

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

RONALDO FARIA GARCIA

FUNÇÕES CONVEXAS NO  $\mathbb{R}^2$  E INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO  
BIOBJETIVO

CAMPO GRANDE - MS  
SETEMBRO DE 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

RONALDO FARIA GARCIA

FUNÇÕES CONVEXAS NO  $\mathbb{R}^2$  E INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO  
BIOBJETIVO

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra Rúbia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2019

**FUNÇÕES CONVEXAS NO  $\mathbb{R}^2$  E INTRODUÇÃO À OTIMIZAÇÃO  
BIOBJETIVO**

**RONALDO FARIA GARCIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Rúbia Mara de Oliveira Santos - UFMS

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho - UNESP - Ilha Solteira

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Elisabete Sousa Freitas - UFMS

É com muito orgulho que dedico este  
trabalho à minha querida mãe Toinha,  
à minha irmã Cintia,  
à minha amada esposa Ettyene,  
à minha filha Anna,  
ao meu filho Mateus e em memória  
do meu inesquecível pai Levindo Garcia  
e do saudoso primo João Batista Farias.

# Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus pais, Levindo Garcia e Antonia Farias por ensinar-me a respeitar o próximo, ser honesto e por nunca medirem esforços em me propiciar uma educação de qualidade, mostrando-me que o conhecimento e a educação são elementos imprescindíveis na formação do ser humano.

À minha adorável esposa Ettyene, por estar constantemente ao meu lado, simplificando os momentos difíceis, sendo paciente e compreensível com minhas angústias e se transformando na maior responsável por tudo que envolvesse a nossa família e a mim. Sem o seu apoio não seria possível concretizar esse sonho. Ao meu filho, Mateus, por compreender meus momentos de ausência e por me fortalecer com o seu amor incondicional. Obrigado, amo vocês.

A todos os companheiros de mestrado, em particular aos amigos conquistados durante essa caminhada, Mateus Corumbá e Leandro Rocha.

Aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul que lecionaram disciplinas do PROFMAT, em especial a minha orientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Rúbia Mara de Oliveira Santos, pela sua atenção, confiança, motivação e por realizar a orientação com muito empenho e dedicação. Muito obrigado.

# Resumo

Essa dissertação aborda conceitos de conjuntos convexos, funções convexas e introdução a otimização multiobjetivo com foco nos problemas biobjetivos. O desenvolvimento apresenta uma revisão bibliográfica contendo definições, propriedades, proposições, lemas, teoremas e aplicação em situações reais. Espera-se que esse trabalho venha contemplar estudantes e professores de matemática que buscam enriquecer o conhecimento sobre convexidade e otimização.

**Palavras-chave:** Conjuntos Convexos, Funções Convexas, Otimização Biobjetivo.

# Abstract

This dissertation addresses the main concepts related to convex sets, convex functions and the introduction to a multi-objective optimization focusing on biobjective problems. The development introduces a bibliographical review, which comprehends definitions, properties, propositions, lemmas, theorems and their application to real situations. It is expected that this work will include students and math teachers who seek to enrich knowledge about convexity and optimization.

**Keywords:** Convex Sets, Convex Functions, Biobjective Optimization.

O professor que possui a pretensão de ensinar alguém,  
tem que ter no mínimo humildade para aprender.

Professor Ronaldo Garcia

# Nomenclatura

Conjuntos são normalmente representados por letras maiúsculas e funções por letras minúsculas.

$\mathbb{N}$  : Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$  : Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$  : Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$  : Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^n$  : Produto cartesiano de  $n$  cópias da reta real  $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_+$  : Reais não-negativos

$B(a, \epsilon)$  : Bola Aberta do  $\mathbb{R}^n$

$\wedge$  : e

$\forall$  : Qualquer

$\sum$  : Somatório

$\nexists$  : Não Existe

$\approx$  : Aproximadamente

$C_{n,p}$  : Combinação simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ .

$f'(a)$  Derivada da função  $f$  em  $a$

$f^{-1}(x)$  : Função inversa de  $f$

$H$  : Hiperplano

$H_+$  : Semiespaço aberto

$H_-$  : Semiespaço aberto

$\langle a, x \rangle = a^T x$  : Produto interno entre os vetores  $a$  e  $x$

$\mathcal{E}_f$  : Epígrafo de uma função  $f$

$\mathcal{T}$  : Cone

$con(\mathcal{C})$  : Casca convexa de  $\mathcal{C}$

$int(\mathcal{C})$ : Interior de  $\mathcal{C}$   
 $\nabla f(x)$ : Gradiente de  $f$  em  $x$   
 $\partial f(x)$ : Subdiferencial de  $f$  em  $x$   
 $f'_+(k)$ : Derivada lateral à direita de  $f$  em  $k$   
 $f'_-(k)$ : Derivada lateral à esquerda de  $f$  em  $k$   
 $H[f(x, y)]$ : Matriz Hessiana da função  $f(x, y)$   
 $\mathcal{F}(x_1, x_2)$ : Função Global  
 $\mathcal{X}$ : Espaço factível  
 $\mathcal{X}_\epsilon$ : Espaço factível  $\epsilon$   
 $\mathcal{Y}$ : Espaço de objetivos  
 $efi(\mathcal{X})$ : Conjunto de soluções eficientes  
 $P_x$ : Problema multiobjetivo genérico  
 $P$ : Problema de otimização multiobjetivo  
 $\mathcal{P}$ : Problema mono-objetivo  
 $P_i$ : Problemas escalares  
 $P_w$ : Problema da soma ponderada  
 $P_k(\epsilon)$ : Problema  $\epsilon$  – *restrito*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Análise Convexa</b>	<b>3</b>
2.1	Conjuntos convexos . . . . .	3
2.2	Função Convexa . . . . .	9
2.3	Funções Convexas Diferenciáveis . . . . .	15
2.4	Funções Convexas no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Introdução à Otimização Multiobjetiva</b>	<b>25</b>
3.1	Caracterização de Soluções Eficientes . . . . .	28
3.2	Aplicações . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>46</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>

# Lista de Figuras

2.1	(a) Conjuntos Convexo e (b) Conjunto não-Convexo . . . . .	3
2.2	Hiperplano Suporte . . . . .	7
2.3	Hiperplano Separador $H$ . . . . .	8
2.4	Gráfico de uma Função Convexa . . . . .	10
2.5	Epígrafo de uma função $f$ . . . . .	14
2.6	Paraboloide Circular . . . . .	20
2.7	Gráfico de uma Função Estritamente Convexa . . . . .	21
2.8	Gráfico de uma Função Côncava . . . . .	22
2.9	Gráfico de uma Função não Convexa e nem Côncava . . . . .	24
3.1	Conjunto $efi\{\mathcal{X}\}$ . . . . .	27
3.2	Conjunto de Soluções Factíveis; Espaço Objetivo Factível e Linhas de Dominância em um Problema Biobjetivo . . . . .	28
3.3	Espaço Factível $\mathcal{X}$ . . . . .	34
3.4	Espaço de Objetivos . . . . .	35
3.5	Espaço Factível $\mathcal{X}$ . . . . .	37
3.6	Espaço de Objetivos $\mathcal{Y}$ . . . . .	37
3.7	Espaço Factível $\mathcal{X}$ . . . . .	41
3.8	Espaço de Objetivos . . . . .	42
3.9	Espaço Factível $\mathcal{X}_\epsilon$ . . . . .	44

# Capítulo 1

## Introdução

O desenvolvimento histórico sobre convexidade ocorreu de forma lenta, as primeiras contribuições sobre o assunto surgiram das definições sobre polígonos e sólidos a partir do livro XI da grande obra “Os Elementos” de Euclides (300 a.C) mas, foi com Arquimedes (287-212 a.C) a origem da primeira definição sobre convexidade para curvas e superfícies. Na obra “Harmonices Mundi” publicada por Kepler (1571-1630), o autor apresenta problemas relacionados com os polígonos regulares e poliedros regulares não-convexos porém, no final do século XIX é que surgem os primeiros resultados e estudos aprofundados sobre conjuntos convexos em dimensão finita, introduzidos pelo matemático Minkowski (1864-1909) [1], [2]. A função convexa foi definida pelo engenheiro Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925), mostrando que desigualdades decorrem das propriedades destas funções, um dos resultados relevantes sobre o estudos de funções convexas é que o mínimo local de uma função convexa é também o mínimo global. É importante ressaltar que nesse período não foi apenas teórico o estudo de análise convexa, contudo foi a partir do século XX é que houve um grande desenvolvimento no estudo da convexidade envolvendo aplicações importantes em Pesquisa Operacional.

O termo Pesquisa Operacional surgiu na 2ª guerra mundial (1939-1945) com o objetivo de melhorar a utilização de recursos militares um tanto quanto escassos naquele momento. A pesquisa operacional utiliza uma modelagem matemática na ajuda à tomada de decisões que busca melhorar ou otimizar um problema real. A Otimização Matemática consiste em minimizar ou maximizar uma função sobre um subconjunto de alternativas factíveis. A partir da década de 70 tem sido crescente o emprego de modelos de otimização para representarem uma situação problema real, onde vários objetivos, em geral conflitantes, concorrem para a melhor solução de um problema, estabelecendo um problema de Otimização Multiobjetivo. A

solução de um problema multiobjetivo dependerá da noção de equilíbrio utilizada para resolver os conflitos que surgem da consideração simultânea de vários objetivos e raramente existe uma solução que seja ótima para todos os objetivos simultaneamente [3]. A noção de Equilíbrio Cooperativo de Pareto é aplicado em problemas envolvendo duas funções objetivos, ou seja, um problema de otimização biobjetivo.

O engenheiro e economista franco-italiano Vilfredo Frederico Damaso Pareto (1848-1923) publica em seu livro “Cours d’Économie Politique” a Lei de Eficiência de Pareto. A formulação matemática do equilíbrio cooperativo de Pareto foi publicada em 1906, O “Ótimo de Pareto” ocorrerá quando não for possível melhorar a situação de um objetivo sem degradar a situação de outro objetivo qualquer.

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho se dá pelas possibilidades de estudar conceitos oriundos da otimização que está fortemente calcada nos conceitos advindos do Cálculo Diferencial de Integral e da Álgebra Linear. Nesse sentido, modelos matemáticos elaborados, complexos e criteriosos podem requerer conhecimentos matemáticos específicos. Os professores de matemática do ensino médio resolvem problemas com uma função, no entanto, em situações reais, é necessário duas ou mais funções para modelar o problema, dessa forma essa dissertação pode acrescentar um diferencial para estudantes e professores de matemática.

Esta dissertação tem como objetivo estudar os principais conceitos acerca de conjuntos e funções convexas, funções convexas no  $\mathbb{R}^2$  e uma introdução a otimização multiobjetivo, com focos em problemas biobjetivos. Sendo assim, a dissertação está organizada como segue:

O capítulo 2 aborda conceitos, definições, teoremas e proposições referentes a Conjuntos Convexos, Funções Convexas no  $\mathbb{R}^n$ , um breve comentário sobre Funções Convexas Diferenciáveis e Aplicações de Funções Convexas no  $\mathbb{R}^2$ .

O capítulo 3 destina-se à Introdução de Otimização Multiobjetivo apresentando definições, teoremas e uma situação-problema que consiste em preparar um refeição saudável para diabéticos envolvendo dois critérios, custo e quantidade de calorias.

No capítulo 4 serão apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Análise Convexa

Este capítulo apresenta definições, teoremas e resultados clássicos de análise convexa. A revisão aqui abordada foi baseada em [2], [1], [4], [5], [6], [7], [8], [9],[10] e [11].

### 2.1 Conjuntos convexos

**Definição 1.** Um conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é convexo quando para quaisquer  $x_1, x_2 \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , tem-se que o ponto genérico  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ .

Geometricamente, um conjunto é convexo em  $C$  quando qualquer segmento de reta, com extremidades em  $C$ , está totalmente contido em  $C$ , caso contrário o conjunto é não-convexo. Na figura 2.1 (a) é um conjunto convexo e (b) um conjunto não-convexo.

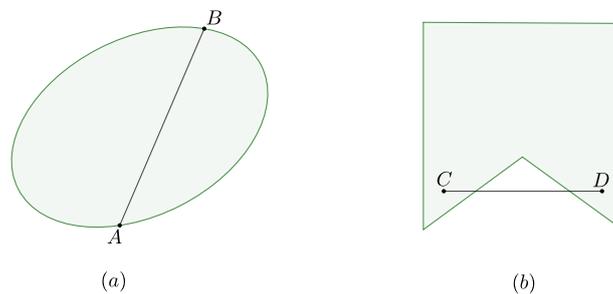


Figura 2.1: (a) Conjuntos Convexo e (b) Conjunto não-Convexo

Por definição o conjunto vazio é um conjunto convexo.

**Definição 2.** Um conjunto  $A$  é um conjunto afim se a reta que passa por dois pontos distintos quaisquer em  $A$  está em  $A$ . O conjunto vazio é um conjunto afim.

**Definição 3.** Uma combinação linear é denominada afim dos vetores  $u_i \in \mathbb{R}^n$  quando  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ , ou seja,  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ .

Se  $\alpha_i \geq 0$  para qualquer  $1 \leq i \leq m$ , então a combinação  $v$  é uma combinação positiva.

**Definição 4.** Uma combinação linear é convexa quando é simultaneamente afim e positiva, ou seja, dado  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ , tais que  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , o ponto  $\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$  é combinação convexa dos pontos  $v_i \in \mathbb{R}^n$  com parâmetros  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ .

**Teorema 1.** Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo com  $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ , então toda combinação convexa  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_i^n \alpha_i x_i \in C$ .

**Demonstração:** A demonstração será feita por indução em  $n$ .

Considere  $n = 1$  a base da indução, segue que  $\sum_{i=1}^1 \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 \in C$ .

Seja  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_i^n \alpha_i x_i \in C$ , a hipótese da indução.

