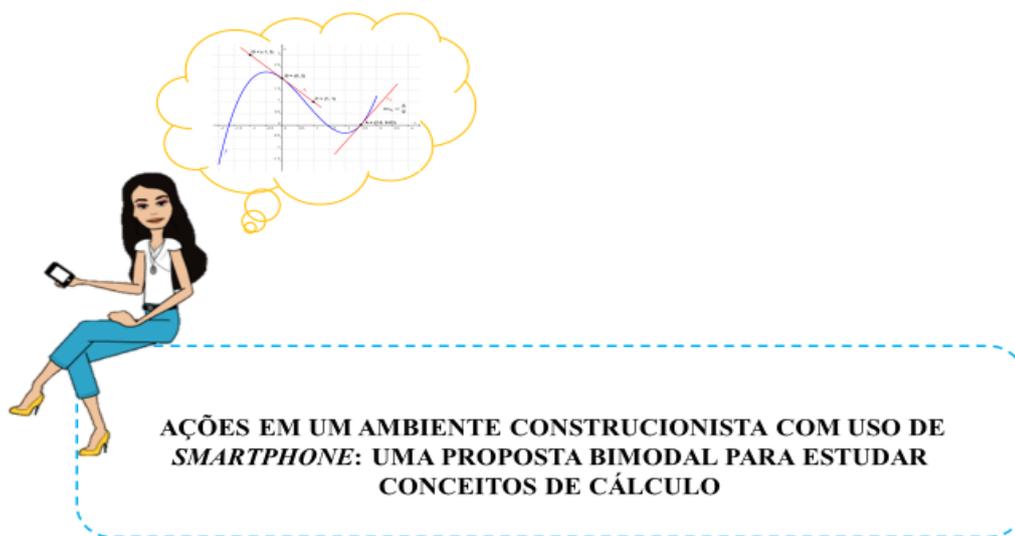




UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

VANESSA RODRIGUES LOPES



Campo Grande - MS

2020

VANESSA RODRIGUES LOPES



**AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE
SMARTPHONE: UMA PROPOSTA BIMODAL PARA ESTUDAR
CONCEITOS DE CÁLCULO**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Suely Scherer

Campo Grande - MS

2020

VANESSA RODRIGUES LOPES

**AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE
SMARTPHONE: UMA PROPOSTA BIMODAL PARA ESTUDAR CONCEITOS DE
CÁLCULO**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de doutora em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Suely Scherer (UFMS)
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (UFMS)
Prof. Dr. José Armando Valente (UNICAMP)
Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari (UFMS)
Profa. Dra. Gláucia da Silva Brito (UFPR)
Prof. Dr. Ádamo Duarte de Oliveira (UFMS)

Resultado:

Campo Grande, 14 de fevereiro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Agradeço as pessoas que de alguma forma me ajudaram e que estiveram ao meu lado durante o curso de Doutorado, afinal foram quase quatro anos de luta, de choro, de apoio, de parceira, e de alegrias também. Faço questão de explicitar meu muito obrigada a algumas em especial:

- ✓ À Deus e nossa senhora de Aparecida por estarem ao meu lado sempre, me dando força e aumentando a minha fé.
- ✓ À minha família pelo apoio, pela força e pelo amor. Em especial minha mãe e meu pai, Maria e Laurindo, que sempre confiaram em mim e sempre me incentivaram a estudar. Meus irmãos, Marcelo, Valquiria e Laurisa, por estarem ao meu lado me apoiando e incentivando.
- ✓ Ao meu noivo, Deivid, por todo amor, compreensão, dedicação e apoio, sempre irradiando energias positivas que contribuíram durante meu processo de doutoramento e conclusão desta tese.
- ✓ À Profa. Dra. Suely Scherer que com muita sabedoria e dedicação me orientou no doutorado. Agradeço à Deus por colocar uma orientadora e amiga tão especial em meu caminho, pois ela me proporcionou crescimento como pesquisadora e educadora.
- ✓ Aos professores da banca, José Luiz Magalhães de Freitas, José Armando Valente, Aparecida Santana de Souza Chiari, Glaucia da Silva Brito, Ádamo Duarte de Oliveira, pelas leituras e contribuições.
- ✓ À minha amiga Ivanete Blauth pela força e parceria, principalmente durante a experimentação dessa pesquisa.
- ✓ A todos os meus professores do programa de Pós-Graduação em Educação em Educação Matemática.
- ✓ Ao grupo GETECMAT, pelas preciosas discussões.
- ✓ Ao meu amigo Frederico pelos momentos de conversas sobre a tese e que muito contribuiu na fase do estudo teórico.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

As dificuldades em relação ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral é uma problemática no campo da Educação Matemática. Diante dessa problemática, essa tese de doutorado foi orientada pela seguinte questão de pesquisa: que ações podem favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo, em um processo de educação bimodal, com uso de *smartphones*? O objetivo foi o de identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de cálculo em um ambiente construcionista, em uma proposta de educação bimodal, com uso de *smartphone*. Para atingir os objetivos foi elaborada e desenvolvida para uma disciplina de Matemática I, uma proposta de estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, em formato de encontros presenciais e a distância, com/para uso de *smartphone*. A interação entre os sujeitos no espaço virtual aconteceu em um grupo do WhatsApp e os materiais didáticos selecionados e elaborados para a disciplina foram disponibilizados a partir da plataforma GeoGebra. No espaço presencial, foram planejadas e desenvolvidas aulas com uso de *smartphone* e espelhamento de tela. Para analisar ações que favoreceram a aprendizagem no ambiente construcionista, a construção teórica dessa tese foi proposta e discutida, para o espaço presencial, a partir de um ciclo de ações com uso de *smartphone*, espelhamento de tela e elementos da Teoria das Situações Didáticas. Com relação ao espaço virtual, foi proposta uma discussão teórica a partir do estudo sobre o estar junto virtual, proposto por José Armando Valente, e chegamos à proposta que denominamos de Estar Junto Virtual Ampliado com *smartphone*. A partir da análise, concluímos que a proposta de atividades, o uso do GeoGebra, a organização em grupo, a institucionalização com espelhamento de tela, a interação entre indivíduos, os questionamentos, os desafios propostos pela professora, e a atitude dos alunos e professora em relação às ações propostas na disciplina, se constituíram em ações que favoreceram a aprendizagem e foram determinantes para a vivência de uma ambiente construcionista constituído na articulação entre espaço presencial e virtual.

Palavras-chave: Derivadas; *smartphone*; espaço virtual; espaço presencial; GeoGebra.

ABSTRACT

The difficulties in relation to teaching and learning Differential and Integral Calculus are a problem in the field of Mathematics Education. Given this problem, this doctoral thesis was guided by the following research question: what actions can favour the learning of Calculus concepts, in a bimodal education process, using smartphones? The objective was to identify and analyze actions that can favor the learning of calculus concepts in a constructionist environment, in a bimodal education proposal, with the use of smartphones. To achieve the objectives, a proposal for the study of Differential and Integral Calculus concepts was elaborated and developed for a Mathematics I course, in the format of face-to-face and distance meetings, with/for the use of a smartphone. The interaction between the subjects in the virtual space took place in a WhatsApp group and the didactic materials selected and elaborated for the discipline were made available in the GeoGebra platform. In the presential space, classes were planned and developed using a smartphone and screen mirroring. In order to analyze actions that favored learning in the constructionist environment, the theoretical construction of this thesis was proposed and discussed, for the face-to-face space, from a cycle of actions using a smartphone, screen mirroring and elements of the Theory of Didactic Situations. Regarding virtual space, a theoretical discussion was proposed from the study on virtual environment, proposed by José Armando Valente, and we arrived at the proposal that we call “Extended Virtual Together with Smartphone”. From the analysis, we concluded that the proposal of activities, the use of GeoGebra, the group organization, the institutionalization with screen mirroring, the interaction between individuals, the questions, the challenges proposed by the teacher, and the attitude of students and teacher in relation to the actions proposed in the discipline, were actions that favored learning and were decisive for the experience of a constructionist environment constituted in the articulation between the presential and virtual space.

Keywords: Derivatives; smartphone; virtual space; presential space; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-------------|--|-----|
| FIGURA 1 - | Infográfico- o que acontece na Internet em um minuto..... | 10 |
| FIGURA 2 - | Encontros presenciais e virtuais da disciplina de Matemática I..... | 24 |
| FIGURA 3 - | Interface inicial da plataforma GeoGebra..... | 29 |
| FIGURA 4 - | Situação problema presente no Material Didático..... | 32 |
| FIGURA 5 - | Dimensões de um ambiente construcionista..... | 39 |
| FIGURA 6 - | Ciclo de ações na interação do aprendiz com o computador..... | 50 |
| FIGURA 7 - | Ciclo de ações com <i>smartphone</i> | 56 |
| FIGURA 8 - | A espiral de aprendizagem vivenciada com <i>smartphone</i> | 56 |
| FIGURA 9 - | Situação didática de institucionalização com espelhamento de tela de <i>smartphone</i> | 58 |
| FIGURA 10- | Ciclo de ações na abordagem “Estar Junto Virtual” | 64 |
| FIGURA 11 - | Espiral de aprendizagem no modelo do estar junto virtual ampliado..... | 66 |
| FIGURA 12 - | Estar junto virtual ampliado..... | 67 |
| FIGURA 13 - | Movimento da abordagem do Estar Junto Virtual Ampliado com <i>smartphone</i> (EJuVAS)..... | 72 |
| FIGURA 14 - | A sequência de encontros presenciais e virtuais da disciplina de Matemática I..... | 75 |
| FIGURA 15 - | Sinal de uma função polinomial do 2º grau..... | 81 |
| FIGURA 16 - | Produção de Mylena e Daniel: parte 1..... | 85 |
| FIGURA 17 - | Produção de Mylena e Daniel: parte 2..... | 85 |
| FIGURA 18 - | Representação gráfica da plotagem feita por Nilson..... | 105 |
| FIGURA 19 - | Representação gráfica da plotagem feita por Wellington..... | 106 |
| FIGURA 20 - | Produção de Mylena..... | 110 |
| FIGURA 21 - | Produção de Daniel..... | 110 |
| FIGURA 22 - | Anotações de Daniel em relação a questão (e) | 111 |
| FIGURA 23 - | Anotações de Mylena em relação a questão (e) | 111 |

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| INTRODUÇÃO..... | 10 |
| 1. METODOLOGIA DA PESQUISA..... | 18 |
| 1.1 CAMINHO METODOLÓGICO..... | 18 |
| 1.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA..... | 21 |
| 1.3 A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA I EM UMA PROPOSTA DE EDUCAÇÃO BIMODAL: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA DAS AULAS SOBRE DERIVADA E OS MATERIAIS DIDÁTICOS..... | 24 |
| 2. APRENDIZAGEM COM USO DE <i>SMARTPHONE</i> EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA E UM CICLO DE AÇÕES EM AMBIENTE PRESENCIAL..... | 34 |
| 2.1 AMBIENTE CONSTRUCIONISTA DE APRENDIZAGEM: ALGUMAS CARACTERÍSTICAS CONSIDERANDO O USO DE <i>SMARTPHONE</i> | 35 |
| 2.2 UMA PROPOSTA DE CICLO DE AÇÕES COM USO DE <i>SMARTPHONE</i> | 48 |
| 3. A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA E O ESTAR JUNTO VIRTUAL AMPLIADO COM <i>SMARTPHONE</i>..... | 60 |
| 4. UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE <i>SMARTPHONE</i>: AÇÕES E APRENDIZAGENS NO ESPAÇO PRESENCIAL E VIRTUAL..... | 74 |
| 4.1 APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE CÁLCULO COM USO DE <i>SMARTPHONE</i> E UMA PROPOSTA DE EDUCAÇÃO BIMODAL..... | 75 |
| 4.2 AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE <i>SMARTPHONE</i> : DIALOGANDO SOBRE UMA AULA PRESENCIAL..... | 94 |
| 4.3 AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE <i>SMARTPHONE</i> : DIALOGANDO SOBRE UMA AULA A DISTÂNCIA..... | 134 |
| CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 160 |
| REFERÊNCIAS..... | 165 |
| APÊNDICES..... | 168 |

APRESENTAÇÃO



Olá leitor. Eu sou a Van e estarei com você durante a leitura dessa tese, com o objetivo de tornar o texto mais comunicativo, e com uma linguagem dialógica, sem perder o rigor científico. Com esse objetivo irei:

- apresentar os capítulos;
- propor questionamentos sobre o assunto abordado;
- e apresentar link e qr codes que podem levar você à outros espaços.

Para início de conversa, vamos falar um pouco do que você encontrará nesse texto. Nessa pesquisa de doutorado foi investigado, orientadas pelos estudos sobre o construcionismo, e da Teoria das situações didáticas (TSD), ações que favoreceram à aprendizagem, um ambiente construcionista, em um processo de educação bimodal (parte presencial e parte virtual), com uso de *smartphones*. Em alguns momentos você encontrará Qr Codes presentes no texto. Esses Qr Codes foram criados para levar você a outros espaços; espaços de aprendizagem; de produção. A decodificação do conteúdo necessita de um aplicativo, leitor de Qr Codes instalado em seu *smartphone*. Caso não o tenha, faça o download de um leitor de sua preferência, para que assim você possa vivenciar melhor a experiência de leitura dessa tese.

Eu, Vanessa e Suely, desejamos a você uma excelente leitura!

1

¹ Todas as imagens para ilustrar a personagem Van foram criadas no aplicativo para criação de histórias em quadrinho, gratuito, Pixton, disponível em: <https://www.pixton.com/br>. A edição foi realizada no Power Point.

INTRODUÇÃO

Atualmente é muito comum o uso de *smartphones* para realizar diversas atividades no dia-a-dia de muitas pessoas, a qualquer tempo e lugar, desde que conectado a internet, como por exemplo, fazer uma chamada de vídeo a alguém que está distante, acessar aplicativo de localização para viajar, verificar o trânsito em um determinado trajeto, enviar e postar fotos, fazer uma transmissão ao vivo de um evento via *facebook* ou *instagram*, dentre outras. O infográfico anual, lançado pela empresa DOMO², ilustra as diversas atividades do mundo on-line que acontecem a cada minuto na rede, sendo todas elas disponíveis (algumas exclusivas) em *smartphone* conectado à internet.

Figura 1 - infográfico do que acontece na Internet em um minuto



Fonte: disponível em: <https://www.digitalinformationworld.com/2019/07/data-never-sleeps-7-infographic.html>>. Acesso em: 26 de julho de 2019.

Segundo números apresentados por essa empresa, 56% da população mundial, ou seja, cerca de 4,39 bilhões de pessoas, atualmente³ têm acesso à Internet. Analisando o infográfico é possível notar o quanto o *smartphone* (com acesso à internet) tem afetado as

² Empresa conceituada de software de nuvem.

³ Considerando o primeiro semestre de 2019.

atividades do ser humano nos mais diversos aspectos da vida, especialmente em relação à comunicação, à aprendizagem, a relacionamentos, e à construção de comunidade virtuais.

São vidas virtuais sendo vividas. São informações vindas de fontes diversas, a todo tempo. São ações, são aprendizagens, são espaços. São muitos espaços. São 4,5 milhões de vídeos sendo reproduzidos a cada minuto no YouTube; 4.497.000 buscas de informações feitas pelo *google*; mais de 500 mil Tweets e 50 mil fotos postadas no *stories* do *Instagram* a cada 60 segundos. Enfim, são muitas vidas virtuais sendo vividas, apesar de muitas pessoas no mundo não terem acesso a um *smartphone* ou computador, conectado à internet.

O infográfico da Figura 1 mostra o quanto as atividades desenvolvidas com *smartphone* conectado à internet mudaram algumas atividades e ações de muitas pessoas. É nesse cenário de mudança que questionamos o quanto mudaram as formas de aprendizagem na escola, diante dessa nova possibilidade tecnológica, considerando o espaço de sala de aula presencial e também o virtual. Neste sentido, Almeida e Valente (2011, p. 06) afirmam que a evolução das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), “provoca mudanças nos modos de ser e estar no mundo, reconfigura as relações comunicacionais e faz surgir uma nova ordem mundial, denominada sociedade tecnológica, sociedade em rede, sociedade da informação, [...]”.

Diante dessas mudanças na forma de viver e agir da sociedade faz-se necessário refletirmos sobre possíveis mudanças e novas possibilidades nas atividades ligadas à educação, educação matemática e educação a distância. Borba *et al.* (2014, p.77) pontuam em relação ao uso de *smartphone* na educação: “tem se popularizado consideravelmente nos últimos anos em todos os setores da sociedade”. Segundo os autores, um grande número de estudantes utiliza a internet em sala de aula “para acessar plataformas como o *Google*. Eles também utilizam as câmeras fotográficas ou de vídeo para registrar momentos das aulas. Os usos dessas tecnologias já moldam a sala de aula, criando novas dinâmicas [...]”.

Concordamos com os autores ao apresentarem essas possibilidades de uso do *smartphone*, mas consideramos que essa tecnologia, especialmente com acesso à internet, pode trazer novas possibilidades de ensino e de aprendizagem, além de ser uma tecnologia que cabe literalmente no bolso de nossos alunos, e pode ser acessada em diferentes espaços. Essa “pequena” tecnologia pode trazer mudanças para aulas, sejam elas presenciais, virtuais ou bimodais, principalmente em relação ao processo de aprendizagem, como discutimos nesta tese de doutorado.

Henrique e Bairral (2019, p. 114) elencam características, quanto ao uso de *smartphone* no processo de ensino e de aprendizagem matemática:

- I) devido à mobilidade pode ser incorporado mais facilmente às práticas de sala de aula;
- II) Pode estimular a curiosidade e a motivação na realização das atividades.
- III) é um repositório dos mais variados *softwares* para ensino de matemática.

Novas possibilidades de aprender em diferentes espaços e tempos implicam em pensar em formas de explorar esse tipo de tecnologia, desenvolvendo ações com objetivo de favorecer a aprendizagem e interação, mais especificamente, no caso desta pesquisa, a aprendizagem de conceitos de Cálculo. Nesse sentido, essa pesquisa de doutorado foi dedicada a identificar e analisar ações, com o uso de *smartphone*, que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo em um processo de Educação Bimodal (parte presencial e a parte a distância).



Leitor, você deve estar se perguntando o porquê a escolha de conceitos de Cálculo, como objeto matemático de pesquisa. Vamos conhecer um pouco mais sobre a problemática do ensino e aprendizagem de Cálculo e a trajetória profissional da pesquisadora, que implicou nessa escolha.

Em janeiro de 1986, na conferência de Tulane, realizada nos Estados Unidos, com o evento intitulado *Lean and Lively Calculus*, teve-se um marco inicial da preocupação com o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Esse evento deu origem à conhecida “reforma do Ensino do Cálculo”. O foco das discussões propostas nessa conferência foram os métodos de ensino e dificuldades de aprendizagem de Cálculo. “Porém, a direção da mudança não estava clara naquele momento, nem se haveria empenho e esforço dos departamentos para realizar alterações significativas na disciplina.” (MORELATTI, 2001, p.6-7). Durante a conferência, a problemática apresentada era de que os cursos de Cálculo não favoreciam a compreensão dos conceitos pelos estudantes, conforme afirmam Tucker e Leitzel (1995). Em 1988, o movimento ganhou força, pois passou a contar com o apoio financeiro do *The National Science Foundation’s Calculus*, em ações que visavam a reforma do ensino do Cálculo dentro de muitas universidades.

Por essas ações pode-se afirmar que o ensino e a aprendizagem de conceitos de Cálculo é uma preocupação que se prolonga por décadas. Mas, por que essa preocupação? Os conceitos do Cálculo são importantes para o desenvolvimento científico, fato que justifica

sua presença em diversos cursos de nível superior. Como por exemplo, nas Engenharias, em Química, em Ciência da Computação, em Biologia, em Matemática, dentre diversos outros. A riqueza de tal ciência justifica a importância de um ensino que oportunize ao aluno de cursos de graduação superior, e futuro profissional, construir conhecimentos de forma que ele possa compreender os conceitos e usá-los na prática de sua futura profissão.

Diante da importância de uma aprendizagem de conceitos de Cálculo para vários profissionais que buscam formação, um questionamento que vem à tona é: qual é o cenário de aprendizagem de tal disciplina em cursos de ensino superior? Em poucas palavras, poderíamos defini-lo como um cenário sombrio, caracterizado pelos altos índices de reprovação e evasão, apontados por alguns autores como Morelatti, (2001), Cabral e Catapani, (2003), Escher, (2011), Martins Junior (2015), Cargnin (2013); Waideman, Trevisan e Cargnin (2017); Cunha e Laudares (2017); Waideman (2018), dentre outros.

Nos últimos anos, diversas pesquisas foram dedicadas aos estudo do processo de ensino e/ou aprendizagem de conceitos de Cálculo, com uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), em espaço presencial e/ou virtual, como por exemplo, Pinto (2008), Rosa (2008), Reis (2010), Rocha (2010), Miranda (2010), Gouveia (2010), Alves (2010), Gonçalves (2012), Ricaldoni (2014), Martins Junior (2015), Lopes (2015), Almeida (2016), Waideman (2018), dentre outras.



Caro leitor, como já foi dito, diversas pesquisas já foram desenvolvidas sobre a temática discutida nessa tese. Caso queira, conhecer um pouco mais sobre elas, leia o artigo publicado no *Jornal Internacional em Educação Matemática* e intitulado: “Cálculo Diferencial e Integral e o Uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação: uma Discussão de Pesquisas nos Últimos Onze Anos”. O artigo foi escrito pela autora dessa tese, Vanessa Rodrigues Lopes e sua orientadora, Suely Scherer e pode ser acessado decodificando o Qr-Code ao lado ou diretamente no link seguinte:

<https://revista.pgskroton.com/index.php/jieem/article/view/5096/0>

Dentre as pesquisas citadas anteriormente destacamos a de Waideman (2018), desenvolvida no âmbito do programa de Mestrado em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Londrina. A pesquisa teve como objetivo investigar as formas de utilização, por alunos de Cálculo, de um aplicativo desenvolvido para o estudo de cálculo diferencial. Segundo Waideman (2018, p.14), “o aplicativo proposto é composto por duas fases, sendo que a primeira objetiva fazer uma revisão do conteúdo, enquanto a segunda prioriza o estudo das representações gráficas de funções e suas

derivadas”. A referida pesquisa se aproxima desta pesquisa de doutorado, por ter como foco a aprendizagem de Cálculo e o uso de *smartphone*, porém diferenças com algumas diferenças que serão apresentadas mais adiante.

O referencial teórico utilizado por Waideman (2018) foi a Teoria de Registro de Representação Semiótica. A experimentação da pesquisa se deu pela participação de 10 alunos voluntários de um curso de Licenciatura em Matemática e de outro de Engenharia de Produção Agroindustrial, de uma universidade estadual. Dentre os resultados apontados, Waideman (2018, p.6) ressaltou: “percebeu-se que o celular⁴ pode se tornar um forte aliado tanto para o ensino, como para a aprendizagem. Entre os fatores apontados, está a possibilidade de utilização do aplicativo para estudo, em modo *off line*, em qualquer tempo e lugar, além da dinamicidade.”

Waideman (2018) traz avanço para o campo da pesquisa em Educação Matemática, ao pensar em formas de uso do *smartphone* para aprendizagem de Cálculo Diferencial, e vai ao encontro da problemática dessa tese, porém destacamos algumas diferenças entre as duas pesquisas:

- a primeira é em relação aos referenciais teóricos escolhidos;
- a segunda é que nossa pesquisa foi desenvolvida em uma turma regular de Cálculo.
- a terceira é diz respeito a amplitude dos conceitos de Cálculo, pois na pesquisa de Waideman (2018) o foco é o Cálculo diferencial, e em nossa pesquisa o foco o Cálculo Diferencial e Integral.
- a quarta diferença está relacionada aos espaços escolhidos, isso porque o trabalho de Waideman (2018) foi desenvolvido no espaço presencial e nossa investigação considera os dois espaços: presencial e virtual.

Ao olharmos para as pesquisas desenvolvidas nos últimos anos em relação a problemática proposta nessa tese, consideramos que tecnologias podem ser um caminho para superação de algumas dificuldades na aprendizagem do Cálculo. Algumas pesquisas como as de Tall (1991) e Morelatti (2001) apontam que uma dificuldade que compromete a aprendizagem dos alunos está relacionada com a forma como os conceitos do Cálculo são explorados em sala de aula, a partir de uma apresentação formalizada, como verdades absolutas, sem proporcionar ao educando um ambiente de discussão e produção no qual favoreça ações de reflexão. Morelatti (2001, p.22) ressalta ainda que

⁴ Compreendemos que nessa pesquisa o autor usa o celular como sinônimo de *smartphone*.

[...] nas salas de aula de Cálculo Diferencial e Integral, a metodologia usada pela maioria dos professores prioriza exclusivamente a aula expositiva, centrada na fala do professor, com conteúdos apresentados como prontos e incontestáveis. Os alunos, após a aula, resolvem mecanicamente uma série de exercícios que enfatizam as técnicas de resolução em vez de conceitos e estratégias de resolução. Estes alunos não são envolvidos afetivamente com a disciplina e muitas vezes questionam a importância desta dentro do curso por não entenderem seus objetivos.

Essa pesquisa foi publicada em 2001, sendo a tese de doutorado de Maria Raquel Mioto Morelatti. De 2001 à 2019, passaram-se 18 anos, e considerando todo esse tempo que passou, algumas questões surgem: houve uma mudança significativa do que discutia-se naquele tempo para o que se observa nas aulas de Cálculo atuais? Ou, será que essa citação reflete ainda o cenário atual de tal disciplina? Será que ainda há um predomínio de aulas expositivas, nas quais o eco da voz que soa é sempre (ou pelo menos na maioria das vezes) do professor? Será que os alunos conseguem se envolver em aulas cujo modelo é de uma lista de exercícios, resolvidos pelo professor e/ ou autor de livros? Será que Limites, Derivadas e Integrais são conceitos a serem explorados apenas a partir de técnicas e mais técnicas? Será que Limite de funções se resume a um estudo de um turbilhão de épsilons e deltas, muitas vezes, sem sentido? E assim podemos apresentar várias outras questões.

Todas essas, e tantas outras, indagações nos⁵ motivaram a desenvolver uma pesquisa de mestrado, Lopes (2015) e dar “continuidade” a essa pesquisa, no curso de doutorado. Sendo assim, essa pesquisa de doutorado se constitui como uma “continuação” da pesquisa que desenvolvi durante o curso de Mestrado, junto ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul- UFMS, vinculada ao grupo de pesquisa em tecnologia e Educação Matemática – GETECMAT.

A minha pesquisa de mestrado (LOPES, 2015)⁶ teve por objetivo analisar processos de aprendizagem de Derivadas de funções em um ambiente Construcionista. A pesquisa foi desenvolvida com uma turma de Cálculo I, de uma universidade pública do Estado do Mato Grosso do Sul. Para alcançar o objetivo, foi criado um ambiente Construcionista de aprendizagem composto por uma proposta de atividades desenvolvidas com o *software* GeoGebra; um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) e materiais didáticos, dentre outros. Para analisar aprendizagens dos alunos nos espaços virtuais (AVA, WhatsApp e

⁵ Nesse parágrafo foi usado a terceira pessoa do plural para sinalizar a pesquisa de doutorado como uma parceria orientanda-orientadora.

⁶ Pesquisa vinculada ao grupo de Estudos em Tecnologia e Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul -GETECMAT-UFMS, do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (Mestrado).

Facebook), o referencial teórico adotado foi o Construcionismo desenvolvido por Papert (2008) e estudos sobre o “Estar Junto Virtual” de Valente (2005).

Dentre os resultados da pesquisa, em Lopes (2015, p.134) ressaltou-se que a “aprendizagem ocorreu a partir da/na interação entre professora e alunos e entre alunos em espaços virtuais de aprendizagem”. A pesquisa mostrou, ainda, que o ensino do Cálculo na modalidade EaD, mais especificamente em espaço virtual, “é uma alternativa que pode favorecer a aprendizagem do aluno, mas para que a aprendizagem na/a partir da interação seja vivenciada, se torna fundamental o habitar dos espaços virtuais, atuando em uma abordagem do Estar Junto Virtual”. (LOPES, 2015, p.130).

Durante o desenvolvimento da referida pesquisa de mestrado surgiram muitas questões a serem investigadas a partir da problemática explorada. E foram algumas dessas questões que nos impulsionaram a continuar a investigação em nível de doutorado. Dessa forma, essa pesquisa de doutorado foi orientada pela seguinte questão de pesquisa: **que ações podem favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo, em um processo de educação bimodal, com uso de *smartphones*?**

Do contexto discutido e a questão de pesquisa apresentada anteriormente, a pesquisa foi orientada pelo objetivo geral: “identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de cálculo em um ambiente construcionista, em uma proposta de educação bimodal, com uso de *smartphone*”.

A partir desse objetivo geral, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo no espaço presencial, articulado com o espaço virtual, considerando o uso de *smartphone* e espelhamento de tela.⁷
- Identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo no espaço virtual, articulado às aulas presenciais, considerando o uso de *smartphone*.

Para atingir os objetivos apresentados foi elaborada e desenvolvida, em uma disciplina de Matemática I, uma proposta de educação bimodal, com ações sendo desenvolvidas com uso de *smartphone*. A interação entre os sujeitos no espaço virtual aconteceu em um grupo do WhatsApp e acesso a materiais didáticos⁸ na plataforma

⁷ Espelhamento de tela é feita espelhando a tela do *smartphone* em um projetor.

⁸ Aqui entendidos como materiais produzidos em formato de PDF, livros digitais, vídeos, dentre outros.

GeoGebra⁹. E para propor a constituição de um ambiente construcionista de aprendizagem para essa disciplina de Matemática I, em um processo de educação bimodal, com uso de *smartphones*, nos orientamos por estudos sobre o construcionismo realizados por Papert (2008) e sobre a teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (2008).

Para analisar ações que podem favorecer a aprendizagem em um ambiente construcionista, a construção teórica dessa tese é discutida a partir de um ciclo de ações com uso de *smartphone*, o espelhamento de tela, e elementos da TSD, para o espaço presencial. Para o espaço virtual, para análise, apresentamos uma abordagem de EaD, a partir de estudos de Valente (2005) e Fernandes (2014), denominado “Estar Junto Virtual Ampliado com *smartphone*”, o EJuVAS.

Com relação à organização do texto, a tese possui quatro capítulos. Começamos fazendo uma introdução da pesquisa, apresentando a problemática da aprendizagem de Cálculo, bem como a questão e os objetivos da tese. No Capítulo 1, discorremos sobre o percurso metodológico desenvolvido na tese, em que se apresenta: os fundamentos da pesquisa qualitativa; os sujeitos participantes da pesquisa; a sequência didática, a plataforma GeoGebra, e as categorias de análises escolhidas a partir do referencial teórico e dos objetivos elencados.

No Capítulo 2, apresentamos o construto teórico da pesquisa, que permitiu analisar aprendizagem no espaço presencial, com uso de *smartphone*. Destacam-se neste capítulo os estudos de Papert (2008) sobre as dimensões do construcionismo, a teoria das situações didáticas, e o ciclo de ações proposto por Valente (2005). No Capítulo 3, apresentamos o construto teórico, produzido na pesquisa de doutorado, que orientou a análise de dados.

No Capítulo 4, apresentamos a análise de dados produzidos a partir da experimentação, desenvolvida com uma turma de alunos de uma disciplina em que se estuda conceitos de Cálculo, a disciplina de Matemática I, em um curso de Química. E para finalizarmos são apresentadas considerações finais sobre ações que foram identificadas como favoráveis à aprendizagem de Cálculo com uso de *smartphone*, em uma proposta de Educação Bimodal, em ambiente construcionista.

⁹ Plataforma GeoGebra é uma plataforma em que é possível disponibilizar vários materiais didáticos criados a partir do software GeoGebra. Mais detalhes dessa plataforma serão discutidos no Capítulo da Metodologia.

1. METODOLOGIA DA PESQUISA



Leitor, chegamos a metodologia! Assim nesse capítulo, vamos dialogar sobre o caminho metodológico da pesquisa, o perfil dos participantes, a organização e planejamento das aulas presenciais e virtuais na proposta bimodal, dentre outros elementos.

1.1 CAMINHO METODOLÓGICO

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa. Lüdke e André (1986) elencam cinco características da pesquisa qualitativa. A **primeira característica** é que, em uma pesquisa de caráter qualitativo a fonte direta dos dados produzidos é o ambiente natural e o instrumento que se caracteriza como fundamental é o pesquisador. Na pesquisa desenvolvida, o ambiente natural investigado foi o espaço presencial e virtual, no qual se constituiu as ações da disciplina de Matemática I, oferecida no curso de Licenciatura em Química, com uma turma de reoferta, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. A pesquisadora, que também foi a professora durante toda a disciplina, se inseriu nesse ambiente com a intenção de identificar ações que favoreceram a aprendizagem dos alunos, ao usarem *smartphones* para estudo de Cálculo. A turma era composta por 13 alunos, que cursavam cálculo pela segunda vez, ou seja, a problemática envolvida sobre a aprendizagem de cálculo se constituiu um campo de estudo para investigar ação que podem ter favorecido a aprendizagem.

A **segunda característica** da pesquisa qualitativa é que os dados são preponderantemente **descritivos**. Como buscamos identificar as ações que favoreceram a aprendizagem com uso de *smartphones*, a análise dos dados se constituiu da **descrição do vivenciado/registrado** durante as ações presenciais e virtuais e a partir de uma **entrevista** realizada com todos os alunos, ao final da disciplina. E foi integrando estudos teóricos e análise dos dados (prática) que identificamos o ciclo de ações com uso de *smartphone* (capítulo 2) e a abordagem de EaD que denominamos de EJUVAS (capítulo 3).

A **terceira característica** da pesquisa qualitativa, citada por Lüdke e André (1986), é que a preocupação com o processo é maior do que com o produto. De fato, essa característica foi marcante em nossa investigação, pois a todo o momento, desde o

estudo/proposição do referencial teórico, perpassando pela elaboração da proposta de atividades, pela organização da disciplina e espaços, como a plataforma GeoGebra, e desenvolvimento da disciplina, tivemos como principais preocupações o processo da pesquisa.

Dando continuidade, a **quarta característica** da pesquisa qualitativa é que o pesquisador se atenta para a significação que os pesquisados dão a sua vida e às coisas, e como **quinta característica** tem-se que “a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.11). Na pesquisa buscou-se a observação e análise cuidadosa e criteriosa dos dados, os registros de interações entre participantes, e de todo material elaborado para o desenvolvimento da pesquisa, na busca de compreender as ações que favoreceram à aprendizagem dos alunos no espaço presencial e virtual, ao usarem *smartphone*.

Esta pesquisa foi desenvolvida a partir das características mencionadas e seguindo uma metodologia construída a partir da questão e objetivos da pesquisa. Essa metodologia iniciou com o estudo do referencial teórico da pesquisa, que continuou em todas as outras fases da pesquisa, em outras palavras, o estudo e constructo teórico foi uma ação inicial e contínua dessa tese, sendo construído no entrelaçamento com as demais ações da pesquisa. Dessa forma, estudou-se em especial, o Construcionismo, proposto por Papert (2008), ciclo de ações e a espiral de aprendizagem e “estar junto virtual, estudos desenvolvidos por Valente (2005) e a teoria das situações didáticas, de Brousseau (2008).

Na sequência do caminho metodológico da pesquisa foi a escolha da turma de alunos, ou seja, dos participantes da pesquisa (discutiremos em detalhe no subcapítulo 1.2). Ao mesmo tempo que se definia a turma de alunos, com a qual a disciplina seria desenvolvida, os primeiros planejamentos de atividades foram elaborados, deixando pontos em aberto que demandariam conhecer o grupo de alunos. Esse planejamento se deu ao longo de toda a disciplina, porque não tínhamos uma sequência didática fechada, pronta e acabada, pois consideramos que existiam variáveis que influenciavam no planejamento. Como por exemplo, o conhecimento prévio dos alunos, o processo de aprendizagem de cada um, as dificuldades dos alunos, que por vezes implicaram na mudança de planejamentos ao longo da disciplina.

Nas ações a serem desenvolvidas em um processo a distância, além da elaboração da proposta de atividades, organizamos as agendas e materiais a serem disponibilizados na plataforma GeoGebra (também escolhida nesta fase da pesquisa), orientada pelo referencial teórico da pesquisa. E ainda foram produzidos alguns vídeos e material em formato PDF

(discutidos no subcapítulo 1.3), materiais didáticos de estudo, para compor as agendas e enriquecer as possibilidades de estudos dos alunos, nos momentos de estudo a distância.

Na sequência da metodologia da pesquisa foi iniciada a produção de dados da pesquisa. No espaço presencial, a produção de dados se deu a partir de gravações de áudio e filmagem das aulas presenciais, e vídeos individuais das gravações de tela dos *smartphones* de cada aluno, feito com o aplicativo Mobizen (de distribuição gratuita). Ou seja, sempre que o aluno desenvolvia alguma atividade, por exemplo, com o GeoGebra, ativava-se o aplicativo Mobizen, que gravava a tela do seu *smartphone* e ao final da produção o aluno encaminhava a gravação (em formato de vídeo) para a pesquisadora, via WhatsApp (particular).

Já no espaço virtual a de dados se deu a partir dos registros postados no grupo do WhatsApp e produções desenvolvidas com o software GeoGebra, também gravadas com o aplicativo Mobizen e vídeos produzidos pelos alunos, a depender das tarefas propostas.

Após o término da disciplina, surgiu a necessidade de dialogarmos com os participantes da pesquisa sobre suas postagens, aprendizagem e interações, para complementação dos dados produzidos, observados os objetivos da pesquisa. Sendo assim, elaboramos uma entrevista semiestruturada (Apêndice B).

Ao final da experimentação e entrevistas, de posse dos dados da pesquisa, foi definido o processo de análise. Nós optamos por realizar a análise a partir dos dois objetivos específicos definidos inicialmente. Assim, selecionamos dados para identificar e analisar:

- ações que favoreceram aprendizagens no espaço presencial, articulado com o virtual, com uso de *smartphones*.
- ações que favoreceram aprendizagens no espaço virtual, articulado com o presencial, com uso de *smartphones*.

Em relação ao primeiro objetivo, os dados são analisados a partir da produção de dados realizada nas aulas presenciais e na entrevista. Em relação ao segundo objetivo, os dados são analisados a partir da produção de dados nas aulas virtuais e na entrevista. Esses dados são apresentados, para fins de organização de texto da tese, em três subcapítulos no Capítulo 4 desta tese. No primeiro deles analisa-se as ações, tanto presenciais quanto virtuais, a partir da proposta de Educação Bimodal, nos demais se discute ações mais específicas de cada modalidade.

A seguir apresentaremos o contexto da pesquisa.

1.2 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os participantes da pesquisa foram 13 acadêmicos da disciplina de Matemática I, oferecida no segundo semestre de 2017, no curso de Licenciatura em Química, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Essa disciplina sempre foi ofertada no curso presencialmente, mas, em caráter experimental, e de acordo com legislação nacional e regulamentada em projeto de curso, para a experimentação da pesquisa, foi realizada em um processo de Educação Bimodal. Além disso, a disciplina faz parte da matriz curricular do primeiro semestre do curso e é pré-requisito para a disciplina de Matemática II, por sua vez prevista para realização no segundo período do curso.

Porém, devido à demanda de número de alunos reprovados no primeiro semestre de 2017, a mesma foi reofertada no segundo semestre de 2017, ou seja, todos os alunos que participaram da pesquisa estavam cursando Matemática I, pela segunda vez. Assim o desenvolvimento das ações da disciplina se deu no período de agosto a dezembro de 2017, sendo que os encontros presenciais ou aulas virtuais síncronas aconteceram às terças-feiras e quintas-feiras, no horário das 18:00 às 20:00 horas.

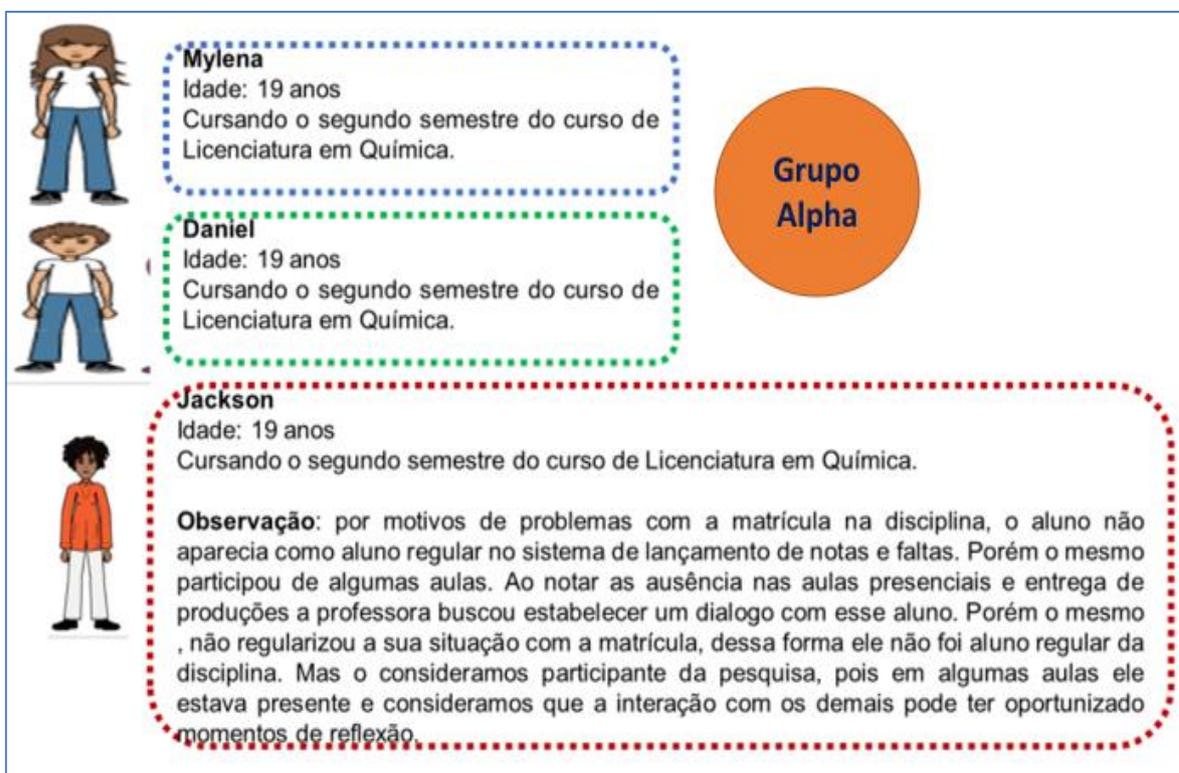
Quanto à legislação nacional, de acordo com a Portaria 4.059, em 2017 era possível ofertar um curso com 20% da carga horária a distância. Essa portaria foi alterada em dezembro de 2018, pela portaria Nº 1.428, ampliando de 20% para 40% o percentual da carga horária de um curso que poderá ser ofertada a distância. No contexto da pesquisa, o curso não ofertava nenhuma disciplina na modalidade de EaD, e nem em formato semipresencial (Bimodal), portanto a carga horária ofertada experimentalmente a distância, na disciplina de Matemática I, não atingiu os 20% da carga horária total do curso, segundo a legislação daquele período.

A disciplina tem carga horária de 68 horas, destas 34 horas foram realizadas a distância e 34 horas realizadas presencialmente. Os conteúdos previstos na ementa da disciplina são: Números Reais, Funções de uma variável, Noções de Limites, Derivadas e Aplicações, Noções de Integral. Essa ementa é similar as ementas da disciplina de Cálculo Diferencial Integral I, na maioria de outros cursos.

A seguir apresentamos o avatar criado para cada participante dessa pesquisa, bem como, seus nomes e grupos que participaram durante a disciplina. Os avatares e cenários que aparecem nas análises foram criados pelo site pixton¹⁰, versão gratuita e editados com

¹⁰ Disponível em: <https://www.pixton.com/br/create/storyboard/riay8itk>

diálogos no *power point*. O avatar escolhido para cada aluno, se deu de maneira aleatória, dentre os disponíveis na versão gratuita. E para facilitar a análise, atribuímos um nome a cada grupo, isso porque nas aulas presenciais eles se reuniam em grupos, sempre nos mesmos por opção, para as discussões das atividades propostas, assim denominamos os grupos: Alpha, Beta, Épsilon e Lambda.



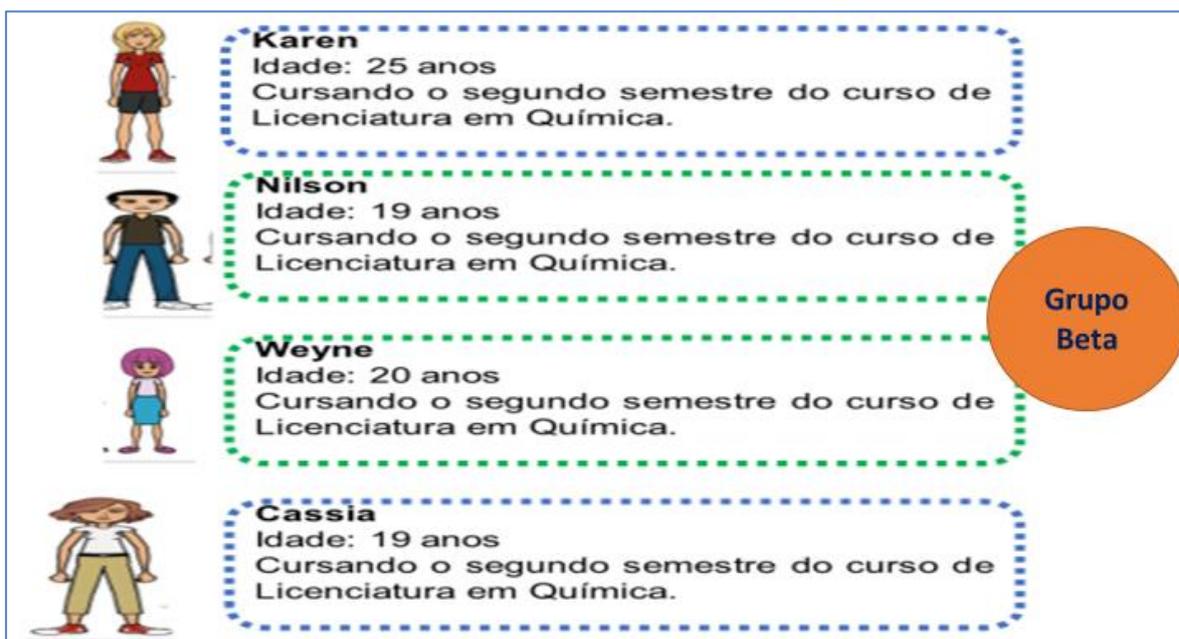
Mylena
Idade: 19 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Daniel
Idade: 19 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Jackson
Idade: 19 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Observação: por motivos de problemas com a matrícula na disciplina, o aluno não aparecia como aluno regular no sistema de lançamento de notas e faltas. Porém o mesmo participou de algumas aulas. Ao notar as ausências nas aulas presenciais e entrega de produções a professora buscou estabelecer um diálogo com esse aluno. Porém o mesmo não regularizou a sua situação com a matrícula, dessa forma ele não foi aluno regular da disciplina. Mas o consideramos participante da pesquisa, pois em algumas aulas ele estava presente e consideramos que a interação com os demais pode ter oportunizado momentos de reflexão.

Grupo Alpha



Karen
Idade: 25 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Nilson
Idade: 19 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Weyne
Idade: 20 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Cassia
Idade: 19 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Grupo Beta



Bruno
Idade: 19 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.



Arthur
Idade: 20 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.

Grupo
Lambda



Eduardo
Idade: 28 anos
Cursando o segundo semestre do curso de Licenciatura em Química.
Formado em Engenharia Civil



Willian
Idade: 25 anos
Cursando o quarto semestre do curso de Licenciatura em Química.



Lucilene
Idade: 33 anos
Cursando o quarto semestre do curso de Licenciatura em Química.

Grupo
Épsilon



Wellington
Idade: 30 anos
Cursando o quarto semestre do curso de Licenciatura em Química.



Professora Vanessa

Pesquisadora e Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
Mestre em Educação Matemática, pela mesma instituição.



Ivanete

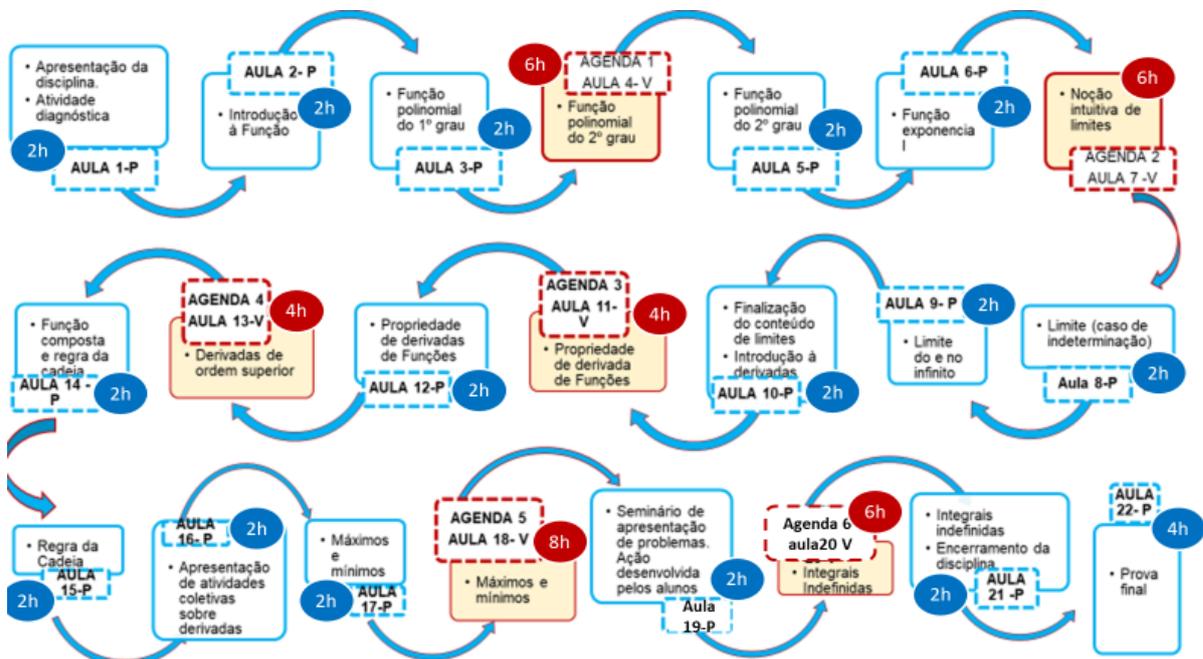
estagiária da disciplina. Realizou observação e regência, como requisito parcial para aprovação na atividade de estágio.
Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.
Mestre em Educação Matemática, pela mesma instituição.

No próximo subcapítulo apresentamos a proposta de atividades elaborada para a experimentação.

