

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

JANIELLY TAILA DOS SANTOS VERBISCK

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA PROPOSTA DE ENSINO DE
PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Campo Grande - MS

2019

JANIELLY TAILA DOS SANTOS VERBISCK

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA PROPOSTA DE ENSINO DE
PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada à banca examinadora,
como exigência final para a obtenção do título
de mestre em Educação Matemática, pela
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul –
UFMS, sob orientação da professora Dra.
Marilena Bittar.

Campo Grande – MS

2019

JANIELLY TAILA DOS SANTOS VERBISCK

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA PROPOSTA DE ENSINO DE
PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar.

Campo Grande, ____ de ____ de 2019.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Marilena Bittar (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul –
UFMS

Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza de Rosa
Borba
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul -
UFMS

Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul -
UFMS

*Aos meus pais Jane e José e ao meu irmão
José Gabriel, por todo amor e auxílio.*

AGRADECIMENTOS

Eu não conseguiria ter realizado este trabalho sem o apoio de alguns queridos que fazem parte da minha vida e de instituições que oportunizam estudos como esse. Por isso, meus sinceros agradecimentos:

A Deus, por não me abandonar mesmo quando eu o faço.

À minha família, por toda compreensão, apoio e amor diante de meus erros e acertos.
Vocês são meu presente!

À minha professora e orientadora Marilena Bittar, por acreditar em mim e tornar esse sonho possível. *Profa, meu carinho, gratidão e admiração por tudo!*

À minha amiga e irmã Jéssica, por todo amor, paciência e ajuda durante este período.
Muito obrigada por sua amizade. Amo você!

Aos professores do PPGEducMat, que nos apoiam e auxiliam dentro e fora da sala de aula. *Vocês são incríveis!*

À banca examinadora, pela disponibilidade em ler este trabalho e dar contribuições.
Professor Zé e Professora Rute, sinto-me honrada em finalizar este trabalho com vocês!

Às minhas amigas Bárbara Drielle, Bruna Nunes, Endrika Leal, Giovana Papacosta e Vivian Nantes, pela amizade iniciada na graduação, por tê-las também no mestrado e em muitos outros momentos de minha vida. *Amo vocês, fofinhas!*

Aos meus colegas de turma, que amadureceram junto comigo nesse período e por todas as risadas em momentos de descontração. *Sucesso a todos!*

Ao Kleber, pelas leituras e contribuições enriquecedoras para que este trabalho se concretizasse.

À Danielly, pela disposição em retornar minhas mensagens e pelos textos indicados para este trabalho.

Ao grupo DDMat, por todas as reuniões e discussões sobre esta pesquisa e outros assuntos de suma importância nesta caminhada de pesquisa e formação continuada. *Contem comigo!*

À Capes pelo apoio financeiro nesses dois anos, que permitiu a minha dedicação exclusiva ao mestrado.

*Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino.
Esses que-fazeres se encontram um no corpo do outro.
Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando.
Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago.
Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, educo e me educo.
Pesquiso para conhecer e o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.*

Paulo Freire

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo caracterizar a proposta de ensino da probabilidade ao longo da educação básica a partir de coleções de livros didáticos de mesma autoria. Para tanto, analisamos quatro coleções de livros didáticos, de mesma autoria, uma de cada nível de escolaridade, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático dos anos de 2016, 2017 e 2018. Nosso referencial teórico-metodológico é a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard e colaboradores, que nos possibilita mapear, modelar e analisar as escolhas matemáticas e as escolhas didáticas dos elaboradores das coleções. Observou-se que o estudo de probabilidade na coleção dos anos iniciais deu-se, primeiramente, por meio de atividades envolvendo noções de possibilidade e situações de aleatoriedade. A partir do livro referente ao quinto ano é introduzida a noção de probabilidade, nos estudos de fração e porcentagem. A continuidade do estudo no livro referente ao sexto ano foi reduzida, sendo proposta brevemente no estudo de fração. Já nos volumes referentes aos sétimo, oitavo e nono anos, observamos uma ampliação de conceitos relativos ao estudo de probabilidade, além de diversas atividades envolvendo espaço amostral, possibilidades de eventos específicos, o cálculo de probabilidades. Na coleção do ensino médio, no segundo ano as justificativas teóricas são consolidadas. De maneira geral, predominou uma proposta de ensino de probabilidade que visa o trabalho de técnicas para determinação da probabilidade de experimentos, do espaço amostral e as possibilidades de eventos específicos e, em algumas situações, a experimentação através da manipulação de alguns objetos, bem como a constituição teórica de conceitos e justificativas para tais técnicas. Ao longo das quatro coleções, não predomina a articulação entre as visões frequentista, geométrica, axiomática, subjetiva e intuitiva de probabilidade. Ainda que em algumas ocasiões propõe-se uma ou outra dessas concepções, a visão clássica é a dominante nesta proposta de ensino.

Palavras-chave: Probabilidade. Livro Didático. Educação Básica. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This research aims to characterize the proposal of probability teaching throughout basic education from collections of textbooks of the same authorship. To do so, we analyzed four collections of textbooks, of the same author, one of each level of schooling, approved by the National Textbook Program of the years 2016, 2017 and 2018. The theoretical-methodological reference is the Anthropological Theory of Didactics, developed by Yves Chevallard and collaborators, which allows us to map, model and analyze the mathematical choices and didactic choices of the authors. It was observed that the study of probability in the collection of the initial years was given, firstly, through activities involving notions of possibility and situations of randomness. From the book referring to the fifth year is introduced the notion of probability, involved in the studies of fractions and percentage. The continuity of the study in the book referring to the sixth year was reduced, being briefly proposed in the study of fractions. Already in the volumes referring to the seventh, eighth and ninth year, it is observed an expansion of concepts related to the study of probability, besides several activities involving sample space, possibilities of specific events, the calculation of probabilities. In the high school collection, in the second year the theoretical justifications are consolidated. In general, a proposal of teaching of probability predominated that aims at the work of techniques to determine the probability of experiments, of the sample space and the possibilities of specific events and, in some situations, the experimentation through the manipulation of some objects, as well as the theoretical constitution of concepts and justifications for such techniques. Throughout the four collections, the articulation between the frequentist, geometric, axiomatic, subjective and intuitive views of probability is not predominant. Although one or other of these conceptions is sometimes proposed, the classical view is dominant in this proposal of probability teaching.

Keywords: Probability. Textbook. Basic Education. Anthropological Theory of Didactic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de primeiro encontro com a praxeologia proposta para o ensino de probabilidade	44
Figura 2: Exemplo de constituição do entorno tecnológico-teórico na proposta de ensino de probabilidade	46
Figura 3: Exemplo de momento de avaliação na proposta de ensino de probabilidade.....	47
Figura 4: Modelo das organizações didáticas proposto por Gascón	48
Figura 5: Parte curso identificada no oitavo ano	50
Figura 6: Quantitativo de tarefas de cada grupo nos volumes analisados por Ramalho (2016)	54
Figura 7: Teia de relações que interliga o professor, o aluno, a Matemática e o autor do LD56	
Figura 8: Atividade cujo foco de estudo não é probabilidade.....	69
Figura 9: Primeira atividade relativa ao estudo de probabilidade	70
Figura 10: Atividade de possibilidades no lançamento de duas moedas	72
Figura 11: Atividade de possibilidades de valores monetários no terceiro ano	73
Figura 12: Categorias de possibilidades no lançamento de quatro moedas no quarto ano	76
Figura 13: Possibilidade no glossário do quarto ano	77
Figura 14: Atividade de possibilidades da soma oito no lançamento de dois dados de seis faces	78
Figura 15: Primeira situação na introdução de probabilidade no quinto ano.....	80
Figura 16: Conceituação de probabilidade no quinto ano.....	80
Figura 17: Tarefas do tipo T_5 no quinto ano	81
Figura 18: Porcentagem e probabilidade no quinto ano.....	83
Figura 19: Criando uma situação envolvendo probabilidade no quinto ano.....	83
Figura 20: Proposta de discussão do termo “probabilidade” no quinto ano	84
Figura 21: Momento de avaliação do estudo de probabilidade no quinto ano.....	84
Figura 22: Probabilidade no glossário do quinto ano.....	85
Figura 23: Exemplos de situações envolvendo probabilidade no sexto ano	96
Figura 24: Primeiro encontro com a probabilidade no sétimo ano	99
Figura 25: Momento de institucionalização no sétimo ano.....	100
Figura 26: Tarefa do tipo T_6 no sétimo ano	101
Figura 27: Atividade com tarefas do tipo T_3 e subtipo $T_{3.1}$	103
Figura 28: Problemas caracterizados como tarefas do tipo T_3 no sétimo ano.....	104
Figura 29: Atividade com tarefas do tipo T_3 , T_7 , T_8 e subtipo $T_{2.1}$ no sétimo ano	106
Figura 30: “Árvore de possibilidades” como técnica de determinação do espaço amostral .	108
Figura 31: Tarefa do tipo T_9 no sétimo ano	110
Figura 32: Primeiro encontro com a praxeologia no oitavo ano	115
Figura 33: Definição de espaço amostral no oitavo ano	116
Figura 34: Conceituação de “evento” no oitavo ano.....	117
Figura 35: Conceituação de “probabilidade” no oitavo ano	118
Figura 36: Técnica apresentada para o cálculo de probabilidade de eventos no oitavo ano .	119
Figura 37: Conceituação de "eventos impossíveis" e "evento certo" no oitavo ano	120

Figura 38: Atividade com tarefas do tipo T_{10} no oitavo ano	121
Figura 39: Tarefas do tipo T_3 e contexto geométrico no oitavo ano	122
Figura 40: Conceituação de eventos equiprováveis e eventos não equiprováveis no oitavo ano	123
Figura 41: Atividade de experimentação no oitavo ano.....	124
Figura 42: Último momento de institucionalização no oitavo ano	126
Figura 43: Tipos de tarefas T_1 e T_2 que passam a ser técnicas $\tau_{1.4}$ e $\tau_{2.2}$ no oitavo ano	129
Figura 44: Primeiro encontro com a praxeologia no estudo de probabilidade no nono ano .	130
Figura 45: Conceituação de probabilidade condicional no nono ano	131
Figura 46: Tarefas do tipo T_{11} e T_{12} no nono ano	132
Figura 47: Conceituação de distribuição probabilística no nono ano	133
Figura 48: Tarefa do tipo T_7 no nono ano	134
Figura 49: Nova técnica para resolução de tarefas do tipo T_7	134
Figura 50: Institucionalização da técnica τ_{20}	135
Figura 51: Conceituação de estimativa da probabilidade de um evento no nono ano	136
Figura 52: Técnica para estimar probabilidades de eventos a partir de uma amostra.....	137
Figura 53: Técnica para o cálculo de probabilidade em contexto geométrico.....	138
Figura 54: Último momento de institucionalização no nono ano	139
Figura 55: Primeiro encontro com a praxeologia proposta no 2º ano do EM.....	147
Figura 56: Conceituação de espaço amostral e evento no 2º ano do EM.....	148
Figura 57: Primeiro momento de exercícios resolvidos no 2º ano do EM.....	149
Figura 58: Conceituação do cálculo de probabilidades, certeza e impossibilidade no 2º ano do EM	150
Figura 59: Noções de análise combinatória institucionalizadas no 2º ano do EM	151
Figura 60: Definição teórica de probabilidade e propriedades no 2º ano do EM	153
Figura 61: Consequências da definição teórica de probabilidade no 2º ano do EM.....	154
Figura 62: Conceituação de Probabilidade condicional no 2º ano do EM.....	156
Figura 63: Definição de Probabilidade condicional no 2º ano do EM.....	157
Figura 64: Nova técnica para a resolução de tarefas do tipo T_7	158
Figura 65: Conceituação de eventos independentes e dependentes no 2º ano do EM.....	159
Figura 66: Método binomial para o estudo de probabilidade no 2º ano do EM	161
Figura 67: método binomial como técnica para tarefas do tipo T_7 no 2º ano do EM.....	162
Figura 68: Aplicações de probabilidade à Genética no 2º ano do EM.....	163
Figura 69: Probabilidade no 3º ano do EM	165

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Objetos de conhecimento e habilidades para os anos iniciais do ensino fundamental	35
Quadro 2: Objetos de conhecimento e habilidades para os anos finais do ensino fundamental	36
Quadro 3: Tipos de tarefas, subtipos de tarefas e técnicas identificadas na Coleção Ápis.....	88
Quadro 4: Quantitativo de tipos de tarefas, subtipos de tarefas e técnicas ao longo da Coleção Ápis.....	89
Quadro 5: Quantitativo de tarefas e contextos da Coleção Ápis	91
Quadro 6: Frequência e porcentagem de tarefas que relacionam combinatória ou estatística no estudo de probabilidade em cada volume analisado nas coleções dos anos iniciais do ensino fundamental.....	92
Quadro 7: Quantitativo de tarefas do mesmo tipo, subtipo e técnicas mobilizadas no livro do 7º ano	112
Quadro 8: Quantitativo de tarefas e contextos propostos no livro do sétimo ano.....	113
Quadro 9: Quantitativo de tarefas de mesmo tipo ou subtipo e técnicas propostas no livro do 8º ano	127
Quadro 10: Quantitativo de tarefas e contextos propostos no livro do oitavo ano	128
Quadro 11: Quantitativo de tarefas de mesmo tipo ou subtipo e técnicas propostas no livro do 9º ano	140
Quadro 12: Quantitativo de tarefas e contextos propostos no livro do oitavo ano	141
Quadro 13: Quantidade de tarefas em função dos tipos na Coleção Projeto Teláris	142
Quadro 14: Relação dos tipos de tarefas e técnicas na Coleção Projeto Teláris	143
Quadro 15: Frequência e porcentagem de tarefas que relacionam combinatória ou estatística no estudo de probabilidade em cada volume analisado na Coleção Projeto Teláris	144
Quadro 16: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções <i>Exercícios resolvidos</i> e <i>Exercícios</i> – 1ª etapa.....	152
Quadro 17: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções <i>Exercícios resolvidos</i> e <i>Exercícios</i> – 2ª etapa.....	155
Quadro 18: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções <i>Exercícios resolvidos</i> e <i>Exercícios</i> – 3ª etapa.....	160
Quadro 19: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções <i>Exercícios resolvidos</i> e <i>Exercícios</i> no 3º ano do EM	166
Quadro 20: Quantidade de tarefas em função dos tipos no 2º ano do ensino médio	167
Quadro 21: Quantidade de tarefas em função dos tipos no 3º ano do ensino médio	167
Quadro 22: Frequência (e porcentagem) de tarefas e seus contextos na Coleção Matemática – Contextos e Aplicações/ Ensino Médio.....	168
Quadro 23: Relação entre tipos de tarefas e técnicas no segundo e terceiro anos do ensino médio	169
Quadro 24: Frequência e porcentagem de tarefas que relacionam combinatória ou estatística no estudo de probabilidade em cada volume analisado Coleção Matemática – Contextos e Aplicações/ Ensino Médio.....	170

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Quantitativo de tarefas relativas a proposta de ensino de probabilidade em cada volume	177
Gráfico 2: Quantitativo de tipos de tarefas e técnicas em cada volume em que foi proposto o ensino de probabilidade	178
Gráfico 3: Quantitativo de tarefas do tipo T ₃ em cada volume	179

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
DDMat	Grupo de Estudos em Didática da Matemática
GERAÇÃO	Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório
LD	Livro didático
MP	Manual do professor
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OM	Organização matemática
OD	Organização didática
PNAIC	Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio
PIBID	Programa de Bolsa de Iniciação à Docência
PPGEduMat	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SISU	Sistema de Seleção Unificada
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	15
PARTE I - ESCOLHAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS.....	23
1. PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA	23
1.1 PROBABILIDADE: PRINCIPAIS VISÕES	24
1.2 PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL	27
1.2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais	27
1.2.1 Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa	31
1.2.3 Base Nacional Comum Curricular	33
1.3 PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO.....	37
1.3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio	37
1.3.2 Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais	38
1.3.3 Orientações Curriculares para o Ensino Médio.....	39
2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....	42
2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD): PRINCIPAIS ELEMENTOS.....	42
2.2 PESQUISAS SOBRE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TAD	49
3. LIVROS DIDÁTICOS E PROBABILIDADE.....	55
3.1 O LIVRO DIDÁTICO (LD) E O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD)	55
3.2 GUIAS DO PNLD DOS ANOS DE 2016, 2017 E 2018	59
3.2.1 Anos Iniciais – Guia do PNLD/2016	59
3.2.2 Anos Finais – Guia do PNLD/2017	61
3.2.3 Ensino Médio – Guia do PNLD/2018	64
3.3 ESCOLHA DAS COLEÇÕES ANALISADAS	65
PARTE II – PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	67
4. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DESTINADA AOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	67
4.1 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE	67
4.2 CICLO DE ALFABETIZAÇÃO: TAREFAS E TÉCNICAS QUE PREPARAM PARA O ESTUDO DE PROBABILIDADE	70
4.3 QUARTO E QUINTO ANOS: ATIVIDADES DE POSSIBILIDADES E INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE PROBABILIDADE	75

4.4 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS NA COLEÇÃO DOS ANOS INICIAIS	86
5. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DESTINADA AOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	94
5.1 ESTRUTURA DA COLEÇÃO	94
5.2 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO SEXTO ANO.....	95
5.3 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO SÉTIMO ANO.....	98
5.4 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO OITAVO ANO	114
5.5 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO NONO ANO	129
5.6 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS NA COLEÇÃO DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	141
6. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DESTINADA AO ENSINO MÉDIO	145
6.1 ESTRUTURA DA COLEÇÃO	145
6.2 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO	147
6.3 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO	164
6.4 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS NA COLEÇÃO DO ENSINO MÉDIO	166
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	172
REFERÊNCIAS	181
APÊNDICE A: Descrição dos tipos de tarefas.....	186
APÊNDICE B: Descrição das técnicas	187

INTRODUÇÃO

*Eu queria aprender o idioma das árvores.
Saber as canções do vento nas folhas da tarde.
Eu queria apalpar os perfumes do sol.*
(BARROS, 2018, p.18)

Tornar-me professora de Matemática não era minha primeira escolha ao terminar o ensino médio e me deparar com essa etapa de decisão tão complexa que refletiria em toda minha carreira profissional. Como o *passarinho à toa* de Manuel de Barros (2018), eu queria sair voando por aí, conhecer e vivenciar coisas simples e, ao mesmo tempo, incríveis. É fato que sempre tive uma paixão pela Matemática, o que fez com que eu me destacasse nessa disciplina, e nas disciplinas de ciências exatas, durante toda a minha escolarização básica. Assim, ao chegar finalmente no último ano do ensino médio, fiquei um bom tempo pensando “Qual será minha profissão?” “O que eu gosto de fazer?”, “Com o que quero trabalhar?”. Rapidamente o ano (2011) estava terminando e, ainda que confusa, decidi focar nos cursos da área de Ciências Exatas e suas Tecnologias, não me encantando por qualquer um dos tantos oferecidos nas universidades brasileiras.

Com isso em mente, participei de diversos vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Então, foi preciso selecionar no Sistema de Seleção Unificada (SISU) duas opções de cursos, em instituições públicas, e esperar o resultado das vagas. Por residir em Campo Grande/MS, certamente optaria pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); mas a dúvida surgiu novamente: “Que cursos escolho?”. Rolando as páginas daquele site, me deparei com o curso “Matemática – Licenciatura Plena”, o que me fez recordar da paixão descoberta na escola. Assim, um pensamento veio repentinamente: “Deve ser um curso interessante, só tem Matemática...”. Selecionei, então, esse curso e alguma outra opção da área de Ciências Exatas e suas Tecnologias.

Passados alguns dias, a aprovação foi confirmada. Foi necessário, então, realizar a matrícula e a curiosidade por conhecer esse tal curso de Matemática tomou conta dos meus pensamentos a ponto que a decisão foi em me matricular nesse curso e iniciar esse novo voo, em 2012. Mas o que, afinal, estudava-se nesse curso? Por ser muito aventureira, já tinha em mente a possibilidade de trocar de curso caso não me identificasse.

O primeiro dia de aula é sempre aquela tensão e expectativa em conhecer os colegas, professores e a universidade a qual eu faria parte durante quatro anos. Não me recordo de todos os detalhes, mas o que me marcou logo nos primeiros dias de aulas de Introdução ao Cálculo

foi o professor Marcio Antonio da Silva¹ dizer que aquele curso nos preparava para sermos professores de Matemática. Não cheguei ao ponto de ficar em estado de choque, mas essas palavras me tocaram fortemente. “Quanta responsabilidade!”, “Será que eu serei, algum dia, capaz?”, foram alguns dos pensamentos daquela época e que me seguem ainda hoje.

