

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RAFAEL NOBRE DA SILVA

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA
ANÁLISE GRAMATICAL**

CAMPO GRANDE - MS

2019

RAFAEL NOBRE DA SILVA

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA
ANÁLISE GRAMATICAL**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto

Campo Grande – MS

2019

RAFAEL NOBRE DA SILVA

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA
ANÁLISE GRAMATICAL**

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática da Universidade Federal de Mato
Grosso do Sul como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Educação
Matemática sob a orientação do Prof. Dr.
Thiago Pedro Pinto

Aprovado em 16 de dezembro de 2019

COMISSÃO JULGADORA

Dr. Thiago Pedro Pinto (UFMS) - Orientador

Dr. Júlio Faria Corrêa (UFSC)

Dr. Roger Miarka (UNESP)

Campo Grande – MS

2019

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – CÓDIGO DE FINANCIAMENTO 001.

RESUMO

No intuito de produzir possibilidades de discurso a respeito da pertinência das Geometrias Não Euclidianas (GNE) na educação básica e na formação de professores, utilizamos elementos da filosofia de Ludwig Wittgenstein, de forma epistemologicamente desobediente, para propor um método de leitura de textos e o utilizamos na análise de um artigo da Educação Matemática (LEIVAS, 2013). Chamamos esse método de análise gramatical, entendendo a gramática como “esquema conceitual” e representando esse esquema por meio de um grafo, onde os vértices representam conceitos e as aresta as proposições gramaticais (regras para o uso de palavras) que relacionam pares de conceitos. Essa análise mostrou uma disjunção muito nítida dos conceitos de matemática em relação aos de outras áreas, mas também ajudou a perceber quando existem ligações isoladas, possibilitando pequenos escapes desse discurso matemático que é maior e mais hegemônico no que diz respeito às GNE. Nada disso foi feito sem, antes, discutirmos a possibilidade de trabalhar com uma parte diferente da filosofia de Wittgenstein, em relação a grande parte dos trabalhos da Educação Matemática, e também diferente do que o próprio filósofo se utilizou. A pergunta inicial que disparou o trabalho, sobre a pertinência das GNE foi, aos poucos, cedendo espaço para o que se tornou mais forte em nosso trabalho: as questões de filosofia e método. Produzimos, assim, um discurso a partir do esquema conceitual construído, uma reflexão sobre parte do que está dito no artigo analisado, que poderia ajudar a discutir o tema das geometrias na Educação Escolar. Em certo sentido, nosso trabalho se debruça sobre: o que é possível responder se utilizando de uma leitura gramatical (wittgensteiniana) de um determinado artigo científico.

Palavras-chave: Geometrias Não Euclidianas. Ludwig Wittgenstein. Gramática. Grafo. Decolonialidade.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	6
1.1	O MEU INGRESSO NO MESTRADO	7
1.2	AULAS, HEMEP, ORIENTAÇÕES E ALGUMAS LEITURAS	7
2	ANÁLISE GRAMATICAL	11
2.1	DESOBEDIÊNCIA EPISTEMOLÓGICA	12
2.2	POR QUE A LINGUAGEM?	14
2.3	SOBRE GRAMÁTICA	17
2.3.1	Sobre a construção da gramática de um texto	21
2.3.2	Considerações sobre a leitura	22
2.3.3	Classificação proposicional	23
2.3.3.1	A forma dos esquemas conceituais	24
3	ANÁLISE APLICADA	26
3.1	SELEÇÃO DO CORPUS	26
3.1.1	Sobre o QUALIS e Seleção de Revistas	27
3.1.2	Busca por Artigos	29
3.1.3	Listando as Referências e Delimitando o Corpus	32
3.1.4	Construindo gramáticas com grafos	39
3.2	ANALISANDO LEIVAS (2013)	47
3.2.1	O esboço do grafo	47
3.2.2	O discurso	51
3.2.3	Quando as diferenças nos impedem de trabalhar juntos?	55
4	CONSIDERAÇÕES QUE NÃO SÃO FINAIS	59
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE A – PROPOSIÇÕES GRAMATICAIS DE LEIVAS (2013)	65
	APÊNDICE B – ALGUMAS PROPOSIÇÕES DE ARTICULAÇÃO DE LEIVAS (2013)	71
	APÊNDICE C – ARTIGOS DO CORPUS PRELIMINAR	72

1 INTRODUÇÃO

No ano de 2011, fui aluno da professora Elvia Mureb Sallum pela segunda vez durante o curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Dessa vez disciplina era “Elementos de Geometria” e a turma, composta por alunos de quinto semestre, era dez vezes menor do que já havia sido quando ingressamos no curso de Licenciatura em Matemática (UFMS¹), em 2009. Lembro do entusiasmo que tomava a turma nas discussões sobre as teorias que aquela mulher nos apresentava: as Geometrias não Euclidianas (GNE). Aquilo me ajudou a entender, com muitos exemplos, que a minha visão de mundo poderia mesmo não ser a única – algo que eu sabia, mas de maneira muito ingênua. Descobri também que as verdades consolidadas nos discursos das ciências poderiam ser pensadas de maneira totalmente diferente, com a simples alteração de alguns pressupostos. O ponto, a reta e o plano não precisam, necessariamente, ser aqueles que se expressam na grande maioria dos livros de matemática. Como exemplo, lembro que certa vez a professora explicou:

– Nada é dito sobre o que são esses elementos das geometrias. Os pontos que determinam essa reta \overline{AB} poderiam ser A, uma bruxa e B, um anjo? Uma árvore aqui, outra em São Paulo?

Em 2017, ingressei no curso de Mestrado em Educação Matemática da mesma universidade e manifestei, logo no início, um grande interesse por produzir algo sobre as GNE. Isso se tornou incontornável quando, em conversas com colegas que se formaram alguns anos depois de mim, descobri que as geometrias não euclidianas haviam sido excluídas do currículo, quando eles fizeram o curso. Não deve ser difícil imaginar a minha indignação, mas o que me deixou ainda mais perplexo é que eu, nessas conversas e em minhas reflexões pessoais, não encontrei argumentos para justificar a inclusão das GNE na formação inicial de um professor de matemática ou em qualquer outro o lugar na educação. Essas considerações me levaram a questionar: o que dizem as pesquisas, sobre a presença das Geometrias não Euclidianas na Educação Matemática? A minha expectativa era a de que, compreendendo isto, teria pelo menos algo que dizer a respeito da minha questão.

A partir daquele momento, a minha pesquisa foi se constituindo como uma tentativa de olhar panoramicamente para o tema, por causa da atmosfera de incompreensão na qual eu me vi, mas eu não sabia muito bem como fazer isso criar vida no ambiente que me rodeava.

¹ Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

1.1 O MEU INGRESSO NO MESTRADO

Eu entrei no mestrado principalmente porque as adversidades me conduziram a isso. Explico! Em 2016 (ano anterior ao meu ingresso), eu fui professor de matemática em turmas de ensino médio e de ensino fundamental em escolas públicas, uma experiência única e determinante para o que estava por vir. Foi só naquele ano, o terceiro após o término da minha graduação, que eu percebi o quanto dar aulas para crianças ou adolescentes era uma das atividades que eu menos gostaria de exercer.

Me submeti ao processo seletivo sem saber o que acontecia no PPGEdumat² e, na entrevista, última etapa do processo seletivo, eu comentei que gostava de filosofia – uma informação que foi confirmada por alguns professores que me conheciam da graduação. Então eu fui alocado como orientando do professor Thiago Pedro Pinto, que até aquele momento era o orientador mais envolvido com filosofia no programa, além de ser um dos poucos que tinha vagas de orientação em aberto. O mestrado seria então, uma grande oportunidade de conhecer alguma filosofia com mais profundidade, o que tem acontecido, graças às discussões em reuniões do grupo de pesquisa, aulas, conversas de café... enfim, graças às relações que se constituem no Programa.

1.2 AULAS, HEMEP, ORIENTAÇÕES E ALGUMAS LEITURAS

O começo do mestrado foi bastante difícil. Talvez por influência das leituras que já tinha, eu olhava para os textos, principalmente aqueles que eram propostos pelo grupo de pesquisa, o HEMEP³, com enorme desconfiança. Essa desconfiança excessiva me levava a buscar as fontes de informação daqueles autores, porque não bastava confiar na autoridade dos grandes nomes. O respeito deixa o pensamento tranquilo, e bem que eu gostaria, mas concordar passivamente não acrescenta nada para mim além de agonia. No lugar disso, comecei a me interessar pela revisão bibliográfica, com o intuito de saber de onde os caras tiravam aquelas coisas.

O meu encaixe no curso, que deu forma ao meu projeto de pesquisa, só começou a ter forma por causa da ideia de “assujeitamento” que vi numa das aulas de Didática da Matemática:

Vamos esclarecer esta noção de "bom sujeito" (e seu corolário, a noção de 'mau sujeito') de uma instituição I. Uma pessoa X parece ser um bom sujeito de I relativamente ao objeto institucional O quando sua relação pessoal $R(X,O)$ é julgada conforme a relação institucional $R_I(O)$. Também pode ser um sujeito ruim, incapaz

² Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (UFMS). Para maiores informações, acesse <https://ppgedumat.ufms.br/>

³ Grupo História da Educação Matemática em Pesquisa. www.hemep.org

de entrar no contrato institucional C_I e, em última instância, pode ser expulso de I. É aqui que começaria um desenvolvimento relativo à avaliação intrainstitucional, isto é, referente aos mecanismos pelos quais I é levada a pronunciar, por meio de alguns de seus agentes, um veredicto de conformidade (ou não-conformidade) de $R(X,O)$ a $R_I(O)$. (CHEVALLARD, 1992), p. 90, tradução nossa⁴)

Demorou bastante, mas a partir daí eu entendi o que estava acontecendo na minha vida. O Mato Grosso do Sul é muito diferente de outros estados como o Paraná e São Paulo, que têm grandes universidades espalhadas em seus territórios. Para continuar os meus estudos, eu só tenho o campus de Campo Grande, da UFMS. Esse afunilamento se acentua pelas condições políticas/econômicas e a fragilidade que as instituições passaram a ter no período de 2016 a 2019 de modo que, se não fosse a existência do PPGEdumat, eu nem teria como fazer um mestrado. Eu deveria me assujeitar às condições e restrições que me recaem, se quisesse me tornar um mestre. Sem ter condições de escolher (por desconhecimento total e também porque o Programa não dá essa possibilidade), fui colocado como orientando do professor Thiago. Em uma das reuniões de orientação, quando eu não soube responder à questão sobre o que eu queria fazer na pesquisa, ele indicou que as duas possibilidades mais fortes eram: 1) pesquisar sobre a história de algum curso, usando procedimentos semelhantes aos dos colegas de grupo (história oral) e; 2) pesquisar com alguma filosofia (sendo Wittgenstein o referencial mais familiar) estudando algum livro ou material do tipo. Sempre houve uma grande abertura, mas as minhas escolhas deveriam estar em harmonia com as demais produções do HEMEP, que se sintetizam naquelas duas sugestões. Como eu não queria conversar com ninguém (fazendo entrevistas, visitando instituições etc), preferi a opção 2, mencionada acima, que é basicamente a pesquisa em textos. A questão que se impôs, então, era: como conciliar o tema (geometrias não euclidianas) com todo o resto?

As geometrias estão presentes em diversos cursos de matemática, sejam de bacharelado, como é o caso do curso da UEM⁵, seja de licenciatura, o que ocorre em diversas universidades como UENP⁶, UFPR⁷, UFJF⁸, UFV⁹, entre outros. No âmbito nacional, a

⁴ “Précisons un peu cette notion de «bon sujet» (et son corollaire, la notion de «mauvais sujet») d’une institution I. Une personne X se révèle être un bon sujet de I relativement à l’objet institutionnel O lorsque son rapport personnel $R(X,O)$ est jugé conforme au rapport institutionnel $R_I(O)$. Elle pourra aussi se révéler comme un mauvais sujet, incapable d’entrer dans le contrat institutionnel C_I et sera peut-être, en fin de compte, expulsée de I. C’est ici que s’enclencherait un développement relatif à l’évaluation intrainstitutionnelle, c’est-à-dire relatif aux mécanismes selon lesquels I est amenée à prononcer, à travers certains de ses agents, un verdict de conformité (ou de non-conformité) de $R(X,O)$ à $R_I(O)$ ”. ((CHEVALLARD, 1992), p. 90)

⁵ Disponível em: <<http://www.pen.uem.br/cursos-de-graduacao/cursos/campus-sede-maringa-pr-x/documentos/matematica.pdf>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

⁶ Disponível em: <<https://uenp.edu.br/matematica-cj-ementas>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

⁷ Disponível em: <http://www.matematica.ufpr.br/old/graduacao/matematica_old/curriculo/lic_2018.html>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

presença de disciplinas que envolvam as GNE na formação do professor de matemática não é considerada obrigatória. Na UFMS¹⁰, por exemplo, não há disciplina específica sobre esta temática. Porém, devido às diretrizes da educação básica de certos estados, que indicam as GNE como parte do currículo de geometria, os cursos de licenciatura acabam obrigados a ofertar disciplinas que façam esse estudo. É o caso do Paraná¹¹, por exemplo. As diferenças entre os currículos, que acabamos de comentar minimamente, sinalizam um fenômeno sobre o qual vários membros do Grupo HEMEP se debruçaram enquanto estavam se preparando para serem pesquisadores: o que se chama de “formação de professores de matemática” varia imensamente de uma instituição para outra, ou na mesma instituição em diferentes épocas, nas convicções de pessoas diferentes etc.

Nossa questão de pesquisa foi se delineando, em um primeiro momento, em torno do que se diz sobre a presença/pertinência das geometrias não-euclidianas na Educação Matemática. Inicialmente, pensávamos que seria possível, ao final do processo, produzir textos ficcionais que problematizassem essas possíveis respostas. Estes textos, no entanto, seriam elaborados a partir de nossa leitura de artigos publicados em periódicos da área. Para esta leitura teríamos como suporte a filosofia de segunda fase de Ludwig Wittgenstein. Assim, explicitaríamos uma gramática (estrutura conceitual) com base na qual produziríamos discursos, combinando conceitos dentro dos limites autorizados pelas gramáticas explicitadas de cada texto ou da possível junção destes (caso percebêssemos uma mesma gramática). Neste momento, além da minha pergunta inicial, começava a surgir também uma questão metodológica: como seria tentar explicitar gramáticas de textos de Educação Matemática, quais resultados isso nos possibilitaria?

Adversas condições e restrições levaram a um afunilamento do corpus de análise e, conseqüentemente, a uma mudança no objetivo e na questão de pesquisa. O que ficou para o final foi a análise de apenas um artigo, com base no qual construímos uma gramática e pudemos, além de observar relações e divergências entre diferentes conceitos, criar novas conexões para um discurso que aborda a pertinência das GNE na educação básica e na formação de professores. Essas diferentes buscas têm a ver com uma espécie de perfume que acompanhou todo o fazer desta pesquisa e em algum momento acabou tomando todo o

⁸ Disponível em: <<http://www.ufjf.br/matematica/files/2015/04/PPC.licenciatura.novembro.pdf>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

⁹ Disponível em: <<http://www.catalogo.ufv.br/PDF/2018/vicosa/MAT350.pdf>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

¹⁰ Disponível em: <<https://inma.ufms.br/files/2013/10/Resolu%C3%A7%C3%A3o-COGRAD-48-2018-Novo-Curriculo.pdf>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

¹¹ Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

ambiente: a experimentação metodológica. Fomos por um caminho, experimentamos, tomamos outras decisões e assim o trabalho acaba assentando em uma proposta metodológica de leitura de textos, inspirada na filosofia de Wittgenstein. É o que chamamos de Análise Gramatical.

2 ANÁLISE GRAMATICAL

Como apresentamos na introdução, era necessário adequar meus interesses pessoais com os interesses do orientador e, por consequência, do grupo de pesquisa. Dentre as possibilidades, havia o uso da filosofia de Wittgenstein (ou inspirada no trabalho dele) para analisar textos e situações de sala de aula, principalmente pautados nas noções de jogos de linguagem, semelhanças de família e formas de vida.

Na educação matemática tem crescido o número de trabalhos que se utilizam das discussões de Wittgenstein, especialmente na sua segunda fase. Por influência desse movimento, nossa ideia inicial se distanciou do que seria um tipo de estado da arte e convergiu para uma terapia, um olhar panorâmico. A partir disso, pareceu impossível ignorar o artigo da Denise S. Vilela (2010), intitulado “A Terapia Filosófica de Wittgenstein e a Educação Matemática”. O meu problema foi que esse texto estava extremamente carregado de conceitos não só da filosofia wittgensteiniana, mas também relativos às convicções dos grupos nos quais a autora se localizava. Foi bastante pesado, para uma primeira leitura. Não via meus objetivos alinhados ao dela neste momento. Outros textos da Educação Matemática foram consultados, mas nada disso ajudou. Outros conceitos surgiam e, paralelamente, eu também lia textos do Wittgenstein, agoniado com percepção de que a semelhança entre estes e todas aquelas pesquisas me parecia cada vez menor. Então eu fui olhar para artigos que não fossem da Educação Matemática. Obviamente, nesse conjunto complementar existem muito mais artigos que abordam a filosofia de Wittgenstein. Foi assim que encontrei o artigo de Ana Falcato (2012) “Filosofia como Terapia Gramatical”. A partir desse artigo, finalmente alguma coisa de terapia começou a fazer algum sentido para mim. Foi aí que eu entendi que não era isso que queria fazer, mas a ideia de olhar para a gramática foi extremamente atraente. O tipo de mal-entendido que a terapia tenta resolver é semelhante ao nosso problema (gerador) de pesquisa, mas uma ressalva importante é que não há uma imagem cristalizada, alimentada por dieta unilateral, que estejamos tentando desmanchar aqui.

Dentre as possibilidades de aproximação com Wittgenstein, nos interessaram para este trabalho suas discussões a respeito de visão panorâmica: a gramática da linguagem. Tínhamos dúvida em como proceder com este ferramental e, principalmente, se isso nos renderia possibilidades de responder satisfatoriamente à nossa questão geratriz (qual a pertinência das GNE na Educação Básica e na formação de professores?). Assim, nossa questão de pesquisa ficou constituída na forma: Como podem ser produzidas respostas para a problemática da pertinência das GNE na Educação Básica e formação de professores a partir de uma análise gramatical de artigos científicos? A partir disso, o trabalho se constituiu em um tom mais

propositivo, com foco em filosofia e método, muito mais do que num encaixe da nossa pergunta em certo(s) modo(s) de fazer(s) que já estivesse(m) bem estabelecido(s) e tentar responde-la por esse(s) meio(s).

2.1 DESOBEDIÊNCIA EPISTEMOLÓGICA

Uma das coisas mais difíceis, no exercício de desobediência, é perceber como (e em quê) a colonização afeta aquilo que estamos tentando produzir. Não seria correto dizer “A Educação Matemática é uma área colonial”, porque isso seria como afirmar “Eu acredito na força da gravidade”. A última frase só teria sentido se entendêssemos que há a possibilidade de alguém não acreditar em tal força, o que será um absurdo enquanto objetos suspensos no ar continuarem a cair. Analogamente, devemos deixar claro que a colonização afetou a todos nós e a Educação Matemática não teria por quê ficar de fora disso. É um fato que se mostra com clareza na raridade de trabalhos que não expressam alguma preocupação epistemológica, discutindo conceitos filosóficos ou científicos eurocêntricos que, em muitos casos, não teriam outra utilidade, senão a de explicitar os instrumentos de análise e de visão/descrição de mundo importados da Europa. A visibilidade dos referenciais eurocêntricos se firma na invisibilidade da produção de outros povos, da não legitimação de seus conhecimentos como verdadeiros, relevantes ou compreensíveis.

Com tudo isso em mente, aqui estou eu, fazendo mais uma pesquisa em Educação Matemática. Porém, uma vez que tive contato com as aulas da professora Angela Maria Guida, senti a necessidade de pensar e fazer uma Educação Matemática decolonial, no sentido que

‘Colonialidade’ equivale a uma ‘matriz ou padrão colonial de poder’, o qual ou a qual é um complexo de relações que se esconde detrás da retórica da modernidade (o relato da salvação, progresso e felicidade) que justifica a violência da colonialidade. E descolonialidade é a resposta necessária tanto às falácias e ficções das promessas de progresso e desenvolvimento que a modernidade contempla, como à violência da colonialidade. (MIGNOLO, 2017, p. 13)

Parte da desobediência toma sentido, então, por uma questão de colonialidade. Mesmo que, na América do Sul, os países tenham a língua portuguesa ou a espanhola como oficial, mesmo que as gramáticas dessas línguas sejam praticamente idênticas aos sistemas de Portugal e da Espanha, “os corpos que as falam habitam memórias diferentes, e, sobretudo, diferentes concepções e “sensibilidade” de mundo” (MIGNOLO, 2017, p. 20).

Essa sensibilidade de mundo se desenha em nosso corpo como a mais verdadeira das tatuagens: aquela que o tempo imprime. A colonização praticada por europeus implicou numa destruição cultural dos africanos trazidos por eles e dos povos que viviam na América pré-

invasão. Muitos exemplos poderiam tornar essa violência mais concreta no meu texto, mas vou me limitar a lembrar que, em muitas colônias, foi proibido que as línguas não europeias fossem utilizadas em espaços públicos, sem contar que símbolos e lugares de culto foram destruídos ou convertidos, enquanto nomes cristãos eram forçadamente adotados. Os colonizados foram obrigados a aprender a cultura dos dominadores tanto quanto isso fosse útil para essa dominação. Esse processo levou a uma colonização das perspectivas cognitivas e da cultura em geral. Uma colonização epistêmica (QUIJANO, 2005; SANTOS, 2009).

Pensando nisso como “o caráter subjetivo da experiência de colonizado”, uma possibilidade de discurso que emprestamos de Nagel (2005), deduzo que a colonização epistêmica cria em cada indivíduo um mundo particular que só nós, do Sul, podemos compreender. Essa subjetividade é o nome que eu daria para “o que é ser colonizado para o colonizado”. Ao discutir a possibilidade de saber como é ser um morcego, Nagel (2005) comenta que os morcegos percebem o mundo através de um sonar que permite que esses animais discriminem qualidades como a distância, as dimensões, a forma, o movimento e a textura. Embora dê vontade de supor o contrário, essa forma de percepção não é semelhante a qualquer coisa que possamos ter experiência ou imaginar. Qualquer um que já tenha visto um morcego tentando sair de um ambiente em que ele esteja confinado, provavelmente, concordará que eles são formas de vida definitivamente diferentes, o que evidencia ainda mais a dúvida sobre a possibilidade de compreender sua subjetividade a partir de nosso próprio caso. Poderíamos fazer o esforço de imaginar como seria um voo possibilitado por membranas esticadas ao longo de nossos braços, onde o objetivo fosse capturar insetos com a boca, sob a orientação de um sistema de ressonância de alta frequência e de uma visão muito fraca, mas o autor nos deixa avisados:

A nossa própria experiência provê o material básico para a nossa imaginação, cujo alcance é, conseqüentemente, limitado. [...]. Até onde eu consiga imaginar isso (e não chego muito longe), isso apenas me diz como seria para mim comportar-me como um morcego se comporta. [...] Se eu ainda assim tento imaginar isso, fico restrito aos recursos da minha própria mente, inadequados para a tarefa. Não consigo isso nem mesmo imaginando acréscimos à minha experiência presente, nem imaginando segmentos gradualmente subtraídos dela, nem imaginando uma combinação de acréscimos, subtrações e modificações. [...] O problema, contudo, não está restrito aos casos exóticos, já que ele se coloca entre uma pessoa e outra. (NAGEL, 2005, p. 249-251)

Antes de ter lido a citação anterior, talvez nosso leitor tenha pensado que bastaria imaginar “como é viver fora dessa lógica, para quem não vive nela”. Nada mais do que um sonho, da mesma forma que pensar fora de nossa subjetividade seria impossível também. Não temos como deixar de sermos nós mesmos para imaginar a vivência de formas de vida cujas

experiências, memórias e sensibilidades não são nossas. Nunca saberemos como é viver sem a lógica da colonialidade. No máximo, podemos desobedecê-la quando a percebemos.