Observe que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \sum_i^n \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in C$$

Sem perda de generalidade, considere que  $\alpha_{n+1} \neq 1$ . Então fazendo  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ , segue que  $\alpha_{n+1} = 1 - \alpha$  e  $\alpha \neq 0$ . Pela hipótese da indução e considerando que  $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$ , tem-se que  $x = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i \in C$ . Logo  $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \alpha x + (1 - \alpha) x_{n+1} \in C$ , pois  $C$  é Convexo. ■

**Definição 5.** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  conjuntos convexos. O conjunto soma/subtração destes conjuntos é um conjunto de pontos da forma

$$C_1 \pm C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / x = C_1 \pm C_2, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

### **Propriedades dos Conjuntos Convexos**

(i) Suponha que  $C_1, C_2, \dots, C_m$  sejam conjuntos convexos do  $\mathbb{R}^n$ , então  $C = C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$  é um conjunto convexo.

(ii) Se  $k \in \mathbb{R}$  e  $C$  é um conjunto convexo, então  $k.C$  é um conjunto convexo.

(iii) Sejam  $C_1$  e  $C_2$  conjuntos convexos do  $\mathbb{R}^n$ , então  $C_1 \pm C_2$  é um conjunto convexo.

**Demonstração:**

(i) Caso  $C = \emptyset$ , pela definição 1 não há nada a demonstrar. Suponha que  $C \neq \emptyset$  e ainda considere arbitrariamente  $x_1$  e  $x_2$  tais que  $x_1$  e  $x_2 \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , dessa forma  $x_1$  e  $x_2 \in C_i$

, onde  $1 \leq i \leq m$ , como todo  $C_i$  é convexo, segue que,  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C_1, C_2, \dots, C_m$ , para qualquer  $\alpha \in [0, 1]$  e assim, conclui-se que  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ .

(ii) Caso  $C = \emptyset$ , pela definição 1 não há nada a demonstrar. Suponha que  $C \neq \emptyset$  e considere que  $x$  e  $y \in C$  com  $\alpha \in [0, 1]$ . Fazendo  $x = k.c_1$  e  $y = k.c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2 \in C$ , segue que:

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + (1 - \alpha)y \\ z &= \alpha(k.c_1) + (1 - \alpha)(k.c_2) \\ z &= k.[\alpha c_1 + (1 - \alpha)c_2] = kc, \end{aligned}$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  e  $c \in C$ . Portanto,  $kc$  é um conjunto convexo.

(iii) Se  $C_1 = \emptyset$ , então  $C_1 \pm C_2 = C_2$ , no entanto, se  $C_2 = \emptyset$ , então  $C_1 \pm C_2 = C_1$ .

Caso  $C_1 \neq \emptyset$  e  $C_2 \neq \emptyset$ , suponha  $x, y \in C_1 \pm C_2$ , ou seja, existem  $x_1, y_1 \in C_1$  e  $x_2, y_2 \in C_2$  tal que  $x = x_1 + x_2$  e  $y = y_1 + y_2$ .

Considere agora que  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ , com  $\alpha \in [0, 1]$ , segue que

$$\begin{aligned} z &= \alpha x + (1 - \alpha)y \\ z &= \alpha(x_1 + x_2) + (1 - \alpha)(y_1 + y_2) \\ z &= \alpha x_1 + (1 - \alpha)y_1 + \alpha x_2 + (1 - \alpha)y_2 \end{aligned}$$

Pondo  $z_1 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)y_1$  e  $z_2 = \alpha x_2 + (1 - \alpha)y_2$ , segue que  $z = z_1 + z_2$ .

Portanto,  $C_1 \pm C_2$  é um conjunto convexo. ■

**Definição 6.** Um ponto interior de um conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  é um elemento  $a \in C$  se para algum  $\epsilon > 0$  tem-se  $B(a, \epsilon) \subset C$ . O conjunto dos pontos interiores de  $C$  é denotado por  $\text{int}(C)$ .

**Definição 7.** Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv}(C)$  é o fecho convexo do conjunto  $C$ , ou seja, a interseção de todos os conjuntos convexos que contém  $C$ , e

$$\text{conv}(C) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, m \in \mathbb{N}, v_i \in C, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

O fecho convexo de um conjunto  $C$  é o menor conjunto convexo contendo  $C$ .

**Proposição 1.** Se  $C \subset \mathbb{R}^n$  é convexo, então  $\text{int}(C)$  e  $\text{conv}(C)$  são convexos.

**Definição 8.** Um conjunto  $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$  é um cone quando  $c \in \mathcal{T}$ , então  $k.c \in \mathcal{T}$ ,  $\forall k > 0$ . Denota-se cone ( $\mathcal{T}$ ), o conjunto de todas as combinações não negativas de elementos de  $\mathcal{T}$ , ou seja, uma combinação de elementos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m \in \mathcal{T}$  da forma  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$  em que os coeficientes  $\alpha_i > 0$ .

**Definição 9.** O cone gerado por vetores  $x, y \in \mathbb{R}^n$  é um conjunto  $\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{R}^n / z = \alpha x + \beta y, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$ .

**Exemplo 1**

A solução de um sistema de equações lineares da forma  $AX = b$ , onde  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  é um conjunto convexo.

Solução:

Considere o conjunto  $C = \{X \in \mathbb{R}^n / AX = b\}$  e sejam  $x_1$  e  $x_2 \in C$ .

Como  $x_1$  e  $x_2 \in C$ , segue que,  $Ax_1 = b$  e  $Ax_2 = b$ . Por outro lado,

$$Ax = A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)$$

$$Ax = \alpha(Ax_1) + (1 - \alpha)(Ax_2)$$

$$Ax = \alpha(Ax_1) + Ax_2 - \alpha(Ax_2)$$

$$Ax = \alpha.b + b - \alpha.b = b$$

Dessa forma concluí-se que  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$  para cada  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Exemplo 2**

Todo subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo.

Solução:

Seja  $C$  um subespaço do  $\mathbb{R}^n$ , caso  $C = \emptyset$  ou  $C$  seja unitário, não tem nada a ser feito pois a demonstração é imediata, afinal são conjuntos convexos triviais. Suponha a situação contrária, ou seja,  $C \neq \emptyset$  e  $C$  um conjunto convexo não unitário.

Considere  $x$  e  $y \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , a demonstração será concluída quando  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ . Como  $C$  é um subespaço do  $\mathbb{R}^n$  e  $x, y \in C$ , então  $u = x - y \in C$  e  $\alpha u \in C$ .

Com isso, segue que:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \alpha x - \alpha y + y$$

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \alpha(x - y) + y$$

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \alpha u + y$$

Logo, tem-se que  $\alpha u + y \in C$ , ou seja,  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ .

**Definição 10.** Um hiperplano  $H$  do  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto tal que  $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle a, x \rangle = k\}$ , onde  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $k \in \mathbb{R}$ .

Uma outra forma de representar um hiperplano  $H$ :  $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = k\}$ .

**Exemplo 3**

Todo hiperplano é um conjunto convexo.

Solução:

Considere  $z$  e  $t \in H$  e  $\alpha \in [0, 1]$  e observe que

$$\langle a, x \rangle = \langle a, \alpha z + (1 - \alpha)t \rangle$$

$$\langle a, x \rangle = \langle a, \alpha z \rangle + \langle a, (1 - \alpha)t \rangle$$

$$\langle a, x \rangle = \alpha \langle a, z \rangle + (1 - \alpha) \langle a, t \rangle$$

pela definição,  $\langle a, z \rangle = k = \langle a, t \rangle$ , sendo assim segue que

$$\langle a, x \rangle = \alpha k + (1 - \alpha)k$$

$$\langle a, x \rangle = \alpha k - \alpha k + k = k.$$

**Definição 11.** Considere os subconjuntos  $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x > k\}$  e  $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x < k\}$  contidos no  $\mathbb{R}^n$ .  $H$  é um hiperplano suporte de um conjunto convexo  $C$ , se  $C \subset H_-$  ou  $C \subset H_+$  e  $H$  contém um ponto pertencente ao complementar de  $C$ .

A figura 2.2 representa um conjunto convexo  $C$  e um hiperplano separador  $H$ .

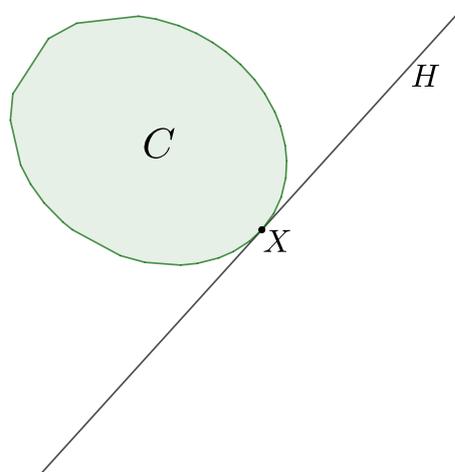


Figura 2.2: Hiperplano Suporte

**Definição 12.** Considere  $C$  e  $D$  subconjunto quaisquer do  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto  $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = k\}$  é um hiperplano separador de  $C$  e  $D$  se  $C \subset H_+$  e  $D \subset H_-$ .

**Teorema 2.** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  conjuntos convexos do  $\mathbb{R}^n$  tais que  $C_1$  possui pontos interiores e  $C_2$  não contém nenhum ponto interior de  $C_1$ . Então existe um hiperplano  $H$  separando  $C_1$  e  $C_2$  ou, de forma equivalente, existe  $k \in \mathbb{R}^n, c \neq 0$ , tal que  $\sup_{x_1 \in C_1} \langle k, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle k, x_2 \rangle$ , com  $x_1 \in C_1$  e  $x_2 \in C_2$ .

**Demonstração:** Seja  $C = C_1 - C_2 = \{y : y = x_1 - x_2, x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ , por hipótese,  $C$  é um conjunto convexo e que  $0 \in \text{int}(C)$ , existe então  $k \in \mathbb{R}^n, k \neq 0$ , tal que  $\langle k, x \rangle \leq 0, \forall y \in C$ , ou seja,

$$\langle k, x_1 \rangle \leq \langle k, x_2 \rangle, \forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2$$

Sendo assim, existe  $\beta \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\sup_{x \in C_1} \langle k, x \rangle \leq \beta \leq \inf_{x \in C_2} \langle k, x \rangle$$

e  $H = \{x : \langle k, x \rangle = \beta\}$  ■

Observe exemplos de hiperplanos separadores na figura 2.3

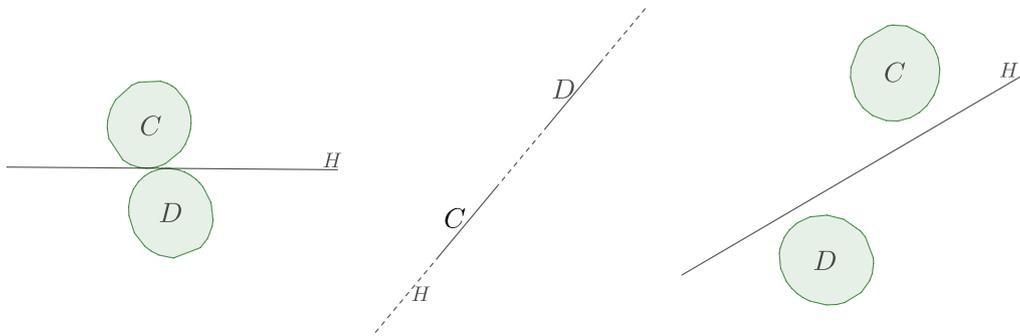


Figura 2.3: Hiperplano Separador H

**Definição 13.** Seja  $a$  um vetor não nulo em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $k$  um escalar. Os subconjuntos  $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x > k\}$  e  $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x < k\}$  contidos no  $\mathbb{R}^n$  são denominados semiespaço aberto.

#### Exemplo 4

Qualquer semiespaço em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo.

Solução:

Considere o semiespaço fechado  $H = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle a, x \rangle \geq k\}$ .

Sejam  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes a  $H$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Tome  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$  e observe que:

$$\langle a, x \rangle = \langle a, \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \rangle$$

$$\langle a, x \rangle = \langle a, \alpha x_1 \rangle + \langle a, (1 - \alpha)x_2 \rangle$$

$$\langle a, x \rangle = \alpha \langle a, x_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle a, x_2 \rangle$$

Como  $x_1$  e  $x_2 \in H$ , temos que  $\langle a, x_1 \rangle \geq k$  e  $\langle a, x_2 \rangle \geq k$ , segue que

$$\langle a, x \rangle \geq \alpha k + (1 - \alpha)k = k.$$

Para semiespaços aberto a solução é análoga.

**Definição 14.** *A interseção de um número finito de semiespaços fechados é denominado um poliedro. Um poliedro limitado é denominado politopo.*

## 2.2 Função Convexa

A definição de função convexa foi introduzida por Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925), utilizando a desigualdade do ponto médio.

**Definição 15.** *Seja  $C$  um conjunto convexo e uma função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $f$  é convexa em  $C$  se, para todos  $x, y \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se,*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \quad (2.1)$$

*Se a desigualdade 2.1 seja estrita para quaisquer  $x$  e  $y \in C$ , com  $x \neq y$ , a função  $f$  é denominada estritamente convexa. Por outro lado, se  $f$  é convexa,  $-f$  é definida côncava e estritamente côncava se  $f$  for estritamente convexa.*

Seja  $C$  um conjunto convexo e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Na figura 2.4 é possível observar geometricamente que para quaisquer  $x, y \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se que  $x \leq \alpha x + (1 - \alpha)y \leq y$  e ainda,  $f(x) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \leq f(y)$ . Os pontos do segmento formado por

$(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  estão acima de  $f$  ou sobre  $f$ , sendo assim o gráfico da função está sobre ou acima de qualquer uma de suas tangentes.