O segundo ano de curso (2013) iniciou-se e o entusiasmo estava mais vivo do que nunca. Foi neste ano que tive a oportunidade de participar do Programa de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), o qual permaneci até o final da minha formação. Nos anos de participação, nosso grupo realizou projetos nas escolas, planejamentos e desenvolvimentos de aulas, reuniões, leituras e discussões de diversos assuntos relacionados à Educação e à Educação Matemática. Nesses episódios de estudos e discussões pude conhecer a Educação Matemática como uma área de pesquisa. Toda essa experiência vinha ao encontro da minha vontade de ser professora. Mas eu descobri que poderia voar ainda mais alto, eu poderia ser pesquisadora também e continuar a busca por discussões e questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Destarte, em 2014, meu penúltimo ano de formação, vou em busca do que poderia me proporcionar essa continuação. Por saber que o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da UFMS oferecia o curso de Mestrado em Educação Matemática, busquei me informar se era possível participar das reuniões dos grupos de estudos, mesmo sendo acadêmica da graduação. Informada de que era possível, iniciei a minha participação no Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat²), onde discutíamos sobre ensino e aprendizagem da matemática, a partir de leituras sugeridas e de pesquisas que estavam sendo desenvolvidas por mestrandos e doutorandos do PPGEduMat.

O ano de 2015 era para ser meu último ano de graduação, mas, devido a duas greves, o calendário atrasou e as aulas do último semestre só terminaram em abril de 2016. Alguns colegas se sentiram prejudicados por terem perdido a seleção no mestrado naquele ano, inclusive eu perdi essa oportunidade. Entretanto, creio que esse atraso me foi muito proveitoso, pois tive a chance de continuar participando das reuniões do DDMat e, também, de assumir

¹ Professor adjunto da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, lotado no Instituto de Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat).

² O DDMat tem como principal enfoque o estudo de fenômenos didáticos tomando como um dos focos centrais de problematização do saber matemático. Assim, são estudadas a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria Antropológica do Didático, os Registros de Representação Semiótica, a Engenharia Didática, dentre outros. Pesquisas individuais e coletivas são realizadas nas diversas modalidades e níveis de ensino, bem como investigações quanto a prática docente e formação de professores. Disponível em: <grupoddmат.pro.br>. Acesso em: 20 de fev. 2018.

algumas turmas de 8º e 9º anos em duas escolas de Campo Grande. Foram oito meses, de abril a dezembro de 2016, em sala de aula que ficarão em minha memória pelas dificuldades e insegurança que senti e, mais ainda, pela experiência que me fez crescer e confirmar que é essa a minha profissão. É aquele voo bem desafiador, mas incrível.

Já em relação ao DDMat, foram dois anos de participação em que pude conhecer diversas pesquisas e, principalmente, entrar em contato com investigações realizadas sobre análise de livros didáticos, pesquisas realizadas no Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (GERAÇÃO), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), bem como iniciar um estudo com a professora Rute Borba³, que me inspiraram a propor a intenção de pesquisa na seletiva do mestrado, em dezembro de 2016. Analisar livros didáticos me chamava atenção devido à importância deste material didático nas escolas brasileiras, bem como por refletir, ao menos parcialmente, aquilo que está sendo ensinado.

Meu anseio inicial era de analisar a proposta de ensino do conteúdo de probabilidade em coleções de livros didáticos, devido a sua relevância para a compreensão de acontecimentos de natureza aleatória que cercam nosso cotidiano. Após o ingresso no mestrado e discussões durante orientações, começamos os estudos preliminares para então decidirmos que tipo de pesquisa contribuiria mais para este campo de estudos da Educação Estatística, em particular do ensino de probabilidade.

Iniciamos a busca sobre o ensino de probabilidade observando, primeiramente, documentos curriculares oficiais brasileiros. Assim, notamos que o ensino de probabilidade se torna explícito com o surgimento do tema *Tratamento da Informação* nos Parâmetros Curriculares Nacionais, em 1997, onde consta a seguinte justificativa: “A demanda social é que leva a destacar este tema como um bloco de conteúdo, embora pudesse ser incorporado aos anteriores. A finalidade do destaque é evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade”. (BRASIL, 1997, p. 40). Neste bloco são integrados estudos relacionados às noções de estatística, combinatória e probabilidade.

Trata-se, então, de uma demanda da Noosfera⁴ que fez com que a esse tema fosse atribuída uma certa importância no cenário da educação matemática no Brasil. Segundo

³ Líder do Grupo de Estudos em raciocínio combinatório e probabilístico (GERAÇÃO) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Este grupo tem como objetivo desenvolver e divulgar estudos relativos ao conhecimento de Combinatória e Probabilidade. Para isso, tem sido desenvolvido estudos com pessoas de diferentes faixas etárias, níveis e modalidades de ensino e, também, investigações com a participação de professores do ensino básico. (Disponível em: <<http://geracaoufpe.blogspot.com.br/p/linhas-de-pesquisa.html>>. Acesso em: 28 de dez. 2017)

Chevallard (1991), noosfera é a parte da sociedade incumbida da inter-relação entre a sociedade e as esferas responsáveis pela produção dos saberes; nela estão inclusos os representantes e responsáveis pela elaboração de documentos e orientações para o ensino, e os resultados são vistos em documentos curriculares oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, Referenciais Curriculares dos estados, etc.

Nesse período de pouco mais de vinte anos desde a entrada oficial desse tema nas recomendações para a educação básica surgiram pesquisas com foco nesse tema. Santos e Fiorentini (2016, p. 206) apontam que:

O movimento da pesquisa em Educação Estatística não se iniciou no Brasil de forma centralizada e sob o protagonismo de um único grupo de pesquisa, programa de pós-graduação ou instituição de ensino superior. Tampouco se manifestou de forma articulada ou organizada. Em primeiro lugar, este movimento foi inicialmente fruto de iniciativas esparsas e isoladas; e, em segundo lugar, tratava-se de uma reação ligeiramente tardia a um movimento de nível internacional que, de acordo com Batanero (2000), já se manifestava desde a década de 1970, representando a base daquilo que hoje se denomina Educação Estatística [...].

Estes autores reforçam o pensamento de a Educação Estatística ser um campo recente e que vem crescendo ao longo dos anos, por meio de pesquisas e publicações realizadas.

Após essa primeira busca, fizemos o levantamento de pesquisas por meio do *Catálogo de Teses e Dissertações Capes*⁵. Utilizando as palavras “probabilidade”, “ensino” e o conectivo “AND” a busca ficou da seguinte maneira: ensino AND probabilidade. Selecionamos os tipos de trabalho como sendo os de “mestrado (dissertação)” e “doutorado (tese)” que resultou em 495 pesquisas encontradas. Fizemos, então, o refinamento dessas utilizando os filtros “Ciências Humanas” e “Ciências Exatas e da Terra” no quesito *Grande área de conhecimento* que resultou em 213 pesquisas. Várias pesquisas foram descartadas apenas com a leitura do título, visto que não apresentavam qualquer aproximação com nosso estudo. Por exemplo, dentre esses 213 resultados, encontramos uma pesquisa intitulada *O aluno do programa de mestrado do IMPA tem a opção de não defender dissertação. Em substituição à dissertação, o aluno pode cursar duas disciplinas de doutorado*. De alguma forma as palavras “ensino” e “probabilidade” devem aparecer no resumo deste trabalho, mas pelo título já descartamos a hipótese de ser relacionado ao ensino de probabilidade. Com a leitura dos resumos das demais, selecionamos cinco dissertações e uma tese com o enfoque procurado. Apresentamos brevemente os principais focos de estudos e resultados de cada uma dessas.

⁵ Disponível em: <<http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>>.

A primeira pesquisa que destacamos é a de Coutinho (1994, p.8), que teve como objetivo “mostrar as vantagens encontradas quando da utilização da visão frequentista para o ensino dos primeiros conceitos de probabilidade”. A escolha pela visão frequentista, proposta por Jacob Bernoulli, se deu por buscarem por experimentos não só equiprováveis, mostrando que este também é um agente facilitador para aprendizagens de conceitos básicos da probabilidade. Com este estudo, onde foram elaboradas e desenvolvidas sequências didáticas com alunos do ensino fundamental no Brasil e na França, ficou evidente a importância de se trabalhar não só a visão clássica de probabilidade, razão entre o número de casos favoráveis e o número total de possibilidades, mas também a frequentista, que aproxima a probabilidade de um evento pela sua frequência quando repetida a experiência inúmeras vezes.

Silva (2002) elaborou e executou sequências didáticas com alunos, do ensino médio, com o enfoque nas visões clássica e frequentista, mostrando a importância destas na aprendizagem de conceitos probabilísticos. Oliveira (2006, p. 3) analisou “conteúdos de Probabilidade e Estatística de uma amostra de livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio, editados entre 1992 e 2005”. Nesta análise, evidenciou-se o pouco destaque que tais conteúdos recebem nos livros didáticos do ensino médio e, inclusive, conceitos errôneos na abordagem dos mesmos.

Abe (2011) investigou a aprendizagem de probabilidade por alunos do 9º ano do ensino fundamental a partir de situações envolvendo as visões clássicas e frequentista, evidenciando, ao final, as vantagens de se trabalhar com essa dualidade na introdução de tal conteúdo. Soares (2014) analisou as atividades de probabilidade propostas em três coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)⁶ do ano de 2014, concluindo que nos livros analisados não são trabalhadas de maneira satisfatória a concepção frequentista de probabilidade, nem é priorizada a discussão sobre a questão da aleatoriedade, utilizando-se mais a concepção clássica para apresentar a probabilidade.

Na pesquisa de Silva (2016) foi realizada uma análise dos conhecimentos de crianças dos anos iniciais da escolarização (1º, 3º e 5º anos do ensino fundamental) relativos à probabilidade em situações de jogos com aspectos intuitivos e menos formais de probabilidade. Esses jogos contemplavam situações explorando a aleatoriedade, espaço amostral e comparação

⁶ O PNLD é responsável por avaliar e aprovar coleções de livros didáticos da educação básica que são distribuídas nas escolas públicas brasileiras. Essa avaliação gera um Guia com as resenhas das coleções aprovadas e algumas discussões de temáticas da Educação Matemática. O Guia é divulgado no mesmo ano em que são aprovadas as coleções.

de probabilidades que são as três primeiras exigências cognitivas propostas por Bryant e Nunes (2012). Os resultados mostraram que as crianças mobilizaram o significado intuitivo de probabilidade, baseando-se em crenças e opiniões.

Essas pesquisas, apresentadas brevemente até aqui, trouxeram contribuições aos estudos quanto ao ensino da probabilidade e reforçam a necessidade de continuidade e ampliação desses estudos por meio de novas pesquisas que poderão ser desenvolvidas.

Como dissemos anteriormente, nosso desejo em analisar propostas de autores para o ensino de probabilidade em livros didáticos começou a ser melhor definido após o breve levantamento que apresentamos nesse item. Um trabalho realizado por Santana e Borba (2010, p. 4) vem ao encontro da proposta que começamos a elaborar neste trabalho. Nele, as autoras afirmam que:

Torna-se relevante [...] analisar como livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental abordam o conceito de *probabilidade*, identificando quais noções são trabalhadas pelos autores e se são propostas atividades que tenham a resolução de problemas como eixo central, numa visão ampla em torno de situações e noções trabalhadas, bem como de representações simbólicas utilizadas. (SANTANA & BORBA, 2010, p.4).

Assim como Santana e Borba (2010), acreditamos na importância da análise de livros didáticos para refletir sobre escolhas dos elaboradores de livros didáticos e sobre o papel de determinado conteúdo no ensino da Matemática, não só do ensino fundamental como de todo o ensino básico.

Investigamos, ainda, o que foi apontado nos Guias mais recentes do Programa Nacional do PNLD quanto à probabilidade nas coleções aprovadas dos anos iniciais ao ensino médio. Identificamos que desde os anos iniciais os conceitos probabilísticos devem ser trabalhados, uma vez que estamos sujeitos a acontecimentos de natureza aleatória em nosso cotidiano. Assim, com o levantamento realizado e confirmada a importância do ensino de probabilidade em toda a educação básica, levantamos a seguinte questão para ser investigada nesta pesquisa: *Como é proposto o ensino de probabilidade ao longo da educação básica em coleções de livros didáticos de mesma autoria?*

Nosso principal objetivo foi, então, de analisar como o estudo de probabilidade é trabalhado em coleções de livros didáticos e como esse trabalho é proposto ao longo da educação básica. Para tanto, quatro coleções de livros didáticos foram escolhidas: uma dos anos

iniciais do ensino fundamental (1º a 5º anos)⁷, uma dos anos finais do ensino fundamental (6º a 9º anos), e uma do ensino médio, compondo uma amostra de coleções da educação básica. Buscando responder nossa questão de pesquisa, elencamos como objetivo geral:

Analisar a proposta de ensino de probabilidade em coleções de livros didáticos da educação básica.

Para atingir esse objetivo geral, definiu-se os seguintes objetivos específicos:

- 1) Identificar e analisar conceitos, representações, atividades e procedimentos propostos para o ensino de probabilidade em quatro coleções de livros didáticos, dos anos iniciais ao ensino médio, aprovadas pelos PNLD dos anos de 2016⁸, 2017⁹ e 2018¹⁰;
- 2) Identificar e analisar as escolhas didáticas propostas para o ensino de probabilidade em quatro coleções de livros didáticos, dos anos iniciais ao ensino médio, aprovadas pelo PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018.

Para a seleção da amostra de livros didáticos analisados foi feito, primeiramente, uma leitura dos Guias do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018, buscando por uma coleção em cada nível de escolaridade que fosse de mesma autoria, por tomarmos como hipótese que em coleções de mesmo (s) autor (es) deveria haver uma coerência interna, uma continuidade do ensino proposto para o conteúdo de probabilidade dos anos iniciais ao ensino médio. Baseadas no levantamento feito nesses Guias, observamos que apenas um autor tem uma coleção aprovada em cada nível de escolaridade. Assim, as coleções do autor Luiz Roberto Dante, da editora Ática, foram as utilizadas como foco de análise em nossa pesquisa de mestrado, por ser o único autor com coleções aprovadas para os três níveis da escolarização básica. Buscamos identificar o que os elaboradores das coleções apontam como sendo probabilidade, quais definições, procedimentos, algoritmos que eles tomam para esse estudo e, também, quais as escolhas didáticas para apresentar esse estudo ao longo das coleções.

Para a realização desta pesquisa adotamos como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999) que postula que qualquer atividade humana, inclusive a atividade matemática, pode ser descrita por um modelo

⁷ Essa coleção é composta pelas coleções destinadas aos 1º a 3º anos (Alfabetização Matemática) e 4º e 5º anos (Matemática).

⁸ Para o triênio 2016, 2017 e 2018.

⁹ Para o triênio 2016, 2017 e 2018.

¹⁰ Para o triênio 2018, 2019 e 2020.

praxeológico¹¹. Os procedimentos metodológicos para a análise dos livros didáticos serão baseados no modelo proposto por Bittar (2017) que, por sua vez, também é desenhado com o apoio da TAD. Estas escolhas nos permitem descrever e analisar o estudo de probabilidade proposto nos livros didáticos, tanto do ponto de vista matemático quanto didático, que é nosso tema de investigação.

Dividiu-se a dissertação em duas grandes partes, a primeira parte, composta por três capítulos, é relativa às escolhas teóricas e metodológicas. No capítulo 1 abordamos as principais concepções de probabilidade; como é sugerido o ensino de probabilidade nos principais documentos oficiais brasileiros da educação básica e pesquisas envolvendo o ensino de probabilidade. No capítulo 2 apresentamos os elementos do aporte teórico e metodológico utilizados nessa pesquisa e pesquisas de análises de livros didáticos à luz da TAD. No capítulo 3 discorremos sobre a função do livro didático (LD), o PNLD, as principais discussões apresentadas nos Guias do PNLD mais recentes, e a justificativa da escolha das coleções analisadas. A segunda parte, também composta por três capítulos, é relativa à produção e análise dos dados. Cada capítulo contempla a análise de livros didáticos de um segmento do ensino. Por fim, trazemos as considerações finais quanto aos resultados observados com a investigação realizada, além das referências e dois apêndices contendo as descrições dos tipos de tarefas e técnicas identificados nas coleções analisadas.

¹¹ No capítulo 2 descrevemos detalhadamente os elementos que compõem tal modelo.

PARTE I - ESCOLHAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

Nesta primeira parte da pesquisa são contemplados os três primeiros capítulos, relativos aos elementos teóricos e metodológicos adotados para compreensão e análise do ensino de probabilidade em livros didáticos da educação básica. Apresentamos, então, as principais concepções de probabilidade (intuitiva, clássica, frequentista, subjetiva, axiomática e geométrica); discussões presentes em documentos oficiais brasileiros quanto ao ensino desta temática; o papel do LD e do PNLD no cenário educacional brasileiro; o processo de escolha das coleções analisadas; os elementos metodológicos da TAD considerados para a produção e análise de dados e o modelo de análise de livros didáticos adotado.

1. PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Este capítulo está estruturado em três seções em que, na primeira, apresentamos um de nossos objetos de pesquisa – a probabilidade – em seguida, nas duas seções restantes, expôs-se e discutiu-se as propostas, objetivos, orientações didáticas, dentre outros, relativos ao ensino de probabilidade na educação básica presentes em documentos oficiais brasileiros. Consideramos como documentos oficiais: o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística (BRASIL, 2014); os Parâmetros Curriculares Nacionais dos ensinos fundamental e médio; a Base Nacional Comum Curricular e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Trazemos essas discussões separadas por níveis da educação básica.

Vale ressaltar que segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (BRASIL, 2013), três etapas compõem a educação básica: a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. A alfabetização e o letramento, em especial o letramento matemático¹², é previsto para ser iniciado no ensino fundamental. Nesta dissertação focamos nas etapas do ensino fundamental e do ensino médio. Essas são as duas etapas que estamos considerando como escolarização básica.

¹² Segundo a Matriz do Pisa 2012 (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), o “letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias”. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2017.

Passamos, então, para a primeira seção deste capítulo em que apresentamos as principais concepções de probabilidade consideradas para a investigação aqui proposta.

1.1 PROBABILIDADE: PRINCIPAIS VISÕES

Gal (2005) advoga que a probabilidade é de fundamental importância para o entendimento de acontecimentos e fenômenos aleatórios que permeiam nosso cotidiano. Uma discussão importante, que não poderia deixar de ser levada em consideração, é que a Estatística:

É uma ciência que utiliza teorias probabilísticas para explicação de eventos, estudos e experimentos. Tem por objetivo obter, organizar e analisar dados, determinar as correlações que apresentem, tirando delas suas consequências para descrição e explicação do que passou e previsão e organização do futuro. Estatística é também uma ciência e prática de desenvolvimento de conhecimento humano através do uso de dados empíricos. Baseia-se na teoria estatística, um ramo da matemática aplicada. Na teoria estatística, a aleatoriedade e incerteza são modeladas pela teoria da probabilidade. (FULGENCIO, 2007, p. 269).

Ainda que este não seja nosso objeto de estudo, faz-se necessário compreender que a Estatística é considerada um ramo da Matemática e, também, uma ciência ou área de estudo por si mesma. Diante dessas duas caracterizações para a Estatística, a probabilidade encontra-se, então, como parte da matemática e da estatística. Seu conceito “recebeu interpretações diferentes de acordo com o componente metafísico das relações das pessoas com a realidade” (BATANERO; DIAZ, 2007, p. 110, tradução nossa). A seguir apresentamos, brevemente, as principais visões de probabilidade.

Na visão intuitiva, Batanero e Díaz (2007) afirmam que ideias intuitivas relativas ao acaso e à probabilidade aparecem muito cedo, como vemos em crianças pequenas e pessoas não educadas ao usarem expressões do tipo “provável”, “improvável”, “viável”, “impossível” ao expressarem suas crenças em acontecimentos de natureza aleatória. A visão intuitiva, então, leva em consideração a crença do indivíduo como ferramenta para a tomada de decisão, em situações de aleatoriedade.

Tratava-se de ideias muito imprecisas e precisava haver uma ideia fundamental de mensurar o grau de possibilidade de eventos incertos e, assim, haver a comparação de probabilidades, utilizando ferramentas da matemática no contexto aleatório. Nesse sentido:

[...] a probabilidade teve um caráter dual desde seu surgimento: um lado estatístico está preocupado com regras estocásticas¹³ de processos aleatórios, enquanto o lado epistêmico vê a probabilidade como um grau de crença. Essa dualidade esteve presente em muitos dos autores que contribuíram para o

¹³ Estocástica é o termo empregado ao se tratar de probabilidade integrada à estatística (LOPES, 2008).

progresso da teoria das probabilidades. (BATANERO; DIAZ, 2007, p. 111, tradução nossa).

A visão clássica foi apresentada primeiramente pelo francês Pierre-Simon Laplace (1747-1827), que sugeriu que a teoria do acaso consistia na redução de todos os eventos do mesmo tipo a um determinado número de casos igualmente prováveis (equiprobabilidade) e apontou como definição: “*probabilidade é, portanto, simplesmente uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis*” (LAPLACE *apud* BATANERO e DIAZ, 2007, p. 112, tradução nossa).

A visão frequentista surge a partir de primeiros estudos publicados em 1713 com a obra *Ars Conjectandi* (Arte de Conjecturar) de Jacques Bernoulli (1654-1705).

Bernoulli sugeriu uma possível maneira de atribuir probabilidades a eventos reais, em aplicações diferentes dos jogos de azar, através de uma estimativa frequentista (Bernoulli 1687/1713). Ele também justificou uma estimativa frequentista de probabilidade ao dar uma primeira prova da Lei dos Grandes Números: se um evento ocorre um conjunto particular de vezes (k) em n tentativas idênticas e independentes, então se o número de tentativas for arbitrariamente grande, k / n deve ser arbitrariamente próximo da probabilidade "objetiva" desse evento.

