculos.									
74L. Duas retas paralelas na vertical.									
75L. Estes círculos ficam em cima e em baixo.	X								
76M. Este desenho tem um círculo na plataforma e outro em cima.	X								
77M. A forma geométrica do desenho é igual a uma lata de óleo.					X	X			
78M. Todo mundo conhece esse desenho.			X		X	X			

UNIDADES DE SIGNIFICADO DOS SUJEITOS “A” a “U”	1	2	3	4	5	6	7	8	9
110U. Foi bem mais fácil ver o cubo com o computador.							X	X	
111U. Eu apertei um botão lá, fez girar a figura e aí fica mais fácil visualizar a figura.							X	X	X
112U. Se fosse numa folha de papel seria mais difícil encontrar todos os lados do cubo.	X							X	
113U. No computador eu consigo ver todas as faces mais rápido, no papel é mais demorado.									

1. Influência da língua natural; 2. Conflito de linguagem: plana x espacial; 3. Generalizações apressadas; 4. Comparação entre figuras geométricas planas e espaciais; 5. Dificuldade para reconhecer elementos conceituais; 6. Dificuldade de articulação: concreto x abstrato x concreto; 7. O computador como mediador da aprendizagem; 8. O computador favorece a visualização; 9. O ambiente interativo favorece a aprendizagem.

ANEXO H**QUADROS DE CONVERGÊNCIAS****Nº 01 A 03**

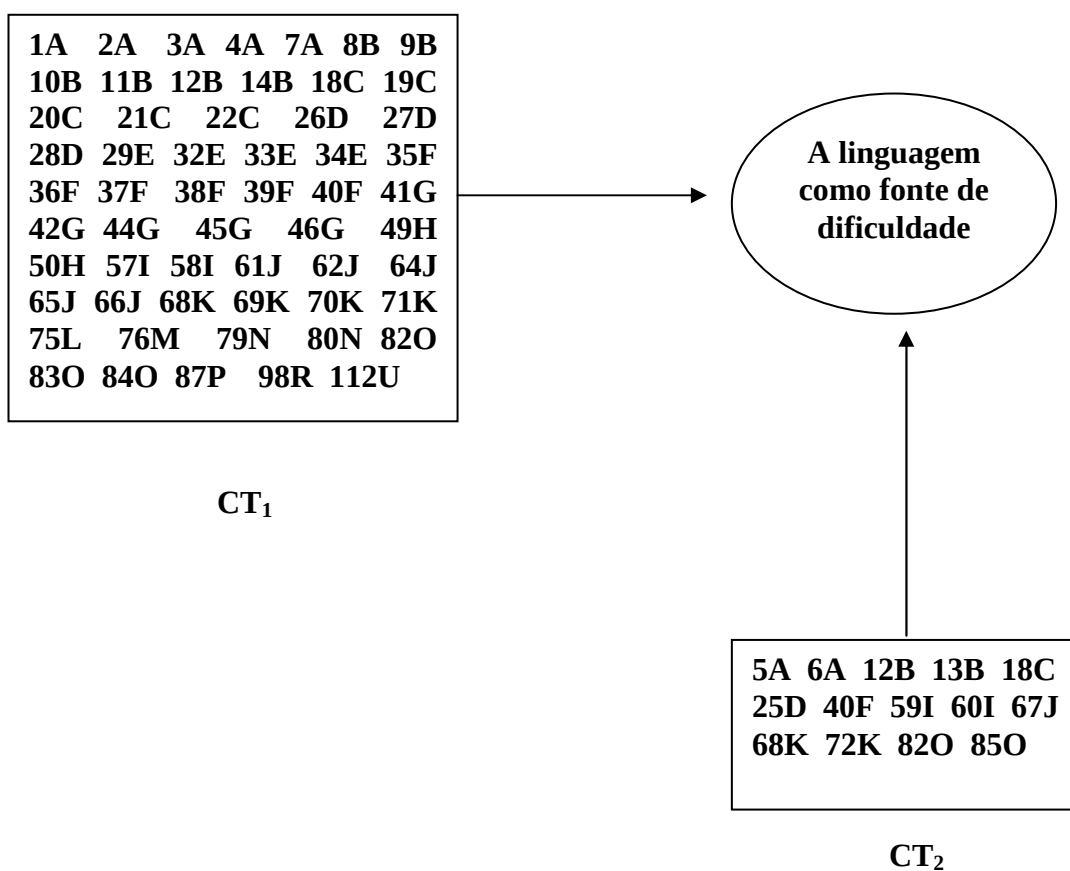
ANEXO H

QUADRO DE CONVERGÊNCIAS – 01

CATEGORIA ABERTA (1): <i>A linguagem como fonte de dificuldade</i>
--

Confluência Temática (1) - Influência da língua natural.