Isto não significa, porém, que eu me tornei “o Decolonial”, um personagem que expressa com obviedade suas desobediências e que não faz de outra forma, senão a decolonial. Aqui, isso foi bastante pontual e tanto será percebido por aqueles que leem ou trabalham com a filosofia de Wittgenstein, porque estes não verão aqui um decalque¹² do que esse filósofo fez, quanto parecerá inexistente para aqueles que não têm essas leituras em sua lista mais seleta de preferências. A dificuldade de perceber essa desobediência é tal que, se os Wittgensteinianos fossem pianistas, aqui, eu estaria componho como um pianista canhoto. Eu sigo regras ou padrões harmônicos, rítmicos e melódicos semelhantes às tendências da música de minha época (com algumas transgressões artísticas que suscitam alguns suspiros e muitas críticas), mas, diferente da maioria que tem coordenação motora mais livre do lado direito, é com a esquerda que eu me sinto mais ágil para fazer as melodias cantarem. Conseqüentemente, ouvem-se músicas de mais destaque nas notas graves e acordes sustentados em tons médios/agudos pela mão direita.

O texto deste capítulo é só uma tentativa de narrar as compreensões que eu construí sobre uma filosofia ao longo do mestrado. Não todas, mas aquelas que me parecem úteis para fazer uma análise ou para fundamentar esse modo de fazer.

2.2 POR QUE A LINGUAGEM?

Um modo que me parece muito intuitivo de se pensar a linguagem é por meio de uma das correntes filosóficas que a considera como algo pertencente a um mundo ideal, isto é, que pode funcionar independentemente das atividades e dos corpos humanos que a praticam. Nessa perspectiva, a linguagem emergiria como representação fidedigna da realidade, de suas estruturas, de seus elementos e mecanismos. Cada palavra estaria ligada a uma coisa e todas as palavras, ligadas entre si. Essa linguagem, com suas estruturas, seria paralela ao mundo dos fatos e às suas outras estruturas, como uma imagem ou pintura.

Conhecer os elementos que compõe a Excalibur e saber explicar como essa espada é formada nos ajudaria a compreender a expressão “a Excalibur está ali no canto”? Aquela concepção de paralelismo entre linguagem e mundo fica muito menos intuitiva quando os teóricos que trabalhavam nela a levaram até as últimas conseqüências, chegando ao atomismo

¹² Essa metáfora se refere a um processo que permite transferir, por pressão, imagens de uma superfície para outra. A superfície de baixo fica marcada com os mesmos contornos da figura original e, a partir disso, é comum que desenhistas iniciantes façam uma cópia ou uma releitura da imagem marcada.

lógico. A partir daí eles entenderam que a linguagem funcionaria como descritora dos fatos, representados pela fragmentação dos enunciados em proposições simples. Analogamente falando, no atomismo lógico os enunciados são analisados como se esse processo fosse uma escavação geológica. (FALCATO, 2012; GLOCK, 1996).

Anos depois de defender e contribuir significativamente com as teses dessa corrente, o filósofo Ludwig Wittgenstein mudou de opinião. Passou então a considerar outras características da linguagem que haviam sido esquecidas naquele primeiro momento de sua carreira. Dentre suas críticas à interpretação pictórica da linguagem, nos interessa muito para este trabalho aquela que se refere à formação de conceitos, porque ela faz desmanchar-se a confusão entre investigações factuais e investigação conceituais, bem como a superstição de uma linguagem universal.

Se se pode explicar a formação de conceitos por fatos da natureza, não nos deveria interessar, em vez da gramática, aquilo que na natureza lhe serve de base? — Interessam-nos também a correspondência de conceitos com fatos muito gerais da natureza. (Aqueles que, por causa da sua generalidade, quase sempre não nos chamam a atenção.) Mas nosso interesse não se volta para essas possíveis causas da formação de conceitos [...]. Não digo: se os fatos da natureza fossem diferentes, os homens teriam outros conceitos (no sentido de uma hipótese). Mas: quem acredita que certos conceitos são simplesmente os certos, quem possuísse outros, não compreenderia o que compreendemos —> este poderia se representar certos fatos da natureza, muito gerais, de modo diferente do que estamos habituados, e outras formações de conceitos diferentes dos habituais tornar-se-ão compreensíveis para ele. (IF XII¹³)

Se ignorássemos a diferença entre esses dois tipos de investigação, estaríamos ignorando, por exemplo, a diferença entre análise química e análise lógica. Isto é o mesmo que ignorar a realidade da linguagem, a sua multiplicidade, pois, “mesmo que nós pudéssemos descobrir os componentes finais da [espada] Excalibur, isto contribuiria para o nosso conhecimento de sua constituição química/física, mas não para o nosso entendimento do sentido de [A Excalibur está no canto]”. (GLOCK, 1996, p. 205 e 207, tradução nossa¹⁴)

No nosso entender, pensar *a linguagem* como uma metafísica (que trata conceitos como fatos) afasta-a de seus contextos comuns (cotidianos) de uso (IF §116). O texto de Wittgenstein (1999) explicita sua mudança de posição em relação àquele idealismo, quando

¹³ Para referências mais precisas das Investigações Filosóficas (WITTGENSTEIN, 1999), utilizamos a notação 'IF §109a4-6', que indica a seção (109), parágrafo (a) dentro daquela seção, sentenças 4-6 dentro daquele parágrafo. A omissão dos dois últimos códigos só indica que, naquele momento particular, não achamos necessário especificar tanto. Além de IF, utilizamos siglas análogas para Gramática Filosófica (WITTGENSTEIN, 2010), Philosophical Grammar (WITTGENSTEIN, 1974), Da Certeza (WITTGENSTEIN, 2000), On Certainty (WITTGENSTEIN, 1969), Remarks on Colour (WITTGENSTEIN, 1977) Remarks on the Foundations of Mathematics (WITTGENSTEIN, 1967) e Zettel (WITTGENSTEIN, 1997).

¹⁴ “Even if we could discover Excalibur's ultimate constituents, this would contribute to our knowledge of its physical make-up, but not to our understanding of the sense of (3)” (GLOCK, 1996, p. 207)

passa a argumentar contra o paralelismo entre linguagem e mundo. Por exemplo, ele observa o seguinte:

Quantas espécies de frases existem? Afirmação, pergunta e comando, talvez? — Há inúmeras de tais espécies: inúmeras espécies diferentes de emprego daquilo que chamamos de "signo", "palavras", "frases". E essa pluralidade não é nada fixo, um dado para sempre; mas novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, como poderíamos dizer, nascem e outros envelhecem e são esquecidos. [...] O termo 'jogo de linguagem' deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida (IF §23a-b)

A ideia de jogo de linguagem não é uma oposição polarizada em relação à concepção pictórica, mas existem diferenças. Uma marca nítida disto é que a primeira não vê a linguagem como um único sistema de comunicação ligado à essência daquilo a que cada palavra se refere. Nas explicações acerca da linguagem, essa busca por essências é denunciada como um mal-entendido. É uma investigação que gera os problemas que tenta resolver, como ocorre quando, ao falar sobre o que há de comum a todos os jogos, alguém diz que neles sempre se empurram “coisas, segundo certas regras, numa superfície...” (IF §3). Sobre a própria ideia de jogo já é difícil, se é que possível, conceituar. Há algo comum a todos os jogos para que eles recebam esse nome? Se pensarmos nos jogos de cartas, concordamos que há muito em comum entre um e outro, mas várias dessas características se perdem em comparação com os de tabuleiro. Eles acontecem por turnos alternados, mas quando passamos para os jogos de bola, essa característica se perde. Se fosse a concorrência pela vitória, estaríamos deixando de olhar para os jogos do tipo “jogar a bola na parede, pegar de volta e jogar novamente” (IF §66). Uma conclusão dessa discussão, que Wittgenstein faz, indica aquilo que nos permite chamar alguma coisa de “jogo” como algo que não é para ser pensado, mas visto:

se você os contempla, não verá na verdade algo que fosse comum a todos, mas verá semelhanças, parentescos, e até toda uma série deles. Como disse: não pense, mas veja. [...] Veja que papéis desempenham a habilidade e a sorte. E como é diferente a habilidade no xadrez e no tênis. [...] E tal é o resultado desta consideração: vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente. Semelhanças de conjunto e de pormenor. [...] Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão "semelhanças de família"; pois assim se envolvem e se cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc., etc. — E digo: os "jogos" formam uma família. (IF §66-67)

Outra exigência que não existe mais, nesse segundo movimento, é que cada palavra denomine algo (IF §38). Por exemplo, a palavra “cada”, na minha frase anterior. O que ela denomina? As mesmas palavras podem ter funções muito diferentes em seus usos nos jogos de linguagem. Mesmo falantes habilidosos da língua portuguesa podem não compreender os textos de demonstrações matemáticas. Eles também podem não compreender textos de

linguagem médica, apesar da escrita estar em português. Por outro lado, teria algum sentido usar as exclamações “Força!” “Socorro!” e “Água!” em linguagem matemática? Nesses exemplos, não se trata de compreender “a” linguagem, mas sim de saber jogar os diferentes jogos de linguagem, afinal, o rei do xadrez só precisa fazer sentido no jogo de xadrez. Chamaremos de jogo de linguagem, a partir de agora, “o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada” (IF §7).

Na investigação deste trabalho, não tenho preocupações com as geometrias, a aprendizagem, a educação etc. Nenhum fato novo a respeito de suas causas, efeitos ou processos, de seus fenômenos em geral, será apresentado aqui como resultado, porque o que nos interessa não são os fenômenos em si, mas as possibilidades de fenômenos, isto é,

Refletimos sobre o modo das asserções que fazemos sobre os fenômenos. [...] Nossa consideração é, por isso, gramatical. E esta consideração traz luz para o nosso problema, afastando os mal-entendidos. Mal-entendidos que concernem ao uso das palavras [...] Muitos deles são afastados ao se substituir uma forma de expressão por outra; isto pode chamar de "análise" de nossas formas de expressão, pois esse processo assemelha-se muitas vezes a uma decomposição. (IF §90)

É nesse sentido que digo que a nossa investigação é filosófica e, quando digo “análise”, isso não deve ser entendido como mais do que uma elucidação de conexões entre conceitos – uma análise gramatical (GLOCK, 1996). Retomando à comparação que fizemos anteriormente, este trabalho se parece mais com um estudo geográfico do que com uma escavação geológica, pois “a representação panorâmica permite a compreensão, que consiste justamente em ‘ver as conexões’. Daí a importância de encontrar e inventar **articulações intermediárias**”. (IF §122a3-5, grifo do autor)

2.3 SOBRE GRAMÁTICA

O que muitos filósofos têm chamado de “esquema (ou estrutura) conceitual”, refere-se a redes de noções fundamentais e princípios que são do interesse da filosofia investigar. A gramática da linguagem, de acordo com Glock (2009), é um esquema conceitual e essa concepção estaria mais relacionada a um movimento que não é o “segundo Wittgenstein”, mas um movimento posterior: o que alguns chamam de terceiro Wittgenstein. Ao trabalharmos com isto, estamos desviando de muitos usos dessa filosofia na Educação Matemática, que costumam se centrar nas ideias de Terapia, diferentes Jogos de Linguagem e Formas de Vida. Sendo assim praticamos um tipo de desobediência às tendências já existentes em trabalhos de inspiração wittgensteiniana.

Num esquema conceitual, os conceitos são ligados ou relacionados por meio de proposições gramaticais e o conjunto destas proposições é a estrutura em si. Resumidamente,

queremos construir, de forma explícita, estruturas conceituais que percebo nas leituras de textos cujos temas são “geometrias não euclidianas” e “Educação Matemática”. Uma maneira razoável de fazer essa construção começa com uma classificação das proposições que encontro durante a leitura de cada texto. Tais proposições podem ser do tipo “empírico” ou “gramatical”. O primeiro tipo engloba as aplicações de conceitos ou de regras para descrever estados de coisas – proposições empíricas são lances no jogo de linguagem e se expressam como afirmações que podem ser testadas (DC 109). Já as proposições gramaticais são regras ou leis. Elas funcionam mais como critérios de teste e estabelecem o sentido de certos termos. A gramática, conjunto destas leis, é uma espécie de andaime: uma estrutura “que nos permite operar o jogo de linguagem” (GLOCK, 2009, p. 664, tradução nossa¹⁵). Agora você pode estar se perguntando qual é a potência dessas estruturas no trabalho filosófico, então tentaremos apresentar algumas possibilidades.

Nas Investigações Filosóficas, Wittgenstein (1999) distingue duas gramáticas para o uso das palavras: a gramática de superfície e a gramática de profundidade¹⁶:

Poder-se-ia distinguir, no uso de uma palavra, uma 'gramática superficial' [ou de superfície] de uma 'gramática profunda' [ou de profundidade]. Aquilo que se impregna diretamente em nós, pelo uso de uma palavra, é o seu modo de emprego na construção da frase; a parte do seu uso — poderíamos dizer — que se pode apreender com o ouvido. (IF §664a-c)

Essa primeira gramática classifica as palavras em diferentes tipos lógicos, como numerais, verbos e pronomes. Ela também é o conjunto de regras que governa a construção de sentenças, impondo restrições às possibilidades combinatórias de palavras, ou seja, descrevendo as estruturas dos enunciados e denunciando quando eles não estão bem formados, no que diz respeito à sintaxe (BAKER, 2001; FALCATO, 2012). Quando diz “a parte de seu uso que se pode apreender com o ouvido”, Wittgenstein chama atenção para uma marca característica que também se encontra no conceito de proposição, isto é, o som da proposição (IF §134).

Para que pudéssemos estabelecer algum diálogo com outras pesquisas que se colocaram em semelhante empreitada, fosse para descrever diferenças, semelhanças ou discutir resultados, buscamos em indexadores como Scielo, *Web of Science* e Portal de

¹⁵ “Without any whiff of inconsistency, therefore, Wittgenstein's last writings distinguish three elements (see PI II. xii; RPP I §48; Z §§350, 387-8): [...] the framework or “scaffolding” which allows us to operate the language-game” (GLOCK, 2009, p. 664).

¹⁶ Nesses dois termos, especificamente, utilizamos uma terminologia que traduzimos de Baker (2001), ao invés da tradução de José Carlos Bruni (WITTGENSTEIN, 1999). Este, utiliza o termo “gramática superficial”, que não nos parece tão adequado, porque nós entendemos que é mais comum usar o adjetivo “superficial” para aquilo que não está bem fundado, que é apenas aparente e leviano, o que não é o caso da gramática de superfície.

Periódicos Capes, mas nenhum trabalho que tivesse a expressão “Análise Gramatical”¹⁷ em seu título apresentava alguma metodologia semelhante ao nosso intuito de trabalhar com gramática e esquemas conceituais. Os trabalhos de Pagani (2004) e Kim (1988), até poderiam ser vistos como próximos, porque eles decompõem expressões linguísticas para formar estrutura sintagmáticas e estas, são resultados do que eles chamam de análise gramatical. Entre outras possibilidades de representação¹⁸ dessa estrutura, a usada com maior frequência é um grafo (Árvore). O que eles chamam de gramática é o que linguistas costumam chamar de *phrase structure grammar* (PSG), que em português corresponde a “gramática de estrutura sintagmática”. Essa gramática “é uma forma de especificar quais são as expressões bem formadas de uma língua, especificando também a que estruturas ela pode estar relacionada” (PAGANI, 2004, p. 8). Essa preocupação com a formação das frases cabe a uma gramática de superfície, que não é o nosso interesse neste trabalho.

Segundo Baker (2001), os critérios da gramática de superfície consideram somente categorias sintáticas (artigo, substantivo, adjetivo, pronome, numeral etc.), como já comentamos, e formas de sentenças (vocativo-sujeito-predicado, orações subordinadas etc.), portanto, afirmações como “a timidez azul é rodinha, para o cheiro de seus sapatênis sorridentes” e “ideias verdes dormem furiosamente” são bem formadas nos critérios desse tipo de gramática, mas para o autor, elas parecem falhar em fazer afirmações inteligíveis ou em ser *logicamente* bem formadas. Então essa gramática, em contraste com a de profundidade, é inútil para o uso filosófico, porque deixa escapar afirmações essas que não têm sentido lógico.

Não propomos aqui posições antagônicas, a gramática de profundidade não é definida por oposição à de superfície. Ela só é mais restritiva em suas autorizações. É essa parte da gramática que exclui alguma sentença como ‘sem sentido’ quando, por exemplo, alguém faz cara de dor e aponta para a própria boca dizendo “abracadabra!”, logo antes de explicar que essa expressão era uma descrição de sua dor de dente (IF §665). Quero dizer, o trabalho que ela deixa para o filósofo é o de olhar para a parte do uso das palavras que não tem a ver com a construção de sentenças. Em seu artigo, Baker (2001) destaca e enumera seis características relativas à gramática de profundidade, para as quais Wittgenstein chamou atenção e deu importância várias vezes. São elas,

- (1) Diferenças nas formas como as palavras individuais são integradas na atividade humana, [ou seja,] as diferentes formas de operar com palavras. [...]
- (2) Diferenças nas formas em que sentenças completas são empregadas. [...]

¹⁷ Também pesquisei por *Grammar Analysis*, para tentar encontrar artigos publicados em inglês.

¹⁸ As representações por retângulos e por colchetes, por exemplo.

- (3) Dependência da questão de se uma expressão particular de uma sentença bem formada (uma que soe perfeitamente bem) realmente faz sentido (isto é, tem um papel em um jogo de linguagem) nas circunstâncias que envolvem sua expressão. [...]
- (4) O absurdo [*nonsensicality*] (a inutilidade) de uma proposição baseada em um cálculo errado. [...]
- (5) A construção de jogos de linguagem imaginários ou hipotéticos como objetos de comparação. [...]
- (6) Preocupação com imagens as quais indivíduos podem associar com os usos de palavras particulares. (BAKER, 2001, p. 309-314, *tradução nossa*¹⁹)

Essa interpretação dá uma explicação direta do termo “profundidade”, fornecendo dimensões de investigação que diferem da construção de sentenças, portanto, permite que olhemos em outras direções, na tentativa de desfazer confusões filosóficas²⁰. Intuitivamente, para o autor, se comparássemos a gramática com a geometria, a de superfície seria como a geometria plana e a de profundidade, como a espacial ou até outra coisa com mais de três dimensões.

Em outra indicação que foi muito valiosa para ajudar a nortear esta pesquisa, o mesmo texto expõe que:

A habilidade de um expositor de gramática filosófica (ou de ‘sintaxe lógica’?) é tomar uma expressão que soa legítima e, assim, manipular seus elementos de forma a produzir algo análogo, que soe malformado. Este é o método padrão para tornar patente, o *nonsense* latente. (BAKER, 2001, p. 307, *tradução nossa*²¹)

A partir dessas considerações, tivemos o intuito de criar jogos de linguagem fictícios, que obedeceriam às gramáticas construídas a partir da leitura de textos. Nesses jogos fictícios, diversas manipulações dos conceitos poderiam ser feitas, afim de investigar como os mesmos podem operar “dentro” das gramáticas dadas *a priori* na sua construção. Nestes jogos fictícios poderíamos confrontar diversas gramáticas, explicitar aproximações e diferenças de forma não dogmática, colocando o leitor a percebê-las, bem como perceber outras que não intencionávamos explicitar. A elaboração destes jogos nos colocaria em exercício, um

¹⁹ (1) *Differences in the ways individual words are integrated into human activity, the different ways of operating with words [...]*; (2) *Differences in the ways complete sentences are employed [...]*; (3) *The dependence of the question whether a particular utterance of a well-formed sentence (one having unexceptionable Satzklang) really makes sense (i.e. has a role in a language-game) on the circumstances surrounding its utterance [...]*; (4) *The nonsensicality (uselessness) of a proposition based on a wrong calculation [...]*; (5) *The construction of imaginary or hypothetical language-games as objects of comparison [...]*; (6) *Concern with pictures which individuals may associate with the uses of particular words.* (BAKER, 2001, p. 309-314)

²⁰ O que não significa que são exatamente os pontos levantados por Baker, os nortes de nossa pesquisa. Ele só ajudou a compreendermos melhor a ideia de gramática, para pensarmos em nosso próprio modo de fazer a pesquisa.

²¹ “*The skill of an expositor of philosophical grammar (or of ‘logical syntax’?) is to take an expression that sounds legitimate and so manipulate its elements as to produce something analogous that sounds ill-formed. This is the standard method for making latent nonsense into patent nonsense*”.

exercício de *adentrar* estas (diferentes) gramáticas, fazer uso delas, nos apropriarmos de suas regras.

Não pretendíamos constituir uma gramática única que abarcasse todos os jogos estudados, ainda que acreditássemos ser possível que houvesse regras gerais de construção gramatical destes textos, mas operar com alguns possíveis agrupamentos, semelhanças. Não era a busca de um traço geral e essencial que colocasse todos os textos de geometrias não euclidianas sob um mesmo modo de funcionamento.

Contudo, os processos que se apresentarão à frente nos tomaram muito mais tempo do que imaginávamos, as dificuldades na construção destas gramáticas nos obrigaram a optar por focarmos em um único texto, como veremos na sequência.

2.3.1 Sobre a construção da gramática de um texto

Segundo Glock (2009), Wittgenstein defendia que, não só existem proposições empíricas e proposições gramaticais, mas as mesmas proposições podem ser empregadas gramatical ou empiricamente. A distinção entre esses tipos de emprego é dada pelo contraste entre, respectivamente, proposições que ligam nossos conceitos (constituindo-os normativamente) e proposições que empregam esses conceitos descritivamente, para fazer afirmações factuais. Indicações dessa distinção podem ser encontradas em Zettel (WITTGENSTEIN, 1997). Alguns excertos que indicam, por exemplo, que os problemas empíricos são diferentes dos problemas lógicos e que estes são gramaticais²² (Z 590), ou ainda, que as investigações factuais são diferentes das investigações conceituais, sendo estas, aquilo que se chama de “investigações filosóficas”²³ (Z 458). A ideia, já mencionada, de que a principal característica de uma proposição é o seu som, nos garante que, conhecendo minimamente uma língua, podemos notar quais são as proposições em um texto. Poderíamos também distinguir o emprego de uma proposição como gramaticais ou empíricas?