A convergência de frequências para um evento, após um grande número de tentativas idênticas de experimentos aleatórios, foi observada ao longo de vários séculos. (BATANERO e DIAZ, 2007, p. 112, tradução nossa).

Quando Bernoulli apresentou a prova de que a medida estimada se aproximava da probabilidade clássica compreendeu-se como uma confirmação de que a probabilidade é uma característica objetiva de eventos de natureza aleatória. Sabendo que frequências estabilizadas são observáveis, essas podem ser entendidas como medidas físicas próximas de tal probabilidade clássica.

A visão subjetiva foi introduzida por Thomas Bayes em *La Doctrine des Chances* (1763).

Uma corrente de probabilistas considera a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador possui na ocorrência do evento. Desse modo, a probabilidade será em geral diferente para distintas pessoas em decorrência das diferentes opiniões que elas têm sobre a ocorrência do evento. Em uma outra descrição equivalente, a probabilidade de um evento é o valor que cada observador estaria inclinado a apostar na realização do evento. (DANTAS, 2004, p.28 *apud* ABE, 2011, p. 39).

Na visão subjetiva, então, a probabilidade é baseada nas experiências de cada indivíduo, bem como seu julgamento pessoal e conhecimento. Vemos exemplos dessa visão quando profissionais da saúde conferem probabilidades subjetivas às expectativas de vida para pessoas com doenças terminais. Outro exemplo do cotidiano é quanto às previsões de tempo realizadas

por provedores de informações de climáticas e interpretações desses dados realizadas por meteorologistas.

Quanto à visão axiomática, Émile Borel traz as primeiras contribuições para a axiomatização da probabilidade, com sua obra *Le Hasard* (1914). Esta visão “é um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas” (FERNANDES, 1999, p. 54). Coutinho e Novaes (2009, p.133) traduziram os axiomas da seguinte forma:

Dados dois eventos A e B , resultantes de um mesmo experimento aleatório, ou seja, contidos em um mesmo espaço amostral Ω , sendo $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, temos:
Axioma I: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Axioma II: Se $A = \Omega$, então $P(A) = 1$, e nesse caso A é chamado *evento certo*.

Axioma II-A: Se $A = \emptyset$, então $P(A) = 0$, e nesse caso A é chamado *evento impossível*.

Axioma III: Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

A partir desses axiomas podem ser definidas propriedades operatórias, tais como:

Propriedade 1: Se $A \cap B \neq \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Propriedade 2: Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(B) = 1 - P(A)$, e nesse caso A e B são chamados *eventos complementares*.

Propriedade 3: Se A e B são eventos independentes, então $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Definição: Dizemos que A e B são eventos condicionados quando $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, de onde podemos concluir que se A e B são independentes (são eventos condicionados), então $P(A \cap B) = P(B).P(A/B) = P(A).P(B/A)$.

$P(A)$ e $P(B)$ representam a probabilidade dos eventos A e B , respectivamente. Com essa sistematização, são apresentados axiomas, propriedades e definições relativos ao estudo de probabilidade que, inclusive, não exclui as visões clássica e frequentista, uma vez que suas definições também satisfazem esses axiomas. Assim, as noções de evento certo, evento impossível, eventos dependentes e independentes, dentre outras, são contempladas.

A concepção de probabilidade geométrica, que é a última considerada nesse estudo, originou-se com contribuições de George Louis Leclerc (1707-1788) ao apresentar o jogo *Franc Carreau* (jogo do ladrilho) e, posteriormente, seu *Essai d'Arithmétique Morale* (Ensaio Moral de Aritmética) em que expos vantagens do emprego da geometria na Teoria das Probabilidades. Para o contexto escolar, essa concepção “consiste no ensino de probabilidade em um contexto geométrico, dando-nos a opção de ensinar probabilidade por meio de conceitos geométricos que os alunos já conhecem” (ABE, 2011, p. 24 e 25). Assim, “as situações que envolvem probabilidade geométrica podem ser calculadas fazendo uso da visão clássica (a priori) ou da frequentista de probabilidades (a posteriori), realizando o experimento por um número grande de vezes” (ABE, 2011, p. 43).

Essas são as principais concepções de probabilidade que consideramos para nossa pesquisa, principalmente para a identificação das visões de probabilidade propostas no estudo desta temática nas obras didáticas escolhidas para a produção e análise de dados. Passamos agora para a discussão das orientações relativas ao ensino de probabilidade presente em documentos oficiais brasileiros.

1.2 PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Para discutirmos o que se orienta quanto ao estudo de probabilidade no ensino fundamental, trazemos três importantes documentos oficiais utilizados no Brasil como ferramenta curricular de educadores e instituições de ensino: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Os PCN ainda foram considerados na elaboração das coleções de livros didáticos aprovados nos PNLD de 2016, 2017 e 2018; e a BNCC é o documento mais recente elaborado e homologado em 2017, que passou a ser implementado nas elaborações das coleções dos anos iniciais já aprovados deste ano (2019). Assim, acreditamos ser interessante observar essa mudança de referencial curricular.

1.2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN foram os primeiros documentos curriculares publicados no Brasil contendo objetivos, competências, habilidades, orientações, sugestões para o ensino e a aprendizagem de cada disciplina do ensino fundamental e, posteriormente, do ensino médio. Esses documentos foram elaborados pelo Ministério Público que reuniu diversos professores, pesquisadores e especialistas das áreas de ensino que pudessem dar contribuições. As publicações do ensino fundamental se deram da seguinte forma: em 1997 foi divulgado o documento para o primeiro ciclo do ensino fundamental – os anos iniciais (primeiro ao quinto ano) – e em 1998, foi a vez dos anos finais (sexto ao nono ano).

Os PCN (BRASIL, 1997) indicam que há um consenso quanto aos currículos de matemática contemplarem os estudos de números e operações (relativos à álgebra e aritmética), espaço e formas (relativos à geometria) e grandezas e medidas (como sendo a inter-relação desses três). No entanto, assim como o movimento que influenciou reformas curriculares a âmbito mundial no período de 1980 a 1995, nos PCN afirma-se:

[...] a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à **probabilidade** e à combinatória. (ibid., p. 38, grifo nosso).

Assim, é neste documento que a probabilidade é apresentada como parte do bloco de conteúdos *Tratamento da Informação*. A finalidade primeira relativa à probabilidade é que as crianças dos anos iniciais compreendam que a maioria dos acontecimentos diários são de natureza aleatória, sendo possível estimar resultados prováveis desses acontecimentos.

Além disso, as noções de acaso e incerteza, que despontam de maneira intuitiva, poderão ser trabalhadas por meio de situações nas quais os alunos realizem tentativas e notem acontecimentos em ambientes equiprováveis (BRASIL, 1997). Deste modo, “ao observarem a frequência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem suas primeiras noções de probabilidade” (ibid., p. 58). Nesta etapa da escolarização estão sendo consideradas, então, as concepções clássica e frequentista de probabilidade, visto que apresentou-se algumas situações com ambientes equiprováveis e, também, a observação de frequências de experimentos para o desenvolvimento das primeiras noções de probabilidade.

Nos PCN (BRASIL, 1997) são apresentados, ainda, os conteúdos conceituais e procedimentais relativos à probabilidade (ibid., p. 61):

- Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.

Vemos que nesta etapa de escolarização as crianças são estimuladas a realizar as experimentações e elencar todos os resultados obtidos, todas as possibilidades. Isso aponta para o quanto a experimentação é importante nesta fase, uma vez que a observação da ocorrência dos acontecimentos é possível por meio de uma grande quantidade de experiências.

Já para os anos finais, amplia-se essa recomendação, pois além de ser possível apontar presumíveis resultados de eventos, afirma-se também nos PCN (BRASIL, 1998, p.52) que é possível “[...] estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles”. Além disso:

Neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana. (ibid., p.70).

Vemos o quanto o estudo de probabilidade é apresentado como ferramenta que torna possível quantificar possíveis resultados do lançamento de moedas e dados, bem como de prever possibilidades de sair alguma carta de um baralho. A partir desses exemplos práticos e

de fácil acesso apontados no documento, afirma-se que os estudantes conseguirão acostumar-se com a probabilidade, dentro da Matemática, e sua relevância para previsões de acontecimentos do cotidiano.

Afirma-se, ainda, que os conteúdos que compõem o bloco Tratamento da Informação proporcionam aos alunos o estabelecimento de relações entre a matemática e conteúdos de outras áreas de conhecimento, bem como os temas transversais, “à medida que o aluno os perceba como instrumentos essenciais para a constituição de uma atitude crítica diante de questões sociais, políticas, culturais, científicas da atualidade” (ibid., p. 70). Isso aponta para uma preocupação em formar um cidadão crítico. Ao tratar do entendimento de probabilidade, Santana (2011, p. 12) afirma que:

O entendimento de probabilidade requer pensamento elaborado de análise de situações, levantamento de possibilidades e julgamento do que seja provável, improvável e impossível. Nesse sentido, o ensino da probabilidade pode promover o desenvolvimento da capacidade crítica e da autonomia [...].

Vemos, assim, a relevância do ensino da probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental para esse desenvolvimento crítico indicado nos PCN e reafirmado por Santana (2011).

Um dos objetivos dessa etapa de escolarização é o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, mediante exploração de situações que oportunizem aos alunos “resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão” (ibid., p. 65), bem como de “construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos” (ibid., p. 82). Assim, a utilização da combinatória é importante em algumas situações para o estudo de probabilidade, o que confirma a justificativa de esses temas estarem em um mesmo bloco de conteúdo.

Apresentou-se, ainda, a finalidade do estudo de probabilidade neste ciclo:

O estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão. (ibid., p. 86).

Para isso, os PCN (BRASIL, 1998, p. 90) apontam dois conceitos e procedimentos matemáticos para o estudo de probabilidade nos anos finais do ensino fundamental:

- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.

- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

Para esses conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos pelos alunos, são sugeridas algumas orientações didáticas para auxiliar o professor. A primeira é a de que, nesta fase de estudo, “a noção de probabilidade continua a ser explorada de maneira informal, por meio de investigações que levem os alunos a fazer algumas previsões a respeito do sucesso de um evento” (ibid., p.137). Outras orientações, apresentadas na mesma página, são:

Para ampliar a noção de probabilidade pode-se partir de uma situação como: em 10 lançamentos de uma moeda deu 9 vezes cara, ou seja, 90% dos lançamentos. A partir dessa afirmação é possível explorar as seguintes situações: se a moeda for lançada mais 10 vezes, é provável que essa porcentagem se repita? e se o número de lançamentos for 1.000? ou 10.000? Qual é a porcentagem que deve dar em cada caso? As respostas dos alunos evidenciam sua intuição a respeito de algumas ideias envolvidas na probabilidade e favorecem um trabalho de familiarização com esse assunto. É importante que eles descubram, pela experimentação, que as chances de cada resultado ser igual – 50% – deve-se à simetria da moeda e sua homogeneidade (moeda honesta).

Com esse trabalho espera-se que o aluno também perceba que ele poderia ter lançado uma moeda 15 vezes obtendo nesses lançamentos 15 caras. Mas, mesmo que isso tivesse acontecido – o que é bem difícil – no 16º lançamento, a chance de obter cara continua sendo a mesma de obter coroa e que a “disparidade” entre os resultados de cara e de coroa tendem a diminuir conforme se amplia o número de experimentos. (ibid., p.137).

Na realização de experimentos para a determinação de probabilidades de eventos, sugere-se, ainda, a utilização de materiais concretos que possibilitem a manipulação e exploração da ideia de simetria (ou equiprobabilidade), tais como dados de seis faces, moedas, bem como materiais que não apresentam simetria, como roletas com áreas desiguais. Com essas sugestões e exemplos de situações, várias discussões poderiam ser levantadas pelos alunos e professores, com diversas noções relativas à probabilidade. É interessante como em apenas uma situação – lançamentos de uma moeda – é possível explorar tantos conceitos, como o de possibilidades, chance, porcentagem, razão, homogeneidade da moeda (moeda honesta), etc. Além disso, as ideias intuitiva e frequentista de probabilidade estão sendo levadas em consideração ao tratar de diversos lançamentos da moeda.

Ademais, no estudo de probabilidade, afirma-se que:

[...] os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore. Desse modo, será possível indicar o sucesso de um evento utilizando-se de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 90 e 91).

Além dos diversos conceitos relacionados ao estudo de probabilidade, vemos que em algumas ocasiões para obtermos a probabilidade desejada será preciso utilizar noções da combinatória para a elaboração do espaço amostral, uma vez que o princípio multiplicativo, tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore são técnicas fundamentais do estudo da combinatória. Isso reforça, mais uma vez, a razão de a combinatória e a probabilidade estarem no mesmo bloco de conteúdo, como também explica Borba (2017, p. 88):

[...] há uma estreita relação entre a Combinatória e a Probabilidade, pois, para o cálculo de uma probabilidade, é preciso pensar nas possibilidades de eventos – o que se dá por meio de levantamento, via raciocínio combinatório, do espaço amostral da situação. A partir do levantamento de possibilidades (por meio de raciocínio combinatório) pode-se levantar o espaço amostral e a partir dele se pode definir a probabilidade de ocorrência de um determinado evento.

Diante desta afirmativa, também consideramos a estreita relação entre combinatória e probabilidade, visto que para determinar o espaço amostral de um experimento aleatório são necessárias ferramentas da combinatória para esta elaboração. Após a realização desta etapa pode-se, então, realizar a quantificação de probabilidades de eventos.

Observa-se a partir desses documentos, que nos anos iniciais do ensino fundamental o estudo das noções de probabilidade foca na forma intuitiva de observar e escrever todas as possibilidades de ocorrência de algum evento e, também, as concepções clássica e frequentista de probabilidade, ao afirmarem a importância de propor situações equiprováveis e, em outras ocasiões, a observação de frequências de experimentos para o desenvolvimento de primeiras noções de probabilidade.

Já nos anos finais, a probabilidade pode ser apresentada como uma razão entre dois números, um modelo matemático, ampliando novamente as ideias estudadas nos anos anteriores. Então, nesta etapa pode ser proposto o estudo de quantificar probabilidades e esta quantificação ser apresentada por meio de um modelo matemático. Novamente consideram-se as concepções intuitiva, clássica e frequentista para esse estudo. Vemos, assim, que nessas duas etapas da escolarização básica não são consideradas as concepções subjetiva, axiomática e geométrica de probabilidade, o que não nos parece um problema visto que são concepções complexas para serem tratadas nesta etapa de escolarização.

Passamos, agora, para as discussões e orientações presentes no Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC).

1.2.1 Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa

O PNAIC foi implementado no início do ano de 2013 e, objetivando a garantia da alfabetização de todas as crianças até os oito anos de idade, o governo aportou alguns incentivos para tal meta (não entraremos em detalhes quanto a isso). No ano de 2014 divulgou-se o Caderno 07 (Educação Estatística) cujo objetivo foi “apresentar a Educação Estatística, fornecendo ao professor elementos que permitam o planejamento de práticas pedagógicas que auxiliem a criança a reconhecer e produzir informações, em diversas situações e diferentes configurações” (BRASIL, 2014, p. 5). Neste caderno encontramos, então, discussões importantes quanto ao ensino de probabilidade nos anos iniciais de alfabetização.

Quanto ao raciocínio probabilístico, afirma-se que “embora no ciclo de alfabetização não precise ser sistematizado, pode ser iniciado a partir de situações lúdicas desenvolvendo conceitos simples, auxiliando a criança a identificar eventos com maior ou menor chance de ocorrer” (ibid., p.5). Nesta etapa de escolarização, o PNAIC aponta a relevância de desenvolver nas crianças as habilidades de reconhecer e distinguir situações determinísticas e probabilísticas, bem como de identificar a maior ou menor chance de um acontecimento acontecer.

Outro ponto de discussão presente neste documento é quanto ao cenário histórico da Educação Estatística no Brasil:

Antes da década de 80, a Estatística e assuntos correlatos, como probabilidade e a análise combinatória, eram propostos apenas para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. No entanto, devido à importância destes conceitos para o exercício da cidadania, e estudos da área da Psicologia que apontam a possibilidade de poderem ser trabalhados com crianças menores, indica-se a inserção da Educação Estatística já nos anos iniciais. (BRASIL, 2014, p.7).

Essa discussão corrobora com o que foi observado anteriormente nos PCN, ao apresentar o movimento de reforma dos currículos em diversos lugares do mundo e a necessidade de inserção da estatística nesse novo documento curricular. O PNAIC não só complementa essa discussão, como também afirma a relevância de trabalhar essa temática desde os anos iniciais.

Assinala-se, ainda, que atividades e até jogos como lançamento de dados, “bingo, cara ou coroa, entre outros, são experimentos nos quais não é possível determinar com certeza o resultado que será obtido, ou seja, são aleatórios, também denominados não determinísticos” (BRASIL, 2014, v. 3, p. 51). Essas atividades e jogos auxiliam, então, para a compreensão da noção de aleatoriedade e suas consequências. Alguns exemplos práticos de atividade probabilísticas são apresentados e discutidos brevemente no documento.

Além disso, o PNAIC afirma que “é importante desenvolver, pouco a pouco, com as crianças a ideia de mais ou menos chance, de **espaço amostral**, assim como de esquemas para o mapeamento das possibilidades” (BRASIL, 2014, v.7, p. 56, grifo nosso). Para tal, é apresentada a árvore de possibilidades como uma possível ferramenta para a elaboração do total de possibilidades nas situações. O PNAIC (BRASIL, 2014) complementa afirmando a necessidade de haver um trabalho voltado para a experimentação e observação de eventos em acontecimento aleatórios.

Para finalizar, este documento apresenta alguns exemplos de como trabalhar ideias relacionadas ao estudo de probabilidade no cotidiano de sala de aula. Um deles é realizar sorteios quando forem propostos jogos, o ajudante do dia, ou outras situações. Outro exemplo é em atividades de contagens de eventos em experimentos aleatórios.

Dando sequência às discussões, passamos agora para os achados na Base Nacional Comum Curricular.

1.2.3 Base Nacional Comum Curricular

A BNCC foi homologada pelo ministro da Educação no dia 20 de dezembro de 2017. Passou por um processo de revisões que gerou duas versões anteriores à versão final. Com esse documento, “redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passam a ter uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação de seus currículos e propostas pedagógicas” (BRASIL, 2017, p. 5). Além disso, a BNCC “é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” (ibid., p. 7, grifo do texto).

Nesta versão final, encontramos o detalhamento para as fases de educação infantil e ensino fundamental, uma vez que o documento relativo ao ensino médio ainda não está aprovado até o momento da redação desse texto. No documento já aprovado e divulgado há seções para cada área do conhecimento da etapa do ensino fundamental. Na seção separada para a área de Matemática encontramos na parte introdutória, a seguinte afirmação: “a Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também **estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório**” (BRASIL, 2017, p. 263, grifo nosso). Com essa primeira afirmação já podemos encontrar referência ao estudo de probabilidade, ao indicar o estudo da incerteza visto em “fenômenos de caráter aleatório”, o

que mostra que a preocupação com o ensino deste conjunto de noções continua fazendo parte dos documentos curriculares publicados em nosso país.

A BNCC (ibid., p. 230, grifo do texto) indica que a “ incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática **Probabilidade e estatística**. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia”. Além disso, quanto ao estudo de conceitos de probabilidade, a finalidade para os anos iniciais de escolarização “é promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos” (ibid., p. 272), reafirmando a intenção apresentada do documento discutido anteriormente. Para isso:

[...] o início da proposta de trabalho com probabilidade está centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis. É muito comum que pessoas julguem impossíveis eventos que nunca viram acontecer. Nessa fase, é importante que os alunos verbalizem, em eventos que envolvem o acaso, os resultados que poderiam ter acontecido em oposição ao que realmente aconteceu, iniciando a construção do espaço amostral. (ibid., p. 272).

Observa-se que para essa primeira etapa de escolarização é proposto o estudo de probabilidade inicialmente com a compreensão de aleatoriedade e, em seguida, com a elaboração do espaço amostral.

Nos anos finais, essas noções devem ser ampliadas e aprofundadas:

[...] por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica – probabilidade frequentista. A progressão dos conhecimentos se faz pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, que está associada, também, aos problemas de contagem. (BRASIL, 2017, p. 272).

Neste documento enfatiza-se o estudo de probabilidade frequentista para os anos finais do ensino fundamental, diferentemente do que é apresentado nos PCN (BRASIL, 1997). Além disso, para a elaboração do espaço amostral, destaca-se a utilização de elementos da combinatória, ao associar o espaço amostral à problemas de contagem. Quanto a isso, vemos que neste documento a combinatória é considerada como parte do eixo números e operações e a habilidade a ser desenvolvida no quinto ano quanto a esse estudo é:

Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas. (BRASIL, 2017, p. 293).