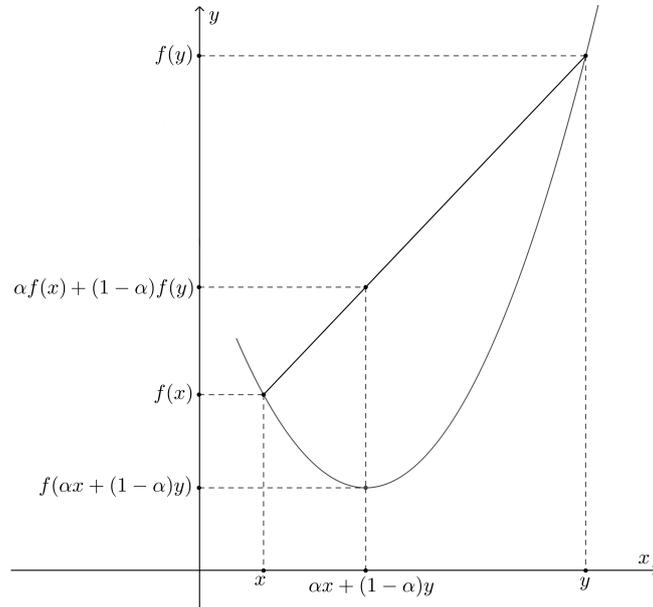


Figura 2.4: Gráfico de uma Função Convexa

A definição 15 pode ser estendida para mais de dois pontos, sem perda de generalidade, para uma coleção de pontos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  num intervalo  $I$  e para uma coleção de números  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  onde para cada  $\alpha_i \geq 0, i=1,2,\dots,n$  tem-se  $\sum \alpha_{i=1}^n = 1$ , formando a desigualdade de Jensen

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

**Teorema 3.** *Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo, com  $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$  e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, então tem-se  $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$ .*

**Demonstração:** A demonstração será feita por indução em  $n$ .

A base da indução será  $n=1$ , note que  $f\left(\sum_{i=1}^1 \alpha_i x_i\right) = \alpha_1 f(x_1) \leq \sum_{i=1}^1 \alpha_i f(x_i)$ .

Considere agora que,  $f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$  seja hipótese da indução, basta mostrar que  $f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$ .

De fato, observe que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f\left(\alpha \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i + (1-\alpha)x_{n+1}\right)$$

como a função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , por hipótese, é convexa tem-se

$$f \left( \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) \leq \alpha f \left( \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i + (1 - \alpha)x_{n+1} \right)$$

pela hipótese da indução segue que

$$f \left( \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) \leq \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} f(x_i) + (1 - \alpha)f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

logo,

$$f \left( \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i).$$

■

### ***Propriedades das Funções Convexas***

(i) Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e as funções convexas  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , então, para quaisquer  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, 2, \dots, n$ , a função

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$$

é convexa em  $C$ .

(ii) Sejam  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções convexas e  $h(x)$  crescente, então a função

$$f(x) = h(g(x)), f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

é convexa em  $C \subset \mathbb{R}^n$ .

(iii) Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto convexo. Toda função convexa  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

#### **Demonstração:**

(ii) Como  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função convexa, existem  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , tal que

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$$

Supondo  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  crescente, tem-se

$$h(g(\alpha x + (1 - \alpha)y)) \leq h(\alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y))$$

pelo fato de  $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ser convexa,

$$h(g(\alpha x + (1 - \alpha)y)) \leq \alpha h(g(x)) + (1 - \alpha)h(g(y))$$

As demonstrações dos itens (i) e (iii) encontram-se em [9]

■

**Teorema 4.** *Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa e invertível então:*

(i) *Se  $f(x)$  é decrescente,  $f^{-1}(x)$  é convexa.*

(ii) *Se  $f(x)$  é crescente,  $f^{-1}(x)$  é côncavo.*

**Demonstração:**

(i) Suponha  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  decrescente, convexa e invertível, com  $g(x) = f^{-1}(x)$ ,  $f^{-1}(x) : f(C) \rightarrow C$ .

Sejam  $y_1, y_2 \in f(C)$ , com  $y_1 = f(x_1)$  e  $y_2 = f(x_2)$  e  $x_1, x_2 \in C$ .

Como  $f(x)$  é convexa, tem-se que

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2), \alpha \in [0, 1].$$

Pelo fato de que  $g(x)$  também é decrescente, segue que

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq g(\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2))$$

portanto,

$$g(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$$

$$g(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha g(y_1) + (1 - \alpha)g(y_2)$$

Logo  $g(x) = f^{-1}(x)$  é convexa.

A demonstração do item (ii) é análogo ao item (i).

■

### **Exemplo 5**

A função  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é estritamente côncava no intervalo  $[0, \pi]$ .

Solução

Sejam  $x$  e  $y \in [0, \pi]$  e  $\text{sen}x + \text{sen}y = 2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ , como  $x$  e  $y \in [0, \pi]$ , então  $\frac{x+y}{2} \in [0, \pi]$ , segue que  $\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$  e  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 1$ , então  $\text{sen}x + \text{sen}y \leq 2\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$ , dessa forma a função seno é côncava.

Por outro lado a igualdade ocorre se, e somente se,  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$  ou  $\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$ .

Suponha inicialmente que  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$  e como  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ , segue que

$$\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Seja  $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$ , como  $\frac{x+y}{2} \in [0, \pi]$  tem-se que

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x+y}{2} = \pi$$

Logo  $x = y$ , o que garante a função  $f(x) = \sin(x)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ser estritamente côncava.

**Definição 16.** *Seja um conjunto convexo  $C \subset \mathbb{R}^n$ . Uma função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é quase-convexa quando para todo  $k \in \mathbb{R}$  o conjunto  $C_k = \{x \in C; f(x) \leq k\}$  é convexo.*

**Proposição 2.** *Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo,  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é quase-convexa se, e somente se,  $f((\alpha)x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$  para  $x, y \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$  quaisquer.*

**Demonstração:** Suponha que a função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  seja quase-convexa,  $x, y \in C$  e ainda que  $k = \max\{f(x), f(y)\}$ . Então  $f(x) \leq k$  e  $f(y) \leq k$ , logo  $f((\alpha)x + (1-\alpha)y) \leq k = \max\{f(x), f(y)\}$  para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

Por outro lado, suponha agora que  $f((\alpha)x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$  para quaisquer  $x, y \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Sejam  $x, y \in C$  tais que,  $f(x) \leq k$  e  $f(y) \leq k$ . Então  $\max\{f(x), f(y)\} \leq k$ , portanto, como  $\alpha \in [0, 1]$ , tem-se que  $f((\alpha)x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq k$ , dessa forma  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é quase-convexa. ■

**Definição 17.** *O epígrafo de uma função contínua  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é o conjunto  $E_f$ , tal que:*

$$E_f = \{(x, k) \in C \times \mathbb{R} / f(x) \leq k\}$$

**Teorema 5.** *Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo. Uma função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em  $C$  se, e somente se, o epígrafo de  $f$  é um conjunto convexo em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:**

Inicialmente será demonstrado que  $E_f$  é um conjunto convexo em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , então a função  $f$  é convexa.

Suponha  $E_f$  um conjunto convexo e sejam  $x$  e  $y \in C$  quaisquer, onde  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y)) \in E_f$ , como  $E_f$  é convexo para qualquer  $\alpha \in [0, 1]$  segue que,

$$(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)) = \alpha(x, f(x)) + (1-\alpha)(y, f(y))$$

Logo  $\alpha(x, f(x)) + (1 - \alpha)(y, f(y)) \in E_f$ . Como  $E_f$  é uma função convexa em  $C$  e pela definição 17 segue que  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ , o que garante  $f(x)$  convexa em  $C$ .

Por outro lado, tem-se a reciprocidade. Suponha que  $f$  é convexa em  $C$  e considere  $(x, a)$  e  $(y, b)$  pertencentes ao epígrafo de  $f$ . Pela convexidade de  $f$ ,  $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$  e pelo fato de  $(x, a)$  e  $(y, b) \in E_f$ , tem-se que  $f(x) \leq a$  e  $f(y) \leq b$ , sendo assim,

$$\alpha a + (1 - \alpha)b \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha a + (1 - \alpha)b$$

o que equivale a

$$\alpha(x, a) + (1 - \alpha)(y, b) = (\alpha x, \alpha a) + ((1 - \alpha)y, (1 - \alpha)b)$$

$$\alpha(x, a) + (1 - \alpha)(y, b) = (\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha a + (1 - \alpha)b) \in E_f$$

■

A relação entre conjunto convexo e função convexa existente no teorema 5 pode ser melhor compreendida através da figura 2.5.

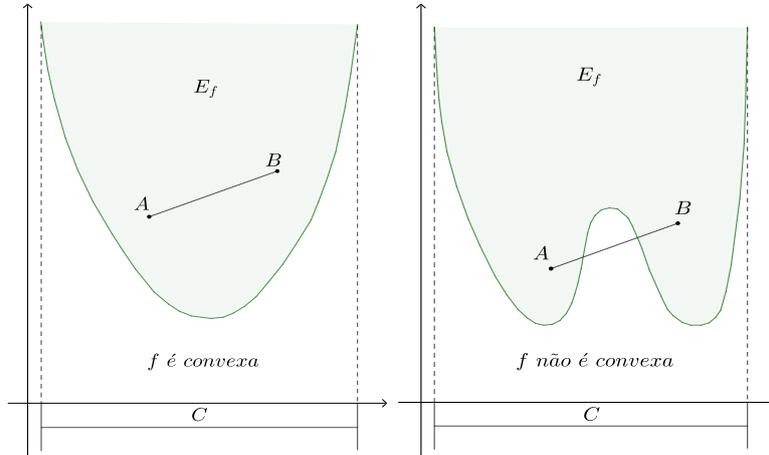


Figura 2.5: Epígrafo de uma função  $f$

**Teorema 6.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa em  $C$ . Então todo mínimo local é mínimo global.*

**Demonstração:** Suponha  $a \in C$  um mínimo local de  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  e que existe  $x \in C$  tal que  $f(x) < f(a)$ . Então para  $0 < \alpha < 1$  tem-se,

$$f((1 - \alpha)a + \alpha x) \leq (1 - \alpha)f(a) + \alpha f(x) < (1 - \alpha)f(a) + \alpha f(a) = f(a).$$

Fazendo  $\alpha > 0$  pequeno, os pontos  $y = (1 - \alpha)a + \alpha x$  estariam tão próximos de  $a$  quanto desejassemos, com  $f(y) < f(a)$ , logo  $a$  não seria um ponto de mínimo local, o que é uma contradição. Portanto todo mínimo local é mínimo global. ■

**Teorema 7.** *Seja  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo. A função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se, e somente se, para quaisquer  $a, b \in C$  a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(a + xv)$ ,  $v = b - a$ , é convexa.*

**Demonstração:** Se  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  é convexa então para  $s, t \in [0, 1]$ , tem-se que

$$\begin{aligned} g((1 - \alpha)s + \alpha t) &= f(a + [(1 - \alpha)s + \alpha t]x) \\ g((1 - \alpha)s + \alpha t) &= f[(1 - \alpha)(a + sx) + \alpha(a + tx)] \\ g((1 - \alpha)s + \alpha t) &\leq (1 - \alpha)f(a + sx) + \alpha f(a + tx) \\ g((1 - \alpha)s + \alpha t) &\leq (1 - \alpha)g(s) + \alpha g(t). \end{aligned}$$

Logo a função  $g(x) = f(a + xv)$ ,  $v = b - a$  é convexa.

Por outro lado, se todas as funções  $g(x) = f(a + xv)$ ,  $v = b - a$  são convexas então, dados  $x_1$  e  $y_1 \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$ , fazendo  $g(x) = f(x_1 + x(y_1 - x_1))$ , tem-se que

$$\begin{aligned} f((1 - \alpha)x_1 + \alpha y_1) &= f(x_1 + \alpha(y_1 - x_1)) = g(\alpha) = \alpha((1 - \alpha).0 + \alpha.1) \\ f((1 - \alpha)x_1 + \alpha y_1) &\leq (1 - \alpha)g(0) + \alpha g(1) = (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \end{aligned}$$

portanto a função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  é convexa. ■

## 2.3 Funções Convexas Diferenciáveis

Suponha que a função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  seja diferenciável no conjunto aberto e convexo  $C$  logo, em cada ponto  $x \in C$  existe  $\nabla f(x)$ , sendo assim, a convexidade da função  $f(x)$  admite caracterizações. Nesta subseção serão abordados conceitos e teoremas relacionados a funções convexas e diferenciabilidade.

**Teorema 8.** Se  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa no intervalo aberto  $C$  então existem as derivadas laterais  $f'_+(k)$  e  $f'_-(k)$  em todo ponto  $k \in C$ .

**Demonstração:** Sejam a função  $g_k(x) = \frac{f(x) - f(k)}{(x - k)}$ ,  $g_k(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I = C \cap (k, +\infty)$  e  $k \in C$ . Observe que a função  $g_k(x)$  é monótona não-decrescente no intervalo  $I = C \cap (k, +\infty)$ , ou seja, para  $x_1$  e  $x_2 \in I = C \cap (k, +\infty)$  com  $x_1 < x_2$  como  $k \in$ , tem-se que  $g(x_1) \geq g(x_2)$  o que equivale à

$$\frac{f(x_1) - f(k)}{(x_1 - k)} \geq \frac{f(x_2) - f(k)}{(x_2 - k)}$$

Considere  $a \in I$  tal que  $a > x$ , então  $g_k(a) \leq g_k(x)$ , logo a função  $g_k(x)$  é limitada inferiormente na vizinhança de  $k$  e contínua em  $I$ , sendo assim, existe o limite à direita  $f'_+(k) = \lim_{x \rightarrow k+g_k(x)} f(x)$ . De forma análoga para a derivada à esquerda. ■

**Teorema 9.** As seguintes afirmações sobre a função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  derivável no intervalo  $C$ , são equivalentes.

(i)  $f$  é convexa.

(ii) A derivada  $f' : C \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona não-decrescente.

(iii) Para quaisquer  $a, x \in C$  tem-se  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ , ou seja, o gráfico de  $f$  está situado acima de qualquer de suas tangentes.

A demonstração desse teorema está em [8].

**Corolário 1.** Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo.

**Demonstração:** Considere  $a \in C$  ponto crítico da função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , isso significa que a função  $f$  possui derivada igual a zero no ponto  $a$ . Se a função  $f$  é convexa e  $a \in C$  é ponto crítico da função então pela condição (iii) do teorema 9, tem-se que  $f(x) \geq f(a)$  para todo  $x \in C$ . Logo  $a$  é ponto de mínimo para  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

**Corolário 2.** Seja uma função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , duas vezes derivável no intervalo aberto  $C$ , então:

(i)  $f$  é convexa em  $C$  se, e somente se,  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in C$ .