1.3 A DISCIPLINA DE MATEMÁTICA I EM UMA PROPOSTA DE EDUCAÇÃO BIMODAL: A SEQUÊNCIA DIDÁTICA DAS AULAS SOBRE DERIVADA E OS MATERIAIS DIDÁTICOS

A carga horária de 68 horas da disciplina de Matemática I, como dito anteriormente, foi planejada com 34 horas desenvolvidas presencialmente, sendo 15 encontros com duração de duas horas cada, e um encontro com duração de 4 horas. E na modalidade de EaD, foram 34 horas, organizadas em 6 agendas de atividades desenvolvidas em ambiente virtual. A Figura 11 apresenta os conteúdos matemáticos estudados e a desenho da disciplina, articulando momentos presenciais (em azul) e momentos virtuais (em vermelho).

Figura 2- encontros presenciais e virtuais da disciplina de Matemática I.



Fonte: dados da pesquisa.

Para o desenvolvimento das aulas foi feito um planejamento da sequência didática com uso do *smartphone*. A maioria das atividades propostas foram adaptadas considerando o uso de *smartphone* e a abordagem construcionista. Outras foram pensadas a partir de materiais didáticos disponibilizados na plataforma GeoGebra, e algumas foram de autoria da pesquisadora. Trazer para esse texto de tese o planejamento de todas as 22 aulas seria exaustivo para o leitor, dessa forma, para se ter ideia de como as aulas foram planejadas, apresentaremos, o planejamento da aula 10 e da aula 11 (agenda 3), abordando o conteúdo de Derivadas, que foram as aulas escolhidas para análise de dados apresentados nessa tese.

A escolha das aulas 10 e 11 para a análise se deu a partir de uma leitura flutuante de todo material produzido na pesquisa, em especial das filmagens das aulas presenciais e dos diálogos realizados no grupo do WhatsApp, articulada com anotações feitas pela pesquisadora ao longo da produção de dados. No entanto, os dados produzidos nas entrevistas foram determinantes para a escolha. Optamos por analisar as aulas em que a maioria dos alunos mencionou terem sido desenvolvidas as atividades mais significativas para eles.

Iniciamos apresentando o planejamento da **aula 10- “Introdução a derivada”**.

QUADRO 1- Sequência didática da aula 10

Aula 10- introdução à Derivada

Data: 24/10/2017 (2h)

Recursos: screen mirror, Datashow, app GeoGebra, e materiais didáticos da plataforma GeoGebra.

Modalidade: presencial

Conteúdo: Taxa de Variação, inclinação da reta tangente e Função derivada.

Dinâmica proposta: Produção individual com o *smartphone* do aluno e discussão dos problemas propostos com os integrantes do grupo (subcapítulo 6.2), e posteriormente discussão com a professora e demais grupos.

1º momento da aula

Objetivo de aprendizagem: compreender a derivada como taxa de variação e a relação com o coeficiente angular da reta tangente à curva.

Problema 1: (adaptado de MUROLO, 2012) No processo de *produção* de um produto são utilizados vários fatores, como matéria-prima, energia, equipamentos, mão de obra, etc. Chamamos tais fatores de *insumos de produção* ou, simplesmente, *insumos*. Por exemplo, são insumos dos tecidos: o algodão, a seda, o linho, componentes químicos específicos, mão de obra, equipamentos de tecelagem, energia elétrica, etc. Podemos dizer que a produção depende dos insumos. Considerando que, para um grupo de operários de uma indústria de alimentos, a quantidade P de alimentos produzidos (ou industrializados) depende do número de horas trabalhadas a partir do início do expediente, e que tal produção é dada pela relação $P(x) = x^2$, sendo x o tempo e $P(x)$ a quantidade de toneladas de alimentos produzidos. O instante do início do expediente é representado por $x=0$, ou seja, 0h00.

Considerando o problema, **plote** a função $P(x)$ no GeoGebra e **analisando** o gráfico, responda:

a) Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo das 3h00 às 4h00? **Insira** um ponto A, nas coordenadas (3, P(3)) e um ponto B em (4, P(4)). Posteriormente **construa** uma reta secante passando pelos dois pontos A e B. Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue **perceber** alguma **relação**? **Justifique**.

b) Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo das 4h00 às 5h00? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas (4, P(4)) e (5, P(5)). Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique.

c) Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo das 3h00 às 5h00? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas (3, P(3)) e (5, P(5)). Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique.

d) Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo 3 à 3,1? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas (3, P(3)) e (3.1, P(3.1)). Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique.

e) Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo 3 à 3,01? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas (3, P(3)) e (3.01, P(3.01)). Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique.

Institucionalização a ser realizada na aula:

Taxa de variação instantânea de $f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Para a institucionalização a professora usará o objeto de aprendizagem disponível no link:

http://calculo.iq.unesp.br/Flash%202009/Flash-C1/definicaoretatangente_novo.swf

Segundo momento da aula

Objetivo: compreender que se tomarmos diferentes pontos na curva, teremos diferentes retas tangentes à curva, com diferentes inclinações e, como cada inclinação representa a função derivada, tais inclinações representam valores diferentes para derivada. A partir dessa compreensão tem-se o objetivo de discutir a derivada como uma função, estabelecendo assim uma lei de formação para a função derivada.

Problema 2: Seja $f(x) = x^2$, plote-a no GeoGebra insira um ponto A sobre a curva e posteriormente insira uma reta tangente a curva $f(x)$, passando por A.

a) Movimentando a reta tangente sobre a curva, e observando a inclinação da reta tangente $f'(x)$, preencha a seguinte tabela.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | | |

b) Analisando os valores obtidos, determine a lei de formação para a função $f'(x)$, em outras palavras, escreva a derivada como uma função de x ?

Problema 3: Seja $f(x) = x^3$ plote-a no GeoGebra e insira um ponto A sobre a curva, e posteriormente insira uma reta tangente a curva $f(x)$, passando por A.

texto, vídeos, questões e simulações que são importantes para construção do seu conhecimento, então não deixe de realizá-los. Então, vamos iniciar?

@@

1. Vamos iniciar lembrando o conceito de reta tangente e coeficiente angular de uma reta, pois esse é um conceito importante para o estudo de Derivadas. Mas, podem parar ao completar 7 primeiros minutos de vídeo. É o suficiente OK? Vamos lá...

Link do vídeo: <<https://www.youtube.com/watch?v=I11VcxwOCm0>>

2. Agora que você já lembrou estudo sobre coeficiente angular de uma reta, deve estar se perguntando o que isso tem a ver com derivada de uma função. Tem tudo haver! Pois a derivada de função pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente a uma curva. Para compreender melhor essa ideia veja o aplicativo seguinte que aborda esse estudo. No aplicativo você poderá inserir diversas funções, movimentar a reta tangente e observar o gráfico da derivada $f'(x)$ que aos poucos vai surgindo. Então chegou tão esperada hora de plotar (eu ploto, tu plota, nós plotamos....rsrsrs)! Que tal você plotar a função $f(x) = x^2$, e depois poderá plotar outras que você queira.

Link do aplicativo:< <https://www.GeoGebra.org/m/Y9DqeZ8y>>

3. Ao plotar a função $f(x) = x^2$ você deve ter observado que a $f'(x)$ é uma reta, certo? Isso porque a função que representa da derivada de $f(x)$ é $f'(x)=2x$, lembra que vimos isso em nossa última aula? Para cada valor de x temos uma inclinação diferente para a reta tangente a $f(x)$, por isso podemos determinar as diferentes inclinações, através da função derivada, sendo assim em $x= 1$, o coeficiente angular da reta tangente será 2, em $x=2$ o coeficiente angular da reta tangente será 4, em $x=3$ o coeficiente angular da reta tangente será 6 e assim sucessivamente. Então, para ficar mais claro, assistam ao vídeo seguinte....Esse é bem curtinho!

Link do vídeo: <<https://www.youtube.com/watch?v=oaB6k1PhD9o&t=12s>>

4. Vimos então uma das interpretações feitas em relação à derivada é a inclinação da reta tangente em um ponto, mas também podemos entender a derivada como um limite. Isso mesmo um limite! Então para compreender a relação existente entre derivada e limite, assista ao vídeo seguinte, apenas os 13 primeiros minutos!

Link do vídeo: <<https://youtu.be/OHi7owgHqcU>>

5. Agora você já viu que a derivada pode ser interpretada também como um limite, e decorre desse limite algumas propriedades, como por exemplo, a derivada de uma constante e a derivada da soma de funções. Leia o material (em PDF) seguinte, pois nele abordamos algumas dessas propriedades.

6- Agora que você já viu os vídeos, o simulador do GeoGebra e o arquivo de texto (em PDF) anterior, desenvolva a Tarefa 1:

Tarefa 1: produza um vídeo, em duplas, de no máximo 3 minutos, falando sobre a compreensão que vocês tiveram sobre Derivadas. No vídeo, a dupla poderá dar exemplos e/ou expor dúvidas, certezas e/ou propor questões aos demais (que ainda não tenham ficado claras para a dupla). Usem a criatividade! Após a gravação envie o vídeo para o grupo do WhatsApp (até 29/10), para que os demais possam visualizar e discutir. **Obs:** O conteúdo do vídeo será avaliado de zero à três pontos.

7. Participe do fórum (25/10 à 30/10) no grupo do WhatsApp, no mínimo três postagem em dias diferentes. A participação no fórum será avaliado de zero a sete, com base nos seguintes critérios:

***se posicionou diante das pontuações feitas pelos demais, em relação ao estudo proposto nesse ambiente (vídeos, simuladores e texto) (2,0).

***assistiu os vídeos dos demais e fez pontuações importantes sobre o estudo de derivadas (3,0);

***se posicionou diante das pontuações feitas pelos demais, em relação ao seu vídeo (2,0).

8. não esqueça de enviar o vídeo e discutir no grupo. Continuaremos nossa conversa no WhatsApp e nos vemos presencialmente no dia 31/10.

Abraços, Professora Vanessa.

Fonte: dados da pesquisa.

Para que as aulas a distância acontecessem, além do planejamento de uma sequência didática como a apresentada na Agenda 3, se constituiu uma ação importante a disponibilização da proposta no espaço virtual, ou seja, no espaço no qual os alunos iriam interagir com os materiais, colegas e professora, com objetivo de construir conhecimento. Assim, em nossa pesquisa, escolhemos a plataforma GeoGebra, como espaço de estudo e interação com os materiais, e o WhatsApp como espaço de interação entre os sujeitos. A Figura 3 apresenta a interface inicial da plataforma.

Figura 3- interface inicial da plataforma GeoGebra



Fonte: dados da pesquisa.

Essa plataforma possui mais de 1 milhão de atividades gratuitas (materiais didáticos), conforme informado na própria plataforma. Integrando assim, materiais de Álgebra, Probabilidade, Cálculo, Trigonometria, Geometria, aritmética, estatística, dentre outros. Além de todos esses materiais didáticos, que a plataforma oferece, tem-se ainda a opção de criação de livros digitais, integrando vídeos, simuladores, textos, links e os próprios materiais didáticos disponíveis na plataforma. E foi nessa perspectiva, que elaboramos as Agendas das

aulas virtuais, sempre buscando a composição de diversos materiais didáticos que pudessem contribuir para aprendizagem de Cálculo dos alunos, ao interagirem com esses materiais.

Vamos conhecer o formato dessas agendas no próprio ambiente em que elas foram disponibilizadas? O QR code seguinte levará você para esse espaço virtual. Vamos então conhecer os materiais que compõem a Agenda 3. Se quiser pode interagir com eles também!



11

O uso de vídeo esteve presente em todas as agendas, e a produção de vídeo como tarefa a ser realizada pelos alunos, também foi uma ação marcante nas aulas à distância. Assim, vamos então falar sobre a perspectiva de uso e produção de vídeo em aulas de Cálculo, mais especificamente dos vídeos produzidos de autoria da pesquisadora dessa tese. Mas antes, ressaltamos, nessa tese, que as propostas de aulas à distância, em espaços virtuais, integrando estudo e produção de vídeos, não se reduzem simplesmente a uso e produção sem discuti-los. Ou seja, a ideia não foi o uso do vídeo pelo vídeo, mas, o vídeo como material de estudo e discussão no grupo do WhatsApp.

Os vídeos criados pela professora/pesquisadora se caracterizaram como vídeos como “conteúdo de ensino” e como “simulações”. Segundo Moran (1995, p.28) vídeo como **conteúdo de ensino**, “mostra determinado assunto, de forma direta ou indireta. De forma direta, quando informa sobre um tema específico orientando a sua interpretação. De forma indireta, quando mostra um tema, permitindo abordagens múltiplas, interdisciplinares;”.

Já o vídeo que apresenta simulações “é uma ilustração mais sofisticada. O vídeo pode simular experiências [...]”(MORAN, 1995, p.28), que no caso da pesquisa, foram produzidos gravando a tela do *smartphone*¹² ou do laptop¹³, ao usar simuladores (disponíveis na plataforma GeoGebra em forma de materiais didáticos) para explicar conteúdo matemático. Por exemplo, o vídeo 2 da Agenda 3, traz essa característica, ao mesmo tempo que também é um vídeo de conteúdo de ensino.

¹¹ Disponível em: <<https://www.GeoGebra.org/m/B5spSDkM>>

¹² *Smartphone* pessoal da pesquisadora.

¹³ Laptop pessoal da pesquisadora.

Que tal ver esse vídeo novamente, caso tenha passado despercebido no link da agenda apresentado anteriormente? Acesse pelo QR code seguinte.



14

Vale aqui ressaltar também que na produção dos vídeos para aulas virtuais, nesta pesquisa, sempre se buscou a coerência com a abordagem construcionista, buscando propor questões nos que de alguma forma pudessem oportunizar momentos de desequilíbrios cognitivos e de reflexão sobre os conceitos de Cálculo discutidos.

Além dos vídeos, a professora/pesquisadora elaborou materiais didáticos em formato de arquivos de PDF, que foram integrados nas agendas das aulas virtuais, como materiais de estudo e discussão no grupo do WhatsApp. Note que na Agenda 3, apresentada anteriormente, na Atividade 5 propõe-se o estudo de um material em formato PDF.

Esses materiais foram produzidos a partir dos estudos de Scherer (2005), e de Papert (2008), conforme discutiremos no referencial teórico dessa tese. Segundo Scherer (2005), tanto no ambiente presencial quanto no virtual, os materiais criados devem possuir uma linguagem dialógica, com desafios e perguntas. A estética desses materiais didáticos tem que ter como foco central a aprendizagem e a comunicação, que pode ser estabelecida pelo aluno que irá ler e interagir com tal material. E nessa perspectiva que os vídeos e arquivos em PDF foram produzidos.

A ação de questionar os alunos no material didático e nos vídeos teve como objetivo desafiar-los e desequilibrá-los cognitivamente para que pudessem agir a partir daquilo que eles liam/ viam, simulavam... Por isso, é importante que o material estabeleça uma comunicação entre professor/autor – aluno/leitor.

Ao escrever um material que estabelece uma comunicação não frontalmente, direta e completa, oportunizamos aos alunos/leitores serem também autores, pois eles podem agir e navegar em diferentes espaços, favorecendo sua aprendizagem. Pontuamos que o mesmo é válido para os vídeos, em relação a comunicação não direta, mas dialogada, possibilitando aos alunos momentos de reflexão e de autoria.

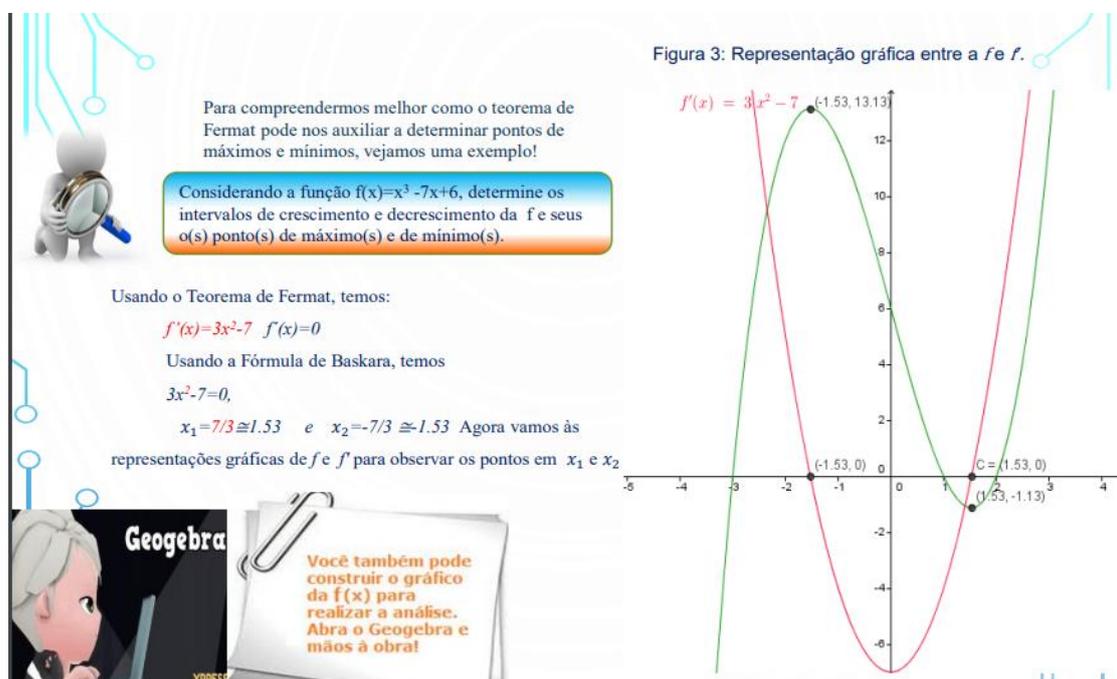
¹⁴ Disponível em: <<https://youtu.be/oaB6k1PhD9o>>

Foram elaborados três materiais didáticos em formato de arquivo de PDF, que integraram as seguintes agendas:

- Introdução a Derivadas- Agenda 3
- Derivada e Máximos e Mínimos de Funções, e Derivada segunda e Máximos e Mínimos- Agenda 5.
- Integral indefinida- Agenda 6

Na elaboração dos materiais didáticos sempre se propunha a investigação de situações, tarefas, ou problemas que envolviam conceitos a serem estudados no período, com o objetivo de colocar o aluno em ação, para que ele chegasse na formulação dos conceitos. Para ilustrar, no material em que abordamos o conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções, temos um exemplo que envolveu o “teorema de Fermat” e um convite ao aluno e leitor, conforme Figura 4.

Figura 4- Situação problema presente no Material Didático



Fonte: Dados da pesquisa.

Observe na Figura 4 como o material é apresentado em forma de diálogo com o aluno: “Você também pode construir o gráfico da $f(x)$ para realizar a análise. Abra o GeoGebra e mãos à obra”. Esse estilo de escrita, em forma de diálogo, perpassou todos os materiais produzidos.



A avatar da disciplina, chamava-se Jully e ela esteve com os alunos ao interagirem com materiais didáticos (PDF) e também com os vídeos, assim com eu estou com você, leitor. A Jully foi criada com o aplicativo para *smartphone* gratuito, xpresso, e após a criação dos gifs, os mesmos foram editados no power point. No QR code seguinte você pode conhecer um pouco mais sobre a Jully em um vídeo produzido, pela autora dessa tese.

15

E por esse motivo essa tese, também traz essa característica de dialogar com o leitor, inclusive com uso de um avatar. A avatar Van, aparece no texto em três situações: -para introduzir o capítulo ao leitor; -para dialogar, propondo questionamentos ao leitor sobre o assunto abordado; ou para apresentar link que podem levar o leitor a outros espaços.

Para finalizarmos este capítulo, pontuamos que foi importante usar tecnologias digitais na produção de materiais didáticos e vídeos para a disciplina, aumentando possibilidades de explorar diferentes conceitos em uma abordagem construcionista. Além dos materiais produzidos, o uso de software GeoGebra, aplicativos e diferentes objetos digitais oportunizaram, como discutiremos no capítulo da análise de dados, que alunos pudessem conjecturar, estudar, explorar e construir conceitos com uso de diferentes linguagens.

Assim apresentamos um pouco da organização do espaço presencial e virtual da disciplina, e dos materiais didáticos e vídeos produzidos durante essa pesquisa de doutorado.

No próximo capítulo apresentaremos e discutiremos o referencial teórico.

¹⁵ Disponível

em: https://www.youtube.com/watch?v=JkxKYDCQDZU&list=UUZKHnsiRKb8QM_JecvgnV6Q&index=24

2. A APRENDIZAGEM COM USO DE *SMARTPHONE* EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA E UM CICLO DE AÇÕES EM AMBIENTE PRESENCIAL



Chegou o momento de apresentarmos a construção teórica proposta nessa tese. Aqui serão apresentados estudos sobre construcionismo, ciclo de ações, e a teoria das situações didáticas, e uma articulação desses estudos com o uso de *smartphone*.

Nossa pesquisa tem como objetivo: identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem, em disciplina em que se estuda conceitos de Cálculo, em um processo de educação bimodal, com uso de *smartphones*". Dessa forma, neste capítulo vamos apresentar os estudos sobre ambiente construcionista de aprendizagem (ACA), o ciclo de ações e a teoria das situações didáticas. Assim, optamos por subdividir esse capítulo em duas seções.

Na primeira seção, discutiremos a abordagem construcionista de aprendizagem, em especial, a partir das cinco dimensões do construcionismo propostas por Papert (1986), sendo elas, as dimensões pragmática, sintática, sintônica, semântica e social. E ao discutir as dimensões, buscaremos apresentar possibilidades de favorecê-las com uso de *smartphone*, em ambientes de aprendizagem constituídos em espaços presenciais e/ou virtuais.

Para nós, espaços virtuais e ambientes são conceitos entrelaçados, mas distintos. O termo espaço virtual é usado nessa tese, segundo a definição apresentado por Pierre Levy ao caracterizá-lo, como o espaço da desterritorialização, ou da "não- presença". Não-presença no sentido físico. Esse espaço virtual se constitui ambiente em um processo em que é (re)construído ao ser habitado, quando aos poucos "são inseridos os conhecimentos dos educandos que o habitam, o desconhecido de todos e/ou alguns, o novo, as aprendizagens[...]. E assim, no diálogo cria-se verdadeiros ambientes de aprendizagem, buscando a singularidade de cada proposta e grupo." (SCHERER, 2005, p. 51).

Na segunda seção, como constructo teórico dessa tese, proporemos um ciclo de ações que pode ser vivenciado ao usar *smartphone*. Esse ciclo é discutido a partir dos estudos de Valente (2005) sobre o ciclo de ações, e da teoria das situações didáticas, proposta por Brousseau (2008). O ciclo partiu dos estudos teóricos, porém alguns elementos foram identificados/ incluídos/modificados na análise das ações dos alunos, durante o desenvolvimento das aulas presenciais.

2.1 AMBIENTE CONSTRUCIONISTA DE APRENDIZAGEM: ALGUMAS CARACTERÍSTICAS CONSIDERANDO O USO DE *SMARTPHONE*

Nesse capítulo vamos dialogar sobre algumas características de um ambiente construcionista de aprendizagem. Na década de 60, no *Massachusetts Institute of Technology*, Seymour Papert iniciou o estudo sobre o construcionismo, inspirado nas possibilidades de aprendizagem com uso de computadores. Mas, depois de décadas, hoje em 2019, diversos formatos de computadores estão disponíveis, não desprezando problemas com as condições de acesso, a um toque dos dedos, ou seja, computadores estão disponíveis em diferentes versões, como os *smartphones*, por exemplo.

Primeiramente vamos entender por que um *smartphone* pode ser considerado um computador, justificando o fato de caracterizarmos, nesta tese, como um ambiente construcionista, um ambiente em que aprendizes usam *smartphones*.

Segundo Woiler (1970), uma tecnologia pode ser considerada um computador se possuir as seguintes funções: entrada de dados, o controle dessa entrada, armazenamento desses dados, processamento e saída de informações. Partindo dessa caracterização, consideramos nesta tese que o *smartphone* é um computador, e estudos sobre o construcionismo e o ciclo de ações podem orientar pesquisas sobre a aprendizagem com o uso de *smartphones*, considerando particularidades dessa tecnologia, que discutiremos a seguir.

Mas, por que não usamos apenas a palavra celular? O celular é uma tecnologia que tem a função básica de realizar e receber ligações em áudio, enviar e receber mensagens, e alguns apresentam complementos funcionais como, por exemplo, fotografar e filmar. Já o *smartphone* tem todas as funções de um celular, e muito mais...

O *smartphone* tem funcionalidades de um computador por possuir um sistema operacional, ou seja, possibilita que um usuário tenha uma área de trabalho, incluindo diversos aplicativos e acesso à internet (dados móveis ou *wifi*). Dentre as diversas possibilidades oferecidas pelos aplicativos de um *smartphone*, que podem ser adquiridos (gratuitamente ou não), ou recebidos direto de fábrica, destacamos algumas:

- realizar ligações por áudio e vídeos chamadas. Sendo que alguns aplicativos permitem até mais de dois usuários, ou seja, chamada de áudio e chamada de vídeo coletiva;
- receber e enviar mensagens em forma de texto, vídeo, imagens, gifs, links, dentre outros. A depender do aplicativo, pode-se criar grupos de interesse comuns para troca

de mensagens. O aplicativo desse tipo, mais usado atualmente é o WhatsApp, que possui hoje mais de 1 bilhão¹⁶ de usuários, em mais de 180 países. Em nossa pesquisa, a interação entre os sujeitos no espaço virtual, se deu nesse espaço, em um grupo denominado de “Matemática I”;

- gravar vídeos;
- interagir com aplicativos matemáticos, como por exemplo, GeoGebra, que foi o aplicativo usado nessa pesquisa;
- participar de diferentes tipos de jogos, sendo que alguns podem ser pagos e outros gratuitos;
- editar fotos e vídeos;
- ler e editar documentos;
- usar câmeras de alta qualidade;
- armazenar dados do próprio aparelho em nuvens;
- espelhar a tela (em alguns modelos esse recurso vem direto de fábrica e em outros pode ser obter a partir de um aplicativo que pode ser baixado no *smartphone*). Na experimentação da pesquisa, no espaço presencial, foi usado o espelhamento de tela, utilizando o aparelho *screenmirror*¹⁷;
- acessar diferentes espaços e aplicativos de internet.

Diante dessas possibilidades¹⁸, e outras não citadas, disponíveis a partir do uso de um *smartphone*, e acessíveis a um toque dos dedos de muitos alunos do Ensino Superior, nos mobilizamos a realizar esta pesquisa de doutorado. É a possibilidade de aprender em diferentes tempos e espaços, pela característica da mobilidade tecnológica. Santaella (2016) explica que,

Por meio dos dispositivos móveis, a continuidade do tempo se soma à continuidade do espaço: a informação é acessível de qualquer lugar. É para essa direção que aponta a evolução dos dispositivos móveis, atestada pelos *smartphones* multifuncionais de última geração[...].

Desde que se tenha acesso à internet, alunos e professores podem interagir de maneira síncrona ou assíncrona, a milhares de quilômetros, e em diferentes espaços: praças, ônibus, casa, universidade, local de trabalho, dentre muitos outros. Além disso, com acesso a internet,

¹⁶ Número apresentado pelo site do aplicativo, em 12 de julho de 2019. Disponível em: <https://www.WhatsApp.com/about/>

¹⁷ Compatível com aparelhos da marca Samsung.

¹⁸ As funcionalidades podem variar a depender da marca, e do modelo do *smartphone*.

a um toque dos dedos, o aluno poderá também interagir com os materiais/TDIC disponibilizados pelo professor, ou por ele encontrados.

A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultural (UNESCO), em uma publicação durante a *Mobile Learning Week*, pontua motivos favoráveis ao uso de *smartphone* em processo de ensino e aprendizagem (a depender das ações integradas ao uso), e que aqui destacamos:

amplia o alcance e a equidade da educação, [...] , aperfeiçoa o tempo em sala de aula, permite que se aprenda em qualquer hora e lugar, constrói novas comunidades de apoio, dá suporte à aprendizagem in loco,[...], facilita o aprendizado personalizado, melhora a aprendizagem contínua [...] (UNESCO, 2013, p.367).

A partir do contexto, surgiram os questionamentos que orientaram esta pesquisa de doutorado: como propor ações para favorecer a construção de conhecimento, considerando e discutindo as dimensões do construcionismo, em uma disciplina de Cálculo, em um processo de Educação Bimodal, explorando tecnologias digitais, como o *smartphone*? Como oportunizar a vivência de ações em um ambiente construcionista, para alunos estudarem conceitos de Cálculo, com uso de *smartphones* em espaços presenciais e espaços virtuais?

Já conhecidas algumas características dos *smartphones*, vamos discutir os pressupostos teóricos sobre o construcionismo, foco da escrita dessa seção. Os estudos sobre o construcionismo tem como base teórica o construtivismo, proposto por Jean Piaget com dois diferenciais: o primeiro é a presença do computador, e o segundo é o envolvimento afetivo do aluno em realizar uma atividade de seu interesse (VALENTE, 1999). Em um ambiente construcionista de aprendizagem se compreende a aprendizagem como um processo de construção, em que o aluno constrói o seu conhecimento, e não é um receptor de informações que lhe foram transmitidas. Maltempi (2004, p.265, grifo nosso) ressalta que o construcionismo

[...] é tanto uma **teoria de aprendizado** quanto uma estratégia para a educação, que compartilha a idéia construtivista de que o desenvolvimento cognitivo é um processo ativo de construção e reconstrução das estruturas mentais, no qual o conhecimento não pode ser simplesmente transmitido do professor para o aluno. O aprendizado deve ser um processo ativo, em que os aprendizes “colocam a mão na massa” (*hands-on*) no desenvolvimento de projetos, em vez de ficarem sentados atentos à fala do professor.

Alunos quietos, silenciosos, em que a única voz que ecoa é a do professor, representam um cenário e uma dinâmica de um ambiente instrucionista, na qual o aluno possui um papel passivo e o professor transmite informações aos seus alunos. Quando se intenciona proporcionar vivências em um ambiente construcionista de aprendizagem, em espaço virtual e/ou presencial, algumas premissas são fundamentais:

- professor atento à fala dos alunos, sejam juntos em uma sala de aula presencial, ou juntos virtualmente em espaços virtuais como chat, fórum, WhatsApp, dentre outros, conforme será discutido no capítulo seguinte.
- Alunos produtivos, que colocam a “mão na massa”, investigando, formulando hipóteses, refletindo, ou seja, construindo e reconstruindo conhecimento. Papert (2008, p. 13) ressalta habilidades importantes para o desenvolvimento do aluno: “a capacidade de aprender novas habilidades, assimilar novos conceitos, avaliar novas situações, lidar com o inesperado”.

[...] o aprendiz deve processar a informação que obtém interagindo com o mundo dos objetos e das pessoas. Essa interação coloca o aprendiz diante de problemas e situações que devem ser resolvidos e, para tanto, é necessário buscar certas informações. No entanto, para aplicar estas informações é necessário a interpretação e o processamento das mesmas, o que implica a atribuição de significado e, portanto, de construção de novos conhecimentos. (VALENTE, 2005, p.2).

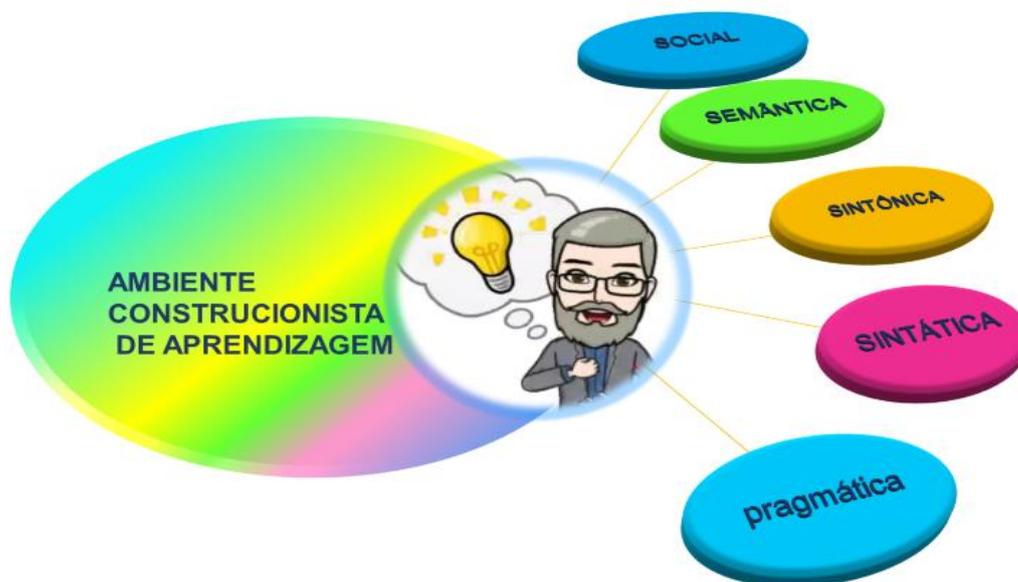
Dessa forma, o aluno aprende sendo sujeito ativo e reflexivo. É importante ressaltar que embora o computador seja um elemento essencial neste estudo sobre o construcionismo, para proporcionar um ambiente de aprendizagem construcionista é necessário muito mais do que um estudante, um professor e um computador, no caso dessa pesquisa, um *smartphone*; “É preciso um ambiente acolhedor que propicie a motivação do aprendiz a continuar aprendendo, um ambiente que seja rico em materiais de referência, que incentive a discussão.” (MALTEMPI, 2004, p.265).

E considerando a “riqueza dos materiais” que constituem um ambiente construcionista, em 1986, Papert escreveu o texto intitulado *Constructionism: a new opportunity for elementary science education*, em que aponta cinco dimensões fundamentais que norteiam os ambientes construcionistas de aprendizagem. Conforme pontuou Papert (1986, p.14, tradução nossa): “o Logo¹⁹ favorece a aprendizagem, porque o ambiente de aprendizagem específico incentiva as cinco dimensões”.²⁰

A Figura 5 ilustra as cinco dimensões do construcionismo.

¹⁹ Logo é uma linguagem de programação para computador, voltada para crianças, desenvolvida por Seymour Papert, com objetivo de aprender matemática. A linguagem é usada para comandar um cursor, normalmente representado por uma tartaruga, com o propósito de ensinar ao cursor novos procedimentos além dos que ele já conhece, a fim de criar desenhos ou programas.

²⁰ when Logo is most successful as a carrier of powerful ideas in learning, we believe it is so because the particular learning environment encourages the following five facets (or dimensions) [...]”

Figura 5- dimensões de um ambiente construcionista²¹

Fonte: elaborado pela autora.

Vamos iniciar a discussão com a dimensão **pragmática**. O termo pragmática é derivado do grego *pragma*, que significa: coisa, objeto, e o verbo *pracein*, que significa: agir, fazer. Dessa forma, podemos entender o termo pragmática no sentido de algo feito ou produzido de cunho prático. Em um ambiente construcionista de aprendizagem, a **dimensão pragmática** está relacionada à utilização ou aplicabilidade de conceitos explorados no momento atual em que vive o aluno, não apenas em possibilidades futuras. Papert (1986, p.14, tradução nossa) afirmou: “As crianças sentem que estão aprendendo algo, que podem usar agora, e não somente quando crescerem. Essa qualidade utilitária imediata é rara na matemática e nas ciências ”.²²

Uma outra dimensão do construcionismo **é a sintática**, que diz respeito ao fácil acesso e uso, pelo aluno, de elementos constituintes do ambiente construcionista de aprendizagem, e o acesso e interação (manipulação) com esses elementos, de forma a favorecer a sua aprendizagem. Nessa perspectiva, Papert (1986, p.14, tradução nossa) afirmou que: “a estrutura do Logo facilita o acesso e a manipulação para que aluno possa progredir gradualmente em estruturas sintáticas mais complexas à medida que ele necessita delas²³”.

²¹ Avatar criado para o autor Seymour Papert, in memorian.

²² *children feel they are learning something they can use not ‘when you grow up’ but right now. This immediate utilitarian quality is rare in school mathematics and Science)*

²³ *the structure of Logo's formalism makes it accessible to beginners who can progress into more complex syntactic structures gradually as they need them.*

Ao considerar essa dimensão do construcionismo e o uso de *smartphone*, podemos afirmar que em um ambiente construcionista, o aluno deverá ter a possibilidade de **acessar e interagir** com diferentes materiais didáticos, como aplicativos, livros digitais, vídeos, recursos de espaços virtuais, simuladores, dentre outros. Ou seja, se torna fundamental a exploração de materiais e tecnologias com os alunos, de forma a favorecer a compreensão de seus usos em níveis cada vez mais complexos. Materiais didáticos aqui considerados como sendo arquivos em formato PDF, cujo conteúdo abordado são conceitos de Cálculo, livros digitais, e inclusive aplicativos ou plataformas digitais que podem integrar: aplicativos, vídeos, simuladores, texto, links, dentre outros. Com *smartphone*, o aluno pode também interagir com materiais didáticos em diferentes espaços e tempos.

Na continuidade, vamos discutir sobre a **dimensão social** de um ambiente construcionista. Esta está relacionada com a articulação de atividades propostas e materiais disponíveis no ambiente de aprendizagem, com as relações pessoais e culturais dos alunos. O alcance da dimensão social se dá através da valorização cultural e social em um ambiente construcionista. Como pontua Papert (1986, p.14, tradução nossa) sobre o Logo: “integração do Logo nas relações pessoais e na cultura do ambiente em que ele é encontrado.”²⁴

Para que esta dimensão esteja presente no ambiente, é importante que o ambiente construcionista seja “rico em materiais de referência que incentive a **discussão**” (MALTEMPI, 2004, p.3, grifo nosso). As atividades propostas, assim como qualquer material integrado a proposta, precisam ser mateticamente ricas, sendo desafiadoras, articuladas com o contexto social e cultural em que o aluno vive, para que o aluno se sinta cada vez mais motivado a aprender.

Ao focarmos no uso de *smartphone*, destacamos o uso de aplicativos que possibilitam e interação entre os indivíduos, como, por exemplo, o WhatsApp. Em que atividades podem ser propostas com uso de alguma tecnologia, e discutidas com os demais (professor e alunos) em um grupo do WhatsApp. Ou ainda, atividades desenvolvidas com a produção de vídeos e essas produções serem discutidas no grupo, favorecendo a aprendizagem na/e a partir da interação com o outro. Além de que, essa ação de discussão de produções em um grupo de WhatsApp, pode favorecer a dimensão social de um ambiente construcionista, o aluno pode retomar sua produção a partir do *feedback* apresentado pelos demais, caracterizando assim um processo contínuo de (re)construção de conhecimentos.

²⁴ *Logo's integration into personal relationships and the culture of the environment in which it is encountered*”.

Porém, não basta apenas o cuidado na elaboração de atividades e escolha de aplicativos a serem usados para favorecer relações sociais, pois se constitui também fundamental neste ambiente construcionista, a atitude do educador. Esse, por sua vez, orienta os alunos, sem “dar respostas”, propõe questionamentos e desafios que oportunizem aos educandos colocarem a mão na massa, interagirem entre si e com outras pessoas, ao e construirão conhecimento.

A atitude do professor é fundamental para a manutenção do ambiente construcionista, não considerando apenas a dimensão social, pois o professor, “[...] tem que entender as ideias do aprendiz e sobre como atuar no processo de construção do conhecimento para intervir apropriadamente na situação, de modo a auxiliá-lo nesse processo” (VALENTE, 1999, p. 95), tanto no espaço virtual como no presencial. Mais adiante, aprofundaremos a discussão sobre o papel do professor diante da dinâmica de articulação entre o espaço presencial e o espaço virtual, e como esse papel pode favorecer a constituição de um ambiente de aprendizagem construcionista.

Outra dimensão do construcionismo é a dimensão **semântica**, que está relacionada com a manipulação de elementos que carregam/podem produzir significados múltiplos. Durante o processo de manipular, produzir e discutir diferentes significados, o aluno tem a oportunidade de ir descobrindo novos conceitos e produzir significados para si. Maltempo (2004, p.265) pontua que as “construções mentais” dos alunos

deveriam ser apoiadas por construções concretas (“no mundo”), cujo produto pode ser “mostrado, discutido, examinado, sondado e admirado”, favorecendo a troca de ideias e opiniões que podem auxiliar e impulsionar o aprendiz a desenvolver projetos mais complexos que envolvam novos conhecimentos.

Compreendemos o termo “construções concretas” como algo que materializa (ao menos em parte), aquilo que foi pensado pelo aluno. Em outras palavras, o aluno age sobre uma situação e desenvolve algo, com o computador, a partir da problemática em estudo.

Para discutir a dimensão semântica do ambiente construcionista, é importante discutir a semântica de diferentes tecnologias, presente em softwares e aplicativos, presente nos diferentes computadores, como os *smartphones*.

Na época em que Papert desenvolveu estudos sobre o construcionismo, o computador, mais especificamente, o ambiente Logo foi a tecnologia central usada. Hoje, temos diversas outras tecnologias, como por exemplo, aplicativos disponíveis em *smartphones* que podem ser utilizados e propiciar ao aprendiz a possibilidade de produzir diferentes significados, tanto em ambientes de aplicativos em que se pode explorar conceitos

específicos de uma determinada área, como usando aplicativos para dialogar sobre suas produções, ao apresentá-las e compartilhá-las com outros estudantes e professor

Sobre a escolha de aplicativos e softwares a serem usados em ambientes construcionista, é importante lembrar que:

diversas ferramentas computacionais existentes podem ser consideradas construcionistas se forem empregadas de maneira adequada. Isso pode ocorrer, por exemplo, no uso de processadores de texto, planilhas eletrônicas, ou qualquer outro ambiente que favoreça a aprendizagem ativa, isto é, que propicie ao aprendiz a possibilidade de fazer algo e, com isso, poder construir conhecimentos a partir de suas próprias ações. (MALTEMPI, 2004, p.26)

O autor cita algumas possibilidades de uso de tecnologias, como as planilhas eletrônicas e processadores de texto, que hoje, já estão disponíveis em forma de aplicativos em *smartphones*. Ou seja, esses aplicativos podem ser acessados em diferentes lugares.

A quinta dimensão é a **sintônica**, que diz respeito que ao aluno aprender e produzir algo considera importante. Buscando a sintonia entre a produção, que envolve conhecimento a ser construído pelo aluno, e a importância que este vê nessa produção.

A palavra sintônica, derivada de sintonia, sugere uma harmonia entre dois extremos. Aquilo que está em sintonia não é dissociado, separado, truncado. Sintônico é ligação, é relação. Maltempi (2004, p. 266) ressalta:

ao contrário do aprendizado dissociado, normalmente praticado em salas de aula tradicionais, a construção de projetos contextualizados e em sintonia com o que o aprendiz considera importante fortalece a relação aprendiz-projeto, aumentando as chances de que o conceito trabalhado seja realmente aprendido.

Essa dimensão está relacionada ao desenvolvimento de projetos e atividades que sejam contextualizados e em sintonia com algo de importância para o aluno. Considerar uma tarefa, ou o desenvolvimento de um projeto importante não parece uma ação fácil de realizar. Até mesmo, porque às vezes, aquilo que pode ser considerado importante para um aluno, pode não ser importante para outros. Por esses motivos, consideramos que a dimensão sintônica pode ser contemplada de duas maneiras.

Uma maneira seria cada aluno ter autonomia de escolha de temas (que envolve conceitos a serem aprendidos) para desenvolver projetos com uso de tecnologia. Conforme sugere Maltempi (2004, p.268) “é importante dar ao aprendiz a oportunidade de participar da escolha do tema do projeto a ser desenvolvido - o professor deve mediar o processo de escolha, a fim de se chegar a algo, ao mesmo tempo, factível e desafiador.”

A outra maneira de explorar a dimensão sintônica seria investir em ações que oportunizem o envolvimento do aluno a partir de uma “devolução do problema”

(BROUSSEAU, 2008) proposto pelo professor (criador da problemática/ projeto/atividade). Como nessa dimensão se considera que o aluno deve se sentir desafiado, interessado, envolvido com a proposta de atividade/projeto, consideramos o professor pode propor o desenvolvimento de atividade e apresentá-la aos alunos, de modo a mobilizá-los a agir, a realizá-la. O aluno, por sua vez, pode se envolver com o problema, tomando-o para si, como se fosse de sua autoria. Essa atitude de tomar o problema como seu, foi denominada por Brousseau (2008) como sendo “devolução” do problema pelo aluno. Freitas (2012, p.83, grifo nosso), ressalta o que a devolução do problema significa:

a transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de **comunicar** o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema, ou seja, se ela aceita participar desse desafio intelectual e se consegue sucesso nesse empreendimento, então, inicia-se o processo de aprendizagem.

Nessa concepção de ensino, segundo Brousseau (1986, p.49), o professor deve provocar “no aluno as adaptações desejadas, por meio de uma escolha cuidadosa dos problemas, de modo que o aluno possa aceitá-los, agir, falar, refletir [...]”.

Com a ação de devolução vivenciada pelo aluno, podemos dizer que aquele problema/projeto/atividade, que inicialmente era importante somente para o professor, passa então a ser importante também para o aluno. Ou seja, com essa ação de devolução podemos caracterizar a dimensão sintônica em um ambiente construcionista.

Nessa perspectiva, o professor pode pensar em uma atividade que ele considere importante que o aluno desenvolva, tanto no espaço presencial, como no virtual. Ao propor essa atividade ao educando, este necessariamente precisa “entrar no jogo”, ou seja, ele precisa tomar o problema como se fosse seu, mesmo ele não tendo participado efetivamente da elaboração do problema. Assim, o aluno inicia uma trajetória para resolver o problema, e, esse início tem que acontecer por um desejo do aluno em resolver o problema (que torna-se “seu”), que não o resolve por uma obrigação. “A devolução consiste no conjunto de condições que permite que o aluno se aproprie da situação. Quando os alunos se apropriam da situação, o professor pode deixá-los com a responsabilidade da pesquisa” (FREITAS, 2008, p.85).

Ao discutir as dimensões do construcionismo, e o uso de tecnologias digitais neste processo, é importante mencionar que alguns aplicativos oferecem elementos que podem favorecer a vivência das cinco dimensões de um ambiente construcionista. Isso porque, a depender da tecnologia, o aluno tem a oportunidade de ir aos poucos fazendo descrição no

smartphone, compreendendo suas “construções concretas”, formulando hipótese e refletindo a partir do *feedback* apresentado na tela. Já outros aplicativos apresentam um *feedback* mais objetivo, em forma de resposta pronta a questão levantada, que pode dificultar a construção do conhecimento pelo aluno, quando se busca a criação de um ambiente construcionista de aprendizagem. Isso porque, ao apresentar um *feedback* como resposta pronta, o aplicativo limita a ação de reflexão e oportunidade de o aluno ser produtivo.

Assim, compreendemos que ao intencionar constituir um ambiente construcionista, é preciso pensar sobre as potencialidades e limitações das tecnologias a serem usadas, e no quanto se intenciona que o aluno produza.

O aluno ao desenvolver uma atividade que lhe seja interessante, que lhe instigue e possibilite contato e domínio de novos conceitos, desperta no aprendiz, segundo Maltempo (2004), uma sensação de poder e praticidade, sensação essa que lhe dá ânimo para que este busque aprender cada vez mais. Esse é o sentimento de *empowerment*...

[...] quando é dada a oportunidade para essas pessoas compreenderem o que fazem, elas experienciam o sentimento do *empowerment* – a sensação de que são capazes de produzir algo considerado impossível. Além disso, conseguem um produto que eles não só construíram, mas compreenderam como foi realizado. Eles podem falar sobre o que fizeram e mostrar esse produto para outras pessoas. É um produto da mente deles e isso acaba propiciando uma grande massagem no ego. (VALENTE, 1999, p.106)

Em um ambiente construcionista de aprendizagem, a produção não é algo pronto, dado ao aluno, sem esforço. É algo por ele construído, é resultado de suas considerações, suas reflexões, suas observações. Então faz sentido, que ele queira mostrar sua produção aos colegas do grupo de estudo. Faz sentido, que se tenha orgulho, em ter produzido algo e entendido essa produção. Faz sentido o sentimento de ser capaz, de poder e de competência para realizar algo.

Quanto ao uso de *smartphone* (com seus aplicativos), conectado à internet, explorando as diferentes dimensões do construcionismo, podemos citar algumas ações que podem favorecer atividades do tipo **hands-on** (PAPERT, 1986) (em negrito na listagem a seguir), e enriquecer um ambiente construcionista:

- **assistir** vídeos, que podem ser sugeridos pelo professor, ou resultado de pesquisas do próprio aluno.
- **produzir** um vídeo em diferentes espaços. Esse recurso não demanda instalação de nenhum aplicativo extra ao *smartphone*, pois é um recurso de fábrica. Assim, o aluno pode usar esse recurso para **apresentar** aos demais,

alunos e professores, os resultados de suas investigações, encaminhando-o posteriormente a um espaço de interação entre os sujeitos, ou até mesmo um espaço coletivo de tarefas. Ou discutir o próprio vídeo em sala de aula presencial.

- **Interagir** com aplicativos de investigação matemática, ao **desenvolver** uma atividade proposta. Em matemática, mais especificamente para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, foco de estudo desta tese, há vários aplicativos na versão móvel, como, por exemplo, a calculadora gráfica GeoGebra 2D (usada nessa pesquisa), GeoGebra 3D, GeoGebra de realidade aumentada, Matlab, MalMath, Derivatives, Grapher, 3D gráficos, dentre outros.
- **Interagir** com livros digitais. Aqui destacamos um livro digital que usamos em uma das aulas virtuais, chamado de “inspira digital-estudando funções polinomiais”. O livro gratuito, baixado no *smartphone*, possibilitava ao aluno, **simular** diferentes coeficiente de funções polinomiais do 1º grau, além da leitura, e anotações possíveis de serem feitas. Alguns livros digitais permitem fazer anotações, simulações e experiências (características de livros do tipo “laboratório virtuais” que contemplam conteúdo de Matemática, Biologia, Física e Química).
- **Gravar** tela do *smartphone* e **compartilhar** com professores e alunos dúvidas e resultados encontrados ao resolver problemas. Essa ação normalmente demanda a instalação de algum aplicativo de gravação de tela e áudio. E o consideramos importante, pois permite ao professor compreender melhor o processo de aprendizagem do aluno, bem como as dificuldades por ele enfrentadas durante o processo de aprendizagem. Esse recurso de gravação de tela e áudio, também foi usado na pesquisa.
- **Ler e editar** texto, vídeos e imagens.
- **Interagir** com professor e demais alunos. Essa característica será discutida de maneira aprofundada no capítulo seguinte, ao apresentarmos um modelo de interação entre professor e aluno, em espaço virtual. Mas nesse momento da escrita, adiantamos que existem diversos aplicativos que podem ser usados para interação entre os sujeitos, como por exemplo, o próprio chat e fórum da plataforma *moodle*, versão *mobile* e *WhatsApp*. Representando uma facilidade e possibilidades de **compartilhamento** de imagens, texto, arquivos, vídeos,

gifs, links, bem como, fazer vídeo chamada entre dois ou mais usuários, criar grupos de pessoas com interesse comum (até 256 integrantes).