Para os demais anos, não encontramos outras habilidades envolvendo a combinatória. O que encontramos no restante do documento são os objetos de conhecimento para cada ano, e as habilidades a serem desenvolvidas nos alunos. No Quadro 1 trazemos apenas os elementos referentes ao estudo de probabilidade para os anos iniciais do ensino fundamental:

Quadro 1: Objetos de conhecimento e habilidades para os anos iniciais do ensino fundamental

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º	Noção de acaso.	Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.
2º	Análise da ideia de aleatório em situações do cotidiano.	Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”.
3º	Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral.	Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
4º	Análise de chances de eventos aleatórios.	Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
5º	Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios. Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.	Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não. Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Fonte: Dados obtidos a partir da BNCC (Brasil, 2017, p. 278-295)

A compreensão de acaso e aleatoriedade são as primeiras noções apontadas para o estudo inicial de probabilidade. Até o quarto ano de escolaridade vemos que as crianças serão estimuladas a familiarizarem-se com essas noções, classificando situações intuitivamente, sem o uso da fração para representar a probabilidade de eventos. Talvez, nesses anos de escolarização, a probabilidade intuitiva esteja sendo levado em consideração para o desenvolvimento das habilidades apresentadas no documento. No quinto ano, além de elaborar o espaço amostral, já deve ser trabalhada a comparação e quantificação de probabilidades de eventos. Nesta etapa apenas a concepção clássica de probabilidade está sendo considerada, uma vez que se objetiva a quantificação de probabilidades de eventos equiprováveis. Com isso, vemos que as primeiras noções de probabilidade frequentista não estão sendo apontadas como

objetivos para o estudo de probabilidade o que vai de encontro às orientações apresentadas nos PCN (BRASIL, 1997).

No Quadro 2 trazemos os elementos referentes ao estudo de probabilidade para os anos finais do ensino fundamental:

Quadro 2: Objetos de conhecimento e habilidades para os anos finais do ensino fundamental

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
6º	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
7º	Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências.	Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
8º	Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.	Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes.	Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: Dados obtidos a partir da BNCC (BRASIL, 2017, p. 298-317)

Como continuidade do estudo de probabilidade para o ensino fundamental, a partir do sexto ano propõe-se o estudo da visão clássica, em que a quantificação da probabilidade pode ser na forma fracionária, decimal ou percentual, e da visão frequentista por meio de experimentos sucessivos. Para o ano seguinte, a proposta é voltada principalmente para a realização de experimentos e quantificação de probabilidade por meio da observação das frequências de ocorrências. Para o oitavo ano, volta o trabalho em relação à elaboração do espaço amostral e se objetiva o princípio multiplicativo como ferramenta para tal elaboração. Já para o último ano do ensino fundamental, objetiva-se o estudo das relações entre eventos. Vemos, então, que para os anos finais do ensino fundamental estão sendo consideradas as visões clássica e frequentista de probabilidade, em detrimento das visões subjetiva, intuitiva e axiomática.

Essas são as poucas ocasiões em que se fala do estudo de probabilidade neste documento. São indicados objetivos e habilidades a serem desenvolvidas em cada ano de escolarização. Por fim, observamos que com esse novo documento há modificações que consideramos importante conhecer, principalmente em relação à nossa temática de investigação.

A seguir, apresentamos orientações e discussões para o estudo de probabilidade no ensino médio presentes em documentos curriculares oficiais brasileiros.

1.3 PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

Para o detalhamento das propostas e objetivos do ensino de probabilidade para o ensino médio, trazemos os Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM), as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM).

1.3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio

Nos PCNEM, divulgados em 2000, são descritas as competências e habilidades de cada área do saber, bem como os conhecimentos a serem desenvolvidos nessa fase de educação básica. A matemática está presente na área intitulada *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* que, dentre outras finalidades, visa o desenvolvimento de habilidades e competências que possibilitem ao aluno “compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades” (BRASIL, 2000, v.1, p. 95).

As capacidades de descrição e análise de uma enorme quantidade de informações, a realização de deduções, a aplicação de elementos de probabilidade e combinatória em acontecimentos naturais e do habitual são aplicações da Matemática em demandas do mundo real que tem crescido muito, tornaram-se cada vez mais complexas (BRASIL, 2000). Quando se fala do movimento que tem crescido relativo às aplicações dos conhecimentos probabilísticos em nosso cotidiano, vemos que isso requer o desenvolvimento de habilidades que permitam aos estudantes realizar a análise das situações e também a capacidade de buscar por possíveis resultados desses casos.

Vemos, ainda, que nesta última etapa da educação básica as noções de probabilidade serão ainda mais úteis para outras ciências e áreas do saber, conforme as seguintes afirmações:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as

ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.

Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. (BRASIL, 2000, p. 44 e 45).

Vemos, aqui, um discurso a respeito da importância de uma abordagem cautelosa no estudo de probabilidade e outros conteúdos da Estatística no ensino médio, visto que se destacam não só nas Ciências da Natureza como também nas Ciências Humanas.

Essas foram as discussões quanto ao estudo de probabilidade que encontramos nos PCNEM. Nesse documento não encontramos orientações de possíveis abordagens didáticas para o trabalho de probabilidade. Também não são discutidas as possíveis concepções de probabilidade (intuitiva, clássica, frequentista, subjetiva, axiomática e geométrica) a serem trabalhadas no ensino médio.

1.3.2 Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCN+ reafirmam que a estatística e a probabilidade necessitam serem tomadas como um campo de conceitos e procedimentos que possibilitam a aplicação da matemática na vida real, auxiliando na quantificação e interpretação de informações que não podem ser calculadas imediatamente. E, também, que noções de combinatória, que será chamada de *raciocínio combinatório*, serão tomadas como ferramentas quando necessário em algumas situações de cálculo do total de possibilidades (espaço amostral), (BRASIL, 2002).

Um apontamento que se deve levar em consideração no estudo de probabilidade, é que esta:

[...] acena com resultados possíveis, mas não exatos. Ao afirmar que o resultado 1 tem $1/6$ de probabilidade no lançamento de um dado, não há certeza de que em seis lançamentos do dado o número 1 sairá exatamente uma vez. Assim como ao afirmarmos que determinado tratamento médico tem 90% de probabilidade de cura para uma doença, não garante que em um grupo de 10 pessoas submetidas a este tratamento exatamente uma pessoa continuará doente. (ibid., p. 126).

Essas são importantes discussões no desenvolvimento do pensamento probabilístico dos estudantes, principalmente ao tratarmos de questões reais. O estudo de probabilidade firma-se

no contexto de acaso e as previsões de possíveis resultados dos acontecimentos aleatórios não se tratam de resultado exatos.

Os PCN+ apontam, ainda, que no estudo de probabilidade os conteúdos propostos são as possibilidades e o cálculo de probabilidades, que visam o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades. (BRASIL, 2002, p. 127 e 128).

A primeira habilidade destacada remete à compreensão da aleatoriedade em nossa vida cotidiana, bem como o papel importante da probabilidade como ferramenta de previsão de resultados. Em seguida fala-se da habilidade relativa à quantificação de probabilidades em diferentes áreas do conhecimento ou do cotidiano e, por fim, o desenvolvimento da habilidade de identificar utilização da estatística e probabilidade em outras áreas além da matemática, assim como afirmado no documento anterior. Esses foram os pontos apresentados dos PCN+ quanto ao estudo de probabilidade. Novamente não se destaca possíveis abordagem deste conteúdo, bem como quais visões de probabilidade são mais relevantes de serem trabalhadas nesta etapa de escolarização básica.

A seguir apresentamos as discussões presentes nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM).

1.3.3 Orientações Curriculares para o Ensino Médio

As OCEM foram publicadas com o objetivo de apresentar orientações que contribuíssem para a relação entre professor e escola a respeito da prática docente (BRASIL, 2006). Assim como nos PCNEM e PCN+, a matemática segue fazendo parte da área de *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. A probabilidade é trazida como parte do bloco de conteúdos chamado de *Análise de dados e probabilidade*, que é apontada como uma recomendação a educação básica, especialmente ao ensino médio, pela razão de sua aplicação prática ao nosso cotidiano, justificando, essa, que já foi observada nos documentos curriculares discutidos anteriormente.

Algumas orientações bem específicas ao estudo de probabilidade não poderiam deixar de ser citadas neste trabalho, pois mostram o que esses documentos tomam como noções

essenciais no estudo deste tema. Estes indicam que “o estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas” (BRASIL, 2006, p. 79), assim como apontado nos demais documentos e reforçando, novamente, a estreita relação entre combinatória e probabilidade. Ademais, afirma-se que:

Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à **chance, incerteza e probabilidade**, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma **medida de incerteza**, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance.

Nas situações e nas **experiências aleatórias**, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar **hipóteses de equiprobabilidade**, associar a estatística dos resultados observados e as **frequências dos eventos correspondentes**, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado. [grifos nossos] (BRASIL, 2006, p. 79 e 80).

Vemos acima alguns dos principais assuntos apontados pelas OCEM como importantes de serem tratados no ensino médio, no estudo de probabilidade, e o papel relevante que a estatística irá assumir em algumas ocasiões nesse estudo. As visões clássica e frequentista de probabilidade também são indicadas neste documento, assim como a importância de compreender conceitos relativos à incerteza, chance e probabilidade. As demais concepções de probabilidade (intuitiva, subjetiva, axiomática e geométrica) não são referidas neste documento.

Essas foram as discussões apresentadas nos três documentos destinados ao ensino médio brasileiro. Com elas, tivemos uma noção quanto às orientações para o ensino de probabilidade, o que foi muito importante para compreendermos a relevância do estudo de probabilidade ao longo da educação básica.

Ainda quanto ao ensino de probabilidade, entendemos que:

Diferente do ensino de Matemática, que é, de acordo com Corrêa (2010, p.9) caracterizada por uma visão determinista em um enfoque formal, a Probabilidade se desenvolve em diferentes perspectivas dialeticamente conectadas; e restringi-la “a uma única abordagem não contribui para a aquisição de uma forma de pensar diferente da lógica dicotômica do sim/não, na qual preside incerteza, campo intermediário onde atua a probabilidade”. Dessa forma, entendemos que a visão determinista da Matemática se torna um entrave para o ensino de Probabilidade. A probabilidade é um conceito que pode ser meio de diferentes enfoques, como o clássico (laplaciano), o geométrico, o frequentista e o bayesiano (subjetivo). (CORRÊA, 2010 *apud* BITTAR, ABE, 2013, p. 99 e 100 *in* COUTINHO, 2013).

Nesse sentido, acordamos com Bittar e Abe (2013) ao afirmarem que a articulação de mais de uma visão de probabilidade deva ser trabalhada com os estudantes, visto que essas articulações possibilitam a construção de um conjunto de conceitos relativos à probabilidade.

No capítulo a seguir, apresentamos a nosso referencial teórico e metodológico utilizado para a análise das coleções, bem como algumas pesquisas envolvendo a análise de livros didáticos utilizando este referencial, em especial, o modelo sistematizado por Bittar (2017) com base neste referencial.

2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo trazemos os principais elementos teóricos e metodológicos escolhidos para a análise dos dados produzidos. Em seguida, apresentamos pesquisas envolvendo análise de livros à luz deste aporte teórico e metodológico.

2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD): PRINCIPAIS ELEMENTOS

A TAD surge com o objetivo de oportunizar ao pesquisador o estudo da atividade matemática, uma vez que com suas ferramentas nos permite compreender, dentre outras questões que não entraremos em detalhes, aspectos do processo de ensino e aprendizagem do saber.

Segundo Chevallard (1989) um saber não existe num vazio social, estando então ligado a pelo menos uma instituição. Assim, há certas “condições e restrições que devem ser respeitadas para que um certo saber possa existir nesta instituição” (BITTAR, 2017, p. 366). A escola pode ser considerada uma instituição por ser um dispositivo social que impõe condições e regras para aqueles que ocupam alguma função nessa instituição, como o professor e o aluno. Em nossa pesquisa vamos considerar o livro didático (LD) como um representante da instituição editora, uma vez que ele traz intenções da editora.

Chevallard (1999) estabelece alguns pressupostos fundamentais que permitem o estudo da atividade matemática. O primeiro deles é que a TAD estabelece a atividade matemática “no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais” (CHEVALLARD, 1999, p. 2). Para este autor, toda atividade humana, inclusive a atividade matemática, realizada com uma certa regularidade pode ser descrita como um modelo, que recebe o nome de *praxeologia* ou *organização praxeológica*. Esse modelo é composto por alguns elementos, que descrevemos a seguir.

O tipo de tarefas (T) é o conjunto de tarefas de um mesmo tipo e é sempre expressa por um verbo de ação. Por exemplo: *escrever o total de possibilidades da ocorrência de um acontecimento mediante um determinado experimento* é um tipo de tarefa que encontramos no estudo de probabilidade. Nela poderiam estar incluídas as tarefas: *escrever todas as possibilidades de se obter a soma seis ao jogar dois dados de seis faces; escrever todas as possibilidades de se obter a soma sete ao jogar dois dados de seis faces*, dentre outras.

A técnica (τ) é a maneira apresentada para resolver uma (ou mais) tarefa (s). Por exemplo: *listar todas as possibilidades de soma de dois dados de seis faces e circular as que deram a soma desejada* é uma técnica para resolver o tipo de tarefa modelado acima. A

tecnologia (θ) é o argumento apresentado para validar a técnica apresentada. Já a teoria (Θ) é uma argumentação mais ampla para justificar a tecnologia, como as grandes teorias da matemática. Por exemplo, a Teoria das Probabilidades pode validar as tecnologias apresentadas na organização praxeológica para o estudo de probabilidade.

Do quarteto $[T, \tau, \theta, \Theta]$ temos o bloco $[T, \tau]$ chamado de *prático-técnico* relativo ao “saber-fazer”, e o bloco $[\theta, \Theta]$ chamado *tecnológico-teórico* relativo ao “saber”. Quanto ao segundo bloco, Gonçalves (2016, p. 60 e 61) pontua que:

Tradicionalmente, a função de justificação é mais utilizada do que a função de explicação, devido ao caráter axiomático da Matemática. Esses discursos podem ser mais formais dependendo da instituição, pois há possibilidade de existirem técnicas “autotecnológicas”. Essas técnicas são aceitas como uma boa maneira de realizar a tarefa, sem necessidade de serem justificadas. Por serem aceitas de forma natural, os discursos tecnológicos são deixados para as técnicas mais elaboradas, pois essas técnicas se justificam por si mesmas.

Para o estudo da atividade matemática, além desses elementos, outros dois são essenciais:

Nós falaremos de *objeto ostensivo* [...] para nos referirmos a todo objeto tendo uma natureza sensível, uma certa materialidade, e que, por isso, adquire para o ser humano uma realidade perceptível. Esse é o caso de um objeto material qualquer e, notadamente, de objetos materiais particulares que são os sons [...], os grafismos [...] e os gestos. Os objetos *não ostensivos* são então todos os “objetos” que, como as ideias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido em que lhe atribuímos uma existência – sem, entretanto, poderem ser vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por si mesmos: eles só podem ser *evocados* ou *invocados* pela manipulação adequada de certos *objetos ostensivos* associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou um longo discurso). (BOSCH E CHEVALLARD, 1999, p.10, tradução nossa).

A TAD nos possibilita, assim, modelar e analisar os ostensivos e não ostensivos presentes na atividade matemática proposta pelo (s) autor (es) nas coleções de livros didáticos.

Bittar, Freitas e Pais (2014, p. 384) reforçam que a “análise de livros didáticos e de outras fontes de referência da educação matemática escolar permite a identificação de elementos praxeológicos, envolvendo tanto a dimensão matemática como a didática”. Chevallard (1999) nomeia a dimensão matemática, isto é, o estudo em torno da matemática presente na instituição, de *organização matemática (OM)* ou *praxeologia matemática*, e a dimensão didática, isto é, as escolhas didáticas do (s) autor (es) para apresentar a OM de *organização didática (OD)* ou *praxeologia didática*.

Temos, assim, a praxeologia matemática (ou organização matemática – OM) e a praxeologia didática que permitem descrever, respectivamente, escolhas matemáticas e didáticas em uma determinada instituição. É importante

salientar que a identificação, em duas instituições distintas, de uma mesma OM, porém com duas OD diferentes, indica que o processo de aprendizagem relativo a essa praxeologia matemática não será o mesmo [...]. (BITTAR, 2017, p. 369).

As organizações didáticas além de serem organizadas por meio do quarteto, também podem ser descritas por meio dos *momentos de estudo* ou *momentos didáticos*, propostos por Chevallard (1999), que foram resumidos a seguir e exemplificados com alguns dos resultados que encontramos em nossa produção e análise de dados.

São seis os momentos didáticos descritos por Chevallard (1999). O *primeiro momento* é o *primeiro encontro com a organização praxeológica* proposta. Nesse momento poderiam ser feitas as seguintes perguntas, relacionando ao nosso tema: O que encontramos em um primeiro contato com a organização matemática relativa ao estudo de probabilidade? Qual o primeiro tipo de tarefa apresentado? Isso pode ocorrer de diversas formas como, por exemplo, em uma contextualização que apresente alguns elementos da organização praxeológica. A TAD pressupõe o reencontro dessa praxeologia quando o objeto matemático comumente é retomado ao longo do estudo, sendo ampliado/aprofundado ou trazido em outros contextos. Na proposta de ensino de probabilidade em um dos volumes analisados, por exemplo, o primeiro encontro com a praxeologia proposta foi feito da seguinte forma:

Fração e probabilidade

1 Se você retirasse, sem olhar, uma bola do vidro ao lado, a chance maior seria a de pegar uma bola vermelha ou uma bola azul? Por quê? Converse com os colegas.
Vermelha, porque nesse vidro há mais bolas vermelhas do que azuis.

A medida da chance, chamada **probabilidade**, muitas vezes pode ser indicada por uma fração.

Como há um total de 5 bolas e 3 delas são vermelhas, a **probabilidade** de retirar, sem olhar, uma bola vermelha é de **3 em 5** ou $\frac{3}{5}$.

No caderno, indique com uma fração a probabilidade de retirar uma bola azul.
 $\frac{2}{5}$ (2 em 5)

Figura 1: Exemplo de primeiro encontro com a praxeologia proposta para o ensino de probabilidade
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 147

Esse é o primeiro encontro com a praxeologia proposta no volume destinado ao quinto ano do ensino fundamental. Destacamos em verde, azul, vermelho e roxo alguns elementos desse momento. Vemos que primeiramente foi proposta uma situação para que a criança resolva, em

que se contextualizou uma situação de retirada de bolas azuis e vermelhas de um recipiente de vidro. Espera-se que a criança perceba que como há mais bolas vermelhas do que azuis, ao se deparar com a questão proposta, seja respondido que há maior chance de ser retirada, ao acaso, uma bola vermelha do recipiente. Em seguida, definiu-se a medida de chance como sendo probabilidade e apresentou-se o ostensivo *fração* para indicar essa medida. Logo abaixo apresentou-se uma técnica para realizar o cálculo da probabilidade da situação proposta e, por fim, uma tarefa para que a criança determina outra probabilidade utilizando a técnica proposta. Esse é um pequeno exemplo de *primeiro momento* identificado nas análises das coleções. Aqui não iremos detalhar como modelamos as tarefas e técnicas propostas nessa situação, visto que isso foi feito no capítulo de análise das coleções destinadas aos anos iniciais do ensino fundamental.

O *segundo momento* é o da *exploração do tipo de tarefas T_i e da elaboração de uma técnica t_i* para esse tipo de tarefas. Diante da primeira situação apresentada, trata-se da elaboração de uma forma de resolver tal situação. Tal elaboração é considerada por Chevallard o ponto central da atividade matemática, pois o estudo e a resolução de uma situação-problema de um certo tipo estão sempre ligados à constituição de ao menos um pequeno conjunto de técnicas, onde uma técnica pode se destacar das demais;

[...] o estudo de um problema *particular*, espécime de um tipo estudado, apareceria assim não como um fim em si mesmo, senão como um *meio* para a constituição de uma técnica de resolução. Trama-se assim uma dialética fundamental: estudar problemas é um meio que permite criar e implementar uma técnica relativa aos problemas do mesmo tipo, técnica que será então o meio para resolver de maneira quase rotineira os problemas deste tipo. (CHEVALLARD, 1999, p. 24, tradução nossa).

Como no exemplo apresentado na Figura 1, uma primeira tarefa proposta foi modelada como sendo *Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento*. Isso porque no contexto de retirada ao acaso de bolas vermelhas ou azuis, a questão proposta para a criança foi: “a chance maior seria de pegar uma bola vermelha ou uma bola azul?”. A técnica identificada e modelado foi *Associar os eventos específicos à maior chance de ocorrência quando tiver a maior quantidade de elementos*. Assim, ao perceber que há mais bolas vermelhas, espera-se que a criança responda que há maior chance de pegar, ao acaso, uma bola vermelha.