A principal dificuldade em classificar proposições está na falta de nitidez da demarcação entre regra e proposição empírica²⁴ (DC §97; §319). Por exemplo, as proposições gramaticais podem expressar regras para o uso de palavras apresentando-se “no disfarce de

²² Z 590 – “*La conexión de nuestro problema principal con el problema epistemológico de la voluntad ya me había llamado la atención antes. Cuando en psicología aparece uno de estos problemas recalcitrantes, jamás es una cuestión de hechos empíricos (tales cuestiones son siempre mucho más tratables), sino un problema lógico, o sea, propiamente gramatical*”.

²³ Z 458 – “*Investigaciones filosóficas: investigaciones conceptuales. Lo esencial de la metafísica: el hecho de que borra la diferencia entre investigaciones fácticas y conceptuales*”.

²⁴ DC 319 – “*Mas não se teria de dizer então que não há demarcação nítida entre as proposições da lógica e as proposições empíricas? A falta de nitidez é a da demarcação entre regra e proposição empírica*”.

proposições factuais” (GLOCK, 2009, p. 656). Além disso, “as sentenças são frequentemente usadas na fronteira entre o lógico e o empírico, de modo que seu significado muda para frente e para trás e elas contam ora como expressões de normas, ora como expressões de experiência”²⁵ (RC 32a, tradução nossa). Wittgenstein ainda reforça em DC §98 que, embora essa classificação seja difícil, a diferença existe e, se alguém dissesse que a lógica é uma ciência empírica, estaria errado. Entender o emprego de uma proposição como gramatical, em um texto, depende mais de conseguirmos ver o seu “aspecto gramatical”, do que da forma dessa proposição, então vamos discutir o que significa “perceber” esse tal aspecto.

2.3.2 Considerações sobre a leitura

A compreensão de um texto pode ser comparada à compreensão de uma pintura ou de uma música. Na leitura, as palavras, a forma, as ilustrações, as referências, enfim, tudo que pode ser visto nas páginas, é fixo. Quero dizer: sabemos que o texto permanece imutável toda vez que olhamos para ele de novo, mas, paradoxalmente, nós podemos ler o mesmo texto e vê-lo diferentemente a cada olhar (GF §4). Essas diferentes experiências ficam muito evidentes quando olhamos para imagens enigmáticas como o Pato-Coelho de Marcus Jastrow (1829 – 1903) (Figura 1), onde se pode sair da visão de um pato para a visão de um coelho no retrato do mesmo animal.

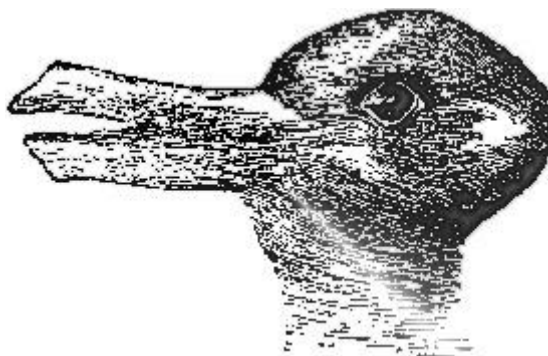


Figura 1: Pato-Coelho

Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/Rabbit-DuckIllusion.html> (acesso em 20/10/2018)

Nesta imagem, a diferença entre ver um animal ou outro está no que Wittgenstein chama de “percepção de aspecto”. Não se trata apenas da variação de posição do globo ocular. Tampouco é uma questão de aspectos ópticos – como seria o caso de discutir se uma zebra é preta com listras brancas ou vice-versa. Para o autor, essa percepção de aspecto está muito mais próxima de uma interpretação. Alguém pode saber que existem tal e tal interpretações e

²⁵ RC 32a – “Sentences are often used on the borderline between logic and the empirical, so that their meaning changes back and forth and they count now as expressions of norms, now as expressions of experience”.

não ser capaz de vê-las, porque isso requer a posse de certos conceitos (GLOCK, 1996). Por exemplo, as variações cubo de Louis Albert Necker (1786–1861), como a que exponho na Figura 2, são bidimensionais, mas os mesmos vértices podem ser percebidos ora com profundidade, como se estivessem mais fundos que a página na qual estão desenhados, ora com protuberância, mais salientes do que a mesma página. Mesmo sabendo que a figura é plana, eu, por exemplo, não consigo vê-la como algo de duas dimensões:

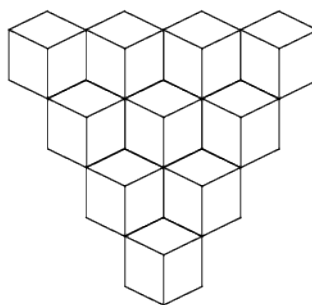


Figura 2: Cubo de Necker

Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/NeckerCube.html> (acesso em 20/10/2018)

Quando nós percebemos um aspecto diferente, estamos colocando aquela imagem ou sentença em outro contexto do nosso pensamento, o que permite detectar novas conexões e fazer novas comparações. A forma como reagimos muda e com isso vêm mudanças no que podemos fazer com tal imagem (GLOCK, 1996). Além disso, entender um texto, muitas vezes é um processo de tradução. É a substituição de um simbolismo por outro. Um artista, por exemplo, poderia dizer que compreende uma pintura, por ser capaz de modelar sua imagem numa escultura de argila (GF §7).

2.3.3 Classificação proposicional

Mesmo com tantas complicações, a possibilidade de afirmarmos que uma proposição (lida em um texto) é empírica ou gramatical não deve ser descartada, ou seja, essa fronteira não é ilegítima ou impraticável (GLOCK, 2009). Temos algumas indicações que ajudam fazer algo como “ver animais, quando olhamos para as nuvens”. A distinção pode ser feita com base no emprego das proposições, mesmo que sua forma não tenha como ser usada como critério²⁶ (RC 32b; GLOCK, 2009).

Como mencionado anteriormente, as proposições gramaticais são o tipo que mais nos interessa para a construção das estruturas conceituais. Foi dito também que elas são regras que constituem a nossa linguagem. Essas regras podem ser do tipo lógico pragmático ou sintático,

²⁶ RC32b – “For it is certainly not an accompanying mental phenomenon--this is how we imagine 'thoughts'--but the use, which distinguishes the logical proposition from the empirical one”.

mas esse último tipo, por pertencer à gramática de superfície descrita por Baker (2001), não fará parte de nossas considerações. Embasados no texto de Glock (2009), destacamos algumas características que podem nos indicar, na leitura de um texto, que o emprego de uma proposição dada é gramatical. Faremos isto questionando se a proposição:

- faz parte da constituição de um jogo de linguagem?
- é menos descritiva do que normativa;
- estabelece (leia-se “normatiza”) o que conta como uma descrição inteligível da realidade;
- estabelece relações internas entre conceitos ou;
- licencia transformações de proposições empíricas.

Tais características se aplicam “não apenas às ‘proposições matemáticas e a verdades definicionais como ‘preto é mais escuro que branco’, mas também às proposições [...] da metafísica descritiva” que trata afirmações conceituais com afirmações factuais (GLOCK, 2009, p. 657, tradução nossa²⁷). Com isso, temos uma espécie de ‘receita’ (num sentido familiar ao culinário) para destacar as proposições gramaticais de um texto e construir o esquema conceitual correspondente ao conjunto delas, mas outro elemento importante nessas leituras é a sensibilidade. Ainda que uma proposição não caiba nessa receita, ela pode ser gramatical e, se for percebida como tal, será incluída no esquema conceitual também.

2.3.3.1 A forma dos esquemas conceituais

Neste trabalho, uma das desobediências que exercitamos é a construção de esquemas conceituais, baseada na diferença de proposição gramatical para proposição empírica e na ideia de gramática de profundidade. Para dar forma aos esquemas conceituais utilizaremos grafos²⁸ nos quais cada conceito será um vértice e cada proposição gramatical (leia-se “relação entre conceitos”) será uma aresta (Figura 3).

²⁷ “*This holds not just for mathematical propositions and definitional truths like ‘Black is darker than white’, but also for the [...] propositions of descriptive metaphysics*”. (GLOCK, 2009, p. 657)

²⁸ A representação por grafos é muito útil para tornar visual um conjunto de dados no qual interessam apenas um conjunto de pontos e um conjunto de relações entre pares desses pontos. Em ciências humanas, essa representação é muito utilizada para explicitar diversos tipos de network, como por exemplo as relações entre personagens de uma história, a citação e co-citação de autores que abordam uma temática dada, mapas conceituais e diagramas que representam possíveis escolhas com suas consequências. Infelizmente não encontramos referências da Educação Matemática que tivessem metodologias e análises a partir de grafos.

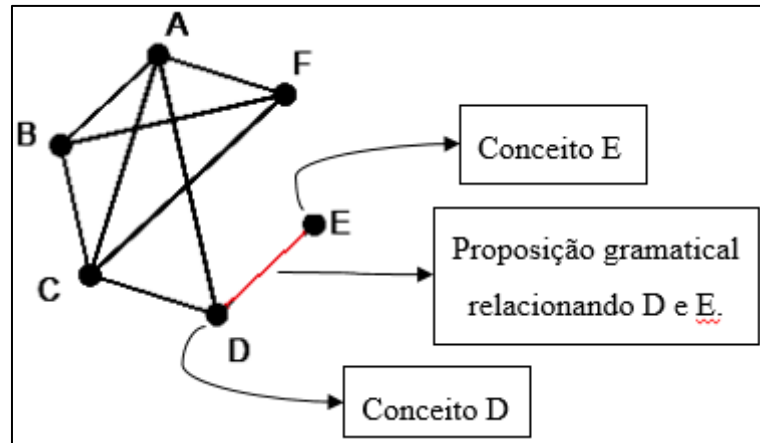


Figura 3: Aparência de um Esquema Conceitual
 Fonte: Elaborado para a pesquisa

É claro que isso implica em um binarismo das proposições que pode simplificar muito algumas sentenças. Assumimos que, por consequência, tanto pode-se gerar relações diferentes das que foram lidas no texto, quanto pode-se causar a perda de outras relações. O que não podemos deixar de questionar é se seria possível explicitar perfeitamente a gramática de profundidade de um texto, sem perdas ou acréscimos, descrevendo exatamente a estrutura conceitual que nele se apresenta. Outra questão muito pertinente é: quando construímos uma gramática dessa forma, ela ainda é uma gramática? Talvez essa seja mais uma de nossas desobediências. Todas essas perdas se abrigam no mesmo guarda-chuva, que é o ato de tomar decisões, muitas vezes difíceis, para nos colocarmos em caminhos possíveis de serem executados frente a nossas condições.

3 ANÁLISE APLICADA

Na busca por respostas à pergunta geratriz deste trabalho: “o que se diz sobre a pertinência das Geometrias não Euclidianas na Educação Matemática?” resolvemos observar quais respostas eram dadas pela Educação Matemática. Desta forma, além de atender nossos anseios pessoais produziríamos um mapeamento de gramáticas, ou de uma gramática, que, entre outras coisas, apontasse ou não para a pertinência de outras geometrias no ambiente escolar e na formação de professores.

3.1 SELEÇÃO DO CORPUS

Para a seleção do material que passaria depois a compor nossos grafos, nos inspiramos em pesquisas do tipo estado da arte²⁹, cujo material de análise é composto apenas por um setor³⁰ de publicações sobre o tema (ROMANOWSKI e ENS, 2006). O nosso intuito com essa metodologia era o de dispor fatos relativos às Geometrias Não Euclidianas, dados no uso linguístico, para obter uma visão panorâmica desse tema e evitar, entre outras coisas, uma dieta unilateral³¹ (IF §593; FALCATO, 2012).

A realização dessa parte da pesquisa esteve acompanhada por uma sombra de grande preocupação: a de não deixar publicações de fora (principalmente as brasileiras). Inicialmente, pensamos que uma busca por assunto no Portal de Periódicos CAPES/MEC seria suficiente, pelo menos, para a obtenção dos artigos publicados por pesquisadores brasileiros em periódicos nacionais, no entanto isso não se verifica. Realizamos uma busca em 29/12/2017 pelo artigo “A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática)” (MIGUEL, 2015) neste portal e não obtivemos resultado satisfatório, mesmo quando as palavras buscadas formavam exatamente o título do artigo. O periódico no qual esse texto foi publicado é a revista *Perspectivas da Educação Matemática* (UFMS), que tem Qualis B3 na área de Educação, B1 na de Ensino³² e faz 3 publicações online por ano, desde 2014. Isso indica que nem todos periódicos que são avaliados pela CAPES, que têm publicações das pesquisas de várias universidades brasileiras, constam no Portal de Periódicos. Utilizar esta ferramenta como filtro poderia então deixar diversas pesquisas fora do nosso corpus. Uma alternativa foi mapear os periódicos avaliados

²⁹ Neste texto, sempre que dissermos “estado da arte” ou “estado do conhecimento”, estaremos nos referindo à mesma coisa.

³⁰ Dissertações, teses ou artigos, entre outros.

³¹ “Uma causa principal das doenças filosóficas — dieta unilateral: alimentamos nosso pensamento apenas com uma espécie de exemplos”. (IF §593)

³² Na proposta de unificação do Qualis e nova estratificação a revista consta como A3.

no sistema Qualis, ao invés de buscar por bases de indexação. Acreditamos que assim deixaríamos menos textos de fora de nosso corpus.

3.1.1 Sobre o QUALIS e Seleção de Revistas

Segundo Barata (2016), até o ano de 1998 os programas de pós-graduação eram avaliados apenas pela quantidade de artigos publicados, até que o Conselho Técnico-Científico da Educação Superior (CTC-ES) admitiu a necessidade de qualificar a produção dos programas de pós-graduação brasileiros. Contudo, a quantidade de artigos produzidos em cada triênio já era tão grande que seria impossível avaliar cada uma das produções. Diante disso, a decisão alternativa do conselho foi de qualificar os veículos de divulgação científica, supondo que a avaliação dos artigos nos periódicos de grande impacto e relevância exigiriam maior competitividade dos autores, bem como, confiando na qualidade prometida pelo sistema de revisão por pares. Critérios de avaliação específicos de cada área e algumas normas universais constituem a avaliação. A classificação atual é formada por 8 estratos indicativos de qualidade que são, em ordem decrescente, A1 (estrato mais elevado), A2, B1, B2, B3, B4, B5 e C que, sem peso, é aplicado a publicações que não atendem aos requisitos mínimos da área de avaliação ou que não são periódicos científicos. Há uma proposta de reformulação³³ em tramitação, na qual os estratos seriam baseados em indicadores bibliométricos de três bases: Scopus (*CiteScore*), *Web of Science* (Fator de Impacto) e *Google Scholar* (índice h5). As duas primeiras bases enquadram seus periódicos em categorias de área e o critério para estratificação seria o percentil do periódico dentro dessa categoria, ao invés de ser seu valor absoluto de *CiteScore* ou de Fator de Impacto. Só quando um periódico não tivesse indicadores naquelas duas bases, seria considerado o índice h5, do Google Scholar. Se houvesse divergência, seria considerado o maior valor fornecido pelas bases. A classificação proposta seguiria a seguinte métrica, baseada no já comentado percentil:

- a) 87,5 define valor mínimo do 1º estrato (A1)
- b) 75 define valor mínimo do 2º estrato (A2)
- c) 62,5 define valor mínimo do 3º estrato (A3)
- d) 50 define valor mínimo do 4º estrato (A4)
- e) 37,5 define valor mínimo do 5º estrato (B1)

33

Disponível

em

<http://capes.gov.br/images/novo_portal/documentos/DAV/avaliacao/18072019_Esclarecimentos_Qualis2.pdf?fclid=IwAR3pPlbyguROJujg3ATC-VASRs1_2-WJOxOIkZFZR-hUCTtRwzhRZ3kwddc>. Acesso em 28 de out. de 2019.

- f) 25 define valor mínimo do 6º estrato (B2)
- g) 12,5 define valor mínimo do 7º estrato (B3)
- h) Valor máximo do 8º estrato inferior a 12,5 (B4)

Atualmente, a listagem do sistema Qualis-Periódicos constitui um mapa pelo qual se pode obter, indiretamente, as pesquisas de todos os programas de pós-graduação brasileiros num período selecionado. De acordo com a Fundação CAPES, a única finalidade do Qualis é servir de instrumento para avaliar os programas de pós-graduação brasileiros (FUNDAÇÃO CAPES, 2017). Dessa forma, um periódico só não constará na lista se: a) não for indicado por um programa, como meio de divulgação de sua produção ou b) se for classificado como “Não Periódico”, de acordo com os critérios de cada área. Também cabe observar que

apenas os periódicos que tenham recebido produção no ano ou período de classificação serão listados e classificados, portanto, não se trata de uma lista exaustiva de periódicos, mas sim uma lista de periódicos efetivamente utilizados pelos programas de pós-graduação no período em análise (FUNDAÇÃO CAPES, 2014, grifo nosso).

Acessamos o sistema Qualis-Periódicos com o intuito de produzir um mapeamento das produções da Educação Matemática. Tal acesso, sem restrições, é público e pode ser realizado pela internet, na Plataforma Sucupira³⁴. Nesta pesquisa, fizemos uma busca em que foi selecionada como “Evento de Classificação”, a opção pelo quadriênio 2013-2016, que era o último período disponível até o momento de início da pesquisa. As áreas de avaliação buscadas foram “Educação”, “Ensino” e “Matemática/Probabilidade e Estatística”, somando as três áreas obtivemos 8602 periódicos, sendo 1435 na área de Matemática/Probabilidade e Estatística, 2963 na área de Ensino e 4204 na área de Educação, sendo que muitos deles estão em mais de uma área ou até mesmo nas três.

A próxima etapa foi a seleção dos periódicos nas respectivas áreas e, de maneira idêntica ao que tentamos descrever anteriormente, aquela sombra de preocupação com as pesquisas que poderiam indevidamente ser deixadas de fora retornou.

Não temos elementos para afirmar que revistas de outras áreas não contenham alguma discussão sobre o nosso tema, no entanto, é possível afirmar que nenhum pesquisador de uma das três áreas escolhidas tenha indicado este periódico para sua avaliação nas áreas escolhidas no quadriênio.

Somando os periódicos indicados nestas três áreas e retirando as repetições de entradas, ficamos com 6.190 revistas. Assim, precisaríamos ainda de outros critérios para

34

Disponível

em:

<<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/veiculoPublicacaoQualis/listaConsultaGeralPeriodicos.jsf>> acesso em: 14 de dez. de 2017.

reduzir a busca, tendo em vista que o próximo passo seria entrar no portal de cada revista e buscar seus artigos.

Escolhemos considerar apenas os periódicos que tivessem no título as palavras “matemática” ou “geometria”, nas áreas de Educação e Ensino. Para os periódicos da área de Matemática/Probabilidade e Estatística, consideramos apenas aqueles cujos títulos continham as palavras “educação”, “ensino”, “aprendizagem”, “professor” ou “escola”. Ao eliminarmos os resultados repetidos e as versões impressas, mantendo apenas a versão online de cada periódico, obtivemos 110 revistas.

3.1.2 Busca por Artigos

Utilizamos o título e o ISSN para encontrar as *homepages* de cada revista via Google e, quando este não nos levava ao êxito, buscávamos também no Portal de Periódicos CAPES. Embora a maioria dos periódicos visitados seja de livre acesso, muitos deles, especialmente os internacionais, têm acesso restrito. Neste caso, o acesso só foi possível por meio do Portal de Periódicos. De acordo com a Fundação CAPES, o portal de periódicos “conta com um acervo de mais de 38 mil títulos com texto completo [e] 134 bases referenciais” (FUNDAÇÃO CAPES, [s.d.]).

Ao final do processo, percebemos que ao menos 60% dos periódicos é gerenciada e publicada ou pelo Sistema Eletrônico de Editoração de Revistas/Open *Journal System*³⁵ (SEER/OJS) (43,63%), ou por bases de publicação e indexação (16,36%) como Scielo³⁶, *Springer Link*³⁷ e *Science Direct*³⁸. Estando publicados/gerenciados nestes sistemas foi possível utilizar uma busca booleana, ou seja, a busca por palavras-chave³⁹ somadas, subtraídas, parcialmente digitadas etc.

Fixamos previamente palavras-chave, numa espécie de *Brainstorming*. Como o tema era “geometrias não euclidianas na Educação Matemática”, o resultado da lapidação de ideias foi dividir o tema em dois blocos: o das “Geometrias não euclidianas” (GNE) e o da “Educação Matemática” (EM). A partir disso, escolhemos alguns descritores que podem representar esses blocos, considerando termos técnicos e suas variações. Julgamos que as palavras abaixo são razoáveis para buscar artigos relacionados ao nosso tema.

³⁵ Para saber mais sobre SEER/OJS, consulte o endereço < <http://www.ibict.br/pesquisa-desenvolvimento-tecnologico-e-inovacao/sistema-eletronico-de-editoracao-de-revistas-seer/historico> > e <<https://pkp.sfu.ca/ojs>>

³⁶ Disponível em: <<https://search.scielo.org/advanced/?lang=pt>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

³⁷ Disponível em: <<https://link.springer.com/advanced-search>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

³⁸ Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/search/advanced>>. Acesso em: 28 de out. de 2019.

³⁹ Utilizaremos os termos “palavra-chave” e “descriptor” como sinônimos neste texto.

Tabela 1: Lista de palavras chave do bloco das GNE, com variações de grafia e idioma

Palavra chave	Abreviação ⁴⁰	Grafia em inglês ⁴¹	Abreviação
Geometria	Geometr*	Geometry	Geometr*
Não euclidiana	Não Euclidian*	Non euclidean	Non euclid*
Esférica	Esfer*	Spheric	Spher*
Hiperbólica	H?perbolic*	Hyperbolic	H?perbolic*
Riemanniana	Riemann*	Riemannian	Riemann*
Discreta	Discret*	Discret	-----

Fonte: Produzido para a pesquisa

Tabela 2: Lista de palavras chave do bloco da EM, com variações de grafia e idioma

Palavra chave	Abreviação	Grafia em inglês	Abreviação
Educação Matemática	-----	Mathematics Education	Math Educat*
Formação de professores	-----	Teacher training	Teach* Train*
Ensino	Ensin*	Teaching	Teach*
Aprendizagem	Aprend*	Learning	Learn*
Escola	Escola	School	Scho*
Aula	Aula	Lesson	Lesson
Currículo	Currículo	Curriculum	Curriculum
Filosofia	Filosofia	Philosophy	Philosophy
Didática	Didat*	Didactics	Didactic*

Fonte: Produzido para a pesquisa

Para tentarmos obter os artigos mais relevantes nos motores de busca das revistas, nós formamos pares com um descritor de cada bloco. A ideia era realizar, para cada par de descritores, uma busca nos *sites* das revistas, e então selecionar o que nos interessava dentre os artigos trazidos pelo mecanismo de busca.

Nos mecanismos de busca do Portal de Periódicos, bem como nas bases de indexação e nos periódicos publicados em SEER, as buscas podem ser realizadas combinando palavras-chave⁴². Utilizamos essa sintaxe a nosso favor. Montamos a *string* de busca visando obter resultados que tivessem, pelo menos, uma palavra de cada bloco, de forma que todas as combinações, contendo pelo menos um termo de cada bloco, pudessem ser buscadas simultaneamente em qualquer campo (título, resumo, termos indexados ou texto completo).