- **Acessar** e interagir com materiais de diferentes espaços, como por exemplo, ao ambiente virtual de aprendizagem-AVA da disciplina. No caso da pesquisa, optamos por organizar a sequência didática das agendas a distância, na plataforma GeoGebra. A plataforma permite ao professor, criar uma sequência didática, integrando diversos materiais como por exemplo, vídeos, texto, imagens, simuladores, objetos de aprendizagem do GeoGebra (que podem ser criados pelo próprio professor, ou adotados de outros autores, todo disponíveis na plataforma gratuitos).

Achou interessante, leitor? Então que tal navegar no espaço da plataforma Geogebra e conhecer a produção de diversos autores nacionais e internacionais. Decodifique o qr code ou acesse o link seguinte e conheça mais desse rico espaço de aprendizagem matemática com uso do Geogebra.



25

Essas são algumas ações que podem ser realizadas em um ambiente construcionista, com uso de *smartphones*, no espaço virtual e/ou presencial, considerando as cinco dimensões do construcionismo. Diversas outras possibilidades e aplicativos podem ser usados pelo docente, a fim de que o aluno possa aprender matemática em diferentes espaços, vivenciando um papel ativo e interagindo com os materiais e sujeitos.

Em particular no espaço presencial, ainda vale mencionar a realização de tarefas em grupos e a **discussão** e **apresentação** de produções, a partir do espelhamento de tela como ação que pode favorecer a vivência de aspectos das dimensões pragmática, sintática, semântica e social no ambiente de aprendizagem construcionista. Essa ação desenvolvemos na produção de dados desta tese de doutorado, como veremos mais adiante.

Com o espelhamento de tela do *smartphone*, o professor pode constituir o momento de institucionalização²⁶ (BROUSSEAU, 2008), como um momento que os alunos podem

²⁵ Material do Qr code disponível em: <<https://www.GeoGebra.org/materials?lang=pt>>

²⁶ Conceito da teoria das situações didáticas, a ser mais discutido no tópico seguinte.

dialogar sobre suas produções (individuais ou coletivas), e mostrar esse “produto” para outras pessoas (alunos e professor. Em outras palavras, a institucionalização com espelhamento de tela é um momento de diálogo, de compartilhamento, de produções coletivas, da busca de uma compreensão comum da problemática em estudo, de explorar conceitos formalizados em outros espaços.

Para responder a essa questão, Freitas (2012, p.101) pontua que “as situações de institucionalização visam estabelecer o caráter de objetividade de universalidade do conhecimento”. Ou seja, quando o professor elabora/adapta/escolhe um problema/tarefa, tem-se um objetivo de aprendizagem que se intenciona atingir. Esse objetivo envolve um saber matemático a ser aprendido pelo aluno. E é esse saber que será institucionalizado pelo professor, mas não como algo pronto e acabado, mas como resultado das produções apresentadas/discutidas pelos alunos, no caso específico dessa tese, oportunizado pelo espelhamento de tela do *smartphone*, nos encontros presenciais. Ou seja, ao professor, cabe ir questionando os alunos quanto as suas produções e considerações, para assim chegar na “universalidade do conhecimento” (BROUSSEAU, 2008, p.29), como resultado de diálogo e produções.

Logo, com espelhamento de tela do *smartphone*, o professor oportuniza aos alunos um espaço para dialogar e apresentar suas produções favorecendo o sentimento de *empowerment*, mencionado por Valente (2005), e a ação de socialização, conforme pontua Freitas (2012, p.103).

Durante a institucionalização, caracterizada pela sistematização por meio da apresentação de definições, propriedades e teoremas, em linguagem matemática mais formalizada, onde deve ocorrer uma **socialização**, professores e alunos dialogam sobre conhecimentos matemáticos historicamente construídos relativos ao problema abordado.

Assim, finalizamos a discussão sobre as cinco dimensões do construcionismo e algumas possibilidades de ações com uso de *smartphone*, que podem enriquecer um ambiente construcionista no espaço virtual e/ou presencial. Diversas outras possibilidades e aplicativos podem ser usados pelo docente a fim de que o aluno possa aprender matemática em diferentes espaços, vivenciando um papel ativo, e interagindo com os materiais e sujeitos, em um ambiente construcionista de aprendizagem.

A seguir, iremos apresentar e discutir uma construção teórica para a tese, ao propor um ciclo de ações com uso de *smartphone*, considerando a constituição de um ambiente de aprendizagem construcionista, em especial, em ambiente presencial. E, na seção seguinte discutiremos uma abordagem de EaD, a partir do uso de *smartphone*, em espaço virtual,

considerando a constituição de um ambiente construcionista, em uma proposta de educação bimodal.

2.2 UMA PROPOSTA DE CICLO DE AÇÕES COM USO DE *SMARTPHONE*

Nesta seção vamos propor uma construção teórica sobre situações didáticas, em sala de aula, em que os alunos utilizam *smartphone* para investigar problemas matemáticos, e espelhamento de tela para o momento de institucionalização do saber. E essa construção teórica se constitui em um ciclo de ações, articulando uma discussão do ciclo de ações proposto por Valente (2005), com uso de *smartphone*, e a teoria das situações didáticas (TSD).

A teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau, e constitui-se de um estudo que permite propor o ensino e analisar a aprendizagem Matemática. A teoria é fundamentada no construtivismo de Piaget, então se postula que o aluno aprende por adaptação a um meio que produz nele, contradições e desequilíbrios cognitivos. O foco dessa teoria são situações didáticas, caracterizadas pelas interações entre alunos, aluno e professor, aluno e o saber matemático - que nesta tese serão os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Freitas (2012, p.78) ressalta que a TSD é um referencial teórico para a Educação Matemática, pois em relação à aprendizagem, “valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático”. E em relação às ações do professor, o autor pontua: “valoriza o trabalho do professor, que consiste fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos”. E por esse motivo, faremos a articulação de conceitos da TSD com o ciclo de ações e uso de *smartphone*, com espelhamento de tela. Para iniciarmos o diálogo sobre a construção teórica, aqui intencionada, consideramos o seguinte cenário de sala de aula presencial:

- Cada aluno com seu *smartphone*²⁷ e organizados em grupos favorecendo a dimensão social do ambiente construcionista, ao criar situações favoráveis para interação entre os sujeitos, como pontuado no tópico anterior.

²⁷ Sugerimos que cada aluno use o seu *smartphone*, pois assim tem-se a produção individual e a discussão coletiva uma vez que a organização em grupo tem essa intenção. Mas, no caso de nem todos os alunos terem *smartphones*, ou havendo incompatibilidade do aplicativo com o sistema operacional do *smartphone*, o professor pode optar por organizar a sala em uma dupla, ou trio com um *smartphone*.

- Espelhamento de tela de ao menos um *smartphone*.
- Sequência didática, que pode integrar uso de aplicativos, materiais/problemas/tarefas, planejada pelo professor, orientada pelas cinco dimensões do construcionismo, discutidas anteriormente.

As características desse cenário são consideradas importantes, pois favorecem a constituição de um ambiente construcionista de aprendizagem (ver tópico anterior). Além disso, essa organização por parte do professor pode ser considerada elemento que enriquece o “meio”, que é um conceito importante da TSD. Segundo Freitas (2012, p.78):

o meio é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age. É no meio que se provocam mudanças visando desestabilizar o sistema didático e o surgimento de conflitos, contradições e possibilidades de aprendizagem de novos conhecimentos.

Esse meio deve ser preparado pelo professor com intenções didáticas. Entendemos assim que o próprio problema, escolhido/elaborado/adaptado pelo professor é parte do meio, assim como a proposta de uso de *smartphone* (seus aplicativos), o espelhamento de tela, e a própria organização da sala em grupos de discussão. Consideramos, assim, que as dimensões do ambiente construcionista orientam ações vivenciadas no meio. Isso porque, na situação didática, o aluno irá interagir com outros colegas e professor, com os materiais, as tecnologias, problemas que foram inicialmente elaborados/escolhidos/adaptados considerando as dimensões de um ambiente construcionista de aprendizagem.

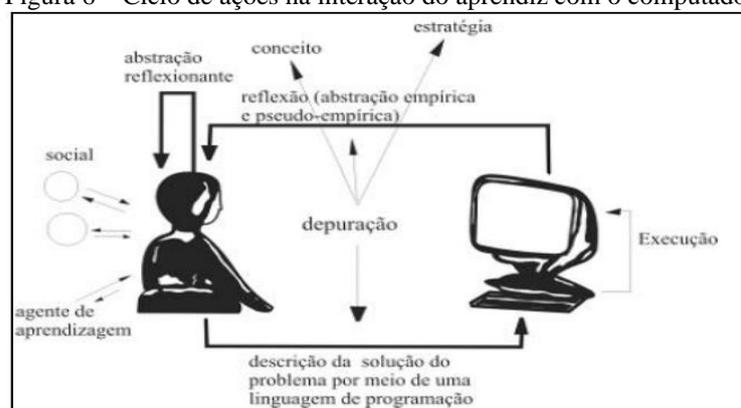
Além de caracterizarmos o meio, o conceito de devolução em uma situação didática, que já foi apresentado na seção anterior (quando falamos sobre a dimensão sintônica), precisa ser ampliado, pois defendemos que a devolução é uma ação necessária para vivenciar um ciclo de ações, conforme propomos nesta tese.

Diante do cenário inicialmente proposto, o professor pode propor um problema/atividade/projeto que envolva o uso do *smartphone* e apresentá-lo aos alunos. O aluno, por sua vez, pode se envolver com o problema, tomando-o para si, como se fosse seu. Essa atitude do aluno, de tomar o problema como seu, foi denominada por Brousseau (2008), de devolução. A partir do momento em que ocorre a devolução, fica caracterizada uma situação adidática (**ação, formulação e validação**). A situação adidática é caracterizada pelo papel ativo do aluno de agir, refletir e argumentar sobre um problema matemático. “As situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento” (FREITAS, 2012, p.86).

Retomando ao cenário inicialmente proposto, iremos considerar que os alunos vivenciam uma situação adidática, e estão organizados em grupos e com *smartphone*. Ou seja, eles irão usar essa tecnologia para tentarem solucionar o problema, e suas ações no processo de aprendizagem, com uso de tecnologia, podem ser representadas por um ciclo. E para teorizarmos sobre esse ciclo, vamos partir do ciclo de ações de Valente (2005) com uso de computador.

Valente (2005) discute o “ciclo de ações” como um processo de construção do conhecimento do aprendiz ao usar o computador. Para o autor, na interação entre aluno e computador, diante de uma tarefa a ser realizada, é possível analisar a aprendizagem a partir do ciclo de ações: descrição- execução- reflexão- depuração, conforme Figura 6.

Figura 6 – Ciclo de ações na interação do aprendiz com o computador



Fonte: (VALENTE, 2005)

Nessa tese, estamos defendendo que quando o professor propõe um problema/atividade aos alunos, e a devolução acontece, ele pode vivenciar esse ciclo de ações. Afinal, se o aluno tomar o problema para si, ele se envolverá na busca de respostas, e o processo de construção de conhecimento é ativado. Para Valente (2005), quando o aluno está diante de um problema que o interessa, ele mobiliza conceitos que pode solucionar o problema, e desenvolver uma estratégia de solução.

Se pensarmos na vivência do ciclo proposto por Valente, temos as ações de descrição, execução, reflexão e depuração, conforme Figura 6. A **descrição** da solução do problema para o computador, no caso da tese, *smartphone*, é feita usando uma linguagem de programação, ou os comandos próprios do *software* ou *applet*. O computador realiza a **execução** a partir da descrição e apresenta uma resposta na tela (*feedback*). Essa resposta possibilita, ao aluno, **refletir** sobre a descrição apresentada e sobre a solução do problema em estudo. No caso de não ser a resposta esperada por ele, o aluno irá depurar os conceitos e/ou estratégias envolvidos na descrição e realizar uma nova descrição, iniciando novo ciclo.

Partimos então do ciclo de ações proposto por Valente (2005) para o ciclo de ações que propomos nesta tese de doutorado. Uma especificidade desse ciclo aqui proposto é a natureza dos problemas a serem realizados pelos alunos ao vivenciarem o ciclo de ações, que envolveram situações “específicas da aprendizagem da matemática” (FREITAS, 2012, p.95), de **agir** (de natureza experimental), **formular** hipótese/afirmações e **validá-las** ou **refutá-las**. Ou seja, o ciclo será vivenciado para a aprendizagem de conceitos matemáticos, mais especificamente, conceitos de Cálculo. Nós defendemos que as possíveis situações adidáticas de **ação**, **formulação** e **validação** estão imbricadas às ações de descrição, de reflexão, e de depuração das estratégias e conceitos realizados, pelo sujeito ao vivenciar o ciclo.

Vejamos de maneira mais aprofundada a relação entre o ciclo de ações apresentado por Valente (2005) e como entendemos as relações desse ciclo com as situações adidáticas, propostas por Brousseau (2008). O aprendiz ao iniciar o ciclo, vivenciando uma situação adidática, realiza uma descrição, pode ser resultado da situação adidática de ação do educando, ao tomar para si e resolver o problema/situação em estudo. Uma ação que por vezes é resultado ou remete, após execução do computador, à ação de reflexão presente no ciclo. A ação de reflexão pode envolver abstrações empíricas, pseudo-empíricas e reflexionantes, discutidas nos estudos de Piaget, que também orientaram os estudos da TSD.

Ao discutir as abstrações, Valente (2005, p.65) afirma que “A abstração mais simples é a **empírica**, que permite ao aprendiz extrair informações do objeto ou das ações sobre o objeto, tais como a cor e a forma do mesmo.” Já a “abstração **pseudo-empírica** permite ao aprendiz deduzir algum conhecimento da sua ação ou do objeto [...]” (VALENTE, 2005, p.65). Compreendemos que esses tipos de abstrações podem estar mais relacionados a vivência de uma **situação adidática de ação**, pois nesse tipo de situação, o aluno que está empenhado na solução de um problema matemático, não articula/explicita justificativas/explicações/pensamentos de natureza mais teórica. Assim, poderíamos afirmar que o aluno pouco/não articula conhecimentos científicos envolvidos no estudo/solução do problema, com conhecimentos construídos por ele em outros momentos, objetivando possíveis teorizações.

“Em uma situação de ação há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento” (FREITAS, 2012, p.96). No caso, as ações do aluno são de natureza mais experimental, do fazer, sem uma preocupação com a justificativa do resultado, ele não formula hipóteses e nem busca meios para validá-las, articulando o conhecimento em jogo e o seu conhecimento.

Um exemplo de uma situação adidática de ação vivenciada em um ciclo de ações, usando *smartphone*, pode ser caracterizada, por exemplo, a partir de uma situação em que um aluno realiza a tarefa de analisar relações entre o coeficiente angular e a representação gráfica de uma função polinomial do 1º grau. Nessa proposta, o aluno, ao “entrar no jogo”, tomando a tarefa para si, pode iniciar o ciclo com descrições, fazendo simulações de gráficos de funções do 1º grau, usando algum *software* gráfico que possibilita plotagens, explora diferentes valores para o coeficiente angular da função. A execução é feita pelo software, aparecendo os gráficos na tela. E, na ação de reflexão do ciclo, o aluno ao observar as diferentes posições das retas (representações gráficas da função polinomial do 1º grau), não apresenta/busca/se preocupa em justificativas para o que observa, ou em levantar hipóteses de natureza mais teórica, articulada com outros conhecimentos que possua; ele apenas explicita o que observa, por exemplo, ele pode formular a hipótese de que: “ao alterar os valores do coeficiente angular, a representação gráfica da função se altera”.

Assim, mesmo empiricamente, o aluno pode formular hipóteses e validá-las. Ele formula ao anunciar que existe uma relação entre o coeficiente angular e a representação gráfica da função; e ele pode validar sua hipótese empiricamente, plotando gráficos com diversos valores de coeficiente angular, mas ainda sem estabelecer relações entre este conhecimento em jogo e outros conhecimentos que ele possui.

Porém, ressaltamos que é importante para a aprendizagem que o aluno vivencie momentos de abstração pseudo-empírica e reflexionante, pois ao vivenciar reflexões decorrentes de abstrações reflexionantes o aprendiz articula o conhecimento novo aos seus conhecimentos prévios. Ou seja, no caso da abstração reflexionante, o aprendiz pensa sobre suas próprias ideias/conhecimentos, e sua reflexão não se situa apenas no campo das características visuais apresentadas como *feedback* oferecido pelo computador/*smartphone*, mas, avança para compreensões mentais sobre o que observa em tela.

Compreendemos que, considerando a aprendizagem de conceitos matemáticos, a abstração reflexionante está mais relacionada a vivência de **situações adidáticas de formulação e validação**, já iniciadas na ação de descrição de um ciclo de ações (e que pode ser vivenciado após a realização do ciclo descrito anteriormente ou não), cujo objetivo do aluno é formular e/ou validar alguma hipótese, sempre relacionando o conhecimento em jogo com conhecimentos teóricos produzidos anteriormente. Afirmamos isso, pois em uma **situação adidática de formulação** o aluno formula algumas hipóteses, “já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos” (FREITAS, 2012,

p.83). E após formular, a partir de abstrações reflexionantes, busca validar suas hipóteses, com o objetivo de justificar teoricamente suas afirmações.

Para que o aluno avance na resolução de um problema, é necessário que ele aprofunde sua atitude reflexiva. [...], quando o aluno começa a buscar justificativas sobre a validade das afirmações formuladas, mesmo que de forma interiorizada, ele estará numa condição-limite, adentrando por um novo tipo de situação didática. (FREITAS, 2012, p.97)

E na **situação adidática de validação** o aluno busca validar as hipóteses levantadas. “Essas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade” (FREITAS, 2012, p.98).

Nesse sentido, a seguir iremos exemplificar algumas situações adidáticas de formulação e validação, que podem ser vivenciadas de maneira imbricada ao ciclo de ações discutido por Valente (2005), considerando o contexto da pesquisa dessa tese.

Vamos supor uma atividade em que o aluno tem como tarefa identificar um ponto de máximo de uma função e possíveis relações desse com a função derivada, usando o software GeoGebra. Em uma situação adidática, em que o aluno já tomou para si a tarefa/situação problema, ele pode plotar a função, movimentar um ponto sobre a curva (ações de descrição do ciclo), e observar na tela do *smartphone* (após ação de execução), o maior valor da função que aparece no gráfico plotado, identificando o ponto de máximo da função.

Na ação de reflexão, ao vivenciar a situação adidática de formulação para estabelecer relações entre esse ponto máximo e a função derivada, o aluno pode, por exemplo, considerar que no ponto de máximo, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico (derivada da função) é zero (caso em que a derivada da função existe), apresentando a hipótese teórica de que em ponto de máximo, a derivada é zero (articulado com conhecimentos que ele já possui). E na fase da validação, o aluno vai tentar validar a hipótese levantada anteriormente, justificando, via alguma descrição, por exemplo, que é a raiz da função derivada, explicando a relação desta com o ponto de máximo. Ou seja, ele estaria vivenciando abstrações reflexionantes na ação de reflexão do ciclo.

Dando continuidade a vivência das ações do ciclo, após a ação de reflexão, temos a ação de depuração de estratégias e conceitos. A depuração depende da reflexão e abstrações vivenciadas pelo aluno, e conseqüentemente da vivência da situação adidática de ação, formulação e validação. Por exemplo, na abstração empírica e pseudo-empírica o aluno “retira” propriedades do objeto em estudo a partir do observável, e nesse estágio de abstrações “[...] o aprendiz ainda está muito dependente do resultado empírico obtido. As **depurações** decorrentes podem ser vistas como pequenos ajustes, nunca como grandes mudanças conceituais.” (VALENTE, 2005, p. 68).

Na abstração reflexionante, o aluno está em um patamar mais complexo de reflexão. Diante de uma situação desafiadora, ele age sobre os conhecimentos já construídos por ele, ao utilizar conhecimentos anteriores, em patamar inferior do pensamento, incluindo novas informações e **depurando-as** para construir o conhecimento, agora em patamar superior. Ou ainda pode buscar novas informações ou desenvolver novas estratégias. Ao depurar as informações e hipóteses levantadas, o aprendiz realiza uma nova descrição, e inicia um novo ciclo, mas em um novo patamar de conhecimento, ou seja, o conhecimento que possui na segunda descrição é diferente em relação ao anterior, pois há novas certezas, e talvez novas dúvidas, que constituem o seu conhecimento. Nesse caso a **depuração** será resultado das **hipóteses levantadas** e carregada **de tentativas de validação** das mesmas, envolvendo mudanças conceituais do aprendiz.

Sempre que a resposta que aparece na tela não é a esperada pelo aprendiz, ele continua vivenciando o ciclo, e reflete e **depura** conceitos e/ou estratégias usadas, e assim mobiliza ou constrói novos conhecimentos para a solução do problema. Segundo Morelatti (2001):

Na sequência de ações descrição-execução-reflexão-depuração, o erro passa a ter um papel fundamental, pois quando a resposta, ou o *feedback* dado pelo computador não é satisfatório, ou ainda, é diferente do esperado, o aluno vai depurar suas ideias, isto é, passa a refletir, a pensar sobre os conteúdos envolvidos. Os desequilíbrios causados pelos “erros”, ou seja, causados pela não verificação de sua hipótese leva o aluno a refletir e a buscar novas informações que devem ser incorporadas como parte de seu conhecimento e aplicadas à resolução do problema. Tanto a reflexão como a busca de novas informações favorecem a construção do conhecimento [...]. (MORELATTI, 2001, p. 98-99).

A ação de o aluno refletir sobre o problema e buscar novas informações contribui para que ele possa (re)construir conhecimento. Segundo Valente (2005, p.53), “o processo de achar e corrigir o erro constitui uma oportunidade única para o aluno aprender sobre um determinado conceito envolvido na solução do problema ou sobre estratégias de resolução de problemas.” Nós acrescentamos que, o processo de achar e corrigir o erro, considerando uma possível discussão com os colegas e professores, e questionamentos pertinentes por parte do professor, constitui-se uma oportunidade de o aluno refletir sobre o problema, formulando hipóteses e buscando mecanismos de validação.

Dando continuidade à discussão sobre o ciclo de ações e apresentando nossas compreensões em relação a TSD, vamos falar sobre o **agente de aprendizagem**, que pode ser o professor, como na proposta desta pesquisa de doutorado. Como o ciclo de ações é orientado por estudos sobre o construcionismo, o papel ativo do aluno se reflete em um lema

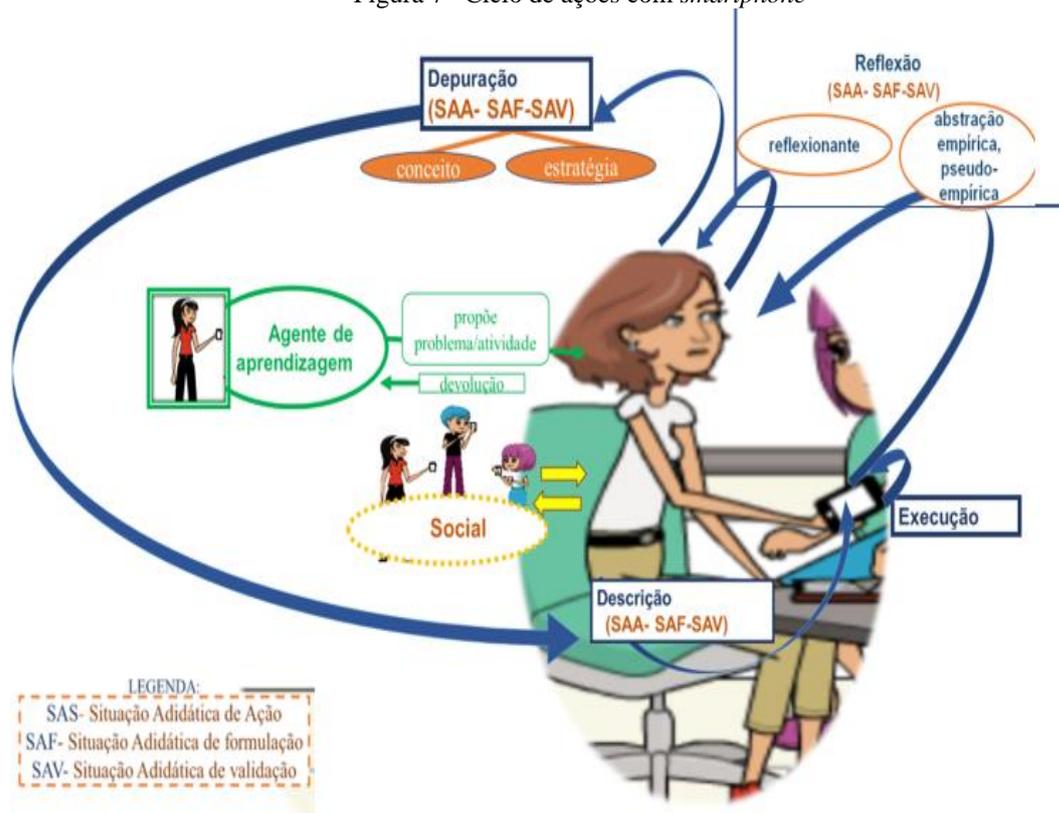
de Papert (1987) em que o autor afirma que a abordagem construcionista consiste em obter o máximo de aprendizagem, a partir do mínimo de ensino. O mínimo de ensino está relacionado com a atitude do professor de não dar respostas às questões que propõe ao aluno, ou que esse tenha proposto. Ou seja, a aula não é centrada na ação do professor em explicar algo, mas na ação do aluno em propor e resolver problemas, questões, cabendo ao professor orientar, questionar, acompanhar para que o aluno encontre soluções.

Na perspectiva da TSD, o professor é o responsável por organizar o meio, por propor bons problemas, apresentar aos alunos (favorecendo a devolução), mediar os momentos adidáticos, e fazer a institucionalização. Dessa forma, podemos entender que o papel do professor é manter o ciclo de ações. É importante que ele desafie o aluno, com o objetivo de fazer com que ele reflita sobre o problema proposto, para assim encontrar e testar estratégias que o solucione. Segundo Freitas (2012, p.107) “o professor não fornece, ele mesmo, a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente [...]”. E essa ação do professor oportuniza a vivência de situações adidáticas, oportuniza ao aluno “construir novos conhecimentos, com base em suas experiências pessoais, sua interação com o meio.”

O professor tem um papel de mediador, de participar da aprendizagem com intuito de sustentar o momento adidático, por exemplo, fazendo perguntas pertinentes, mas que não se caracterizam como intervenção direta sobre o saber matemático. Em outras palavras, o professor não dá resposta direta ao aluno, mas propõe situações/questionamentos que podem oportunizar ao aluno, encontrar respostas ao seu problema. Na situação adidática, os alunos têm oportunidade de vivenciar descobertas que envolvem um saber matemático formal (propriedade, teorema, proposição, conceito entre outros).

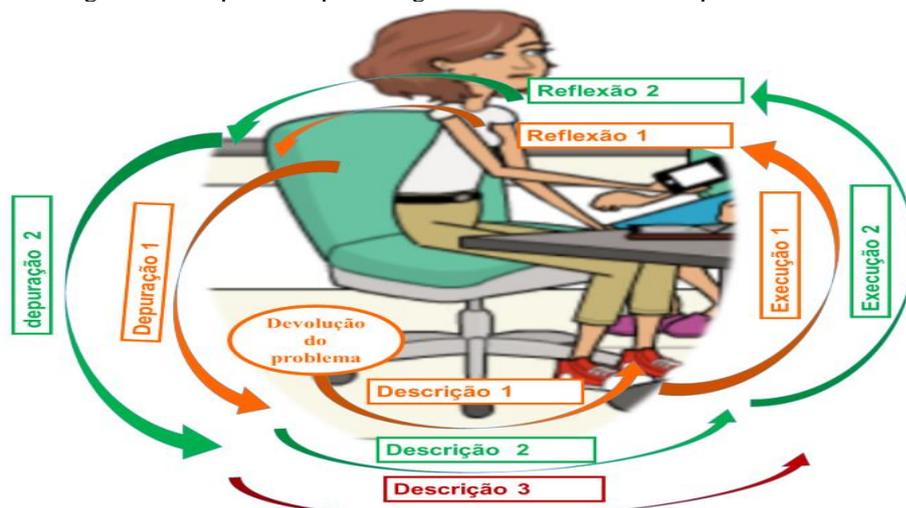
Outro elemento proposto no ciclo de ações de Valente (2005) é o **social**. O aprendiz é um ser social e está inserido “em ambiente social e cultural constituído, mais localmente, por colegas e, mais globalmente, por pais, amigos ou pela comunidade em que vive” (VALENTE, 2005, p.65). E ele pode interagir com esses elementos sociais e culturais “como fontes de idéias e de informação ou onde buscar problemas para ser resolvidos por intermédio do computador.” (VALENTE, 2005, p.65). Vale ressaltar que o professor também faz parte do social, no ciclo de ações.

A partir da relação proposta entre o ciclo de ações e a TSD, apresentamos na Figura 7, a proposta de um ciclo de ações, e iremos considerar que esse ciclo é vivenciado com o uso de *smartphone*, daí o denominarmos de Ciclo de ações com *smartphone*, mesmo que esse ciclo integrado a TSD possa ser vivenciado com outros formatos de computadores.

Figura 7– Ciclo de ações com *smartphone*

Fonte: elaborado pelas autoras.

No movimento descrição-execução-reflexão-depuração (agindo - formulando hipótese-validando hipótese), o aluno poderá gerar uma nova descrição para a solução do problema que está sendo estudado. Dessa forma, se reinicia o ciclo e a aprendizagem acontece em forma de espiral ascendente, conforme, proposto por Valente (2005) e discutido nessa tese, considerando o uso de *smartphone*, conforme Figura 8.

Figura 8– A espiral de aprendizagem vivenciada com *smartphone*

Fonte: elaborados pelas autoras

A espiral de aprendizagem é ativada e mantém-se a partir do ciclo de ações, ou seja, “tanto as ações cíclicas quanto a espiral de aprendizagem estão acontecendo também simultaneamente, uma alimentando a outra. Ou seja, a espiral não cresce se o ciclo não acontece.” (VALENTE, 2005, p.72). Na espiral, note que a primeira ação é a devolução, conforme defendida, anteriormente.

Para finalizarmos a discussão sobre a vivência de uma situação didática, não apenas adidática, que pode ser vivenciada no espaço presencial, com uso de *smartphone*, precisamos ainda discutir o momento de institucionalização dos conceitos (BROUSSEAU, 2008) envolvidos no problema/atividade, investigado pelo aluno, nas fases do ciclo de ações. Nessa fase, o professor com os alunos, fazem a institucionalização do saber, ou seja, cabe ao professor explicitar o conhecimento envolvido no problema proposto e discutir os resultados e estratégias encontradas pelos alunos. O momento de institucionalização não é exclusivo do professor, até mesmo porque se fosse, não faria sentido o trabalho investigativo realizado pelo aluno.

Para discutirmos o momento de institucionalização que propomos vinculado ao ciclo de ações proposto nesta tese, vamos buscar uma associação com as dimensões do construcionismo, discutidas anteriormente, e considerar o espelhamento de tela do *smartphone*, como uma possibilidade tecnológica que valoriza as dimensões.

Segundo Freitas (2012, p.101), “as situações de institucionalização visam estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento”. Ou seja, no momento de institucionalização, o professor busca articular os resultados encontrados pelos alunos na situação adidática, e articula-os com os conceitos em estudo. O uso do *smartphone*, mais especificamente o *smartphone* integrado ao espelhamento de tela em sala de aula presencial, se constituiu nesta pesquisa de doutorado, como uma possibilidade tecnológica que enriqueceu o ambiente construcionista de aprendizagem.

A professora, no desenvolvimento da disciplina em que foram produzidos os dados dessa pesquisa, ao propor que os alunos apresentassem aos demais suas considerações, a partir da apresentação/diálogo (que pode incluir diferentes descrições em tela, associadas às reflexões e depurações realizadas), foi institucionalizando conceitos. E esses momentos de institucionalização implicaram na vivência de novos ciclos: descrições, reflexões, depurações, vivenciadas por alunos e professora. Afinal, os alunos estavam com o *smartphone* em suas mãos, podendo suas ações (em interação com o *smartphone*) serem

espelhadas e discutidas com os demais aprendizes presentes em sala, oportunizando que as ações do ciclo continuassem em grupo, no caso, o grupo de alunos e professora da turma.

Esse momento de institucionalização foi propício para aprendizagem, uma vez que deu espaço para o aluno apresentar, falar e expor suas ideias, conjecturas... Foram momentos de produção coletiva, pois todos participam, porém também foram momentos de produção individual, pois o aluno podia usar o seu *smartphone* (esse não conectado ao espelhamento) para fazer nova descrição, e dar continuidade as ações do seu ciclo. Poderíamos dizer que são diversos ciclos sendo influenciados pelo meio (produções no espelhamento, produções em *smartphones* não espelhados, questionamentos de alunos e professora, discussão entre os grupos, dentre outros).

Em relação a essa proposta de institucionalização, vista sob a perspectiva dos estudos da constituição de um ambiente construcionista de aprendizagem, concordamos com Maltempi (2005, p.8) ao afirmar que a “aprendizagem deve ser um processo ativo, em que os aprendizes “colocam a mão na massa” (*hands-on*), no desenvolvimento de projetos, em vez de ficarem sentados atentos à fala do professor.” Em outras palavras, consideramos que o momento de institucionalização é do professor e dos alunos; é um momento de explicitar ao outro o que foi produzido por cada aprendiz, e as ações do professor se constituem a partir das produções apresentadas pelos alunos. Essa ação de institucionalização, com uso de *smartphones*, pode ser representado pela Figura 9.

Figura 9- situação didática de institucionalização com espelhamento de tela de *smartphone*



Fonte: elaborado pela autora.

Ao voltarmos nosso olhar para essa forma de se fazer a institucionalização do saber, partindo dos resultados das investigações dos alunos, inverte-se a ação de uma sala de aula em que os alunos “ficam sentados atentos à fala do professor”. Inverte no sentido de que, “o professor fica atento à fala dos alunos”, pois a fala dele se constitui a partir da fala dos alunos. Mas, é também uma ação recorrente, pois um fica atento à fala do outro, responsável pelo que o outro está produzindo, construindo de conhecimento. São alunos e professores, em um ambiente construcionista de aprendizagem, assumindo um papel de habitantes (SCHERER, 2005, p.86), observando, falando, silenciando, “refletindo, questionando, produzindo, sugerindo, contribuindo com a história do ambiente, do grupo e dele.” Para Scherer (2005, p.86), os “habitantes são aqueles que se responsabilizam pelas suas ações e pelas dos parceiros, buscando o entendimento mútuo, a ação comunicativa, o questionamento reconstrutivo;”.

Ressaltamos da Figura 9, do momento de institucionalização, que cada aluno vivencia um ciclo de ações, assim, como o professor, com seu *smartphone*, por esse motivo as setas e ciclo com cores únicas, pois cada um vivencia seu ciclo. Já as setas coloridas representam o seu processo de aprendizagem sendo influenciado pelas ações dos demais alunos, é um coletivo produzido/produzindo.

Além disso, em relação à aprendizagem matemática, pontuamos que o uso do computador possibilita experimentações, simulações, experiências dinâmicas, levantamento e validação de hipótese, dentre outras ações. Porém, com o uso do *smartphone* e espelhamento de tela, podemos adicionar a essa lista as seguintes potencialidades: mobilidade e produção coletiva síncrona.

Assim, esse ciclo de ações vivenciado com uso de *smartphone* possui características específicas relacionadas a mobilidade, produção coletiva. E assim, finalizamos a apresentação da construção teórica da pesquisa quando pensamos em ciclos de ações vivenciados em sala de aula presencial.

No próximo capítulo apresentaremos aprendizagem com uso de *smartphone* no espaço virtual, sempre articulado aos momentos presenciais.

3. A EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA E O ESTAR JUNTO VIRTUAL AMPLIADO COM SMARTPHONE



Caro leitor, então agora vamos falar um pouco sobre educação a distância, educação bimodal e espaço virtual. Afinal, esta pesquisa de doutorado se constituiu a partir de uma proposta de educação bimodal, explorando um ambiente presencial e espaços virtuais de aprendizagem.

Neste capítulo discutiremos alguns aspectos sobre educação a distância, vamos teorizar sobre uma proposta de interação com uso de *smartphone*, em espaço virtual, a partir dos estudos teóricos sobre a abordagem do “estar junto virtual” proposta por Valente (2005), sobre o “estar junto virtual ampliado” proposto por Fernandes (2018), e sobre atitudes de alunos e professores em ambientes virtuais, realizados por Scherer (2005).

A modalidade de Educação a Distância (EaD) constitui, cada vez mais, uma modalidade de ensino e de aprendizagem, podendo integrar aos diferentes processos educacionais tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC). No entanto, o uso de tecnologias é uma característica necessária, mas não suficiente, para que a EaD aconteça. Almeida (2003, p.1) ressalta que

os avanços e a disseminação do uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC) descortinam novas perspectivas para a educação a distância com suporte em ambientes digitais de aprendizagem [...]. Considerando-se que a distância geográfica e o uso de múltiplas mídias são características inerentes à educação a distância, mas não suficientes para definirem a concepção educacional, discute-se a educação a distância (EaD) não como uma solução paliativa para atender alunos situados distantes geograficamente das instituições educacionais nem apenas como a simples transposição de conteúdos e métodos de ensino presencial para outros meios e com suporte em distintas tecnologias.

Concordamos com a autora, pois para que a EaD aconteça é importante o uso de tecnologias digitais, mas não suficiente. Pode-se ter uma disciplina ofertada na modalidade EaD, que dispõe de inúmeras tecnologias e o que se pratica, com as ações desenvolvidas, é uma “distância à Educação” e não uma “Educação a Distância”. Compreendemos que ao pensarmos em uma disciplina de Cálculo, em uma proposta de Educação Bimodal, precisamos levar em consideração as características do ambiente de aprendizagem construcionista presencial e do virtual, articulando-os e explorando-os de forma a favorecer a construção de conhecimento a partir da interação entre os sujeitos.

Assim, quando pensamos, na pesquisa de doutorado, na proposta para a disciplina de Cálculo, em um processo de Educação Bimodal, consideramos a Educação a Distância como uma possibilidade de educação, em que alunos e professores ensinam e aprendem em um processo contínuo de interação, estando em locais diferentes, em horários distintos ou não. Nos orientamos pelos estudos de Scherer (2005, p.16), que menciona que é “preciso decidir o que “deve ser conservado” da Educação presencial ao planejar e fazer EaD, senão podemos acabar por não conservar a essência do ato de educar, fazendo uma “distância à educação” e não uma “Educação a Distância”.

A EaD é uma modalidade na qual a educação acontece com alunos e professores que não estão fisicamente em um mesmo lugar, mas que podem estar juntos virtualmente, com a utilização de TDIC, em espaços virtuais. É nessa caracterização de EaD que focamos os estudos realizados nesta pesquisa, e nesse momento falaremos sobre a compreensão que temos do espaço virtual.

Um espaço virtual tem como principal característica a não presença física de quem o habita, como afirma Lévy (1998), é o espaço da desterritorialização, ou da “não- presença”. Não presença no sentido físico, pois no espaço virtual alunos e professores podem estar presentes e juntos, a depender de suas ações, envolvimento.

O espaço virtual oferece uma nova caracterização para o “estar juntos”, podemos estar juntos em uma sala de aula em um prédio, como podemos estar juntos em uma “sala de aula virtual”. Para estarmos juntos na sala de aula de um prédio, [...] temos de nos locomover de nossas casas [...], em um determinado horário; para estarmos juntos em uma “sala de aula virtual” [...], podemos permanecer em diferentes lugares, distantes ou não (poucos metros ou milhões de quilômetros) e nos unirmos independente de horário. (SCHERER, 2005, p. 52).

Segundo Scherer (2005, p.51) “um espaço para ensinar e aprender a distância deve constituir-se em um espaço aconchegante, convidativo, um espaço que todos queiram habitar”. Para Scherer (2005, p.59-60), em espaços virtuais:

Os habitantes são aqueles que se responsabilizam pelas suas ações e pelas dos parceiros, buscando o entendimento mútuo, a ação comunicativa, o questionamento reconstrutivo; [...] o encontramos sempre no ambiente [...] observando, falando, silenciando, postando mensagens, refletindo, questionando, produzindo, sugerindo, contribuindo com a história do ambiente, do grupo e dele.

Segundo a autora, um espaço virtual que se caracteriza favorável para a construção de conhecimentos dos envolvidos no processo é aquele em que as ações dos participantes são orientadas pela abordagem construcionista e todos assumem uma atitude de habitante do ambiente. Mas, nos ambientes virtuais temos também os visitantes.

Os visitantes são aqueles alunos(as) e professores(as) que participam do ambiente de aprendizagem com a intenção de visitar. As visitantes participaram apenas para observar o que estava acontecendo, sem se co-responsabilizar com o ambiente, com o outro, ou com a produção coletiva. Alguns deles chegam a colaborar, mas sem chegar a cooperar com o grupo, pois são parte (sentido estático, momentâneo) [...]. (SCHERER, 2005, p.60).

Ao entrar em um grupo de discussão no WhatsApp, por exemplo, um visitante é considerado aquele que posta mensagem sem se importar com o que os demais colegas ou professor postou; às vezes lê e comenta algo sobre o que o outro (professor e/ ou aluno) postou, mas sem muito envolvimento, sem intencionar responsabilizar-se pela aprendizagem do outro, do que se produz coletivamente. A produção coletiva não é uma preocupação de um visitante. Um visitante pode acessar o ambiente por livre e espontânea vontade, na intenção de buscar alguma informação, e outras vezes a visita pode dar por uma obrigação para obtenção de nota em uma disciplina ou curso, por exemplo.

Scherer (2005, p.60) apresenta ainda uma terceira atitude de educadores e educandos em espaço virtual, a de transeunte.

Os transeuntes passam pelo ambiente em um ou mais momentos, às vezes param para observar, mas sem se deter em nenhum espaço em especial, sem se responsabilizar, sem apreender para si o ambiente, sem colaborar ou cooperar. [...] eles se relacionam alheios ao grupo e ao ambiente, pois são apenas passantes.

Um ambiente virtual favorável à aprendizagem se constituiu um local de diálogo, de discussão, que todos habitam e se comprometem com as ações realizadas no ambiente. Concordamos com Scherer (2005, p. 52).

São vários espaços, constituindo o espaço virtual, que pela inteligibilidade na comunicação privilegiam a proximidade entre os sujeitos, desses com os objetos cognoscíveis e o ambiente; são espaços que, pelo diálogo, garantem a leitura do grupo, das suas histórias, das suas curiosidades sejam elas ingênuas ou epistemológicas, dos seus “eus”.

Em um espaço virtual, os habitantes têm oportunidade de encontrar outros habitantes, um ouvinte/leitor que esteja interessado em suas histórias, investigações, dúvidas e certezas (talvez provisórias, um envolvimento capaz de dar uma sensação híbrida entre a solidão e o acompanhamento).

O sentimento de “estar só” se revela quando percebemos que não há expressões faciais ou palavras para “aprovar” ou “recriminar” o nosso posicionamento ao escrever/falar. É um “estar só” vigiado, mas acolhedor, temporário. O sentimento de “estar acompanhado” se revela ao percebermos que outros estão lá, em um espaço acessado a qualquer momento, que seremos “lidos/ouvidos”, que estamos sendo ao mesmo tempo em que constituímos os outros, o todo; criando, aprendendo, questionando, mudando... Estando só, em um diálogo com o “eu” e

com os outros; estando acompanhado, em um diálogo com os outros e com o “eu”. (SCHERER, 2005, p. 52).

Em um espaço virtual, orientada por uma abordagem construcionista, o aluno tem oportunidade de falar, se expressar, ou seja “no ambiente virtual, podemos ouvir a todos, a cada um em especial, compreendendo as suas construções, aprendendo juntos e sozinhos, nos tornando mais atores e autores do processo de aprendizagem individual e coletivo.” (SCHERER, 2005, p.53).

Para que haja interação em cursos na modalidade EaD não basta dispormos de tecnologias sofisticadas, é fundamental definir uma proposta pedagógica EaD orientada pela interação. “[...] o sucesso do ensino e da aprendizagem nessa modalidade não depende apenas das tecnologias utilizadas, mas do modelo de EaD oferecido, da concepção de educação de todos os envolvidos no processo” (SCHERER, 2005, p. 34).

Assim, damos continuidade, apresentando o que Valente (2005) considerou ser três modelos ou abordagens de EaD: *broadcast*, virtualização da escola tradicional, e “estar junto virtual”.

Broadcast é uma abordagem focada na transmissão da informação. O papel do professor se resume em preparar o material que será disponibilizado em espaço virtual ao aluno. “[...] O ponto principal nessa abordagem é que não existe nenhuma interação entre professor e aluno, e mesmo entre alunos” (VALENTE, 2011, p.27).

Essa abordagem não possibilita ao professor conhecer e compreender as dúvidas e dificuldades de seus alunos ao longo do processo. Pela ausência de interação, não é possível que o professor desafie-os, instigue-os, questione-os, para que estes possam construir conhecimento. Segundo Valente (2011, p.28), a abordagem *Broadcast* [...] “tem sido vista como uma possibilidade de solução para o problema da educação em nosso país: espalha-se a informação a milhares de pessoas e espera-se que ela seja processada, convertida em conhecimento”.

Já na abordagem da “Escola Virtual” ou “Virtualização da Escola Tradicional”, como o próprio nome sugere, é um modelo de EaD, ou abordagem de interação, próximo daquilo que se vê em uma escola tradicional, focada na transmissão de informação, com a diferença de ocorrer em espaço virtual.

Assim, o professor passa a informação ao aluno que a recebe e pode simplesmente armazená-la ou processá-la, convertendo-a então em conhecimento. Para verificar se a informação foi ou não processada, o professor pode apresentar ao aprendiz situações- problema, em que ele é obrigado a usar as informações fornecidas. No entanto, na maioria das vezes, a interação professor-aluno resume-se em verificar

se o aprendiz memorizou a informação fornecida ou dele solicitar uma aplicação direta um domínio muito restrito, na forma de um teste ou exercício. (VALENTE, 2005, p.85).

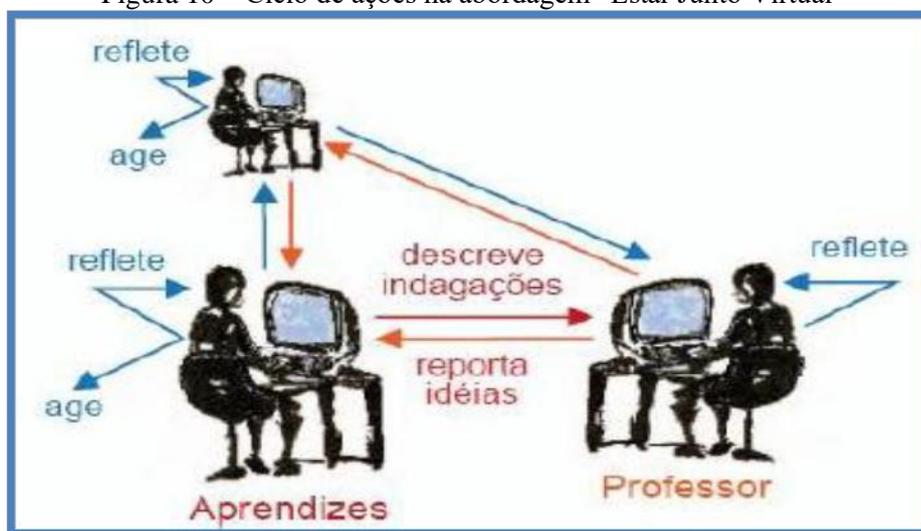
Apesar dessa abordagem de EaD apresentar interação entre professor-aluno, ainda é uma interação que não privilegia a construção do conhecimento, o foco é a transmissão da informação.

A terceira abordagem de EaD apresentada por Valente (2011) é o “Estar Junto Virtual”, que é orientada pelos estudos sobre o construcionismo (ver capítulo anterior). Essa abordagem prevê um alto grau de interação entre professor-educandos e entre os educandos. Diferente das duas abordagens apresentadas, nesta o papel do professor não é mais de transmissor da informação. Segundo Valente (2011), nessa abordagem explora-se as potencialidades da TDIC para que o professor possa “estar junto”, acompanhando, interagindo, questionando seus alunos, em espaço virtual.

A abordagem do “*Estar Junto Virtual*” apresenta características próprias de educação a distância, contribuindo para uma aprendizagem que também pode ser explicada por intermédio de uma espiral. O ponto central é que essa aprendizagem está fundamentada na reflexão sobre a própria atividade que o aprendiz realiza no seu contexto de vida ou ambiente de trabalho (VALENTE, 2005, p. 85).

Dessa forma, é fundamental que se mantenha o movimento, que ocorre nas interações entre professor-alunos e entre os alunos. Na Figura 10, apresentamos a abordagem proposta por Valente (2005) para o “Estar Junto Virtual”.

Figura 10 – Ciclo de ações na abordagem “Estar Junto Virtual”



Fonte: Valente (2005).

Podemos observar que quando o professor propõe uma atividade, um problema ao grupo de alunos, esses podem reportar uma ideia ou questão ao professor e colegas. Ao receber esse registro, o professor e/ou aprendizes podem refletir e terão a oportunidade de compreender melhor o problema proposto, podendo questionar ou reportar novas ideias ao grupo, e possibilitar novas reflexões. Pode-se entender o “reportar ideias” como enviar um material em formato de vídeo, texto, imagens, enviar questões ou considerações sobre o exposto por algum colega do grupo. Porém, é importante que o professor se atente para que não “dê a resposta” ao problema, ou induza os alunos a uma resposta.

O docente propõe questionamentos que desafiem os alunos para que estes vivenciem momentos de reflexão, de aprendizagem. Valente (2005, p.86) salienta que:

Os desequilíbrios e conflitos fornecidos pelo professor e por outros colegas têm a função de provocar o aprendiz para realizar as equilibrações em patamares majorantes, como proposto por Piaget. Nesse sentido, a aprendizagem também está acontecendo como produto de uma espiral, proporcionada não mais pela interação aprendiz-computador (como na programação), mas pela rede de aprendizes mediados pelo computador.