O *terceiro momento* é o da *constituição do entorno tecnológico -teórico $[\theta, \Theta]$* relativo à técnica t_i elaborada. Esse momento se inter-relaciona a cada um dos momentos, pois percebe-se que na elaboração de tipo de tarefas e técnicas para sua resolução, já se tem um entorno

tecnológico- teórico elaborado. “Em algumas abordagens, esse momento é trabalhado de forma a iniciar os estudos da praxeologia, isto é, apresentam-se as justificativas, para então, estudar os tipos de tarefas que podem ser subsidiados por esse entorno tecnológico-teórico” (GONÇALVES, 2016, p. 62). Em nossa análise, por exemplo, identificamos esse momento no volume destinado ao segundo ano do ensino médio, conforme vemos no Figura 2:

Definimos teoricamente probabilidade como uma função que associa a cada evento A um número $p(A)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1ª) P_1 : $0 \leq p(A) \leq 1$ para todo evento A
 2ª) P_2 : Se Ω é o espaço amostral, então $p(\Omega) = 1$
 3ª) P_3 : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, quando $A \cap B = \emptyset$ (eventos mutuamente exclusivos)

Figura 2: Exemplo de constituição do entorno tecnológico-teórico na proposta de ensino de probabilidade

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 238

Nesse breve exemplo, vemos uma definição de probabilidade e três propriedades apresentadas na etapa de ensino médio que não havia nas coleções destinadas aos anos iniciais e finais do ensino fundamenta. No capítulo em que apresentamos mais detalhadamente essa situação, percebe-se que tais propriedades foram demonstradas e com isso é possível compreender o uso de algumas técnicas que haviam sido modeladas em volumes anteriores aos volumes do ensino médio. Esse é um pequeno elemento presente no entorno tecnológico-teórico proposto em tal coleção.

O *quarto momento* “é o do *trabalho da técnica*, que deve ao mesmo tempo melhorar a técnica tornando-a mais eficaz e mais confiável (o que geralmente exige retomar a tecnologia elaborada até então), e ampliar o domínio que temos dela [...]” (CHEVALLARD, 1999, p.25, tradução nossa). Nesse momento é testado o alcance das técnicas mediante suas respectivas tarefas. Na produção e análise de dados relativa à proposta de ensino de probabilidade, observamos este momento em seções de *Exercícios propostos*. Nessas seções, propõe-se atividades para que os estudantes resolvam utilizando as técnicas já apresentados ou, em algumas ocasiões, era necessário que o aluno buscasse uma estratégia pessoal de resolução.

O *quinto momento* é o da *institucionalização*, que objetiva a formalização da organização matemática proposta, mediante a clara distinção dos elementos que farão e aqueles que não farão parte em definitivo da organização matemática. Assim, são apresentadas as definições, os procedimentos e os algoritmos que fazem parte do conteúdo proposto. Na Figura 1, que vimos a pouco, um exemplo de institucionalização é visto quando probabilidade é definida como “medida de chance” no volume destinado ao quinto ano. Assim como foi

apresentado o ostensivo fração (ou razão) como uma maneira de indicar (determinar) a probabilidade.

Por fim, o *sexto momento* é o da *avaliação* da organização praxeológica, articulado com o momento da institucionalização. Neste momento buscamos compreender “quanto vale, de fato, a organização matemática que foi construída e institucionalizada?” (CHEVALLARD, 1999, p.26.). Trata-se de um momento que “permite relançar o estudo, provocar a substituição deste ou daquele momento, e talvez de todo o percurso didático” (ibid., p. 26). É o momento de refletir, verificar e examinar o que foi estudado até então. Esse momento foi identificado no volume destinado ao quinto ano do ensino fundamental em uma seção intitulada *O que estudamos*, em que vemos uma espécie reflexão sobre o que foi estudo naquele capítulo, como vemos na figura abaixo:

The figure consists of four rounded rectangular boxes arranged in a 2x2 grid, each containing a title and a list of mathematical concepts or operations.

- Top-left box:** Titled "Vimos como ler frações." (We saw how to read fractions). It lists:
 - $\frac{1}{5}$; um quinto
 - $\frac{2}{15}$; dois quinze avos
 - $\frac{9}{10}$; nove décimos
- Top-right box:** Titled " Fizemos comparação de frações e efetuamos operações com frações." (We did comparison of fractions and performed operations with fractions). It lists:
 - $\frac{3}{7} < \frac{5}{7}$
 - $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$
- Bottom-left box:** Titled "Vimos que porcentagem corresponde a uma fração de denominador 100 ou outra equivalente a ela." (We saw that percentage corresponds to a fraction with denominator 100 or another equivalent to it). It lists:
 - 40% corresponde a $\frac{40}{100}$ ou $\frac{2}{5}$ ($\frac{40}{100} \div 20 = \frac{2}{5}$)
 - $\frac{1}{4}$ corresponde a 25% ($\frac{1}{4} \times 25 = \frac{25}{100} = 25\%$)
- Bottom-right box:** Titled "Trabalhamos com a noção de probabilidade, que é a medida da chance. Ela pode ser indicada por uma fração ou uma porcentagem." (We worked with the notion of probability, which is the measure of chance. It can be indicated by a fraction or a percentage). It lists:
 - Sorteando uma letra da palavra TIGRE, a probabilidade de sair uma vogal é de 2 em 5 ou $\frac{2}{5}$ ou 40%.

Figura 3: Exemplo de momento de avaliação na proposta de ensino de probabilidade
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 158

Nesse momento de *avaliação*, reforma-se os estudos quanto à fração, porcentagem e probabilidade. Esta novamente definida como “medida da chance” em que os ostensivos fração e porcentagem são consolidados como maneiras de indicar tal medida.

É importante deixar claro que tais *momentos* não obedecem, necessariamente, uma ordem, eles não acontecem em sequência e podem se repetir diversas vezes. Diante desses *momentos didáticos*, Gascón (2003), um dos precursores da TAD, constrói, então, um modelo espacial das possíveis organizações didáticas que podem ser identificadas em organizações praxeológicas da atividade matemática. Ele esquematiza tal modelo da seguinte forma:

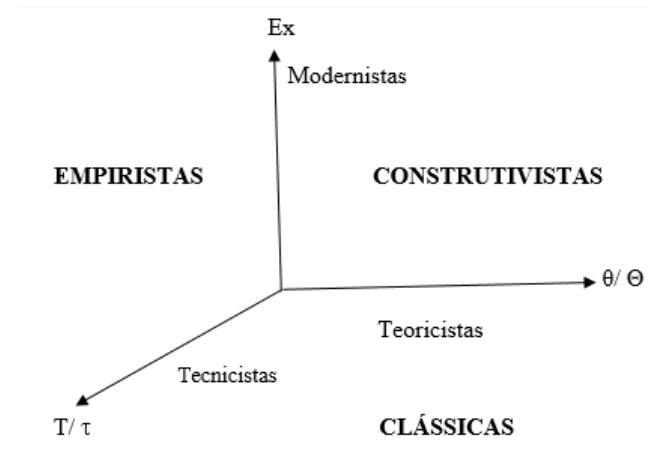


Figura 4: Modelo das organizações didáticas proposto por Gascón
Fonte: Reproduzido a partir de Gascón (2003, p. 21)

Nos eixos estão representadas as OD relacionadas a três dos *momentos* descritos por Chevallard (1999). As OD modernistas são aquelas que priorizam o trabalho da exploração (Ex) e elaboração de técnicas τ_i , indicando supervalorização do *segundo momento*. As OD teoricistas são aquelas que enfatizam a aprendizagem da matemática exclusivamente por meio das teorias, secundarizando, assim, as atividades matemáticas. Nesse caso o enfoque é majoritariamente no *terceiro momento*, em detrimento dos demais. As OD tecnicistas são aquelas que supervalorizam o trabalho das técnicas τ_i , que foi descrito no *quarto momento*. Muitas vezes são vistas em organizações praxeológicas que apresentam um número exagerado de técnicas dadas.

Já nos planos são representadas as OD que integram, de alguma forma, duas abordagens. Assim, as OD clássicas combinam as organizações tecnicistas e teoricistas que “são compreendidas como reducionistas; os processos de ensino são totalmente pensados e controlados pelo professor, e os alunos reproduzem o que lhes foi lecionado” (GONÇALVES, 2016, p. 63), banalizando, assim, o processo de resolução de problemas por meio da exploração. Os modelos empiristas, que integram as organizações tecnicistas e modernas, surgem e se caracterizam pela valorização da exploração na resolução de problemas *não triviais* “e por considerar que o aprender matemática [...] é um processo indutivo baseado na imitação e na prática” (GASCÓN, 2003, p. 20, tradução nossa).

As OD construtivistas tomam as organizações modernistas e teoricistas e se caracterizam pela contextualização das atividades de resolução de problemas e “por considerar que a aprendizagem é um processo ativo de construção de conhecimentos que ocorre seguindo umas fases determinadas e depende essencialmente dos conhecimentos adquiridos anteriormente” (GASCÓN, 2003, p. 21, tradução nossa). Ao analisarmos a OD nas coleções de

livros didáticos escolhidos, buscamos, portanto, encontrar a ocorrência desses momentos, e nos apoiamos também nos estudos de Gascón (2003) em relação às organizações didáticas possíveis.

Conforme anunciamos na introdução desta dissertação, para o desenvolvimento da nossa investigação, utilizamos o desenho metodológico desenvolvido em pesquisas de análises de livros didáticos orientados pela professora Marilena Bittar. Tal modelo foi desenvolvido a partir dos elementos que compõem a TAD que possibilitam, portanto, a modelagem e análise das escolhas matemáticas e escolhas didáticas na proposta de ensino de probabilidade das coleções de livros didáticos selecionadas. Apresentamos, então, a seguir, o modelo metodológico proposto por Bittar (2017) e algumas pesquisas que discutem a análise de livros didáticos nessa perspectiva.

2.2 PESQUISAS SOBRE ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS À LUZ DA TAD

Bittar (2017) apresenta um modelo de análise de livros didáticos sob a ótica da TAD a partir da realização de uma revisão sistemática de pesquisas realizadas ou orientadas pela autora. Neste, o caminho metodológico de produção e análise de dados é composto das seguintes fases:

[...] a escolha do material (livro) a ser analisado; a separação entre *Curso* e *Atividades Propostas* (divisão do material para análise); elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático; elaboração/identificação do quarteto praxeológico didático; análise das organizações modeladas. É importante ressaltar que as 3ª e 4ª fases não precisam ser realizadas (e nem apresentadas) separadamente. E mais, o processo de análise é dinâmico, com diversas idas e vindas entre o material de estudo, o apoio teórico e os objetivos da pesquisa. (BITTAR, 2017, p. 369).

Descrevemos, a seguir, cada uma dessas fases e apresentamos, concomitantemente, pesquisas orientadas pela autora para a exemplificação dessas fases.

A fase de *escolha do material (livro didático) a ser analisado* é feita de acordo com o objetivo da investigação proposta. Nesse sentido, Bittar (2017, p. 369 e 370) afirma que a “análise de livros didáticos (LD) não é objetivo principal de investigação; essa análise é feita para responder à questão central da pesquisa. Consequentemente, a escolha dos livros vai depender do que queremos investigar”. Exemplificamos essa fase com a investigação que buscamos realizar neste trabalho. Por objetivarmos analisar a proposta de ensino de probabilidade a partir de livros didáticos da educação básica, optamos por olhar em coleções de mesma autoria por tomarmos como hipótese que nessas coleções haveria uma proposta de continuidade desse estudo.


A divisão do material para análise é feita em duas partes: *Curso e Atividades propostas*.

A Parte Curso compreende a explanação de definições, propriedades, resultados e exercícios resolvidos. Nessa Parte os autores do livro didático trazem, mesmo que implicitamente, o que consideram que os alunos daquele nível de escolaridade devem aprender e é nessa Parte que os alunos buscam pistas para resolver o que lhes é pedido.

Para exemplificação da parte curso, trazemos uma ilustração retirada do LD destinado ao oitavo ano do ensino fundamental, analisado nesta pesquisa:

Evento impossível e evento certo

O professor Paulo vai sortear um livro de aventuras entre os 30 alunos do 8º ano B.



Para isso, escreveu, em pedaços de papel, os números de 1 a 30, que correspondem aos números dos alunos na lista de chamada. Pergunta-se: qual a probabilidade de o professor Paulo sortear um número maior do que 40?

Como, entre os números de 1 a 30, não há número maior do que 40, o número de resultados favoráveis é 0, ou seja, $n(A) = 0$. O número de resultados possíveis é 30, isto é, $n(U) = 30$. Logo, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{0}{30} \Rightarrow P(A) = 0$$

Portanto, a probabilidade de o professor Paulo sortear um número maior do que 40 é 0, ou seja, esse evento nunca ocorrerá.

Existem alguns eventos que nunca ocorrerão. Eles são chamados de **eventos impossíveis**.
A probabilidade de acontecer um evento impossível é sempre zero.

Agora, considerando ainda a situação do sorteio, qual a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30?

Entre os números de 1 a 30, há 30 números que são menores ou iguais a 30, então, o número de resultados favoráveis é 30, ou seja, $n(B) = 30$. Como na situação anterior, o número de resultados possíveis também é 30, isto é, $n(U) = 30$. Assim, o cálculo da probabilidade desse evento ocorrer é:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{30}{30} \Rightarrow P(B) = 1 \text{ ou } 100\%$$

Portanto, a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30 é 1 ou 100%, ou seja, podemos garantir, com certeza, que esse evento ocorrerá.

Todo evento que podemos garantir que ocorrerá é chamado de **evento certo**.
Para que isso ocorra, é necessário que o evento coincida com todos os casos possíveis, ou seja, com o espaço amostral. Nesse caso, a probabilidade é 1 ou 100%.

Assim, podemos concluir o seguinte:

Qualquer que seja o evento A, a probabilidade de ocorrer A é um número que varia de zero até um: $0 \leq P(A) \leq 1$.

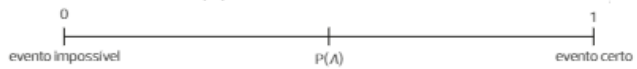


Figura 5: Parte curso identificada no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 322

Nessa situação definem-se *evento impossível* e *evento certo*. Para isso, uma situação contextualizada foi apresentada e duas situações aleatórias em que foi calculada a probabilidade dos eventos “A” e “B” ocorrerem. A técnica para o cálculo das probabilidades desses eventos, isto é, “P(A)” e “P(B)”, foi apresentada como uma fração em que o denominador representa o espaço amostral, chamado de “n(U)”, e o numerador é o número de possibilidades do evento em questão. Conclui-se que a probabilidade de qualquer evento varia de 0 a 1 em que a visão de probabilidade axiomática está presente. Vemos, então, que a análise “da Parte Curso permite identificar alguns tipos de tarefas que parecem importantes naquela instituição, neste caso o LD” (BITTAR, 2017, p. 372).

Bittar (2017, p. 373) reitera que a “análise da *Parte Curso* permite, portanto, a produção de quartetos praxeológicos que serão testados e, talvez, modificados ao estudar a *Parte Atividades Propostas*”.

Uma vez realizada a análise da Parte Curso, passamos às Atividades Propostas. Nesse momento buscamos analisar cada atividade identificando qual é a tarefa do aluno e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa, tendo como apoio a(s) praxeologia(s) anteriormente identificada(s). Uma pergunta recorrente, e totalmente pertinente, é “como saber que essa é a técnica que o autor gostaria que fosse usada?” Para realizar tal inferência baseamo-nos no que está presente no Manual do Professor e, principalmente, no que foi trabalhado na Parte Curso. Por meio dessa análise procuramos elementos que permitam inferir sobre como os autores do LD desejariam que seus usuários resolvessem as atividades. Tal inferência apoia-se no conceito de Contrato Didático (Brousseau, 1986): o aluno busca, na ação do professor ou no livro didático, encontrar algum sinal do que é esperado que ele faça. (ibid., p. 373).

A fase de *elaboração/identificação do quarteto praxeológico matemático* “é o momento em que o pesquisador vai se colocar diante dos dados produzidos e realizar uma leitura utilizando para isso as suas lentes. São elas que nos dizem o que olhar e como olhar” (ibid., p. 374).

Para a modelagem da OM é realizada uma leitura, linha por linha, da Parte Curso, sem esquecer os boxes tão comuns em LD brasileiros e que podem dar a impressão de trazerem informação extra, talvez não necessário. Pode ocorrer, como já verificamos, que tais boxes apresentem algumas justificativas para as técnicas apresentadas. Assim, a leitura para a elaboração do quarteto praxeológico matemático deve ser feita levando em consideração todos os elementos de cada página do livro, entretanto nem todos serão considerados na modelagem realizada. Na Parte Curso, uma tarefa nem sempre é apresentada explicitamente; muitas vezes o estudo de um determinado conteúdo é proposto por meio de atividade resolvida[...]. (ibid., p. 374).

Em algumas investigações, iniciou-se as análises com a elaboração de uma praxeologia *a priori*, sendo modelada a partir de estudos anteriores, como nos casos das pesquisas de Kaspary (2014) e de Corrêa da Costa (2018).

Em sua pesquisa, Kaspary (2014) buscou caracterizar o ensino das operações de adição e subtração dos números naturais na coleção escolhida. A autora chamou de praxeologia *a priori* tipos de situações modeladas no estudo do campo aditivo presente na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990). Com isso, a autora pôde identificar as praxeologias matemáticas e didáticas presentes nos cinco volumes que compõem a coleção. Kaspary (2014, p.136) observou que:

A construção do entorno tecnológico-teórico acontece ao longo dos cinco volumes investigados, todavia, discussões sobre tais elementos praxeológicos se tornam mais robustas a partir do livro do terceiro ano. É nessa mesma perspectiva que são propostos os momentos de institucionalização, o que advém da maturidade teórica construída ao longo dos livros.

Corrêa da Costa (2018, p. 146), tendo como base que “o cálculo mental é uma habilidade, [...] pode e deve ser explorado por meio de atividades que vão preparar o sujeito para realizar uma conta mentalmente, ou seja, atividades em que se empreguem estratégias pessoais”, buscou analisar como essa habilidade estava sendo proposta em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. Para essa investigação, elaborou-se uma lista de tipos de tarefas *a priori* a partir de uma tese identificada sobre a temática que serviu “de apoio para a análise do livro, não impedindo que novos tipos sejam modelados” (ibid., p. 6).

A *elaboração/identificação da praxeologia didática* é a fase em que buscamos responder à questão: “Como é ensinado certo conteúdo?”. A OD “pode ser modelada de dois modos não excludentes: via o quarteto praxeológico didático e via os momentos de estudos (Chevallard, 1992)” (BITTAR, 2017, p. 380). Tal organização diz respeito, então, a abordagem proposta para o estudo de determinado conteúdo. Nesse sentido, a “identificação e análise dos momentos de estudo pode ser fundamental para compreender ou, ao menos, levantar hipóteses sobre a proposta de ensino de objetos não matemáticos” (ibid., p. 381).

Ramalho (2016) objetivou caracterizar o ensino de trigonometria proposto em livros didáticos do ensino fundamental. Para tanto, foram analisados quatro livros didáticos destinados ao nono ano do ensino fundamental, aprovados pelo PNLN do ano de 2014 e mais adotadas na rede pública brasileira. Em sua análise, a autora concluiu que as atividades propostas nos livros didáticos analisados se distinguem quanto ao contexto enunciado ou quanto ao ostensivo que acompanhavam tais atividades.

Gonçalves (2016, p.6) buscou “compreender distanciamentos e aproximações entre a construção dos números inteiros e propostas de ensino das operações de adição e subtração desse conjunto em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental”. A construção dos inteiros foi estudada articulando aspectos epistemológicos e históricos e foi utilizado o conceito de transposição didática¹⁴ (CHEVALLARD, 1991) para a análise das adaptações realizadas pelos elaboradores do LD escolhido. Gonçalves (2016, p. 123) concluiu que:

Nossos dados apontaram para dificuldade de justificar matematicamente conceitos tais como: módulo, simétrico, ordem no conjunto dos inteiros e, principalmente, as operações e os seus elementos. Esse fato se assemelha ao ocorrido nos anos iniciais do ensino fundamental, pois, além desses elementos serem trabalhados em anos posteriores e alguns apenas em nível de graduação, eles foram ensinados por meio de adaptações ao nível cognitivo dos alunos. Alguns conteúdos estão além desse nível, por isso necessitam de adaptações e materiais de apoio. Tais conceitos sobrevivem em ambos os contextos – Matemática escolar e a Matemática dos matemáticos, mas, [...] suas abordagens diferem em vários aspectos.

O autor identificou dificuldades de justificativas matemáticas para os conceitos de módulo, simétrico, operações e os seus elementos, dentre outros e, com isso, observou-se características da transposição didática em situações de adaptações feitos pelos elaboradores do livro analisado.

A fase de *análise das organizações modeladas* é o momento de “uma vez obtidas as OM e as OD, [...] interpretar as informações obtidas” (BITTAR, 2017, p. 381). Nessa etapa de análise das OM e OD identificadas/elaboradas, dois fatores são importantes de serem olhados: a *análise da evolução de praxeologias* e a *quantificação dos dados produzidos tanto no que se refere às OM quanto às OD*. Quanto ao primeiro fator, Bittar (2017, p. 383) afirma que:

A análise da evolução de praxeologias indica também que algumas praxeologias desaparecem ao longo do estudo o que coloca, ao pesquisador, a seguinte questão: qual a razão de ser de praxeologias que aparecem para desaparecer, muitas vezes, logo em seguida? Para compreender a atividade matemática de um sujeito em uma determinada instituição essa é uma questão necessária de ser investigada.