⁴⁰ O símbolo * (asterisco) utilizado nas abreviações indica que estamos fixando as letras que o precedem, ao mesmo tempo que as palavras geradas pelas possíveis variações das letras que o sucedem também nos interessam. No caso da palavra “educação”, por exemplo, abreviada como “Educ*”, também foram consideradas variações como “Educaionais” e “Educativa”. As palavras cujos truncamentos coincidem foram utilizadas no filtro apenas uma vez. Além disso, quando a grafia de uma palavra pode variar por uma letra isolada, utilizamos o símbolo “?”, para que motores de busca tragam todos os resultados, independentemente da letra que ocupa a posição demarcada. Esses recursos são chamados de “caracteres curinga” (FUNDAÇÃO CAPES, [s.d.]), e funcionam na maioria dos motores de busca.

⁴¹ Em suma, a separação que fizemos diz respeito apenas ao idioma, porque no mínimo 60% dos periódicos visitados não se concentra em publicações escritas exclusivamente em português. Para as revistas cujas homepages se apresentavam em português, pesquisamos nesta língua. Para as outras revistas, pesquisamos em inglês.

⁴² A palavra AND, se colocada entre os descritores, traz resultados de busca que contenham todos os termos; a palavra OR, entre descritores, faz com que os resultados da busca contenham pelo menos um dos termos e os parênteses podem ser utilizados para a montagem de expressões de busca mais complexas (Strings de busca).

Tabela 3: Strings de busca⁴³

String de busca em português	(Discret* OR Riemann* OR H?perbolic* OR Esfer* OR Não Euclidian*) AND (Educação Matemática OR Formação d* professor* OR Ensin* OR Aprend* OR Escol* OR Aula OR Curricul* OR Filos* OR Didát*)
String de busca em inglês	(Discret OR Riemann* OR H?perbolic OR Spher* OR Non-euclid*) AND (Math* Educat* OR Teach* Train* OR Didactic OR Teach* OR Learn* OR Scho* OR lesson OR Curricul* OR philosophy)

Fonte: Produzido para a pesquisa.

Essa característica está presente em praticamente todos os motores de busca dos periódicos e, juntamente com os caracteres curinga, faz parte do mecanismo que se chama comumente de busca booleana. Sua vantagem, em relação à pesquisa em linguagem natural, é que permite buscar centenas de combinações de palavras-chave com um único movimento.

Na maioria dos periódicos, toda vez que o motor de busca funcionava, muitas páginas surgiam. Cada uma com dezenas de links de artigos, resultantes do esforço intelectual de muita gente com vontade de aprender ou produzir além do que já foi escrito sobre determinado tema. Eu acessei a todos os textos que os mecanismos de busca⁴⁴ trouxeram.

Todos os arquivos estavam em formato pdf⁴⁵. No texto, o primeiro passo sempre foi buscar⁴⁶ a palavra “geometria”, na forma abreviada. Este procedimento foi necessário, porque muitos artigos traziam alguma discussão sobre as geometrias, sem que isso aparecesse no título ou no resumo. Um artigo com essa característica pode ser interessante para nós também. Ele pode ter olhado para as GNE e visto outras coisas ou vice-versa. Quando a palavra era encontrada, fazíamos uma leitura do parágrafo, para verificar se o que o artigo dizia ali estava ou não, relacionado ao nosso tema. Quando o conteúdo explícito não parecia se encaixar ao nosso tema, descartávamos o artigo. Caso contrário, o artigo era salvo em uma pasta com o nome da revista que o publicou. Diretamente no site dos periódicos foram obtidos 90 artigos (90,91%) e apenas 11 no Portal CAPES (9,09%). Eliminando os artigos repetidos, ficamos com 111 textos.

⁴³ Aqui, a palavra “Geometria” e os elementos correspondentes foram excluídos, porque poderiam sujar a pesquisa, ou seja, trazer resultados que não dialogam especificamente com a nossa temática.

⁴⁴ Isto porque, “um periódico ter ou não um mecanismo de busca” foi um filtro que escolhemos utilizar, e ainda mais: satisfeita essa condição, passamos ao crivo do funcionamento dos mecanismos. Aqueles artigos que surgiam foram os únicos que consideramos, em cada periódico. Portanto, se um artigo muito relevante para o nosso tema contém as palavras chave que utilizamos, mas não surgiu como resultado de busca, ele ficou de fora do nosso corpus.

⁴⁵ *Portable Document Format*.

⁴⁶ Um procedimento idêntico foi utilizado para buscar artigos no Portal de Periódicos Capes/MEC. Em virtude de boa parte das bases e dos periódicos requisitar algum pagamento para a obtenção dos textos, eu utilizei o chamado “acesso CAFÉ”, do portal, para liberar também esses artigos. Todos os alunos de universidades federais e alguns alunos de universidades particulares têm direito a esse acesso.

3.1.3 Listando as Referências e Delimitando o Corpus

Parte importante de um primeiro filtro é a identificação dos principais referenciais bibliográficos, isto é, aqueles textos que são bases comuns a dois ou mais. Esse é o processo pelo qual escolhemos filtrar os artigos. É importante observar que, com isso, não estamos supondo que haja uma concordância entre os autores que citam os mesmos textos ou supondo que eles falam as mesmas coisas. Ao invés disso, tal critério nos parece relevante porque essas intersecções de embasamento indicam que os autores leram as mesmas coisas, então seus conceitos gramaticais não devem ser tão distintos, como foi comentado em Zettel (WITTGENSTEIN, 1997),

Quero dizer: uma educação absolutamente distinta da nossa também poderia ser o fundamento de conceitos completamente distintos [...]. Pois aqui a vida seguiria um curso diferente. – o que é interessante para nós, poderia não o ser para eles. Lá, outros conceitos deixariam de ser inconcebíveis. Com efeito, conceitos essencialmente distintos só nestas condições são concebíveis. (Z §387-388, tradução nossa⁴⁷)

Inclinados a tomar as referências⁴⁸ como um critério de seleção de nosso corpus, todas elas foram postas todas numa mesma lista, escritas num mesmo padrão, totalizando 2.447 entradas distintas. A partir daí, percebemos que a contagem mais relevante para o nosso propósito era a do número de artigos com o qual cada texto se relacionava (no sentido de ter referências comuns). Um texto pode ter muitas relações com poucos outros artigos, como pode ter poucas relações com muitos outros artigos. Por exemplo, os artigos identificados como Brum, W.P. and Schuhmacher, E., (2014) e Brum, W.P., et al. (2015) têm, respectivamente, 40 e 37 relações, mas se relacionam apenas com 12 e 10 artigos, respectivamente. Entre si, eles têm 14 relações, mas isso só conta como 1 artigo relacionado para cada.

Buscamos filtrar os textos de forma que os escolhidos nos garantissem uma forte relação com boa parte dos 97 artigos selecionados. Utilizamos então o *software* livre Gephi⁴⁹, onde criamos um grafo no qual cada artigo selecionado é representado por um nó⁵⁰ e as arestas representam as relações (quantidade de referências em comum) entre os artigos. Quanto mais referências em comum dois artigos tiverem, maior é a “grossura” dessa aresta. A

⁴⁷ “Quiero decir: una educación absolutamente distinta de la nuestra también podría ser el fundamento de conceptos completamente distintos [...]. Pues aquí la vida seguiría un curso diferente. –Lo que es interesante para nosotros podría no serlo para ellos. Allí otros conceptos dejarían de ser inconcebibles. En efecto, conceptos esencial mente distintos sólo en estas condiciones son concebibles” (Z §387-388)

⁴⁸ Nesse processo, textos que não apresentavam suas referências bibliográficas foram eliminados do corpus, daí permaneceram 97 artigos.

⁴⁹ Disponível em: <<https://gephi.org/>>. Acesso em: 19 dez. 2018

⁵⁰ Utilizaremos os termos “nó”, “vértice” e “ponto” como sinônimos, quando estivermos nos referindo aos grafos.

posição dos pontos é definida automaticamente por um *layout* chamado de *Force Atlas*, que aproxima os nós com maior número de ligações, enquanto afasta aqueles em que esse número é menor, quase como se o grau (número de ligações) dos nós fosse associado a uma força gravitacional que os aproximasse. Esse mesmo critério de grau determina o tamanho dos pontos: quanto mais conexões com outros artigos, maior é o ponto.

As cores dos vértices (Figura 4) foram definidas automaticamente também, mas elas servem para demarcar uma partição do conjunto de vértices. As classes dessa partição foram formadas com base na proximidade, que é relativa às ligações entre os artigos. Na classe azul-clara, por exemplo, a maioria dos pontos tem mais ligações com os vértices azuis-claros do que com pontos de outras cores. É como se ele estivesse mais distante dali do que os outros pontos que pertencem àquela classe. Isso acontece, por exemplo, com o vértice de legenda “Viana, O.A. 2015”, no grafo a seguir. Tanto ele tem certa proximidade com os outros vértices azuis, quanto está mais “distante” das outras classes, em relação aos pontos pertencentes a elas.

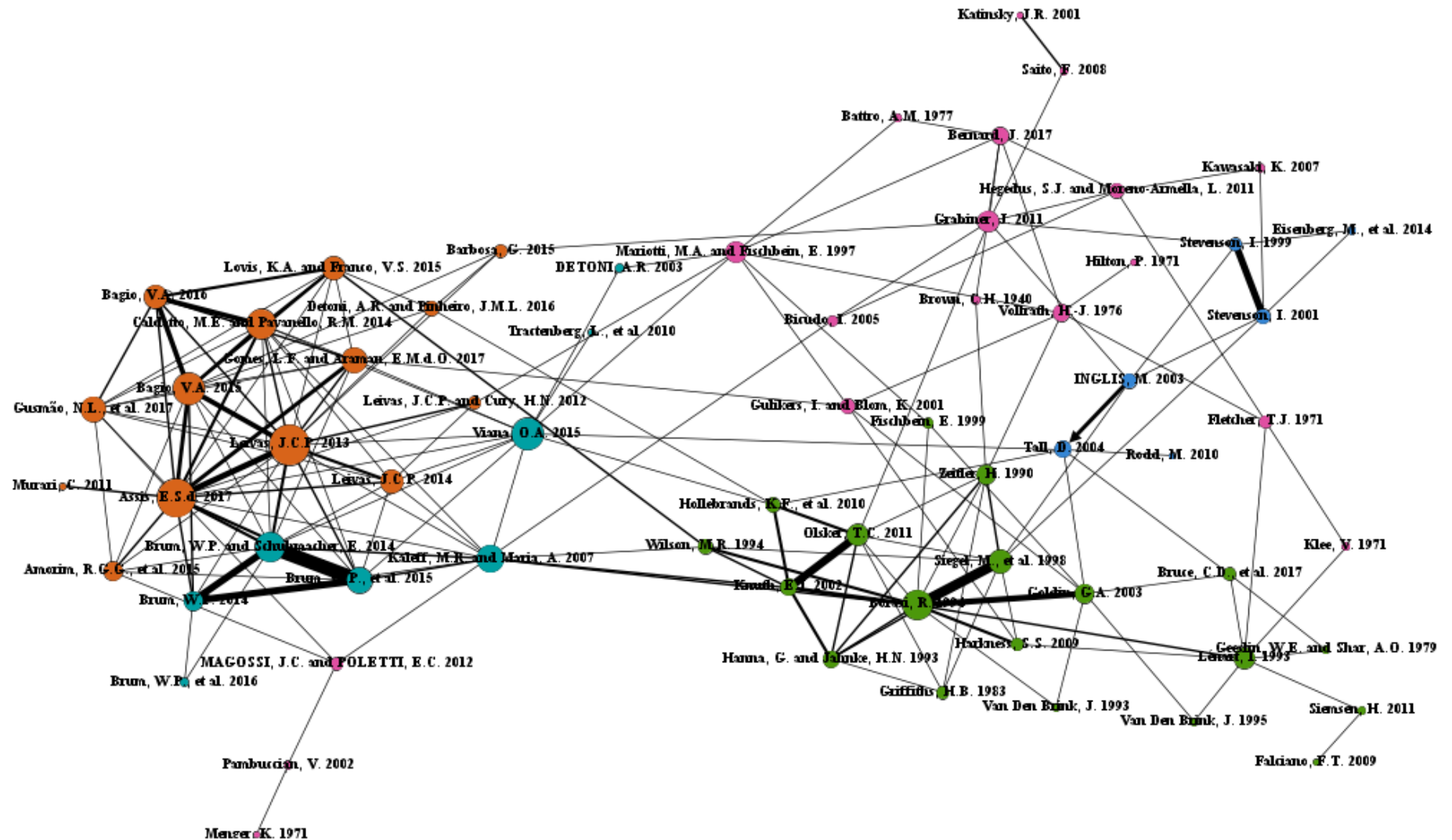


Figura 4: Grafo que representa os 97 artigos e as relações entre eles
 Fonte: Produzido para a pesquisa.

O nosso corpus de análise foi escolhido com base na partição, tomando o artigo de cada classe que tivesse relacionado a mais textos, visualmente, os maiores pontos da figura 4. O corpus preliminar é então formado pelos artigos de Borasi (1994), Mariotti e Fischbein (1997), Tall (2004), Grabiner (2011), Leivas (2013) e Viana (2015).

Ainda que não fosse foco de nossa análise neste momento, achamos importante destacar os artigos que ficaram periféricos neste grafo. Não é possível afirmar que eles tragam visões diferentes das que trazem os artigos mais centrais, no entanto eles compartilham poucas referências com estes. Se tivéssemos buscando aqui múltiplas possibilidades de resposta à nossa pergunta, optando pela multiplicidade, talvez aqui tomaríamos outro rumo, justamente o de buscar os textos que apontassem outras respostas, outras gramáticas talvez.

Destacamos na Figura 5 os nós periféricos, artigos quem compartilham poucas referências com os demais e nenhuma diretamente com os centrais que selecionamos.

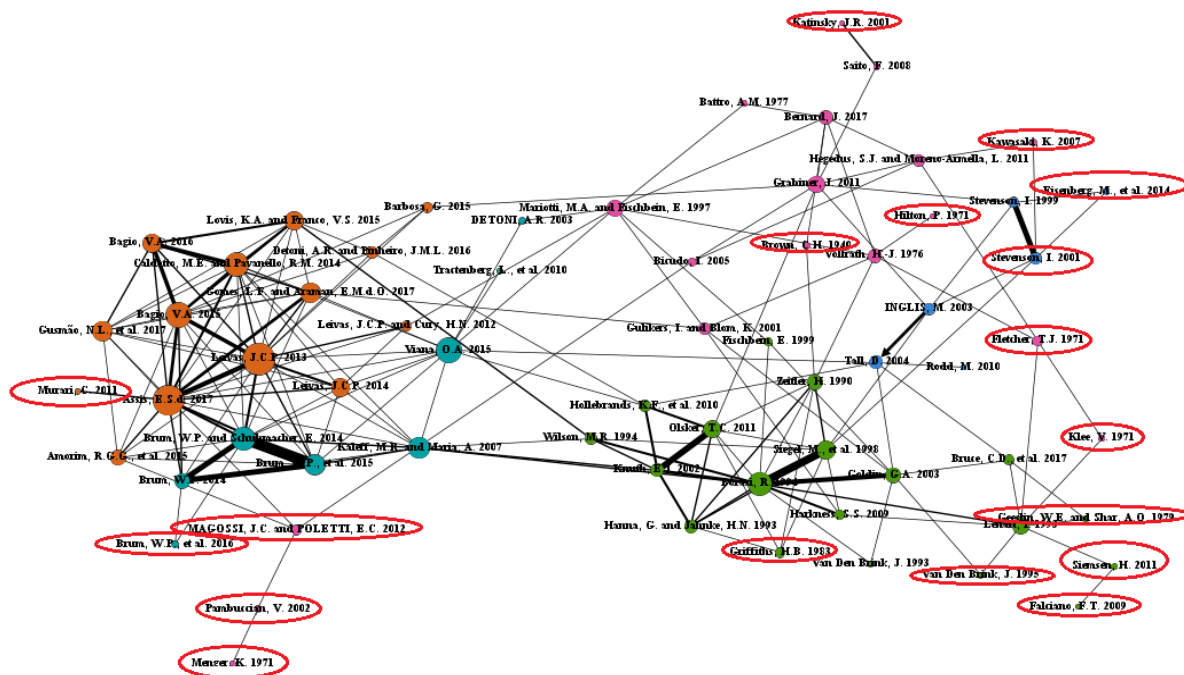


Figura 5: Pontos que não têm relação com os artigos escolhidos
 Fonte: Produzido para a pesquisa.

Embora a maioria dos artigos esteja interligada pela relação que definimos, alguns deles ficaram de fora dessa rede⁵¹. No grafo (Figura 6), esses artigos são representados por pontos isolados e o *layout* Force Atlas os posiciona longe da rede formada pelos demais, porque eles são os vértices que têm o menor grau. Mais longe ainda ficaram aqueles que também estão isolados da rede, mas se relacionam com um ou dois outros artigos. Pela forma

⁵¹ Uma tabela com todos os artigos pré-selecionados e seus indicadores encontra-se no Apêndice C – Artigos do corpus preliminar. Por meio desse apêndice e da Figura 4: Grafo que representa os 97 artigos e as relações entre eles, pode-se verificar quais foram os artigos que não passaram nesses primeiros filtros.

como decidimos filtrar o material reunido dos periódicos, os artigos correspondentes a esses pontos isolados foram desconsiderados.

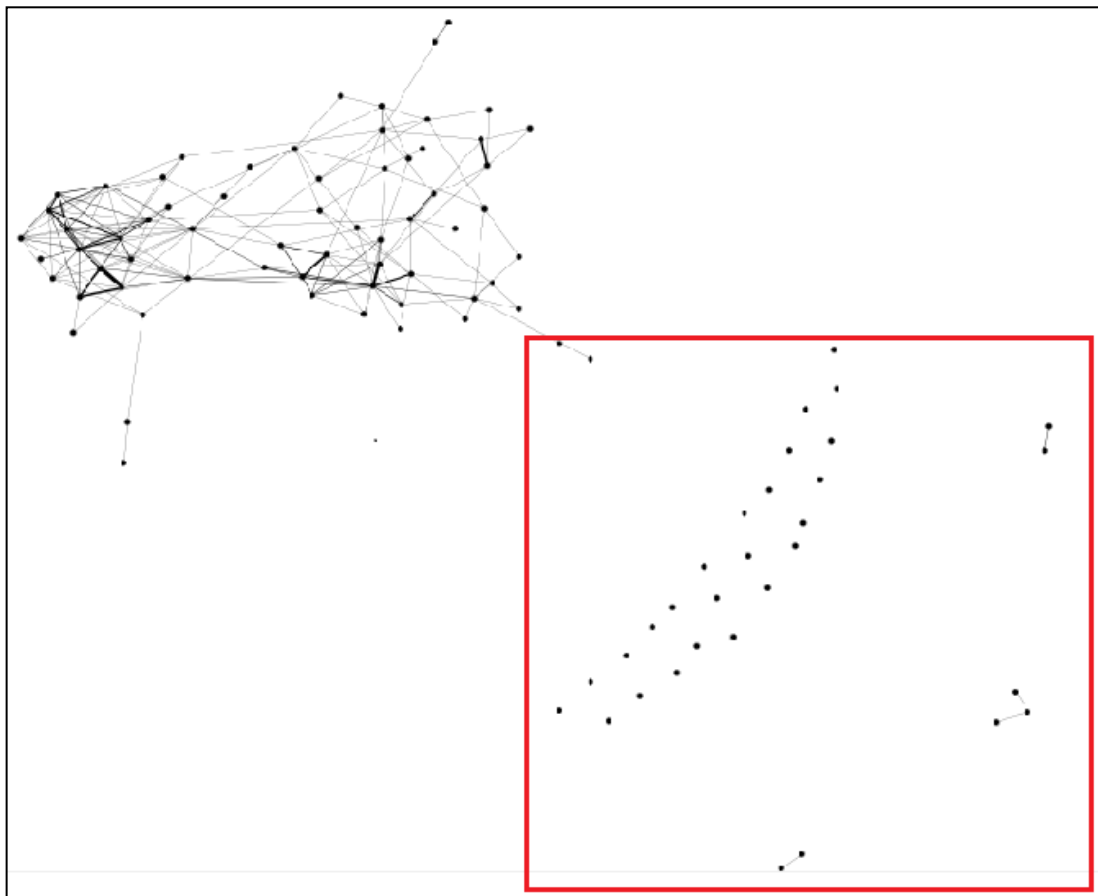


Figura 6: Pontos isolados.
Fonte: Produzido para a pesquisa.

Com isso, pode-se notar o quanto o corpus está relacionado com o todo e o quanto essa escolha nos leva a perder. Embora essas escolhas de filtro não estejam isentas de arrependimento, não pudemos conceber uma forma de fazer essa pesquisa sem abrir mão de algumas possibilidades, sem fazer restrições – e aqui também nossa discussão metodológica que, no fundo, permeia todo o texto. A cada escolha que fizemos, na direção de consolidar a nossa pesquisa, deixamos que de fazer outras tantas pesquisas que ficam apenas no sonho da possibilidade. Parece que fazer pesquisa é assim mesmo.

Assim, selecionamos nosso corpus de análise:

Autores	Ano	Título	Periódico	Editora/Mantenedor
Raffaella Borasi	1994	Capitalizing on Errors as "Springboards for Inquiry": A Teaching Experiment	Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, No. 2, p. 166-208	National Council of Teachers of Mathematics
Maria Alessandra Mariotti e Efraim Fischbein	1997	Defining in Classroom Activities	Educational Studies in Mathematics 34 p. 219–248	Kluwer Academic Publishers

David Tall	2004	Building Theories: the Three Worlds of Mathematics	For the Learning of Mathematics 24	FIM Publishing Association
Judith V. Grabiner	2011	How to Teach Your Own Liberal Arts Mathematics Course	Journal of Humanistic Mathematics, Volume 1 Issue 1, p. 101-118.	
José Carlos Pinto Leivas	2013	Geometrias Não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos	Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, n.3, p.647-670	Pontífica Universidade Católica de São Paulo
Odaléa Aparecida Viana	2015	Avaliação dos Desenhos de Planificação de Figuras Geométricas no Ensino Básico	Estudos em Avaliação Educacional, São Paulo, v. 26, n. 63, p. 838-871	Fundação Carlos Chagas

Quadro 01: corpus de análise
Fonte: Produzido para a pesquisa

Iniciamos o processo de construção de cada um deles uma gramática. Elaboramos um processo utilizando novamente os grafos, onde cada conceito seria um nó e cada proposição uma aresta, como será minuciosamente descrito no próximo tópico. No entanto, especialmente o processo de mapear o que é uma proposição gramatical e quais conceitos mobiliza foi bastante árduo e moroso. Além disso, para além deste movimento, que nos geraria um grafo, seria necessário produzir uma leitura destes diversos grafos, para extrair considerações sobre este conjunto. Frente a nossas limitações temporais, aos diversos movimentos, diferentes leituras e discussões que participamos ao longo do mestrado – das quais não abrimos mão – tivemos que, junto ao exame de qualificação, redefinir o corpus de trabalho, para que pudéssemos implementar o método por nós almejado. Como salientamos no item 2.3, não encontramos trabalhos que construíssem gramáticas de textos, bem como trabalhos que têm utilizado os grafos na Educação Matemática como metodologia de produção de dados e análise. Assim, além de nossa questão de pesquisa, tínhamos também uma intenção metodológica muito clara, da qual não pretendíamos abrir mão. Optamos, então, por analisar apenas um artigo entre os seis selecionados.