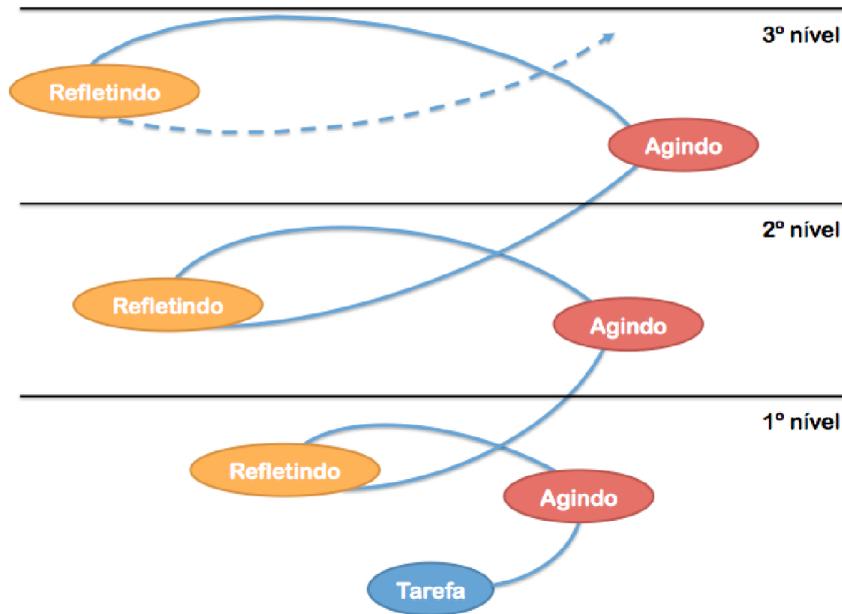
As interações entre professor e aluno consideradas na abordagem “Estar Junto Virtual” oportunizam ao professor conhecer melhor os processos de aprendizagem dos alunos e conseqüentemente fazer inferências sobre o saber em construção. O educador cria situações em que o aluno se sinta desafiado, pois a aprendizagem na abordagem construcionista só acontece quando o sujeito se sente desafiado, desequilibrado cognitivamente, em dúvida sobre suas certezas e conjecturas.

Ao buscar uma ampliação, detalhamento da abordagem do “estar junto virtual”, em Fernandes (2018) foi proposta a abordagem “estar junto virtual ampliado”. O estar junto virtual ampliado propõe que se amplie/detalhe as ações do professor e dos alunos, e sugere a integração do estudo sobre o ciclo de ações à abordagem Estar Junto Virtual. Em Fernandes (2018) propõe-se que “descrever indagações” e “reportar ideias” não serão ações exclusivas dos alunos e do professor, respectivamente. O autor propõe que as ações de “descrição de indagações” e “encaminhamento de ideias”, são possíveis a todos os sujeitos envolvidos na realização de uma atividade ou estudo. Considerando assim, que o aluno aprende com o professor e professor também aprende em interação com seus alunos.

Outro elemento defendido em Fernandes (2018), diz respeito à espiral de aprendizagem que se constitui a partir das ações dos sujeitos em “descrever indagações” e “reportar ideias”. Para o autor, de uma tarefa/atividade/projeto proposta pelo professor ou por algum aluno, o aluno irá agir sobre o problema e refletir. Esse movimento contínuo entre

“ação” e “reflexão”, tem-se uma espiral de aprendizagem ascendente, conforme Figura 11.

Figura 11- espiral de aprendizagem no modelo do estar junto virtual ampliado



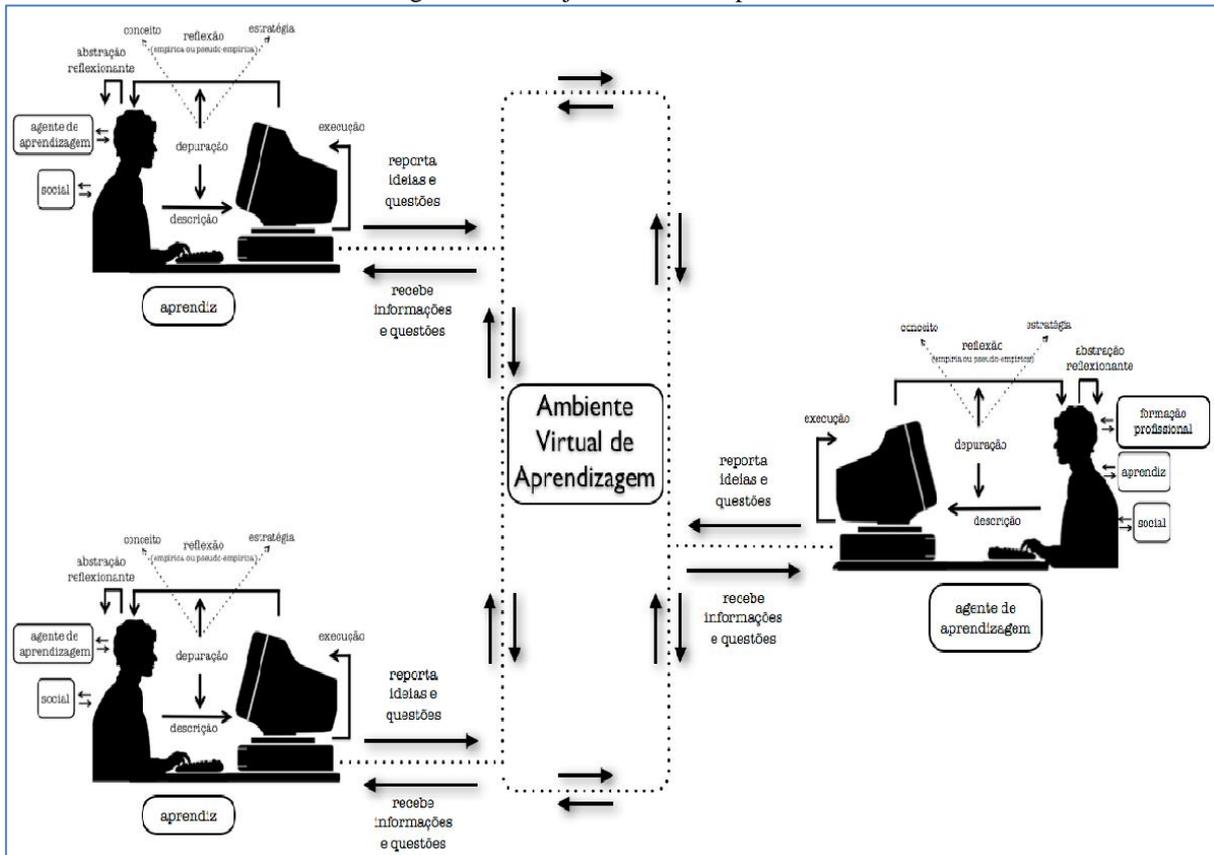
Fonte: (FERNANDES, 2018, p.27)

Outro olhar que o autor teve em relação à abordagem do estar junto virtual é em relação ao uso de tecnologia. Isso porque segundo o autor, as TDIC poderão favorecer a construção de conhecimento, a partir da proposta de atividade e do encaminhamento de ideias. Para Fernandes (2018, p.28, grifo nosso)

As ações dos estudantes e do professor em um ambiente virtual deveriam estar articuladas com produções criadas a partir do uso de diferentes softwares e *applets* que podem ser específicos para construir **conhecimento matemático**, por exemplo, considerando-se seus **objetos e suas formas de representação**.

Em Fernandes (2018) também teve-se um olhar especial para as ações individuais dos alunos e do professor. Assim o autor defendeu a inclusão do ciclo de ações vivenciado por cada aprendiz ao usar computador, na abordagem do estar junto virtual. E mais uma vez concordamos com a proposta apresentada em Fernandes (2018) em relação à natureza do conhecimento matemático e a inclusão do ciclo, no entanto, o ciclo proposto nesta tese (apresentado no capítulo anterior), com uso de *smartphone* e considerando a TSD. Assim, na abordagem de Estar Junto Virtual Ampliado com uso de *smartphone*, aqui proposto, que denominamos de EJuVAS, também vamos considerar os fundamentos da TSD. A figura 12, a seguir representa o movimento proposto pelo estar junto virtual ampliado, proposto em Fernandes (2018).

Figura 12- estar junto virtual ampliado



Fonte: (FERNANDES, 2018, p.31)

Em Valente (2005) e Fernandes (2018) há contribuições para a EaD com uso de computador com acesso à internet, ao pensar em uma abordagem de EaD que considera interação e a abordagem construcionista. No entanto, nesta tese, ao propormos a abordagem EJuVAS, estamos considerando particularidades de propostas de EaD com uso de *smartphones*.

A primeira característica da EJuVAS é que com o uso de *smartphone*, temos um processo de EaD orientado pela mobilidade. Ou seja, desde que se tenha acesso à internet, alunos e professor podem interagir de maneira síncrona ou assíncrona, a milhares de quilômetros e em diferentes espaços: praças, ônibus, casa, universidade, local de trabalho, dentre infinitos outros. Santaella, ressalta “os indivíduos constituem-se como massa não por estarem ligados pela presença em um mesmo local físico, mas por adquirirem experiências similares através dos meios de comunicação sem que compartilhem contextos similares de vida.” (SANTAELLA, 2007, p. 124).

Além disso, com acesso à internet, a um toque dos dedos, o aluno poderá também interagir com os materiais/TDIC disponibilizados pelo professor, ou por ele mesmo

pesquisado/produzido/disponibilizado. O uso de *smartphone* abre novas possibilidades de uso de aplicativos, considerando que a depender do aplicativo, só se tem a versão para *smartphones*, sendo assim impossível a interação com ele, via computador.



Leitor, no capítulo anterior você pode encontrar diversas possibilidades tecnológicas de uso do *smartphone* para aprendizagem em espaço virtual.

Outro ponto que destacamos na abordagem do EJuVAS é a escolha dos materiais que compõem uma sequência didática proposta em aulas à distância, e que não são mencionados na proposta de interação nas abordagens anteriores. Esses materiais na abordagem que propomos são elaborados/escolhidos/adaptados pelo professor.

A ação do professor, que antecede a ação de interação na abordagem e é um dos determinantes da mesma, é o planejamento da aula, que se caracteriza basicamente em pensar em uma sequência didática que poderá ser vivenciada pelos alunos em um período de tempo determinado pelo que chamamos de agenda da aula. Essa sequência inclui a escolha/produção de materiais/espços virtuais que o aluno irá usar e que oportunizem, pela interação, a construção de conhecimento.

Quando falamos em materiais, estamos falando em aplicativos, problemas/atividades, livros/textos/imagens digitais, simuladores, vídeos, dentre outros. Todos os materiais que serão previamente organizados para compor a sequência didática, e sempre considerando que outros possam surgir a partir da proposição dos alunos. O que defendemos é que a ação de planejamento da aula, da sequência didática, é uma ação que oportuniza ao professor processos de reflexão, que antecede a proposição inicial do professor ao iniciar a interação com os alunos no ambiente virtual de aprendizagem, e que objetiva a “devolução do problema”, o entrar no jogo, por parte do aluno, elemento necessário em um ambiente construcionista. Portanto, faz parte da abordagem EJuVAS.

O professor planeja uma sequência didática que será desenvolvida por ele e o grupo de alunos. Mas como deve ser essa sequência? Quais materiais são importantes ao se planejar uma sequência didática? Não apresentaremos aqui uma receita de como fazer uma sequência,

e nem passaremos uma lista de materiais que poderão resolver problemas de aprendizagem de disciplina em que se estuda conceitos de Cálculo. Não vamos, porque não há receita, cada grupo de alunos, cada disciplina, cada professor, cada contexto é singular e envolve sempre escolhas e produções articuladas com o momento e grupo com quem iremos desenvolver a aula. No entanto, independente do conteúdo a ser explorado com o uso de *smartphone*, é importante que os materiais que compõem a sequência didática de uma aula virtual favoreçam a vivência de uma ou mais das cinco dimensões de um ambiente construcionista de aprendizagem.

É importante destacar que Valente (2005) e Fernandes (2018) mencionaram a ação de reflexão do professor. Valente (2005) mencionou que o professor irá vivenciar momentos de reflexão, após o encaminhamento de indagações por parte do aluno. Já Fernandes (2018) defendeu que a ação do professor não é só de reportar ideias, mas também de propor indagações, o que sugere outros momentos de reflexão. Nós estamos defendendo que há processo de reflexão do professor que é também anterior à interação, orientando pela necessidade de planejamento de uma sequência didática, com elaboração/adaptação/escolha de materiais que irão orientar as ações de interação com os alunos, e entre eles. Dessa forma, o planejamento seria a primeira ação, a que orienta, mas não limita, o EJuVAS.

E essa ação inicial de planejar é considerada na TSD. Freitas (2012, p.94) mencionou que “o que impulsiona o processo de ensino e de aprendizagem matemática são as atividades envolvendo a resolução de problemas. O trabalho pedagógico tem início exatamente com a escolha de um bom problema”. Em outras palavras, escolher bons problemas é parte do planejamento. E essa ação, mesmo discutida por Brousseau para o espaço presencial, é parte também de ações no espaço virtual, pois estamos falando em aulas, sequência didática. No espaço virtual, o papel do professor inclui a escolha/produção de diferentes materiais para o aluno interagir, de forma a favorecer a construção de conceitos matemáticos.

Ao considerar a TSD na abordagem EJuVAS, em que a ação inicial do professor é a de planejar uma sequência didática, temos de considerar que a primeira ação do aluno será a “devolução do problema” (BROUSSEAU, 2008) proposto pelo professor, que já é um elemento que incluímos no ciclo de ações apresentado no capítulo anterior. A devolução é a primeira ação do aluno porque se não há devolução, não será vivenciado um ambiente construcionista, segundo o que discutimos em capítulos anteriores, e portanto, não haverá o que consideramos ser a abordagem do EJuVAS. A estética dos materiais que compõem a sequência didática é fundamental para o a vivência do EJuVAS, pois os mesmos podem favorecer a “devolução do problema” pelo aluno, para que esse vivencie sua espiral de

aprendizagem no espaço virtual.



Mas, o que é estética? Vamos discutir a seguir, dialogando sobre a proposta de alguns materiais usados na produção de dados desta tese, orientados por estudos de Scherer (2005) sobre estética de materiais para EaD e sobre o construcionismo, proposto por Papert (2008).

Para o desenvolvimento de aulas a distância na disciplina de Matemática I, espaço de produção dos dados desta tese, tornou-se necessário a criação de um espaço que se constituiria em um ambiente de aprendizagem virtual. Na maioria das universidades públicas brasileiras faz-se uso da plataforma Moodle para a organização destes espaços virtuais. No caso específico da disciplina de Matemática I, que foi objeto de estudo dessa pesquisa de doutorado, o ambiente virtual de aprendizagem foi constituído a partir da criação de um espaço na plataforma do GeoGebra.

Nesta plataforma criamos uma sequência didática, integrando diferentes materiais como vídeos, links, simuladores, aplicativos do GeoGebra, textos escritos, arquivos, dentre outros. Todos esses materiais podem ser disponibilizados aos alunos e apresentar diversas possibilidades de aprendizagem, a depender do uso e também da estética de cada um. Por esse ângulo, pontuamos que a escolha da linguagem, cores, adaptações e autoria de qualquer material que integra o ambiente construcionista deve estabelecer “[...] comunicação com o aluno e com quem é este aluno, não se esquecendo do movimento da pergunta. Afinal, o material precisava despertar o interesse do aluno, desafiá-lo a questionar e questionar-se [...]” (SCHERER, 2005, p.134).

Em outras palavras, ao escolher ou produzir, por exemplo, um vídeo para disponibilizar no ambiente virtual, ou para ser explorado em sala de aula presencial, é importante questionar: o que o professor intenciona como objetivo de aprendizagem? O que o professor quer que o aluno aprenda com a leitura/estudo de tal material digital? Quer que ele reproduza exercícios ou quer que ele reflita/produza/levante questões a partir de problemáticas propostas? Qual o objetivo de aprendizagem com o uso de um determinado aplicativo que compõe uma sequência didática? Qual o objetivo quando se propõe (aos alunos) a autoria de um vídeo a partir da leitura e interpretação de um material digital? Essas e tantas outras questões dizem respeito a estética de materiais que compõem o ambiente

construcionista no espaço virtual. E essa estética pode favorecer a ação do aluno querer habitar o ambiente de aprendizagem, habitar no sentido de construir conhecimento com os demais habitantes e participantes do ambiente. E como habitante o aluno irá vivenciar a espiral de aprendizagem que se constitui nas ações do EJuVAS.

Temos de pensar os espaços virtuais de maneira a torná-los “um ambiente ‘habitado’ e não um espaço de passagem, ao construí-lo temos de usar o diálogo, a comunicação, como materiais essenciais para a obra que se cria”. E assim, a autora considera que o Ambiente Virtual precisa possuir algumas características para que os alunos queiram habitá-lo, como por exemplo:

- I. os sujeitos usem as tecnologias da informação e comunicação;
- II. a atitude interdisciplinar seja a estética das ações planejadas, praticadas e almejadas;
- III. o diálogo, o inacabamento, a pergunta, a criticidade, a liberdade, a cooperação e a colaboração configurem os movimentos de comunicação no processo de ensino e de aprendizagem;
- IV. os ambientes presenciais, o ambiente virtual e os materiais usados no processo sejam criados a partir dos itens anteriores; (SCHERER, 2005, p.37).

A estética desses materiais tem que ter como foco central a aprendizagem e a comunicação, que pode ser estabelecida com o aluno, que irá ler e interagir com tal material. A ação de questionar o aluno no material tem como objetivo desafiá-lo e desequilibrá-lo cognitivamente para que esse possa agir a partir daquilo que ele leu. Por isso é importante que esse material, produzido pelo professor, estabeleça uma comunicação entre professor/autor e aluno/leitor.

O charme da comunicação não é o que comunica frontalmente, mas o que faz pela metade, insinua, provoca, deixa em suspense. O que se comunica frontalmente implica petição de obediência em sua linearidade canhestra, enquanto o que se comunica pela insinuação provoca o sujeito que colabora e reinterpreta a seu modo. (DEMO, 2002, p.128).

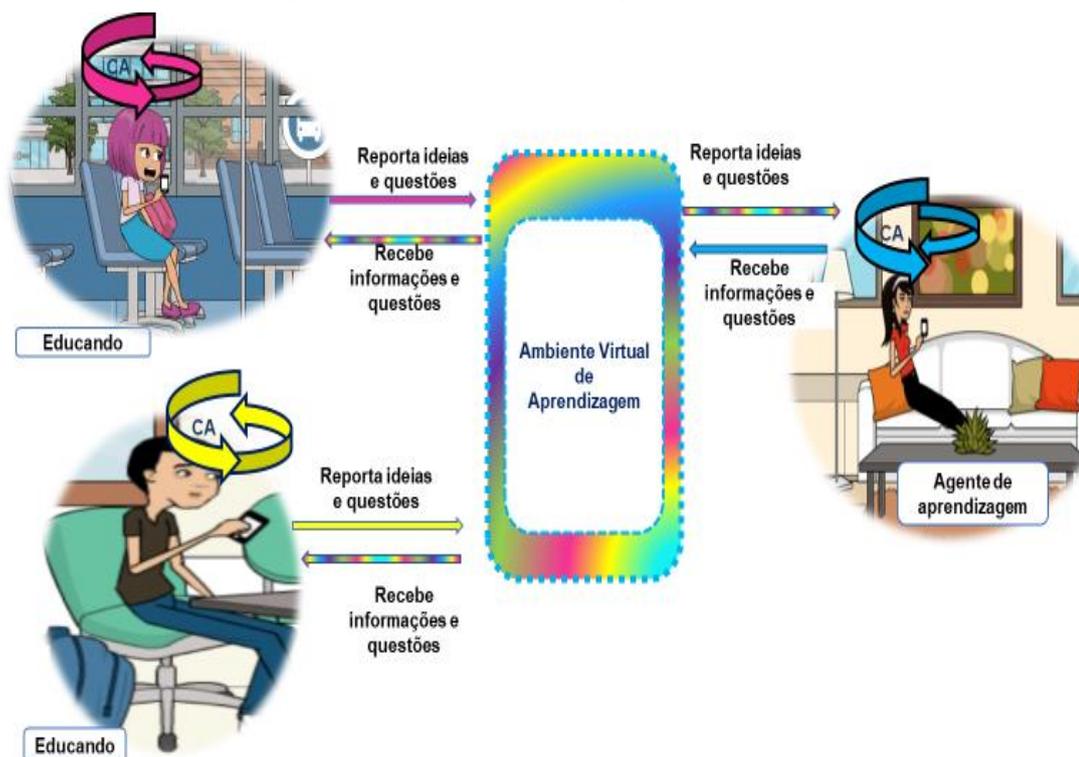
Ao produzir um material que estabelece uma comunicação não frontalmente, direta e completa, oportunizamos aos alunos/leitores serem também autores, pois eles podem agir e navegar em diferentes espaços e materiais, favorecendo sua aprendizagem.

[...] os diferentes materiais devem ser menos “palestrados” e mais comunicados, ou seja, devem ser mais comunicação do que extensão, mais movimento dialógico de aprender e de ensinar. Devem ser dinâmicos, vivos, coloridos, sempre convidando para o diálogo curioso, questionador; de pergunta e não apenas de resposta; de criação e não de cópia; de fala, de gestos, de olhares, de sentimentos, enfim, de vida e de aprendizagem, “molhados” com rigor, alegria e tecnologias. (SCHERER, 2005, p.85).

Em relação às tecnologias digitais que compõem uma sequência didática, podemos, por exemplo, propor o uso de software, aplicativo ou objetos digitais, simuladores, para que o aluno possa conjecturar, estudar, explorar e construir conceitos. Esses objetos digitais podem favorecer que os alunos façam visitas a outros espaços, aprendam de forma hipertextual. Ou seja, esses objetos podem provocar “links com outros contextos que convidam o aluno a pensar”. (SCHERER, 2005, p.134).

Então, ao considerar a abordagem EJuVAS teremos *smartphones* no lugar de computadores fixos, e ao incluirmos a ação de planejamento do professor, anterior, mas imbricada, ao EJuVAS, temos de incluir as situações adidáticas de ação formulação e validação no EJuVAS, nas ações dos alunos, conforme teorização feita no capítulo anterior. Assim, ressaltamos que a reflexão e a interação são pontos centrais da abordagem, sendo o professor um dos responsáveis em manter o aluno agindo sobre o problema e oportunizando desequilíbrios cognitivos, que desencadeiam momentos de reflexão, que podem oportunizar: ação, formulação, validação, conforme fundamentos da TSD. A seguir, apresentamos a figura 13, que representa a abordagem do EJuVAS.

Figura 13- abordagem do Estar Junto Virtual Ampliado com *smartphone* (EJuVAS)



Fonte: elaborado pela autora.

Na abordagem do EJuVAS, é importante que o docente reporte questionamentos que desafiem os alunos para que estes vivenciem momentos de ação, formulação e validação, oportunizando a construção de conhecimento.

As interações entre professor e aluno, além de valorizar as relações sociais, permitem ao professor conhecer melhor os processos de aprendizagem dos alunos e conseqüentemente fazer inferências sobre o saber em construção. O educador cria situações em que o aluno se sinta desafiado, pois a aprendizagem acontece quando o sujeito se sente desafiado, desequilibrado cognitivamente, em dúvida sobre suas certezas e conjecturas.

É neste processo de busca pelo equilíbrio, ao compreender e apreender a novidade, acomodando o desconhecido ao que é conhecido, que o sujeito aprende. Ele coopera, opera mentalmente com e sobre as suas certezas, e com e sobre as certezas de outros e do meio, busca o equilíbrio, que é sempre provisório, pois deixa de existir ao surgir um novo desequilíbrio. (SCHERER, 2005, p.89).

Portanto vivenciando momentos de ação, formulação e validação, de interação entre sujeitos, e de produção matemática, que se constitui o EJuVAS, de construção de conhecimento matemático com uso de *smartphone*, em espaço virtual.

No próximo Capítulo, apresentamos em detalhes a análise dos dados da pesquisa de desenvolvida.

4. UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE *SMARTPHONE*: AÇÕES E APRENDIZAGENS NO ESPAÇO PRESENCIAL E VIRTUAL



Leitor, chegamos na análise dos dados da pesquisa, então vamos conhecer algumas ações desenvolvidas na disciplina de Matemática I que favoreceram à aprendizagem. Mas antes vamos entender algumas escolhas que foram feitas em relação à forma como os dados serão apresentados nessa tese.

Para apresentação dos dados da entrevista realizada com os alunos, optou-se pela escrita em forma de diálogo e apresentação em diferentes cenários, buscando uma aproximação da entrevista real.

Para apresentação dos dados referentes à interação e produções no espaço presencial, optou-se por trazê-los em forma de “história em quadrinhos com avatares dos alunos e professora”, e *qr codes* das produções com o geogebra (em alguns momentos). Essa escolha de apresentação dos dados da análise, se deu com o objetivo de proporcionar ao leitor uma experiência mais próxima do que foi vivenciado no momento da experimentação, ilustrando a organização em grupos, a dinâmica com o espelhamento de tela do *smartphone*, a mobilidade do *smartphone* durante a aula, as produções individuais e coletivas dos alunos e professora e a institucionalização do saber.

Por fim para a apresentação dos dados referente a interação entre os sujeitos no espaço virtual, que aconteceu no grupo do *whatsApp*, optou-se pela escrita, em forma de diálogo com os avatares dos alunos e professora, em diferentes cenários, como por exemplo, casa, universidade, ônibus, praça, dentre outros. A escolha pelos diferentes cenários se deu com o objetivo de ilustrar a possibilidade de aprender em diferentes espaços e a mobilidade proporcionada pelo *smartphone*. E para apresentação dos dados produzidos em relação a produção matemática com uso de *smartphone* no espaço virtual, optou-se por trazer em alguns momentos *qr-codes*, proporcionando ao leitor, uma experiência de transitar em outros espaços.

Para atingir o objetivo de identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de cálculo em um ambiente construcionista, em uma proposta de educação bimodal, com uso de *smartphone*, o presente capítulo é dividido em três seções. No primeiro subcapítulo apresentamos e analisamos a proposta metodológica de educação bimodal realizada na disciplina de Matemática I, buscando identificar ações que favoreceram a aprendizagem de conceitos de Cálculo, a partir dos dados produzidos na entrevista com os alunos.

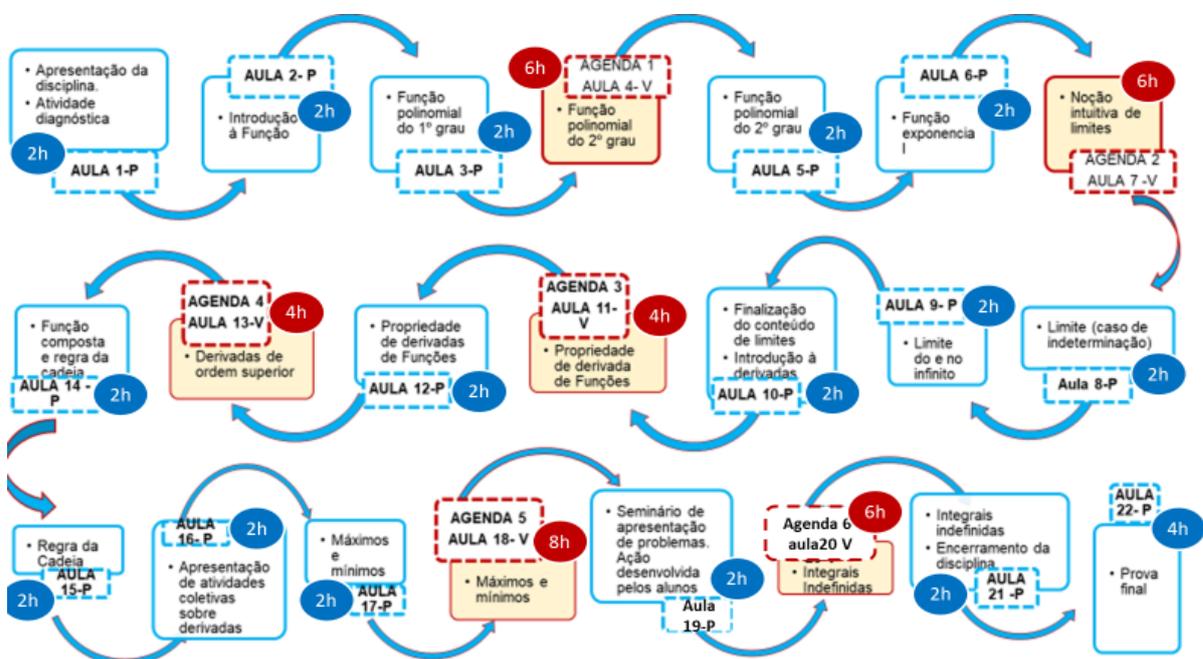
No segundo subcapítulo analisamos ações realizadas na aula 10, desenvolvida presencialmente, por alguns alunos e pela professora. São ações realizadas durante a realização de atividades de investigação matemática, com uso do *smartphone* e o espelhamento de tela. No terceiro subcapítulo apresentamos a análise de ações da aula 11, desenvolvida a distância, considerando a interação entre sujeitos no ambiente do WhatsApp e atividades de investigação matemática realizadas com uso de *smartphone*.

4.1 APRENDIZAGEM DE CONCEITOS DE CÁLCULO COM USO DE SMARTPHONE E UMA PROPOSTA DE EDUCAÇÃO BIMODAL

Nessa seção vamos apresentar uma visão geral da disciplina de Matemática I e de como ocorreu a articulação entre os espaços virtuais da disciplina e o espaço presencial, buscando identificar e analisar ações que favoreceram a aprendizagem de alunos.

A disciplina de Matemática I, como dito anteriormente, contou com 34 horas desenvolvidas presencialmente, sendo 15 encontros com duração de duas horas cada e um encontro com duração de quatro horas. E na modalidade de EaD, foram 34 horas aulas, organizadas em 6 agendas, com diferentes cargas horárias. Ou seja, cada aula a distância não correspondia a apenas 2 horas de atividade. A Figura 14 apresenta os conteúdos matemáticos estudados e o desenho da disciplina, articulando momentos presenciais (em azul, usando a representação P) e momentos virtuais (em vermelho, usando a representação V).

Figura 14 - A sequência de encontros presenciais e virtuais da disciplina de Matemática I



Fonte: dados da pesquisa.

Para o desenvolvimento de todas as aulas foi feito um planejamento da sequência didática com uso do *smartphone*. E as atividades foram adaptadas, considerando o uso de *smartphone* e a abordagem construcionista. Outras foram pensadas a partir de aplicativos presente na plataforma GeoGebra. E algumas foram de autoria da pesquisadora. Vale ressaltar que durante todo o desenvolvimento da disciplina, as atividades foram se alterando. Ou seja, a depender das dificuldades e do processo de aprendizagem, foi se redesenhando, fomos replanejando o que previamente havíamos planejado. Assim, a sequência didática só ficou pronta quando finalizamos a disciplina, pois foi sendo reconstruída durante todo o seu desenvolvimento.

Além disso, sempre se buscou a articulação entre as ações propostas para o espaço presencial e virtual, explorando as potencialidades e particularidades de cada um, de forma a favorecer a aprendizagem dos conceitos de Cálculo. Scherer (2005, p.65) ressalta:

cada um dos espaços educacionais, sejam eles presenciais ou a distância, possuem características particulares que podem favorecer ou dificultar o processo de hibridação. [...] pela diversidade dos ambientes, podemos hibridizá-los, confundí-los, torná-los em um movimento único de ensino e de aprendizagem em cursos, disciplinas ou programas. No entanto, para que a Educação Bimodal se torne um processo híbrido, temos de aproveitar cada um dos espaços como se fossem ao mesmo tempo únicos e partes de um todo, [...] Neste, vemos no todo as partes, e nas partes o todo, ou seja, nos momentos presenciais percebemos também os virtuais, e nos virtuais vemos também os presenciais, sem deixar de sentir e perceber cada um dos espaços em particular.

Momentos presenciais e momentos virtuais não são disjuntos, são articulados. No esquema apresentado na Figura 14, podemos perceber que o primeiro encontro aconteceu presencialmente. Na **aula 1**, presencial, foi feita a apresentação da disciplina, da pesquisadora, dos alunos. Outra ação também desenvolvida no encontro foi um momento de diálogo com os alunos para que eles pudessem expor suas dificuldades de aprendizagem que tiveram ao frequentar a disciplina anteriormente (considerando que era uma turma de reoferta). Essa ação se deu com o objetivo de questionar sobre suas expectativas, seus medos, suas histórias, suas dificuldades, seus conhecimentos prévios. Após esse diálogo inicial foi realizada uma atividade diagnóstica sobre conhecimentos da disciplina, para conhecermos melhor a turma.

Na **aula 2 e aula 3**, também presenciais, foram desenvolvidas atividades investigativas, com uso de *smartphone* e espelhamento de tela, no espaço presencial, explorando conceitos de função do 1º grau. Ao término da terceira aula fizemos a apresentação do espaço virtual, em especial da plataforma GeoGebra, bem como discutimos a proposta da Agenda 1, comentando as ações a serem realizadas em nossa primeira aula a

distância, em ambiente virtual, que iniciaria a partir daquele encontro presencial. Sim, o período das agendas, aulas a distância, iniciava ao final de um encontro presencial e finalizava com o início da aula presencial seguinte ou no dia anterior a ela.

Na **Agenda 1, aula 4**, foi ampliado a discussão sobre o conceito de função, discutindo o conceito de função polinomial do 2º grau. Nessa aula foi proposto a investigação de um problema contextualizado com uso do GeoGebra, conforme segue:

Tarefa 1: O comportamento de dilatação e contração de um metal foi medido em um laboratório com um corpo de prova que foi exposto a uma variação brusca de temperatura, durante 10 minutos, de acordo com a função $F(t) = t^2 - 12t + 32$, em que $F(t)$ é a temperatura medida em graus Celsius e t é o tempo, em minutos.

1. Considerando a situação, complete a tabela e marque esses pontos $(t, F(t))$ no plano cartesiano do GeoGebra.

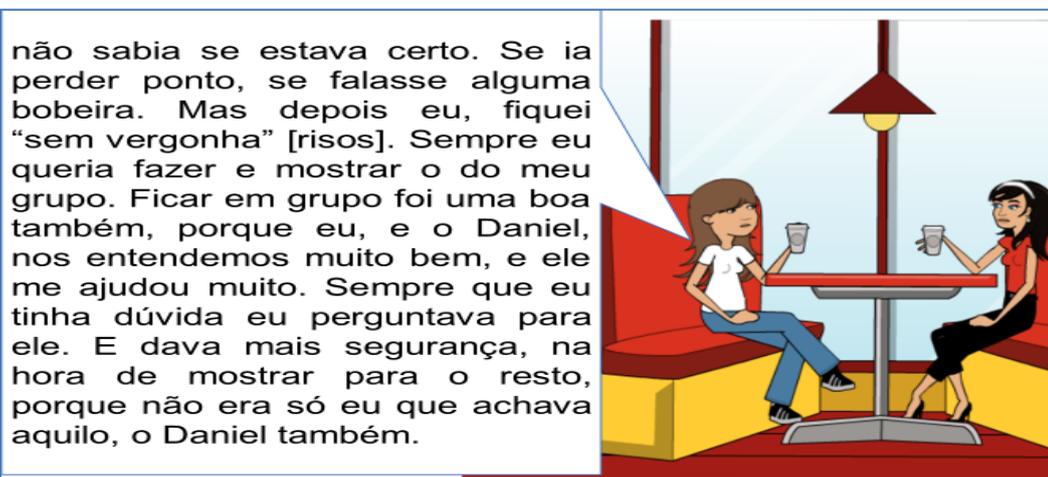
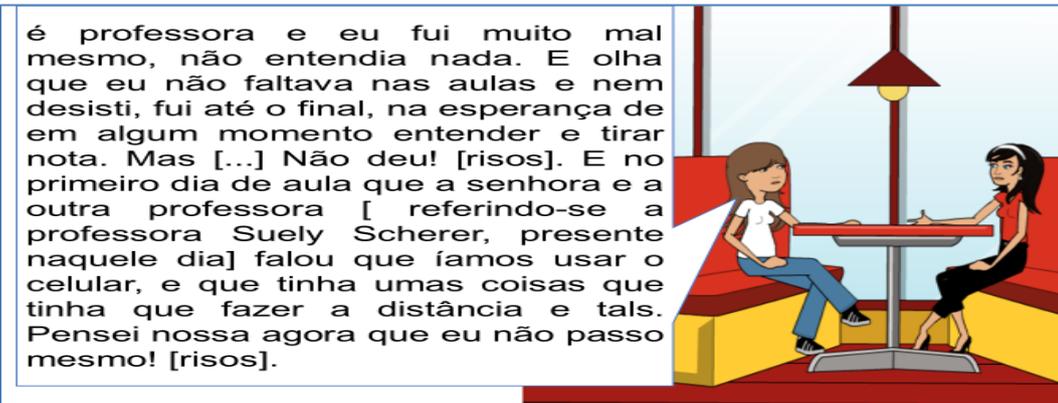
| t | F(t) |
|----|------|
| 0 | |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 10 | |

2. Plote no GeoGebra a função $F(t)$, e insira um ponto sobre a curva $F(t)$. Analisando o movimento do ponto, responda:

- Em que período de tempo t a temperatura $f(t)$ foi negativa?
- Em que período de tempo a temperatura foi positiva?
- Em quais instantes a temperatura foi nula?
- Qual a menor temperatura registrada nessa experiência?
- Qual o domínio dessa função considerando o contexto dado? Justifique.

Ressaltamos que ao pensarmos as sequências didáticas para as aulas, sempre buscamos uma articulação entre os momentos presenciais e virtuais. Dessa forma, optamos por iniciar os conteúdos de “conceito de funções” e “função polinomial do 1º grau” presencialmente, para que eles pudessem ir aos poucos conhecendo a proposta de metodologia, por nós apresentada na primeira aula. Afinal, para eles a abordagem construcionista e aulas virtuais era novidade, até então. Assim essas três aulas presenciais iniciais foram um momento de conhecer os alunos, a professora, a proposta, o GeoGebra, os grupos de trabalho, estudando funções.

Consideramos que esse foi um momento importante, e que fortaleceu a relação entre professor e alunos, entre os próprios alunos, e entre os alunos com a tecnologia, conforme pontuado por dois alunos durante a entrevista, como veremos a seguir.



Mylena falou na entrevista, sobre o estranhamento das primeiras aulas. Estranho o aluno ter que falar? Estranho desenvolver ações a distância? Estranho ter que um espaço para discussão dos conceitos em estudo? Estranho usar o *smartphone* para aprender Cálculo?

Pelas falas apresentadas por Mylena, “no começo eu fiquei incomodada, porque sempre tinha que falar e tinha que fazer”, e “nas primeiras aulas foi difícil essas mudanças”, podemos inferir que o cenário de aulas, vivenciado por Mylena, em experiências anteriores foi pautado na transmissão de informação, no silêncio e repetição, sozinho, no medo de errar e não de aprender com o erro, e por isso tanto estranhamento.

Mas a proposta que inicialmente parecia estranha para Mylena foi ganhando uma nova compreensão, com o passar das aulas, com os diálogos, com as ações por ela desenvolvidas em parceria com Daniel. Do recorte da entrevista de Mylena, temos indícios de duas ações que favoreceram sua aprendizagem; a primeira foi a ação de trabalho e discussão das atividades em grupo e a segunda foi a ação de espelhar na grande tela, a tela do smartphone, tendo a oportunidade de mostrar e dialogar com os demais colegas (alunos e professora) sobre suas produções e considerações sobre a atividade desenvolvida. Afirmamos isso a partir do fato de que Mylena pontuou: “*sempre eu queria fazer e mostrar o do meu grupo*”, “*ficar em grupo foi uma boa também*”.

O aluno Daniel também sentiu esse estranhamento, conforme mencionou na entrevista.

Daniel: mais difícil foi no começo... Porque era tudo muito moderno. Com o celular, e o jeito da senhora explicar. Como posso explicar? Eu não quis dizer que a senhora explica mal. É que a senhora não passava no quadro e ia explicando e resolvendo exercícios. A gente que tinha que ir resolvendo.
[...] as aulas no whats também foi algo que no começo achei difícil. Deu para aprender, mas eu preferi o presencial. Porque faz juntos com os outros .



Da fala de Daniel, observamos o seu incômodo inicial em relação a quebra de perspectiva de ensino e aprendizagem que ele conhecia. A mudança foi do ensino tradicional que o aluno é passivo, e está acostumado a ficar sentado ouvindo a voz do professor (que por sua vez, apresenta o conteúdo e na sequência resolve uma atividade, na qual os alunos poderão se basear para resolver outras atividades semelhantes), para a perspectiva construcionista, de construção do conhecimento, em que o aluno usa a tecnologia digital para investigar diferentes situações, e com essas investigações ele vai construindo conhecimento. Essa mudança de abordagem fica evidente na fala: “*é que a senhora não passava no quadro e ia explicando e resolvendo exercícios.*”

Ainda sobre a fala de Daniel, destacamos a preferência dele pelo espaço presencial, talvez por ser um espaço já conhecido, embora ele mesmo tenha ressaltado que foi diferente essa proposta. Nessa perspectiva, Scherer (2005, p. 108) afirmou que:

A particularidade do ambiente presencial, conhecido por todos, e pertencente à cultura das pessoas desde que nasceram, é um movimento bastante intenso e que não podemos abandonar, apenas redimensionar. É a possibilidade de aprender com o toque, com o ver e sentir o cheiro simultaneamente, com o ver, falar e ouvir podendo tocar. É um espaço coletivo onde podemos ouvir apenas uma pessoa a cada instante, onde é preciso esperar para ser ouvido e falar, e nem sempre o tempo possibilita dar a voz para cada um.

Do recorte apresentado por Daniel, não temos certeza de quais ações foram favoráveis à sua aprendizagem, afirmamos apenas que sua preferência se deu pela proposta das aulas presenciais, justificada pela pelo trabalho em grupo, conforme Daniel pontua: “[...] eu preferi o presencial. Porque faz junto com os outros”.

Ao dar continuidade na análise da proposta de educação bimodal da disciplina, com o objetivo de identificar ações que favoreceram a aprendizagem do alunos, vamos dialogar sobre **a aula 5**. Esse encontro foi desenvolvido presencialmente e articulado com as discussões do grupo do WhatsApp, referente à Agenda 1. A aula presencial foi importante para fazer o fechamento em relação ao estudo sobre função do 2º grau, iniciada na aula 4, desenvolvida a distância.

Em relação à proposta de estudo de funções com uso de *smartphone*, durante a entrevista os alunos Welington e Lucilene destacaram a forma como (re)aprenderam esse objeto matemático, conforme apresentado no diálogo apresentado a seguir:



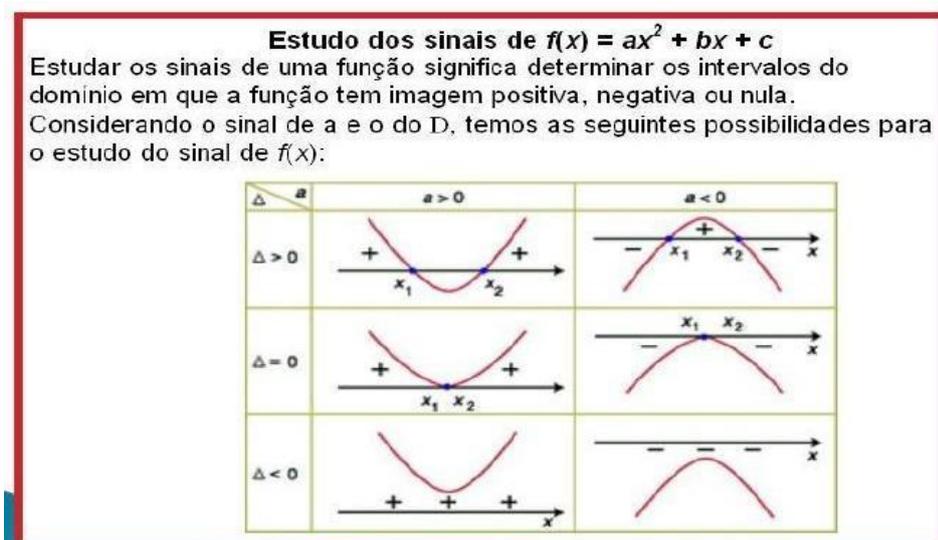
É mesmo, dá para movimentar e vendo quando o domínio é os reais. Por isso que eu digo que não parece a mesma coisa do ensino médio. Porque a gente fica no mecânico sempre colocando x que pertence ao reais, por exemplo[referindo-se a ação mecânica sem demandar reflexão sobre o significado do x pertencer ao conjunto dos números reais].

Eu acho que pela primeira vez na vida eu entendi isso. Lembra que a gente falou isso naquela aula de função do 2º grau, Wellington? Eu falei para ele nunca tinha entendido aquele estudo do sinal, quando delta dava zero, maior que zero, menor que zero... Mas com o geogebra a gente foi vendo cada tipo, é assim dá para entender [referindo-se a diferentes situações de estudo de sinal de função polinomial do 2º grau]



Em relação às falas de Wellington e Lucilene na entrevista, identificamos que a ação de investigação matemática com uso do GeoGebra possibilitou uma nova forma de aprender domínio e imagem de uma função, em especial da função polinomial do 2º grau. Nova forma em relação à aprendizagem anterior que foi descrita por Wellington como “mecânica”, em que o “certo é escrever $D_f = R$ ”. E conforme Lucilene também ressaltou: “nunca tinha entendido aquele estudo do sinal, quando delta dava zero, maior que zero, menor que zero.” Em outras palavras, o que Lucilene falou foi sobre um conjunto de afirmações, muitas vezes citadas pelo professor, e que podem não fazer sentido para os alunos. Essas afirmações são as que podemos ver na Figura 15.

Figura 15- sinal de uma função polinomial do 2º grau



Fonte: dados da pesquisa.

Não intencionamos julgar o que é certo ou errado, pois o certo é resultado de nossas certezas, de nossas verdades, mesmo que temporárias. Portanto, apresentar esse conjunto de “afirmações” e depois fazer uma série de exercícios que exploram esses casos, sem discutir como se chegou a elas, o que elas podem significar em diferentes contextos, é uma forma de ensino, coerente com a perspectiva da transmissão da informação.

O que nós propomos na pesquisa, e que segundo Lucilene e Wellington foi uma ação favorável para aprendizagem deles, foi a investigação com uso do GeoGebra de casos diferentes de funções. Assim, para cada grupo foi indicada a equação de uma função, para estudar o sinal, determinar o zero, o domínio e a imagem, com um tempo determinado para discussão e resolução. E, posteriormente, cada grupo usou o espelhamento da tela do *smartphone*, para apresentar aos demais colegas suas considerações, assim, todos deveriam usar seus *smartphone* para investigações da questão destinada ao grupo que estava apresentando.

Portanto, cada questão era também de todos os grupos e não era uma simples apresentação de resultados, mas, um espaço para discussão e um espaço para aprendizagem em interação; um espaço de construção coletiva. A partir dos resultados apresentados por cada grupo em sala, foi sendo institucionalizado essas diferentes possibilidades de estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau. A seguir apresentamos a proposta de atividade que os alunos mencionaram na entrevista.

Grupo 1: Seja $f(x) = x^2 - 2x - 8$, uma função polinomial do 2º grau:

- determine o zero da função, caso exista.
- plote no GeoGebra a $f(x)$ e insira um ponto sobre a curva $f(x)$ e movimentando esse ponto, faça o estudo do sinal da função.
- Determine o domínio e a imagem da função.

Grupo 2: Seja $f(x) = -4x^2 + 2x - 3$, uma função polinomial do 2º grau:

- determine o zero da função, caso exista.
- plote no GeoGebra a $f(x)$ e insira um ponto sobre a curva $f(x)$ e movimentando esse ponto, faça o estudo do sinal da função.
- Determine o domínio e a imagem da função.

Grupo 3: Seja $f(x) = -x^2 + 16$, uma função polinomial do 2º grau:

- determine o zero da função, caso exista.
- plote no GeoGebra a $f(x)$ e insira um ponto sobre a curva $f(x)$ e movimentando esse ponto, faça o estudo do sinal da função.
- Determine o domínio e a imagem da função.

Grupo 4: Seja $f(x) = x^2 - 4x + 4$, uma função polinomial do 2º grau:

- determine o zero da função, caso exista.
- plote no GeoGebra a $f(x)$ e insira um ponto sobre a curva $f(x)$ e movimentando esse ponto, faça o estudo do sinal da função.
- Determine o domínio e a imagem da função.

Dando continuidade, a **aula 6** foi desenvolvida presencialmente e foi realizado o estudo sobre função exponencial, que se constituiu em uma proposta com uso da lousa digital, porém a mesma não faz parte da análise dessa tese. Um destaque que damos a essa aula é que com o estudo da função exponencial já foi feita uma introdução a ideia de limite, que seria o conteúdo da aula seguinte, a distância. Essa introdução se deu com a análise do gráfico de uma função exponencial com o GeoGebra.

Na sequência optamos por fazer a primeira aula sobre Limites de função, na modalidade de EaD, **aula 7**, e foi trabalhado com os alunos nessa aula a noção intuitiva de Limite, usando o GeoGebra. As **aulas 8, 9 e 10** foram presenciais, na mesma perspectiva teórica e metodológica já mencionada, e foram realizados estudos sobre Limites de função. **Na aula 10** foi explorado ainda o conteúdo de limites, em especial para introduzir o conceito de derivada. Essa é uma das aulas, a aula presencial, cuja análise as ações que favoreceram à aprendizagem, iremos apresentar no próximo subcapítulo 4.2.

Na aula 11, realizada a distância a partir da Agenda 3, foi feita a articulação com o que foi trabalhado na aula 10, e ampliado o estudo com novas propostas em relação as propriedades de derivadas de funções. Essa também foi uma das aulas, a aula distância, cuja análise das ações que favoreceram à aprendizagem será apresentada no subcapítulo 4.3.

Sempre buscando a articulação entre o espaço presencial e virtual, na **aula 12**, que ocorreu presencialmente, foi realizado estudo de mais algumas propriedades de derivadas. E na **aula 13**, Agenda 4, desenvolvida a distância, foi estudado o conteúdo de derivadas de ordem superior. A articulação entre presencial e virtual se deu, retomando as propriedades das derivadas já estudadas em aulas presenciais e virtuais anteriores. Já nas **aulas 14 e 15**, presenciais, foram realizados estudos sobre função composta e regra da cadeia. Na **aula 16**, cada grupo apresentou aos demais um cálculo envolvendo algumas das propriedades de derivadas aprendidas.

Na **aula 17** foi feito um estudo sobre máximo e mínimo de funções a partir de atividades investigativas, com o GeoGebra *mobile* e espelhamento de tela. Na sequência, a **aula 18** foi a distância, a partir da Agenda 5, foi retomado e ampliado o estudo sobre máximos e mínimos de funções. Nessa agenda, foi proposto um problema contextualizado sobre cálculo do volume de uma caixa. Para uma melhor investigação, os alunos usaram um simulador da plataforma GeoGebra e em duplas eles deveriam gravar um vídeo apresentando a solução do problema. No grupo do WhatsApp foi realizada a discussão do problema proposto, a partir dos vídeos apresentados pelas duplas.

A produção de vídeos pelos alunos foi uma proposta em todas as agendas a distância. Por esse motivo, vamos apresentar a seguir algumas ações e produções da aula 18, para analisarmos a importância da produção de vídeos, em uma proposta de Educação Bimodal, como uma ação que pode favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo, em ambiente construcionista. A confirmação dessa hipótese pode ser observada em falas da entrevista e produção de vídeos dos alunos Daniel e Mylena, por exemplo, que será apresentada mais adiante.