Quanto ao segundo fator, a quantificação dos dados produzidos, Ramalho (2016) diferenciou as atividades de trigonometria em dois grupos: “resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto extraescolar (G1) e resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto matemático (G2)” (RAMALHO, 2016, p.80). Com isso,

¹⁴O principal objetivo da transposição didática é compreender as transformações que um saber sofre ao passar de uma instituição à outra.

obteve-se o seguinte gráfico com o quantitativo de tarefas de ambos os grupos em cada LD analisado:

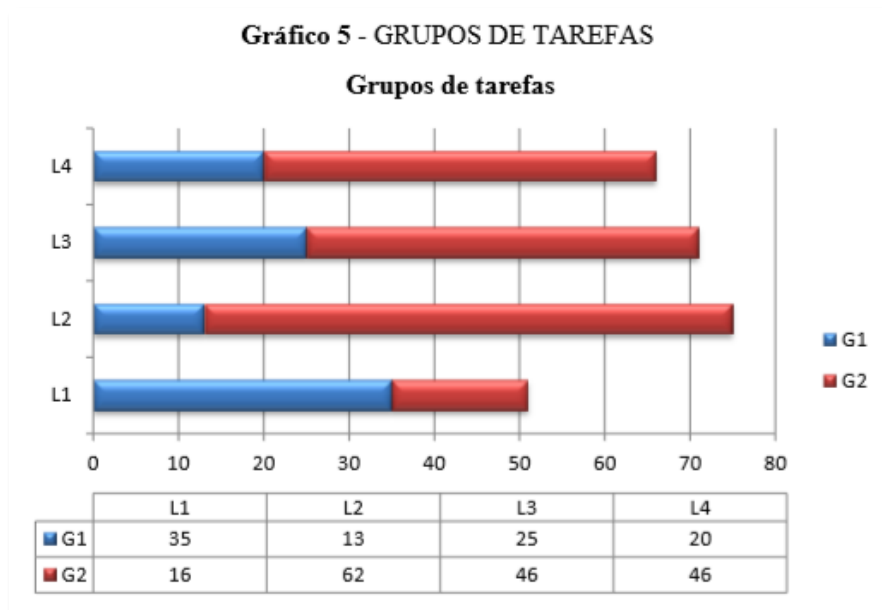


Figura 6: Quantitativo de tarefas de cada grupo nos volumes analisados por Ramalho (2016)

Fonte: RAMALHO, 2016, p. 82

Com esses dois grupos, foi possível perceber “certa tendência dos autores em valorizar um determinado tipo de tarefa nos livros e também a ter indícios de uma tentativa de contextualização do conteúdo de trigonometria” (ibid., p.80). Em resumo, verificou-se que nos quatro livros ocorreu uma valorização da constituição do bloco tecnológico-teórico de trigonometria no triângulo retângulo e, também, do trabalho com técnicas. Com a ênfase nesses dois momentos, percebeu-se que tais livros propõem uma organização didática predominantemente clássica.

No próximo capítulo, apresentamos outra discussão importante para a concretização deste trabalho: o papel e a importância do LD e o do PNLD para educadores e educandos no cenário brasileiro de educação básica. Na sequência, apresentamos algumas discussões presentes nos Guias do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018¹⁵ e, por fim, como se deu a escolha das coleções de livros didáticos análises nessa pesquisa.

¹⁵ A escolha desses Guias se deu pelo fato de serem os documentos mais recentes (a partir do ano de egresso no curso de mestrado, em 2017) divulgados pelo PNLD e cujas obras analisadas neste trabalho também foram escolhidas a partir desses Guias.

3. LIVROS DIDÁTICOS E PROBABILIDADE

Neste capítulo tratamos da função dos livros didáticos como ferramenta para o professor e para o estudante em nossas escolas públicas, e qual a importância de analisarmos esses documentos. Em seguida discorreremos sobre o papel do PNLD em nosso cenário. Por final, trazemos um olhar geral nas coleções aprovadas a partir dos Guias do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018 e o que estes apontam quanto ao estudo de probabilidade nas coleções aprovadas nessas avaliações. Ao final, apresentamos as coleções de livros didáticos escolhidas para a produção e análise de dados.

3.1 O LIVRO DIDÁTICO (LD) E O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD)

No processo de ensino cabe à escola, e principalmente ao professor, o papel importante de proporcionar a aprendizagem de seus alunos e, para isso, este educador utiliza os materiais didáticos que possam auxiliá-lo nessa tarefa. O LD é um material disponibilizado em todas as escolas públicas brasileiras que recebe, assim, grande relevância em nosso cenário. Frison, Vianna, Chaves e Bernardi (2009) afirmam que o livro didático é uma das ferramentas fundamentais que influenciam nas escolhas do professor e que, assim, reflete no processo de ensino e de aprendizagem do conteúdo que está sendo trabalhado.

Ademais, “o livro didático utilizado por um professor pode fornecer uma boa aproximação com a sua prática em sala de aula, especialmente no que diz respeito ao conteúdo apresentado e às metodologias utilizadas” (BITTAR, 2017, p. 364). “Conseqüentemente, é importante conhecer as propostas dos LD, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos, pois, independente da escolha teórica, é preciso levar em consideração seu contexto de ensino” (ibid., p. 366). Carvalho e Lima (2010, p. 16) apontam as principais funções que o LD exerce:

Tratando-se do aluno tais funções podem ser:

- favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos;
- propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Com respeito ao professor:

- auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- Auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno;

– favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência.

De fato, quando um LD é adotado pelo professor em alguma instituição educacional este passa a auxiliá-lo nos planejamentos, nas atividades a serem propostas, no esclarecimento de suas dúvidas, etc. Para o aluno, o livro é uma ferramenta disponível a todo tempo; assim, mesmo quando não houver outro artifício disponível para ser consultado, o livro cumpre esse papel. Além de professor e aluno serem os sujeitos que dialogam com o LD, Carvalho e Lima (2010, p. 15) apontam um terceiro personagem neste diálogo, uma vez que o LD:

[...] traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado – no nosso caso, a Matemática –; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade.

Esses autores estabelecem o que chamam de uma “teia de relações” que interliga quatro polos: o professor, o aluno, o conhecimento matemático/ a Matemática, e o autor/livro didático.

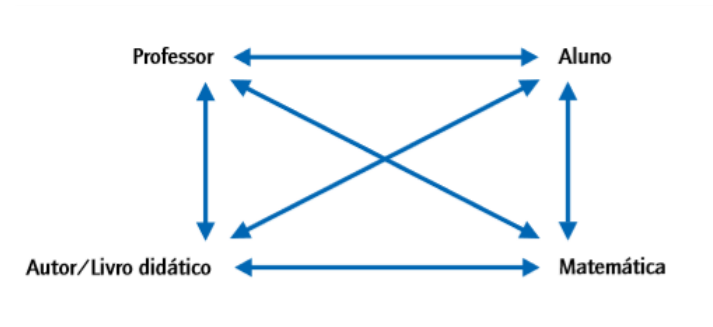


Figura 7: Teia de relações que interliga o professor, o aluno, a Matemática e o autor do LD

Fonte: Carvalho e Lima (2010, p. 15)

Dessa forma, vemos que:

[...] o livro didático se constitui em um importante recurso, se não, o mais importante recurso utilizado por alunos e professores. Portanto, o uso que se faz do livro didático no trabalho cotidiano da sala de aula, é de suma importância, uma vez que o livro didático não se constitui um elemento neutro, mas sim, um produto que exprime uma dada visão de mundo, de ser humano e de escola. (OLIVEIRA, 2007, p. 28).

Entretanto, ainda que este seja um recurso importante para professor e aluno, ele não deve ser o recurso dominante ou o único recurso no processo de ensino. No Guia do PNLD mais recente¹⁶, relativo ao ensino médio, afirma-se que:

¹⁶ Até o momento dessa escrita.

Valorizar o papel do livro didático não significa, contudo, que ele seja dominante no processo de ensino e aprendizagem, em detrimento da atuação do professor. Isso porque, além das tarefas inerentes à condução das atividades da sala de aula ou fora dela, o professor sempre pode ampliar o seu repertório profissional com fontes bibliográficas e outros recursos complementares. (BRASIL, 2017, p. 13).

Assim, é preciso um olhar crítico do professor para que este perceba limitações da obra que utiliza e possa buscar por outros recursos que possam ajudar na superação de tais limitações além de oferecer outras perspectivas.

Além disso, vemos que o LD:

[...] tem um lugar importante - ou pelo menos não negligenciável - em diferentes sistemas educacionais. Às vezes é o principal recurso de professores e alunos para ensinar e aprender, como é o caso do Brasil. Mas, para existir, está subordinado a certas condições e restrições. O livro didático pode ser considerado como resultado das interpretações dos autores dos programas e do que dizem as outras instituições noosféricas (Chevallard, 1985, 1992, Chaachoua e Comiti, 2010). As condições e restrições de sustentabilidade de um manual não são as mesmas de um país para outro. Por exemplo, na França, a regulamentação é feita por usuários, ou seja, professores; no Brasil, essa regulação é feita por meio de um programa nacional de avaliação. (KASPARY, 2018, no prelo, tradução nossa).

Como visto anteriormente, o PNLD é esse programa responsável pela avaliação e distribuição de livros didáticos da educação básica destinados às escolas públicas brasileiras. Tudo começou em 1937¹⁷ (que ainda não recebia esse nome) quando, mediante o Decreto-Lei nº 93, de 21 de dezembro de 1937, criou-se o Instituto Nacional do Livro. No segundo artigo deste decreto, encontramos que:

Competirá ao Instituto Nacional do Livro;
 a) organizar e publicar a Enciclopédia Brasileira e o Dicionário da Língua Nacional, revendo-lhes as sucessivas edições;
 b) editar toda sorte de obras raras ou preciosas, que sejam de grande interesse para a cultura nacional;
 c) promover as medidas necessárias para aumentar, melhorar e baratear a edição de livros no país bem como para facilitar a importação de livros estrangeiros
 d) incentivar a organização e auxiliar a manutenção de bibliotecas públicas em todo o território nacional. (Artigo 2º do Decreto-Lei nº 93 de 21 de dezembro de 1937).

Esse acontecimento é um marco importante para a educação brasileira, uma vez que é apontada uma preocupação com os livros didáticos (e outros materiais) que estavam sendo produzidos aqui. No ano seguinte, 1938, foi constituída a Comissão Nacional do Livro Didático

¹⁷ Disponível em: <<http://www.fn.de.gov.br/programas/programas-do-livro/livro-didatico/historico>>. Acesso em: 02 jan. 2018.

(CNLD), instituindo uma política de legislação, controle de produção e circulação do LD no Brasil. Após algumas mudanças, que não detalharemos aqui, em 1985 passa a chamar Programa Nacional do Livro Didático. Nessa ocasião o professor passa a assumir, de fato, o papel de responsável pela escolha do LD. Os livros eram distribuídos nas escolas, mas, até então, não eram avaliados.

Nos anos seguintes foram estabelecidos critérios de avaliação das coleções. E, em 1996, o MEC propôs a primeira avaliação pedagógica dos livros didáticos da primeira à quarta série (anos iniciais do ensino fundamental, posteriormente ampliados a cinco anos). Nessa avaliação, foram excluídos livros com erros conceituais, desatualizações, dentre outros critérios como preconceitos diversos. Em seguida é publicado o primeiro “Guia de Livros Didáticos” de 1ª à 4ª série. Nestes Guias encontramos as resenhas das coleções aprovadas, bem como algumas discussões sobre ensino e aprendizagem matemática, etc.

O PNLD foi ampliado com avaliações de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e, em 2003, ocorreu a primeira avaliação de livros didáticos do ensino médio. As avaliações e distribuições dos livros passam a ter um ciclo, por exemplo, o Guia do PNLD/2016 contém as resenhas das coleções dos anos iniciais do ensino fundamental, que passaram pelo processo de avaliação em 2015 e serão utilizadas nas escolas durante três anos, de 2016 a 2018. A cada ano são avaliadas e aprovadas coleções de uma etapa da educação básica, num ciclo que, desde então, tem sido de três em três anos.

Do ponto de vista da TAD, temos que:

A editora e o PNLD são considerados duas instituições que fazem parte da noosfera, I_M e I_{PNLD} . Essas duas instituições noosféricas expressam, cada uma à sua maneira, as relações - que consideram apropriadas - de um aluno ou professor para os objetos do conhecimento. I_M cria organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos produzidos: onde encontramos *praxeologias inertes*; da mesma forma, a I_{PNLD} , através dos resultados de avaliações e recomendações, prescreve condições e restrições para objetos que podem viver, ou não, em I_M . (KASPARY, 2018, no prelo, tradução nossa).

Vemos, então, a relevância dessas instituições na investigação aqui proposta, uma vez que é a partir delas que identificamos as organizações matemáticas e didáticas propostas para o estudo de probabilidade. Vale ressaltar que os documentos curriculares oficiais brasileiros, apresentados no Capítulo 1, são produzidos pela noosfera e prescrevem condições e restrições sobre o PNLD.

Dando sequência aos nossos estudos, passamos para a seção na qual apresentamos uma visão geral das coleções aprovadas e reflexões acerca do ensino de probabilidade nos Guias do PNLD dos anos iniciais (PNLD/2016), anos finais (PNLD/2017) e ensino médio (PNLD/2018).

Acreditamos que tais discussões retratam o que está sendo apontado como relevante pelos organizadores que avaliam as coleções e por autores dos livros didáticos.

3.2 GUIAS DO PNLD DOS ANOS DE 2016, 2017 E 2018

Nesta seção apresentamos algumas discussões presentes nos Guias do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018 quanto à distribuição dos conteúdos e quanto à presença do estudo de probabilidade nas coleções de livros didáticos aprovadas nas avaliações de tais anos.

3.2.1 Anos Iniciais – Guia do PNLD/2016

As coleções analisadas e aprovadas no PNLD/2016 mostram uma distribuição dos conteúdos da matemática em quatro campos/eixos da matemática escolar: números e operações, geometria, grandezas e medidas, tratamento da informação, sendo que os estudos relativos à probabilidade se encontram neste último campo. Neste Guia encontramos três tópicos que discutem algumas questões relativas ao que foi proposto, nas coleções aprovadas, para o estudo de probabilidade. Apresentamos as discussões desses tópicos a seguir.

No tópico *Tratamento da Informação*, uma das primeiras observações apresentadas é que, nas coleções de livros didáticos para o ciclo de primeiro ao terceiro ano, “a grande maioria das obras aprovadas tem reservado um espaço bem abaixo do que é desejável para este campo. As restantes se aproximam um pouco mais do padrão recomendado. O mesmo ocorre nas coleções de 4º e 5º anos” (BRASIL, 2015, p. 50).

Quanto aos livros didáticos de primeiro ao terceiro ano, no Guia do PNLD/2016 (BRASIL, 2015, p. 50) indicou-se que:

[...] os tópicos de tratamento da informação são distribuídos ao longo das unidades (ou capítulos) dedicadas predominantemente a outros campos. Mas somente em alguns destes são feitas as devidas conexões com conteúdos desses outros campos. E mais, cerca de um terço das obras, tão somente, trazem unidades (ou capítulos) específicas para conteúdos de estatística, probabilidade ou combinatória.

Para os livros do quarto e quinto ano, essa situação se repete, mas em cerca de metade das coleções já é possível encontrar unidades ou capítulos específicos ao tratamento da informação.

Certamente, trazer o conteúdo do tratamento da informação articulado com os de outros campos é um modelo desejado, porém também se faz necessário, incluir unidades com maior enfoque no estudo dos conceitos e procedimentos próprios da estatística, probabilidade ou combinatória, em todas as obras. Nesse sentido, há um desafio a ser enfrentado por professores, formadores e elaboradores de material didático. (ibid., p. 50).

Assim, vemos que assuntos referentes à probabilidade estão sendo propostos nessas coleções, mesmo não sendo trazidos em tópicos ou capítulos específicos.

Outro tópico apresentado neste Guia foi intitulado *Estatística, Probabilidade e Combinatória em um mesmo campo*, onde justifica-se a razão de a estatística, a probabilidade e a combinatória pertencerem ao mesmo campo/eixo de conteúdos, uma vez que se entende que há uma conexão entre eles. De fato, uma das etapas mais relevantes da estatística é a inferência, cuja base é a probabilidade.

O pensamento probabilístico deveria ser iniciado pelas ideias fundamentais de **incerteza**, de **chance** e de **probabilidade** de um evento. Desse ponto de vista, desde os primeiros anos escolares, seriam dados os passos iniciais na direção da construção das etapas mais elaboradas da Estatística, em especial, as inferências próprias desse ramo científico. (BRASIL, 2015, p. 51).

Já com relação à combinatória, em várias situações, pede-se a contagem das muitas possibilidades de ocorrência de casos em uma dada experiência ou acontecimento. Nessas ocasiões a combinatória fornece processos organizados de contagem, tais como o princípio multiplicativo, a árvore de possibilidades e a tabela de dupla entrada, que possibilitarão a elaboração do espaço amostral para o cálculo de probabilidades. Vemos, então, que a estatística e a combinatória fornecem ferramentas para o estudo da nossa temática de pesquisa. Esses momentos também fazem parte de nossa análise neste trabalho.

O último tópico apresentado neste Guia com reflexões relativas à probabilidade é intitulado *Probabilidade, chance e possibilidade*. Neste, encontramos comentários mais específicos quando ao estudo de probabilidade nas coleções de livros didáticos aprovadas neste PNLD, bem como determinadas questões conceituais que aparecem em algumas delas. Nos livros dos anos iniciais do ensino fundamental, é comum encontrarmos poucas, ou nenhuma, atividades propostas visando explorar noções de probabilidade. Segundo o Guia do PNLD/2016, o estudo desse conteúdo nos dois primeiros ciclos do ensino fundamental ainda é bem reduzido, o que se justifica por conta da complexidade dos conceitos envolvidos. Entretanto:

[...] com base na concepção de que mesmo esses conceitos mais complexos devem ser abordados, com a devida gradação, desde os primeiros anos escolares, têm sido propostas atividades que iniciam o aluno nos conceitos básicos de experimentos aleatórios; ou seja, aqueles cujos resultados são caracterizados por certo grau de incerteza. (BRASIL, 2015, p. 56).

Observa-se, aqui, a preocupação em iniciar o estudo de probabilidade logo nos anos iniciais de escolarização, assim como vimos nos PCN (BRASIL, 1997), e sugere-se tal

inicialização por meio da compreensão de aleatoriedade, através de experimentos aleatórios. Nota-se, ainda, que há um predomínio de atividades que visam o estudo de noções da definição clássica de probabilidade. Por meio de experimentos como o lançamento de dados ou moedas, por exemplo, “a probabilidade surge como uma medida da chance de ocorrência de certo evento em um experimento afetado pela incerteza do resultado” (BRASIL, 2015, p. 56). Na definição clássica de probabilidade, um dos princípios é que os eventos possíveis devem ter a mesma chance de ocorrência (equiprováveis). Outra observação aponta que:

Para não se incorrer em uma definição circular, que é definir probabilidade usando o termo probabilidade, torna-se necessário atribuir à expressão ‘ter a mesma probabilidade’ um significado ancorado não no conceito de probabilidade, mas em propriedades de simetria e de homogeneidade, presentes nos objetos envolvidos no experimento. (ibid., p. 56).

Assim, é possível encontrar nas obras a probabilidade sendo apresentada como sinônimo de “medida de chance”. É aceitável encontrar o termo “eventos possíveis” (que é o espaço amostral) ser apresentado como as “possibilidades” de ocorrência de dado experimento. Entretanto:

[...] é um equívoco, cometido por algumas obras didáticas, confundir os termos “possibilidade” e “probabilidade”. Por exemplo, ao se considerar uma moeda não viciada quando se pergunta “Há possibilidade de “sair” cara?”, a resposta correta é “sim”. Mas quando se pergunta “Qual a probabilidade de “sair” cara?, a resposta correta é $\frac{1}{2}$, desde que se está supondo que tanto “sair” cara quanto “sair” coroa têm possibilidade de ocorrer e com chances iguais. (ibid., p. 57).

Esses são os comentários gerais quanto às obras dos anos iniciais aprovadas no PNLD/2016. Vemos que, de maneira geral, as obras contemplam a visão clássica de probabilidade em detrimento das demais visões. Percebemos que nessa primeira etapa de escolarização, sugere-se um trabalho inicial de probabilidade desenvolvendo a noção aleatoriedade e elaboração do espaço amostral de situações aleatórias. Com isso, temos uma noção do que podemos encontrar nos volumes analisados neste trabalho e, também, a forma de olhar para essas obras no decorrer das análises.

3.2.2 Anos Finais – Guia do PNLD/2017

Nas coleções destinadas aos anos finais do ensino fundamental avaliadas e aprovadas no PNLD/2017, os conteúdos são organizados em cinco campos/eixos da matemática escolar: números e operações; álgebra; geometria; grandezas e medidas; estatística e probabilidade. Sendo considerada uma coleção em sua totalidade, a análise mostrada no Guia aponta que

pouco mais da metade das coleções aprovadas dão uma atenção equilibrada aos cinco campos. Já as demais dão atenção excessiva a um dos campos e pouca a outros. “Em geral, o campo privilegiado é o dos números e operações e os que recebem atenção abaixo do esperado são o de grandezas e medidas e o de **estatística e probabilidade**” (BRASIL, 2016, p. 25, grifo nosso).