O artigo de José Carlos Pinto Leivas foi o que teve mais relações com os demais, ou seja, partilha de um maior número de referências bibliográficas com o grupo de trabalhos selecionados (17):

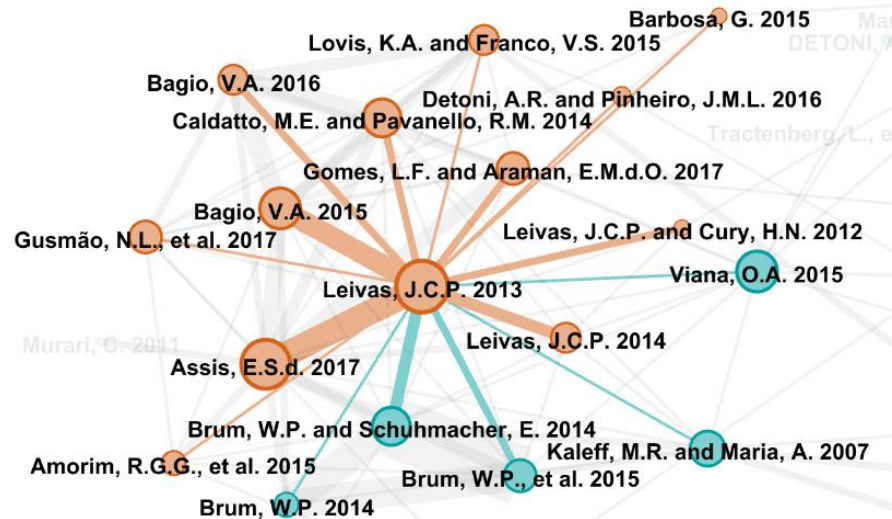


Figura 7: Artigos relacionados ao texto de Leivas (2013)

Fonte: Produzido para a pesquisa

Este critério, pelo modo como viemos procedendo, já seria suficiente para priorizá-lo, no entanto, há outros elementos que o favorecem. O texto de Leivas (2013) tem como título “Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos”, o que nos levou a pensar que o autor defenda neste texto que essas geometrias deveriam ser amplamente conhecidas, ou seja, parece atacar diretamente nossa questão geratriz.

Por esses fatores e pelo enorme tempo que a análise de um artigo exige, nesta pesquisa, nos limitamos à análise deste artigo, certos da importância e potencialidade que seria analisar todo o corpus previamente selecionado, novamente, foi preciso fazer escolhas. Nossa expectativa era de que, ao final, esta análise nos ajudasse a ter algo a dizer sobre a pertinência das geometrias não euclidianas, talvez não pelas afirmações já contidas no texto, mas pela gramática explicitada a partir dele nos seria possível produzir respostas de acordo com sua gramática. O modo como procedemos, inicialmente com os seis arquivos, e finalmente apenas com Leivas (2013) será explicitado na sequência.

3.1.4 Construindo gramáticas com grafos

Buscamos encontrar no texto selecionado (esta etapa foi iniciada também com outros textos, mas sem a devida finalização) as proposições gramaticais, entendidas como relações entre conceitos. Estes podem estar presentes em qualquer tipo de proposição, não apenas em proposições gramaticais, que são o objeto primeiro a ser extraído dos textos. Portanto, durante uma leitura, o primeiro movimento de análise não foi a identificação dos conceitos, mas sim dessas proposições, tendo em vista que nos atentaríamos apenas às proposições gramaticais, poderíamos ter conceitos mobilizados apenas em proposições lógicas ou empíricas, o que nos geraria um desgaste extra.

Essa leitura, do ponto de vista fisiológico, é um movimento linear. Um mesmo conceito “A” pode ser lido em várias proposições sem que, antes de sua décima aparição, haja relação dele com os nossos conceitos eleitos (aqueles que foram utilizados para buscar artigos e outros, envolvidos com eles). Se as proposições gramaticais precedentes fossem ignoradas até que surgisse essa relação, uma nova leitura do texto seria necessária, para localizá-las e incluí-las na gramática do texto em análise. Optamos por fazer a leitura do texto todo, destacando todas as proposições gramaticais para, ao final, filtrar as que fazem ou não conexões de conceitos que nos interessam. E aqui salientamos, mais uma vez critérios subjetivos são mobilizados, ainda que devidamente apresentados e discutidos.

Para a elaboração destes grafos optamos novamente por utilizar o software Gephi⁵². Para inserção dos vértices e das arestas no Gephi, cada ponto/conceito recebeu um código numérico (ID):

⁵² Inicialmente pretendíamos olhar para um razoável número de textos, cada um com seus conceitos e proposições, o que nos geraria um emaranhado de grafos de difícil compreensão sem o auxílio tecnológico.

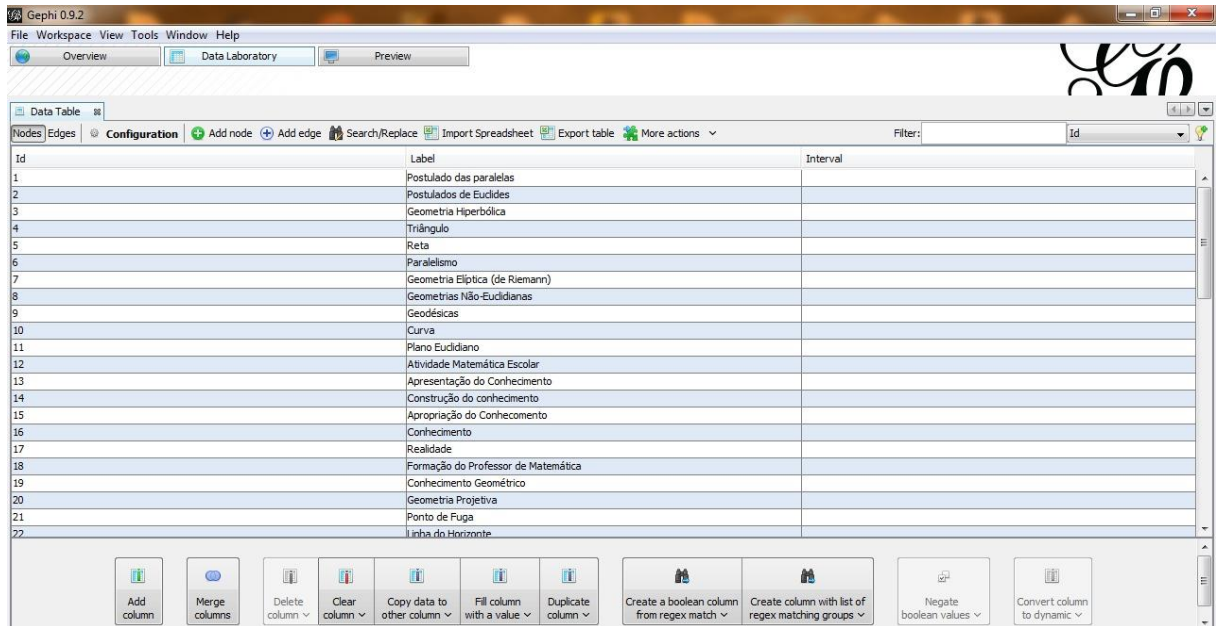


Figura 8: tela do Ghepi com o lançamento dos conceitos (IDs)
Fonte: elaborado para a pesquisa

Após o lançamento dos conceitos no software foi necessário lançar as proposições, para isso, elaboramos uma planilha contendo as duas IDs relacionadas na proposição e a proposição em si, o software relaciona os elementos (ID) da primeira coluna com o da segunda, deixando como etiqueta (que pode ser ocultada) os elementos da quarta coluna:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Source	Target	Type	Label					
2	1	2	Undirected	O postulado das paralelas é independente dos outros postulados de Euclides					
3	1	6	Undirected	O Postulado das paralelas trata de Paralelismo					
4	3	4	Undirected	Na geometria hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180°					
5	3	6	Undirected	Na geometria hiperbólica, dada uma reta e um ponto fora dela, existe mais do que uma paralela passando					
6	3	8	Undirected	A geometria hiperbólica é uma Geometria Não-Euclidiana					
7	3	64	Undirected	A Geometria Hiperbólica pode ser aplicada à superfície da pseudo-esfera					
8	3	9	Undirected	Na geometria hiperbólica, as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano					
9	3	5	Undirected	Na geometria hiperbólica, as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano					
10	3	11	Undirected	Na geometria hiperbólica, as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano					

Figura 9: planilha para lançamento de proposições
Fonte: elaborado para a pesquisa

O programa constrói as arestas a partir dos pares formados por esses números. No entanto, antes de chegarmos a esta planilha, já bastante simplificada, foram necessários inúmeros passos. Com o texto selecionado, iniciamos o processo de identificar os conceitos nas proposições que considerávamos serem gramaticais. Para isso, colocamos cada texto em um editor e quando era identificada uma proposição gramatical a coloríamos de azul e tentávamos identificar os conceitos ali presentes relacionados à nossa investigação e os

enumerávamos com uma ID, deixávamos o conceito colorido em vermelho e já adicionávamos estes dados a uma planilha⁵³.

Assim, para “tratar”, por exemplo, a proposição “O plano de Poincaré é um modelo para a geometria Hiperbólica”, anotávamos no editor de texto da seguinte forma: O {43} plano de Poincaré é um modelo para a {107} geometria Hiperbólica. As ID de “Plano de Poincaré” e de “geometria Hiperbólica” seriam 43 e 107, respectivamente, e a cor vermelha do texto serviria para destacar os conceitos sobre os quais a proposição trata. Nesse exemplo, “modelo” é um conceito? Pode até ser um conceito relativamente importante no contexto de onde a proposição foi destacada, mas não é sobre o conceito de “modelo” que a regra está arbitrando – aqui novamente decisões são necessárias.

Pela limitação inerente à representação em grafos, as proposições precisaram ser escritas como relações entre pares de conceitos, então todo trecho que contivesse essas regras precisou ser desmembrado para que pudéssemos construir uma estrutura gramatical. Essa tarefa é quase automática em alguns casos, mas na maioria deles é bastante difícil porque, em geral, como no trecho a seguir, um emaranhado de proposições gramaticais:

Nenhum deles se refere à Geometria de Riemann, na qual isso é possível. Alguns ensaios de justificativa fazem alusão somente à Geometria Euclidiana. A figura 2 ilustra um triângulo triretângulo no espaço geométrico esfera, em que os lados do triângulo são partes de circunferências máximas, isto é, as geodésicas ou ‘retas’ desse espaço, as quais, sendo intersecção da superfície esférica com um plano coordenado, formam em cada ponto A, B e C, ângulo reto. (LEIVAS, 2013, p. 664)

A partir dele, fizemos uma decomposição que permitiu escrever as relações entre os conceitos dois a dois. O que segue este parágrafo é uma sequência com as proposições obtidas e um mapa constituído na medida em que essas relações foram surgindo.

- O {56} espaço geométrico esfera é a um modelo da {7} geometria de Riemann:

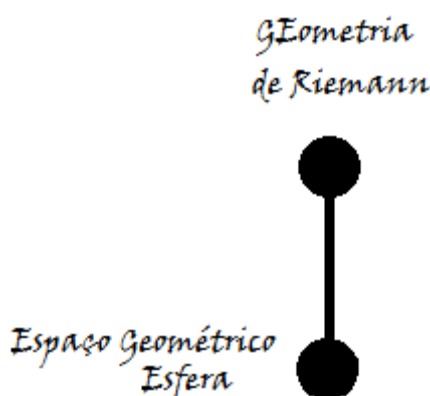


Figura 10: Relação entre conceitos
Fonte: Produzido para a pesquisa.

⁵³ A decomposição das proposições consta no Apêndice A.

- No {56} espaço geométrico esfera, os lados do {4} triângulo são partes de {57} circunferências máximas.

No caso dessa proposição, uma complicação nova se apresentou. São três conceitos, então essa frase deveria ser decomposta em outras três, que seriam as combinações possíveis, mas como fazer isso sem que a regra perdesse totalmente o sentido? Não que esse jogo de linguagem de construir “esquemas conceituais” mantenha precisamente o sentido da gramática original, mas o que não é conveniente para ninguém é “destruir” totalmente o que no texto é visível, o que ali está. A solução encontrada foi escrever as três proposições com o mesmo texto. Para o Gephi, cada aresta é definida por apenas dois conceitos, mas seria nossa leitura muito diferente disso? Assim como na imagem do pato-coelho, é possível que a mesma proposição tenha um aspecto diferente a cada vez que a lemos. Uma das mudanças de aspecto pode ser, por exemplo, relativa ao par de conceitos que estão sendo tratados em uma proposição como essa, dada anteriormente. Pode-se olhar para dois deles como conceitos relacionados e entender o outro como aplicação. Assim, ficou, para nós, o esquema desta situação:

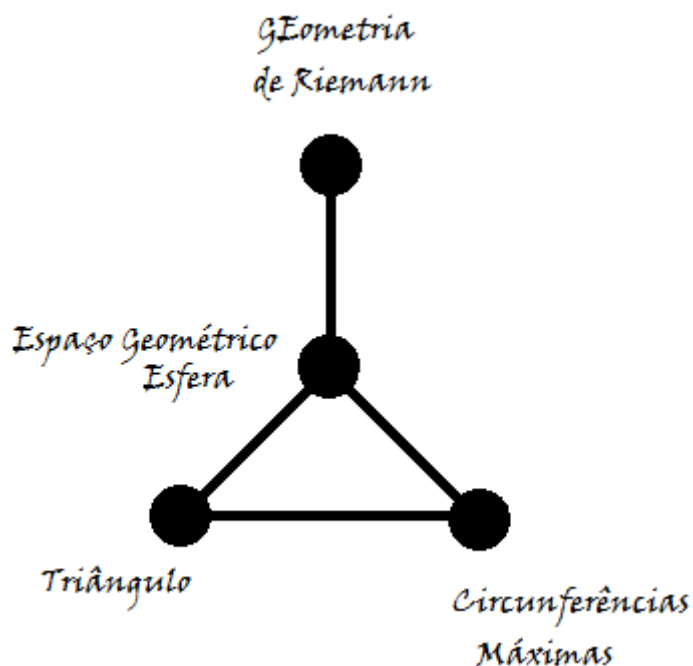


Figura 11: Grafo referente a “No {56} espaço geométrico esfera, os lados do {4} triângulo são partes de {57} circunferências máximas” e “O {56} espaço geométrico esfera é a um modelo da {7} geometria de Riemann”.

Fonte: Produzido para a pesquisa.

- {57} circunferências máximas são as {9} geodésicas ou {5} ‘retas’ do {56} espaço geométrico esfera:

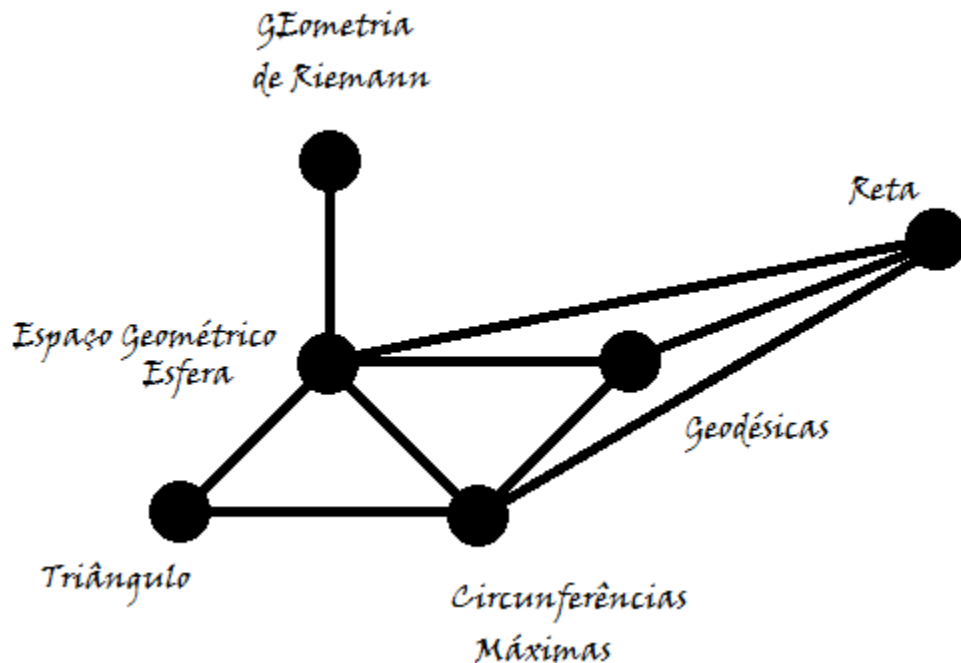


Figura 12: Relações entre conceitos.
Fonte: Produzido para a pesquisa.

- No {56} espaço geométrico esfera, as {5} ‘retas’ são intersecção da {58} superfície esférica com um {59} plano coordenado e formam {60} ângulos Retos:

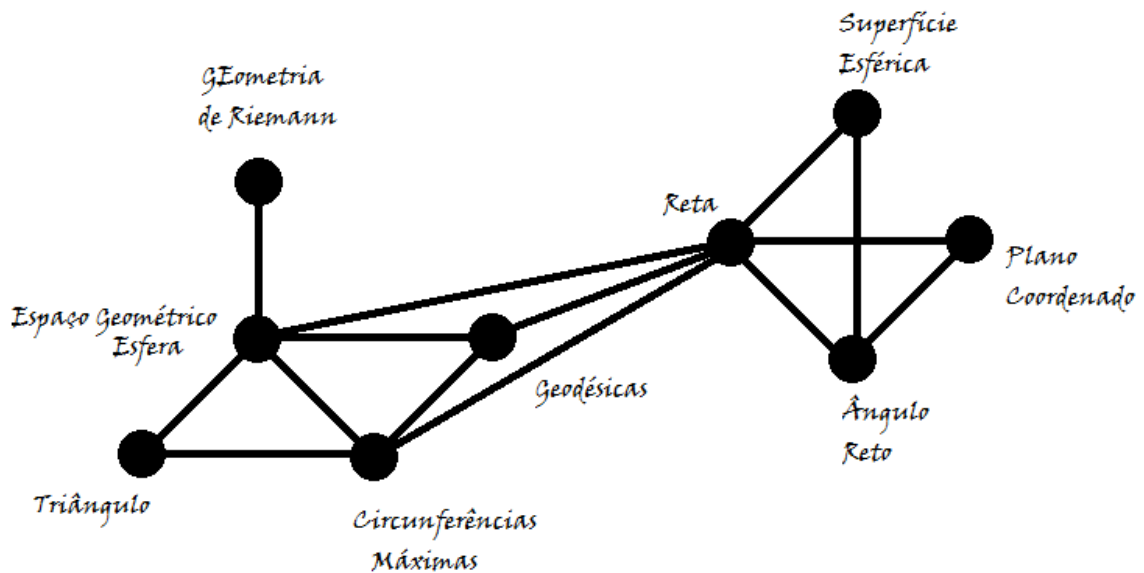


Figura 13: Relações entre conceitos
Fonte: Produzido para a pesquisa.

No processo de identificação das relações entre conceitos foi necessário determinar, em cada um deles, quais estão conectados e, também, quais conceitos não se relacionam com um conceito dado. No excerto abaixo, as relações estão ligadas entre si apenas por uma ordem de sucessão e todas essas relações ligam-se ao conceito de Espaço Perceptivo. Além disso, o conceito de Relação de Conjunto aparece no texto uma única vez. Por isso, “Deslocamento de

objetos” foi o que utilizei para nomear o vértice, mas os textos correspondentes às proposições que envolvem esse vértice contêm “Relação de Conjunto”. No trecho, “Relações Topológicas” e “Deslocamento” não estão diretamente relacionados e isso fica explícito no esquema:

Portanto, o espaço perceptivo é construído segundo uma ordem de sucessão que vai de relações topológicas iniciais a relações projetivas e métricas, depois, finalmente, a relações de conjuntos, ligadas aos deslocamentos dos objetos, uns em relação aos outros. (VIANA, 2015, p. 851)