Para dialogar sobre a aula, vamos apresentar a tarefa proposta, como uma das ações da Agenda 5.

Problema 1: Uma grande caixa deve ser construída cortando-se quadrados iguais dos quatro cantos de uma folha retangular de dimensões 3m por 8m, dobrando-se os quatro lados (abas laterais) para cima, e colando-se as arestas verticais da caixa obtida que ficaram justapostas. Determine o valor máximo para o volume da caixa?

Orientação: Para compreender melhor o problema proposto explore o simulador disponibilizado abaixo. Altere os parâmetros $w=8$ e $L=3$ (dimensões da folha de papel), e movimente a variável c (que representa o corte dos cantos da caixa para montagem futura), e observe as diferentes caixas que podem ser construídas.



A seguir temos o vídeo produzido por Mylena e Daniel, em que os alunos fazem a simulação da caixa, e determinam a função que representa o volume da caixa construída. E como estratégia para determinar o volume da caixa, Mylena e Daniel determinam a função derivada, e calculam as raízes da mesma, e assim solucionam o problema proposto, conforme os dois vídeos seguintes.

²⁸ Simulador disponível em: <<https://www.GeoGebra.org/classic/ZvBJqjxx>>

Figura 16: Produção de Mylena e Daniel: parte 1



Fonte: Disponível em: <https://youtu.be/q_d0AjXWFO>

Figura 17: Produção de Mylena e Daniel: parte II



Fonte: disponível em: <<https://youtu.be/MPyIwQBPIdU>>

A seguir vejamos um recorte da entrevista da Mylena, em que a aluna pontua a importância da produção de vídeos para sua aprendizagem.

Mylena: Nossa! os vídeos, só por Deus. (risos) [...] eu nunca pensei que tivesse que estudar tanto para fazer um videozinho de 2 ou 3 minutinhos. Na real dá muito trabalho, mas isso é bom para aprender. Eu fazia o roteiro, mas nunca seguia, não sei nem pq fazia[...] a ideia vinha na hora e mudava o roteiro. Aprendi muito com os vídeos, porque eu estudava bastante para fazer, e eu curti tanto o geogebra que acho que em todos os meus vídeos eu usei ele. [...] lembro que teve uma aula de derivadas no whats que eu fiz um vídeo, nunca fiquei tão feliz em conseguir terminar uma tarefa, porque eu já tinha feito mil vezes as contas e o povo do grupo me tentando me ajudar.



Mylena: acho que esse vídeo e aquele que eu e o Daniel construímos a caixa foram os mais difíceis. Eu sei que eu tenho dificuldade em Matemática, não sou boa como alguns alunos e por isso eu tenho que correr atrás de muita coisa que eu deveria saber, mas não sei. E por isso para mim os vídeos e o grupo no whats foi bom, porque se eu não tivesse com quem conversar eu nunca ia conseguir e como tinha que entender para fazer o vídeo, eu gritava para ver quem me ouvia. Nesse vídeo da caixa eu e Daniel, pesquisamos em livros, plotamos no geogebra, e mas não parecia o suficiente para fazer o vídeo, só sossegamos quando fizemos a nossa caixa de verdade . Ai o vídeo ficou bom! Não solucionamos o problema perfeito porque nossas contas estavam uma bagunça, mas eu fiquei feliz, por conseguir fazer.



Pela entrevista de Mylena destacamos duas ações que favoreceram sua aprendizagem: a ação de discussão de atividades no grupo do whatsApp, confirmado pela fala: “o grupo no whats foi bom, porque se eu não tivesse com quem conversar eu nunca ia conseguir”, e a ação de produção de vídeos sobre uma investigação matemática: “Eu nunca pensei que tinha que estudar tanto para fazer um vídeozinho de 2 ou 3 minutos”.

Daniel em sua entrevista também pontua sobre essa produção de vídeo especificamente.

Daniel:[...] aquele do vídeo deu bastante trabalho. Ainda bem que eu estava fazendo com a Mylena e ela me ajudou a entender. Foi complexo, porque até a gente entender o problema demorou, e depois de ler o material daí a gente sacou que era só achar as raízes da derivada e tava mais fácil . Tô tentando lembrar dos outros vídeos, mas acho que esse foi o que a gente mais bateu cabeça, foi interessante ver um problema mais real eu aprendo mais fácil assim
[...] é que as vezes é tanto nome e fórmula que eu me perco, e nesse ai fez mais sentido a derivada, sabe [...] ah é lembrei, tava rolando um evento da química e saímos de fininho para gravar o vídeo.



E pelas ações citadas por Daniel e Mylena, temos indícios da dimensão sintônica do ambiente construcionista criado, pois mesmo o problema não tendo partido dos alunos, eles tomaram o problema como algo seu e afirmaram que suas ações foram importantes para sua aprendizagem, evidenciado nas frases: “foi interessante ver um problema mais real eu aprendo mais fácil assim”, “eu fiquei feliz, por conseguir fazer.”.

Nas palavras de Papert (2008, p.134), “se um homem tem fome, você pode dar-lhe um peixe, mas é melhor dar-lhe uma vara e ensiná-lo a pescar”. E um pouco do que se produz pode ser visto nos registros desses alunos, quando a opção é “dar a vara e ensinar a pescar”. Em uma aula sobre este conteúdo, o professor poderia optar por transmitir a informação (“dar o peixe”) ao seu aluno, que poderia ser apenas enunciar o teorema sobre Máximos e Mínimos de funções, resolver um exercício modelo e solicitar que os alunos fizessem uma série de exercícios seguindo o modelo proposto.

Ou ainda, em um ambiente construcionista, o professor pode oportunizar que o aluno construa conhecimento (“dando-lhe uma vara e ensinando-o a pescar”), como o que foi vivenciado com Mylena e Daniel. Eles, a partir da atividade proposta, buscaram investigar em livros, no GeoGebra, e até mesmo fazendo um protótipo de papel, uma solução para o problema. Note que essa ação de produção de vídeos, além de favorecer à aprendizagem, oportunizou, à Mylena e Daniel, a busca por soluções em outro espaço, o espaço do Geogebra, e o apoio de outras tecnologias, como o livro e o protótipo. E esse processo de investigação possibilitou momentos de reflexão, evidenciado nas falas: “foi o que a gente mais bateu cabeça”, “na real dá muito trabalho, mas isso é bom para aprender”, “aprendi muito com os vídeos, porque eu estudava bastante para fazer”.

Do recorte da entrevista de Mylena, apresentado anteriormente, identificamos ainda a dimensão pragmática do ambiente construcionista e o sentimento de “*empowerment*”, confirmado pelas afirmações: “*sossegamos quando fizemos a nossa caixa de verdade. Aí o vídeo ficou bom! Não solucionamos o problema perfeitinho porque nossas contas estavam uma bagunça, mas eu fiquei feliz, por conseguir fazer*”. Essa fala nos remete a afirmação de Maltempo (2004, p.267): “O despertar para o desenvolvimento de algo útil coloca o aprendiz em contato com novos conceitos. O domínio destes conceitos traz uma sensação de praticidade e poder, incentivando cada vez mais a busca pelo saber”.

Outro destaque que damos à fala de Daniel é a frase: “é que às vezes é tanto nome e fórmula que eu me perco, e nesse aí fez mais sentido a derivada, sabe”. Da fala de Daniel, temos indícios que a dimensão semântica de um ambiente construcionista pode ter sido alcançada, pois a experiência vivenciada por ele possibilitou a compreensão da derivada como alternativa para determinar pontos de máximos e mínimos, conforme ele afirmou. Conforme Maltempo (2004) pontua, a dimensão semântica diz respeito ao trabalho com algo que faça sentido para o aluno, ou seja, que tenha significado, evitando uma série de símbolos e fórmulas que valorizam as técnicas de uso e não a compreensão de conceitos.

A partir da fala de Daniel compreendemos a importância de se criar um ambiente construcionista com produções que envolvem situações contextualizadas, seja na relação com cotidianos dos alunos, vida social, outras áreas do conhecimento, além do contexto na própria matemática. E por considerarmos importante esse tipo de atividade, que se planejou a proposta da aula 19. Na **aula 19**, para a finalização do conteúdo de derivadas, foi desenvolvida uma atividade em formato de seminário. Nessa atividade, em duplas, os alunos deveriam apresentar um problema (de preferência aplicado na área de Química; área de formação dos alunos), que envolvesse o conteúdo de derivadas. Além da apresentação do problema, a dupla deveria discutir com os colegas a solução do mesmo.

A **aula 20** foi a distância, a partir da Agenda 6. Nela foi realizado um estudo, introduzindo o conceito de integrais indefinidas. Essa Agenda contou com arquivo em PDF, aplicativos da plataforma GeoGebra, vídeo produzido pela professora, atividades investigativas com uso do GeoGebra mobile, e discussão no grupo do whatApp sobre as produções e conceitos envolvidos.

Na **aula 21**, encontro presencial, foi realizado um estudo sobre integrais indefinidas, articulado com o estudo realizado na aula anterior, e também se fez o fechamento da disciplina. Na última aula, a **aula 22**, foi realizada uma atividade avaliativa presencial em formato de prova envolvendo, questões sobre funções polinomial do 1º e do 2º grau, limites, propriedades de derivadas, cálculo de máximos e mínimos e integrais. Essa aula teve carga horária de 4 horas.

Por falar em atividade avaliativa, vale mencionar que todas produções realizadas na disciplina, vídeos, participação no whatsApp, seminário presencial, produções com o GeoGebra, foram avaliadas, com critérios de avaliação anunciados aos alunos em momento anterior a realização da atividade e com peso diferentes a depender das ações propostas. Ou seja, a prova da última aula foi apenas mais um momento de avaliar a aprendizagem. No caso das aulas a distância, os critérios de avaliação eram apresentados na agenda.

Para discutir, mesmo que brevemente, processo de avaliação da disciplina, por não ser foco de análise desta tese, a seguir trazemos a redação da Agenda 6 - aula 21, como exemplo da proposta de avaliação de aprendizagem na disciplina. Nessa aula, inicialmente o aluno deveria assistir a um vídeo antes de participar de um encontro síncrono (duração de 1 hora), em que foi proposta a seguinte tarefa e com questões lançadas no grupo do WhatsApp.

TAREFA: Sendo, $F(x) = x^2 + c$, uma função e c uma constante qualquer, plote a $F(x)$ no GeoGebra, inserindo controle deslizante c .

OBS: Habilite a função rastro no GeoGebra para dar continuidade na atividade.

- a) Altere $c = -10$, ou seja, faça $F(x) = x^2 - 10$. $F(x)$ é uma primitiva, de qual função, $f(x)$? Por quê? – (O que é uma primitiva?)
- b) Altere $c = -1$, ou seja faça $F(x) = x^2 - 1$. $F(x)$ é um primitiva, de qual função, $f(x)$? Por quê?
- c) $F(x) = x^2$ é uma primitiva, de qual função $f(x)$? Por quê?
- d) Altere $c = 1$, ou seja, faça $F(x) = x^2 + 1$. $F(x)$ é uma primitiva, de qual função, $f(x)$? Por quê?
- e) altere $c = 10$, ou seja, faça $F(x) = x^2 + 10$. $F(x)$ é uma primitiva, de qual função, $f(x)$? Por quê?
- f) Observe que ao movimentarmos os diferentes valores de c , obtivemos várias representações gráficas. O que elas representam em relação a $f(x) = 2x$ (função encontrada anteriormente)?

Com essa parte da aula o objetivo de aprendizagem era conceituar a ideia de família de primitivas, ao compreender o porquê de no processo de integração aparecer a constante c . E compreender que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por $\int f(x)dx = F(x) + c$. Em nosso caso de estudo tínhamos a seguinte igualdade:

$$\int 2x dx = x^2 + c$$

Então, partindo desta parte da aula, para avaliar este objetivo de aprendizagem apresentado acima, propusemos os seguintes critérios de avaliação, com pontuação máxima correspondendo a 5,0:

- Discutiu de forma coerente com os objetivos o conteúdo estudado no vídeo e articulou com as questões propostas em aula. (4,0)
- Desenvolveu no GeoGebra a atividade proposta. (1,0)

Após o encontro síncrono, e continuidade das ações da Agenda 6, o aluno deveria estudar um material didático, em formato de PDF, disponibilizado na plataforma GeoGebra. Após o estudo deste material, cada aluno deveria realizar uma atividade de cálculo de integral, e gravar um vídeo de no máximo 3 minutos, explicando sua resolução. Feito isso, o vídeo deveria ser encaminhado ao grupo do WhatsApp para que os demais pudessem visualizar e discutir sua resolução. Essa foi uma forma diferente de propormos o desenvolvimento de uma “lista de exercícios”, e a discutirmos coletivamente. Afinal, tínhamos 13 atividades na lista (uma para cada aluno), conseqüentemente 13 vídeos foram discutidos, como fonte de questões, de dúvidas e certezas, no grupo do WhatsApp.

Ainda em relação a produção desse vídeo, ressaltamos que o mesmo foi avaliado; com nota de zero à cinco, não sendo admitido envio dos vídeos fora do prazo. Os critérios de avaliação foram os seguintes:

- domínio de conteúdo (1,0);
- apresentou uma resolução coerente com os conceitos envolvidos para o problema (1,0);
- Discutiu de forma coerente com os conteúdos estudados os vídeos dos colegas (1,5);
- Se posicionou diante de questionamentos apresentados (1,5).

Agora que conhecemos um pouquinho da proposta avaliativa da disciplina, que tal ouvirmos um pouco o que os alunos tem a dizer sobre isso? Com a palavra, Mylena, Eduardo e Nilson.



Mais uma vez se confirma a ação de produção de vídeo e a interação no grupo do WhatsApp, como ações favoráveis à aprendizagem de Mylena.

Vejamos agora um recorte da entrevista de Eduardo.

É professora, teve bastante avaliação. Tava acostumado só com a prova [...]. O bom é que tem mais oportunidade para tirar nota, porque da outra vez [referindo-se a primeira vez que cursou a disciplina] fui mal na primeira prova, e eu sabia que já não dava mais, mesmo fazendo a sub [prova substitutiva]. Por isso desisti da disciplina.



Achei difícil, vou explicar porque. Quando tem só a prova, dá para deixar para estudar só na semana da prova. E nessa [referindo-se a avaliação proposta nessa disciplina], não dava para deixar, toda semana tinha um negócio [ação] para fazer. É difícil, para se organizar, mais para aprender é melhor. Porque só com a prova, eu sempre deixo para estudar na semana e como sempre não dou conta, por isso reprovei [referindo-se a primeira vez que cursou a disciplina].

Das falas dos alunos, destacamos que a avaliação contínua, processual e formativa, ao longo do processo da disciplina e aprendizagem, na fala dos alunos “dá mais trabalho”, pois demanda organização do tempo, e habitar o ambiente tanto presencial e virtual. Habitar no sentido de dialogar, questionar, propor, produzir. Esse trabalho é mais intenso para alunos, e também para o professor, que acompanha os processos de aprendizagem dos alunos ao longo da disciplina, realizando intervenções sobre suas certezas, analisando erros como conhecimento produzido, podendo planejar aulas a partir das necessidades dos alunos, articuladas ao currículo proposto.

Destacamos em relação a entrevista de Daniel, que para esse aluno a ação de avaliação contínua foi favorável à aprendizagem, embora o mesmo não tenha “gostado” de tal forma de avaliar. Afirmamos isso, a partir da fala: “é difícil para se organizar, mas para aprender é melhor”.

Com base nos dados apresentados até o momento, destacamos as seguintes ações que favoreceram à aprendizagem:

- ação discussão das atividades em grupo no espaço presencial;
- ação de espelhar na grande tela, a tela do smartphone, dando ao aluno a oportunidade de mostrar e dialogar com os demais colegas (alunos e professora) sobre suas produções e considerações sobre a atividade desenvolvida;
- a ação de investigação matemática com uso do GeoGebra, tanto no espaço presencial, como no virtual;
- a ação de discussão de atividades no grupo do whatsapp;
- e a ação de produção de vídeos sobre uma investigação matemática.

E assim finalizamos essa breve apresentação e análise da proposta de educação bimodal para a disciplina de Cálculo, e de como foram exploradas algumas possibilidades e potencialidades de cada espaço de aprendizagem e da articulação entre as propostas. Esse subcapítulo pode ser encerrado com a uma frase de Scherer (2005, p.109), que resume a proposta de educação bimodal, na disciplina de Matemática I, com uso de *smartphone*: “o importante ao pensarmos em uma estética de Educação Bimodal é pensarmos na articulação dos dois espaços [ao falar do presencial e do virtual], na complementaridade [...], não excluindo nada, aproveitando todos os movimentos, tecnologias e linguagens.”

4.2 AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE *SMARTPHONE*: DIALOGANDO SOBRE UMA AULA PRESENCIAL



Olá leitor, agora que já temos uma visão geral de como se deu a proposta de educação bimodal de estudo de conceitos de Cálculo com uso de *smartphone*, vamos colocar uma lupa sobre uma das aulas desenvolvidas presencialmente.

Neste capítulo, faremos a análise das ações desenvolvidas no espaço presencial da disciplina de Matemática I. Nós não iremos realizar a análise de todas as aulas por considerar que as aulas selecionadas, uma presencial e uma a distância, conforme mencionado e justificado no texto da metodologia de pesquisa, são suficientes para discutir a problemática e objetivos propostos nesta pesquisa de doutorado. E também, a análise de todas as aulas deixaria o texto de tese muito extenso, podendo se tornar cansativo para alguns leitores.

Das aulas presenciais optamos por analisar a **aula 10**, em que foi realizado estudo sobre reta tangente e função derivada, a primeira aula em que se abordou o conteúdo de Derivadas de função, conforme pontuado no capítulo metodológico dessa tese. A escolha por realizar a análise dessa aula se deu, pelo fato de vários alunos a terem mencionado no momento da entrevista, como tendo sido significativa.

O objetivo de aprendizagem da aula era compreender a derivada como taxa de variação e a relação com o coeficiente angular da reta tangente a curva. As tecnologias digitais usadas foram: o *screenmirror*, *datashow*, app GeoGebra *mobile* e *smartphones* (dos alunos e da professora).

Inicialmente foi proposta a seguinte atividade:

(adaptado de MUROLO, 2012) No processo de *produção* de um produto são utilizados vários fatores, como matéria-prima, energia, equipamentos, mão de obra, etc. Chamamos tais fatores de *insumos de produção* ou, simplesmente, *insumos*. Por exemplo, são insumos dos tecidos o algodão, a seda, o linho, componentes químicos específicos, mão de obra, equipamentos de tecelagem, energia elétrica etc. Nesse sentido, podemos dizer que a produção depende dos insumos. Considerando que, para um grupo de operários de uma indústria de alimentos, a quantidade P de alimentos produzidos (ou industrializados) depende do número de horas trabalhadas a partir do início do expediente e que tal produção é dada por $P(x) =$, sendo x o tempo e $P(x)$ a quantidade de toneladas de alimentos produzidos. O instante do início do expediente é representado por $x=0$, ou seja, 0h00.

Considerando o problema, **plote** a função $P(x)$ no GeoGebra e **analisando** o gráfico, responda:

- Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo das 3h00 às 4h00? **Insira** um ponto A, nas coordenadas $(3, P(3))$ e um ponto B em $(4, P(4))$. Posteriormente **construa** uma reta secante passando pelos dois pontos A e B. Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue **perceber** alguma **relação**? **Justifique**
- Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo das 4h00 às 5h00? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas $(4, P(4))$ e $(5, P(5))$. Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique
- Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo das 3h00 às 5h00? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas $(3, P(3))$ e $(5, P(5))$. Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique
- Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo 3 à $3,1$? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas $(3, P(3))$ e $(3.1, P(3.1))$. Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique
- Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo 3 à $3,01$? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas $(3, P(3))$ e $(3.01, P(3.01))$. Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique

A professora iniciou a aula fazendo a apresentação desse problema. Cabe ressaltar que a palavra apresentação, aqui usada, não é compreendida apenas como ato de comunicar, ou mostrar, mas como uma ação didática de fundamental importância para aprendizagem, com base no conceito de **devolução do problema** na teoria das situações didáticas (TSD).

Assim ao apresentar o problema aos alunos, a tarefa da aula, segundo Brousseau (1986, p.49), é importante que o professor “provoque no aluno as adaptações desejadas, por meio

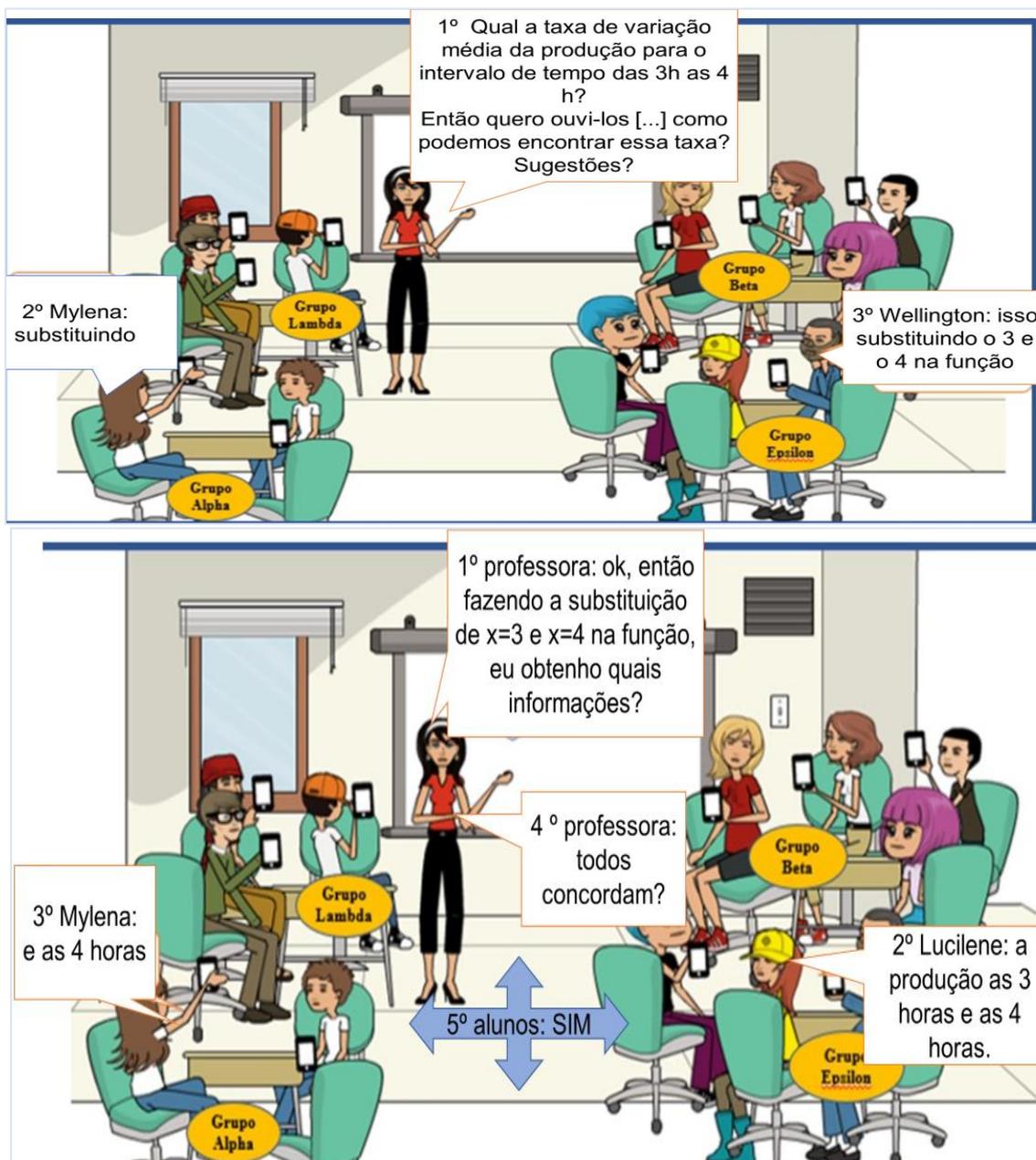
de uma escolha cuidadosa dos problemas, de modo que o aluno possa aceitá-los, agir, falar, refletir [...]”. No problema proposto destacamos algumas palavras chaves que foram incluídas na atividade, para provocar o ato de investigação e ação dos alunos: **plote, analise, insira, construa, perceber e justificar**. Ressaltamos que em uma tarefa proposta em um ambiente construcionista, no momento de autoria, ou adaptações de atividades, um elemento importante é a inclusão de termos que possam despertar o ato de agir sobre o problema, de investigar e formular hipóteses. Não que o fato de incluir verbos de ação irá fazer com que o aluno tenha um papel ativo, mas esse já é um primeiro passo. Um passo necessário, porém, não suficiente para colocar o aluno em ação.

O contexto desse problema foi inspirado/adaptado do livro- Matemática Aplicada a Administração, Economia e Contabilidade, de Murolo (2012), porém com vários incrementos, de natureza tecnológica, didática e epistemológica. Tecnológica, pois toda a investigação proposta demanda o uso do GeoGebra mobile, e na atividade original não foi indicado o uso de tecnologia. Didática e epistemologia, pois com foco na construção de conhecimento do aluno e em oportunizar situações adidáticas de ação, formulação e validação, foram pensadas/intencionadas cada uma das perguntas do problema, tarefa proposta. Ou seja, foi considerado o papel ativo do aluno ao planejar a atividade, de forma que essa oportunizasse momentos de reflexão e interação. Interação com tecnologias e com outros indivíduos (em especial, o professor e demais colegas de turma), uma vez que todas as atividades propostas deveriam ser discutidas/dialogadas nos grupos e posteriormente com os demais alunos da turma.

Essa atividade (assim como a maioria das atividades criadas/adaptadas na disciplina), contempla momentos de diálogos que favoreceram aprendizagens, ou seja, à vivência do ciclo de ações proposto nesta tese. E esse espaço para diálogo sobre os conceitos enriquece a dimensão sintática do ambiente construcionista, pois segundo Maltempo (2004, p.3), dominar esses conceitos e poder dialogar sobre eles, “desperta no aprendiz, uma sensação de poder e praticidade, sensação essa que lhe dá ânimo para que este busque aprender cada vez mais.”

A seguir apresentamos ações da aula (de alguns alunos individualmente, dos grupos e da professora) com objetivo de analisar ações que foram favoráveis à aprendizagem de conceitos de Cálculo no ambiente construcionista constituído no espaço presencial da disciplina.

No cenário de sala de aula, a professora foi propondo que os alunos (junto a seu grupo: Alpha, Lambda, Beta e Épsilon) fizessem a investigação da questão (a), conforme diálogo apresentado a seguir:



Cada grupo- Alpha, Beta, Epsilon, Lambda- se reuniu e fez seus cálculos, até aquele momento, usando apenas lápis e papel. Alguns minutos depois, a professora retomou o diálogo, questionando, qual a taxa encontrada para cada grupo. E todos os grupos apresentaram como resultado, de sua investigação, a taxa de variação média de 7 toneladas por hora. Caracterizando assim, momentos de ação sobre o problema, porém ainda sem uso de *smartphones*. Naquele momento, a partir da resposta apresentada pelos alunos, a

professora apresentou a simbologia a ser usada para taxa de variação média, usando Δ_x e Δ_p , conforme segue:

$$\text{Taxa de variação média da produção das 3:00h às 4:00 h} = \frac{\Delta_p}{\Delta_x} = \frac{P(4) - P(3)}{4 - 3} = 7 \text{ ton/h}$$

Nesse momento destacamos que a ação da professora, no uso de símbolos matemáticos, como uma ação que favorece a dimensão semântica, do ambiente construcionista. Afirmamos isso, pois o estudo do Cálculo, mais especificamente a parte de Derivadas de funções, traz consigo um turbilhão de simbologia, como por exemplo, $f'(x)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y' , que carregam consigo, significados para o estudo desse conteúdo.

Até aquele momento da aula, a ação da professora se constituiu em oportunizar aos alunos uma situação adidática de ação (ao efetuarem cálculos para encontrarem a taxa de variação), considerando os conhecimentos prévios que eles tinham em relação à variação de grandezas. E, após esse momento inicial, a professora apresentou símbolos matemáticos envolvidos na situação em estudo, partindo das respostas dos alunos. Um movimento inverso a esse, que talvez seja o mais presente em livros de Cálculo, é o de apresentar os símbolos e definições, e em seguida propor uma atividade que demandaria o uso dos mesmos. A ação realizada pela professora está coerente com a teoria construcionista, e favorece a dimensão semântica, uma vez que, trabalha a abordagem dinâmica de Derivada e prioriza o conceito de variação, e não a simbologia. Prioriza, porém não exclui.

Essa abordagem dinâmica em relação à taxa de variação, do conceito de Derivada, é importante para o estudo de Cálculo e algumas vezes não é dada tanta ênfase a ela, quanto se dá ao conceito geométrico e via Limite de funções. Rezende (2007, p.10) afirma que:

No que diz respeito ao campo semântico [...] pode-se perceber [...] uma predominância da abordagem estática sobre a abordagem dinâmica das idéias básicas do Cálculo. No conceito de derivada, por exemplo, prevalecem os seus aspectos formais (como sua definição em termos de limite) e geométrico (como o coeficiente angular da reta tangente) sobre a sua interpretação dinâmica em termos de taxa de variação instantânea. Interpretar o conceito de derivada tão somente como “coeficiente angular da reta tangente” significa ignorar o problema histórico essencial da “medida” instantânea da variabilidade de uma grandeza.

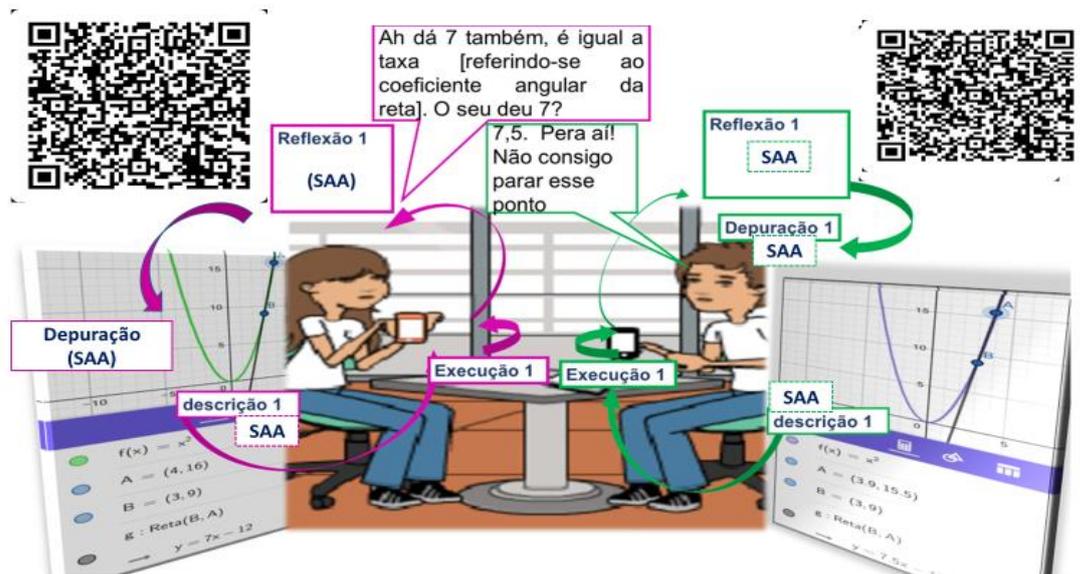
Retomando ao espaço de sala de aula da disciplina, após anotar no quadro a taxa de variação média anterior, a professora propôs à cada grupo, que usassem os seus *smartphones* para investigarem a segunda parte da questão (a). Ou seja, a parte que envolve a representação da reta secante passando pelos pontos A e B, no GeoGebra.

Em continuidade apresentamos a análise dos ciclos de ações, dos alunos Daniel e Mylena, integrantes do grupo Alfa²⁹, para compreendermos o processo de aprendizagem em seus processos investigativos, no ambiente construcionista, para identificarmos ações que podem ter favorecido à aprendizagem de cada um.



Temos dois ciclos de ações sendo vivenciados, o vivenciado por Mylena e o vivenciado por Daniel. O objetivo ao propor o trabalho em grupo foi o de favorecer a reflexão, pois a interação entre os sujeitos poderia desencadear momentos de ação, de formulação e validação de hipóteses. Isso porque o aluno também aprende ao interagir com o outro. E além disso, a dinâmica proposta, com a organização dos grupos era para que a discussão acontecesse, e que diante de divergências de proposições, o próprio grupo buscasse (sempre que possível) um entendimento mútuo, para posteriormente apresentar suas considerações aos demais grupos, no momento de institucionalização.

Mylena e Daniel fizeram, cada um, a sua **descrição** no GeoGebra de seus *smartphones*, os aplicativos **executam**, e a dúvida surge: o coeficiente angular é 7 ou 7,5 ou 7,3? Vejamos como Mylena e Daniel chegam a um entendimento mútuo no diálogo que segue³⁰:



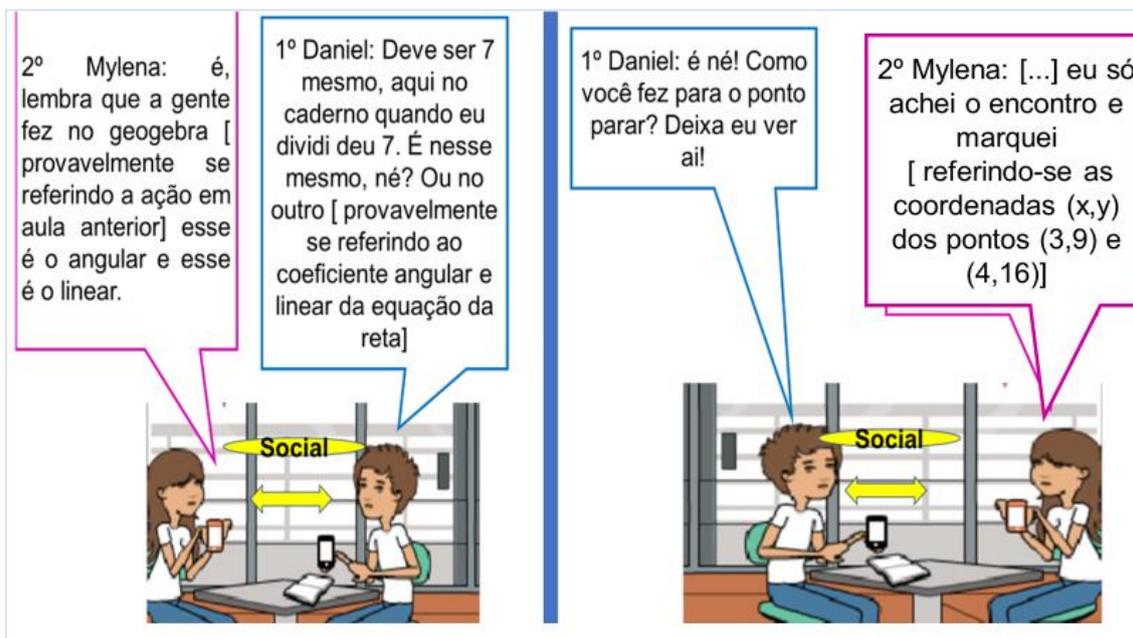
²⁹ O aluno Jackson, também era integrante do grupo alfa, porém não estava presente nessa aula.

³⁰ Para compreender mais do diálogo use o seu leitor de QR-Code para acompanhar as produções realizadas pelos dois alunos.

Focando inicialmente no ciclo de ações de Mylena, é possível observar que a aluna vivencia uma situação adidática de ação (SAA), fazendo a descrição, plotando a função e localizando no plano cartesiano do GeoGebra as coordenadas (3,9) e (4,16) (resultado de seus cálculos), e por fim, representando uma reta secante passando pelos pontos localizados anteriormente. Com o *feedback* apresentado na tela do *smartphone*, Mylena vivencia um momento de reflexão, evidenciado pela fala: - ah, dá 7 também. Afirmamos isso, pois a aluna apenas comparou o coeficiente angular apresentado na janela algébrica do GeoGebra com a taxa de variação anteriormente encontrada a partir dos cálculos por ela realizados. Essa é uma situação adidática de ação, pois a aluna está agindo sobre o problema, ao efetuar seus cálculos, e na plotagem ela observou que o coeficiente angular da reta secante era igual a taxa de variação média encontrada nos seus cálculos.

Agora vamos analisar o ciclo de ações vivenciado por Daniel. Ao interagir com Mylena, Daniel depurou sua estratégia inicial. Conforme pode ser observado no vídeo, (ver qr code) primeiramente ele fez uma descrição no GeoGebra, inserindo os pontos A e B no campo de entrada do GeoGebra. Esse fato fez com que os pontos não ficassem vinculados à função $P(x)$, e assim ao plotar a reta secante passando pelos pontos, os mesmos se deslocaram um pouco, alterando o valor do coeficiente angular da reta, obtendo então o valor de 7,5. Foi quando Mylena questionou: “o seu deu 7?”. Daniel rapidamente retomou sua produção, sem observar que o erro poderia não ser seu, mas de Mylena. Talvez porque, a relação apresentada por Mylena fizesse sentido para ele, afinal o aluno em seus cálculos anteriores havia obtido a taxa de variação média de 7 toneladas/h.

Vejamos a seguir um recorte do diálogo entre Mylena e Daniel.



Dando continuidade na análise, o grupo Alfa estava pronto para o momento de discussão e produção coletiva com os demais grupos e professora. Após alguns minutos, a professora retomou a pergunta (questão a) e fez um convite para que um aluno, de algum grupo, fizesse a descrição com o “*smartphone* espelhado³²”. E Mylena aceitou o convite e plotou a função no GeoGebra, e inseriu dois pontos (3,9) e (4,16), representando a reta secante, que passava por esses pontos. Assim, o software executou, apresentando na janela algébrica a equação da reta secante, e a sua representação gráfica na janela gráfica. O diálogo a seguir mostra a sequência da situação didática.

2º a variação da produção é igual ao 7 e o coeficiente angular também

1º professora: Obrigada Mylena! Vamos lá então pessoal! Quero ouvi-los. O que vocês observaram?

Grupo Lambda

Grupo Beta

Grupo Alpha

Grupo Epsilon

3º Eu e o Daniel achamos que é mesmo valor. É igual ao coeficiente angular. reta (referindo-se ao coeficiente angular da reta secante).

1º professora: E os outros grupos? O que vocês observaram?

2º Cassia: A gente também acha que é o mesmo valor. Sempre o coeficiente angular vai ser igual a taxa

Grupo Lambda

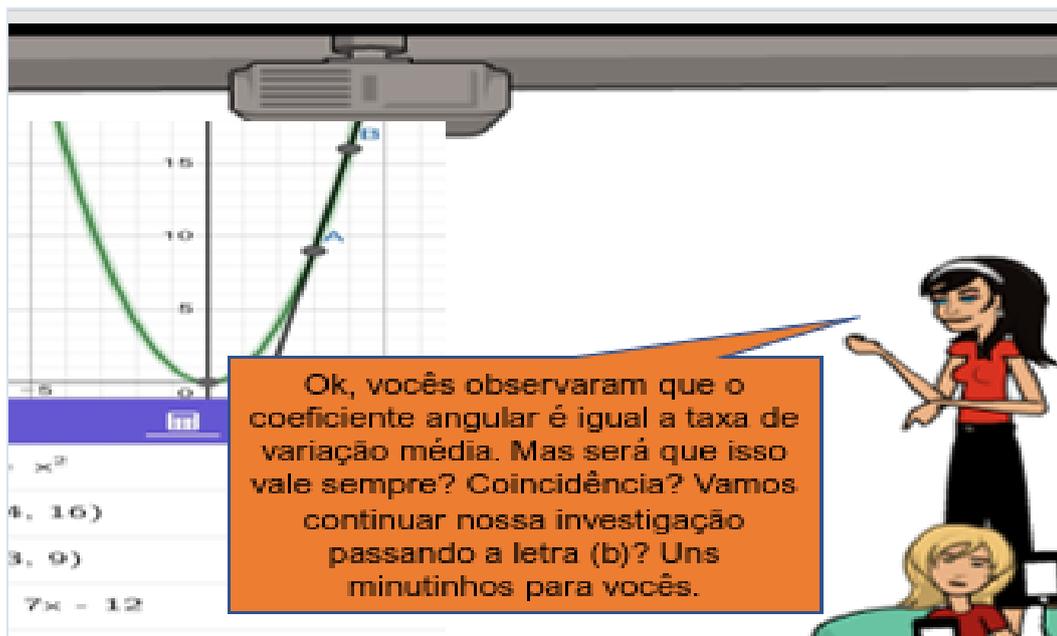
Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

3º Welligton: Isso mesmo. Nós já fizemos até a letra B e deu o mesmo valor também.

³² Chamamos de *smartphone* espelhado, o *smartphone* conectado ao *screenmirror*, que poderia ser usado por todos os alunos.



O suspense ficou no ar, será que isso foi apenas coincidência? Será que sempre a taxa de variação média é igual ao coeficiente angular da reta secante? Se diminuirmos o intervalo de tempo, a taxa de variação média será igual ao coeficiente angular da reta secante? Essa ação de propor questões aos alunos, foi marcante durante todas as aulas.

Consideramos que os questionamentos propostos pela docente foram importantes e determinantes para se constituir um ambiente construcionista de aprendizagem. Isso porque, ao interagir com os alunos após propor o estudo de uma situação, dois cenários são plausíveis de acontecer, de modo mais geral: no primeiro o professor pode “dar a resposta” de que o aluno necessita naquele momento; no segundo, o professor pode propor situações e questionamentos que façam com que o aluno busque as respostas para seus questionamentos.

O desafio lançado pela professora Vanessa foi: “*será que isso vale sempre? Coincidência?*” Esses dois questionamentos têm “um certo tom” de “transferência de responsabilidade” da professora para os alunos. Pois, a partir das respostas apresentadas pelos grupos, a professora apontou que a hipótese levantada por eles é de que, “taxa de variação média é igual ao coeficiente angular da reta secante”, então, naquele momento caberia a eles validarem essa hipótese. Ou seja, a responsabilidade de validar a hipótese era deles, afinal, a hipótese foi apresentada por eles. Como fazer isso? Investigando situações semelhantes.

Na continuidade, a professora passou para a questão b, dando uns minutos para que os alunos pudessem fazer suas investigações e discussão em seus grupos. Cada grupo se reuniu e fez seus cálculos. Após a reunião, a professora retomou o diálogo, questionando qual a taxa encontrada por cada grupo. E os alunos apresentam como resultado para a questão

(b) a taxa de variação média de 9 toneladas por hora. E a professora foi questionando cada valor encontrado pelos alunos, e assim, usando a lousa para representar o resultado da seguinte forma:

$$TVM \text{ da produção das } 4:00h \text{ às } 5:00h = \frac{\Delta_p}{\Delta_x} = \frac{P(5) - P(4)}{5 - 4} = 9 \text{ ton/h}$$

Após a realização do cálculo da taxa de variação média, partiu-se para a segunda parte da questão (b) que envolvia a plotagem dos pontos e a representação da reta secante no GeoGebra. Vamos retornar aos registros do grupo alfa para analisarmos um pouco mais o processo de aprendizagem dos alunos Daniel e Mylena, via ciclo de ações.

Daniel fez a descrição no GeoGebra movimentando os pontos A e B para as coordenadas (4,16) e (5, 25), respectivamente. O aplicativo executou apresentando na tela a seguinte equação da reta secante: $y=9x-20$.

Já Mylena, ao vivenciar uma situação adidática de ação, iniciou uma nova tela do GeoGebra, plotou a $P(x)$ e inseriu os pontos (4,16) e (5,25), localizando-os no plano cartesiano. Após a plotagem dos pontos A e B, a aluna construiu a reta secante passando por A e B e na janela algébrica do GeoGebra, apareceu a equação da reta secante sendo: $y=9x-20$.

Agora vejamos um recorte do diálogo entre Daniel e Mylena, para então analisarmos um pouco do momento de reflexões vivenciados pelos alunos.



Do recorte diálogo temos indícios de que Daniel vivenciou uma situação adidática de formulação, levantando a hipótese que o coeficiente angular de uma equação de uma reta é obtido pelo quociente entre Δx e Δy . Afirmamos isso a partir da hipótese que ele apresentou à Mylena, ao afirmar: “aqui no gráfico forma um triângulo como se fosse um cateto dividido

por outro”. Já Mylena vivenciava uma situação adidática de ação, apenas comparando os valores obtidos na tela com os cálculos feitos por ela.

Do recorte do diálogo apresentado, destacamos a ação de Daniel ao compartilhar com Mylena sua hipótese. Evidenciado pelas falas: “Olha aqui” [...] “Aqui no gráfico forma um triângulo, como se fosse um cateto dividido por outro [...] por isso que é igual ao coeficiente angular.”

Ele tenta apresentar a Mylena a sua hipótese, provavelmente também porque julgasse que a opinião e o processo de aprendizagem de Mylena também eram importantes para ele, afinal eles eram um grupo. Embora naquele momento Mylena não conseguisse entender a justificativa, Daniel propôs a continuidade da investigação, para então tentar validar sua hipótese. Evidenciado na fala: “*vamos passar para a outra para mim ver um negócio aqui. Vou ver se eu tô certo*”.

Mylena ainda em dúvida em relação à hipótese apresentada por Daniel, aceitou o desafio de passar para a questão c. E assim ambos os alunos fizeram a descrição no GeoGebra de seus *smartphones*, plotando os pontos (3,9) e (5,25), e o aplicativo executou apresentando a seguinte equação da reta tangente: $y=8x-15$. E após aparecer nas telas dos *smartphones*, o diálogo e busca pelo entendimento mútuo continuou...



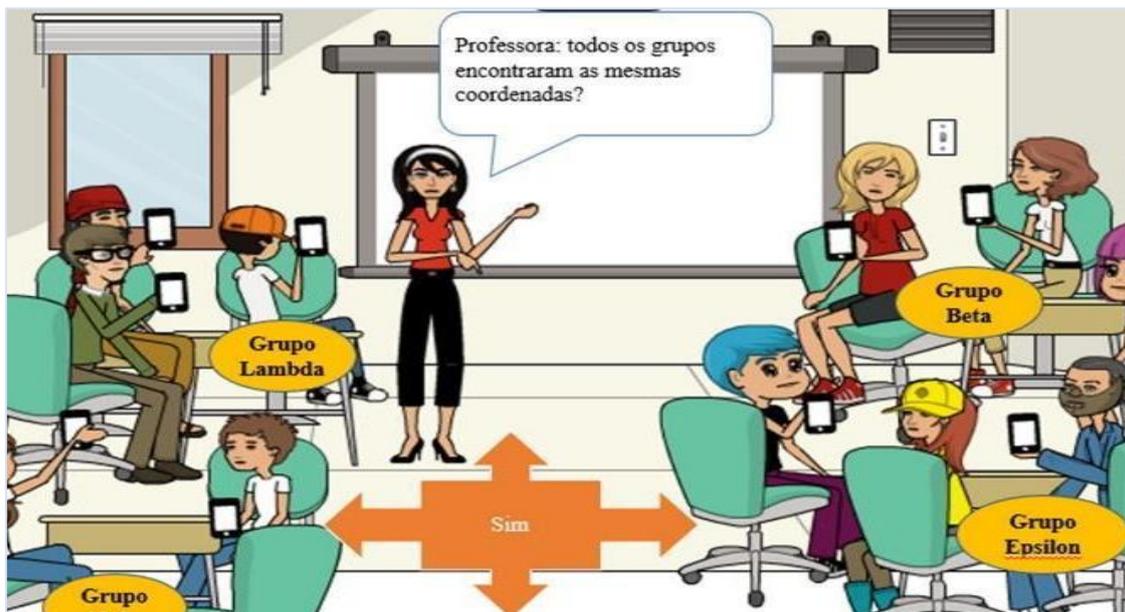
Do diálogo vamos iniciar destacando a situação adidática de ação vivenciada por Mylena. A aluna efetuou os cálculos, fez a descrição no GeoGebra, o aplicativo executou, e a reflexão vivenciada por ela parecia ser inicialmente uma abstração empírica, ou seja, a justificativa estava no visível, no observável na tela. Podemos confirmar pela fala: “já fiz e deu 8 de novo. É sempre igual”.

Mas, ao interagir com Daniel, a interação lhe oportunizou a vivência de uma situação adidática de formulação, apresentando abstrações que dão indícios de serem reflexionantes, evidenciadas nas falas seguintes apresentadas pela aluna: “*ah acho que agora entendi, dá para ver nos pontos também [referindo-se as coordenadas dos pontos (5,25) e (3,9)]. De 3 para 5 tem 2 [referindo-se a distância entre as abscissas dos pontos] e de 9 para 25, tem 15...ops 16 [referindo-se a distância entre as ordenadas dos pontos]. Daí dividindo 16 por 2 da 8, que é o coeficiente angular.*”. Note que as justificativas apresentadas por Mylena não são apenas de características observáveis na tela do GeoGebra. A aluna realizou operações e comparações, apresentou conhecimentos que não estavam no que se observava na tela, faziam parte de coordenações de suas certezas, de seus conhecimentos. Dessa situação adidática vivenciada por Mylena, temos indícios de que a ação de interação com o colega Daniel, pode ter sido uma ação que favoreceu sua aprendizagem.

Já Daniel, compartilhou com Mylena suas considerações: “Então olha aqui [referindo-se a tela do GeoGebra] dá para ver a variação em x de 3 para 5 e a em y de 9 para 25, por isso dá oito.” Consideramos que Daniel validou sua hipótese anteriormente levantada, no ambiente do GeoGebra, e a partir de seus conhecimentos prévios.

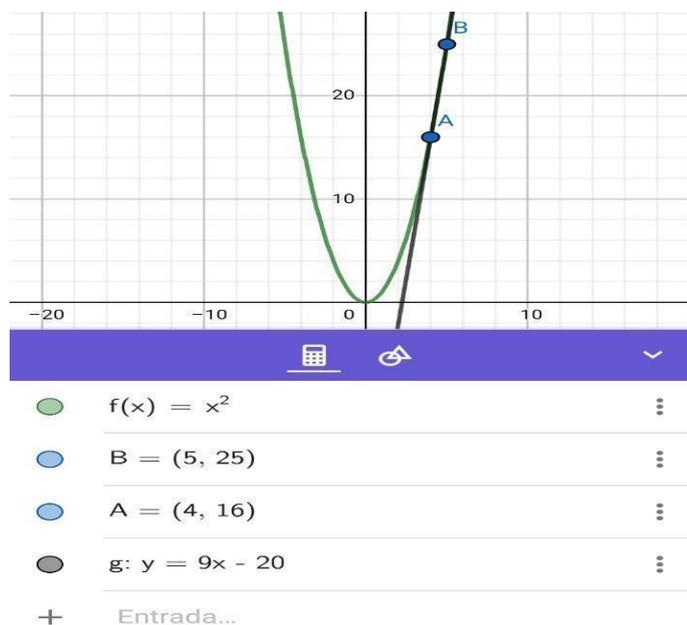
Na sequência da aula, foi momento de fazer a descrição no “*smartphone espelhado*”, e a professora, ao notar que o grupo épsilon estava um tanto quanto silencioso em relação a discussão geral, questiona-os, conforme segue no recorte de diálogo seguinte.