(ii)  $f$  é estritamente convexa em  $C$  se, e somente se,  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in C$ .

**Teorema 10.** Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo aberto e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $C$ . A função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se, e somente se, para  $a \in C$  e  $a + x \in C$  quaisquer, tem-se

$$f(a + x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), x \rangle$$

**Demonstração:** Considere  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $C$  e convexa. Pelo teorema 7, se  $a$  e  $a+x \in C$  então a função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(t) = f(a+xt)$ , é convexa. Portanto, pelo teorema 9 tem-se que  $g(1) \geq g(0) + g'(0)$ . Mas  $g(1) = f(a+x)$ ,  $g(0) = f(a)$  e  $g'(0) = \langle \nabla f(a), x \rangle$ . logo  $f(a+x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), x \rangle$ .

Por outro lado, considere que  $f(a+x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), x \rangle$ , para quaisquer  $a \in C$  e  $a+x \in C$ . Fazendo  $g(t) = f(a+xt)$ , tem-se uma função  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g'(t) = \langle \nabla f(a+xt), x \rangle$  para todo  $t \in [0, 1]$ , ou ainda, para quaisquer  $t, t_0 \in [0, 1]$ , segue que  $f(a+xt) = f(a+xt_0 + (t-t_0)x) = f(a+xt_0 + xs)$ , com  $s = t - t_0$ , logo

$$f(a+xt) \geq f(a+t_0x) + \langle \nabla f(a+t_0x), sx \rangle$$

$$f(a+xt) = f(a+t_0x) + \langle \nabla f(a+t_0x), x \rangle (t-t_0).$$

Pelo teorema 9, a função  $g(t)$  é convexa e o teorema 7 garante a convexidade da função  $f$ . ■

**Teorema 11.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo aberto e  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável em  $C$ .*

(i) *A função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se, e somente se, a matriz Hessiana de  $f$  é semidefinida positiva em todos os pontos de  $C$ .*

(ii) *A função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente convexa se, e somente se, a matriz Hessiana de  $f$  é definida positiva em todos os pontos de  $C$ .*

(iii) *A função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava se, e somente se, a matriz Hessiana de  $f$  é semidefinida negativa em todos os pontos de  $C$ .*

(iv) *A função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente côncava se, e somente se, a matriz Hessiana de  $f$  é definida negativa em todos os pontos de  $C$ .*

**Demonstração:**

(i) Considere  $g(t) = f(x+tv)$ , com  $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , por outro lado,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+tv)\alpha_i \quad e$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+tv)\alpha_i(x+tv)\alpha_j = H(x+tv)v^2.$$

Sendo assim tem-se as equivalências,

A matriz hessiana é semidefinida positiva para todo  $x \in C \leftrightarrow g''(t) \geq 0, \forall x, x+v \in C$  e  
 $t \in [0, 1]$

$g''(t) \geq 0, \forall x, x+v \in C$  e  $t \in [0, 1] \leftrightarrow$  todas as funções  $g(t) = f(x+tv)$  são convexas

todas as funções  $g(t) = f(x+tv)$  são convexas  $\leftrightarrow f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa.

Sendo assim, matriz hessiana é semidefinida positiva para todo  $x \in C \leftrightarrow f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa.

A demonstração dos itens (ii), (iii) e (iv) é de maneira análoga. ■

**Teorema 12.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma função definida nos reais que possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em cada ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ . Então  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma função convexa em  $C$  se, e somente se, para cada  $x \in C$  todos os menores principais da matriz Hessiana da função são não negativos.*

**Teorema 13.** *Sejam  $C \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma função definida nos reais que possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em cada ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ . Então  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma função côncavo em  $C$  se, e somente se, para cada  $x \in C$  e  $k=1, 2, 3, \dots, n$  todos os menores principais não nulos da matriz Hessiana da função tem o mesmo sinal que  $(-1)^k$ .*

## 2.4 Funções Convexas no $\mathbb{R}^2$

Essa seção tem como objetivo provar a convexidade e/ou concavidade de funções definidas no  $\mathbb{R}^2$  e acrescentar no final de cada problema o gráfico da função.

**Problema 1**

Mostre que o parabolóide circular é uma função convexa em  $\mathbb{R}^2$ .

**Solução:**

A superfície obtida pela rotação completa de uma parábola em torno do seu eixo de simetria é denominada **parabolóide circular**.

Fazendo  $z = x^2$ , em torno do seu eixo  $z$ , obtém-se  $x = \sqrt{z}$  ou  $x = -\sqrt{z}$  e tomando  $f(z) = \sqrt{z}$  ou  $f(z) = -\sqrt{z}$  em  $x^2 + y^2 = (f(z))^2$  encontra-se a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e sejam  $x_1 = (a_1, b_1)$ ,  $x_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ , com  $x_1 \neq x_2$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . Note que:

$$\begin{aligned} \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) &= \alpha(a_1^2 + a_2^2) + (1 - \alpha)(b_1^2 + b_2^2) \\ \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) &= \alpha a_1^2 + \alpha a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - \alpha b_1^2 - \alpha b_2^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Por outro lado,

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = (\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2)^2 + (\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2)^2$$

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha^2 a_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)a_1 a_2 + (1 - \alpha)^2 a_2^2 + \alpha^2 b_1^2 + 2\alpha(1 - \alpha)b_1 b_2 + (1 - \alpha)^2 b_2^2 \quad (2.3)$$

Subtraindo (2.3) – (2.2) e desenvolvendo os quadrados perfeitos, obtém-se:

$$\begin{aligned} & a_1^2(\alpha - \alpha^2) + a_2^2(\alpha - \alpha^2) + b_1^2(\alpha - \alpha^2) + b_2^2(\alpha - \alpha^2) - 2(\alpha - \alpha^2)a_1 b_1 - 2(\alpha - \alpha^2)a_2 b_2 \\ & (\alpha - \alpha^2)(a_1^2 - 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2 b_2 + b_2^2) \\ & (\alpha - \alpha^2)[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2] \end{aligned}$$

como  $\alpha \in [0, 1]$  então  $(\alpha - \alpha^2) \geq 0$ , sendo assim,  $(\alpha - \alpha^2)[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2] \geq 0$ ,

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq 0$$

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Logo, o parabolóide circular é uma função convexa para todo  $\alpha \in [0, 1]$ , cujo gráfico está representado pela figura 2.6.

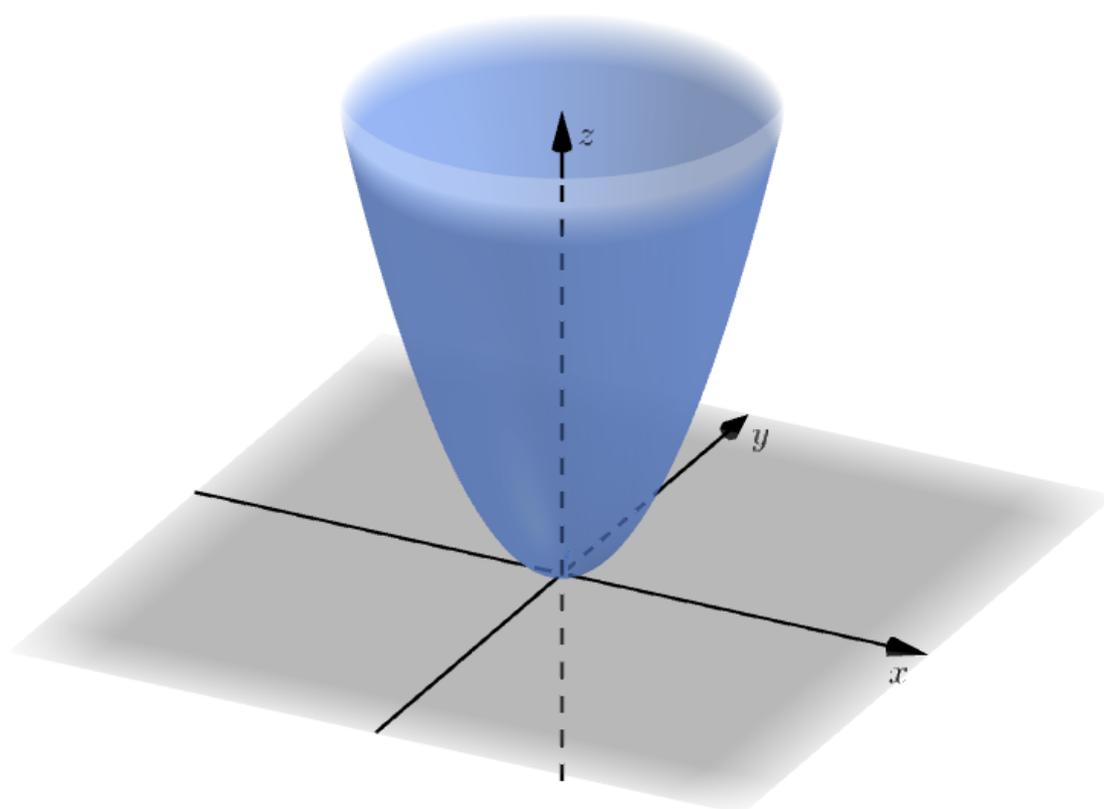


Figura 2.6: Parabolóide Circular

### Problema 2

Mostre que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x, y) = e^{x+y}$  é estritamente convexa em  $\mathbb{R}^2$ .

#### Solução:

Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x, y) = e^{x+y}$  diferenciável de segunda ordem.

Inicialmente será determinado a matriz Hessiana da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x, y) = e^{x+y}$ , para isso segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x+y}$$

Dessa forma a matriz Hessiana  $H[f(x, y)] = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ , Observe que a matriz

Hessiana depende de  $x$  e  $y$ .

Relembrando: Um  $i$ -ésimo menor principal de uma matriz quadrangular de ordem  $n$  é o determinante de qualquer matriz obtida eliminando  $n-i$  colunas da matriz.

Por outro lado os primeiros menores principais da matriz Hessiana  $H[f(x, y)]$  são as entradas da diagonal principal, ou seja,  $e^{x+y}$  onde  $e^{x+y} > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

O segundo menor principal é o próprio determinante da matriz  $H[f(x, y)]$  que é igual a zero. Pelo teorema 12 a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x, y) = e^{x+y}$ , representada pela figura 2.7, é uma função estritamente convexa em  $\mathbb{R}^2$ .

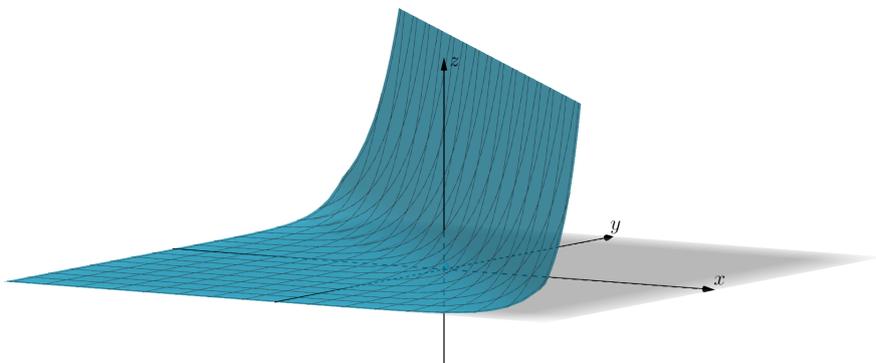


Figura 2.7: Gráfico de uma Função Estritamente Convexa

**Problema 3**

Mostre que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$  é côncava em  $\mathbb{R}^2$ .

**Solução:**

Encontrando inicialmente a matriz Hessiana da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$  para isso tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6 - 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4 - 4y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Dessa forma a matriz Hessiana  $H[f(x, y)] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$

Observe que os primeiros menores principais da matriz  $H[f(x, y)]$  são as entradas da diagonal, ou seja, -2 e -4, que são ambos negativos e que possuem o mesmo sinal de  $(-1)^k = (-1)^1 = -1 < 0$ . O segundo menor principal é o próprio determinante de H que é igual a  $(-2)(-4) - (0)(0) = 8 > 0$  que possui o mesmo sinal de  $(-1)^k = (-1)^2 = 1 > 0$ . Pelo teorema 13 a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$ , representada pela figura 2.8, é uma função côncava em  $\mathbb{R}^2$ .

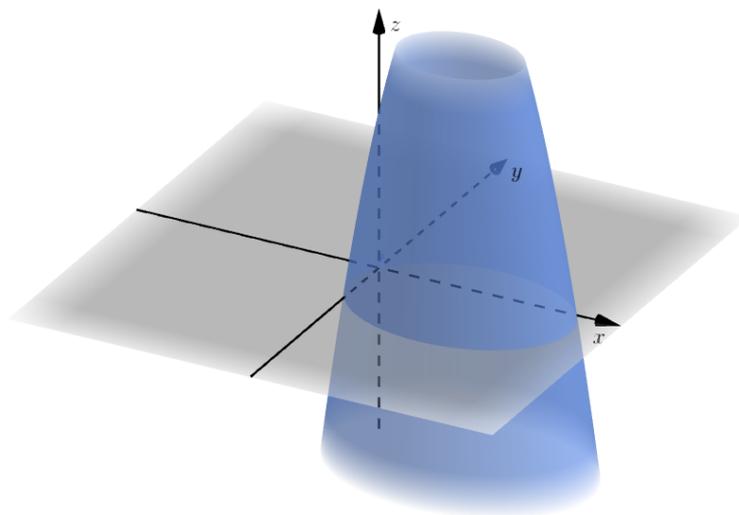


Figura 2.8: Gráfico de uma Função Côncava

**Problema 4**

Mostre que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$  não é uma função convexa e nem côncava em  $\mathbb{R}^2$ .

**Solução:**

Encontrando inicialmente a matriz Hessiana da função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$  tem-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\operatorname{sen}(x); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen}(y); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos(x);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(y); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Dessa forma a matriz Hessiana  $H[f(x, y)] = \begin{bmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ .