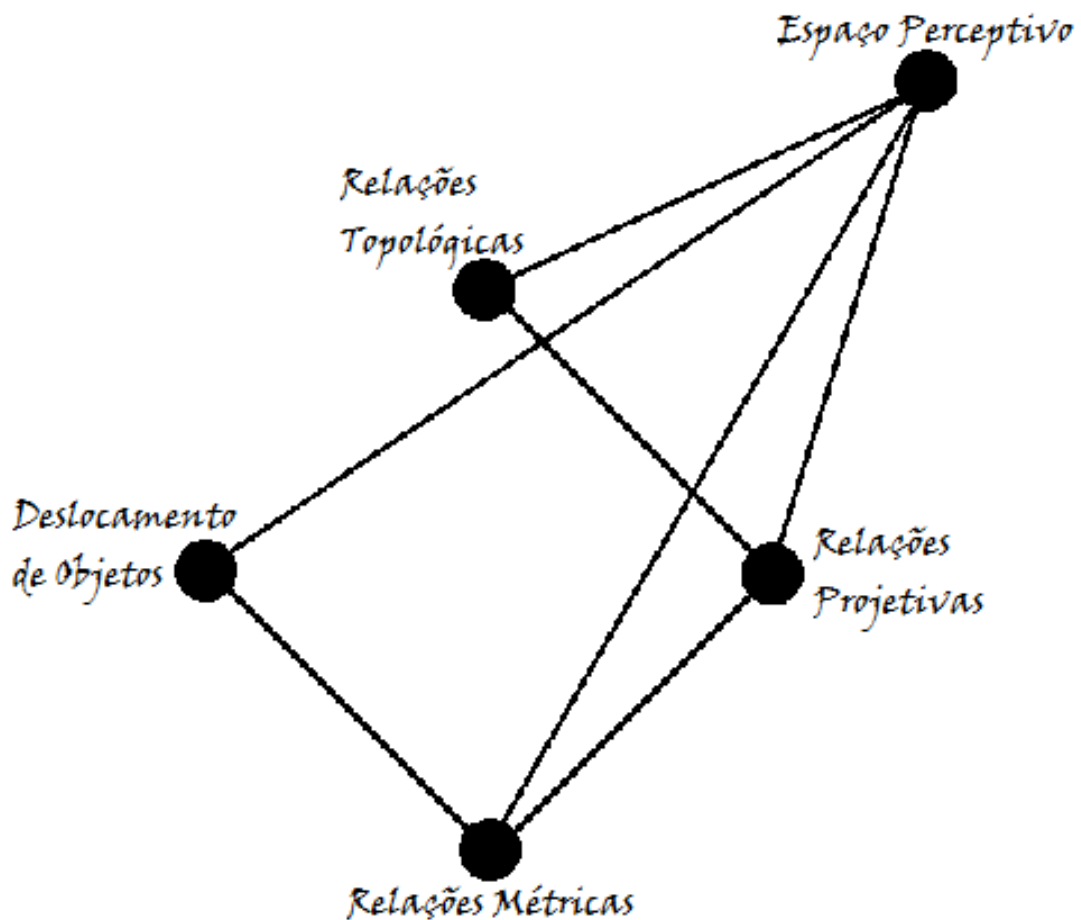
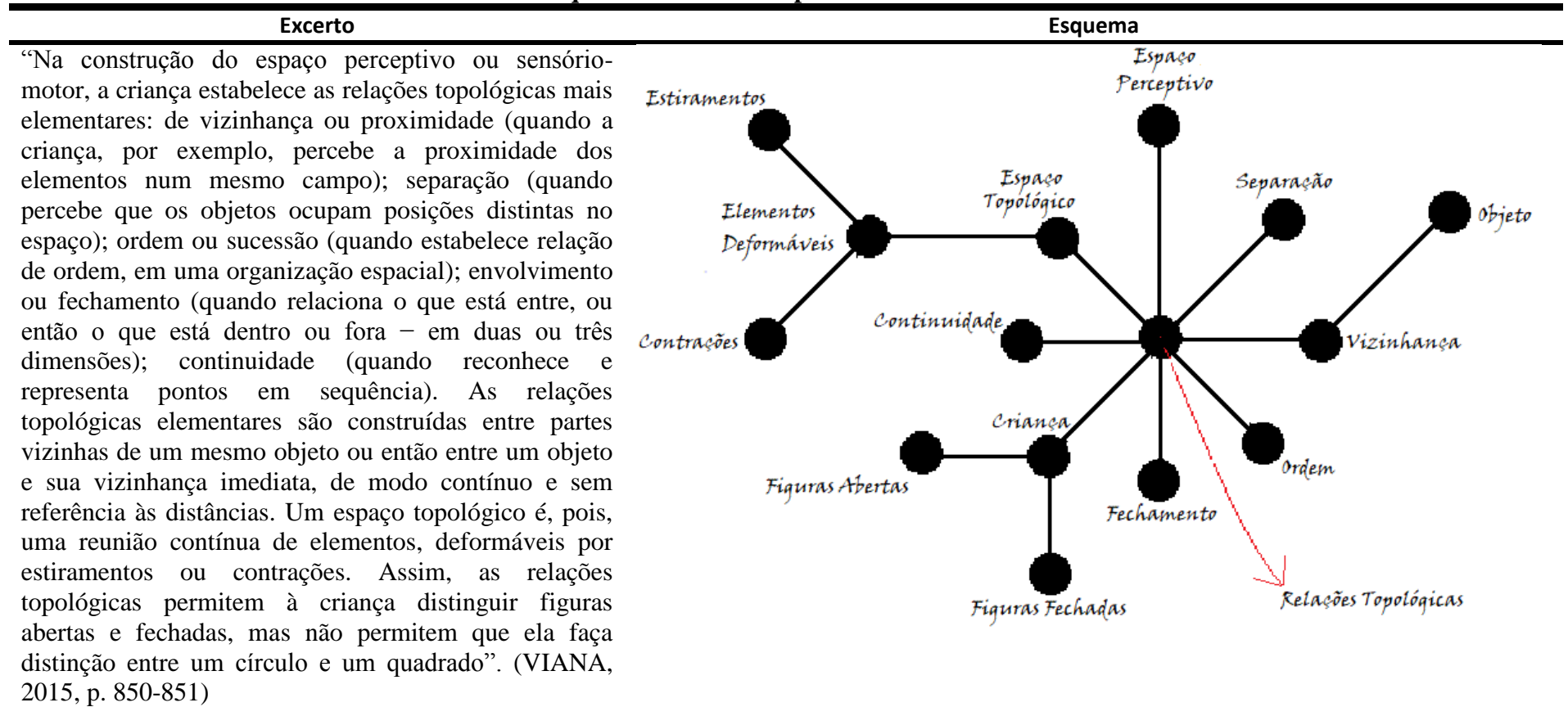


Figura 14: Relações entre conceitos
Fonte: Produzido para a pesquisa.

Nos exemplos a seguir, os esquemas foram construídos de modo semelhante ao que acabamos de descrever.

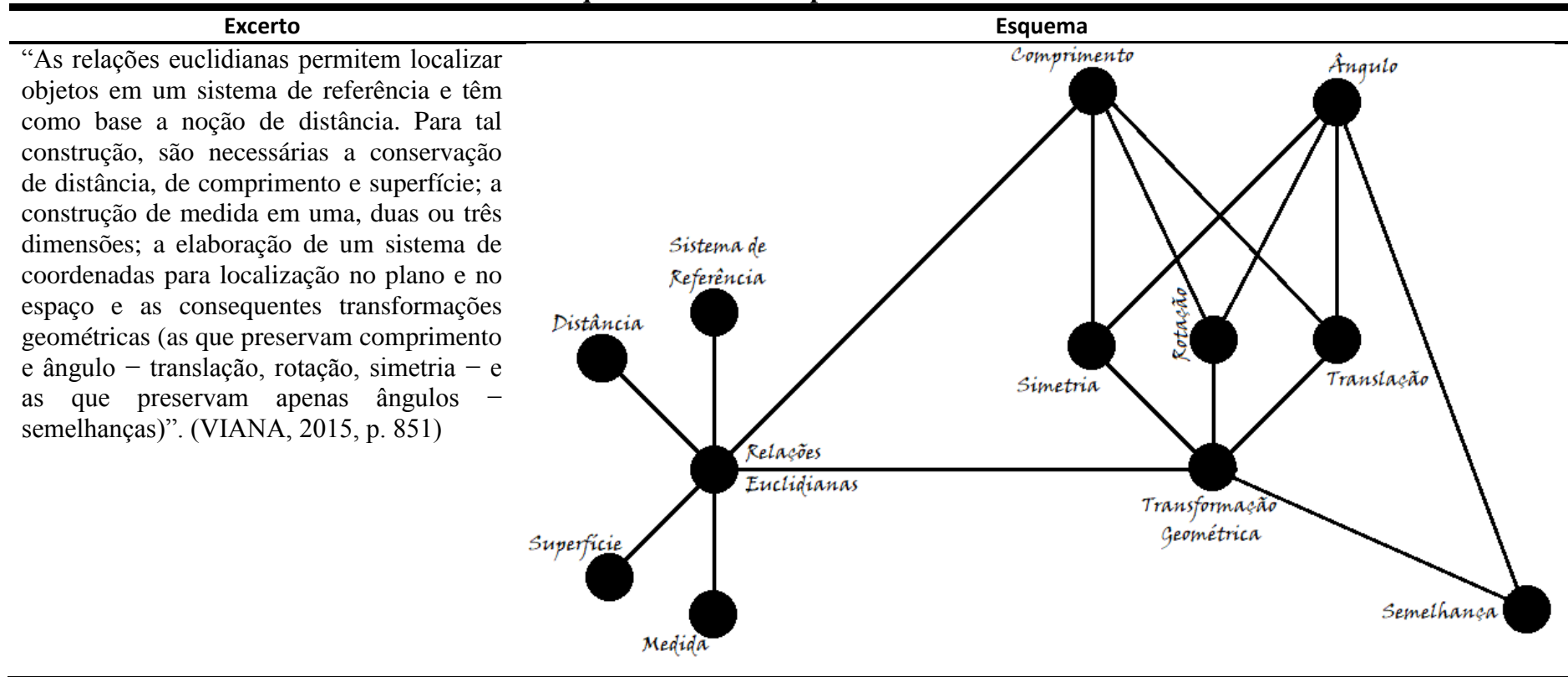
Tabela 4: Esquema Conceitual a partir de excerto de Viana 2015



Fonte: Produzido para a pesquisa

Aqui cabe um comentário sobre o conceito de “Criança”, que percebemos no texto em meio a um emaranhado de pontos correspondentes à topologia. Esta, tem seus modos internos de funcionamento, uma estruturação axiomática toda formada por proposições gramaticais como quase todo conhecimento matemático. Tendo isso em mente, é muito interessante que o grafo mostra possibilidade de escapar, de criarmos outros caminhos que vão além dos discursos maiores e hegemônicos.

Tabela 5: Esquema Conceitual a partir de excerto de Viana 2015



Fonte: Produzido para a pesquisa

Desta forma, os textos selecionados iam sendo convertidos em grafos que relacionavam os conceitos (nós) por meio de sentenças (arestas). Este processo foi iniciado em mais de um texto, mas, como descrito anteriormente, levamos o processo à cabo somente com Leivas (2013). O resultado deste processo e o que se segue dele será apresentado no próximo capítulo.

3.2 ANALISANDO LEIVAS (2013)

Na leitura desse artigo diversos aspectos epistemológicos me angustiaram. Foi o primeiro texto que eu li usando os óculos desse meu método e, talvez por isso, a sensação foi a de tentar entender um texto estrangeiro. A dúvida que ficou mais latente era se esses conceitos estariam circulando as mesmas coisas que os meus circulam. Por exemplo: em algum momento o autor diz “a relação entre os ângulos internos de um triângulo” (LEIVAS, 2013, p. 655). Então eu fico me perguntando o porquê de ele ter utilizado a palavra “relação” ao invés de “soma”. Será que coisas muito gerais como fatos da natureza, experiências, elementos de geometrias etc., seriam nomeadas, descritas e obedeceriam às regras da mesma forma que o fazem para mim? É claro que, pelo fato de estarmos incluídos numa mesma área ou em áreas afins, a maior parte da linguagem utilizada me permite alguma compreensão do que está sendo dito, mas não foram raros os momentos em que divergências ocorreram. Esse início da pesquisa se tornou mais suave por causa da lembrança de que a nossa era construir gramáticas a partir de proposições gramaticais extraídas do texto, ou seja, não buscaríamos justificáveis para além desse jogo de linguagem.

3.2.1 O esboço do grafo

Conforme anunciamos anteriormente, utilizamos o software Gephi para a construção dos grafos. No texto de Leivas identificamos 115 proposições e 64 conceitos, que com auxílio do software ficaram da seguinte forma:

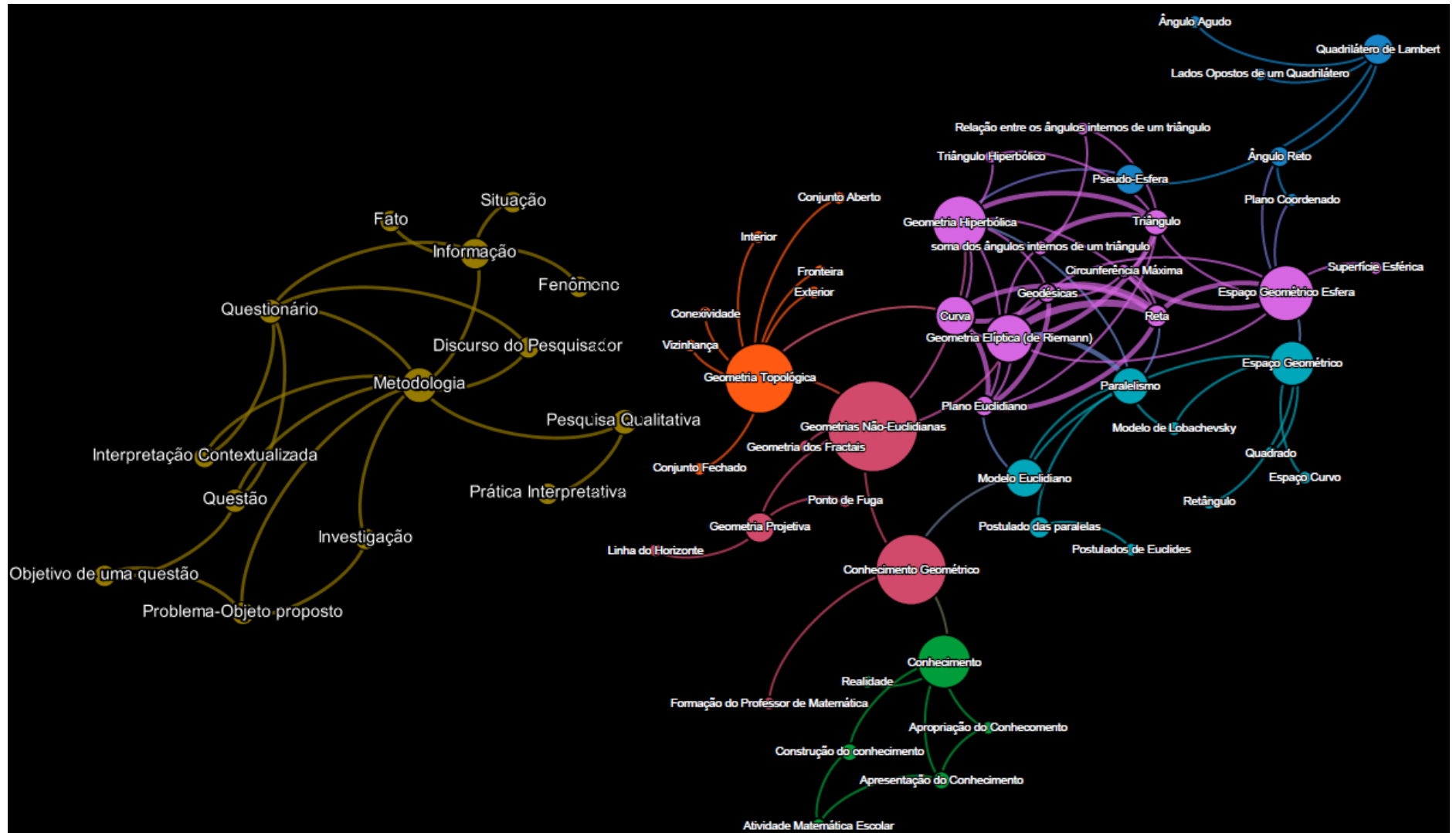


Figura 15: Esquema Conceitual do artigo de Leivas (2013).
 Fonte: Produzido para a pesquisa.

Observando o grafo, nos chamou a atenção os conceitos relativos aos elementos da metodologia que o pesquisador utilizou em sua pesquisa estarem gramaticalmente isolados dos demais, ou seja, não há proposições gramaticais que conectem esse tema com o restante do texto.

Embora esse não seja o nosso foco e isso não esteja no cerne das problemáticas que queremos explorar, esse tipo de fenômeno nos chamou a atenção no decorrer da leitura. Por agora, naquilo que diremos ser a análise, nos preocuparemos mais com a produção de um discurso, autorizado pela gramática construída, que dialogue com a questão da pertinência (ou impertinência) das GNE na Educação Básica e na formação de professores. Tal abordagem não significa que dados como esse isolamento da metodologia em relação ao restante do esquema serão ignorados. Ao contrário, eles fazem parte da constituição do esquema e requerem algum comentário.

As cores dos vértices foram definidas automaticamente também, mas elas servem para demarcar uma partição do conjunto de vértices. As classes dessa partição foram formadas com base na proximidade, que é relativa às ligações entre os nós e não a uma métrica euclidiana. Na classe azul-clara, por exemplo, a maioria dos pontos tem mais ligações com os vértices azuis-claros do que com pontos de outras cores. Mesmo que algum ponto p tenha mais ligações em uma classe X do que em outra classe Y , ele pode ser colocado em Y , ao invés de estar em X . Isso acontece quando os pontos de X têm um número muito maior de ligações entre si do que o ponto p tem, com essa mesma classe. É como se ele estivesse mais distante dali do que os outros pontos que pertencem àquela classe. Fizemos experiências com textos que nos deram gramáticas de 140 vértices (pouco mais que o dobro do tamanho dessa) e essas nuvens de cores diferentes serviram como um método alternativo para identificarmos diferentes assuntos sobre os quais o texto trata.

Esse esquema conceitual tem uma espécie de demarcação que, para além do isolamento das questões metodológicas em relação às demais regras, separa a maioria dos conceitos relativos à Educação dos outros conceitos, com exceção de “Formação do professor” que ficou sozinho na outra parte. Existe apenas um caminho conectando esses dois grupos. A saber, ele representa a proposição gramatical que une os conceitos de “Conhecimento” e “Conhecimento Geométrico” afirmando que eles estão relacionados. Isso nos indica o quanto seria forçada a afirmação de que existe alguma justificativa substancial para a nossa pergunta no artigo lido e em sua gramática. A conexão entre diferentes áreas é tão tímida, que a Educação é como um escape do que seriam conexões previsíveis num texto sobre GNE. Já existe um discurso maior, que é o da Matemática, mas a possibilidade de ligar

isso ao que não está nele é a possibilidade de dizermos outras coisas. A partir disso, embora sejam bastante restritas as possibilidades de discurso envolvendo os dois grupos simultaneamente, o grafo nos ajuda a produzir esse diálogo. Nele, nós podemos ver as conexões e as disjunções. A construção da gramática do texto é uma proposta de leitura que torna muito explícitas todas essas relações, porque dificilmente as leituras convencionais permitem uma visão panorâmica.

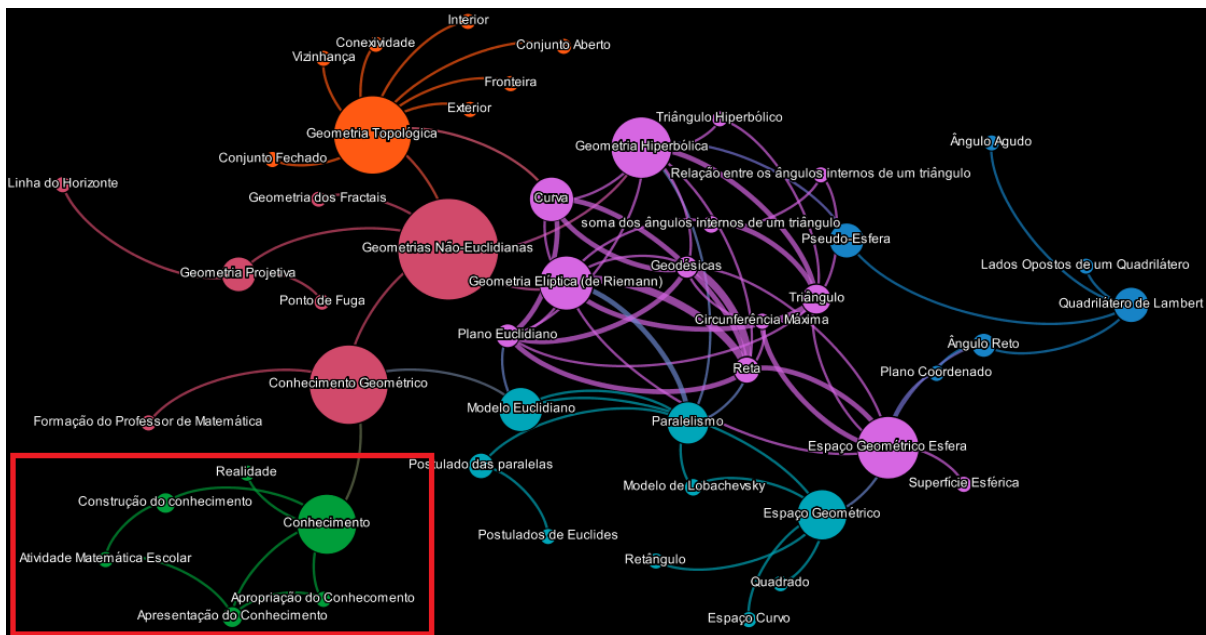


Figura 16: Isolamento dos conceitos relativos à Educação
Fonte: Produzido para a pesquisa

Na representação exibida, o tamanho dos vértices não é definido pelo número de conexões de cada nó (como foi feito no grafo que representa o corpus), mas por um dado estatístico (*Betweenness Centrality*) do Gephi, que considera **quantas vezes cada vértice está no menor caminho entre dois outros pontos**. Num esquema que irá nos ajudar a produzir discursos, conhecer os pontos que têm mais conexões não é tão útil quanto conhecer os pontos mais centrais. Logicamente, estes conceitos estão muito mais próximos uns dos outros e essa proximidade é diretamente proporcional a uma limitação⁵⁴ nas possibilidades de falar sobre suas relações, portanto, nos parece mais interessante escolher vértices periféricos para produzir novos discursos gramaticalmente coerentes com o texto. Pode-se perceber, através dessas figuras, que a maioria dos conceitos centrais correspondem aos nomes das geometrias, o que torna difícil ir de um ponto para outro sem passar por esse assunto. Esse resultado é

⁵⁴ Observe que, se forem tomados dois vértices vizinhos, o discurso resultante geralmente será mera cópia de alguma proposição que já estava no texto (explícita ou implicitamente).

muito positivo para o nosso propósito de discutir sobre as GNE na Educação Básica e na formação de professores. Porém, nesse momento da pesquisa o foco já não era o discurso em si, mas o método que permitiu chegar a esse discurso. Assim como a questão de pesquisa, também foram mudando os interesses do pesquisador, sempre encurralados pelas paredes do tempo que vinham se aproximando cada vez mais, prestes ao esmagamento iminente, enquanto a filosofia e o método empregados se constituíram como pontos mais fortes do texto final.

3.2.2 O discurso

Para produzir o discurso a seguir, o grafo da Figura 15: Esquema Conceitual do artigo de Leivas (2013).serviu como um mapa. Ele não ilustra de forma reduzida uma área do espaço geográfico, mas possibilita uma visão panorâmica do esquema conceitual que percebemos no texto trabalhando com tais e tais pontos. Ele não revela novos conhecimentos para aprendermos, mas permite a compreensão de algo que já está lá (IF §89b-c⁵⁵). Com isso, pudemos identificar, por exemplo, as conexões entre conceitos que não estão imediatamente ligados no artigo.

Esse estudo parece mais interessante quando tomamos pontos periféricos do atlas, como “Triângulo Hiperbólico” e “Formação do Professor de Matemática”. Para ver uma conexão entre dois conceitos, basta tomar um caminho entre eles no grafo. O conjunto dessas conexões, que as proposições gramaticais formam quando relacionam conceitos, é apenas uma forma de descrever o uso dos signos. Determinar o modo que devemos construir um jogo de linguagem para argumentar a respeito da nossa questão de pesquisa não é um de seus encargos (IF §496⁵⁶).

Para pontos distantes no grafo, como é o caso de “Ângulo Agudo” e “Linha do Horizonte” que além de estarem no que chamamos de “periferia”⁵⁷do grafo se encontram a

⁵⁵ “Estas considerações nos levam ao ponto em que se coloca o problema: em que medida a lógica é algo sublime? Pois parecia pertencer-lhe uma profundidade especial — uma significação universal. Ela estaria, assim parece, na base de todas as ciências. Pois a consideração lógica investiga a essência de todas as coisas. Quer ver as coisas a fundo, e não deve preocupar-se com o isto ou aquilo do acontecimento concreto. — Ela não se origina de um interesse pelos fatos que acontecem na natureza nem da necessidade de apreender conexões causais. Mas se origina de um esforço para compreender o fundamento ou a essência de tudo que pertence à experiência. Mas não que devêssemos descobrir com isto novos fatos: é muito mais essencial para nossa investigação não querer aprender com ela nada de novo. Queremos compreender algo que já esteja diante de nossos olhos. Pois parecemos, em algum sentido, não compreender isto. [...] Aquilo que se sabe quando ninguém nos interroga, mas que não se sabe mais quando devemos explicar, é algo sobre o que se deve refletir. (E evidentemente algo sobre o que, por alguma razão, dificilmente se reflete.)” (IF §89b-c)

⁵⁶ “A gramática não diz como a linguagem deve ser construída para realizar sua finalidade, para ter tal ou tal efeito sobre os homens. Ela apenas descreve, mas de nenhum modo explica o uso dos signos” (IF §496).