Nilson ainda meio tímido aceitou o desafio, e plotou no GeoGebra a representação apresentada na Figura 18.

Figura 18- representação gráfica da plotagem feita por Nilson



Fonte: dados da pesquisa.

Diante dessa representação, muitos alunos falaram juntos³³, e algumas frases foram identificadas em meio ao que podemos chamar de “barulho produtivo”. Frases como: “é igual também”, “sempre é igual”, “igual”, “não é coincidência”, “deu o mesmo”.

³³ Nesse momento da aula, na filmagem aparecem vários alunos falando ao mesmo tempo, fato que impossibilitou identificar ao certo quais alunos que falaram.

Ao notar que o tempo dado aos grupos, fora o suficiente para que eles desenvolvessem a “questão c” também, a professora continuou o diálogo questionando como vemos na fala dela a seguir:

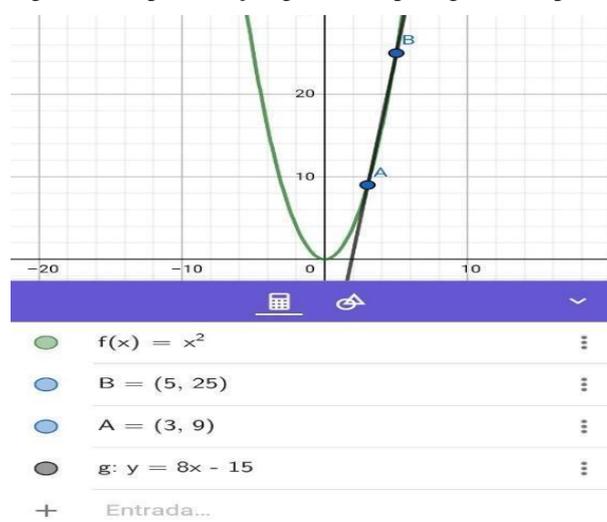


Com a resposta dos alunos, a professora vai registrando no quadro os seguintes cálculos:

$$TVM \text{ da produção das } 3:00h \text{ às } 5:00h = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{P(5) - P(3)}{5 - 3} = 8 \text{ ton/h}$$

E o aluno Wellington, integrante do grupo épsilon, assumiu o “*smartphone* espelhado” e fez a descrição no *software*, que executou apresentando a equação da reta secante, conforme figura 19.

Figura 19- representação gráfica da plotagem feita por Wellington



Fonte: dados da pesquisa.

E mais uma vez o “barulho produtivo” tomou conta da sala. Diante das afirmativas dos alunos, a professora questionou:

1º professora: então pessoal o que podemos concluir com essas três investigações? o que vcs concluem [referindo-se ao grupo Lambda]?

2º Bruno: que a taxa é igual ao coeficiente angular da reta.

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

$f(x) = x^2$
 $B = (4, 16)$
 $A = (3, 9)$
 $g: y = 7x - 12$

1º professora: Taxa que taxa? Reta que reta?

2º Bruno: taxa de variação reta secante

3º Arthur: taxa de variação média

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

$f(x) = x^2$
 $B = (4, 16)$
 $A = (3, 9)$
 $g: y = 7x - 12$

1º professora: todos concordam?

2º Alunos: SIM

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

$f(x) = x^2$
 $B = (4, 16)$
 $A = (3, 9)$
 $g: y = 7x - 12$

Com essas três questões se discutiu o conceito de taxa de variação média e de inclinação da reta secante, para na sequência compreender aspectos da derivada da função em um ponto A, como um limite, fazendo B se aproximar de A, tanto quanto se queira. E assim, discutir a derivada como a inclinação da reta tangente à curva, e como a taxa de variação instantânea. Tendo claro esse objetivo de aprendizagem dessa sequência didática, a professora fez uma institucionalização do estudo até aquele momento e propôs um novo desafio aos grupos, conforme diálogo:

1° professora: pessoal quero que vocês pensem um pouco no problema proposto e no porquê é importante estudarmos a taxa de variação média da produção em um determinado intervalo de tempo.

3° Cassia: para saber se foi maior ou menor. Para melhorar e produzir mais e ganhar mais

4° professora: todos concordam?

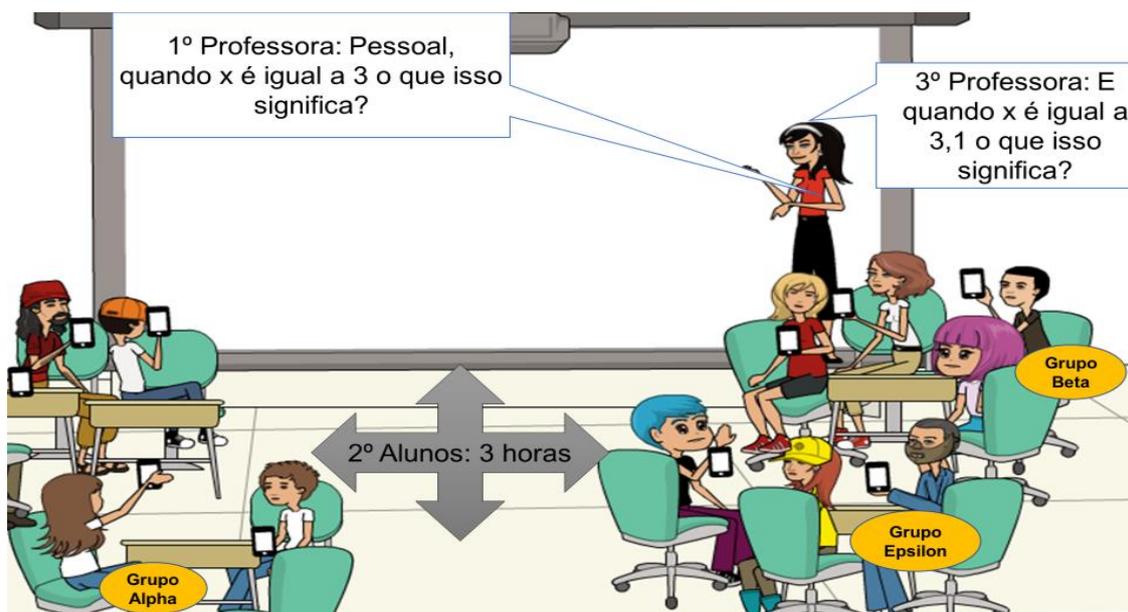
2° Wellington: para mim saber o que está acontecendo naquele intervalo de tempo. O quanto está produzindo.

5° alunos: SIM

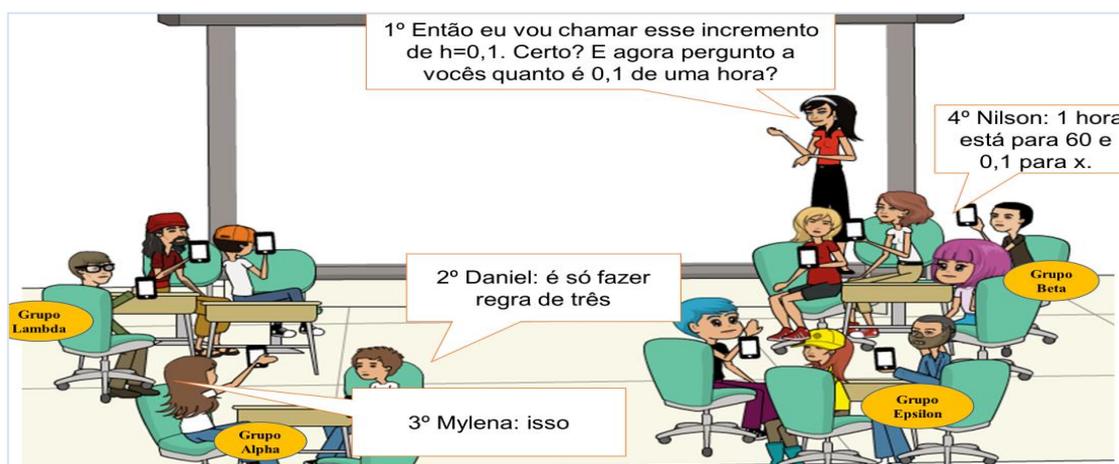
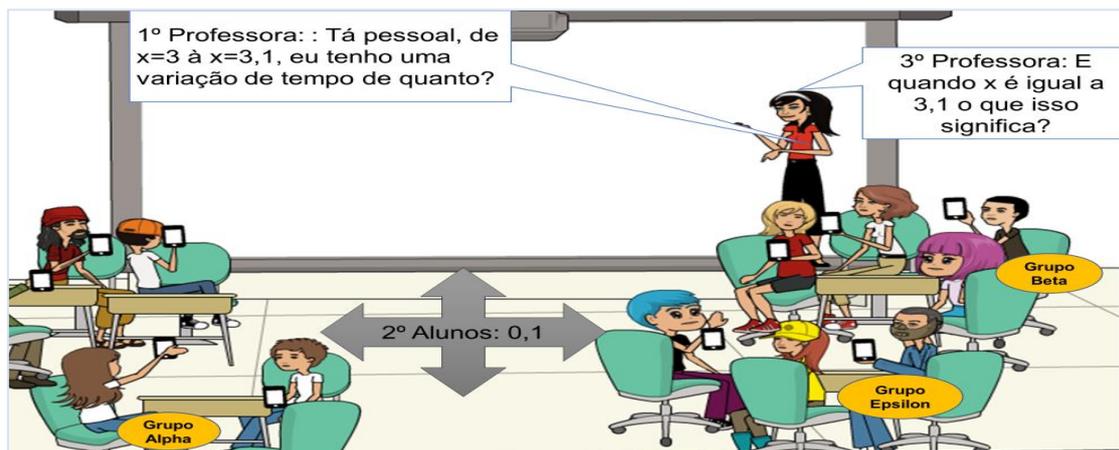
Professora: Ótimo pessoal, então é importante saber a taxa de variação da produção porque assim eu consigo entender melhor o que está acontecendo com a produção e se for o caso tomar alguma atitude em relação aos insumos, para assim aumentar a produção e é claro o lucro. Certo? Mas observe que até agora a variação da produção para intervalos de tempo um tanto quanto longo (1 horas-2 horas), e a taxa de variação média nesses intervalos foi útil para analisar o comportamento da produção. Isso porque dizer que a produção está variando a uma taxa de 7 ton/h significa que, em uma hora, são produzidas 7 toneladas. Agora questiono vocês: *É possível calcular a taxa de variação da produção para um instante específico? Por exemplo, qual a taxa de variação da produção exatamente às 4 horas? Ou para um intervalo de tempo bem pequenininho? Vamos fazer isso? Intervalos: cada vez menores. Vamos lá!!! [...]* Passamos então a próxima questão.

Na sequência foi apresentada a questão (d) da sequência didática, e foi dado um tempo para que cada integrante dos grupos fizesse seus cálculos, plotagens e análises no GeoGebra. Porém, antes de iniciar as investigações da questão (d), a professora propôs um

questionamento e sugeriu o uso do incremento $h=0,1$ para denotar a variação do tempo. Conforme recorte diálogo que segue.



O silêncio pairou na sala. E diante do silêncio, a professora usou outras palavras para questionar os alunos, não dando resposta, mas sim usando de outras palavras que talvez naquele momento poderia oportunizar aos alunos momentos de reflexão.

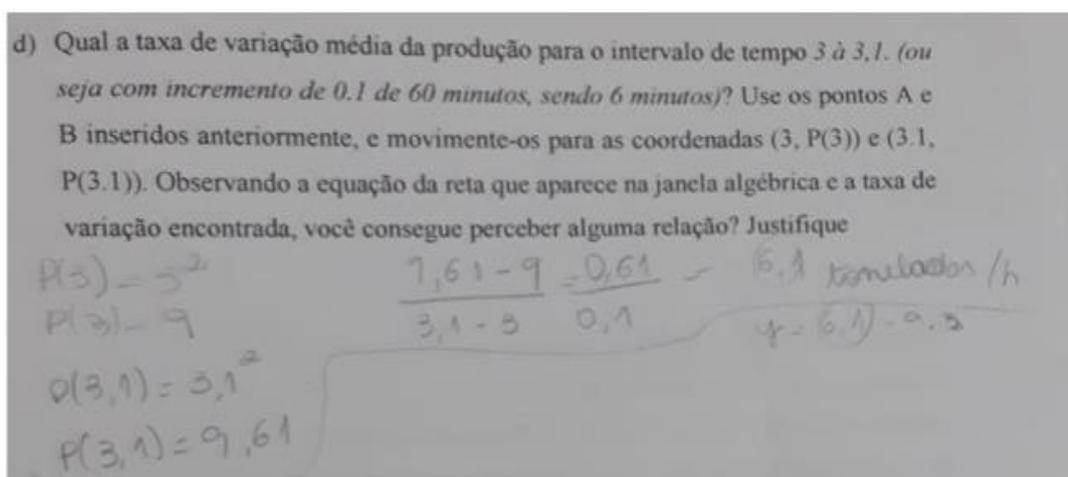


Após esses questionamentos, enquanto os grupos iam fazendo cálculos, e plotando, a professora foi em todos os grupos observar se o valor encontrado era de 6 minutos, e intervir quando fosse o caso, porém não foi.

Agora chegou o momento de novamente voltarmos nosso olhar para os ciclos de ações vivenciados pelos alunos Daniel e Mylena.

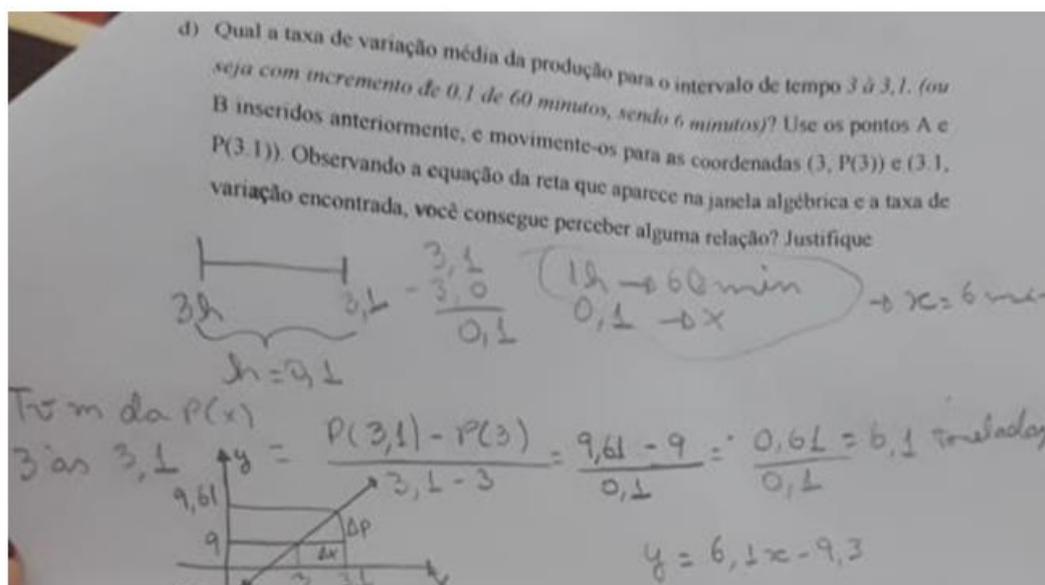
Começando pela questão (d), Mylena e Daniel fizeram seus cálculos conforme pode ser observado nas duas figuras 20 e 21 seguintes.

Figura 20- produção de Mylena



Fonte: dados da pesquisa.

Figura 21- produção de Daniel

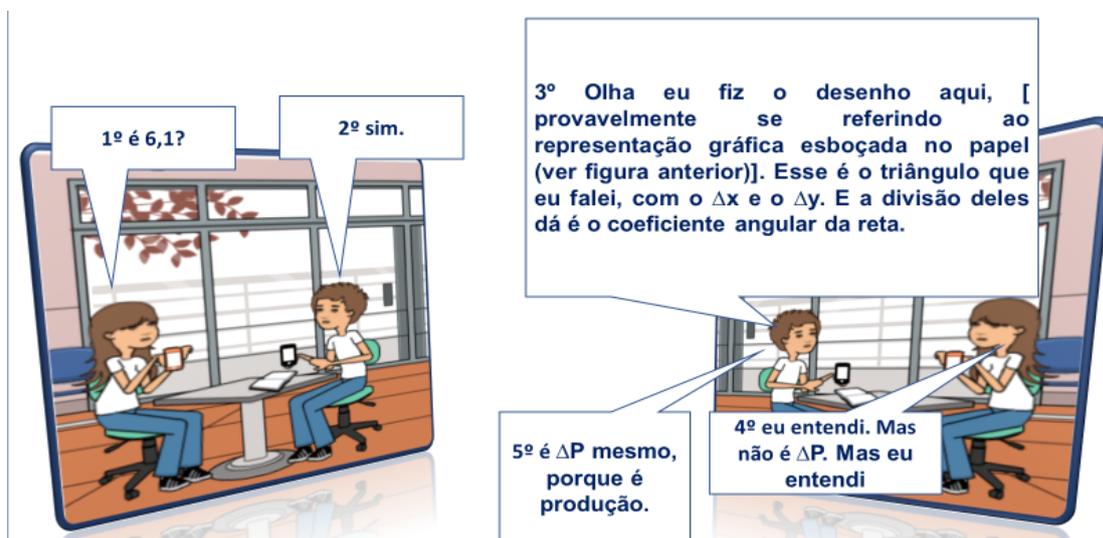


Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se que Daniel fez a representação gráfica no papel, apresentando provavelmente o “triângulo” que anteriormente ele tinha apresentado como justificativa de

sua hipótese para Mylena. Após os dois alunos realizarem seus cálculos, eles obtiveram como taxa de variação média 6,1 ton/h, conforme pode ser observado nas duas figuras anteriores.

Após os cálculos, ambos os alunos fizeram a descrição no GeoGebra movendo os pontos para as coordenadas (3,9) e (3.1, 9.61). O aplicativo GeoGebra executou e apresentou na tela do smartphone de cada um, a seguinte equação da reta $y = 6,1x - 9,3$. E na sequência, apresentamos o diálogo que continuou no grupo alfa...



Do diálogo temos indícios de que Daniel vivenciou uma situação adidática de validação, quando o aluno fez o esboço do gráfico no papel e o apresentou para Mylena.

Na continuidade apresentamos nas duas figuras 22 e 23 seguintes os cálculos e anotações feitos por Daniel e Mylena em relação a questão (e).

Figura 22- anotações de Daniel em relação a questão (e)

e) Qual a taxa de variação média da produção para o intervalo de tempo 3 à 3,01. (ou seja com incremento de 0,01 de 60 minutos, sendo 0,6 minutos que representa 36 segundo)? Use os pontos A e B inseridos anteriormente, e movimente-os para as coordenadas (3, P(3)) e (3,01, P(3,01)). Observando a equação da reta que aparece na janela algébrica e a taxa de variação encontrada, você consegue perceber alguma relação? Justifique

$$TVM \text{ da } P(x) = \frac{P(3,01) - P(3)}{3,01 - 3} = \frac{9,0601 - 9}{0,01} = \frac{0,0601}{0,01} = 6,01 \text{ ton/h}$$

$$y = 6,01x - 9,03$$

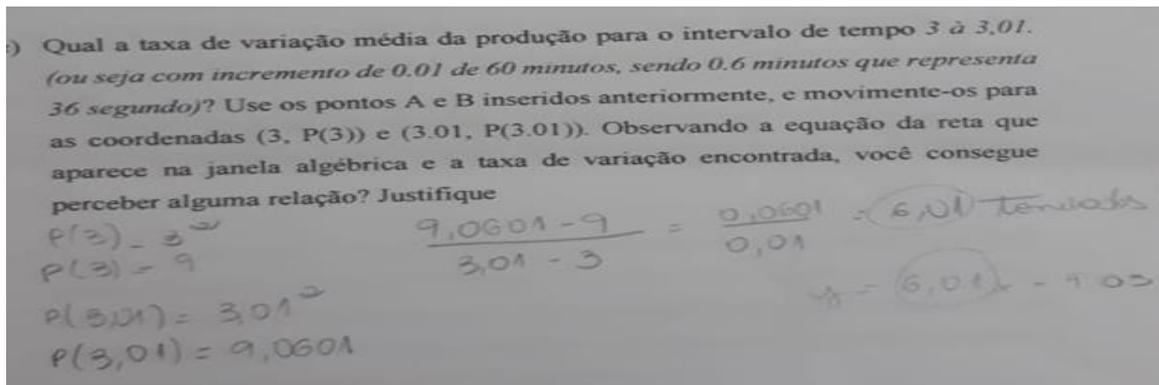
$$TVM = \frac{P(3+h) - P(3)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h}$$

Diagrama de um triângulo de inclinação com pontos 3 e 3,01 no eixo x, e h = 0,01.

Fonte: dados da pesquisa.

Figura 23- anotações de Mylena em relação a questão (e)



Fonte: dados da pesquisa.

Observa-se que Daniel apresentou um registro de limite em suas anotações. Vejamos a seguir as ações de descrição e execução, do ciclo de ações vivenciado por Daniel, e mais adiante o diálogo entre Mylena e a professora. No QR Code a seguir se apresenta a ação de descrição, feita por Daniel.



34

No vídeo acessado pelo QR Code anterior, Daniel fez a descrição alterando os valores das coordenadas (x, y) para (3, 9) e (3,01, 9,06). Ao fazer a alteração, o aplicativo executou e apresentou na tela do *smartphone* a seguinte equação da reta: $y = 6,01x - 9,03$. Já Mylena fez a descrição apenas movimentando os pontos para as coordenadas (3, 9) e (3,01, 9,06), e assim a equação da reta $y = 6,01x - 9,03$ surgiu na janela algébrica do *smartphone* de Mylena.

Agora que já vimos as ações de descrição e execução, dos ciclos de ações vivenciados por Mylena e Daniel, chegou o momento de analisarmos como se deu a interação entre os alunos e a professora.

³⁴ Claro leitor caso seja necessário você poderá acessar o vídeo no link: <https://youtu.be/vMOiqCTCBtw>

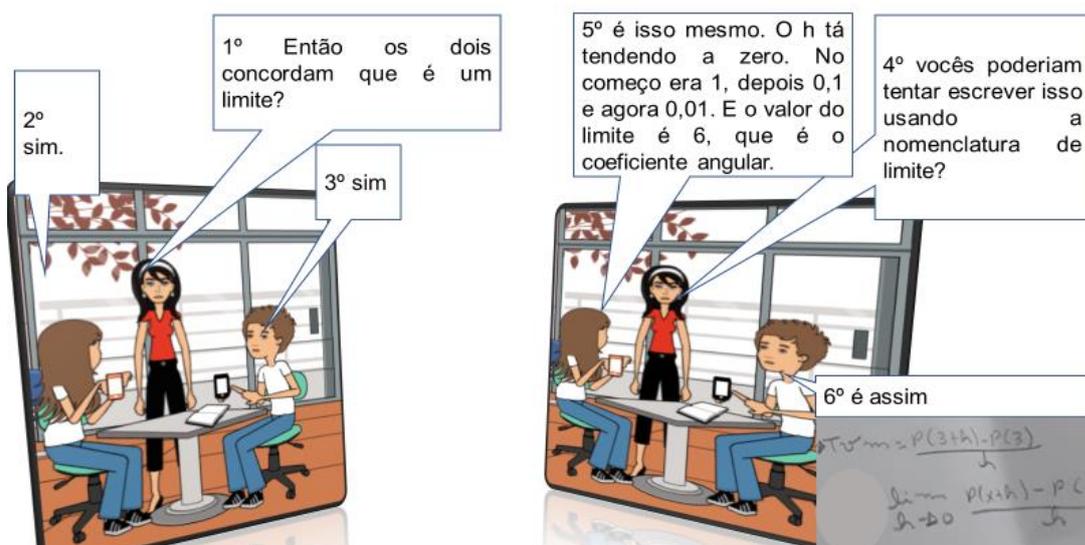


Do diálogo apresentado, podemos observar que Daniel apresentou uma nova hipótese, e buscou a validação dessa hipótese, questionando diretamente a professora: “professora o que a gente está fazendo é o limite?”. A professora então não deu resposta ao aluno, ao invés disso, propôs uma nova situação na qual o aluno podia validar sua hipótese. Além disso, destacamos a ação docente de “fortalecer os laços” entre os integrantes do grupo, ao notar que a hipótese levantada por Daniel era novidade para Mylena. Assim, a professora questionou também a aluna Mylena: “o que você acha disso que o Daniel falou?”. Consideramos que essas ações de questionar um aluno sobre as proposições formuladas por outro aluno, é uma ação que favorece a aprendizagem enriquecendo a dimensão social do ambiente construcionista, uma vez que pode favorecer momentos de interação entre os sujeitos.

Do diálogo anterior ressaltamos também os questionamentos e desafios (em uma perspectiva construcionista) feitos pela professora, que são ações que favoreceram a aprendizagem de Mylena e Daniel. Afirmamos isso ao voltarmos nosso olhar para o ciclo de Mylena, que estava apenas vivenciando uma situação adidática de ação, e, ao interagir com Daniel e com a professora, a aluna vivenciou um momento de reflexão evidenciado pela fala: “*eu nem tinha notado isso. Mas é verdade estamos diminuindo o x* ”.

Agora, ao focarmos no processo de aprendizagem de Daniel, podemos observar que o aluno buscou em seus estudos anteriores sobre limites, possivelmente conhecimentos construídos por ele sobre esse conceito, argumentos para responder o questionamento da professora. Assim, o aluno argumentou: “*Nós estamos fazendo intervalos sempre menores. Se eu não entendi errado, na aula que estudamos limites, estamos fazendo tender a zero a variação do tempo.*”

E assim, a professora continuou a dialogar com Mylena e Daniel...



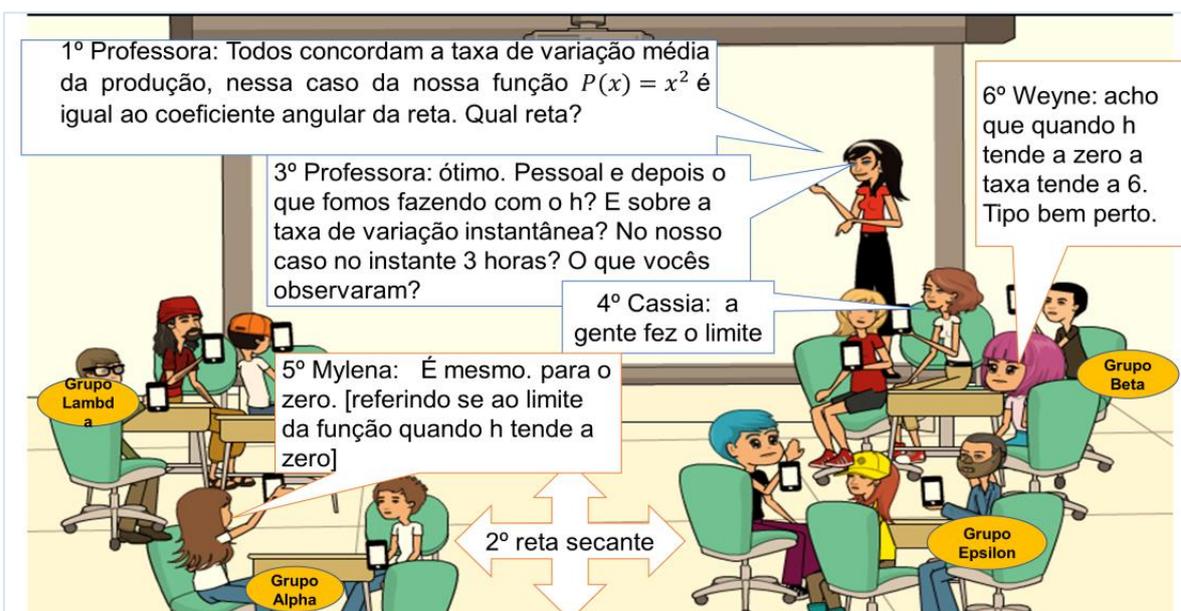
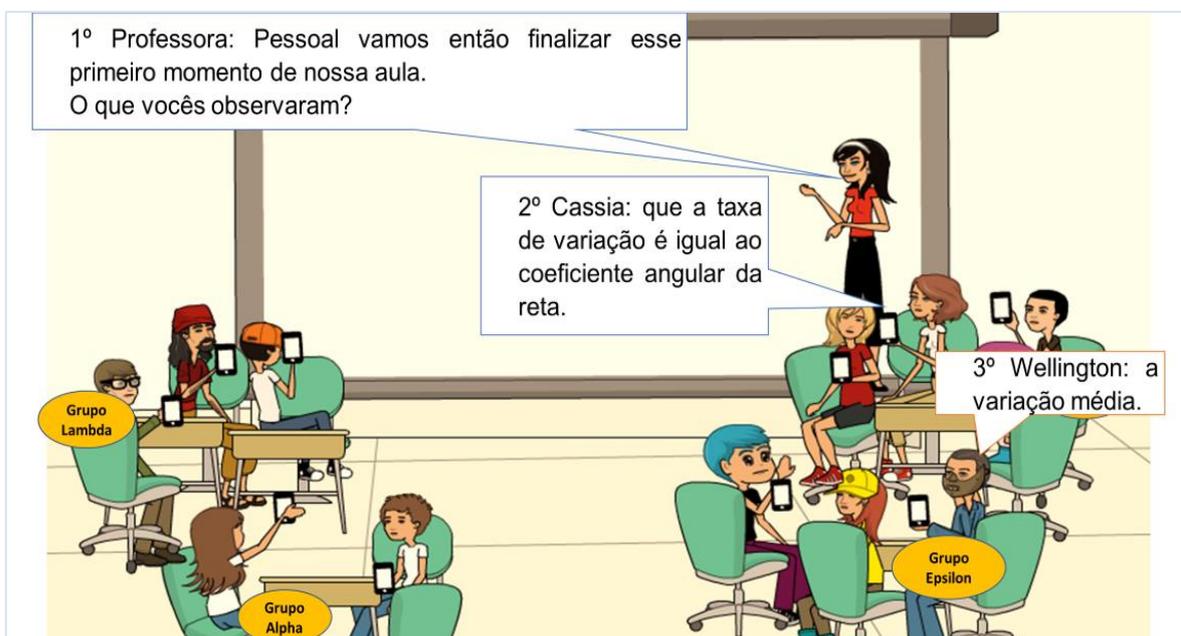
E assim a professora propôs que Daniel e Mylena escrevessem usando o conceito de limites aquilo que eles estavam afirmando. Vale aqui ressaltar que o aluno Daniel fez a escrita, porém, Mylena também explicou com suas palavras as anotações e hipótese levantada por Daniel. Afirmamos isso a partir da fala da aluna: “*O h tá tendendo a zero. No começo era 1, depois 0,1 e agora 0,01. E o valor do limite é 6, que é o coeficiente angular.*” É possível observar que na anotação feita por Daniel não aparece o valor do limite. E Daniel também não menciona isso em áudio. Fato que fez com que tenhamos indícios de que, em meio a interação e desafios propostos pela professora, Mylena pode ter vivenciado uma situação adidática de formulação e validação. Já Daniel apresenta a nomenclatura de limite ao associar o registro escrito com os resultados dos momentos de reflexão vivenciados durante o ciclo de ações.

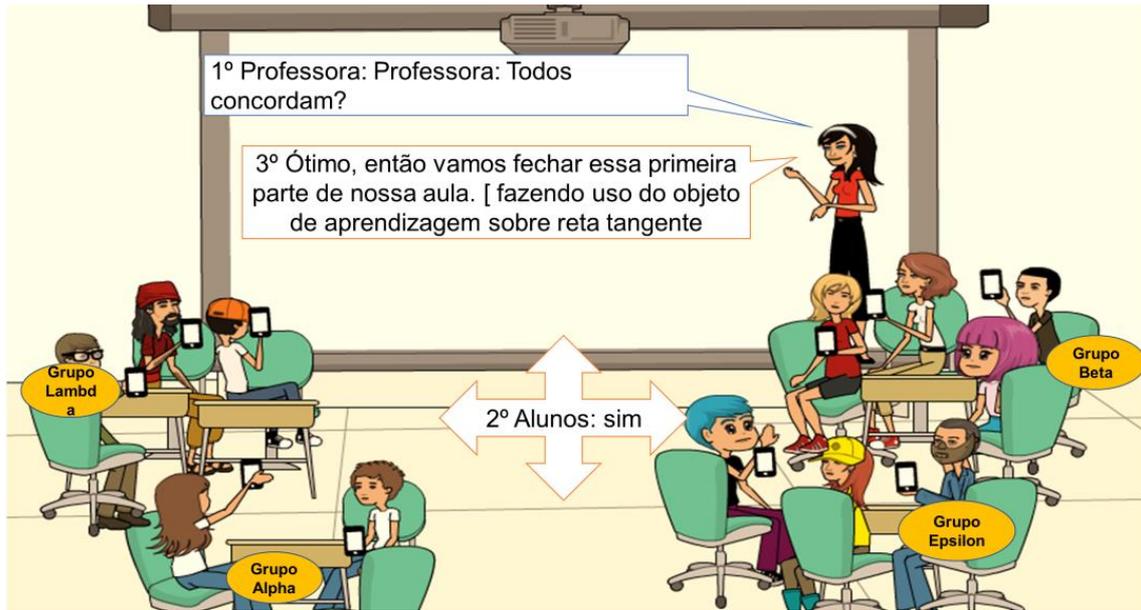
Alguns minutos depois, a professora foi questionada e usando o quadro para registrar as respostas dos alunos, em relação as questões (d) e (e). E assim a professora registrou no quadro o seguinte:

$$TVM \text{ da produção das } 3:00h \text{ às } 3:06h = \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \frac{P(3+0,1) - P(3)}{0,1} = 6,1 \text{ ton/h}$$

$$TVM \text{ da produção das } 3:00h \text{ às } 3h \text{ e } 36 \text{ segundos} = \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = \frac{P(3+0,01) - P(3)}{0,01} = 6,01 \text{ ton/h}$$

E na sequência os alunos Eduardo e Cassia, respectivamente, assumiram o *smartphone* da sala, e fizeram as descrições, seguidas das execuções no/pelo GeoGebra. Após essas investigações em relação à taxa de variação média e o coeficiente angular da reta secante, a professora fez a institucionalização do saber, sempre partindo daquilo que os alunos já sabiam, ou no caso, dos resultados por eles apresentados. E assim a professora concluiu:





Objeto de Aprendizagem criado pela UNESP Disponível em: http://www.calculo.iq.unesp.br/Flash%2002009/Flash-C1/problema_reta_tangente_novo.swf

RETA TANGENTE

Vamos supor que seja dado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Vamos considerar dois pontos distintos **P** e **Q** sobre este gráfico.

1º Professora: Suponha então que tenhamos uma função $y=f(x)$, que no nosso caso era a função produção, $P(x)$. Assim eu posso inserir dois pontos distintos são a curva $f(x)$, ponto **P** e **Q**. Observem ali (referendo se a projeção), quais as coordenadas dos pontos **P** e **Q**?

2º Arthur: **P** é $(a, f(a))$ e **Q** é $(b, f(b))$.

3º Todos concordam com o as coordenadas que o Arthur falou?

Alunos: SIM

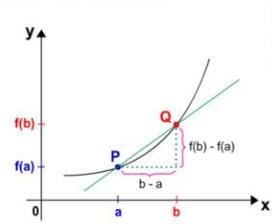
Grupo Alpha

Grupo Lambda

Objeto de Aprendizagem criado pela UNESP Disponível em: http://www.calculo.iq.unesp.br/Flash%202009/Flash-C1/problema_reta_tangente_novo.swf

RETA TANGENTE

Considere a **reta secante** que passa pelos pontos **P** e **Q**.
O coeficiente angular dessa reta é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


1º Professora: Certo! Agora então por dois pontos eu vou construir uma reta secante. E assim terei o coeficiente angular da reta secante:

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
 E nos vimos existe uma relação entre o coeficiente angular da reta secante com a taxa de variação média da produção na atividade que nós investigamos. Certo? Qual é mesmo essa relação?

3º Eduardo: a taxa é igual ao coeficiente angular.

2º Mylena: É igual

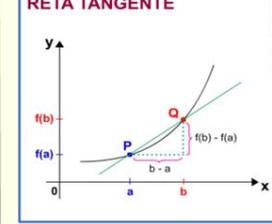
Grupo Lambda

Grupo Alpha

Objeto de Aprendizagem criado pela UNESP Disponível em: http://www.calculo.iq.unesp.br/Flash%202009/Flash-C1/problema_reta_tangente_novo.swf

RETA TANGENTE

Considere a **reta secante** que passa pelos pontos **P** e **Q**.
O coeficiente angular dessa reta é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


1º Professora: Ok! E quando estávamos investigando a taxa de variação instantânea o que fizemos? Observem no nesse objeto de aprendizagem [referindo-se a projeção na parede] e na investigação que vocês fizeram com o problema da produção. O que fizemos?

2º Bruno: O limite.

4º Mylena: eu acho que a gente diminuiu bastante, no caso ali o P perto do Q. Não pera! [não espera]. É ao contrário, o Q, perto do P, o Q se aproximando do que P, e fazendo o limite.

3º Lucilene: foi diminuindo o de 3,1, para 3,01... sempre menor.

5º Wellington: vai ser o limite e também a taxa instantânea.

6º Arthur: isso o limite da função quando h tende a zero, ali é b-a [referindo-se a distancia b-a na projeção do objeto de aprendizagem]

Grupo Lambda

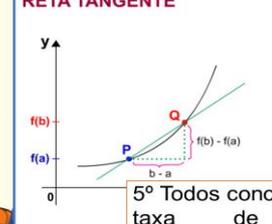
Grupo Alpha

Grupo Epsilon

Objeto de Aprendizagem criado pela UNESP Disponível em: http://www.calculo.iq.unesp.br/Flash%202009/Flash-C1/problema_reta_tangente_novo.swf

RETA TANGENTE

Considere a **reta secante** que passa pelos pontos **P** e **Q**.
O coeficiente angular dessa reta é

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$


1º Professora: Ótimo. Então vejam essa aproximação. E nesse caso, dizemos que se o limite $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ existe então obtemos a reta tangente ao gráfico, no ponto P, e M é o coeficiente angular da reta tangente. E voltando ao nosso exemplo o coeficiente angular da reta tangente possui relação com o que?

5º Todos concordam que a taxa de variação instantânea é igual ao coeficiente angular da reta tangente?

4º Wellington: Instantânea

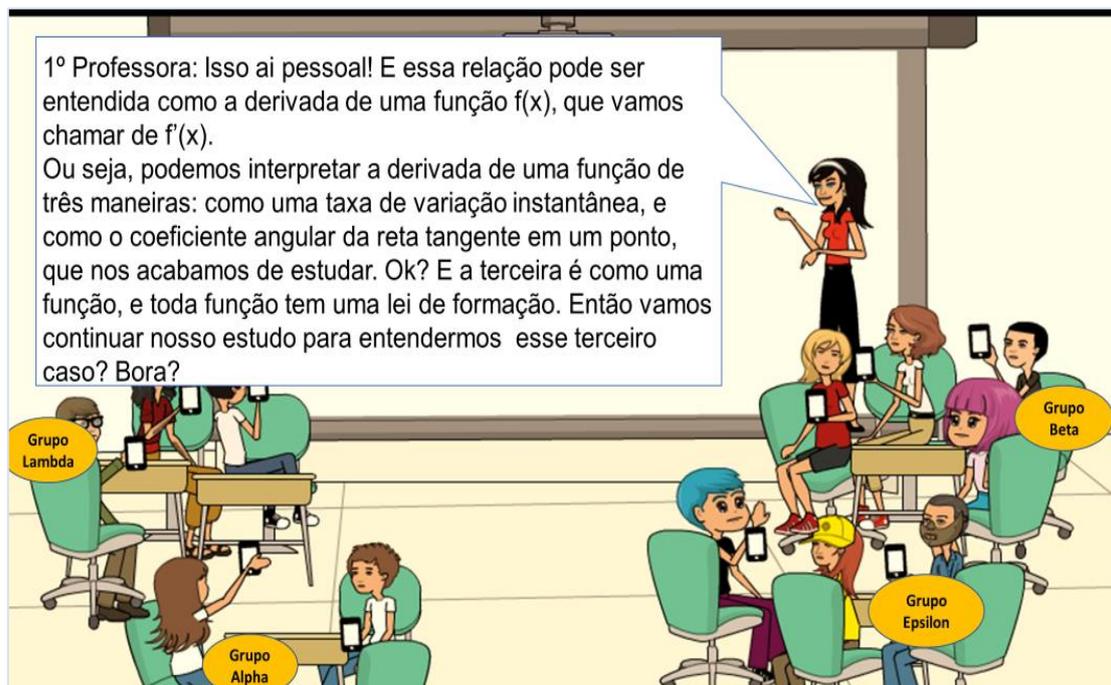
3º Mylena: Instantânea

2º Lucilene: taxa de variação instantânea

6º Alunos: sim

Grupo Lambda

Grupo Alpha



Assim fechou-se a primeira parte da aula, que tinha como objetivo de aprendizagem estabelecer a relação entre a taxa de variação instantânea com a inclinação da reta tangente a uma curva, em um ponto P qualquer.

Parte-se agora para a análise de um segundo momento da aula, cujo objetivo de aprendizagem foi: compreender que se tomarmos diferentes pontos na curva, teremos diferentes retas tangentes, com diferentes inclinações. A partir dessa compreensão, tem-se o objetivo de discutir a derivada como uma função, estabelecendo assim uma lei de formação para a função derivada.

Para isso, propusemos o seguinte problema:

Problema 2: Seja $f(x) = x^2$, plote-a no GeoGebra insira um ponto A sobre a curva e posteriormente insira uma reta tangente a curva $f(x)$, passando por A .

- a) Movimentando a reta tangente sobre a curva, e observando a inclinação da reta tangente $f'(x)$, preencha a seguinte tabela.

| | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | | | | | | | |

- b) Analisando os valores obtidos, determine a lei de formação para a função $f'(x)$, em outras palavras, escreva a derivada como uma função de x .

O problema era composto de duas questões (a) e (b), no planejamento era previsto um tempo para que os alunos fizessem a letra (a) e (b), utilizando o Geogebra mobile, e posteriormente a partir dos resultados encontrados nas investigações individuais e dos grupos, a professora discutiria junto com todos da turma as questões, para institucionalização desse saber.

Para analisarmos o desenvolvimento dessa atividade em um dos grupos, optamos por fazer a análise da interação e do ciclo de ações vivenciado pelos integrantes do grupo beta, formado pelos alunos Nilson, Cassia, Weyne e Karen³⁵. Essa escolha se deu por um olhar sobre as produções dos grupos, e pelo envolvimento dos integrantes. Nesse dia, Weyne e Cassia fizeram juntas a atividade, usando apenas um *smartphone*, devido a problemas técnicos do *smartphone* usado por Weyne.

Apresentamos a seguir, os QR Codes dos vídeos das alunas Weyne e Cassia (qr code à esquerda) e do aluno Nilson (QR Code a direita), além de um recorte do diálogo entre os integrantes do grupo.



Cassia e Weyne, com apenas um *smartphone*, fizeram a descrição plotando a $f(x)$ e inserindo um ponto A sobre a curva, e uma reta tangente passando por A. Nilson fez o mesmo. Cassia, num primeiro momento confundiu o coeficiente angular com o valor da ordenada y .

³⁵ Karen era integrante do grupo, estava presente naquela aula, porém, ela se ausentou alguns minutos antes do término dessa aula, por esse motivo não temos dados sobre o ciclo de ações por ela vivenciado nesta atividade.

Porém, Weyne não concordou com Cassia e pontuou: “é igual a inclinação, é aqui que tem que olhar.” Isso nos dá indícios de que Weyne e Cassia estão vivenciando uma reflexão e abstração empírica, ao tirar informações daquilo que é observável, ou seja, que aparece na tela do *smartphone*. E pelo ciclo de ações (vídeo do qr code), é possível observar que as alunas vivenciam uma situação adidática de ação, ao simularem localizações diversas para o ponto A. E o diálogo continua conforme recorte a seguir:



Desse momento de interação, destacamos que Cassia ainda apresentava dificuldade em relação a associação das coordenadas (x, y) de um ponto com a função, evidenciado pela fala: “nossa o 4 tá longe, nunca chega”. O que nos dá indícios de que Cassia estava vivenciando momentos de reflexão, e abstração empírica, ou seja, todos os valores foram resultados, do movimento do ponto, cujas coordenadas eram observáveis na janela algébrica do aplicativo ou no que se observava na representação gráfica, evidenciado na fala destacada acima.

Já a aluna Weyne, fez outras associações com o conhecimento em jogo que não estavam no observável, que são resultados de sua reflexão, abstrações não mais do nível empírico. Afirmamos isso, a partir das seguintes afirmações: “vai estar no 16, porque é o 4 ao quadrado”, e como aparece no diálogo que segue, ela afirmou: “é mesmo, o dois cai e diminui um”. Weyne fez uma associação, vivenciou coordenações internas, com uma propriedade aprendida em outro momento.

Vejamos a sequência do diálogo...



Com a atividade proposta, os alunos puderam experienciar uma forma de aprender uma propriedade de derivada, no caso, sendo a seguinte propriedade:

$$\text{Se } f(x) = x^n, \text{ então } f'(x) = nx^{n-1}$$

Cassia e Weyne foram fazendo o movimento do ponto e observando a tela, janela algébrica. Nilson, ao chegar no ponto (4, 16), optou por parar, conforme pode ser observado em seu vídeo. Isso porque segundo ele, estava clara a regularidade, ou seja, a lei de formação para a função derivada. E do diálogo, podemos concluir que o aluno pontuou às colegas de grupo: “Nossa agora que caiu a ficha é o $2x$.” Essa afirmação nos dá indícios de que o aluno vivenciou uma situação adidática de formulação e validação, validação usando o GeoGebra.

Desse momento da aula destacamos as dimensões social, semântica e sintática. Social, devido a interação entre os alunos Weyne, Cassia e Nilson, que oportunizou momentos de aprendizagem, e um espaço para exposição do resultado observado por cada um deles. Isso evidenciado nas falas de Nilson, Cassia e Weyne respectivamente: “Nossa agora que caiu a

ficha é o $2x$ ". "é mesmo é o dobro", "Nossa é a derivada, do x^2 ", "é mesmo o dois cai e diminui um" [referindo-se a regra associada a derivada de x^n].

Assim, o espaço da aulas se constituiu em um espaço de perguntas, experimentações, de respostas, em que o erro é conhecimento. E isso demanda a existência do outro, e a abertura em aprender com o outro, e que ressaltamos que não basta a organização dos alunos em grupos, para o alcance da dimensão social de um ambiente construcionista. É importante que as atividades sejam provocativas para o diálogo, e uma regra essencial é que o grupo tenha abertura para buscar o entendimento mútuo.

Em relação à dimensão semântica, pontuamos que a investigação proposta, com o uso do GeoGebra, oportunizou aos alunos construir significados em relação ao objeto matemático: derivada. Weyne ressaltou: "é mesmo, o dois cai e diminui um". Essa "regra" tinha um significado para Weyne, talvez fosse apenas uma regra, e não temos indícios de como foi seu processo de aprendizagem em momentos anteriores. Porém, o que podemos afirmar, é que esse momento de investigação, fez com que a aluna associasse uma regra já aprendida à uma interpretação da derivada. Interpretação essa, que carrega uma característica dinâmica, uma vez que os coeficientes angulares observados foram resultados de movimentos de pontos feito pela aluna (juntamente com a aluna Cassia).

E esse é um conceito interessante ao pensarmos no estudo de derivadas, pois o objeto matemático, derivadas, tem três interpretações, que oportunizam diferentes significados. E nessa aula buscou-se relacionar essas interpretações, evidenciando em cada uma delas os diferentes significados. Note que a função envolvida na Atividade 1, referente à situação de produção, é a mesma envolvida na Atividade 2, porém com significados diferentes.

E em relação à dimensão sintática de uma ambiente construcionista, que, por sua vez, diz respeito a manipulação de elementos do ambiente, para a construção de conhecimento pelo aluno, pontuamos que o uso do GeoGebra mobile oportunizou aos alunos Weyne, Cassia e Nilson, por exemplo, investigarem diferentes inclinações para a reta tangente, para associarem essas diferentes inclinações com a função derivada, $f'(x) = 2x$.

Até o momento analisamos como se deu o desenvolvimento dessa parte de estudo de derivadas e foi possível identificar algumas ações que favoreceram à aprendizagem no espaço presencial, com uso de smartphone. Agora partimos para a finalização dessa aula, com a institucionalização do saber. Vejamos um recorte do diálogo neste momento da aula:

1ª Professora: E aí pessoal qual grupo gostaria de assumir o celular para fazer a plotagem e apresentar as considerações do grupo [professora registra no quadro a tabela]?

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | | | | | | |

3ª Professora: pessoal, ótimo Cassia fez a plotagem, agora me digam qual o valor encontrado para o coeficiente angular da reta tangente em $x=1$.

2ª Cassia: eu!

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

Alunos: 2

1ª Professora: agora me digam qual o valor encontrado para o coeficiente angular da reta tangente em $x=2$.

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | | | | | |

3ª Professora: quem gostaria de fazer no geogebra?

4ª Daniel: deixa que o pai aqui faz!

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

2ª Alunos: 4

1ª Professora: vai passando pessoal [referindo-se ao celular] para que todos possam mostrar seus resultados. Continuando... quando $x=3$?

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | 6 | | | | |

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

2º Alunos: 6

Mylena faz a descrição com o smartfone da turma

$f(x) = x^2$
 A = Ponto(f)
 $\rightarrow (3, 9)$
 g : Tangente(A, f)
 $\rightarrow y = 6x - 9$

1ª Professora: quando $x=4$?

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | 6 | 8 | | | |

Grupo Lambda

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

2º Alunos: 8

Bruno faz a descrição com o smartfone da turma

$f(x) = x^2$
 A = Ponto(f)
 $\rightarrow (4, 16)$
 g : Tangente(A, f)
 $\rightarrow y = 8x - 16$

1ª Professora: quando $x=5$?

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|---|---|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | | |

Arthur faz a descrição com o smartphone da turma

2º Alunos: 10

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

Grupo Lambda

$f(x) = x^2$

A = Ponto(f)

$\rightarrow (5, 25)$

g : Tangente(A, f)

$\rightarrow y = 10x - 25$

1ª Professora: quando $x=6$?

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|---|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | |

Eduardo faz a descrição com o smartphone da turma

2º Alunos: 12

Grupo Alpha

Grupo Beta

Grupo Epsilon

Grupo Lambda

$f(x) = x^2$

A = Ponto(f)

$\rightarrow (6, 36)$

g : Tangente(A, f)

$\rightarrow y = 12x - 36$

1ª Professora: ultimo, quando x=7?