Confluência Temática (2) - Conflito de linguagem: plana x espacial.



QUADRO DE CONVERGÊNCIAS – 02

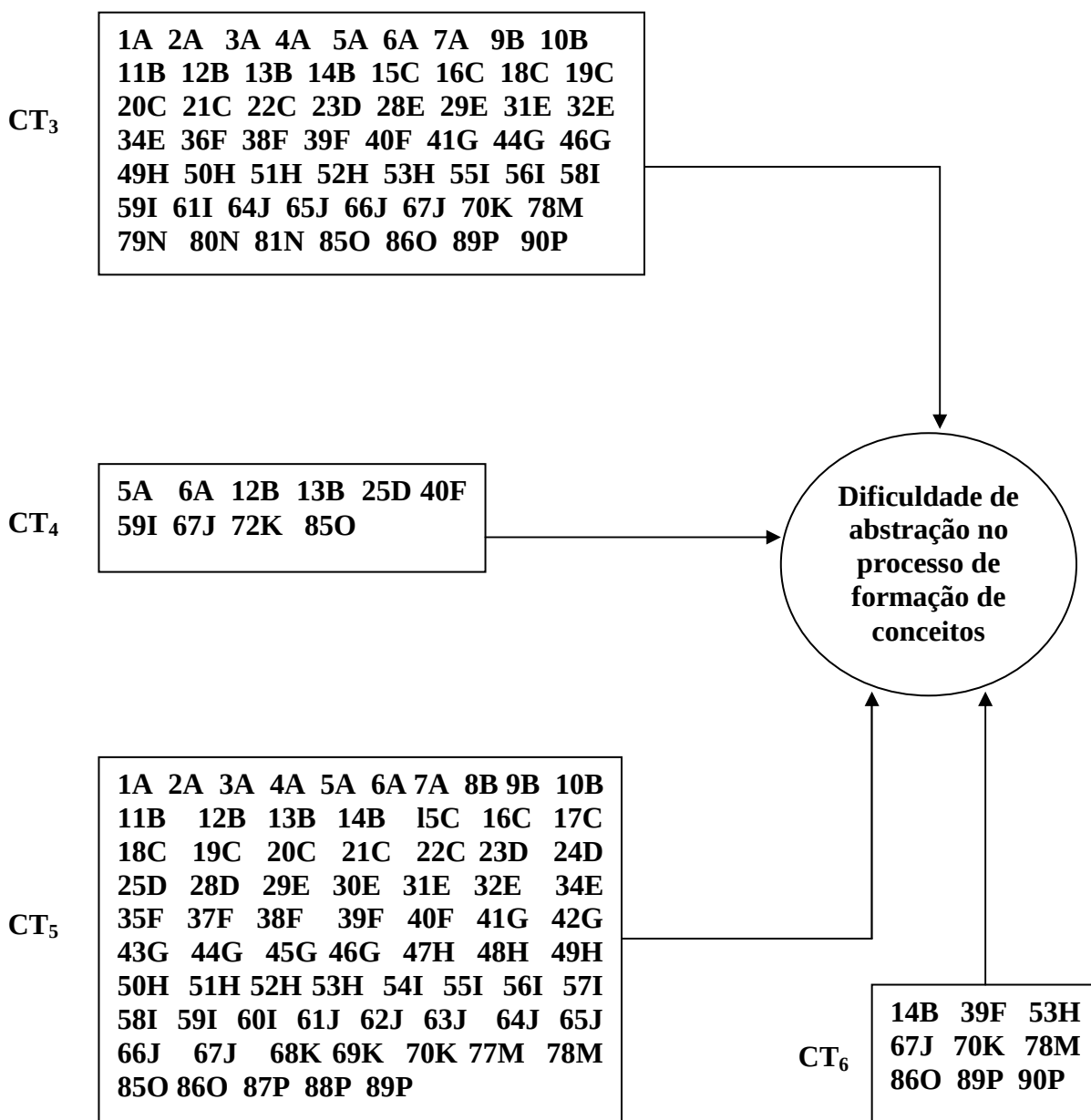
CATEGORIA ABERTA (2): *Dificuldade de abstração no processo de formação de conceitos*

Confluência Temática (3) – Generalizações apressadas.

Confluência Temática (4) – Comparação entre figuras geométricas planas e.

Confluência Temática (5) – Dificuldade para reconhecer elementos conceituais.

Confluência Temática (6) – Dificuldade de articulação entre o estágio das operações concretas e o estágio das operações abstratas.



QUADRO DE CONVERGÊNCIAS – 03

CATEGORIA ABERTA (3): *O computador facilita a visualização e a aprendizagem da geometria*

Confluência Temática (7) – O computador como mediador da aprendizagem.

Confluência Temática (8) – O computador favorece a visualização.

Confluência Temática (9) – O ambiente interativo favorece aprendizagem.