Desde as recomendações curriculares nacionais, do fim dos anos 1990, um dos cinco eixos principais dos anos finais do ensino fundamental tem sido usualmente denominado Tratamento da Informação, que inclui conteúdos de estatística, probabilidade e combinatória. No entanto, seguindo o edital do PNLD 2017, optamos aqui por considerar a combinatória como conteúdo mais próximo da contagem e, portanto, incluindo-o no campo de números e operações. (ibid., p. 46).

Vemos que, de um Guia para outro, parece haver uma incoerência em relação à combinatória fazer, ou não, parte do eixo Tratamento da Informação. Vimos que, nos PCN (BRASIL, 1997) e no Guia PNLD/2016 destinados aos anos iniciais do ensino fundamental, a combinatória faz parte do eixo Tratamento da Informação. Já neste Guia PNLD/2017, a combinatória passa a fazer parte da contagem. Essa contradição é observada em outros documentos curriculares oficiais brasileiros, como vimos anteriormente, e ocorre pelo fato de que em algumas situações combinatórias tratadas está sendo considerado o produto cartesiano, (ROCHA, LIMA e BORBA, 2016).

No Guia do PNLD/2017 (BRASIL, 2016, p. 46), afirma-se que “a maioria das coleções reserva, aproximadamente, 9% de suas páginas ao estudo de temas do campo de estatística e probabilidade”. Isso não impede a possibilidade de uso de alguns conceitos da combinatória no estudo de probabilidade, como vimos anteriormente. Além disso, em cerca de dois terços das coleções ainda persistia a tendência de trazer esses dois campos nos últimos capítulos dos volumes.

O Guia do PNLD/2017 aponta também que, na maioria das coleções, noções de probabilidade são apresentados de forma fragmentada, sem haver um capítulo específico para o conteúdo estudado. Essa fragmentação não seria problema caso fosse uma tentativa de retomada e ampliação dos assuntos, mas nem sempre é o que acontece, de acordo com o Guia. Por exemplo, na resenha da coleção 0036P1022, é destacado que:

A exploração dos temas de estatística e probabilidade não é feita em unidades específicas. Em geral, eles são desenvolvidos em apenas duas páginas nas seções *Trabalhando com a informação*, encontradas no final de algumas unidades dos demais campos. Nesses casos, cada tópico da seção apresenta situações e propostas de atividades relacionadas ao conteúdo abordado na respectiva unidade. Embora tal opção pareça interessante em geral, o estudo dos conceitos próprios ao campo torna-se fragmentado e as sistematizações são desenvolvidas muito rapidamente, sem que haja muito espaço de reflexão para

uma efetiva construção dos conhecimentos focalizados. (BRASIL, 2016, p. 97 e 98).

Já nos volumes do 9º ano, em quatro das onze coleções aprovadas, há um capítulo específico para a Estatística nos quais, na maioria das vezes, a probabilidade está incluída. No Guia há várias críticas em relação à pouca exploração e ao pouco destaque desse conteúdo nos livros didáticos. Por exemplo, em um dos comentários de uma das coleções, afirma-se que “[...] os conteúdos referentes à probabilidade não são suficientemente explorados. O conceito de chance, identificado com o de probabilidade, é abordado de maneira insatisfatória” (BRASIL, 2016, p.62). Essa deficiência nos livros didáticos faz com que o professor seja obrigado a buscar outras fontes ou meios de sanar essa falta, ou a aprendizagem dos alunos será limitada às possibilidades explícitas do material utilizado.

No tópico reservado à discussão do campo de estatística e probabilidade, afirma-se que o estudo de probabilidade oportuniza aos alunos o reconhecimento e a quantificação da incerteza relativa a acontecimentos de natureza aleatória, o que favorecerá o estudo de outros conceitos nas demais etapas da escolarização básica. Por se tratar de conhecimentos que permitem o estabelecimento de relações do cotidiano, favorece ainda a formação cidadã, bem como a interdisciplinaridade (BRASIL, 2016).

Sabemos que, nos modelos mais simples, começamos por trabalhar a ideia de um experimento aleatório, aquele em que variam os resultados obtidos (eventos), quando o repetimos, mesmo que sejam mantidas, ao máximo, as mesmas condições de realização desse experimento. A noção de probabilidade é adotada como uma medida que quantifica a incerteza de um evento em um experimento aleatório. A definição clássica tem como premissa que os eventos possíveis – as possibilidades – tenham a mesma probabilidade (chance) de ocorrer. Dizemos, então, que os eventos são equiprováveis. (BRASIL, 2016, p. 49).

Observamos a ocorrência de uma incoerência novamente, ainda que pequena. Isso porque nesta ocasião a probabilidade é apresentada como sinônimo de chance e não como “medida de chance” conforme visto no Guia anterior. Já “eventos possíveis” são apresentados como “as possibilidades”.

Outra discussão geral apontada no Guia PNLD/2017 é que na definição clássica deve-se levar em consideração o fato de tratarmos de acontecimentos equiprováveis. Por exemplo, em uma situação envolvendo lançamento de um dado, “é preciso sempre insistir na condição de se tratar de um dado ‘honesto’ e, em outros experimentos aleatórios, explicitar, sempre, as condições que amparam a suposição de equiprobabilidade, o que não tem sido observado em várias coleções” (BRASIL, 2016, p. 50). Outra limitação presente em algumas obras “é a de

tratar conceitos mais avançados, como probabilidade condicional e probabilidades de eventos independentes, sem que a noção básica que envolve os temas tenha sido explorada satisfatoriamente” (ibid., p. 50).

3.2.3 Ensino Médio – Guia do PNLD/2018

Nesta última etapa do ensino básico, os conteúdos se pautam em uma organização que é dividida em quatro campos/eixos: números e operações; álgebra; geometria; estatística e probabilidades. Em probabilidade são considerados “o conceito clássico de probabilidade; probabilidade condicional; eventos dependentes e independentes; [...] e, eventualmente, relações entre estatística e probabilidade” (BRASIL, 2017, p. 17).

O Guia do PNLD/2018 apresenta alguns pontos positivos identificados nas obras quanto ao estudo de probabilidade como, por exemplo, a abordagem cuidadosa quanto a conceituações básicas e a preocupação em relacioná-los a situações reais da vida.

No entanto, por vezes, peca-se pelo exagero de exercícios com contextualizações inadequadas, ou demasiadamente artificiais, quando poderiam ser sugeridas, por exemplo, simulações em sala de aula (com lápis e papel ou com recursos tecnológicos, caso disponíveis) que enriqueceriam e motivariam os cálculos posteriores de probabilidade. (ibid., p. 35).

Uma retomada ao que foi discutido no Guia dos anos iniciais (BRASIL, 2015) é feita ao afirmar que o estudo de probabilidade requer algumas ferramentas da combinatória em alguns casos para se ter o espaço amostral (as possibilidades), o que também é visto nas obras do ensino médio.

Já quanto às noções básicas de probabilidade:

[...] observamos que, frequentemente, no Ensino Médio, não é apresentada, de maneira apropriada, a noção de independência probabilística entre dois eventos definidos em um mesmo espaço amostral. Nesse caso, é conveniente, antes da abordagem de independência, estudarmos o conceito de probabilidade condicional, e definirmos independência a partir da condicional. Há uma inversão que, apesar de não ser muito adequada, é muitas vezes encontrada: a de se “assumir”, a priori, que há independência entre os eventos e, então, aplicar a definição para cálculo da probabilidade. (BRASIL, 2017, p. 35).

Esse ponto também foi tratado no Guia anterior, em que as noções de dependência e independência de eventos foram trabalhadas insatisfatoriamente em algumas coleções. O que é apontado como ponto positivo é que “já são menos frequentes nas coleções capítulos longos e fragmentados sobre o tema” (ibid., p. 35). Das oito coleções aprovadas para o ensino médio, seis apresentam um capítulo destinado ao estudo de probabilidade no volume 2, que

corresponde ao 2º ano do ensino médio; as demais apresentam um capítulo no volume 3. “Quanto à definição de probabilidade, algumas obras trazem tanto a clássica quanto a frequentista, o que demonstra um entendimento positivo sobre a necessidade de obtermos definições que não tenham a limitação da definição clássica” (BRASIL, 2017, p. 35).

Por fim, conclui-se que o estudo deste tema e da estatística visa fornecer aos estudantes a compreensão de acontecimentos da realidade, por isso a necessidade de uma proposta de ensino que permita o entendimento dos “pontos fortes” e das limitações da área, do pensamento probabilístico e estatístico. E mais, é importante que o estudante perceba quando poderá usar os conceitos, e quando não, para decisões da vida (BRASIL, 2017).

Essas foram as discussões apresentadas nos Guias do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018, quanto à distribuição dos conteúdos das coleções aprovadas e uma visão geral da probabilidade nas coleções. A seguir, justificamos brevemente como foram escolhidas uma coleção dos anos iniciais, uma coleção dos anos finais do ensino fundamental e uma coleção do ensino médio dentre as coleções de livros didáticos aprovadas nos respectivos PNLD.

3.3 ESCOLHA DAS COLEÇÕES ANALISADAS

Para a escolha da amostra das coleções de livros didáticos a serem analisadas, foi feito, primeiramente, uma leitura dos Guias do PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018. Estabelecemos o critério de buscar por uma coleção em cada nível de escolaridade que fosse de mesma autoria, pois tomamos como hipótese que em coleções de mesma autoria haveria uma coerência interna, uma continuidade do ensino proposto para o estudo de probabilidade desde os primeiros anos do ensino fundamental até o final do ensino médio.

Baseadas no levantamento feito nesses Guias, constatamos que apenas um autor, Luiz Roberto Dante, tinha uma coleção aprovada em cada um dos três níveis de escolaridade, que foram, assim, definidas para a análise em nossa pesquisa. Suas quatro coleções aprovadas e que constam nesses Guias são:

- Guia do PNLD/2016: **Ápis – Alfabetização Matemática** (1º ao 3º ano) e **Ápis – Matemática** (4º e 5º anos)¹⁸;
- Guia do PNLD/2017: **Projeto Teláris – Matemática**;
- Guia do PNLD/2018: **Matemática – Contexto & Aplicações**.

¹⁸ **Ápis – Alfabetização Matemática** e **Ápis – Matemática** constituem uma coleção destinada aos anos iniciais do ensino fundamental.

A seguir apresentamos a segunda parte desta dissertação que contém a produção e a análise de dados da proposta de ensino de probabilidade na educação básica, a partir das coleções de livros didáticos escolhidas.

PARTE II – PRODUÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Nesta segunda parte da dissertação, apresentamos a descrição dos resultados da produção e análise de dados. Dividiu-se essa parte em três capítulos, cada um correspondendo à análise de uma coleção de livros didáticos destinada a um dos segmentos da educação básica. Os capítulos foram divididos, ainda, em diferentes seções, para melhor compreensão. Vale lembrar que nos Apêndices A e B estão organizados todos os tipos de tarefas e técnicas identificados e modelados ao longo das quatro coleções, para que o leitor consulte sempre achar necessário.

A seguir, apresentamos a análise da coleção do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental da Coleção Ápis.

4. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DESTINADA AOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo apresentamos a produção e análise de dados da coleção de livros didáticos referente aos anos iniciais do ensino fundamental. Para isso dividiu-se o capítulo em quatro seções. Na primeira há uma discussão quanto aos procedimentos de análise da coleção, que foi diferente das outras coleções por não apresentar capítulos específicos para o estudo de probabilidade. Na segunda seção expomos a organização praxeológica dos três primeiros volumes desta coleção, que correspondem aos volumes do ciclo de alfabetização. Na terceira seção apresentamos a organização praxeológica dos dois últimos volumes e, por fim, na última seção é apresentada uma síntese dos dados produzidos.

4.1 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Como vimos anteriormente, várias ideias estão relacionadas ao estudo de probabilidade, que é o caso das ideias de possibilidades, chance, acaso e incerteza, mobilizadas em situações de aleatoriedade, além de conceitos como fração, proporção, razão e porcentagem (SANTANA, 2011). Nos livros de primeiro ao quinto ano da coleção que analisamos não há capítulos destinados ao estudo de probabilidade. No MP do volume referente ao primeiro ano afirma-se que são introduzidos “temas atuais, como estatística e possibilidades, raciocínio combinatório [...]” (DANTE, 2014, v.1, p. 287). No MP do terceiro ano, afirma-se que “as ideias sobre estatística e **probabilidade**, por meio da exploração de tabelas, gráficos e ‘chance’, são trabalhadas informalmente em toda a Coleção, devido à grande importância que assumem na sociedade moderna” (DANTE, 2014, v.3, p. 386, grifo nosso). Afirma-se, ainda, tratar de

atividades com ideias que prepararão para o estudo de probabilidade, de maneira intuitiva. Tendo em vista o afirmado nos MP, decidiu-se analisar cada página dos cinco volumes da coleção, à busca de qualquer menção ou atividade relacionada a conceitos, procedimentos relacionados a esse estudo. Para realizar esta análise, fizemos uma busca por atividades que trazem em seu enunciado, nas orientações ao professor, ou ainda como tópico de alguma seção, as palavras “possibilidades”, “chance”, “acaso” ou até “probabilidade” e verificamos se tais conceitos ou focos de estudo estavam relacionadas à probabilidade. Aquelas que acreditamos estarem relacionadas ao estudo de probabilidade, modelamos por meio do quarteto praxeológico.

A análise dos volumes do primeiro ao terceiro ano é apresentada em conjunto, por fazerem parte do ciclo de alfabetização matemática, no item 4.2. Esse mesmo procedimento de busca foi realizado nos dois últimos volumes, referentes ao quarto e ao quinto ano e a análise é apresentada no item 4.3. Ressaltamos que o Guia do PNLD/2016 aponta, na resenha dessa coleção, que “apenas no livro 5 os conteúdos do campo [Tratamento da informação] são estudados em momento especificamente a ele dedicado, embora ao longo de toda a coleção sejam encontrados como parte das atividades dos demais campos” (BRASIL, 2015, p. 229).

É importante destacarmos que, para as análises, utilizamos os livros destinados ao professor, denominado manual do professor (MP), por ser constituído do livro do aluno, por ter comentários, respostas de atividades e observações ao longo de cada volume, além de um complemento ao final de cada volume com a descrição das unidades e capítulos da coleção, objetivos de ensino para aquela etapa de escolaridade, orientações e sugestões ao professor para a utilização da coleção, pressupostos teóricos para o ensino da Matemática, recursos didáticos auxiliares, dentre outros. Em algumas ocasiões, é no MP que encontramos discursos ou justificativas para a proposta de ensino apresentada no volume analisado. Por isso analisar o livro do professor é importante para a caracterização da organização praxeológica, uma vez que ajuda a compreender as escolhas dos elaboradores do livro didático.


Ressaltamos que ao longo de toda a coleção foram encontradas atividades com a ocorrência da palavra “possibilidade”, mas nem todas as situações foram propostas com o enfoque no estudo de probabilidade. Citamos como exemplo a atividade encontrada no primeiro volume desta coleção, que trabalha a composição de quantidades:

Explorar e descobrir

Esta atividade é um exemplo de situação que apresenta várias soluções corretas.


JOÃO DESCOBRIU UMA MANEIRA DE OBTER 10 JUNTANDO DUAS BARRINHAS COLORIDAS. VEJA COMO ELE FEZ E A ADIÇÃO QUE ELE INDICOU.

2 8



10

$2 + 8 = 10$



MATEMÁTICA PARA O 1º ANO
ARTEFATO DA EDITORA

JUNTE-SE A UM COLEGA, USEM AS BARRINHAS COLORIDAS E
DESCUBRAM OUTRAS TRÊS POSSIBILIDADES DE OBTER 10.
INDIQUEM AS ADIÇÕES CORRESPONDENTES.

_____ + _____ = 10

_____ + _____ = 10

_____ + _____ = 10

Respostas possíveis: 1 + 9; 3 + 7; 4 + 6; 5 + 5; 6 + 4; 7 + 3; 8 + 2; 9 + 1.

Figura 8: Atividade cujo foco de estudo não é probabilidade

Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 1, p. 134

Nesta atividade pede-se para que o aluno escreva “algumas possibilidades de obter a soma 10”. No MP é apontado que nesta primeira etapa de alfabetização matemática, a composição de números é importante para o estudo da adição de números naturais e que, nas atividades dessa seção, há uma continuidade do “trabalho com as barrinhas coloridas [...], explorando pouco a pouco a representação da adição com os símbolos + e =” (DANTE, 2014, v.1, p. 391). Entendemos que atividades como essa, ainda que tenha a palavra “possibilidade” em seu enunciado, não propõe como foco central o estudo de probabilidade. Além disso, acreditamos que esta situação não envolva a ideia de evento aleatório e, então, não se insere no contexto probabilístico, pois:

Um evento aleatório está sendo realizado quando: tem a intervenção do acaso, pode ser reproduzido nas mesmas condições iniciais, os resultados possíveis podem ser identificados a priori, mas não se pode determinar o resultado final. Neste caso, dizemos que estamos trabalhando em um problema no contexto probabilístico. (MANDARINO *in* CARVALHO, 2010, p. 235).

Nesse sentido, consideramos as situações de possibilidades envolvendo a aleatoriedade como sendo as propostas para o estudo de probabilidade. As atividades como da Figura 8 não foram consideradas em nossa busca por serem atividades que não visam ou não preparam diretamente para o estudo de probabilidade.

Já com relação às atividades de combinatória, consideramos como situações propostas para o estudo de probabilidade aquelas que envolvem um contexto de aleatoriedade. Não temos dúvidas de que há uma estreita relação entre combinatória e probabilidade, pois em algumas situações probabilísticas o levantamento do espaço amostral é realizado com alguma técnica da combinatória. Focamos, então, nas propostas diretamente relacionadas ao estudo de probabilidade. Em algumas situações deparamo-nos com atividades envolvendo probabilidade e combinatória que foram, então, consideradas em nossa investigação.

A seguir, descrevemos o estudo realizado nos volumes de primeiro ao terceiro ano.

4.2 CICLO DE ALFABETIZAÇÃO: TAREFAS E TÉCNICAS QUE PREPARAM PARA O ESTUDO DE PROBABILIDADE

Nos volumes do ciclo de alfabetização, ao buscarmos por tarefas que utilizavam “possibilidades”, “chance”, “acaso”, “incerteza” ou até “probabilidade” em seu enunciado, em orientações ao professor ou em tópicos de alguma seção de estudo, encontramos apenas atividades com a palavra “possibilidades” que preparam para o estudo de probabilidade, num total de uma atividade no segundo volume e quatro atividades no terceiro volume. A seguir são apresentadas as tarefas e as técnicas identificadas e modeladas.

No segundo volume identificamos a seguinte atividade:

17 POSSIBILIDADE: O QUE QUER DIZER?
 VEJA O EXEMPLO AO LADO.
 JOGUEI 2 DADOS IGUAIS E SAÍRAM 4 E 2.
 ESTA É UMA POSSIBILIDADE DE OBTER 6 PONTOS.
 DESENHE ABAIXO OUTRAS DUAS POSSIBILIDADES PARA OBTER 6 PONTOS.

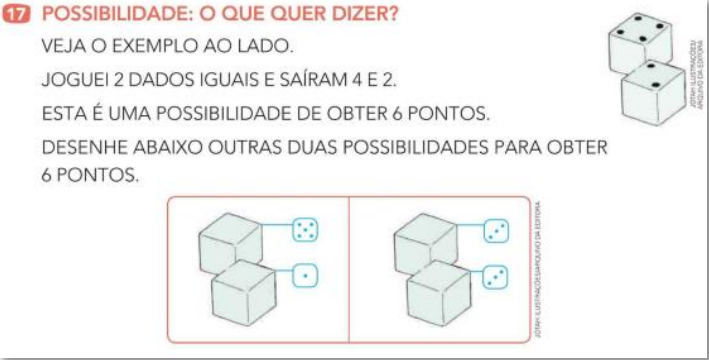


Figura 9: Primeira atividade relativa ao estudo de probabilidade
Fonte: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática, volume 2, p. 24

Consideramos essa tarefa como sendo a primeira para o estudo de probabilidade, por envolver aleatoriedade e possibilidade. Nessa situação, entendemos que “obter a soma 6” ou “seis pontos” é o evento específico que pertence ao experimento aleatório “lançamento de dois dados de seis faces”. Ao apresentar ambos os dados como sendo iguais, inferiu-se que a ordem de lançamento dos dados não está sendo levada em consideração, ou seja, obter “5 e 1” é o

mesmo que “1 e 5”. Como “4 e 2” já foram apresentados como resultados, restam mais duas possibilidades, que são “5 e 1” e “3 e 3”. Modelamos como sendo do subtipo $T_{1.1}$:

- $T_{1.1}$: *Escrever/desenhar algumas possibilidades de ocorrência de um determinado evento.*

Consideramos esse como sendo um subtipo pois não é solicitado que todas as possibilidades do evento sejam escritas e, sim, que “outras duas” sejam escritas. Assim, entendemos que $T_{1.1}$ é um subtipo de tarefas de T_1 , que modelamos como sendo:

- T_1 : *Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico.*

Buscamos, então, indicativos de técnicas para a resolução desta primeira tarefa envolvida no estudo de probabilidade. No livro do professor, logo após o enunciado da atividade, são apresentados dois possíveis resultados para essa soma no ostensivo *figural*. Além disso, no MP é dito que:

Na página 24, a atividade 17 explora possibilidades. Por exemplo, no lançamento de uma moeda há duas possibilidades: sair cara ou sair coroa. É interessante proporcionar a exploração concreta desses materiais. Para isso, reúna a turma em grupos e entregue um dado para cada grupo. Os alunos deverão explorar possibilidades como as apresentadas na atividade. Discuta com eles a impossibilidade de outra solução para obter 6 pontos. (DANTE, 2014b, p. 382).