Note que a matriz Hessiana depende de  $x$  e  $y$ .

Por outro lado, os primeiros menores principais da matriz  $H[f(x, y)]$  são as entradas da diagonal, ou seja,  $-\cos(x)$  e  $-\cos(y)$  e o segundo menor principal é o próprio determinante de  $H$  que é igual a  $\cos(x)\cos(y)$ . Nesse caso tem-se quatro casos para serem verificados.

- **Caso 1:**  $\cos(x) \geq 0$  e  $\cos(y) \geq 0$ .

Nessa situação os primeiros menores  $-\cos(x)$  e  $-\cos(y)$  são ambos negativos e possuem o mesmo sinal de  $(-1)^k = (-1)^1 = -1$ , por outro lado o segundo menor principal  $\cos(x)\cos(y) \geq 0$  que possui o mesmo sinal de  $(-1)^k = (-1)^2 = 1$ . Pelo teorema 13 a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$  é uma função côncava.

- **Caso 2:**  $\cos(x) \geq 0$  e  $\cos(y) \leq 0$ . Nessa situação os primeiros menores principais  $-\cos(x)$  e  $-\cos(y)$  são negativos e positivos, respectivamente. Pelo teorema 12 e 13 a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$  não é uma função convexa e nem côncava.

- **Caso 3:**  $\cos(x) \leq 0$  e  $\cos(y) \geq 0$ .

O caso 3 é análoga ao caso 2.

- **Caso 4:**  $\cos(x) \leq 0$  e  $\cos(y) \leq 0$ .

Nessa situação os primeiros menores principais  $-\cos(x)$  e  $-\cos(y)$  ambos são positivos e o segundo menor principal  $\cos(x)\cos(y)$  também é positivo, pelo teorema 12 a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$  é uma função convexa.

Em cada caso tem-se uma conclusão distinta em relação a convexidade da função  $f(x, y)$  e os quatro casos estão diretamente restritos ao domínio das funções  $\cos(x)$  e  $\cos(y)$  porém, A função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \cos(x) + \cos(y)$ , representada pelo gráfico da figura 2.9, possui o domínio  $\mathbb{R}^2$ , dessa forma, não é convexa e nem côncava em  $\mathbb{R}^2$ .

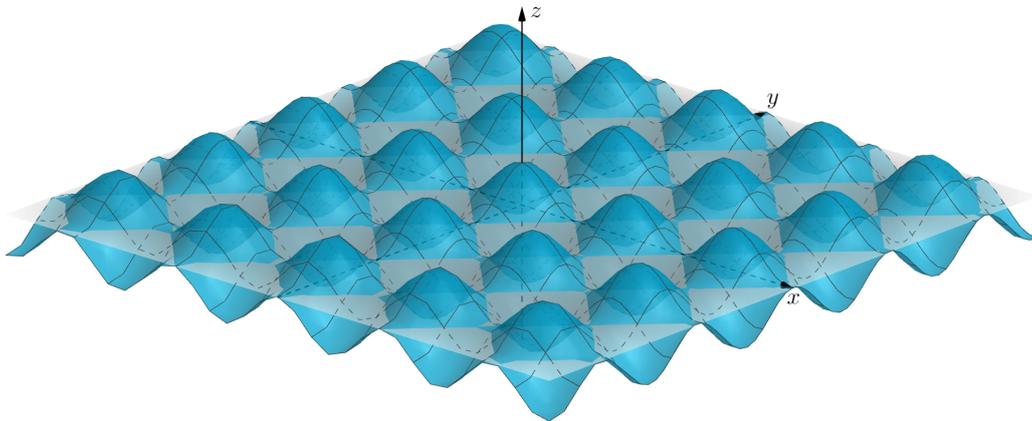


Figura 2.9: Gráfico de uma Função não Convexa e nem Côncava

# Capítulo 3

## Introdução à Otimização Multiobjetiva

Este capítulo apresenta definições e teoremas associados à otimização multiobjetivo. Os conceitos aqui abordados foram baseados em [3],[12],[13],[14],[15].

A forma padrão de um problema de **programação linear** é

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & f(x) = c^T x \\ \text{s.a:} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

sendo  $f(x)$  chamada de função objetivo onde,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ .

O problema é de programação não-linear se pelo menos uma das funções envolvidas no problema seja não-linear.

Um problema geral de **programação não-linear** é da forma

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a:} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Note que o problema possui  $r$  restrições de igualdade ( $h_1(x), h_2(x), \dots, h_r(x)$ ) e  $p$  restrições de desigualdade.

A otimização multiobjetivo se distingue de todos os demais ramos da teoria de otimização quanto ao sentido que o conceito de solução do problema adquire. De fato, pode-se definir um problema de otimização multiobjetivo como a otimização (nessa dissertação, minimização) de um vetor composto por funções escalares, escolhidas como forma de avaliar o impacto das decisões factíveis do problema sobre diferentes índices de desempenho. Entretanto, sabe-se que funções vetoriais estão definidas num conjunto parcialmente ordenado (por exemplo, o  $\mathbb{R}^m$ ),

e que portanto podem existir alternativas factíveis que não satisfazem nenhuma relação de ordem, do tipo  $(\leq)$ , inviabilizando desta forma a utilização do conceito usual de solução ótima adotado em problemas mono-objetivos (escalares).

A solução do problema depende de como equilibrar as decisões para resolver os conflitos que surgem através das funções objetivos. A dominância de Pareto é uma técnica que se adapta para resolver o problema.

Um **problema multiobjetivo** genérico pode ser formulado no espaço das variáveis de decisão como

$$P_x : \text{minimizar} \quad f(x) \\ \text{s.a:} \quad x \in \mathcal{X}$$

onde,  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ,  $m \geq 2$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é o vetor de decisões e observe que  $f : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  com  $\mathcal{X} = \{x \in X : g(x) \leq b/b \in \mathbb{R}^p\}$  conjunto de soluções factíveis e  $g(x)$  são as restrições.

**Definição 18.** Um ponto  $x^* \in \mathcal{X}$  é um mínimo local do problema  $P_x$  se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f(x^*) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathcal{X}$  satisfazendo  $\|x - x^*\| \leq \epsilon$ .

**Definição 19.** Um ponto  $x^* \in \mathcal{X}$  é um mínimo global do problema  $P_x$  se  $f(x^*) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ .

**Definição 20.** A solução utópica  $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$  do problema multiobjetivo é definida como  $y_i = f_i(x_i), i=1, 2, \dots, r$  onde  $x_i = \text{argmin} f_i(x), x \in \mathcal{X}$ .

**Definição 21.** Uma solução  $x^* \in \mathcal{X}$  é eficiente ou Pareto-ótimo se não existe qualquer outro ponto  $x \in \mathcal{X}$  tal que  $f(x) \leq f(x^*)$  e  $f(x) \neq f(x^*)$ .

**Definição 22.** O Conjunto de todas as soluções eficientes é denominado conjunto eficiente ou conjunto Pareto-ótimo. A imagem em  $\mathcal{Y} = f(x^*)$  (ponto Pareto-ótimo) é denominado fronteira Pareto-ótimo.

Suponha  $x^*$  uma solução eficiente, de acordo a definição 22, não existe nenhuma solução  $x \in \mathcal{X}$  que propicie a melhora de um objetivo sem piorar o outro, a figura 3.1 ilustra esta propriedade para função biobjetivo.

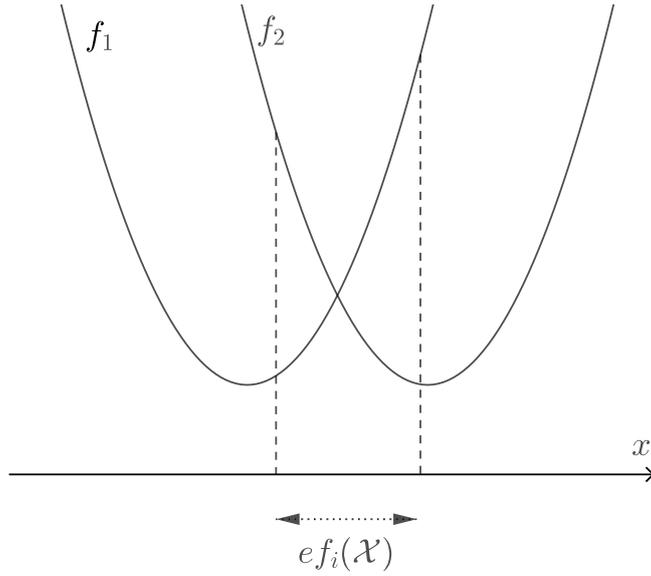


Figura 3.1: Conjunto  $efi\{\mathcal{X}\}$

**Definição 23.** *Sejam  $x_1$  e  $x_2 \in \mathcal{X}$ ,  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  são não dominados entre si, ou incomparáveis entre si, se  $f(x_1) \not\leq f(x_2)$  e  $f(x_1) \not\geq f(x_2)$ .*

**Definição 24.** *Para qualquer dois vetores de parâmetros  $x_1$  e  $x_2$ , então:*

- (i)  $x_1$  domina  $x_2$  se, e somente se,  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- (ii)  $x_1$  domina fracamente  $x_2$  se, e somente se,  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- (iii)  $x_1$  é indiferente a  $x_2$  se, e somente se,  $f(x_1) \not\leq f(x_2) \wedge f(x_2) \not\leq f(x_1)$ .

*As definições para problemas de maximização são análogas.*

Na figura 3.2 tem-se uma função biobjetivo que associa vetores decisão  $(x_1, x_2)$  do conjunto factível  $\mathcal{X}$  ao conjunto de espaço de objetivos  $\mathcal{Y}$ . Através das linhas de dominâncias  $D_1, D_2$  e  $D_3$  as soluções eficientes A, B e C não são dominadas por nenhuma solução eficiente, pois pertencem a fronteira de Pareto, a solução A domina a solução F que por sua vez domina a solução G.

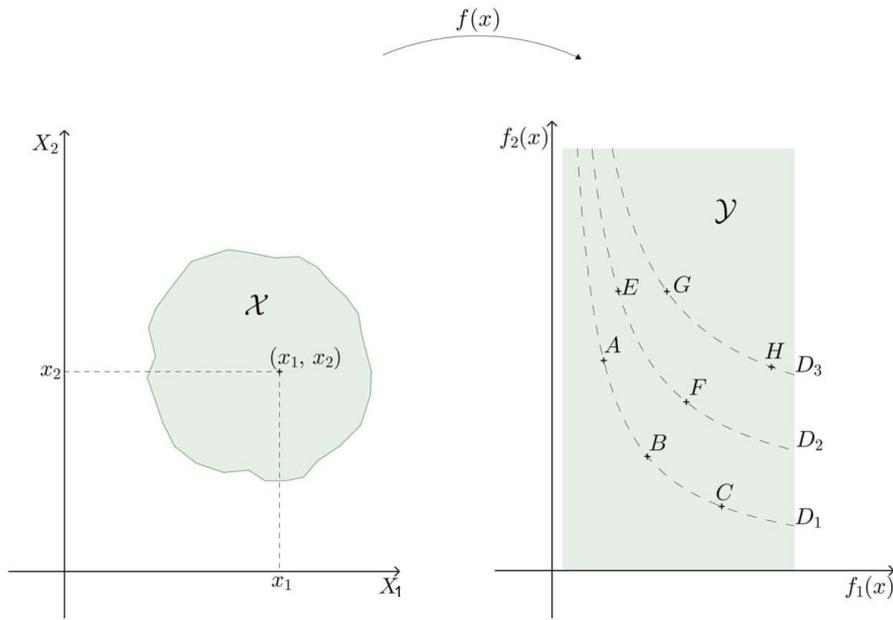


Figura 3.2: Conjunto de Soluções Factíveis; Espaço Objetivo Factível e Linhas de Dominância em um Problema Biobjetivo

**Definição 25.**  $x^* \in \mathcal{X}$  é uma solução localmente eficiente numa dada vizinhança  $S(x^*, \epsilon)$ , isto é,  $x \in \text{efi}(\mathcal{X}) \cap S(x^*, \epsilon)$ , se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x^*$  é eficiente em  $\mathcal{X} \cap S(x^*, \epsilon)$ .

A hipótese de convexidade permite que a vizinhança de cada solução local envolva toda a região de factibilidade.

**Teorema 14.** *Sejam  $f_i : C \subseteq X$ ,  $i=1,2,\dots,m$  funções convexas sobre um subconjunto convexo  $C \subseteq X$ . Então toda solução localmente eficiente é também uma solução globalmente eficiente.*

A demonstração do teorema 14 está em [3].

### 3.1 Caracterização de Soluções Eficientes

A utilização de problemas mono-objetivos para descrever e gerar as soluções eficientes estão associadas às condições de otimalidade dos problemas escalares. A seguir apresenta-se um método com estratégia de aglutinação para resolver problemas multiobjetivos.

Considere o problema de otimização multiobjetivo:

$$\begin{aligned}
 P : & \text{minimizar} && f(x) \\
 \text{s.a:} & && x \in \mathcal{X}
 \end{aligned}$$

onde:  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ ,  $r \geq 2$ ;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$  é o vetor de decisões;  $\mathcal{X} = \{x \in X : g(x) \leq b/b \in \mathbb{R}^p\}$  é o conjunto de soluções factíveis e  $g(x)$  são as restrições.

Uma solução ótima é um vetor de variáveis de decisão o qual sempre **minimiza** a função global  $\mathcal{F}(x)$ , respeitando as restrições do problema. A função global  $\mathcal{F}(x)$  do problema  $P_x$  é obtida por:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{f_1^*(x) - f_1(x)}{f_1^*(x)} + \frac{f_2^*(x) - f_2(x)}{f_2^*(x)} + \dots + \frac{f_r^*(x) - f_r(x)}{f_r^*(x)}$$

onde,  $f_1^*(x), f_2^*(x), \dots, f_r^*(x)$  são soluções ótimas individuais das funções objetivos  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_r(x)$ , respectivamente. Dessa forma a solução eficiente do problema  $P(x)$  resume-se em encontrar a solução ótima-Pareto do problema mono-objetivo  $\mathcal{P}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : & \text{minimizar} && \mathcal{F}(x) \\ & \text{s.a.} && x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

O problema  $\mathcal{P}$  é um problema com estratégia de aglutinação denominado **Método do Critério Global**.