⁵⁷ No sentido de estarem longe do centro, o que no *layout Force Atlas* significa que têm menos conexões.

mais de 20 páginas um do outro, muitos caminhos são possíveis e cada conexão corresponde a pelo menos uma possibilidade de discurso, que é uma simples paráfrase da proposição gramatical correspondente à conexão em questão.

Os conceitos mais frequentes nas proposições gramaticais aparecem no centro do atlas, entre os quais destacamos “reta”, “circunferência máxima” e “geodésica”. Esses conceitos estão intimamente ligados na gramática, porque as circunferências máximas são as geodésicas da geometria esférica e as geodésicas são as retas das geometrias não euclidianas. Outro conceito, também central, é o de “triângulo” e ele aparece em proposições que tratam de como o triângulo é, em algumas geometrias não euclidianas. Foi durante a observação dessas relações na gramática que vieram as primeiras ideias de como o discurso ficaria. A reflexão que eu escreveria poderia se constituir segundo o esquema:

“Apresentação de uma figura da geometria euclidiana” → “Comentário sobre figuras semelhantes, de outras geometrias”

Seguindo a ideia de olhar para aqueles pontos centrais, iniciamos pelo conceito de geodésica. O texto não diz que as geodésicas da geometria euclidiana são as retas, então nós incluímos essa proposição. Na verdade, há outras proposições que também foram inseridas para tornar o resultado da análise gramatical mais útil para nossos propósitos. Esse processo será discutido no item 3.2.3. Abaixo, os colchetes demarcam essas inserções e os textos em sublinhado correspondem a sentenças formadas a partir das proposições gramaticais do artigo analisado, que indicamos na coluna adjacente.

Tabela 6: Algumas Proposições Gramaticais e Discursos que elas Autorizam

Discursos	Proposições Gramaticais Correspondentes
<p>[Falar sobre a “geodésica”... No caso do plano, é a reta]. <u>Já num espaço geométrico esférico, é a circunferência máxima e poderíamos identificar curvas que cumprem o papel desempenhado pela reta da geometria euclidiana, na geometria hiperbólica.</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Na geometria hiperbólica, as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano • Na Geometria Elíptica (de Riemann), as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano • circunferências máximas são as geodésicas ou ‘retas’ do espaço geométrico esfera
<p>[Outro tipo de problema cujo estudo parece ser obrigatório, na matemática escolar, é o da soma dos ângulos internos de um triângulo. Por consequência do postulado das paralelas, essa soma é o valor fixo de 180°], <u>mas isto não ocorre em outros espaços e pode ser contestado com o triângulo tri-retângulo da geometria esférica ou com triângulos hiperbólicos, onde a soma é menor do que esse valor.</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> • A soma dos ângulos internos de um triângulo na geometria de Rieman pode ser 270° • Na geometria hiperbólica a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180°
<p>[Levando os resultados a outras consequências, podemos lembrar que os retângulos euclidianos têm a soma de seus ângulos internos igual a 360°] <u>e a geometria hiperbólica pode nos ajudar a discutir a possibilidade desse resultado em outros espaços, com o quadrilátero de Lambert.</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> • O quadrilátero de Lambert tem três ângulos retos • O quadrilátero de Lambert tem um ângulo agudo
<p>[Diversos problemas da matemática escolar podem suscitar discussões a respeito de geometrias não euclidianas, com o simples ato de mudar o espaço no qual os problemas se dão]. <u>Esta frase ainda carrega a premissa de que o conhecimento geométrico a se construir é o da geometria euclidiana, considerando as outras geometrias como acessórios para tal fim, o que parece um erro, visto que o conhecimento serve para que o aluno compreenda e transforme sua realidade, [mas as realidades de qualquer pessoa não se encerram em modelos euclidianos’].</u></p>	<ul style="list-style-type: none"> • a atividade matemática escolar é a construção de um conhecimento pelo aluno • Conhecimento Geométrico está relacionado ao Modelo Euclidiano • Conhecimento Geométrico está relacionado às Geometrias não-euclidianas • Conhecimento Geométrico está relacionado ao conhecimento • Construção do Conhecimento está relacionada ao conhecimento • O conhecimento serve para o aluno compreender e transformar sua realidade”.

Fonte: Produzido para a pesquisa.

Olhando para outras partes do esquema, eu vi que poderia terminar a reflexão argumentando que deveria haver construção de conhecimentos relativos a essas outras geometrias, porque a realidade não se encerra na geometria euclidiana.

O trecho que diz “triângulos hiperbólicos, onde a soma é menor do que esse valor” fala sobre os ângulos internos de um triângulo hiperbólico. Inicialmente, eu escrevi essa proposição achando que ela não estava na gramática, mas fui conferir e percebi que havia tal proposição gramatical no texto, que diz “**existe triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180°**”. A resposta correta deveria ser V⁵⁸, considerando-se a existência de triângulos hiperbólicos”. (LEIVAS, 2013, p. 656, grifo do autor). Eu não a inseri no esquema conceitual porque, na primeira leitura, entendi que proposições do tipo “A pode ter a propriedade B” não eram gramaticais. Depois que surgiu a dúvida da qual estou falando neste comentário, porém, percebi que esse tipo de proposição tem a forma lógica “existe A que pertence a B” e sua negação é “Todo x não pertence a B”, ou seja, “Todo triângulo tem a soma de seus ângulos internos maior ou igual a 180°”. No contexto do artigo analisado, esta negação é explicitamente excluída como “sem sentido” e isto só ocorre porque a proposição negada era, na verdade, gramatical.

Assim, chegamos ao seguinte discurso:

‘A geometria da nossa matemática escolar não tem uma definição para “reta”, mas desde os primeiros anos de estudo, a criança é ensinada a emprega-la como resolução de problemas que envolvam a menor distância entre dois pontos. De forma mais geral, as linhas que satisfazem esta condição recebem o nome de “geodésica”. No caso do plano, é a reta. Já num espaço geométrico esférico, é a circunferência máxima e poderíamos identificar curvas que cumprem o papel desempenhado pela reta da geometria euclidiana, na geometria hiperbólica.

Outro tipo de problema cujo estudo parece ser obrigatório, na matemática escolar, é o da soma dos ângulos internos de um triângulo. Por consequência do postulado das paralelas, essa soma é o valor fixo de 180°, mas isto não ocorre em outros espaços e pode ser contestado com o triângulo tri-retângulo da geometria esférica ou com triângulos hiperbólicos, onde a soma é menor do que esse valor. Levando os resultados a outras consequências, podemos lembrar que os retângulos euclidianos têm a soma de seus ângulos internos igual a 360° e a geometria hiperbólica pode nos ajudar a discutir a possibilidade desse resultado em outros espaços, com o quadrilátero de Lambert.

⁵⁸ Era uma questão cuja resposta poderia ser “Verdadeiro” (V) ou “Falso” (F).

Diversos problemas da matemática escolar podem suscitar discussões a respeito de geometrias não euclidianas, com o simples ato de mudar o espaço no qual os problemas se dão. Esta frase ainda carrega a premissa de que o conhecimento geométrico a se construir é o da geometria euclidiana, considerando as outras geometrias como acessórios para tal fim, o que parece um erro, visto que o conhecimento serve para que o aluno compreenda e transforme sua realidade, mas as realidades de qualquer pessoa não se encerram em modelos euclidianos’.

As duas primeiras frases e a parte do texto que fala sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero ter 360 graus não estão no artigo analisado. Eu inseri essas duas partes no discurso porque a primeira combina com a ideia de iniciar a argumentação falando de figuras simples, como as retas, para figuras mais complexas formadas por segmentos de reta, como o retângulo e o triângulo. Já a segunda serviu para criar uma ligação os triângulos ao quadrilátero de Lambert, da geometria Hiperbólica. Respeitando as conexões que do esquema conceitual, essas proposições se encaixam de forma não problemática à gramática. Se inseríssemos regras que não envolvem os conceitos desse esquema, isso seria representado por um setor isolado no grafo que não tocaria o esquema já existente e, portanto, seria uma fantasia em relação à gramática do texto.

Por que podemos inserir tais proposições, se o discurso é baseado na gramática do artigo? Resumidamente diríamos que a) elas não contradizem proposições da gramática e b) olhando mais do que a gramática, isto é, considerando também as proposições empíricas do texto, não encontramos razões fundamentadas para duvidar das afirmações inseridas. Eu diria que é uma forma de **produzir com o texto** analisado, de trabalharmos juntos, ainda que haja muitas diferenças entre nós.

3.2.3 Quando as diferenças nos impedem de trabalhar juntos?

As diferenças chegam a ser óbvias – diferentes textos são escritos por pessoas diferentes ou pela mesma pessoa em momentos diferentes, portanto, costumam não ter os mesmos (as) enfoques, preocupações, objetivos, questões, métodos, instrumentos, objetos de análise, pressupostos, crenças etc. Porém, havendo acordos gramaticais, os esquemas conceituais correspondentes podem ser combinados para formar mais conexões ou até estruturas mais complexas, que conteriam mais conceitos e caminhos entre eles. Essas “gramáticas em acordo” fornecem mais possibilidades de discurso dentro de um novo jogo de

linguagem. Esta possibilidade, que nos abria novos horizontes, poderia ser um cavalo de Tróia, pois esconde uma nova complicação: quais os critérios para combinar gramáticas?

A comunicação tem uma característica essencial: ela é impossível se os envolvidos não concordarem num grande número de juízos (ou julgamentos) (GLOCK, 2009). Esses julgamentos não se tratam de questões de opinião. Você e eu podemos discordar naquilo que falamos, enquanto estamos conversando, mas o fato de estarmos conversando já indica que, pelo menos em grande parte da linguagem, nós estamos de acordo (IF 241). Esses juízos decorrem de nossas experiências muito gerais, que retroalimentam a nossa gramática, como explica Wittgenstein: “Uma coisa é descrever o método de medir, outra é encontrar os resultados da medição e exprimi-los. Mas o que chamamos de ‘medir’ é também determinado por uma certa constância dos resultados da medição” (IF §242). Portanto, a nossa gramática não é independente de todo o conhecimento empírico que temos. Ela está apoiada em nossas convicções. Nosso argumento é que os acordos em julgamentos são condições necessárias para a conciliação de duas ou mais gramáticas, mas o que seriam essas convicções? Como se dá a relação entre as convicções e a gramática?

“A terra existia há muitos anos antes do meu nascimento; [...] agora eu estou acordado e sentado em frente ao meu computador; [...] aqui está uma mão” são exemplos de convicções (GLOCK, 2009, P. 659-660). Elas são proposições empíricas, mas pertencem a uma categoria menos variável que, assim como as proposições gramaticais, estruturam o jogo de linguagem. De fato, as proposições empíricas da linguagem não formam um grupo homogêneo (DC §213) – algumas delas não podem ser postas em dúvida (DC §628), porque isto ameaçaria todo um sistema sobre o qual os nossos conceitos se fundam (DC 102§). Em suma, não seria possível duvidar de absolutamente tudo, pois

quem não tiver a certeza de facto nenhum, também não pode ter a certeza do significado das suas palavras[...]. O próprio jogo da dúvida pressupõe a certeza. [...] Não precisaremos de razões fundamentadas para duvidar? [...] ‘Para onde quer que olhe, não encontro razão fundamentada para duvidar de que...’ [...] Quero dizer: usamos juízos como princípios para a formulação de juízos. [...] Não tenho mais certezas quanto ao significado das minhas palavras do que tenho acerca de certos juízos. [...] (As minhas) dúvidas formam um sistema. (DC §114-115; DC §122-124; DC §126)

Até para ter dúvidas eu preciso de certezas sobre algumas proposições, que funcionam como dobradiças em volta das quais as dúvidas giram (DC §341), afinal, “se queremos que a porta se abra, é preciso que as dobradiças lá estejam” (DC §343). Como exemplo dessas dobradiças, que seriam as nossas convicções, temos:

Se pergunto a alguém ‘Que cor vê agora?’ a fim de saber que cor há ali naquele momento, não posso perguntar ao mesmo tempo se o interrogado percebe inglês [ou

português], se me quer enganar, se a minha memória não falha quanto ao significado do nome das cores, etc. (DC 345)

Ou ainda,

Não poderia eu acreditar que, uma vez, sem o saber, talvez em estado de inconsciência, eu tivesse sido levado para longe da Terra — que outras pessoas até o sabem, mas não me dizem? Mas isso não se enquadraria, de modo algum, no resto das minhas convicções. Não porque eu pudesse descrever o sistema formado por essas convicções. Contudo, as minhas convicções formam de facto um sistema, uma estrutura. (DC §102)

Como já foi dito, essas convicções formam uma estrutura, mas esta não se parece com o conteúdo de livro de lógica (DC 628). As convicções não se aplicam como critérios para a distinção entre aquilo que seria absurdo dizer e as enunciações legítimas, como é o caso das proposições gramaticais, mas duvidar dessas convicções ou negá-las implicaria na desestruturação de todo um outro esquema, que é ainda mais profundo que a gramática, porque como diz Glock, “os fundamentos reais são práticas e não suas manifestações proposicionais” (2009, p. 661, tradução nossa⁵⁹). O autor complementa,

Wittgenstein não considerou proposições [dobradiça] gramaticais ou semanticamente constitutivas. Elas são fundações de “nosso pensamento (a nossa língua)”, com certeza; mas apenas no sentido que erro ou dúvida sobre elas removem a estrutura para operações com determinados termos ou emprego de certos conceitos. Este é um ponto importante. Mas não põe em dúvida a possibilidade de distinguir entre uma sentença que tenha um papel gramatical (normativo) e que tenha um papel empírico (descritivo) em um contexto particular. Em vez disso, põe em dúvida que os falantes poderiam usar sentenças normativamente (como proposições gramaticais), independentemente de fatos empíricos ou de estarem seguros de certos fatos empíricos (GLOCK, 2009, p. 664, tradução nossa⁶⁰).

A importância de identificar convicções está no fato de que todo o sistema de crenças legível em um texto também depende delas, portanto, os acordos em julgamento devem se dar tanto pela concordância entre as proposições gramaticais, quanto por acordos nas convicções. Estas, “formam a base de todas as operações com o pensamento (com linguagem)”. (DC §401). Além disso, embora possamos dizer que essas proposições são empíricas, pelo fato de que a negação dessas proposições faz sentido⁶¹ para a gramática, a possibilidade de assumir que elas sejam falsas implica numa desconfiança de todos os nossos julgamentos, porque isso não se encaixaria naquilo que nós julgamos conhecer. Todo o nosso sistema de crenças, que

⁵⁹ “the real foundations are practices rather than their propositional manifestations” (GLOCK, 2009, p. 661).

⁶⁰ Wittgenstein did not think of hinge propositions [...] as grammatical or semantically constitutive. They are foundations of “our thinking (our language)”, to be sure; yet only in the sense that error or doubt about them removes the framework for operating with certain terms or employing certain concepts. This is an important point. But it does not cast doubt on the possibility of distinguishing between a sentence having a grammatical (normative) and its having an empirical (descriptive) role in a particular context. It casts doubt instead on the idea that speakers could use sentences normatively (as grammatical propositions), independently of empirical facts or of themselves knowing certain empirical facts. (GLOCK, 2009, p. 664)

⁶¹ “If the denial of the ‘experiential propositions’ that provide hinges for our judgement were nonsensical, there would be no such thing as assuming that they are false”. (GLOCK, 2009, p. 661)

permite operar com certos termos ou empregar certos conceitos, depende delas e seria rompido se as desacreditássemos, logo, a gramática depende de certos fatos empíricos (GLOCK, 2009).

Podemos dizer então, ao inserir aquelas proposições no discurso, que estamos produzindo outra gramática. Embora não possamos afirmar que há concordância de uma com a outra, esse último esquema está muito próximo do que seria razoável dizer com base no artigo de Leivas (2013) e algum material adicional.

4 CONSIDERAÇÕES QUE NÃO SÃO FINAIS

A principal agonia que me botou, não só a esperar, mas a fazer o movimento dessa pesquisa, foi a minha falta de resposta diante de uma questão que eu achava muito óbvia antes de ser questionado. A pertinência das GNE na Educação Básica e na formação de professores tomou um grande pedaço do meu pensamento nesses anos que passei no mestrado. Se fosse de forma burocrática, me ocorrendo só nos momentos de atividade do Programa, talvez esse período tivesse sido pacato e pouco significativo. Mas, não! A questão acabou se amarrando a uma série de embasamentos filosóficos, de métodos e de expectativas em relação aos leitores, me dando a impressão e o desejo de que essas coisas resolveriam o problema pra mim. Tal foi a força dessa amarra, na minha experiência de estudo, que eu acabei me apaixonando mais por essas coisas do que pelo objetivo da pesquisa: o diálogo com o decolonialismo, a produção de um modo de leitura não convencional do corpus, as diversas estratégias adotadas para a configuração do corpus documental são alguns exemplos.

Eu sempre tive pensamentos invasivos aleatórios e inúteis, especialmente nos momentos de descanso, mas estes acabaram, em grande parte, sendo substituídos por elucubração. As invasões passaram a ser do tipo “um rei poderia acreditar que o mundo começou a existir ao mesmo tempo que ele nasceu. Talvez nem todo mundo acredite na mesma coisa sobre isso também”. A imagem que estou tentando explicar é algo como uma expansão do pedaço que estava ocupado na minha mente.

O leitor há de perceber que as geometrias não euclidianas aparecem brevemente em diversos momentos⁶² deste relatório, o que faz parecer que elas eram apenas uma desculpa para trabalhar com o que tem peso exponencialmente maior neste texto: filosofia e método. Porém, essa semelhança só faz sentido se você esquecer da razão pela qual todo esse movimento começou. No início, eu achava que não tinha o que dizer sobre o assunto. A análise gramatical permitiu a identificação dos principais conceitos e das regras que os conectam num artigo que denuncia o desconhecimento das GNE. Essa fonte acabou condicionando os respectivos resultados, mesmo tendo certa pertinência no contexto do compartilhamento de referenciais.

⁶² Isso não quer dizer que o objetivo se perdeu no decorrer do texto, mas sim que você, como leitor, precisa que eu fique te lembrando do ponto de partida e da meta, em cada parágrafo. Tentar adivinhar aonde o texto vai chegar antes de terminar a leitura também não ajuda. É como tirar um modelo do bolso e sobrepor ao meu desenho. Os traços feitos até ali pareciam não ter lógica, mas num certo modelo, encaixam como palma da mão, polegar e dedo médio esticados. Os próximos passos provavelmente seriam os outros 3 dedos curvados em direção ao antebraço, mas a continuação da leitura revela que esse não era o decalque correto. Então o modelo da mão é jogado fora e uma nova tentativa se inicia. Dessa vez, como o modelo da Lula Gigante.

Apesar disso, houve um longo percurso até a escolha desse artigo e diversos resultados relevantes foram propiciados pelos métodos. Em relação a um corpus maior e à Educação Matemática, temos a noção de que existem pelo menos 111 artigos que fazem algum comentário sobre o tema. Considerando o compartilhamento de referências como critério, esses artigos se dividem em 7 classes, umas das quais é composta por 36 artigos totalmente isolados do restante. Uma pergunta relevante para pesquisas futuras é: quais são as referências desses textos isolados?

No artigo de Leivas, quase não há diálogo da Matemática com outras áreas, o que se vê com clareza no grafo que representa sua gramática. Há disjunções muito bem demarcadas naquela gramática, embora tenhamos conseguido tomá-la como ponto de partida para produzir outras conexões. Será que algum dos artigos relacionados a ele faz esse diálogo acontecer ou essa característica está presente em toda a sua classe? Haveria algum artigo do corpus com essas relações de forma substancial? É possível identificar quais são eles antes mesmo de construir uma gramática?

Relacionar dois conceitos narrativamente, por meio da gramática, foi como fazer um passeio partindo de um para o outro. Sabia o caminho porque o vimos no grafo, então o seguimos, lendo as proposições gramaticais correspondentes. O que obtivemos, na descrição desse caminho percorrido não foi exatamente um resultado novo, mas uma possibilidade de falar sobre algo que já estava debaixo de nossos narizes sem que conseguíssemos ver. A partir disso, pudemos refletir e isso é como tocar uma música que ainda não existe. É como compor.

Os argumentos do discurso produzido, para que se estudem as GNE na Educação Básica, me parecem se concentrar em dois temas, que podem ser vistos como direcionamentos para a busca de textos complementares:

- Semelhanças entre figuras e suas propriedades em diferentes geometrias (Por exemplo, Triângulos Euclidianos x Triângulos Hiperbólicos); Discussões sobre a possibilidade de resultados de geometria serem válidos em espaços diferentes do plano euclidiano e;
- Relações entre geometria e realidade.

Para explorar o primeiro tema, seria interessante buscar artigos que divulguem experiências de sala de aula envolvendo GNE, como o artigo “*Alternative Models On The Drawing Ball*” de Lénárt (1993), que conta a experiência de contrastar a geometria esférica com a euclidiana, em aulas para estudantes de 10 a 15 anos.

Já o segundo, é um salto muito maior, aquele que vai de “realidade” a “geometria” e vice-versa. Kant, por exemplo, se debruçou sobre o tema e foi alvo de críticas por parte dos

matemáticos. Eles parecem estar sempre à espreita, aguardando pelo uso inadequado de um conceito para desautorizar seus interlocutores. Acredito que por esse efeito “bomba”, existe muito material para pesquisa nesta direção. Um exemplo disso é o texto “*Philosophy And Non-Euclidean Geometry*” de Foraker (1919), onde o autor discute o erro conceitual cometido por certo filósofo ao dizer que os trilhos da ferrovia não se encontravam por serem retas paralelas, quando na verdade esses trilhos estariam em uma geometria esférica e nela não existem pares de retas com essa propriedade.

A partir da construção de um uma gramática de um texto⁶³, diversas análises podem ser facilitadas. Para algumas delas, talvez o próprio texto bastaria. Por exemplo, para reconhecer se uma expressão contradiz, complementa ou simplesmente reescreve algum fragmento (ou a totalidade) da fonte. Mesmo para esse tipo de fim a análise gramatical, que culmina no esboço de um esquema conceitual na forma de grafo pode ajudar. Afinal, o nosso principal propósito com ela deve ser o de ver as conexões.

Além disso, por meio do grafo fica muito mais perceptível como são as conexões de conceitos que não são adjacentes um do outro, no texto. Conceitos que podem ter sido mencionados apenas uma vez, mas que nossas questões de pesquisa nos levaram a buscar suas relações, a situá-lo em um determinado tema ou coisa assim. A possibilidade de afirmar a inexistência de conexões entre conceitos dados ou entre temas, como aconteceu no artigo que analisamos, onde a metodologia de pesquisa do autor não tinha qualquer relação com os outros conceitos de seu texto⁶⁴, talvez seja ainda mais interessante.