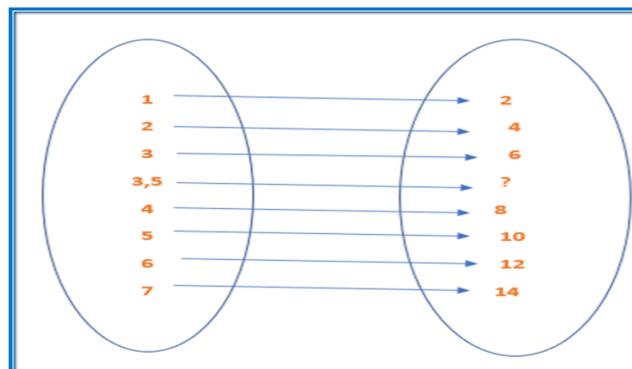
| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

2º Alunos: 12

Lucilene faz a descrição com o smartphone da turma.

1ª Professora: pessoal ótimo temos então a tabela preenchida, posso representar isso por meio de diagramas também. Vamos fazer aqui no quadro [nesse momento a professora representa no quadro]

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|
| F(x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F'(x) | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |



Note que no registro anterior aparece $x=3,5$ que é um valor que não está presente na tabela. Isso porque a professora optou por inserir esse valor de x , para questionar aos alunos, quanto à lei de formação para a função derivada, conforme diálogo apresentado a seguir.

3º Professora: analisando então a tabela e também o diagrama que construímos, qual a lei de formação dessa função que relaciona: 1 com 2, 2 com o 4, o 3 com o 6 e assim sucessivamente?

1º Professora: se $x=3,5$, qual o valor do coeficiente angular da reta tangente?

4º Arthur: é o dobro

2º Alunos: 7

6º Cassia: é isso mesmo.

5º Nilson: sempre multiplica o x por 2.

7º Weyne: o dois cai e diminui 1 do expoente.

| | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|----|----|----|
| $F(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $F'(x)$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

1º Professora: E como eu posso escrever isso como uma função?

4º Professora: todos concordam? E os demais?

5º Bruno: $2x$

6º Arthur: $2x$

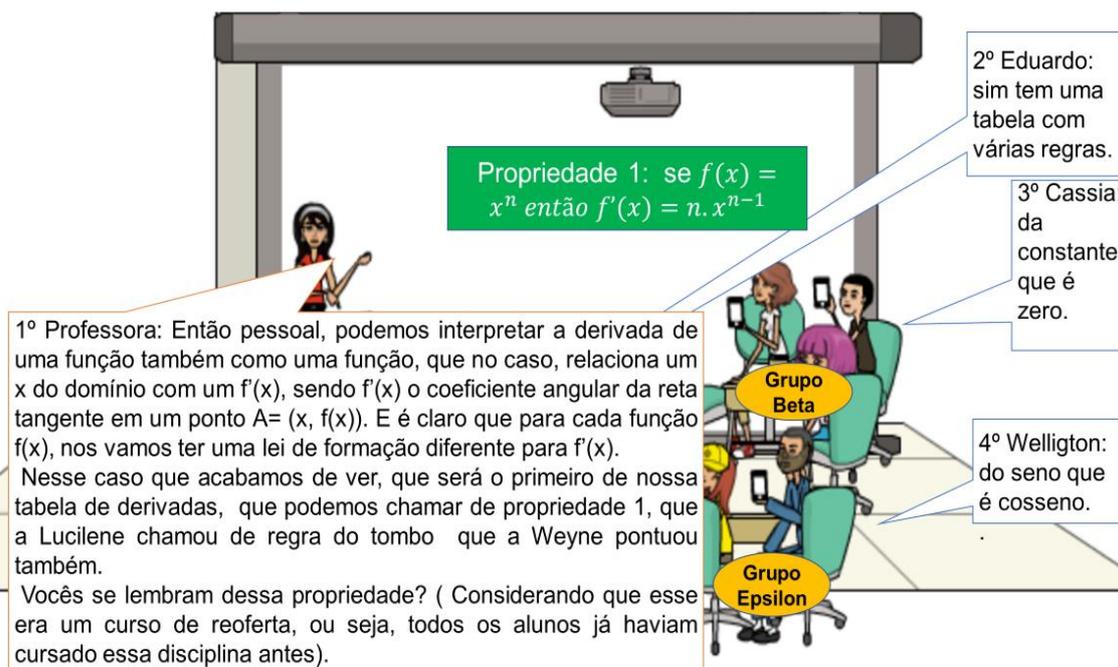
2º Mylena: $2x$

7º Weyne: o $2x$, como eu disse o dois cai na frente do x e diminui um do expoente.

3º Welligton: $2x$.

8º Lucilene: nossa isso é a derivada, agora sim, faz sentido, por isso que aplica a regra do tombo na função [referindo-se a regra: se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$]

| | | | | | | | |
|---------|---|---|---|---|----|----|----|
| $F(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $F'(x)$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |



Dessa última parte da aula, pontuamos que o uso do *smartphone*, mais especificamente, do *smartphone* integrado ao espelhamento de tela, foi um ação que possibilitou que a maioria dos alunos apresentasse aos demais o seu resultado. Assim, cada aluno fez sua descrição (movendo o ponto), e essa situação foi propícia para aprendizagem, pois deu espaço para o aluno apresentar, falar e expor. Em relação ao ambiente construcionista, Maltempi (2005, p.8) pontua que “o aprendizado deve ser um processo ativo, em que os aprendizes ‘colocam a mão na massa’ (*hands-on*) no desenvolvimento de projetos, em vez de ficarem sentados atentos à fala do professor”.

E ainda, ao voltarmos nosso olhar para a institucionalização realizada, essa parte do que os alunos apresentam, evidenciam, e de alguma forma, em conjunto, realizam a institucionalização, invertendo a ação de “ficarem sentados atentos à fala do professor”. Invertendo, no sentido de que a fala do professor só se constitui, a partir da fala dos alunos. Em outras palavras, “o professor fica atento à fala dos alunos”. E assim, temos uma ação que enriquece a dimensão social e semântica, do construcionista do ambiente de aprendizagem, que se estabelece na relação entre professora e alunos. Enriquece, pois ao oportunizar espaços para o aluno discutir, apresentar, dialogar, favorece o sentimento de *empowerment* (satisfação). Assim, trazemos falas das entrevistas (algumas já apresentadas anteriormente) com alguns alunos que evidenciam o quanto essa “dinâmica invertida” favoreceu a aprendizagem deles em um ambiente construcionista, e esse sentimento de serem capazes de aprender. Vamos iniciar retomando as falas da entrevista de Mylena.

Ai nas primeiras aulas, foi difícil essa mudança. Não a parte de fazer no celular, não tenho problemas com o celular porque o geogebra é facinho [fácil], mas a parte de mostrar para os outros e para a senhora, dava vergonha.



Mylena pontuou nesta entrevista a dificuldade em estar aberta a se expor. Isso porque, conforme a aluna menciona, ela estava acostumada com um outro cenário de sala de aula. Da primeira vez que cursou a disciplina, a aluna não faltava em aula e sempre estava “ouvindo” o professor. Isso configura um papel passivo do aluno diante do seu processo de aprendizagem. E em nossa proposta de ambiente construcionista, foi oportunizado um papel ativo, no qual o aluno tinha espaço para falar, produzir, expor suas dúvidas e certezas. Um espaço de interação em que os aprendizes colocam a mão na massa.

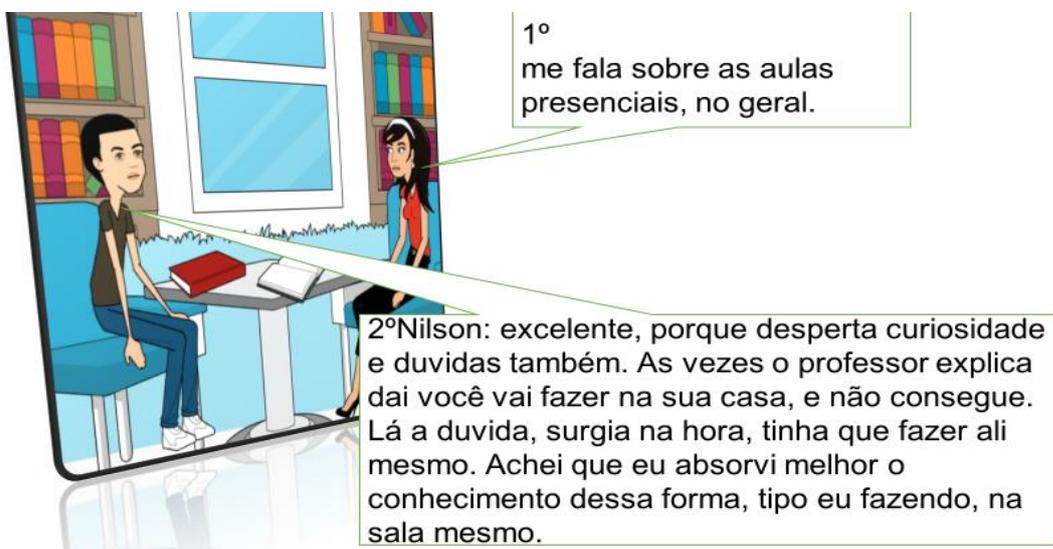
não sabia se estava certo. Se ia perder ponto, se falasse alguma bobeira. Mas depois eu, fiquei “sem vergonha” [risos]. Sempre eu queria fazer e mostrar o do meu grupo. Ficar em grupo foi uma boa também, porque eu, e o Daniel, se entende muito bem, e ele me ajudou muito. Sempre que eu tinha dúvida eu perguntava para ele. E dava mais segurança, na hora de mostrar para o resto, porque não era só eu que achava aquilo, o Daniel também.



Dessa fala da entrevista de Mylena destacamos a dimensão social, evidenciado na importância do trabalho em grupo. A aluna afirmou: “ele me ajudou muito”. E a segurança que sentia no momento posterior de institucionalização, pois os resultados de suas investigações não eram individuais, eram resultados de diálogo, de entendimento mútuo. Em

outras palavras, o momento de institucionalização não foi exclusivamente da professora! Foi da professora e dos alunos; foi um momento de explicitar ao outro o que foi produzido por cada aprendiz, e as ações da professora se constituíram a partir das produções apresentadas.

Em continuidade apresentamos um recorte da entrevista de Nilson.



Nilson: desse jeito [referindo-se a dinâmica de aulas presenciais] estimula a gente a fazer. Como eu disse cada um tem um jeito de aprender, tem gente que consegue aprender só ouvindo, eu não. Eu preciso gosto de fazer. [...] e sempre tinha as atividades para a gente discutir e resolver, isso é bem mais fácil para aprender.



Da entrevista de Nilson destacamos mais uma vez, o papel ativo do aluno. Ou seja, alunos produtivos, que colocam a “mão na massa”, investigando, formulando hipóteses, refletindo, ou seja, construindo e reconstruindo conhecimento. Papert (2008, p. 13) ressalta habilidades importantes para o desenvolvimento do aluno: “a capacidade de aprender novas habilidades, assimilar novos conceitos, avaliar novas situações, lidar com o inesperado”.

[...] o aprendiz deve processar a informação que obtém interagindo com o mundo dos objetos e das pessoas. Essa interação coloca o aprendiz diante de problemas e situações que devem ser resolvidos e, para tanto, é necessário buscar certas informações. No entanto, para aplicar estas informações é necessário a interpretação e o processamento das mesmas, o que implica a atribuição de significado e, portanto, de construção de novos conhecimentos. (VALENTE, 2005, p.2).



Caro leitor, agora vamos retomar algumas falas e acrescentar outras do aluno Daniel? Com a palavra, Daniel!

Daniel: as vezes acontece na aula de o professor estar falando, e eu não entendo nada, nem tenho dúvidas porque não estou entendendo nada. Mas ai é só ficar de boa que a aula acaba. Mas ai na aula não dava para ficar de boa, tinha que fazer. É bom porque ai aprende mesmo.



essa parte de derivada, aprendi muito e a gente vê isso em outras disciplinas. Esses dias eu tava na aula de Física 2, e eu sento atrás da Mylena sempre, dai o professor disse assim, a gente vai derivar isso aqui. Ai depois a Mylena virou para trás e toda felizona disse: entendi!!!! E eu também. E isso é super porque a gente não aguentava mais ficar moscando em Física 2.



Do recorte da entrevista de Daniel destacamos o sentimento de *empowerment* ao compreender um conceito e outros espaços. E destacamos a **dimensão pragmática**, que está relacionada à utilização ou aplicabilidade de conceitos explorados, no momento atual em que vive o aluno, não apenas em possibilidades futuras. Conforme Papert (1986) pontua sobre a importância de aprender algo para o agora e não para um future distante. Em outras palavras,

não se passou anos para esses alunos usarem derivadas, foi naquele momento da disciplina, e certamente esse conceito era fundamental para se compreender os conceitos da Física que estavam estudando.

Dando continuidade apresentamos então mais um recorte de uma entrevista, agora dos alunos Wellington e Lucilene.



1º essa é a função [referindo-se a interpretação de derivada como função]. E essa ideia eu não tinha entendido da outra vez que fiz cálculo. Nem essa, nem da taxa de variação instantânea e nem da reta. A taxa da outra vez eu lembro apenas que usávamos para calcular a velocidade. Para mim derivada era só aquela tabela, que nem.



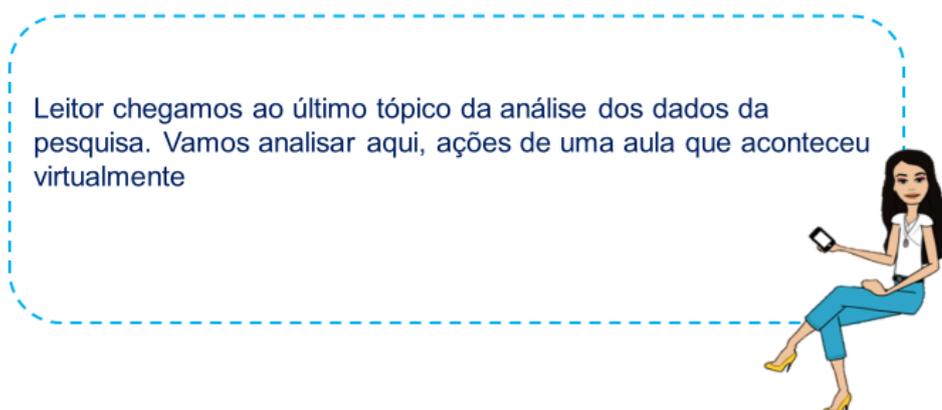
2º- nem eu tinha entendido. Confesso que ainda tenho dificuldade para entender a taxa, mas a ideia da função e da reta tangente eu entendi bem. outro dia tava olhando as xerox que tinha do semestre passado, e achei uma parte do guidorizzi, do gráfico com a reta tangente, e o delta x e delta y. Pensei, nossa com o geogebra fica muito mais fácil entender.



Da entrevista de Wellington e Lucilene pontuamos que o uso do aplicativo Geogebra mobile, articulado com a proposta de investigações matemáticas, foi uma ação que favoreceu à compreensão da derivada como inclinação da reta tangente à uma curva. E consideramos isso, pela característica dinâmica que o software possibilita, conforme pontua Lucilene e Wellington, respectivamente: “com o geogebra fica muito mais fácil” e “a gente fez também, mas com o geogebra”.

Finalizamos assim essa parte de análise do encontro presencial, e concluímos que a proposta de atividades investigativas com o uso do GeoGebra, a organização em grupo, a institucionalização do saber com uso de espelhamento de tela, e os questionamentos e desafios propostos pela professora, foram ações que identificamos que favoreceram a aprendizagem de alguns alunos, e foram determinantes da vivência e constituição do ambiente construcionista, em espaço presencial, na disciplina de Matemática I com essa turma.

4.3 AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE *SMARTPHONE*: DIALOGANDO SOBRE UMA AULA A DISTÂNCIA



Neste capítulo faremos a análise de ações desenvolvidas em uma aula a distância, realizada em espaços virtuais que se constituíram em ambientes virtuais de aprendizagem da disciplina, considerando a abordagem EJuVAS. Para isso optou-se por analisar ações a distância da aula 11, Agenda 3 da disciplina de Matemática I, em que se realizou um estudo sobre derivadas de função, em continuidade aos estudos realizados na aula 10, que foi presencial. Ao analisarmos as interações a partir da abordagem EJuVAS, temos por objetivo identificar ações que favoreceram a aprendizagem de conceitos de Cálculo em espaços virtuais da disciplina.

A primeira aula sobre o estudo de derivadas foi realizada conforme discutido e analisado no subcapítulo anterior, na aula 10. E, naquele dia, ao final da aula presencial, iniciou-se o desenvolvimento da aula 11, a distância, a partir da proposta da Agenda 3, com uso de vídeos, livro digital, aplicativo do GeoGebra. As atividades dos alunos se constituíram por produção de vídeos e estudos e discussões no ambiente do *WhatsApp*.

Iniciamos a discussão da aula 11 com a apresentação do detalhamento da Agenda 3. No QR-Code apresentado temos acesso à Agenda 3 publicada no espaço virtual do GeoGebra, em seguida, apresentamos a descrição da mesma, em formato de documento do editor de texto Word.



Disponível em: <<https://youtu.be/OHi7owgHqcU>>

5. Agora você já viu que a derivada pode ser interpretada também como um limite, e decorre desse limite algumas propriedades, como por exemplo, a derivada de uma função constante e a derivada da soma de funções. Leia o material seguinte, pois ele aborda algumas dessas propriedades.

6- Agora que você já viu os vídeos, o simulador do GeoGebra e o material didático anterior, participe do fórum (25/10 à 29/10) no grupo do WhatsApp, no mínimo três postagem em dias diferentes.

7-Realize a Tarefa 1. Tarefa 1: produza um vídeo (em duplas ou individual) de no máximo 3 minutos, falando sobre compreensão que você(s) tiveram sobre derivadas. No vídeo poderá dar exemplos, explicar e/ou expor dúvidas, certezas e/ou propor questões aos demais (que ainda não tenham ficado claras para a dupla). Usem a criatividade! Após a gravação envie o vídeo para o grupo do WhatsApp (após fechamento da primeira discussão no fórum – dia 29/10). A partir da postagem dos vídeos, todos devem visualizar e discutir as produções.

Obs: O conteúdo do vídeo será avaliado de zero à três e o fórum como um todo será avaliado com os seguintes critérios: ***se posicionou diante das questões da professora e pontuações feitas pelos colegas e professora em relação ao estudo proposto. (4,0). ***assistiu os vídeos dos demais e fez pontuações importantes sobre o estudo de derivadas (2,0); ***se posicionou diante das pontuações feitas pelos demais, em relação ao seu vídeo (1,0).

8. Não esqueça de enviar o vídeo e discutir no grupo. Continuaremos nossa conversa no WhatsApp e nos vemos presencialmente no dia 31/10. Abraços, Professoras Vanessa e Suely.

Note que essa agenda se constitui uma articulação entre o espaço virtual e o presencial, uma vez que retoma e amplia informações que foram estudadas durante a aula 10, realizada presencialmente.

Articular processo de ensino e aprendizagem do espaço presencial com os do espaço virtual é o que caracteriza para nós a proposta de uma Educação Bimodal em uma disciplina e/ou curso. O que se busca é um movimento único na disciplina, articulando diferentes espaços de aprendizagem, buscando explorar as potencialidades de cada, conforme pontua Scherer (2005).

No caso do estudo sobre Derivadas de funções, na disciplina, optamos por iniciar o estudo presencialmente, explorando toda parte de taxa de variação instantânea e inclinação da reta tangente, o uso de simbologia, a interpretação do conceito de derivada. Assim, queríamos oportunizar que o aluno pudesse compreender que a tabela de derivada-

normalmente apresentada ao aluno como uma lista de fórmulas- decorre da interpretação das derivadas como a inclinação da reta tangente à curva.

E, partindo desse encontro presencial, na Agenda 6, da aula seguinte, a distância, iniciamos com uma breve videoaula, para que o aluno tivesse a oportunidade de compreender a parte do coeficiente angular da reta. Na sequência da aula a distância, o aluno deveria usar um simulador, criado a partir da plataforma GeoGebra. Com o simulador, os alunos poderiam movimentar a reta tangente e observar o gráfico da função derivada que aos poucos ia surgindo. Esse simulador traz a dinâmica entre dois conceitos importantes para o estudo de Derivadas: o conceito de reta tangente articulado ao conceito de derivada como uma função (representação gráfica). E essa articulação em apresentar em um mesmo aplicativo, os dois conceitos, possibilitou momentos de desequilíbrios cognitivos e reflexão, que serão analisados ao longo desse subcapítulo.

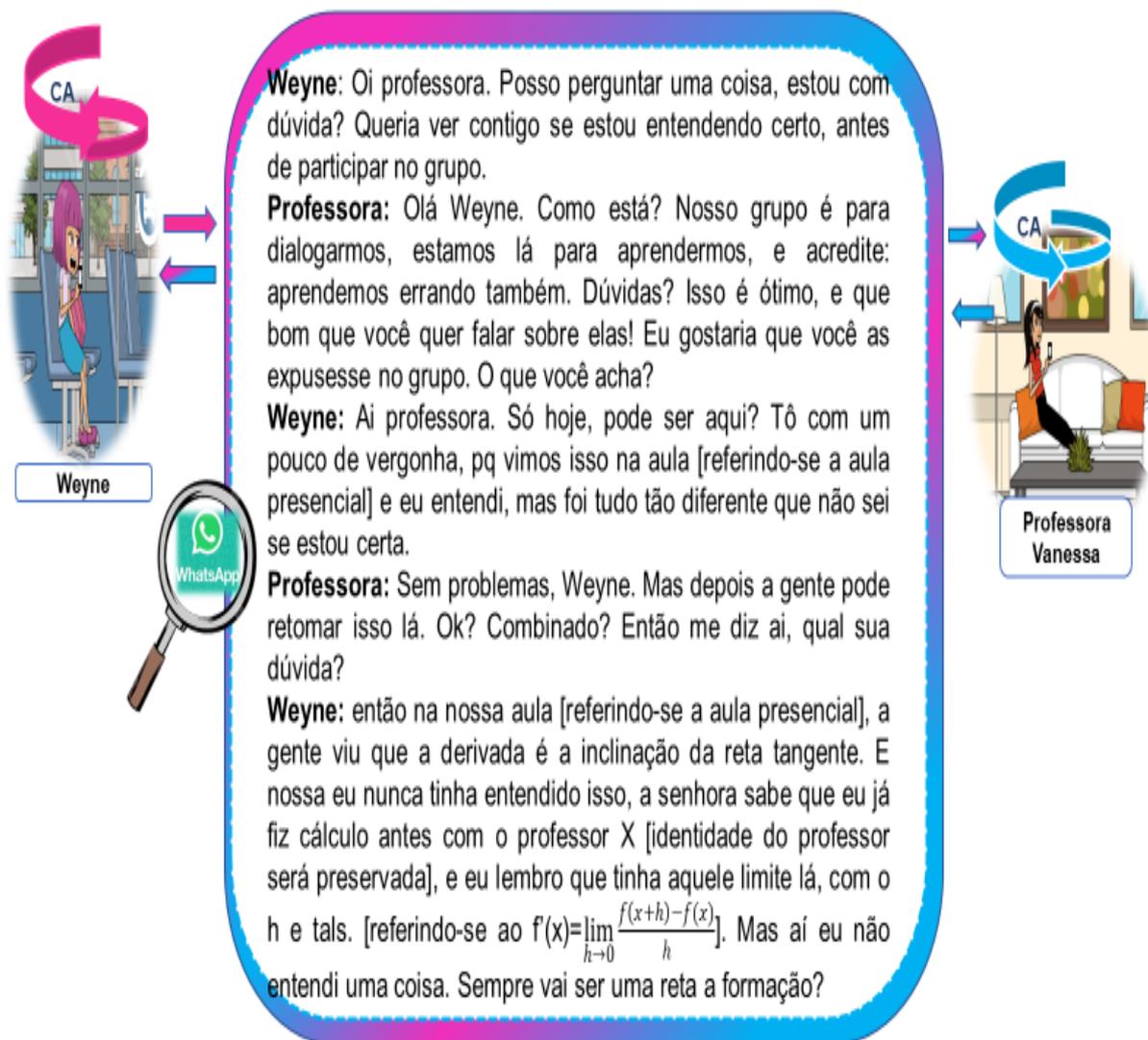
Nesse momento da análise vamos focar apenas nas contribuições do uso desse simulador na aprendizagem dos alunos, articulado ao registro no ambiente do WhatsApp, considerando os pressupostos teóricos do “Estar Junto Virtual Ampliado com *smartphone* (EJuVAS)”.

Iniciaremos com um diálogo entre professora e aluna no espaço do WhatsApp, não no espaço do grupo, mas no espaço privado, pois a aluna Weyne escolheu esse espaço para expor suas dúvidas e certezas sobre Derivadas. Incentivamos durante a disciplina, de que o diálogo ocorresse no espaço do grupo, afinal aquele era um espaço de aprendizagem, porém, alguns alunos entraram em contato com a professora inicialmente no espaço privado do aplicativo. Talvez por se sentirem mais à vontade, afinal, estar aberto a expor suas dúvidas, não é algo fácil, pois “[...] se o sujeito não está aberto ao encontro com o outro, a se expor, a expor as suas proposições, ele não possibilita que o outro aprenda com ele” (SCHERER, 2005, p.106).

Naquele momento ainda era importante compreender que talvez os alunos não estivessem preparados para expor suas dúvidas ao grupo da disciplina, e que o mais importante é que Weyne, no caso, estava querendo dialogar sobre suas produções. É importante também lembrar que em um cenário de aula presencial de Cálculo, o que costumamos observar em muitas aulas são alunos em silêncio e a voz que mais ecoa é a do professor. Conforme afirma Morelatti (2001, p.22) [...] “nas salas de aula de Cálculo Diferencial e Integral, a metodologia usada pela maioria dos professores prioriza exclusivamente a aula expositiva, centrada na fala do professor, com conteúdos apresentados como prontos e incontestáveis”.

Em nossa proposta de Educação Bimodal, buscamos inverter esse papel, tanto no espaço presencial, como no espaço virtual. E, com essa inversão, buscamos incentivar que os alunos falassem, expusessem suas dúvidas, certezas, sem medo de errar, pois o erro é conhecimento. Por esse motivo, em alguns momentos, a professora dialogava com os alunos no espaço privado do WhatsApp, mas sempre convidando-os para levar suas considerações para o grupo, conforme proposto na Agenda. E assim foi se constituindo a parceira professor-aluno, e professor-grupo.

Vejamos então o diálogo estabelecido entre a professora e Weyne, e a interação de professora e aluna com o vídeo que a aluna produziu para se comunicar com a professora, via WhatsApp. O WhatsApp se constitui em um ambiente virtual de aprendizagem em um processo de EaD com uso de *smartphone*.



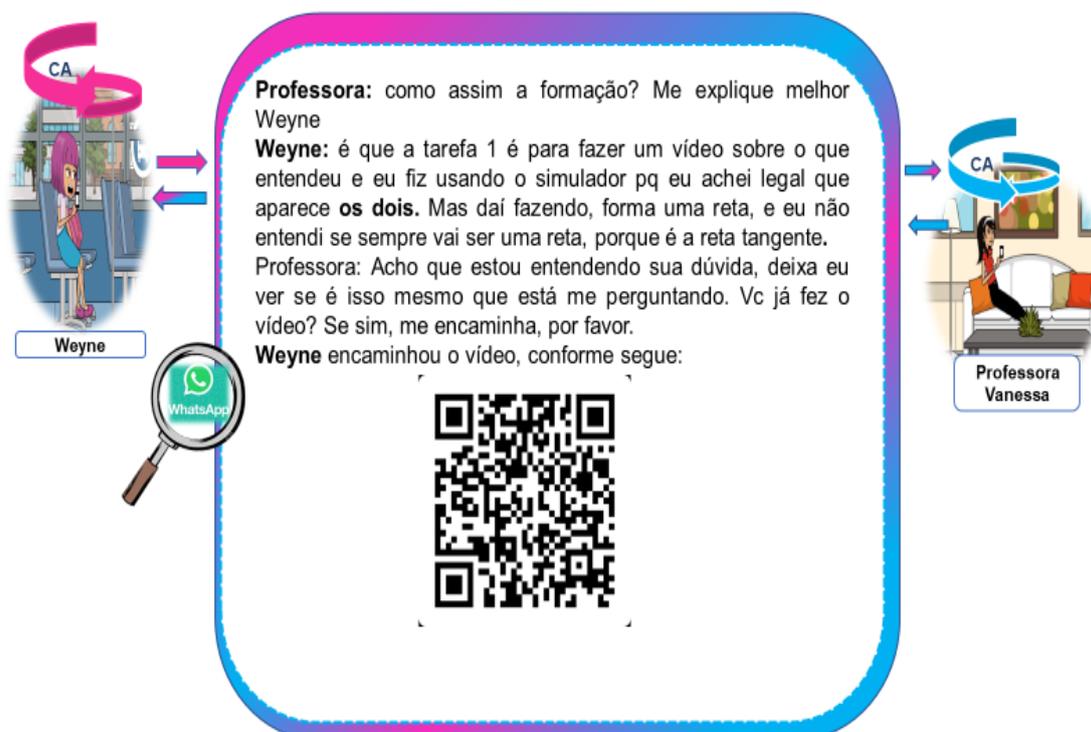
Weyne: Oi professora. Posso perguntar uma coisa, estou com dúvida? Queria ver contigo se estou entendendo certo, antes de participar no grupo.

Professora: Olá Weyne. Como está? Nosso grupo é para dialogarmos, estamos lá para aprendermos, e acredite: aprendemos errando também. Dúvidas? Isso é ótimo, e que bom que você quer falar sobre elas! Eu gostaria que você as expusesse no grupo. O que você acha?

Weyne: Ai professora. Só hoje, pode ser aqui? Tô com um pouco de vergonha, pq vimos isso na aula [referindo-se a aula presencial] e eu entendi, mas foi tudo tão diferente que não sei se estou certa.

Professora: Sem problemas, Weyne. Mas depois a gente pode retomar isso lá. Ok? Combinado? Então me diz ai, qual sua dúvida?

Weyne: então na nossa aula [referindo-se a aula presencial], a gente viu que a derivada é a inclinação da reta tangente. E nossa eu nunca tinha entendido isso, a senhora sabe que eu já fiz cálculo antes com o professor X [identidade do professor será preservada], e eu lembro que tinha aquele limite lá, com o h e tals. [referindo-se ao $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$]. Mas aí eu não entendi uma coisa. Sempre vai ser uma reta a formação?



Professora: como assim a formação? Me explique melhor Weyne

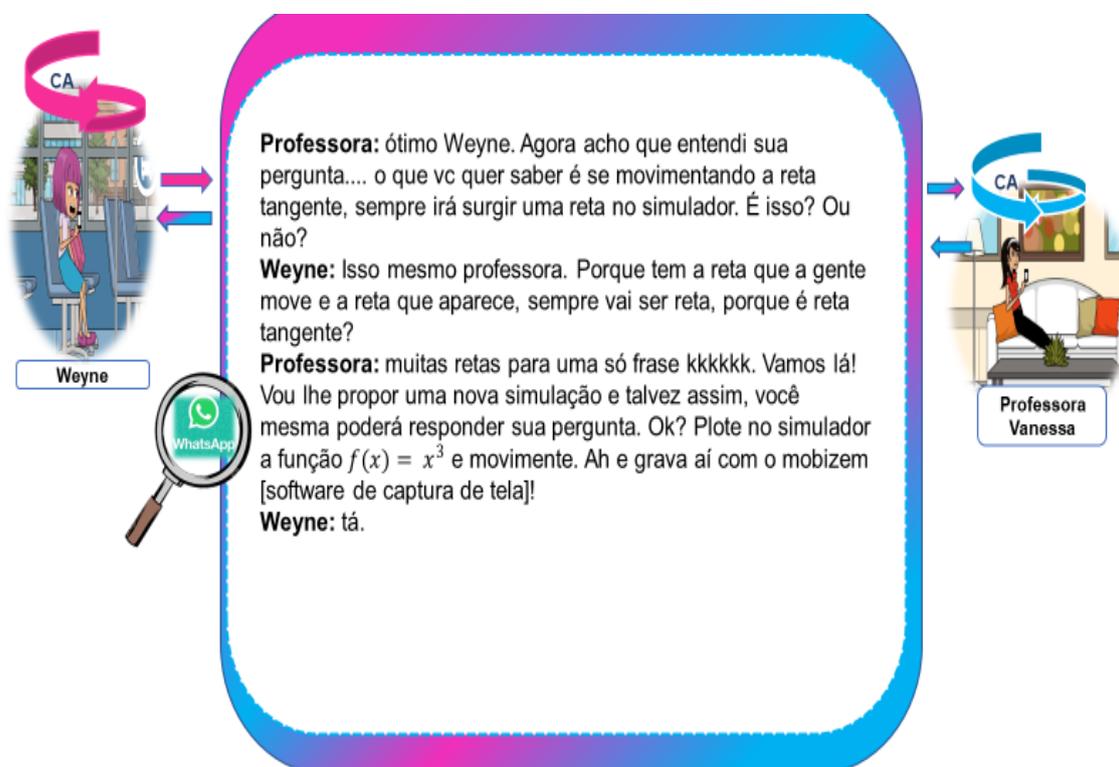
Weyne: é que a tarefa 1 é para fazer um vídeo sobre o que entendeu e eu fiz usando o simulador pq eu achei legal que aparece **os dois**. Mas daí fazendo, forma uma reta, e eu não entendi se sempre vai ser uma reta, porque é a reta tangente.

Professora: Acho que estou entendendo sua dúvida, deixa eu ver se é isso mesmo que está me perguntando. Vc já fez o vídeo? Se sim, me encaminha, por favor.

Weyne encaminhou o vídeo, conforme segue:



Qr code Disponível em:< <https://youtu.be/iZtZIS1yHjw>>



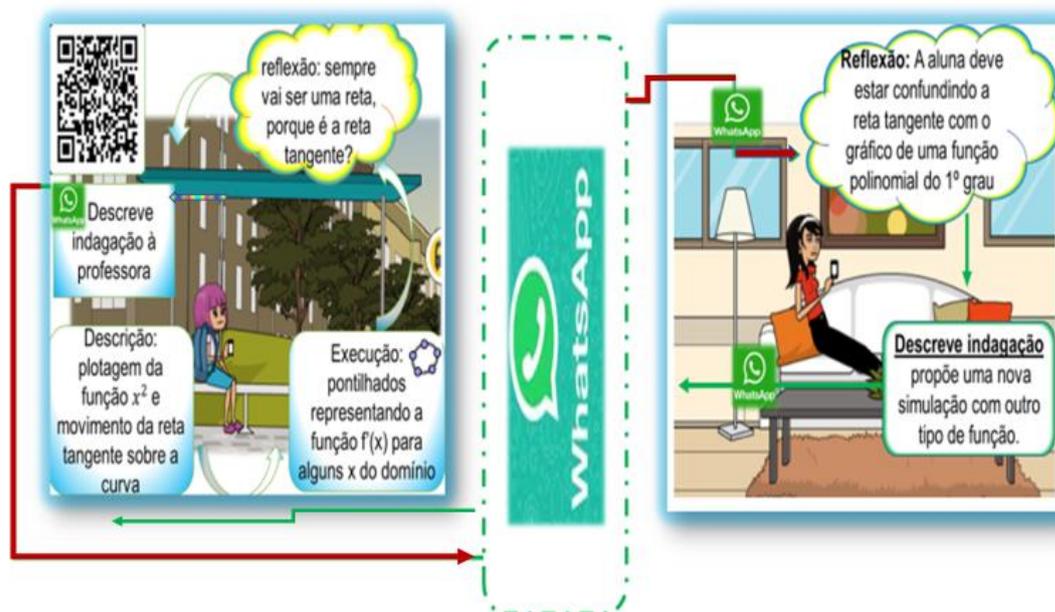
Professora: ótimo Weyne. Agora acho que entendi sua pergunta.... o que vc quer saber é se movimentando a reta tangente, sempre irá surgir uma reta no simulador. É isso? Ou não?

Weyne: Isso mesmo professora. Porque tem a reta que a gente move e a reta que aparece, sempre vai ser reta, porque é reta tangente?

Professora: muitas retas para uma só frase kkkkkk. Vamos lá! Vou lhe propor uma nova simulação e talvez assim, você mesma poderá responder sua pergunta. Ok? Plote no simulador a função $f(x) = x^3$ e movimente. Ah e grava aí com o mobizem [software de captura de tela]!

Weyne: tá.

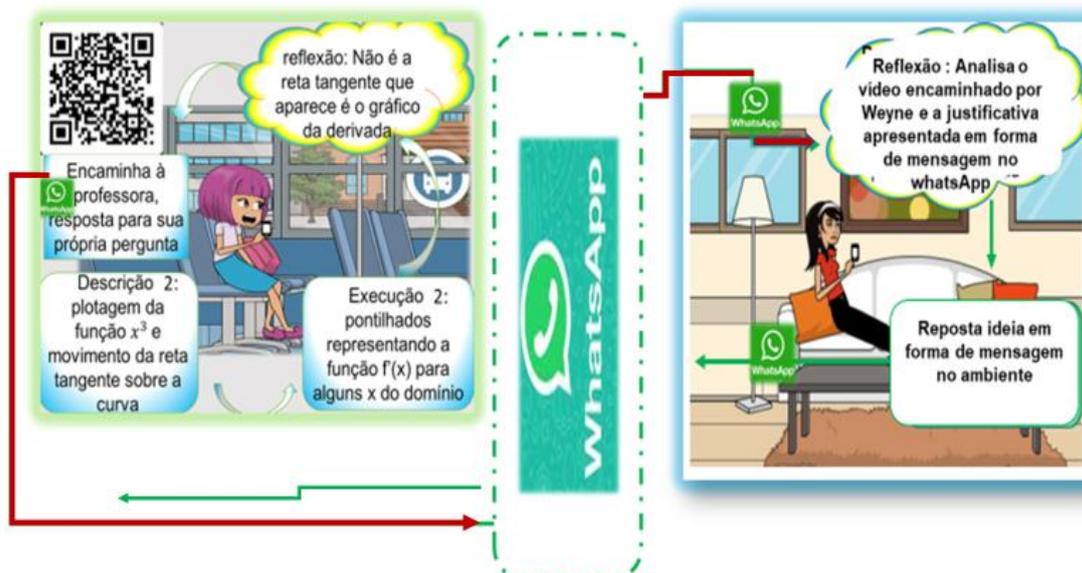
Esse momento de interação entre professora e aluna, podemos caracteriza o EJuVAS, em que o WhatsApp se constituiu como um ambiente virtual de aprendizagem.



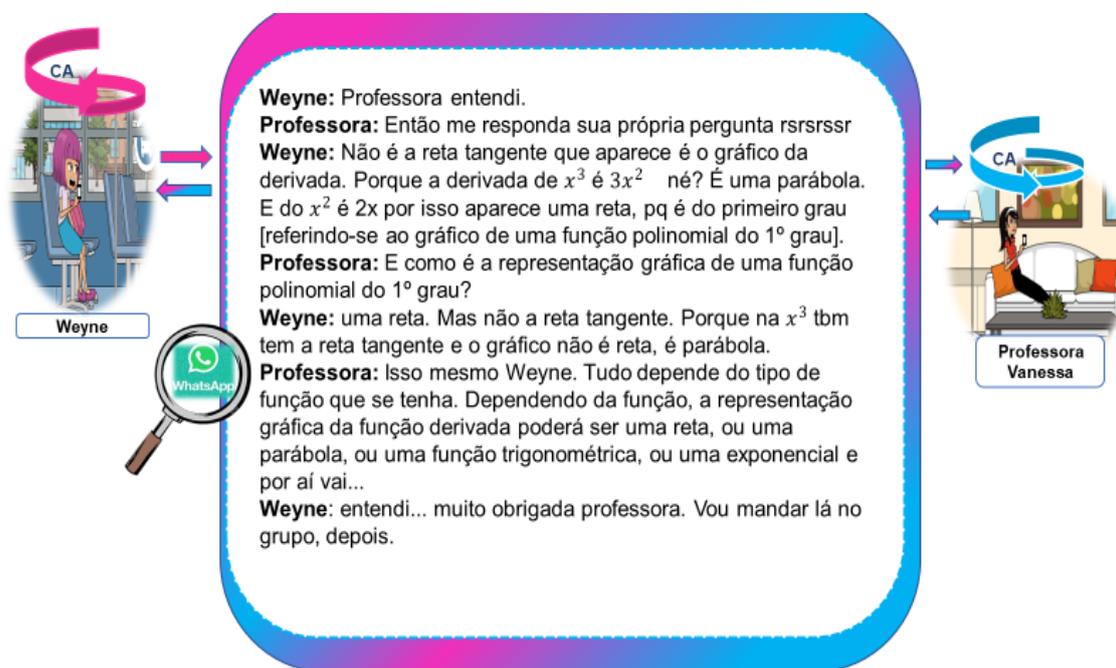
Vamos analisar a abordagem EJuVAS iniciando com o ciclo de ações vivenciado por Weyne. A aluna ao vivenciar o ciclo de ações, descreveu no simulador a função $f(x) = x^2$, movimentou a reta tangente, o simulador executou, apresentando o rastro da representação gráfica da função derivada (uma reta). A aluna refletiu sobre a relação entre a reta tangente e a representação gráfica da função derivada, e se sentiu desequilibrada cognitivamente em relação a sua hipótese formulada, pois parecia não ter encontrado caminhos para validá-la. E, no ambiente virtual de aprendizagem, constituído a partir do espaço do WhatsApp, descreveu indagações à professora.

A professora também vivencia um ciclo, e assim, após receber a mensagem de Weyne, refletiu sobre a indagação apresentada pela aluna, e com foco na abordagem construcionista, não dá a resposta que a aluna quer (ciclo que envolve conhecimentos de sua prática como professora). Mas, propõe uma nova situação (investigação) para que a aluna possa buscar respostas à sua pergunta. Dessa forma, a professora reportou uma ideia a Weyne, via whatsapp, sugerindo a realização de uma nova simulação, conforme apresentado no diálogo anterior.

Diante do desafio proposto pela professora, temos a segunda descrição, e a espiral de aprendizagem vivenciada pela aluna Weyne, conforme pode ser visto no recorte do diálogo e na decodificação do QR Code apresentado a seguir.



36



A aluna descreveu no simulador a função $f(x) = x^3$ e movimentou a reta tangente. O simulador executou apresentando na tela o rastro da construção do gráfico da função derivada (parábola). Ao movimentar rapidamente, a função a reta tangente se descola para parte positiva do gráfico. A aluna, pelos dados que temos, ao observar que a reta tangente não estava na origem (0,0), fez o deslocamento da reta até a origem e por várias vezes, fez esse movimento no intervalo próximo a origem, conforme pode ser observado no vídeo (qr

³⁶ Qr code disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=BpSed7F_C9s&feature=youtu.be

code), vivenciando um de um ciclo de ações, e continuando as ações do ciclo anterior, alimentando sua espiral de aprendizagem.

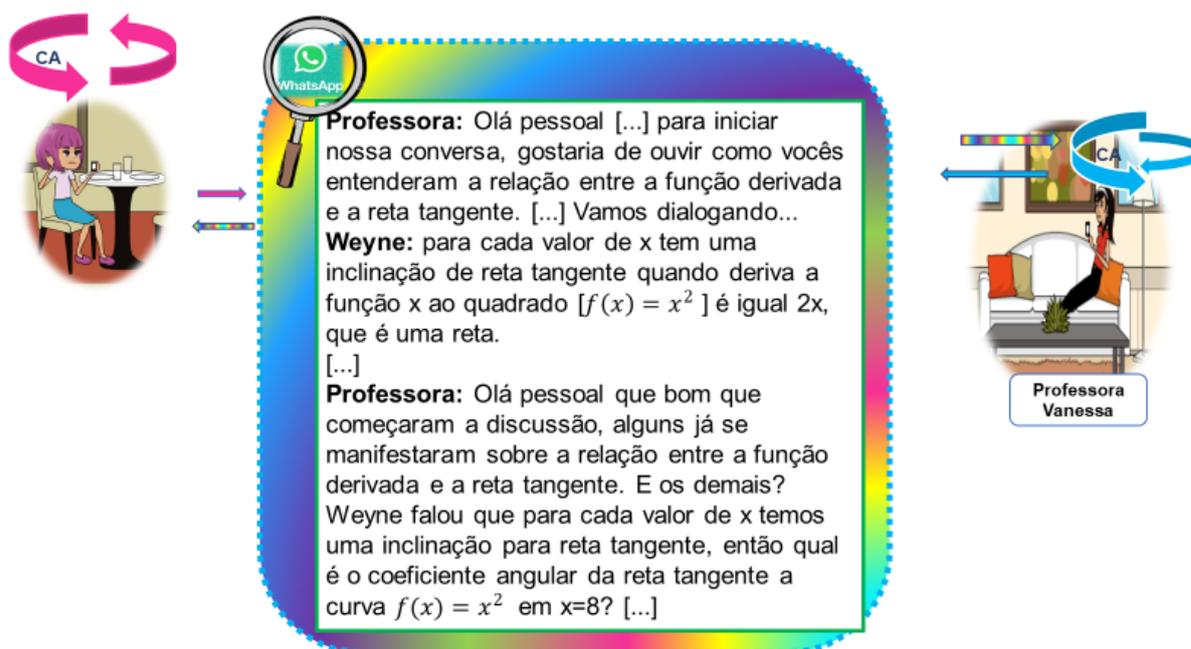
E após a investigação no simulador, a aluna apresentou indícios no espaço do WhatsApp (pelo vídeo encaminhado e sua fala), de ter realizado uma abstração reflexionante, a partir do *feedback* apresentado pelo simulador. Isso se justifica, pois a aluna refutou sua hipótese inicial e afirmou que: *“Não é a reta tangente que aparece é o gráfico da derivada. Porque a derivada de x^3 é $3x^2$ né? É uma parábola. E do x^2 é $2x$ por isso aparece uma reta, porque é função do primeiro grau”*.

Observamos que a aluna associa a representação gráfica com a função derivada, isso porque temos indícios de que mentalmente (ou em algum registro não encaminhado), a aluna aplicou a propriedade 1 das Derivadas (vista em aula), e calculou a função derivada sendo $f'(x) = 3x^2$, e associou esse tipo de função à imagem que apareceu na tela, ou seja, a parábola. No caso, Weyne não usou o ícone do simulador que mostra a Derivada, dessa forma, temos indícios de que esse cálculo foi feito por ela mesma. E além disso, a aluna ainda justificou que a função derivada de x^2 é uma reta, porque $f'(x) = 2x$, é uma função polinomial do 1º grau.

Podemos ressaltar aqui, que o uso do simulador, articulado com o desafio proposto pela professora, foi uma ação que possibilitou à aluna aprendizagens em relação ao conceito em estudo. O uso do simulador na realização da atividade foi uma ação favorável para a aprendizagem da aluna, pois oportunizou duas interpretações para o estudo de Derivadas: a primeira, a inclinação da reta tangente, e a segunda, a representação gráfica da função derivada. E durante essa investigação, Weyne vivenciou momentos de reflexão sobre seus conhecimentos de Derivadas.

Dessa análise destacamos também a aprendizagem na/e a partir da interação, na abordagem do EJuVas, ao usar a produção de vídeos, o que nos possibilitou analisar o ciclo de ações que estava sendo vivenciando pela aluna. O EJuVAS se evidenciou com a interação entre a aluna e a professora, provocado inicialmente pela tarefa proposta pela professora, pelas reflexões explicitadas pela aluna decorrentes do ciclo de ações que estava sendo vivenciado e pela nova proposição da professora. Diante da nova proposição, Weyne realiza uma nova descrição, dando continuidade no ciclo de ações, ao buscar validar sua hipótese inicial.

Vejam os diálogo que ocorreu no grupo, com os demais alunos, horas depois do diálogo com Weyne, apresentado anteriormente. A seguir temos um recorte desse diálogo:



Diante do questionamento feito pela professora, Weyne inicialmente se posicionou, e logo em seguida tem-se as primeiras postagens das alunas Cassia e Karen, conforme segue.



Observa-se que no recorte do diálogo anterior, Cassia descreveu uma indagação ao grupo, e Karen reportou uma ideia respondendo diretamente à pergunta feita, e afirmou isso por ter visto no vídeo disponível no ambiente virtual da agenda [plataforma GeoGebra]. O que observamos nessa fala, é que houve uma articulação entre o espaço virtual criado no grupo do WhatsApp, que era um espaço de interação entre os sujeitos, e o espaço da plataforma GeoGebra, um espaço para acesso e interação com os materiais de estudo daquela Agenda da aula [vídeos, simuladores e material didático].

Na sequência, a professora propôs a todo o grupo um desafio a partir do questionamento feito por Cassia, aproveitando a oportunidade para que os alunos pudessem explorar mais o simulador, pois assim outras propriedades poderiam surgir a partir da investigação de vários tipos de funções, ou a prova de propriedades usando limite, conforme apresentado em um dos vídeos da Agenda. Vejamos a seguir, como a professora **reportou ideia** ao grupo, em forma de questionamentos e novas simulações.

Professora: Ótima pergunta Cassia...que tal os demais pensarem um pouco sobre isso?... em outras palavras, uma parábola é a representação gráfica de uma função do segundo grau, então será que para qualquer função do 2º grau, sempre a representação gráfica de sua derivada será uma reta? Como poderíamos provar isso a partir da definição de derivada apresentada no vídeo 3? Que tal usarem o simulador para verificar algumas possibilidades, ou seja, plotem diversas funções do 2º grau, depois movimentem a reta tangente e observem o gráfico da derivada que aos poucos vai surgindo. Que tal vcs tentarem? [...] Aproveitem o simulador e se divertam plotando outras funções, como por exemplo, uma função do 3º grau. Como será o gráfico da derivada desse tipo de função? E de uma função do 1º grau, como será o gráfico da derivada? Ah podem mandar vídeos com simulações aqui no grupo[...]

Weyne

Cassia

Professora Vanessa

karen

E mais uma vez surgiu a dúvida em relação à reta tangente e a representação gráfica de uma função derivada, quando a mesma é uma função polinomial do 1º grau. E essa dúvida foi apresentada por Mylena, conforme diálogo que apresentamos a seguir.

Mylena: eu tô bem confusa nos termos. Olhando os vídeos [referindo-se aos vídeos disponíveis na Agenda] eu entendi a questão dos cálculos e tudo mais. Mas na questão de saber quem é quem ali no gráfico. Eu tô confusa!
[...] professora, você disse que era pra ir testando, elevando o x a várias potências né, pra ver se a representação gráfica da derivada ia ser uma reta. Eu testei umas funções lá, e deu sempre uma reta. O de vcs tbm?