**Teorema 15.**  $x^* \in \text{efic}(\mathcal{X})$  se, e somente se,  $x^*$  resolve os  $n$  problemas escalares

$$\begin{aligned} P_i : & \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} && f_i(x) \\ & \text{s.a.} && f_j(x) \leq f_j(x^*), \forall j \neq i \end{aligned}$$

**Demonstração:** Considere  $x^*$  uma solução eficiente em  $\mathcal{X}$ , então pela definição 22, não existe nenhum  $x \in \mathcal{X} / f(x) \leq f(x^*)$  e  $f(x) \neq f(x^*)$  sendo assim  $x^*$  resolve  $P_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Suponha que  $x^*$  não seja solução eficiente em  $\mathcal{X}$ , para concluir a demonstração,  $x^*$  não resolve o problema  $P_i$ . De fato: Como  $x^*$  não é solução eficiente em  $\mathcal{X}$ , então existe  $x \in \mathcal{X}$  tal que  $f(x) \leq f(x^*)$  e que para algum  $i$   $f_i(x) < f_i(x^*)$  e  $x^*$  não resolveria o problema  $P_i$  ■

**Teorema 16.** Se  $x^* \in \mathcal{X}$  é solução única de  $P_i$  para algum  $i$ , então  $x^* \in \text{efi}(\mathcal{X})$ .

**Demonstração:** Se  $x^* \notin \text{efi}(\mathcal{X})$ , existe  $x \in \mathcal{X}$  tal que  $f(x) \leq f(x^*)$  e  $f(x) \neq f(x^*)$  e em particular  $f_i(x) \leq f_i(x^*)$  logo  $x$  é solução de  $P_i$  e ainda,  $x^*$  não é solução única de  $P_i$ . ■

**Teorema 17.** Seja  $x^* \in \mathcal{X}$  uma solução de

$$P_w : \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} \langle w, f(x) \rangle$$

para  $w \in \mathbb{R}^m, w \geq 0$  dado. Então  $x^* \in \text{efi}(\mathcal{X})$  se

- (i)  $x^*$  é a solução única de  $P_w$ , ou
- (ii)  $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$

### Demonstração:

(i) Se  $x^*$  é solução única de  $P_w$ , então  $\langle w, f(x^*) - f(a) \rangle < 0, \quad \forall a \in \mathcal{X}, a \neq x^*$ . Suponha, por absurdo, que  $x^* \notin \text{efi}(\mathcal{X})$ , isto é, que existe algum  $a \in \mathcal{X}$  tal que  $f(x^*) - f(a) \geq 0$  e  $f(x^*) - f(a) \neq 0$ . Como  $w \geq 0$  logo, tem-se que  $\langle w, f(x^*) - f(a) \rangle \geq 0$ , contradizendo a unicidade de  $x^*$ . Logo  $x^* \in \text{efi}(\mathcal{X})$ . A demonstração do item (ii) é análogo. ■

O problema  $P_w$  pode ser assim formulado:

$$P_w : \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} \langle w, f(x) \rangle$$

onde  $w \in \mathbb{R} = \{w : w \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}$ .

Por outro lado, em problemas convexos tem-se:

$$P_w : \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} \quad w^T f(x)$$

onde,  $w \in \mathbb{R}$  e sejam definidas:

$$\mathcal{X}(r) = \{x : x \text{ resolve } P_r\} \text{ e } f[\mathcal{X}(r)] = \{y = f(x), x \in \mathcal{X}(r)\}.$$

Se  $f_1, f_2, \dots, f_m$  são funções lineares e  $\mathcal{X}$  é um poliedro,  $\text{efi}(\mathcal{X})$  pode ser gerado por programação linear.

Em problemas biobjetivos tem-se a representação:

$$P_w : \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} \quad w f_1(x) + (1 - w) f_2(x)$$

onde  $w \in [0, 1]$  e  $x(w) = \arg \min w f_1(x) + (1 - w) f_2(x), x \in \mathcal{X}$ .

O problema  $P_w$  é um problema com estratégia de priorização denominado **Método da Soma Ponderado**, onde  $r \in [0, 1]$ .

Resolver um problema multiobjetivo utilizando o método da soma ponderada consiste em gerar diferentes retas suportes s determinadas por  $f_2(x)$  em função de  $f_1(x)$  e definidas pelo vetor  $(\alpha, 1 - \alpha)$ . A reta s é dada por:

$$f_2(x) = -\frac{\alpha}{1 - \alpha} f_1(x) + \frac{P_w}{1 - \alpha}$$

onde  $-\frac{\alpha}{1 - \alpha}$  é a inclinação da reta e  $\frac{P_w}{1 - \alpha}$  é a interseção entre a reta s e  $f_2(x)$ .

O padrão dos problemas onde as funções possuem a mesma unidade de medida é:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}(x) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i [f_i^* - f_i(x)]^S \right)^{\frac{1}{S}}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

onde  $f_i^*$  é a solução ótima individual para cada função objetivo  $f_i$ . Caso as funções objetivos não tenham a mesma unidade de medida deverá ser assim representada:

$$\text{minimizar } \mathcal{F}(x) = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i (Z)^S \right)^{\frac{1}{S}}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

onde  $Z = \frac{f_i(x^{max}) - f_i(x)}{f_i(x^{max}) - f_i(x^{min})}$

Para  $S = 2$  o espaço é o Euclidiano, nesse caso, as funções  $\mathcal{F}(x)$  apresentam um maior grau de complexidade, pois não representam mais funções lineares, para  $S = 1$  o problema é linear e dessa forma reduz a dificuldade em sua resolução.

Uma das **vantagens** do método da soma ponderada é a simplicidade e facilidade de entender o processo que garante gerar todas as soluções eficientes para um problema de otimização convexa.

**Teorema 18.** *Se  $x^* \in \text{efi}(\mathcal{X})$ , então existe um inteiro  $k \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, m\}$  e números reais  $\epsilon_j, j = 1, 2, \dots, m$  ( $j \neq k$ ) tais que  $x^*$  resolve*

$$P_k(\epsilon) : \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} f_k(x)$$

$$\text{s.a } f_j(x) \leq \epsilon_j, \quad \forall j \neq k$$

onde  $\epsilon$  está definido em  $\epsilon_k = \{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_m) : \mathcal{X}_k(\epsilon) \neq \emptyset\}$  e

$$\mathcal{X}_k(\epsilon) = \{x \in \mathcal{X} : f_j(x) \leq \epsilon_j \forall j \neq k\}.$$

### Demonstração:

Considere  $f_i^* = f_i(x^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e suponha, por absurdo, que  $x^*$  não é solução do problema  $P_k(\epsilon)$  para nenhum  $k \in \mathcal{I}$  e números reais  $\epsilon_j, j = 1, 2, \dots, m$  ( $j \neq k$ ). Sendo assim, para  $k=1$  e  $\epsilon_j = f_j^*, j = 2, 3, \dots, m$  deve existir  $x_1 \in \mathcal{X}$  tal que  $f_k(x_1) < f_k(x^*)$  e  $f_j(x_1) < f_j^*$ , contradizendo a hipótese que  $x^*$  não é solução do problema

■

**Teorema 19.** *Seja  $\epsilon \in \epsilon_k$ , uma solução  $x^*$  de  $P_k(\epsilon)$  é eficiente se*

*(i)  $x^*$  é solução única de  $P_k(\epsilon)$  para algum  $k$ .*

*(ii)  $x^*$  resolve  $P_k(\epsilon)$  para todo  $k \in \mathcal{I}$ .*

**Demonstração:**

(i) Considere  $x^*$  a solução única do problema  $P_k(\epsilon)$  para algum  $k$ . Sendo assim  $x^*$  também é solução para o problema

$$P_k : \begin{array}{ll} \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} & f_k(x) \\ \text{s.a.} & f_j(x) \leq f_j(x^*), \quad \forall j \neq k \end{array}$$

Pelo teorema 18,  $x^*$  é solução eficiente.

(ii) Suponha, por absurdo que  $x^*$  é solução eficiente mas não resolve o problema  $P_k(\epsilon)$  para todo  $k \in \mathcal{I}$ . Dessa forma, existe um  $k^*$  tal que  $x^*$  não resolve

$$P_{k^*}(\epsilon) : \begin{array}{ll} \text{minimizar}_{x \in \mathcal{X}} & f_{k^*}(x) \\ \text{s.a} & f_j(x) \leq f_j(x^*), \quad \forall j \neq k^*, \end{array}$$

contradizendo  $x^*$  ser solução eficiente do conjunto  $\mathcal{X}$ . ■

O problema  $P_k(\epsilon)$  é um problema de priorização denominado de **Método  $\epsilon$ -Restrito**. O método exato  $\epsilon$ -restrito consiste em priorizar na otimização o objetivo mais importante respeitando às restrições impostas pelo problema.

## 3.2 Aplicações

Nessa seção serão resolvidos problemas com duas funções objetivos e uma situação problema envolvendo o consumo de alimentos para diabéticos. As estratégias utilizadas para a resolução dos problemas serão de *aglutinação* (Método do Critério Global) ou *priorização* (Método da Soma Pondera e Método  $\epsilon - Restito$ ).

### Problema 1

Aplicação do método **Critério Global** para otimizar um problema biobjetivo.

Sejam as funções  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

O problema biobjetivo linear é

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f_1(x_1, x_2) = -6x_1 + 4x_2 \\ & f_2(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 10 \leq 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

### Solução

Inicialmente será determinado o espaço factível e o espaço de objetivos e em seguida aplicado o método para a obtenção da solução. A solução deste problema consiste em transformá-lo num problema mono-objetivo, inicialmente será construído o espaço factível  $\mathcal{X}$  e o espaço de objetivos  $\mathcal{Y}$ .

O espaço factível  $\mathcal{X}$  é representado pela figura 3.3.

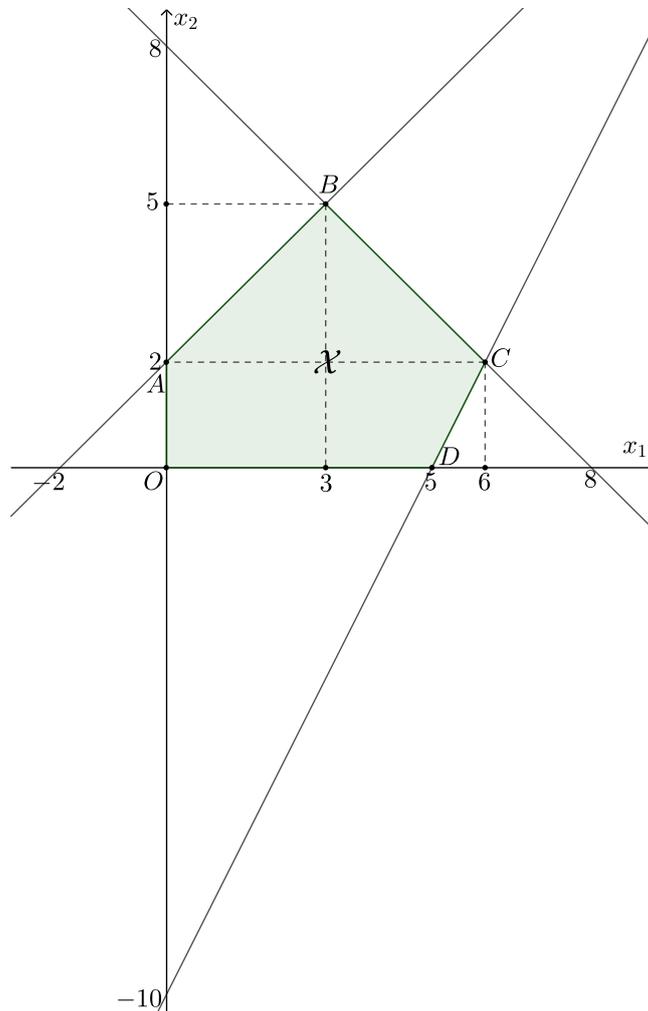


Figura 3.3: Espaço Factível  $\mathcal{X}$

Observe que  $\mathcal{X}$  é um polígono com vértices  $O(0,0)$ ,  $A(0,2)$ ,  $B(3,5)$ ,  $C(6,2)$  e  $D(5,0)$ . Encontrando o valor numérico das funções  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  nos vértices desse polígono tem-se:  $f_1(0, 2) = 8$ ;  $f_1(3, 5) = 2$ ;  $f_1(6, 2) = -28$  e  $f_1(5, 0) = -30$ . Por outro lado,  $f_2(0, 2) = -4$ ;  $f_2(3, 5) = -7$ ;  $f_2(6, 2) = 2$  e  $f_2(5, 0) = 5$ . Dessa forma segue que

$$f_1^*(x_1, x_2) = -30 \quad e \quad f_2^*(x_1, x_2) = -7$$

A figura 3.4 representa no  $\mathbb{R}^2$  o espaço de objetivos do problema.