No *layout* que utilizamos para determinar as posições dos pontos no grafo, os vértices de maior grau são posicionados no centro, enquanto os de menor número de conexões vão parar em regiões periféricas, mais isoladas. Outro resultado que pode ser explorado é o uso de caminhos que vão de um ponto periférico para outro, em extremidades “diametrais”, para produzir discursos que relacionem conceitos cuja simples leitura do texto dificilmente possibilitaria conectar. Diversas discussões das propostas e resultados metodológicos se fizeram aqui, mas ainda temos uma questão geratriz para comentar.

No intuito de discutir as GNE na Educação Básica como fenômeno, incluindo investigações empíricas, eu teria que fazer uma pesquisa totalmente diferente. Uma pesquisa que envolveria observações, investigações e descrições de fenômenos relativos a isso, na parte

⁶³ Aqui, desde o início quisemos trabalhar com artigos científicos, mas poderíamos escolhido olhar para outros tipos de fonte como depoimentos, vídeos, diferentes produções textuais, símbolos etc.)

⁶⁴ Tenho a noção de que, provavelmente, isso acontece em praticamente toda pesquisa científica (talvez até nesta dissertação), mas ter condições de afirmar se isso ocorre ou não é um resultado que tem alguma potência. Enfim, foi só um exemplo. Outros tipos de seccionamento podem ser facilmente percebidos a partir de uma análise gramatical.

inicial. Discutir x é muito diferente de discutir o que se diz sobre x , que foi o que fizemos (retomando o já citado IF §90). A nossa investigação foi focada em manipular alguns conceitos para ver como eles podem operar dentro de uma gramática dada. Essa manipulação é entendida no mesmo sentido que uma criança manipula um brinquedo que está aprendendo a usar. A partir da descrição dos usos dos conceitos, sendo o grafo uma dessas descrições, criamos um discurso que indica modos de trabalhar com as GNE em sala de aula da Educação Básica e ataca a exclusividade da geometria euclidiana na educação, o que não responde à questão que gerou esta pesquisa, com uma multiplicidade de respostas ou com uma resposta consolidada a partir de diversos textos, mas engendra um processo de produção de respostas que caminha, mesmo que vagarosamente, nesta direção.

REFERÊNCIAS

- BAKER, Gordon P. Wittgenstein's 'depth grammar'. **Language & Communication**, [s. l.], v. 21, p. 17, 2001.
- CHEVALLARD, Yves. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 12, n. 1, p. 73–112, 1992.
- FALCATO, Ana Cristina Serralheiro. A Filosofia como terapia gramatical segundo Wittgenstein. **Artigos LUSOSOFIA**, [s. l.], p. 23, 2012.
- FORAKER, F. A. PHILOSOPHY AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY. **The Mathematics Teacher**, [s. l.], v. 11, n. 4, p. 196–198, 1919.
- GLOCK, Hans-Johann. **A Wittgenstein Dictionary**. Oxford, United Kingdom: BLACKWELL PUBLISHERS, 1996.
- GLOCK, Hans-Johann. Concepts, Conceptual Schemes and Grammar. **Philosophia**, [s. l.], v. 37, n. 4, p. 653–668, 2009. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11406-009-9200-x>>. Acesso em: 25 set. 2018.
- LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, [s. l.], v. 15, n. 3, 2013.
- LÉNÁRT, István. Alternative Models on the Drawing Ball. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 24, n. 3, p. 277–312, 1993. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3482769>>. Acesso em: 13 mar. 2018.
- MIGNOLO, Walter. Desafios decoloniais hoje. **Revista Epistemologias do Sul**, [s. l.], v. 1, n. 1, p. 12–32, 2017.
- NAGEL, Thomas. Como é ser um morcego? **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, 3. [s. l.], v. 15, n. 1, 3, p. 245–262, 2005.
- QUIJANO, Anibal. Colonialidade do poder, Eurocentrismo e América Latina. In: **A colonialidade do saber: eurocentrismo e ciências sociais. Perspectivas latino-americanas**. Buenos Aires: CLACSO, Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales, 2005.
- SANTOS, Boaventura de Sousa. Para além do Pensamento Abissal: das linhas globais a uma ecologia de saberes. In: **Epistemologias do Sul**. Coimbra: Edições ALMEDINA. SA, 2009. p. 23–71.
- VIANA, Odalea Aparecida. Avaliação dos desenhos de planificação de figuras geométricas no ensino básico. **Estudos em Avaliação Educacional**, [s. l.], v. 26, n. 63, p. 838, 2015.

Disponível em: <<http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/eae/article/view/2835>>. Acesso em: 8 fev. 2018.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas**. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Remarks on the Foundations of Mathematics**. Estados Unidos: The MIT Press, 1967.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Remarks on Colour**. Oxford: BLACKWELL, 1977.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Zettel**. México: Universidad Autónoma de México - Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1997.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza**. Lisboa: Edições 70, 2000.

APÊNDICE A – PROPOSIÇÕES GRAMATICAIS DE LEIVAS (2013)

“Matemáticos do século XIX perceberam que esse postulado era independente dos quatro primeiros” (p. 648)

- O {1} **postulado das paralelas** é independente dos outros {2} **postulados de Euclides**

“a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180° ; dada uma reta e um ponto fora dela, existe mais do que uma paralela passando pelo ponto e que não a intersecciona. É a chamada Geometria Hiperbólica”. (p. 649)

- Na {3} **geometria hiperbólica** a soma dos ângulos internos de um {4} **triângulo** é sempre menor do que 180°
- Na {3} **geometria hiperbólica**, dada uma {5} **reta** e um ponto fora dela, existe mais do que uma {6} **[paralelismo]** paralela passando pelo ponto e que não a intersecciona

“Nessa estrutura, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que 180° , em contrapartida à anterior. Dados dois pontos distintos, é possível obter mais do que uma reta distinta unindo-os. Também, dada uma reta e um ponto fora dela, não existe paralela a ela passando pelo ponto. É a chamada Geometria Elíptica para uns e de Riemann para outros”. (p. 649)

- Na {7} **Geometria Elíptica (de Riemann)**, a {47} **soma dos ângulos internos** de um {4} **triângulo** é sempre maior do que 180°
- Na {7} **Geometria Elíptica (de Riemann)**, dados dois {8} **pontos distintos**, é possível obter mais do que uma {5} **reta** distinta unindo-os
- Na {7} **Geometria Elíptica (de Riemann)**, dada uma {5} **reta** e um ponto fora dela, não existe {6} **[paralelismo]** paralela a ela passando pelo ponto

“Essas duas construções foram denominadas por Gauss de Geometrias Não-Euclidianas. Nelas, as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano”. (p. 649).

- A {3} **geometria hiperbólica** é uma {8} **Geometria Não-Euclidiana**
- A {7} **Geometria Elíptica (de Riemann)** é uma {8} **Geometria Não-Euclidiana**
- Na {3} **geometria hiperbólica**, as {9} **geodésicas** são as {10} **curvas** que desempenham o papel da {5} **reta** no {11} **plano euclidiano**
- Na {7} **Geometria Elíptica (de Riemann)**, as {9} **geodésicas** são as {10} **curvas** que desempenham o papel da {5} **reta** no {11} **plano euclidiano**

“a atividade matemática escolar não é ‘olhar para as coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade”. (p. 650)

- a {12} atividade matemática escolar não é a {13} apresentação do conhecimento para o aluno
- a {12} atividade matemática escolar é a {14} construção de um conhecimento pelo aluno
- a {13} atividade matemática escolar é a {15} apropriação de um conhecimento pelo aluno
- O {16} conhecimento serve para o aluno compreender e transformar sua {17} realidade”.

Portanto, na {18} formação do professor de Matemática cabe conhecer e aprofundar o {19} conhecimento geométrico (p. 650)

“Noções básicas de geometrias não-euclidianas, sendo que nessa última incluem-se a geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), a geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e a noção de geometria dos fractais”. (p. 650)

- A {20} geometria projetiva é uma {8} geometria não-euclidiana
- Na {20} geometria projetiva se estudam os {21} pontos de fuga
- Na {20} geometria projetiva se estudam as {22} linhas do horizonte
- A {23} Geometria Topológica é uma {8} geometria não-euclidiana
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {24} interior
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {25} Exterior
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {26} fronteira
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {27} Vizinhança
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {28} Conexividade
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {10} Curva
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {29} Conjunto Aberto
- Na {23} Geometria Topológica se estuda o conceito de {30} Conjunto Fechado
- A {31} geometria dos fractais é uma {8} geometria não-euclidiana

“a pesquisa qualitativa, como um conjunto de práticas interpretativas, não privilegia nenhuma metodologia sobre qualquer outra” (p. 653-654)

- a {32} pesquisa qualitativa é um conjunto de {33} práticas interpretativas

- a {32} pesquisa qualitativa não privilegia nenhuma {34} metodologia sobre qualquer outra

“entende-se que o questionário, devidamente estruturado, deve estar muito próximo do discurso do pesquisador, pois exige uma interpretação contextualizada. Assim, ao elaborar as questões a serem aplicadas, o investigador deve ter, muito precisos, os objetivos de cada uma delas, em conexão com o problema-objeto proposto para a investigação.” (p. 654)

- O {35} questionário, devidamente estruturado, deve estar muito próximo do {36} discurso do pesquisador
- entende-se que o {35} questionário exige uma {37} interpretação contextualizada
- O {35} questionário é um conjunto de {38} questões
- Cada {38} questão do questionário tem um {39} objetivo
- Os {39} objetivos das questões devem estar conectados ao {40} problema-objeto proposto para a investigação
- Toda {41} investigação tem um {40} problema-objeto proposto para si

“O questionário tem a função de coletar informações sobre um indivíduo ou grupo, relacionadas a um determinado fato, situação e fenômeno”.

- O {35} questionário tem a função de coletar {42} informações sobre um indivíduo ou grupo
- {42} informações são relacionadas a um determinado {43} fato
- {42} informações são relacionadas a uma determinada {44} situação
- {42} informações são relacionadas a um determinado {45} fenômeno

“Qual a relação entre os ângulos internos de um triângulo pode ser menor, maior ou igual a 180° , ou seja, num modelo hiperbólico, elíptico ou plano, respectivamente”. (p. 655)

- {46} Relação entre os ângulos internos de um triângulo é o mesmo que {47} soma dos ângulos internos de um triângulo
- A soma dos ângulos internos de um {4} triângulo é igual a 180° num {11} modelo plano
- “Não, se considerarmos um espaço curvo” (p. 655)
- Num {48} espaço curvo, a 47 soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser diferente de 180°

“**existe triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180°** . A resposta correta deveria ser V, considerando-se a existência de triângulos hiperbólicos”.

- Um {49} Triângulo hiperbólico é um 4 triângulo da {3} geometria hiperbólica

“Nesse modelo [de Lobachevsky], há uma infinidade de retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto que não lhe pertence”. (p. 658)

- No {50} modelo de Lobachevsky, há uma infinidade de retas {6} paralelas a uma reta dada, passando por um ponto que não lhe pertence

“Por sua vez, GFR₄ argumentou corretamente: pela Geometria Riemanniana, existem infinitas retas passando por P paralelas a r”. (p. 659)

- pela {7} Geometria Riemanniana, existem infinitas retas passando por P {6} paralelas a r (p. 659)

“dada uma reta r e um ponto P , que não pertence a r , por P passa uma única reta paralela a r . A afirmação apresenta a forma de enunciado frequentemente utilizada nos cursos de Geometria, nos diversos níveis, sem, entretanto, ponderar que é válida para o modelo euclidiano” (p. 659).

- No {52} modelo euclidiano, dada uma reta r e um ponto P , que não pertence a r , por P passa uma única reta {6} paralela a r

“seguinte sentença: há espaço geométrico em que não existem nem quadrados e nem retângulos. Com ela, esperava-se comprovar que os currículos da Licenciatura em Matemática pouco ou nada oferecem aos futuros professores sobre conhecimentos básicos das Geometrias Não-Euclidianas”.

- Há {55} espaço geométrico em que não existem {53} quadrados
- Há {55} Espaço geométrico em que não existem {54} retângulos

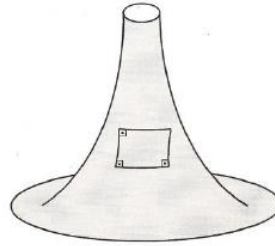
“Nenhum deles se refere à Geometria de Riemann, na qual isso é possível. Alguns ensaios de justificativa fazem alusão somente à Geometria Euclidiana. A figura 2 ilustra um triângulo trirretângulo no espaço geométrico esfera, em que os lados do triângulo são partes de circunferências máximas, isto é, as geodésicas ou ‘retas’ desse espaço, as quais, sendo intersecção da superfície esférica com um plano coordenado, formam em cada ponto A , B e C , ângulo reto. Portanto, o triângulo esférico ABC tem por soma dos ângulos internos 270° ”.

(p. 664)

- O {56} espaço geométrico esfera é a um modelo da {7} geometria de Riemann
- No {56} espaço geométrico esfera, os lados do {4} triângulo são partes de {57} circunferências máximas
- {57} circunferências máximas são as {9} geodésicas ou {5} ‘retas’ do {56} espaço geométrico esfera
- No {56} espaço geométrico esfera, as {5} ‘retas’ que são intersecção da {58} superfície esférica com um {59} plano coordenado e formam {60} ângulos Retos
- {5} ‘retas’ formam {60} ângulos Retos quando são formados pela intersecção da {58} superfície esférica com o {59} plano coordenado
- A soma dos ângulos internos de um {4} triângulo na {7} geometria de Rieman pode ser 270°

“o quadrilátero de Lambert, com três ângulos retos e um ângulo agudo. Nesse quadrilátero, por exemplo, o lado vertical adjacente ao ângulo agudo é maior do que o lado oposto, como pode ser observado na figura 5. A Geometria Hiperbólica pode ser aplicada à superfície da pseudo-esfera” (p. 668).

Figura 5 -Quadrilátero de Lambert na Pseudo-Esfera.



Fonte: Coutinho (2001, p.60).

- O {61} quadrilátero de Lambert tem três {60} ângulos retos
- O {61} quadrilátero de Lambert tem um {62} ângulo agudo
- Nesse {61} quadrilátero de Lambert há {63} lados opostos que não são do mesmo tamanho.
- A {3} Geometria Hiperbólica pode ser aplicada à superfície da {64} pseudo-esfera
- 13 Apresentação do Conhecimento está relacionada ao 16 conhecimento
- 14 Construção do Conhecimento está relacionada ao 16 conhecimento
- 15 Apropriação do Conhecimento está relacionada ao 16 conhecimento
- 19 Conhecimento Geométrico está relacionado ao 16 conhecimento
- 19 Conhecimento Geométrico está relacionado ao 52 Modelo Euclidiano
- 19 Conhecimento Geométrico está relacionado às 8 Geometrias não-euclidianas
- 46 as relação entre os ângulos internos de um triângulo estão ligadas ao conceito de 4 triângulo
- 47 soma dos ângulos internos de um triângulo estão ligadas ao conceito de 4 triângulo
- O 52 Modelo Euclidiano é o 11 Plano Euclidiano
- Um 48 espaço Curvo é um 55 Espaço Geométrico
- Os 52 Modelos euclidianos são 55 espaços geométricos
- 50 O Modelo de Lobachevsky é um 55 espaço geométrico
- 56 O Espaço Geométrico Esfera é um 55 Espaço geométrico
- O 1 Postulado das paralelas trata de 6 Paralelismo
- O conceito de 41 Investigação está relacionado ao conceito de 34 Metodologia
- O conceito de 40 Problema-Objeto proposto está relacionado ao conceito de 34 Metodologia
- O conceito de 38 questão o está relacionado ao conceito de 34 Metodologia
- O conceito de 37 Interpretação Contextualizada está relacionado ao conceito de 34 Metodologia

- O conceito de **35 Questionário** está relacionado ao conceito de **34 Metodologia**
- O conceito de **36 Discurso do Pesquisador** está relacionado ao conceito de **34 Metodologia**
- O conceito de **42 Informação** está relacionado ao conceito de **34 Metodologia**
- O **61 Quadrilátero de Lambert** está na **64 Pseudo-Esfera**

APÊNDICE B – ALGUMAS PROPOSIÇÕES DE ARTICULAÇÃO DE LEIVAS (2013)

“fatos históricos e filosóficos relativos ao conhecimento geométrico são importantes para quem deseja ser um professor, ou seja, ele deve ser um profundo conhecedor da área que irá ensinar” (p. 649).

“Deve-se levar em conta que, no ensino fundamental, os alunos já trabalham na disciplina de Geografia com localização em mapas e coordenadas, podendo ser feito trabalho interdisciplinar, em termos de longitude e latitude, partindo de experimentação, como indicado no parágrafo anterior, o que é útil, tanto na navegação aérea, quanto na marítima” (p. 650)

“Não existe triângulo cuja soma dos ângulos internos seja exatamente igual 270° .” A resposta correta deveria ser F. Em Leivas e Soares (2011), há uma possibilidade de obter triângulos geodésicos trirretângulos, em superfícies esféricas, segundo os autores, como possibilidade de geometrizar o currículo da Licenciatura. Utilizam derivadas parciais e ângulos entre vetores e exemplificam que é possível nova abordagem de conteúdos envolvendo Geometria” (p. 657).

APÊNCICE C – ARTIGOS DO CORPUS PRELIMINAR

Tabela 7 – ARTIGOS SELECIONADOS E SEUS DADOS QUANTITATIVOS

Artigo	Artigos Rel.	Nº de Rel.	Ref. Comuns	Classe
Assis, E.S.d. (2017)	20	43	17	Alaranjado
Leivas, J.C.P. (2013)	17	34	12	
Bagio, V.A. (2015)	15	31	11	
Caldatto, M.E. and Pavanello, R.M. (2014)	13	23	6	
Bagio, V.A. (2016)	8	22	6	
Gomes, L.F. e Araman, E.M.d.O. (2017)	10	15	7	
Lovis, K.A. e Franco, V.S. (2015)	9	15	6	
Gusmão, N.L., et al. (2017)	12	14	4	
Leivas, J.C.P. (2014)	9	12	4	
Amorim, R.G.G., et al. (2015)	9	11	5	
Detoni, A.R. e Pinheiro, J.M.L. (2016)	5	5	3	
Barbosa, G. (2015)	4	4	2	
Leivas, J.C.P. e Cury, H.N. (2012)	3	4	3	
Murari, C. (2011)	1	1	2	
Mariotti, M.A. e Fischbein, E. (1997)	18	18	6	Cor de Rosa
Grabiner, J. (2011)	8	8	6	
Hegedus, S.J. e Moreno-Armella, L. (2011)	7	8	5	
Vollrath, H.-J. (1976)	6	6	5	
Bernard, J. (2017)	6	6	5	
Bicudo, I. (2005)	5	6	3	
Gulikers, I. e Blom, K. (2001)	5	5	4	
MAGOSSO, J.C. e POLETTI, E.C. (2012)	4	4	3	
Fletcher, T.J. (1971)	4	4	3	
Saito, F. (2008)	2	3	3	
Pambuccian, V. (2002)	2	2	2	
Klee, V. (1971)	2	2	1	
Brown, C.H. (1940)	2	2	2	
Battro, A.M. (1977)	2	2	1	
Katinsky, J.R. (2001)	1	2	2	
Menger, K. (1971)	1	1	1	
Hilton, P. (1971)	1	1	1	
Kawasaki, K. (2007)	1	1	1	
Viana, O.A. (2015)	13	13	6	Turquesa
Brum, W.P. e Schuhmacher, E. (2014)	12	40	20	
Kaleff, M.R. e Maria, A. (2007)	11	13	3	
Brum, W.P., et al. (2015)	10	37	17	
Brum, W.P. (2014)	7	21	13	
Brum, W.P., et al. (2016)	2	2	2	

DETONI, A.R. (2003)	2	2	2	
Tractenberg, L., et al. (2010)	1	1	1	
Borasi, R. (1994)	12	34	25	Verde
Siegel, M., et al. (1998)	9	20	15	
Olsker, T.C. (2011)	9	19	11	
Lénárt, I. (1993)	8	9	7	
Goldin, G.A. (2003)	7	12	10	
Knuth, E.J. (2002)	7	21	14	
Zeitler, H. (1990)	7	9	4	
Hanna, G. e Jahnke, H.N. (1993)	6	13	6	
Wilson, M.R. (1994)	5	9	7	
Hollebrands, K.F., et al. (2010)	5	9	5	
Bruce, C.D., et al. (2017)	4	4	3	
Harkness, S.S. (2009)	4	6	4	
Griffiths, H.B. (1983)	4	4	1	
Fischbein, E. (1999)	3	3	2	
Siemens, H. (2011)	2	2	2	
Van Den Brink, J. (1995)	2	2	2	
Geeslin, W.E. e Shar, A.O. (1979)	2	2	2	
Van Den Brink, J. (1993)	2	2	2	
Falciano, F.T. (2009)	1	1	1	
Tall, D. (2004)	7	9	7	Azul
Inglis, M. (2003)	5	7	6	
Stevenson, I. (2001)	5	11	9	
Stevenson, I. (1999)	4	10	9	
Eisenberg, M., et al. (2014)	2	2	1	
Assis, T.A.d., et al. (2008)	1	1	1	Isolados
Ferreira, G.L. 2006	2	2	2	
Behar, P.A., et al. (2003)	1	1	1	
Fiorentini, D. e de Carvalho Correa de Oliveira, A.T. (2013)	1	1	1	
Grimberg, G.E. (2014)	1	2	2	
Lützen, J., et al. (1992)	1	1	2	
Rodd, M. (2010)	1	1	1	
Vaz Jr, J. (1997)	1	1	1	
Vaz Jr, J. (2000)	1	1	1	
Blåsjö, V. (2013)	0	0	0	
Breda, A., et al. (2015)	0	0	0	
Brendle, S. e Schoen, R. (2011)	0	0	0	
Bueno, J.M.C. (2008)	0	0	0	
Cogliati, A. (2016)	0	0	0	
Davis, E.H. (1999)	0	0	0	
Est, W.v. (1993)	0	0	0	
Fulton, A. (2005)	0	0	0	

Gauthier, Y. (2005)	0	0	0
Groshol, E. (2017)	0	0	0
Gutiérrez, S. (2010)	0	0	0
Henderson, K.B. (1940)	0	0	0
Hutton, D.R. (1977)	0	0	0
Klamkin, M.S. (1968)	0	0	0
Lesh, R.A. (1976)	0	0	0
Marcotte, J. e Salomone, M. (2014)	0	0	0
Martins, R.d.A. e Silva, A.P.B.d. (2013)	0	0	0
Mitchell, C.E. (1983)	0	0	0
O'Brien Jr, W.P. (2003)	0	0	0
Schwartz, B. (2014)	0	0	0
Sepulcre, J. (2017)	0	0	0
Silva, C.M.S.d. (2005)	0	0	0
Silva, S.F.d., et al. (2017)	0	0	0

Fonte: Produzido para a pesquisa.