Weyne

Mylena

Cassia

Professora Vanessa

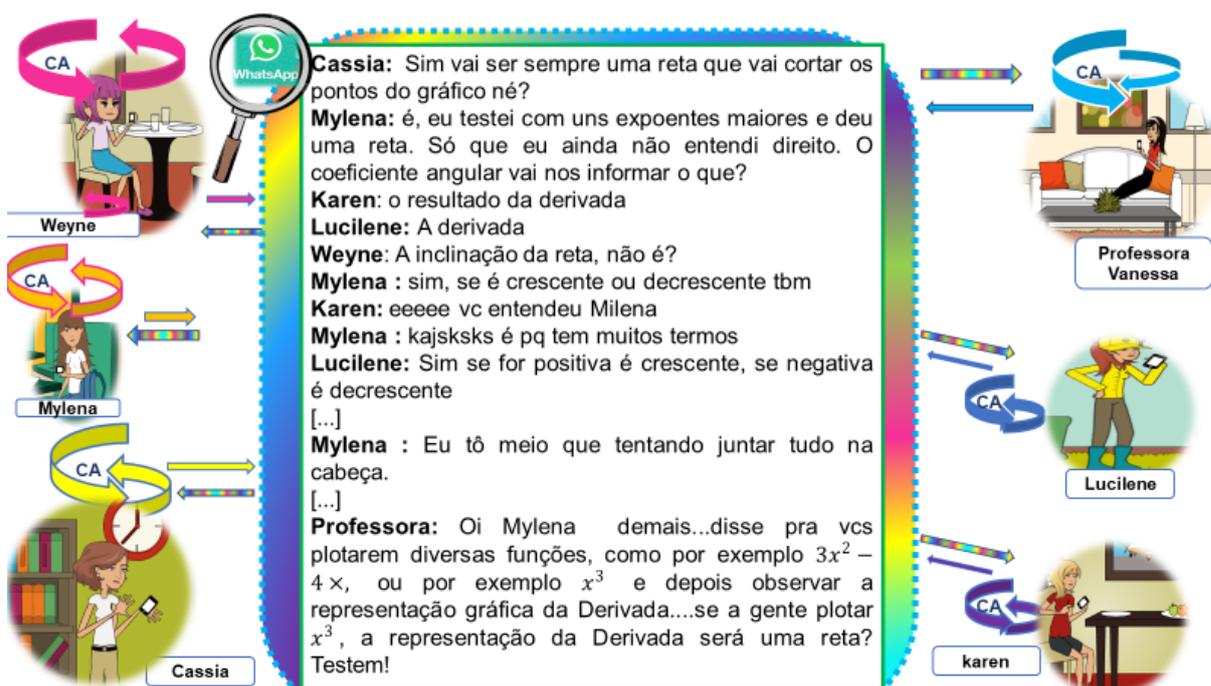
karen

Pela fala de Mylena, temos indícios de que ela fez algumas simulações, e ao fazer as simulações observou apenas a reta tangente que ela movimentou e não o gráfico da função derivada que vai surgindo. Por esse motivo, Mylena tinha como hipótese que, independente da função, a representação gráfica da derivada será sempre uma reta. Do diálogo anterior destacamos que mesmo a aluna tendo feito a atividade em relação à reta tangente na aula anterior, presencialmente, ela ainda apresentava dificuldade conceitual em relação ao conceito de Derivada, talvez por não associar a lei de formação da função derivada, com o gráfico da referida função.

Essa dificuldade, que também foi apresentada por Weyne (no espaço de diálogo privado estabelecido com a professora, e apresentado anteriormente) indica uma possível dificuldade dessas alunas em compreender as diferentes interpretações do conceito de Derivada. Villareal (2008) ressalta que normalmente os alunos apresentam bom desempenho com os cálculos algébricos, em estudos sobre Derivada, mas apresentam dificuldade em relação a interpretação gráfica da Derivada. E, podemos observar isso na fala de Mylena: “eu entendi a questão dos cálculos e tudo mais. Mas na questão de saber quem é quem ali no gráfico. Eu tô confusa!”.

Diante dessa possível dificuldade apresentada pelas alunas, vale ressaltar mais uma vez o diferencial que este simulador possibilitou ao trazer na mesma tela as duas representações simultaneamente para a derivada. Caracterizando assim uma ação que foi favorável à aprendizagem, ao fazer surgir dificuldades até então silenciosas.

Vejamos como continuou a interação no ambiente de aprendizagem...



Observa-se que a dúvida não era apenas de Mylena, mas também de Cassia e Lucilene, pois Cassia também afirmou que “vai ser sempre uma reta” e Lucilene confirmou “Sim se for positiva é crescente, se negativa é decrescente”.

A professora mais uma vez tentou propor um outro questionamento, com o objetivo de que as alunas retomassem seus estudos e refletissem sobre os diferentes conceitos envolvidos, mas mesmo assim as alunas ainda tiveram dificuldades, conforme pode ser observado na continuidade do diálogo, e vídeo encaminhado por Cassia.



37

É possível observar no vídeo que Cassia parece dialogar com outra pessoa, e ao notar isso (somente no momento da análise dos dados), perguntamos (via WhatsApp, no privado) à Cassia quem era a segunda pessoa junto a ela, e ela falou que estava na companhia de Lucilene. E também comentou que a dúvida que Mylena tinha apresentado inicialmente parecia que estava compreendida por ela e por Lucilene, mas depois, com as perguntas feitas pela professora e as propostas de simulações, foram aparecendo dúvidas.

Conforme mensagem encaminhada por Cassia (ver a seguir) para a professora, temos indícios de que a interação proporcionada no ambiente virtual do WhatsApp, possibilitou momentos de desequilíbrio cognitivo e reflexão:



para mim estava tudo certo na aula [referindo-se a aula presencial], parecia que eu tinha entendido. Daí a Mylena, foi falando e eu tentando ajudar ela, e só piorou para mim, pq até o que eu achava que tinha entendido não estava entendendo mais. Rsr rsrs. E eu só notei a diferença da reta tangente com o gráfico da derivada, depois do vídeo, quando a senhora falou para mim fazer no simulador o x^3 [referindo-se a função $f(x) = x^3$].

³⁷ Qr code disponível em: <<https://youtu.be/cPkEAJqiM10>>

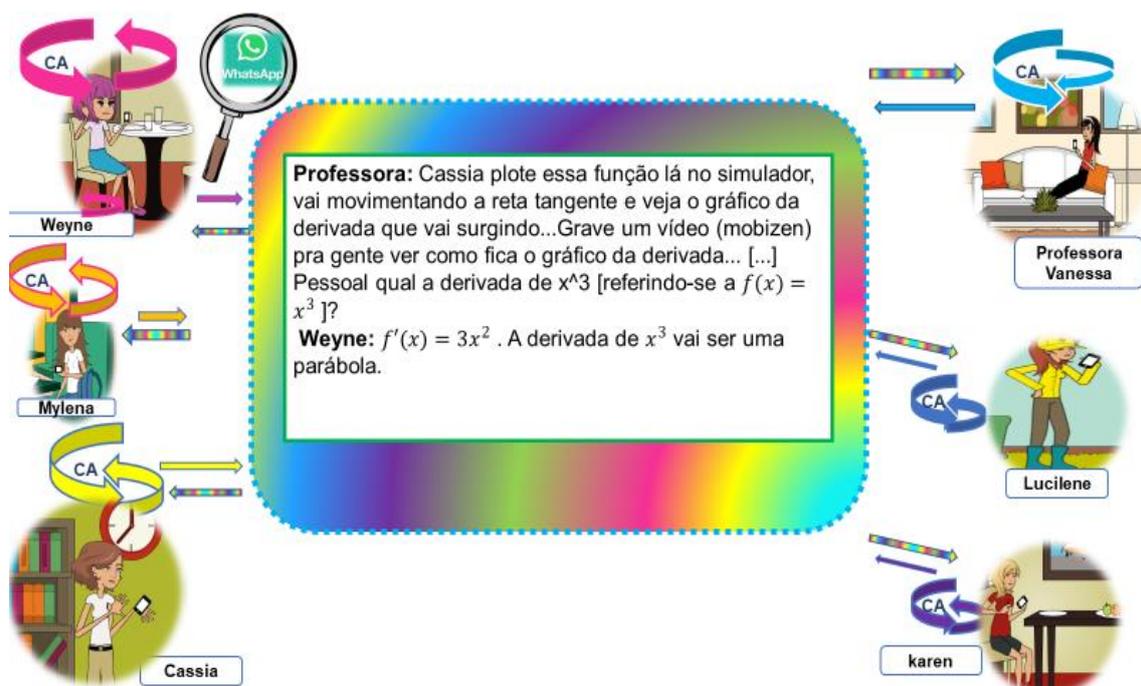
Afirmamos isso pelas seguintes falas da aluna: “para mim estava tudo certo [...] parecia que eu tinha entendido” e “eu achava que tinha entendido não estava entendendo mais”. Essas frases evidenciam que a aluna inicialmente estava em equilíbrio, e depois foi desequilibrada cognitivamente a partir da interação com outra aluna, e dos desafios propostos pela professora. Evidenciando assim a ação de interação com outros alunos e com a professora e o desafio proposto pela professora possibilitou momentos de aprendizagem. A partir da mensagem de Cassia temos indícios de que ela se sentiu desequilibrada cognitivamente sobre suas certezas e conjecturas.

É neste processo de busca pelo equilíbrio, ao compreender e apreender a novidade, acomodando o desconhecido ao que é conhecido, que o sujeito aprende. Ele coopera, opera mentalmente com e sobre as suas certezas, e com e sobre as certezas de outros e do meio, busca o equilíbrio, que é sempre provisório, pois deixa de existir ao surgir um novo desequilíbrio. (SCHERER, 2005, p.89).

E o equilíbrio só surgiu novamente a partir de um novo desafio proposto pela professora e evidenciado pela mensagem: “*e eu só notei a diferença da reta tangente com o gráfico da derivada, quando a senhora falou para mim fazer no simulador o x^3 [referindo-se a função $f(x) = x^3$].*” Em um ambiente construcionista é fundamental que o professor não “dê resposta ao aluno”, mas ele deve criar condições para que os alunos investiguem possíveis soluções.

A partir dessas investigações, o aluno construiu conhecimento, pois a aprendizagem é um processo de construção e também de reconstrução, “no qual o conhecimento não pode ser simplesmente transmitido do professor para o aluno. O aprendizado deve ser um processo ativo, em que os aprendizes “colocam a mão na massa” (*hands-on*) [...] em vez de ficarem sentados atentos à fala do professor.” (MALTEMPI, 2008, p.265). No caso desse ambiente virtual, poderíamos afirmar “[...] em vez de ficarem ‘quietos’ no grupo do WhatsApp, aguardando as mensagens e respostas da professora”.

Um ambiente construcionista, como o constituído nesta disciplina no espaço do WhatsApp, não se caracteriza como um espaço no qual o aluno pergunta e o professor responde. Mas, como um espaço de diálogo, de expor dúvidas e certezas, de propor, de contrapor, de silenciar (às vezes, para que o outro possa falar, conjecturar, simular...) e de falar, de desafiar e de se sentir desafiado. Vejamos a seguir a continuidade do diálogo no grupo do WhatsApp.



Com a resposta apresentada por Weyne, Mylena e Lucilene parecem refletir, com um certo “tom” de contraposição em forma de questionamento.



Observando as divergências de proposições, a professora convidou novamente as alunas que estavam naquele ambiente à irem para o simulador.

Professora: Vamos lá meninas, plotem essa função x^3 no simulador e veja o gráfico da derivada [Weyne encaminhou ao grupo uma foto]

$f(x) = x^3$
 $f'(x) = 3x^2$

Mylena: 🙄🙄🙄
Mylena: caracaaa
Daniel: Tipo, a derivada do x^3 vai ser $3x^2$
Daniel: Por isso dá uma parábola
Daniel: Mas no meu geogebra tava dando reta tbm
Daniel: Daí eu tava bugadão
Mylena: entao, por isso não tinha entendido

Mylena pareceu surpresa com a **proposição** apresentada por Weyne, mas parecia ainda não ter compreendido até aquele momento as diferenças conceituais. Vale observar também, que até aquele momento Daniel não tinha participado da discussão, talvez estivesse apenas acompanhando em silêncio. Ou seja, o silêncio não tem apenas o significado de ausência no espaço virtual, mas temos de criar situações para que todos registrem suas certezas e dúvidas, assim, conhecemos um pouco do processo de aprendizagem dos alunos.

Temos indícios de que Daniel estava acompanhando em silêncio o diálogo, a partir de sua fala: “Mas no meu GeoGebra tava dando reta tbm”, o que evidencia que ele também fez a descrição no GeoGebra. E logo em seguida, Daniel apresentou ao grupo, uma nova proposição. E diante das mensagens enviadas, Lucilene ressaltou a diferença entre a reta tangente e o gráfico, conforme segue:

Professora: Daniel mostra pra gente o que tá dando uma reta no geogebra
Daniel: Já saquei. Eu tava sendo Juvenal
Daniel: Sendo reta tangente [...]Claro q vai ser uma reta. Mas a derivada vai ser uma parábola
Professora: Entenderam o que o Daniel falou?
Daniel: A derivada vai dar a inclinação da reta tangente em algum ponto né
 [...]
Lucilene: Entendi, eu estava observando a reta tangente e não a derivada da função [referindo-se a representação gráfica da função derivada]
 Gíria usada para descrever um sujeito inocente e inexperiente.

38

E na continuidade do diálogo, Cassia, pela sua fala, nos dá indícios de que transitou entre os diversos espaços, indo até o espaço do simulador, fazendo suas investigações e retornando ao grupo com novas descobertas, em forma de foto.

Cassia: professora a de Seno de x não vai no gráfico [a aluna tentou plotar no simulador a mesma função que plotou no Geogebra, porém o simulador por problemas técnicos não conseguiu, passando assim a plotagem de outra função a $f(x) = 3x^2 - 4$, conforme sugestão da professora em mensagem anterior] Essa é a outra

Professora: Agora nesse outro exemplo, $f(x)=x^3$ que tipo de função será a derivada?
Weyne: função do segundo grau! Uma parábola

$f(x) = 3x^2 - 4$
 $f'(x) = 6x$

E Karen, Lucilene e Cassia concordam com Weyne:

³⁸ Gíria usada para descrever um sujeito inocente e inexperiente.



E a professora deu continuidade ao diálogo, fazendo um convite aos demais alunos à participarem da discussão, e para os alunos que estavam mais envolvidos até aquele momento, ela propôs um novo desafio, para manter o ciclo de ações de cada um, do EJuVAS também. Essa discussão aconteceu no segundo dia da agenda e a participação maior nesse dia, foi das alunas Cassia, Karen, Lucilene, Daniel e Weyne. Outros alunos como, por exemplo, Bruno, Eduardo, Wellington e Arthur, tiveram participação, porém com mensagens mais rápidas e sem um envolvimento maior com a discussão. Assim nestes dois primeiros dias da aula a distância, dos treze alunos, nove estavam postando suas certezas e dúvidas, vivenciando o EJuVAS.

Vejamos então como a professora Vanessa, fez o convite para que esses alunos, ainda silenciosos, participassem, produzindo e vivenciando o EJuVAS.

Professora: Boa tarde pessoal....para os alunos que ainda não participaram do fórum de discussão, sugiro que leiam tudo o que já foi dito aqui e articulem suas pontuações com as dos demais. Várias questões foram propostas!!!!

Para aqueles que já discutiram sobre a relação entre reta tangente e derivada, vamos adiante em nosso estudo e passamos às quatro propriedades de derivadas que aparecem no PDF [material disponível na agenda]. Todas aquelas propriedades decorrem da derivada como um limite. Sendo assim, apresente aqui no grupo um exemplo de cálculo de derivada que use alguma daquelas propriedades.... ah não vale usar os exemplos que estão no pdf. Pensem em diferentes funções que podem ser usadas aquelas propriedades. Por exemplo, a derivada da soma, ou a derivada de uma potência... Podem mandar foto dos cálculos feitos, explicar por áudio, ou como preferirem!!!

Weyne
Mylena
Cassia
Professora Vanessa
Daniel
Lucilene
karen

E logo em seguida algumas produções foram encaminhadas ao ambiente, conforme segue.

Karen:

$$f(x) = 7x^3 - 2x + 400$$

$$f'(x) = 7(3x^2) - 2(1) + 0$$

$$f'(x) = 21x^2 - 2$$

Karen: nessa função o expoente 3 multiplica com o x q fica entre parênteses com expoente de 3- 1 , e o -2x tem o x substituído pelo 1 e o 400 é uma constante q resulta em zero.[...] antes de organizar e resolver coloca o f'(x)(a linha entre f e x.)[...] indicando que se trata de sua derivada.

Wellington: Foi utilizado a propriedade da soma onde cada termo da função pode ser calculado separadamente e depois somadas para determinar a derivada.

Wellington encaminhou a produção a seguir:

Weyne
Mylena
Wellington
Cassia
Professora Vanessa
Daniel
Lucilene
karen

Em seguida, Nilson encaminhou um gif...

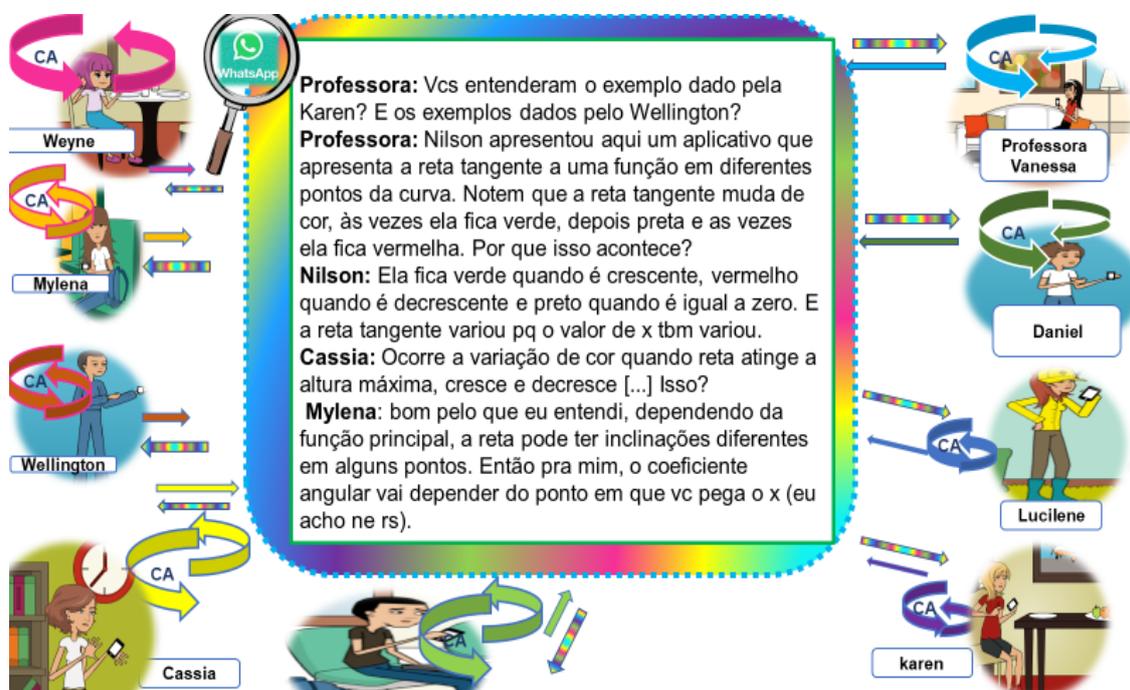


disponível em:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7a/Graph_of_sliding_derivative_line.gif/300px-Graph_of_sliding_derivative_line.gif>

A professora articulou o diálogo, convidando os demais alunos a interagirem e analisarem a produção de Wellington e Karen. Do diálogo apresentado acima, observe que Nilson provavelmente fez uma pesquisa sobre reta tangente e apresentou no grupo um gif, porém, ele nada comentou e não fez articulação com a discussão que anteriormente foi feita sobre o conceito em jogo. Ele simplesmente encaminhou o aplicativo. Seria uma passagem rápida? Quase como uma brincadeira de criança, em tocar a campainha e sair correndo? Daí a importância de o professor habitar o ambiente, estar sempre atento aos alunos, sempre os convidando para o diálogo, sempre propondo questionamentos que os desafiem em querer continuar aprendendo.

Mesmo sem a articulação, a professora vê no gif encaminhado, uma possibilidade de discussão no grupo e de fazer com que Nilson habite aquele espaço, afinal era sua primeira postagem:



Em seguida, Bruno apresentou sua proposição e Nilson contrapôs, conforme segue:

Bruno: Esse gráfico [referindo-se ao gif encaminhado por Nilson] fica verde quando é decrescente, preto quando é constante e vermelho quando é constante, mas não entendi por que a derivada da zero

Nilson: Verde quando é crescente e vermelho quando decrescente.

Bruno: Ah sim, mas por que a derivada da zero?

Nilson: Acho q pq não há variação.

Na sequência do diálogo, ao interagir com Nilson, Bruno parece concordar com a afirmação apresentada por Nilson: ‘Verde quando é crescente e vermelho quando decrescente. Mas questiona quanto à derivada ser nula.

Em seguida, Mylena apresentou no grupo uma dúvida. Observamos que Mylena direcionou sua dúvida ao grupo, e não somente à professora, isso pode dar indícios de abertura que a aluna tem em aprender com o outro. Mylena foi uma aluna que evidenciou dificuldade em conceitos matemáticos, mas pela sua abertura oportunizou momentos de aprendizagem. Vejamos a seguir a continuidade do diálogo.

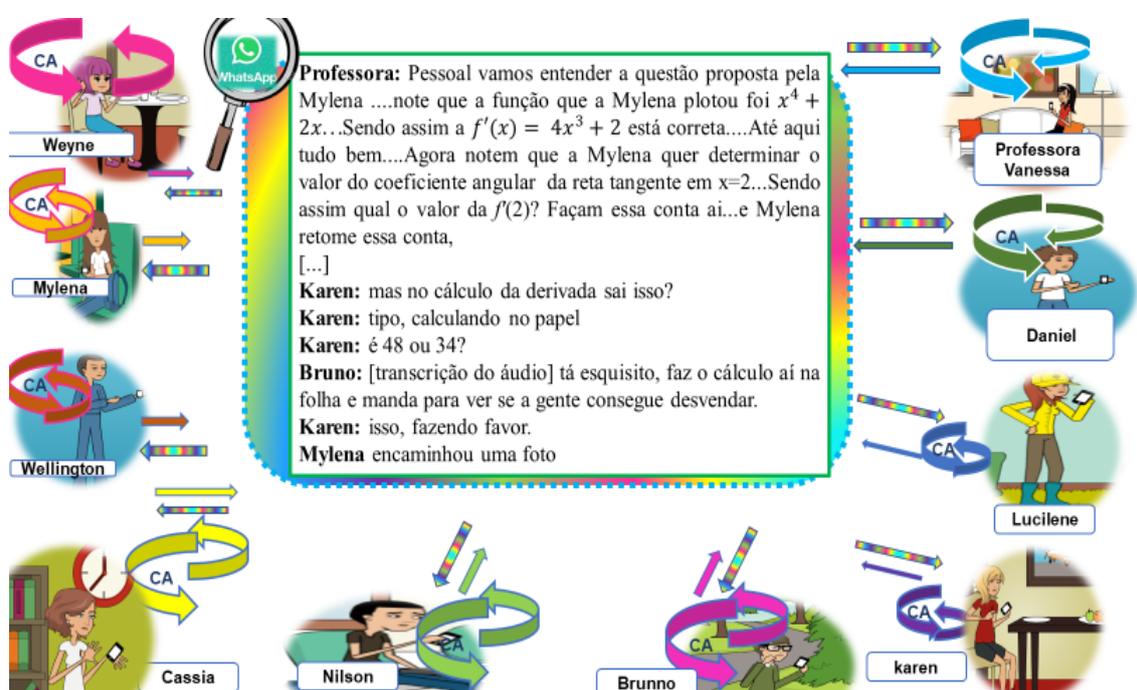
Mylena [transcrição do áudio]: gente eu não entendi o que aconteceu aqui. Tipo assim, eu imaginei uma função tipo: $f(x) = x^4 + 2x$ a $f'(x) = 4x^3 + 2$ conforme a propriedade 4. Daí, eu joguei ela lá no simulador e deu isso mesmo a $f'(x)$. [validando seus cálculos].

Mylena: Aí eu fiz as contas, conforme indicado no vídeo e meu resultado deu 48, o coeficiente angular. 48 porque eu imaginei para $x=2$ [referindo-se a $f'(2)$]. Aí eu fui para o Geogebra, daí eu fui tentar aproximar para 48 e não deu $x=2$.

Pela sua fala, Mylena usou o simulador para fazer a validação de seus cálculos, isso porque o simulador mostra a função derivada após o movimento da reta. A aluna usou a propriedade 4. Então, a princípio, poderíamos inferir que Mylena compreendeu a propriedade 4 e efetuou de maneira correta seus cálculos. Mas, ainda existia algo que a incomodava, conforme ela pontua em áudio [transcrito] ao grupo...



Nesta fala, Mylena afirmou que $f'(2)=48$, porém se a aluna tivesse feito o cálculo correto, teria encontrado o valor de $f'(2)=34$. Como a aluna havia usado a propriedade 4 e encontrado a função derivada de maneira correta, a professora supôs que Mylena tivesse errado no momento do cálculo numérico, e assim a professora propôs que Mylena retomasse seus cálculos, conforme segue.



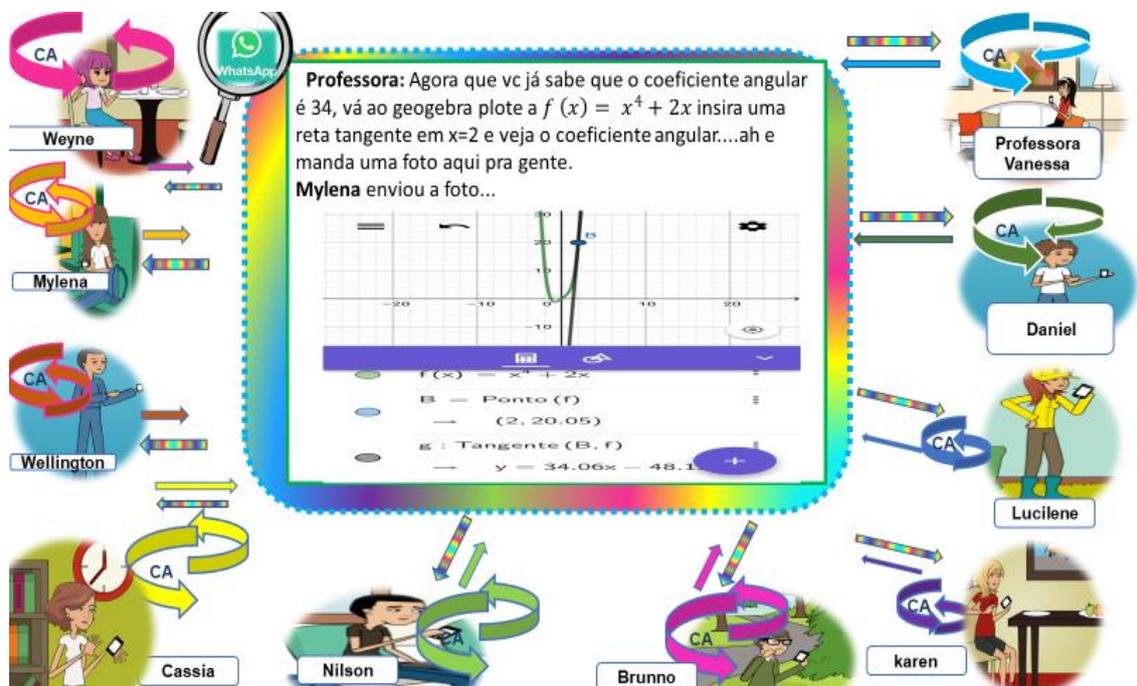


Pela foto encaminhada por Mylena é possível observar que a aluna já havia determinado a função derivada pela propriedade 4, e também efetuado o cálculo correto para $f'(2)$ substituindo o valor diretamente na função. Porém, ela não associou que a função derivada, determinada via aplicação da propriedade 4, seja a mesma determinada via limite. O que no caso dificultaria mais o problema, e que a levou ao erro de cálculos, isso porque, a substituição de $x=2$ na função derivada, demanda cálculos bem mais simples do que o cálculo da $f'(2)$, via limites.

Como o objetivo de aprendizagem para aquela aula era de compreender a relação entre a inclinação da reta tangente e a função derivada, a professora propôs que Mylena retomasse seus cálculos a partir da substituição direta de $x=2$ na $f'(x)$ por ela determinada anteriormente. E a discussão via limite, foi retomada em momento futuro, presencialmente.



E para finalizar, a professora propôs a Mylena que ela validasse sua hipótese de que o coeficiente angular é 34, conforme segue.



E assim apresentamos um recorte da interação entre professora-alunos e entre aluno no ambiente de aprendizagem na abordagem do EJuVAS. Dessa primeira parte destacamos algumas ações que favoreceram a aprendizagem de alunos em ambientes virtuais da disciplina: ação de interação entre professora e alunos; ação de interação entre alunos; ação de articular registros no espaço virtual do whatsapp com informações disponíveis ou produzidas em outros espaços: geogebra mobile, plataforma da agenda que hospedou vídeos,

simuladores e material didático; realização de investigações matemáticas com uso de simuladores da plataforma Geogebra; ação de aceitar os desafios propostos pela professora.

A segunda parte da aula envolvia a produção de vídeos sobre o entendimento de cada aluno, ou da dupla, sobre a parte inicial da aula. Para análise dos vídeos escolhemos o vídeo de Mylena, pois ela comentou sobre ele na entrevista, que pode ser acessado pelo QR Code seguinte.



Disponível em: <https://youtu.be/IHQXVIWUm14>

No vídeo, a aluna fala um pouco do processo que ela vivenciou e das dúvidas que surgiram em suas tentativas de produzir seu vídeo. Dúvidas essas, que Mylena levou ao espaço do WhatsApp para discussão, com os demais integrantes. Em relação ao conhecimento sobre o estudo do conceito de cálculo, Mylena fala sobre as propriedades usadas para determinar a $f'(x)$, e no vídeo ela mostra o coeficiente angular da reta tangente em $x=2$ (que foi discutido no grupo). Já para o valor de $x=4$, Mylena não havia apresentado no grupo. Talvez ela tenha optado pelo cálculo de um segundo valor para x , para validar suas hipóteses em relação ao estudo. Ao analisar o caminho percorrido por Mylena, pode-se observar no vídeo que a aluna apresentou um entendimento sobre o coeficiente angular reta tangente e o valor da derivada determinado a partir de cálculos.

No momento da entrevista questionamos Mylena quanto aos vídeos produzidos durante a disciplina. E a aluna falou sobre seus sentimentos, suas aprendizagens e suas dificuldades, conforme recorte de sua fala apresentado a seguir:

Mylena: Nossa! os vídeos, só por Deus. (risos) [...] eu nunca pensei que tivesse que estudar tanto para fazer um videozinho de 2 ou 3 minutinhos. Na real dá muito trabalho, mas isso é bom para aprender. Eu fazia o roteiro, mas nunca seguia, não sei nem pq fazia[...] a ideia vinha na hora e mudava o roteiro. Aprendi muito com os vídeos, porque eu estudava bastante para fazer, e eu curti tanto o geogebra que acho que em todos os meus vídeos eu usei ele. [...] lembro que teve uma aula de derivadas no whats que eu fiz um vídeo, nunca fiquei tão feliz em conseguir terminar uma tarefa, porque eu já tinha feito mil vezes as contas e o povo do grupo me tentando me ajudar. A senhora lembra?

sim Mylena, era aquela que você mandou a foto do calculo pelo limite.[...] lembro do seu vídeo também, você foi a primeira a mandar.



Assim foi a dinâmica dessa aula virtual, com alunos e professora interagindo e discutindo propriedades de derivadas. Na aula 12, buscamos articular discussões realizadas no ambiente virtual, trazendo atividades que apresentavam novas propriedades de derivadas, cálculo de derivadas via limite, retomando principalmente o cálculo apresentado pela aluna Mylena e discutido anteriormente, e ainda alguns vídeos foram escolhidos para serem discutidos no espaço presencial, um dos vídeos foi o de Mylena.

Finalizamos assim essa parte de análise da aula 11, mostrando a abordagem do EJuVAS, e ao analisar a vivência dessa abordagem foi possível identificar algumas ações que favoreceram a aprendizagem no espaço virtual. Assim pontuamos que a proposta de atividades investigativas, as articulações entre o ambiente do WhatsApp e outros espaços virtuais, os questionamentos e desafios propostos pela professora, as características comunicativas dos materiais que compunham a agenda, a atitude de alunos e professora, e a produção de vídeos foram ações que favoreceram a aprendizagem de conceitos de Cálculo, e foram determinantes da vivência de um ambiente construcionista na abordagem do EJuVAS.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades em relação ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral é uma problemática no campo da Educação Matemática. Diante dessa problemática essa pesquisa teve como objetivo identificar e analisar ações que podem favorecer a aprendizagem de conceitos de cálculo em um ambiente construcionista, em uma proposta de educação bimodal, com uso de *smartphone*. Para atingir os objetivos foi elaborada e desenvolvida em uma disciplina de Matemática I, uma proposta de estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, em formato de encontros presenciais e a distância, com/para uso de *smartphone*. A partir da análise dos dados foi possível identificar algumas ações que favoreceram a aprendizagem do grupo de alunos que participaram da pesquisa, tanto no espaço virtual quanto no espaço presencial.

A primeira ação identificada foi a ação de desenvolver investigação matemática em grupos, pois as discussões possibilitaram momentos de reflexão, de desequilíbrios cognitivos, de aprendizagem. Consideramos que o espaço de aulas se tornou um espaço de diálogo, um espaço no qual os alunos puderam apresentar suas hipóteses, conjecturas, explicitando formulações e validações de hipóteses, ao dialogar com as certezas do outro; foi um espaço de perguntas, experimentações, de respostas, de aprendizagem.

A segunda ação que identificamos ser favorável à aprendizagem dos alunos em no ambiente construcionista da disciplina, foi a institucionalização do saber a partir do uso de *smartphone* com espelhamento de tela. Consideramos que essa ação possibilitou aos alunos discutir com os demais e a professora as suas hipóteses, validações, dúvidas. Além disso, essa ação se caracterizou com um momento de produção coletiva e também produção individual, uma vez que cada aluno pode dar continuidade em seu ciclo de ações individual, a partir da produção espelhada.

A terceira ação que destacamos é a investigação matemática com uso do ambiente Geogebra. O software se mostrou favorável à aprendizagem, por possuir uma característica dinâmica, possibilitando assim uma abordagem dos conceitos de Cálculos de forma diferente. Principalmente na realização de atividades investigativas, como o estudo de gráficos de funções, limites e derivadas.

A quarta ação que consideramos que favoreceu a aprendizagem foi a atitude questionadora e de lançamento de desafios assumida pela professora. Essa atitude foi importante e determinante para se constituir um ambiente construcionista de aprendizagem. Os desafios e questionamentos no espaço presencial, por vezes, possibilitaram a continuidade

no ciclo de ações do aluno alimentando assim sua espiral de aprendizagem. E no espaço virtual, os questionamentos e desafios propostos pela professora, por vezes, possibilitaram a vivência do EJuVAS. Nesse sentido, destacamos também a ação de articulação feita pela professora em relação a questionamentos entre os alunos, pois consideramos que essa ação de questionar um aluno sobre as proposições formuladas por outro aluno, é uma ação que favorece a aprendizagem enriquecendo a dimensão social do ambiente construcionista, uma vez que pode favorecer momentos de interação entre os sujeitos.

A quinta ação que favoreceu a aprendizagem dos alunos foi a produção de vídeos, com uso de *smartphone*, em diferentes espaços da disciplina. Os alunos usaram diferentes recursos de produção de vídeo para apresentarem aos demais, alunos e professoras, os processos ou resultados de suas investigações matemáticas. Ou, para explicitar seus ciclos de ações na abordagem do EJuVAS.

A sexta ação a ser destacada foi a interação com os materiais disponibilizados na plataforma Geogebra, em especial os simuladores e objetos de aprendizagem, pois na vivência do ciclo de ações, de descrição, execução, reflexão, depuração, ao interagirem com esses materiais, alunos aprenderam conceitos de Cálculo.

A sétima ação que favoreceu a aprendizagem foi a gravação de tela do *smartphone* e o compartilhamento das mesmas com professoras e alunos, para discussão de dúvidas e de resultados encontrados ao realizar alguma atividade investigativa. Essa ação possibilitou que a professora e colegas pudessem ter acesso a produções do ciclo de ações vivenciado por alunos, na abordagem estar junto virtual ampliado com *smartphone*.

A oitava ação que pontuamos é a interação entre a professora e alunos, e entre alunos, no grupo do WhatsApp, evidenciando ganhos em termos da mobilidade e possibilidades de compartilhamento de imagens, textos, arquivos em diferentes formatos, vídeos, gifs, links.

A nona ação que identificamos é a proposta de atividades elaborada/adaptada em uma abordagem construcionista, pois os questionamentos propostos possibilitaram momentos de desequilíbrios cognitivos, e momentos de investigação matemática com uso de *smartphone*. Temos muitas atividades em livros didáticos que podem ser adaptadas/ re(desenhadas) pelo professor, considerando o uso do *smartphone*, a construção de conhecimento, e o objetivo de aprendizagem.

E a décima ação que identificamos como favorável à aprendizagem em um ambiente construcionista com uso de *smartphone* é a discussão de vídeos produzidos no grupo de whatsapp. A vivência do EJuVAS e a discussão de vídeos nesse espaço enriqueceu a

aprendizagem de alunos, ao fazerem emergir dúvidas e questionamentos que oportunizaram momentos de reflexão.

Essas foram algumas ações que identificamos a partir da análise dos dados produzidos e aqui apresentados. Portanto, finalizamos reforçando que a proposta de atividades, as articulações entre o ambiente constituído no WhatsApp e outros espaços virtuais, os questionamentos e desafios propostos pela professora, a diversidade e formato de materiais da disciplina, a atitude de alunos e professora, e a produção de vídeos foram elementos determinantes da vivência de um ambiente construcionista e que favoreceram a aprendizagem de Cálculo.

O uso de *smartphone* possibilitou acessar, a partir de diversos lugares e tempo, com diferentes materiais didáticos, como aplicativos, livros digitais, vídeos, recursos de espaços virtuais, simuladores, dentre outros; e em especial, possibilitou a interação dos alunos com esses diferentes materiais, e com os demais colegas e professoras do grupo, em espaço do WhatsApp, caracterizando a vivência da abordagem estar junto virtual ampliado com *smartphone*.

Em relação ao constructo teórico apresentado nessa tese, consideramos ser um avanço teórico para o campo da Educação Matemática, ao discutirmos um processo de aprendizagem no espaço presencial e no espaço virtual, e a articulação entre os dois, a partir do ciclo de ações e da abordagem do estar junto virtual ampliado com *smartphone*. O ciclo de ações com *smartphone* evidencia um avanço teórico, em especial, em relação à especificidade da natureza da investigação de problemas matemáticos, e por esse motivo foi associado a elementos da teoria das situações didáticas. Além de inovação em termos tecnológicos, considerando o uso de *smartphone* invés do *desktop*, trazendo assim novas possibilidades em relação a mobilidade e aplicativos disponíveis. O uso de *smartphone* abre novas possibilidades de uso de aplicativos, considerando que a depender do aplicativo, só se tem a versão para *smartphones*, sendo assim impossível a interação com ele, via *desktop*.

Em relação aos avanços teóricos para o campo da Educação a Distância, foi proposto o EJuVAS, orientado pela mobilidade. Ou seja, desde que se tenha acesso à internet, alunos e professor podem interagir de maneira síncrona ou assíncrona, a milhares de quilômetros e em diferentes espaços: praças, ônibus, casa, universidade, local de trabalho, dentre infinitos outros. Além disso, com acesso à internet, a um toque dos dedos, o aluno poderá também interagir com os materiais/TDIC disponibilizados pelo professor, ou por ele mesmo pesquisado/produzido/disponibilizado.

Destacamos que a reflexão e a interação são pontos centrais da abordagem proposta nesta pesquisa de tese, sendo o professor um dos responsáveis em manter o aluno agindo sobre o problema, e oportunizando desequilíbrios cognitivos, que desencadeiam momentos de reflexão, que podem oportunizar situações adidáticas de ação, formulação, validação. E, o aluno, ao entrar no jogo, em atitude de habitante da disciplina, ao vivenciar momentos de ação, formulação e validação, de interação entre sujeitos, e de produção matemática, junto com outros colegas e professor, oportuniza a vivência do EJuVAS, de construção de conhecimento matemático com uso de *smartphone*, em espaço virtual.

Assim, ao falar do professor, temos de pensar no conhecimento a ser construído por ele e no tempo necessário para planejar a disciplina, selecionar e produzir materiais, acompanhar os processos de aprendizagem dos alunos em ambientes virtuais, preparar o ambiente da sala para realizar ações como as propostas nesta pesquisa. Ou seja, é importante continuar investindo em pesquisas e ações para favorecer a formação continuada do professor para integrar as tecnologias digitais ao currículo, atentando para políticas públicas atentas às necessidades e condições de trabalho do professor. Nesta pesquisa, tínhamos um grupo de 13 alunos, mas, como acompanhar, nesta mesma proposta, um grupo de 30, 40, 50, 60 alunos? É possível? Que aprendizagens são favorecidas? Quais as condições de trabalho do professor e de aprendizagem dos alunos?

Então está tudo terminado? Não! Esse é apenas o início, afinal é uma proposta bimodal, uma disciplina, um grupo de alunos, uma aula presencial e uma aula a distância analisada... Há muito por desenvolver no espaço do ensino superior e da educação como um todo... aulas, pesquisas, desafios, materiais, tecnologias... Mas, consideramos que essa tese, a partir da identificação de algumas ações que contribuíram para a aprendizagem de conceitos de Cálculo, por este grupo de alunos, nas condições criadas e atitudes assumidas, pode contribuir com outras ações e pesquisas relacionadas ao ensino e a aprendizagem na EaD, Educação Bimodal, em especial, com uso de *smartphone*, no campo da Educação Matemática.

A contribuição que esta pesquisa traz para as pesquisas na área de Educação Matemática, na linha de tecnologias educacionais, está relacionada às ações, e uso de tecnologia que podem favorecer a aprendizagem tanto no espaço presencial, quanto, no espaço virtual. Temos muitas possibilidades tecnológicas, precisamos pensar sobre elas, como usá-las para favorecer a aprendizagem dos alunos, de professores. Há muito ainda por fazer, estudar, experienciar em relação ao uso do *smartphone* para aprendizagem de Cálculo.

Ainda há muito por investigar e propor na modalidade da EaD, de forma a explorar as potencialidades do espaço virtual e ações de ensino que favorecem a construção do conhecimento. Ações essas, em que um aluno não seja visto como mais um matriculado no curso, mas sim como um profissional em formação, e no caso das Licenciaturas, um professor(a) em formação, que formará outros profissionais.

E para finalizar, e para continuar, deixamos algumas questões que continuam a nos inquietar em relação à temática/problemática discutida nesta tese: como pensar em ações, na proposta do EJuVAS para um número maior de alunos? Como ocorre o processo de aprendizagem de Cálculo com uso de smartphone no espaço presencial?



**E assim finalizamos a leitura dessa tese. Foi um prazer poder estar contigo e espero ter lhe auxiliado a compreender melhor alguns pontos desse estudo.
Nos vemos, pessoalmente ou virtualmente, em outras oportunidades.
Um grande abraço.
Vanessa Rodrigues Lopes.
Mas pode me chamar de Van.**

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, H. R. F. L. **Polidocentes-com-Mídias e o Ensino de Cálculo I**. Rio Claro: UNESP, 2016.

ALMEIDA, M. E.; VALENTE, J.A. **Tecnologias e currículo: trajetórias convergentes ou divergentes?** São Paulo: Paulus, 2011.

ALVES, D. O. **Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

BAIRRAL, M. A.; HENRIQUE M. P. **Do bolso para palma das mãos: retas e ângulos o GeoGebra Aplicativo**. Revista do instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, São Paulo, v.7, n 3. p.49-64. 2018.

BATISTA, S. C. F. **M-LearnMat: modelo Pedagógico para Atividades de M-learning em Matemática**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

BRASIL. Decreto n. 5.622 de 19 de dezembro de 2005. Regulamenta o art. 80 da Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Publicação eletrônica. Brasília, DF, 2005. Disponível em:<<https://www.planalto.gov.br/legislações/leis>>. Acesso em: 08 out. 2019.

BRASIL. Portaria nº 4.059, de 10 de dezembro de 2004. Regulamenta o art. 81 da Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Publicação eletrônica. Brasília, DF, 2005. Disponível em:<<https://www.planalto.gov.br/legislações/leis>>. Acesso em: 08 out. 2019.

BORBA et al. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1ª ed. Belo Horizonte: autêntica editora, 2014.

BROSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

CABRAL, T. C.; CATAPANI, E. Imagens e olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço. **Zetetiké Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v.11, n.19, p. 101-116, jun. 2003.

COSTA, P. O. **Educação on line na Universidade: o processo de ensinar e aprender Cálculo na era das tecnologias digitais**. 2010. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Uberlândia, UFU, Uberlândia, 2010.

CARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas**. Maringá: UEM, 2013.

CUNHA, L. G. A.; LAUDARES, J. B. O comportamento de funções com o estudo de derivadas por sequências didáticas em objeto de aprendizagem. **VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 397-416, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017. ISSN 2176-4603.

DEMO, Pedro. **Complexidade e aprendizagem:** a dinâmica não linear do conhecimento. São Paulo: Atlas, 2002. 195p.

ESCHER, M. A. **Dimensões Teórico-Metodológicas Cálculo Diferencial e Integral:** perspectivas históricas e de ensino e aprendizagem. Rio Claro: UNESP, 2011.

FERNANDES; F. F. **Ambiente Virtual e Educação a Distância:** espaços e movimentos de aprendizagem em uma disciplina. Campo Grande: UFMS, 2018.

FREITAS, J. L. M. **Situações Didáticas.** In: MACHADO, S. D. A. Educação Matemática: uma introdução. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2012, 65-87.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das Derivadas no Cálculo I:** atividades investigativas utilizando o GeoGebra. Ouro Preto: UFOP, 2012.

GOUVEIA, C. A. A. **Processos de visualização e representação de conceitos de cálculo diferencial e integral com um software tridimensional.** Rio Claro: UNESP, 2010.

IES. **Projeto Político do Curso de Licenciatura em Química UFMS.** Campo Grande, 2009.

LÉVY, Pierre. **O que é o virtual?** 2 ed. Traduzido por Paulo Neves. São Paulo: Editora 34, 1998. 157p.

LOPES, V. R. **Aprendizagem em um ambiente Construcionista:** explorando conhecimentos de Cálculo I em espaços virtuais. Campo Grande: UFMS, 2015.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: M.A.V. Bicudo e M.C. Borba (org.), **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2004.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa.** Ouro Preto: UFOP, 2010.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de derivadas em cálculo I:** aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. Ouro Preto: UFOP, 2015.

MORAN, M. J. O Vídeo na Sala de Aula. **Revista Comunicação & Educação.** São Paulo, dez. 2005.

MORELATTI, Maria Raquel Miotto. **Criando um ambiente construcionista de Aprendizagem em cálculo diferencial e integral I.** São Paulo: PUC, 2001.

PAPERT, S. *Constructionism: a new opportunity for elementary science education.* Massachusetts Institute of Technology, The Epistemology and Learning Group. Proposta para a National Science Foundation, 1986.

PAPERT, S. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática.** Porto Alegre: Artmed, 2008.

PINTO, G. M. F. **Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de cálculo semipresencial.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

PIXTON. **Editor de História em Quadrinhos.** Disponível em: <https://www.pixton.com/br>. Acesso em: 16 dez. 2019

REIS, E. L. **O processo de construção de objetos de aprendizagem em cálculo diferencial e integral durante uma atividade de design.** Rio Claro: UNESP, 2010.

RICALDONI, M. A. G. **Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções reais.** Ouro Preto: UFOP, 2014.

ROCHA, M. D. da. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.** Ouro Preto: UFOP, 2010.

ROSA, M. **A construção de identidades online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso a distância.** Rio Claro: UNESP, 2008.

SCHERER, S. **Uma Estética Possível para a Educação Bimodal: aprendizagem e comunicação em ambientes presenciais e virtuais.** São Paulo: PUC, 2005.

TUCKER, Alan C.; LEITZEL, James R. C. **Assessing Calculus Reform Efforts: A report to the community.** United States of America: The Mathematical Association of America. 1995.

VALENTE, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

_____. **A Espiral da Espiral de Aprendizagem: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação.** Campinas: UNICAMP, 2005.

_____. Educação a distância: criando abordagens educacionais que possibilitam a construção de conhecimento. In: ARANTES, Valéria Amorim (Org.). **Educação a distância: pontos e contrapontos.** São Paulo: Summus, 2011.

WAIDEMAN, A. C.; TREVISAN, A. L.; CARGNIN, C. Limite de funções reais de uma variável: uma análise do conceito e seu ensino em livros textos. In: XIV ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Cascavel-PR. 2017.

WAIDEMAN, A. C. **Um aplicativo para o estudo de derivadas.** Londrina: UTFPR, 2018.

APÊNDICES

| | |
|--|-----|
| APÊNDICE A- TERMO DE COMPROMISSO..... | 179 |
| APÊNDICE B- ROTEIRO DA ENTREVISTA..... | 180 |

APÊNDICE A- TERMO DE COMPROMISSO

TERMO DE COMPROMISSO

Ministério da Educação

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática-INMA

Doutorado em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado -atividades realizadas nas aulas presenciais e a distância, gravações em áudio, vídeos, transcrições, registros escritos e digitais- servirá de base para as análises da pesquisa cujo objetivo é **propor e analisar uma metodologia de ensino para uma disciplina de Cálculo I, em formato de educação bimodal, que possa favorecer a construção de conhecimentos dos estudantes.**

As transcrições e registros obtidos nas aulas tanto presenciais quanto a distância e usados como dados para a pesquisa, não terão identificação dos alunos em nenhuma publicação científica de nossa autoria.

Campo Grande, 12 de setembro de 2017.

Prof^a Dra. Suely Scherer

Orientadora

Vanessa Rodrigues Lopes

Doutoranda

Aluno(a) participante da pesquisa

APÊNDICE B- ROTEIRO DA ENTREVISTA

- 1) O que você aprendeu sobre cálculo nessas aulas presenciais? E nessas aulas a distância?
- 2) Quais foram suas dificuldades?
- 3) Você interagiu com algum aluno no whats, ou presencialmente durante a disciplina? Como foi essa interação?
- 4) O que você achou das avaliações?
- 5) O que você acha da metodologia de ensino proposta nas aulas presenciais?
- 6) O que você achou das aulas a distância?
- 7) O que você achou das discussões via WhatsApp?
- 8) O que você achou do uso do GeoGebra e dos simuladores?
- 9) O que você achou dos materiais didáticos disponibilizados nas agendas a distância?
- 10) O que você achou da forma como foi proposta a resolução de lista de exercícios?
- 11) O que você achou dos vídeos?