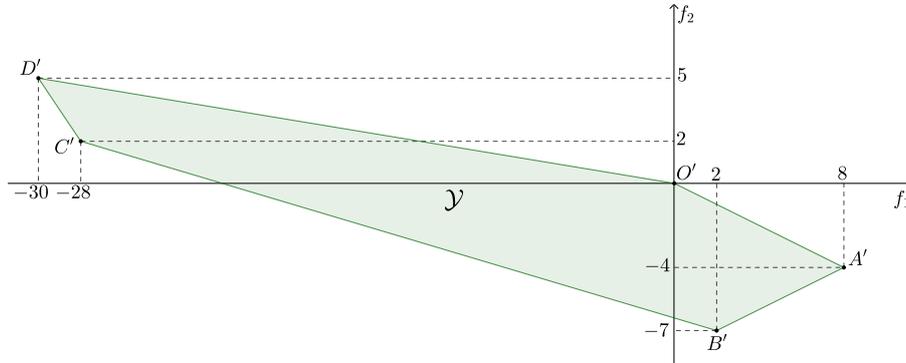


Figura 3.4: Espaço de Objetivos

Pelo **Método do Critério Global**, a função global  $\mathcal{F}(x_1, x_2)$  é dada por:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{f_1^*(x_1, x_2) - f_1(x_1, x_2)}{f_1^*(x_1, x_2)} + \frac{f_2^*(x_1, x_2) - f_2(x_1, x_2)}{f_2^*(x_1, x_2)}$$

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{-30 - (-6x_1 + 4x_2)}{-30} + \frac{-7 - (x_1 - 2x_2)}{-7}$$

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{30 - 6x_1 + 4x_2}{30} + \frac{7 + (x_1 - 2x_2)}{7}$$

Os valores da função  $\mathcal{F}(x_1, x_2)$  nos pontos com vértices no polígono (OABCD) são:  $\mathcal{F}(0, 2) \approx 1,7$ ;  $\mathcal{F}(3, 5) \approx 1,06$ ;  $\mathcal{F}(6, 2) \approx 1,34$  e  $\mathcal{F}(5, 0) \approx 1,71$ . A melhor solução global é  $\mathcal{F}(3, 5) \approx 1,06$ .

A solução ótima para o problema é  $x^* = (3, 5)$  onde  $f_1(3, 5) = 2$  e  $f_2(3, 5) = -7$ .

## Problema 2

Aplicação do **Método da Soma Pondera** para otimizar um problema biobjetivo.

Sejam as funções  $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

O problema biobjetivo linear é

$$\begin{array}{ll} \textit{minimizar} & f_1(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2 \\ & f_2(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \\ \\ \textit{s.a.} & g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 10 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1 - 6 \leq 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = x_2 - 6 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

## Solução

Inicialmente será determinado o espaço factível, o espaço de objetivos e em seguida aplicado o método para a obtenção da solução. Esse método depende do peso  $r$  a ser atribuído a cada função objetivo, sendo assim o problema será resolvido para  $r = \frac{1}{2}$  não priorizando nenhuma das duas funções objetivos e em seguida para  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  priorizando respectivamente as funções  $f_2(x_1, x_2)$  e  $f_1(x_1, x_2)$ .

O espaço factível  $\mathcal{X}$  é representado pelo polígono de vértices (OABCD) da figura 3.5.

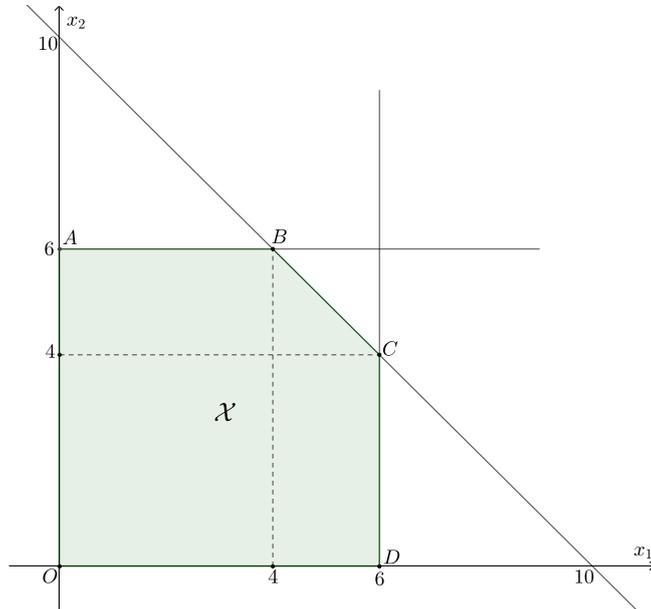


Figura 3.5: Espaço Factível  $\mathcal{X}$

Observe que  $\mathcal{X}$  é um polígono com vértices  $O(0,0)$ ,  $A(0,6)$ ,  $B(4,6)$ ,  $C(6,4)$  e  $D(6,0)$ . Encontrando o valor numérico das funções  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  nos vértices desse polígono tem-se:  $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ ;  $f_1(0,6) = -18$ ;  $f_2(0,6) = -6$ ;  $f_1(4,6) = -26$ ;  $f_2(4,6) = -14$ ;  $f_1(6,4) = -24$ ;  $f_2(6,4) = -16$ ;  $f_1(6,0) = -12$  e  $f_2(6,0) = -12$ .

O polígono de vértices ( $O' A' B' C' D'$ ) da figura 3.6 representa o espaço de objetivos  $\mathcal{Y}$ , onde  $O' = (0,0)$ ;  $A' = (-18, -6)$ ;  $B' = (-26, -14)$ ;  $C' = (-24, -16)$ ;  $D' = (-12, -12)$ .

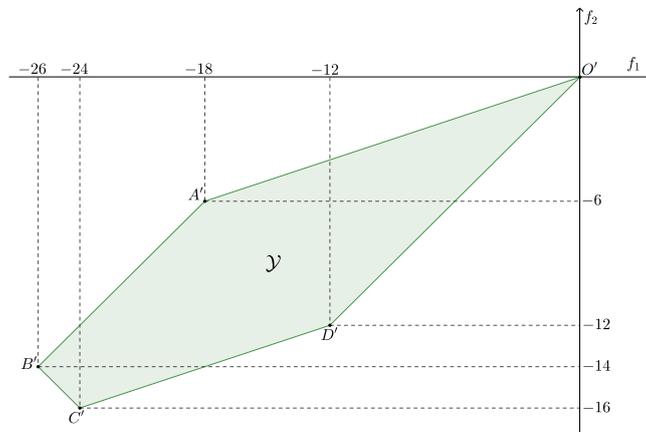


Figura 3.6: Espaço de Objetivos  $\mathcal{Y}$

O valor ótimo individual referente às funções  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  são respectivamente, -26 e -16, por outro lado, note que:  $f_1^-(x_1, x_2) = -26$ ;  $f_1^+(x_1, x_2) = 0$ ;  $f_2^-(x_1, x_2) = -16$ ;  $f_2^+(x_1, x_2) = 0$

Normalizando as funções  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$ , tem-se que

$$\bar{f}_1(x_1, x_2) = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_1^+(x_1, x_2) - f_1^-(x_1, x_2)} = \frac{-2x_1 - 3x_2}{0 - (-26)} = \frac{-2x_1 - 3x_2}{26}$$

$$\bar{f}_2(x_1, x_2) = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_2^+(x_1, x_2) - f_2^-(x_1, x_2)} = \frac{-2x_1 - x_2}{0 - (-16)} = \frac{-2x_1 - x_2}{16}.$$

Suponha  $r \in (0, 1)$ , o problema ponderado é:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad z &= r \left( \frac{-2x_1 - 3x_2}{26} \right) + (1 - r) \left( \frac{-2x_1 - x_2}{16} \right) \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 10 \leq 0 \\ & x_1 - 6 \leq 0 \\ & x_2 - 6 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Observe que para obter a solução do problema é necessário encontrar o mínimo de uma função mono-objetivo dependente de  $r \in (0, 1)$ , ou seja, para cada valor atribuído para  $r$  é determinada uma solução eficiente para o problema.

Suponha  $r = \frac{1}{2}$ , esta escolha não foi aleatória, pois para  $r = \frac{1}{2}$  não existe priorização entre as funções objetivos. Dessa forma, tem-se o problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad z &= -\frac{42x_1}{416} - \frac{37x_2}{416} \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - 10 \leq 0 \\ & x_1 - 6 \leq 0 \\ & x_2 - 6 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo na forma padrão, segue que

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & z = -\frac{42x_1}{416} - \frac{37x_2}{416} \\
 \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\
 & x_1 + x_4 = 60 \\
 & x_2 + x_5 = 6
 \end{aligned}$$

As restrições formam um sistema linear com 3 equações e 5 variáveis, onde baseado no método Simplex o número de variáveis não básicas é igual a  $5-3=2$  e o total de soluções básicas é  $C_{5,3} = 10$ , segue a tabela 1 de soluções básicas.

Soluções Básicas	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x^*$	$z$
Solução Básica 1	0	0	10	6	-4	(0,0)	$z_1 = 0$
Solução Básica 2	0	10	0	6	-4	(0,10)	$z_2 = \cancel{\neq}$
Solução Básica 3	0	-	-	0	-	-	Não Factível
Solução Básica 4	0	6	4	6	0	(0,6)	$z_4 \approx -0,533$
Solução Básica 5	10	0	0	-5	-5	(10,0)	$z_5 = \cancel{\neq}$
Solução Básica 6	6	0	4	0	6	(6,0)	$z_6 \approx -0,605$
Solução Básica 7	-	0	-	-	0	-	Não Factível
Solução Básica 8	6	4	0	0	2	(6,4)	$z_8 \approx -0,960$
Solução Básica 9	4	6	0	2	0	(4,6)	$z_9 \approx -0,937$
Solução Básica 10	6	6	-2	0	0	(6,6)	$z_{10} = \cancel{\neq}$

Tabela 1: Soluções Básicas

A solução ótima do problema para  $r = \frac{1}{2}$  é o ponto  $C = (6, 4)$  da figura 3.5 e associando no espaço de objetivos o resultado do problema é  $f_1(6, 4) = -24$  e  $f_2(6, 4) = -16$ .

Utilizando o mesmo processo para  $r = \frac{1}{3}$ , a solução ótima do problema é a mesma, no entanto, para  $r = \frac{2}{3}$  a solução ótima passa a ser o ponto  $B=(4,6)$  da figura 3.5 e associando no espaço de objetivos, o resultado do problema fica determinado por  $f_1(4, 6) = -26$  e  $f_2(4, 6) = -14$ .

Dessa forma a solução do problema pelo método da soma pondera é:

$$r = \begin{cases} ]0; 0.5], & x^* = (6, 4); & f_1(6, 4) = -24, f_2(6, 4) = -16. \\ ]0.5; 1[, & x^* = (4, 6); & f_1(4, 6) = -26, f_2(4, 6) = -14 \end{cases}$$

## Situação-Problema

Dados divulgados pela Organização Mundial da Saúde (OMS) mostra que a diabetes é uma doença que atinge uma em cada 11 pessoas no mundo, passando de 108 milhões em 1980 para 422 milhões em 2014, a projeção feita pela Internatinal Diabetes Federation (IDF) é que em 2030 haja um aumento de 123% dos casos. No Brasil, segundo o ministério da saúde, entre os anos 2006 e 2016 os casos de diabetes cresceram 6,8% e o número de pessoas com a doença é aproximadamente de 8,9% da população brasileira, a previsão da IDF é que 23 milhões de pessoas tenham a doença no Brasil em 2045. A diabete é uma doença crônica que exige uma alimentação mais saudável, entre os quais a maçã e a batata doce são alimentos imprescindíveis no preparo de uma refeição pois, a batata doce é um aliado de quem pratica esportes e possui um baixo índice glicêmico, isso quer dizer que seus carboidratos são absorvidos lentamente pelo organismo, o que ajuda no controle da doença. Por outro lado a maçã é uma fruta que possui na sua casca uma fibra chamada pectina, importante para o controle da glicemia e para reduzir o mau colesterol e também como a batata doce, a maçã tem baixo índice glicêmico.

Pretende-se preparar uma refeição saudável, ou seja, com um número mínimo de calorias porém, com menor custo possível. A refeição tem que conter maçã e/ou batata doce, sendo que a quantidade máxima de maçã e batata doce é de 200 g, a quantidade mínima de carboidratos ingerida pelo consumo da batata doce por refeição é de 20 g e a quantidade mínima de proteínas é de 1,0 g. O custo, a quantidade de calorias, quantidade de carboidratos e proteínas encontra-se na tabela 2 e foram obtidos em [16].

Por 100g	Custo(centavos)	Calorias	Carboidrato	Proteínas
Maçã	50	52 Kcal	10 g	0,3 g
Batata Doce	20	86 Kcal	20 g	1,5 g

Tabela 2

O problema consiste em encontrar uma solução que minimize o número de calorias e o custo, sendo modelado como um problema biobjetivo. Dessa forma segue o problema  $P$ .

$$P : \text{minimizar} \quad f_1(x_1, x_2) = 50x_1 + 20x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 52x_1 + 86x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + x_2 \leq 2$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 20$$

$$0,3x_1 + 1,5x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

sendo  $x_1$  a quantidade de maçã e  $x_2$  a quantidade de batata doce, em centenas de gramas.

Inicialmente será determinado o espaço factível, o espaço de objetivos e em seguida aplicado o **Método do Critério Global** e o **Método  $\epsilon$ -Restrito**.

O espaço factível é representado pela figura 3.7.

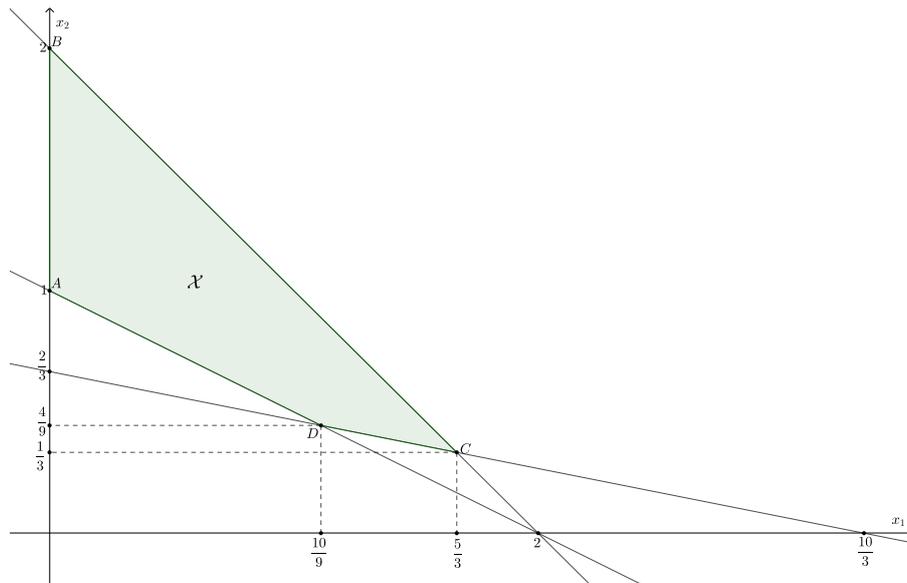


Figura 3.7: Espaço Factível  $\mathcal{X}$

Observe que  $\mathcal{X}$  é um polígono com vértices  $A(0,1)$ ,  $B(0,2)$ ,  $C(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$  e  $D(\frac{10}{9}, \frac{4}{9})$ . Encontrando o valor das funções  $f_1(x_1, x_2)$  e  $f_2(x_1, x_2)$  nos vértices desse polígono tem-se  $f_1(0,1) = 20$ ;  $f_1(0,2) = 40$ ;  $f_1(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) = 90$  e  $f_1(\frac{10}{9}, \frac{4}{9}) \approx 64,44$ . Por outro lado,  $f_2(0,1) = 86$ ;  $f_2(0,2) = 172$ ;  $f_2(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) \approx 115,33$  e  $f_2(\frac{10}{9}, \frac{4}{9}) = 96$ . Dessa forma tem-se que

$$f_1^*(x_1, x_2) = 20 \quad e \quad f_2^*(x_1, x_2) = 86$$

A figura 3.8 representa o espaço dos objetivos do problema.

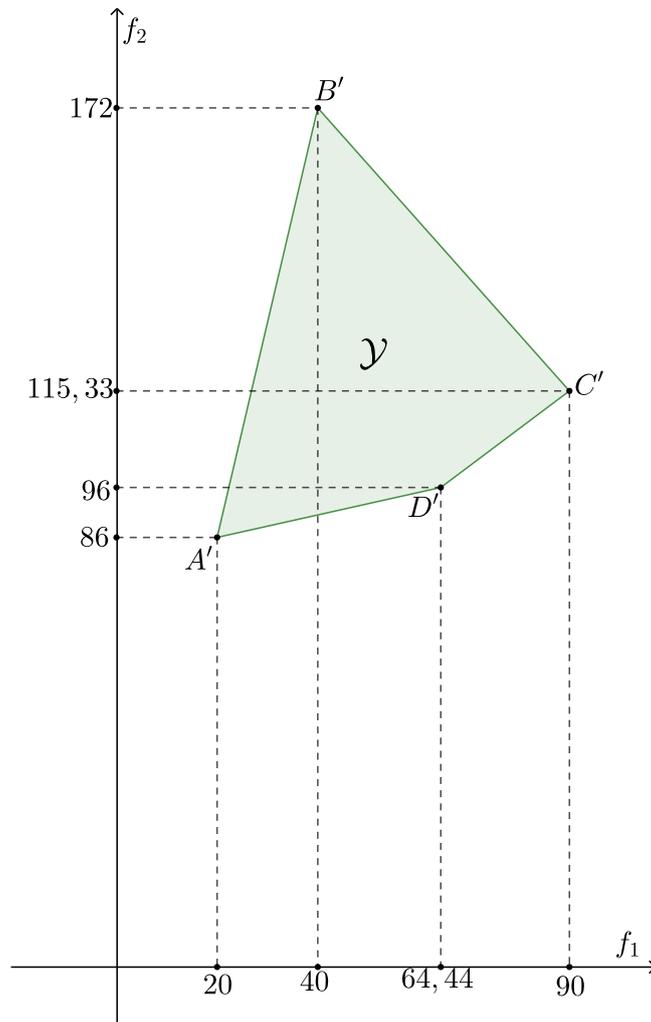


Figura 3.8: Espaço de Objetivos

Pelo **método do critério global**, a função global  $\mathcal{F}(x_1, x_2)$  é dada por:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{f_1^*(x_1, x_2) - f_1(x_1, x_2)}{f_1^*(x_1, x_2)} + \frac{f_2^*(x_1, x_2) - f_2(x_1, x_2)}{f_2^*(x_1, x_2)}$$

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{20 - (50x_1 + 20x_2)}{20} + \frac{86 - (52x_1 + 86x_2)}{86}$$

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{-267x_1}{86} - 2x_2 + 2$$

Minimizando  $\mathcal{F}(x_1, x_2)$  e Reescrevendo na forma padrão tem-se:

$$\text{minimizar} \quad \mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{-267x_1}{86} - 2x_2 + 2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 2$$

$$3x_1 + 15x_2 - x_5 = 10$$

As restrições do modelo são lineares e formam um sistema com 3 equações e 5 variáveis, o número de variáveis não básicas é igual a 2 e o total de soluções básicas é  $C_{5,3} = 10$ .

Soluções Básicas	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x^*$	$z$
Solução Básica 1	0	0	2	-2	-10	(0,0)	$z_1 = \cancel{\text{---}}$
Solução Básica 2	0	2	0	2	20	(0,2)	$z_2 = -2$
Solução Básica 3	0	1	1	0	5	(0,1)	$z_3 = 0$
Solução Básica 4	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{10}{3}$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$z_4 = \cancel{\text{---}}$
Solução Básica 5	2	0	0	0	4	(2,0)	$z_5 = \cancel{\text{---}}$
Solução Básica 6	2	0	0	0	-4	(2,0)	$z_6 = \cancel{\text{---}}$
Solução Básica 7	$\frac{10}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$(\frac{10}{3}, 0)$	Não Factível
Solução Básica 8	-	-	0	0	-	-	Não Factível
Solução Básica 9	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$	$z_9 \approx -3,836$
Solução Básica 10	$\frac{10}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	0	$(\frac{10}{9}, \frac{4}{9})$	$z_{10} \approx -2,388$

Tabela 3: Soluções Básicas

Na aplicação do Método Critério Global tem-se a minimização da função global, dessa forma a solução ótima do problema é  $x^* = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ ;  $z_9 \approx -3,836$ , e  $f_1(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) = 90$  e  $f_2(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) = 115,33$ . Logo o preço da maçã e da batata doce é de 90 centavos a cada 100g e a quantidade ótima de calorias é de 115,33 Kcal.

Considerando as mesmas restrições, suponha que o custo para cada 100g de alimentos seja menor ou igual a 80 centavos, dessa forma a estratégia utilizada é a de *priorização* e o problema de otimização a resolver é:

$$P(\epsilon) : \text{minimizar} \quad f_2(x_1, x_2) = 52x_1 + 86x_2$$

$$f_1(x_1, x_2) = 50x_1 + 20x_2 \leq \epsilon_1 = 80$$

$$s.a. \quad x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$3x_1 + 15x_2 \geq 10$$

A estratégia para a resolução do problema  $P(\epsilon)$  é a priorização pois, a função custo  $f_1(x_1, x_2)$  está sendo priorizada quando considera-se o limite de 80 centavos para cada 100g de alimento.

O método para resolver o problema será **Método  $\epsilon$ -Restrito**.

O espaço factível do problema  $P(\epsilon)$  é representado pela figura 3.9.

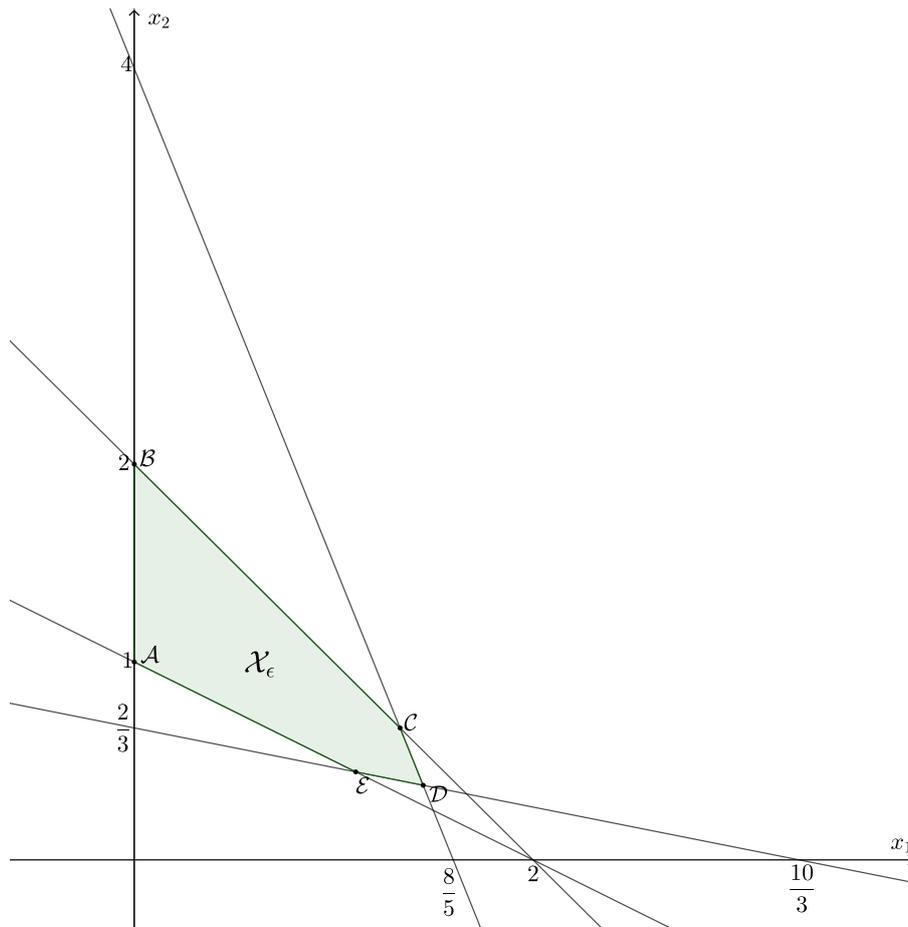


Figura 3.9: Espaço Factível  $\mathcal{X}_\epsilon$

Observe que  $\mathcal{X}_\epsilon$  é um polígono com vértices  $\mathcal{A}(0, 1)$ ,  $\mathcal{B}(0, 2)$ ,  $\mathcal{C}(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $\mathcal{D}(1, 45; 0, 38)$  e  $\mathcal{E}(\frac{10}{9}, \frac{4}{9})$  e encontrando o valor da função  $f_2(x_1, x_2) = 52x_1 + 86x_2$  em cada um desses pontos tem-se:  $f_2(0, 1) = 86$ ;  $f_2(0, 2) = 172$ ;  $f_2(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) \approx 126,66$ ;  $f_2(1, 45; 0, 38) \approx 108,8$  e  $f_2(\frac{10}{9}, \frac{4}{9}) = 96$ .

A solução ótima para o problema através do método  $\epsilon$ -restrito é  $x^* = (0, 1)$  e  $f_2(0, 1) = 86$ , ou seja, supondo  $\epsilon_1 = 80$  o consumo de maçã não ocorrerá e haverá o consumo de uma batata doce com 86 kcal. Caso seja necessário o consumo dos dois alimentos, a solução ótima para o problema é  $x^* = (\frac{10}{9}, \frac{4}{9})$  e tem-se 96 kcal consumidas.

A solução obtida pelo **método  $\epsilon$ -restrito** está relacionada com a escolha de  $\epsilon$  e da priorização da função objetivo, o que resulta num controle de cobertura da fronteira eficiente, obtendo melhor resultado que o **método do critério global** porém, os dois métodos apresentaram simplicidade de resolução.

# Capítulo 4

## Conclusão

Nessa dissertação foi apresentada uma introdução sobre conjuntos convexos, funções convexas e otimização multiobjetivo.

No capítulo 2 apresentou-se de forma objetiva a fundamentação teórica de conjuntos convexos, funções convexas, funções convexas diferenciáveis e aplicações com funções convexas no  $\mathbb{R}^2$ . Nesse capítulo, ao aplicar teoremas envolvendo diferenciabilidade reduz-se a dificuldade para verificar a convexidade de uma função.

O capítulo 3 apresentou uma introdução sobre otimização multiobjetivo e aplicação de problemas de otimização biobjetivo. Esse capítulo possibilita aos professores de matemática conhecer técnicas que utilizam mais de uma função para resolver problemas reais.

Em trabalhos futuros pode-se explorar um aprofundamento no estudo de análise convexa e otimização multiobjetivo

# Referências Bibliográficas

- [1] F. Acker; F. Dickstein, *Uma Introdução à Análise Convexa*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [2] R. G. d. Amorim, *Introdução à análise convexa: conjuntos e funções convexas*. 2013. 79f, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia , 2013.
- [3] P. A. V. Ferreira, *Otimização multiobjetivo: Teoria e aplicações*. 1999. 170f, Tese (Livre Docência em Engenharia Elétrica) Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.
- [4] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [5] A. Izmailov and M. Solodov, *Otimização*. Impa, 2007.
- [6] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*. Princeton university press, 2015.
- [7] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] E. L. Lima, “Análise real volume 1: Funções de uma variável real,” *Coleção Matemática Universitária*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [9] E. L. Lima, *Análise real*, vol. 2. Impa, 2004.
- [10] VIDEO 3: FUNÇÕES CONVEXAS, CÔNCAVAS, ESTRITAMENTE CONVEXAS E ESTRITAMENTE CÔNCAVAS. Liane Mendes Feitosa Soares. Profmat-sbm. 23 abr. 2018. 11min53s. Disponível em: <<https://www.profmatsbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2018/04/MA22-29.mp4>> Acesso em: 20 de nov. de 2018.

- [11] M. N. B. Marques, *Funções Reais e Funções Convexas*. 2018. 55f, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande , 2018.
- [12] R. M. Oliveira, *Algoritmos de busca global para problemas de otimização geométricos e multiplicativos*. 2005. 160f, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- [13] E. d. A. Amorim, *Fluxo de potência ótimo em sistemas multimercados através de um algoritmo evolutivo multiobjetivo*. 2006. 182f, Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.
- [14] J. L. Ringuet, *Multiobjective optimization: behavioral and computational considerations*. Springer Science and Business Media, 2012.
- [15] M. Ehrgott, *Multicriteria optimization*, vol. 491. Springer Science & Business Media, 2005.
- [16] EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISA AGROPECUÁRIA. Disponível em: <<https://www.embrapa.br/>> Acesso em: 27 de Jul. de 2019.