Aponta-se, assim, para a importância de proporcionar a exploração concreta desses materiais, nesse caso, os dados. Para isso, é sugerido que os alunos sejam dispostos em pequenos grupos e que seja entregue dois dados para cada grupo para que eles possam explorar essas possibilidades, jogando. Assim, entendemos como uma primeira técnica para solucionar tarefas desse subtipo como sendo τ_1 :

τ_1 : *Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas¹⁹-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento.*

Na obra referente ao terceiro ano, a primeira tarefa identificada encontra-se no primeiro capítulo do volume, cujo foco é o estudo de números.

¹⁹ Adiante apresentamos tarefas que mobilizarão a manipulação de ostensivos *moedas ou notas* para a obtenção de possibilidades de um evento específico, por isso incluímos nesta primeira técnica.

Números e possibilidades

Quando fazemos o levantamento de possibilidades, estamos usando o raciocínio combinatório.

No lançamento de duas moedas, uma de 1 real e outra de 50 centavos, temos 4 possibilidades de resultado das faces voltadas para cima. Escreva as que faltam.

Use 2 moedas e mostre concretamente aos alunos as 4 possibilidades.

Figura 10: Atividade de possibilidades no lançamento de duas moedas
Fonte: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática, volume 3, p.17

Nesta situação, propõe-se que a criança complete as possibilidades que faltam no lançamento de duas moedas. Para isso, já é apresentada à criança o total de possibilidades (que neste caso são quatro) e os ostensivos figurais das moedas também reforçam esse resultado. Representar a primeira moeda sendo de um real e a segunda sendo de cinquenta centavos indica que esta ordem está sendo levada em consideração. Apontamos tal tarefa como pertencente ao subtipo $T_{1.2}$:

- $T_{1.2}$: *Completar as possibilidades que faltam de ocorrência de um determinado evento.*

Consideramos como sendo um subtipo por solicitar que sejam completadas as possibilidades do evento específico. Assim, $T_{1.2}$ está contido em T_1 . Como mostrado no livro do professor, a técnica para resolver essa tarefa é a que chamamos de τ_2 :

τ_2 : *Escrever o nome correspondente à face representada no ostensivo figurial.*

Além desta técnica, outra técnica foi identificada no MP, quando é proposto que: “Caso ache conveniente, entregue aos alunos as moedas de brinquedo do Meu Bloquinho para que possam manipulá-las e realizar a atividade concretamente” (DANTE, 2015, v.3, p.389). Nesta técnica ocorre a manipulação do ostensivo moedas para a obtenção das possibilidades que faltam, ou seja, é a τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*), modelada anteriormente.

Nesta atividade (Figura 10), ainda que o MP tenha sugerido a utilização e manipulação do ostensivo *moedas* para a obtenção das possibilidades que faltam, acreditamos que apresentar as possibilidades “prontas”, e somente pedir para a criança escrever os nomes das faces das moedas, não possibilita a esta chegar à uma solução autonomamente. Silva (2016, p.6) concluiu em sua investigação que “o uso de jogos possibilitou que as noções intuitivas [de aleatoriedade] emergissem com naturalidade, mas que se faz necessário haver instrução, a qual pode também

incluir esse recurso, para construção de conhecimentos probabilísticos mais coerentes”. É incoerente o livro apresentar uma afirmação de que é importante a exploração e manipulação de materiais concretos, para a obtenção das possibilidades, quando neste já estão dadas as possibilidades do evento.

As duas próximas tarefas identificadas encontram-se na página 42 que trata do trabalho com valores monetários e possibilidades. Essas duas tarefas foram apresentadas em uma atividade com o seguinte enunciado:

7 Possibilidades

Na carteira de Mara há três notas de R\$ 100,00 e duas notas de R\$ 10,00.

a) Se Mara retirar duas dessas notas, sem olhar, que quantias ela pode obter?

_____ *R\$ 200,00; R\$ 110,00 ou R\$ 20,00*

b) E se ela retirar três notas? _____ *R\$ 300,00; R\$ 210,00 ou R\$ 120,00*




Figura 11: Atividade de possibilidades de valores monetários no terceiro ano
Fonte: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática, volume 3, p.42

O contexto trazido trabalha a ideia de acontecimentos aleatórios, pois não se sabe a quantia que sairá na retirada de duas notas (uma vez que as possibilidades são duzentos, cento e dez, ou vinte reais), e nem na retirada de três notas (cujas possibilidades são trezentos, duzentos e dez ou cento e vinte reais). Assim, a criança terá que escrever todas essas possibilidades dos experimentos “retirada de duas notas” e “retirada de três notas”, sem olhar, ou seja, ao acaso. Ao solicitar todas as possibilidades dessas situações, entendemos que nestas tarefas a criança deverá escrever todos os elementos do espaço amostral de tais experimento. Bryant e Nunes (2012, p.5, tradução nossa) afirmam que:

Só podemos calcular as probabilidades de eventos específicos se soubermos quais são todas as possibilidades. O conjunto completo de possibilidades em um problema de probabilidade é chamado de "espaço amostral". Elaborar o espaço amostral é o primeiro passo essencial para resolver qualquer problema de probabilidade [...].

Consideramos, então, essas duas tarefas pertencentes a um novo tipo que modelamos como T_2 :

- T_2 : Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.

Como o contexto está associado a quantias, no livro do professor é sugerido que “peça aos alunos que utilizem o dinheiro recortado do Meu bloquinho para desenvolver as atividades

a seguir. Por exemplo, nas atividades de 4 a 7, peça a eles que reproduzam as quantias concretamente” (DANTE, 2015, v.3, p. 41). Isso indica que a técnica τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas -, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*), que possibilita a manipulação do ostensivo *notas* para a composição de valores monetários com as quantias de cem e dez reais. Com essa técnica é possível que a criança escreva todas as possibilidades de quantias na retirada de duas notas e de três notas do montante de três notas de cem reais e duas notas de dez reais.

Em seguida, a última tarefa identificada neste volume, também trata do contexto de retirada, sem olhar, de quantias. Desta vez o enunciado é o seguinte: “Em um saquinho há quatro moedas como estas ao lado. Retirando duas delas sem olhar, que quantias podemos obter? Use as moedas do Meu bloquinho para representar as possibilidades e escreva abaixo todas as quantias que podemos obter” (DANTE, 2015, v.3, p. 187). Nessa tarefa também se pede para obter as possibilidades de quantias na situação aleatória “retirar duas moedas, sem olhar”. Trata-se de uma tarefa que também pertence à T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) e, para sua resolução é proposta a manipulação do ostensivo *moedas* disponível ao final do livro. Isso aponta novamente para a mobilização da técnica τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou nota -, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*) na resolução desta tarefa.

Assim, identificamos ao todo, nos três volumes relativos ao ciclo de alfabetização, a ocorrência de um tipo de tarefas, dois subtipos de tarefas e duas técnicas de resolução que preparam as crianças para o estudo de probabilidade, envolvendo a ideia de “possibilidades” relacionadas a contextos de lançamentos de dados, lançamentos de moedas e retiradas (ao acaso) de determinadas quantias.

Esta coleção disponibiliza, ao final de cada livro, um glossário ilustrativo contendo definições ou exemplos para o auxílio na definição de palavras que supostamente auxiliam a compreensão dos conceitos. Aponta-se que “é interessante que o aluno consulte o glossário sempre que aparecer no texto um termo que ele desconheça. Existe um vocabulário específico da Matemática e é importante que os alunos conheçam as nomenclaturas, percebam e compreendam a sua aplicabilidade” (DANTE, 2014, v. 5, p. 351). Este é o único momento que podemos considerar como sendo de *institucionalização* do conceito de “possibilidade” ao encontrarmos no glossário do terceiro volume que “quando jogamos uma moeda, uma possibilidade é sair cara na face voltada para cima, e outra possibilidade é sair coroa. Quando jogamos um dado, são seis as possibilidades de resultado da face voltada para cima” (DANTE,

2014, v.3, p. 269). Esses foram os dois exemplos para institucionalizar o significado de “possibilidade”.

Percebemos que nessas atividades para o estudo de probabilidade no ciclo de alfabetização, foram propostas situações que envolvem experimentos aleatórios e possibilidades de resultados de eventos específicos, ainda que não apresentando esses termos. A primeira técnica (τ_1 : *Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas - , buscando por possibilidades de ocorrência do evento*) apontada para a resolução dos dois tipos de tarefas possibilita a experimentação por meio da manipulação de ostensivos *dados, moedas ou notas*. Já a segunda técnica (τ_2 : *Escrever o nome correspondente à face representada no ostensivo figural*) mobiliza o ostensivo *figural*. Essas propostas de resolução de eventos em situações aleatórias corroboram com Lopes (1998, p. 28), que aponta a importância de que práticas “[...] sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, observando e construindo os eventos possíveis, através de experimentação concreta”.

A seguir, apresentamos os dados produzidos e analisados nos últimos dois volumes dos anos iniciais.

4.3 QUARTO E QUINTO ANOS: ATIVIDADES DE POSSIBILIDADES E INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE PROBABILIDADE

Nos volumes referentes ao quarto e quinto anos desta coleção realizamos o mesmo processo de busca de atividades que utilizassem “possibilidades”, “chance”, “acaso” ou “probabilidade” em seu enunciado, em orientações ao professor ou em tópicos de alguma seção de estudo. Nesta busca identificamos duas atividades de “possibilidades” que preparam para o estudo de probabilidade, uma atividade em cada obra. Tratam-se de tarefas que contribuem para o estudo de probabilidade e, em especial, acreditamos que são tarefas que contribuem para o entendimento de como determinar o espaço amostral em situações que envolvem aleatoriedade.

No volume referente ao quarto ano, na última unidade de estudo, encontramos uma atividade proposta com o seguinte enunciado:

1 Possibilidades

Quando jogamos uma moeda, há duas possibilidades para a face voltada para cima: pode sair cara e pode sair coroa.

Imagine agora se jogarmos 4 moedas iguais. Uma das possibilidades é saírem 3 caras e 1 coroa:



Em seu caderno, escreva todas as possibilidades e indique quantas são.

São 5 possibilidades: 3 caras e 1 coroa; 4 caras; 2 caras e 2 coroas; 1 cara e 3 coroas; 4 coroas.

Figura 12: Categorias de possibilidades no lançamento de quatro moedas no quarto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 4, p. 262

Nesta situação, primeiramente são apontadas as possibilidades no lançamento de apenas uma moeda: cara ou coroa. Já no lançamento de quatro moedas, aponta-se que uma das possibilidades é de sair três caras e uma coroa. Uma primeira tarefa é que a criança escreva todas as possibilidades do experimento “lançamento de quatro moedas” e, a outra, que indique a quantidade total de possibilidades. Observamos que nesta situação, ao tratar as moedas como sendo iguais, a ordem dos lançamentos não está sendo levada em consideração, isto é, sair “cara, cara, coroa, cara” é o mesmo que sair “coroa, cara, cara, cara” ou “cara, coroa, cara, cara”, etc. Sendo assim, o total de possibilidades desse experimento é cinco, conforme mostrado no LD do professor (Figura 12).

Nesta atividade entendemos que duas tarefas distintas são propostas. Primeiramente, ao solicitar todas as possibilidades do experimento “lançamento de quatro moedas iguais”, a tarefa pertence ao tipo T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*). Nesta tarefa, e assim como vimos em tarefas do volume referente ao terceiro ano, foi utilizado o ostensivo figural para representar uma das possibilidades. Com isso podemos inferir que para resolver tal tarefa a criança poderia desenhar as outras possibilidades. No MP não encontramos comentários quanto às possíveis maneiras de resolução desta atividade, mas como neste volume também são disponibilizadas representações concretas de moedas e notas do sistema monetário brasileiro, acreditamos que a técnica τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas -, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*) pode ser mobilizada a resolução deste tipo de tarefas.

Em seguida, ao solicitar que seja indicada a quantidade total de possibilidades, entendemos essa parte como uma nova tarefa, que modelamos como sendo do subtipo $T_{2.1}$:

- $T_{2.1}$: Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.

Para indicar quantas possibilidades total há no experimento da situação da Figura 12, o aluno precisará apenas contar quantos são os elementos a partir dos elementos que ele já havia elencado na tarefa anterior (do tipo T_2). Para isso, a técnica de resolução desta tarefa de subtipo $T_{2.1}$ foi modelada como sendo τ_3 :

τ_3 : Contar os elementos do espaço amostral.

Esta foi a única atividade com tarefas identificadas no quarto volume que pareceu contribuir para o estudo de probabilidade.

Assim como vimos nos dois volumes anteriores, também identificamos o momento de institucionalização do conceito “possibilidade” no glossário deste volume, onde é apresentada a definição deste termo como sendo “cada fato que tem chance de ocorrer em uma situação” (DANTE, 2014, v. 4, p. 262) e dois exemplos ilustrativos, como vemos na Figura 13:



Figura 13: Possibilidade no glossário do quarto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 4, p. 262

No volume referente ao terceiro ano, a institucionalização do conceito “possibilidade” foi feita com a apresentação de dois exemplos muito semelhante a esses da Figura 13, o diferencial do volume referente ao quarto foi de definir “possibilidade” como sendo “cada fato que tem chance de ocorre em uma situação”. Esta é primeira ocasião em que aparece o termo “chance” nesta coleção. O ostensivo figural também foi apresentado nesta situação para representar as faces da moeda e o dado de seis faces.

Passamos agora para a descrição do que foi identificado no último volume da coleção dos anos iniciais, que se refere ao quinto ano. Neste volume identificamos uma atividade de

“possibilidades” que trabalha, novamente, a ideia de situação aleatória e pede “todas as possibilidades de um evento específico”. Esta atividade encontra-se na unidade 3 cujo título é *Adição e subtração com números naturais* que retoma algumas ideias de adição e subtração, explora propriedades de adição, arredondamentos e aproximações envolvendo adição e subtração, bem como o trabalho com o algoritmo e da adição e subtração e resolução de problemas.

4 Possibilidades

Desafie os alunos perguntando: Quantas são as possibilidades de sair soma maior do que 12? E menor do que 2? Eles devem responder que não existem essas possibilidades no lançamento de 2 dados, ou seja, o número de possibilidades é zero.

Bia jogou 2 dados de cores diferentes e obteve soma 8, com a face 4 no primeiro dado e a face 4 no segundo.

Indique todas as possibilidades de obter soma 8.

Depois escreva quantas são as possibilidades.

Possibilidade além de 4 + 4: 2 + 6, 3 + 5, 5 + 3, 6 + 2; ao todo, 5 possibilidades.

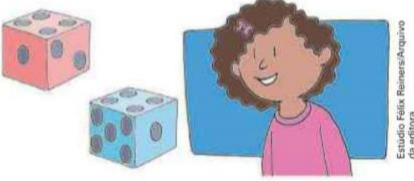


Figura 14: Atividade de possibilidades da soma oito no lançamento de dois dados de seis faces
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 61

Nesta atividade, o experimento aleatório é “jogar dois dados de seis faces” e o evento específico é “soma oito”. Pede-se que todas as possibilidades sejam indicadas e, em seguida, que o total de possibilidades seja identificado. Consideramos, então, que essa primeira parte da tarefa é do tipo T_1 : *Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico*. Observamos, ainda, que nesta situação os dados são apresentados de cores diferentes (vermelho e azul), o que mostra que a ordem dos lançamentos será levada em consideração, ou seja, “5 e 3” é diferente de “3 e 5”. No MP é apontado que esta atividade “relaciona a operação de adição com possibilidades (raciocínio combinatório)” (DANTE, 2014, v.5, p.363). Verificamos que nesta etapa de escolaridade o algoritmo da decomposição é trabalhado em decomposições de quantidades como nesta situação e, por estar em um capítulo relativo à adição, entendemos como uma nova técnica de resolução que modelamos como τ_4 :

τ_4 : *Escrever todas as possibilidades de decomposição da soma solicitada.*

Já a segunda parte, ao solicitar que a totalidade seja escrita também, vemos que há uma nova tarefa que acreditamos pertencer ao subtipo de tarefas $T_{1.3}$:

- $T_{1.3}$: *Indicar/escrever a quantidade total de possibilidades de ocorrência de um determinado evento.*

Para resolver essa tarefa de subtipo $T_{1.3}$, a criança precisará apenas contar os elementos já elencados ao escrever “todas as possibilidades de decomposição da soma oito”. Assim, definiu-se a técnica $\tau_{4.1}$:

$\tau_{4.1}$: *Contar os elementos (possibilidades) de um evento específico.*


Ainda nesta situação, propõe-se ao professor que “Desafie os alunos perguntando: Quantas são as possibilidades de sair soma maior do que 12? E menor do que 2? Eles devem responder que não existem essas possibilidades no lançamento de 2 dados, ou seja, o número de possibilidades é zero” (ibid., p.61). Tais questionamentos remetem à noção de evento impossível, ainda que informalmente.

Neste volume, além da atividade de possibilidades, encontramos também duas seções que pertencem a uma mesma unidade (Unidade 6) na qual é apresentada uma introdução ao conceito de probabilidade. Analisamos a organização didática e a organização matemática proposta nessas seções. Para esta análise, consideramos as definições, explicações, técnicas e escolhas didáticas para apresentar o tema e as atividades propostas para o estudo de probabilidade.

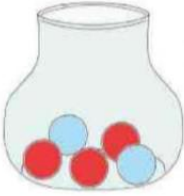
A unidade seis intitulada *Fração e Porcentagem* é dividida em quatorze seções e, dentre os objetivos apontados para essa unidade, tem-se o de *explorar a ideia de probabilidade e resolver problemas que envolvem fração, porcentagem e probabilidade*. Identificamos tal exploração e atividades nas seções intituladas *Fração e probabilidade* e *Fração e porcentagem*. No MP afirma-se que:

A ideia de chance faz parte do cotidiano. As pessoas querem saber que chance têm de acertar ou não em uma escolha. Procuram fazer "previsões" para saber se é mais provável ocorrer isso ou aquilo. Esse assunto faz parte de uma "alfabetização matemática" necessária na vida prática. Neste volume trabalhamos a ideia de chance, chegando à medida da chance ou probabilidade, inicialmente expressa por uma fração. (DANTE, 2014, v.5, p. 373 e 374).

Na seção *Fração e probabilidade*, a primeira situação proposta para introduzir o conceito de probabilidade apresenta o seguinte enunciado:

 **Fração e probabilidade**

1 Se você retirasse, sem olhar, uma bola do vidro ao lado, a chance maior seria a de pegar uma bola vermelha ou uma bola azul? Por quê? Converse com os colegas.
Vermelha, porque nesse vidro há mais bolas vermelhas do que azuis.



Félicie Reiners/Arquivo da Editora

Figura 15: Primeira situação na introdução de probabilidade no quinto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 147

Modelamos esta tarefa como pertencente a um novo subtipo de tarefas modelado como T_{3.1}:

- *T_{3.1}: Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento.*

No contexto da atividade proposta, espera-se uma resposta mais intuitiva ao perguntar se a chance maior é de retirar (sem olhar) uma bola azul ou vermelha. Para resolver um tipo de tarefa como esse, a criança deverá intuir que como há mais bolas vermelhas do que bolas azuis no ostensivo figural “recipiente de vidro”, há maior chance de pegar uma bola vermelha. Modelamos, então, como uma nova técnica, τ_5 :

τ_5 : *Associar os eventos específicos à:*

- *maior chance de ocorrência, quando tiver a maior quantidade de elementos;*
- *menor chance de ocorrência, quando tiver a menor quantidade de elementos.*

Nesta situação, o evento “retirar, ao acaso, uma bola vermelha” tem maior chance do que o evento “retirar, ao acaso, uma bola azul”, pois há mais bolas vermelhas do que azuis.

Após esta atividade a definição de probabilidade é institucionalizada e é indicada uma técnica para obtê-la:

A medida da chance, chamada **probabilidade**, muitas vezes pode ser indicada por uma fração.

Como há um total de 5 bolas e 3 delas são vermelhas, a **probabilidade** de retirar, sem olhar, uma bola vermelha é de **3 em 5** ou $\frac{3}{5}$.

Figura 16: Conceituação de probabilidade no quinto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 147

Em seções anteriores desta mesma unidade, o estudo de frações já havia sido realizado. Ao representar a probabilidade (na Figura 16) de retirar ao acaso uma bola vermelha como sendo o ostensivo *razão* “3 em 5” ou ostensivo *fração* “ $\frac{3}{5}$ ”, tal representação remeteu a uma das ideias relacionadas à fração apresentada anteriormente, cujo título é *Fração de um conjunto de elementos*. As ideias de razão e fração como um conjunto de elementos justificam a elaboração das técnicas τ_6 e τ_7 , mobilizadas para resolver o tipo de tarefas T_3 , proposto para o estudo de probabilidade, como vimos na Figura 16. Esse novo tipo de tarefas foi modelado como sendo:

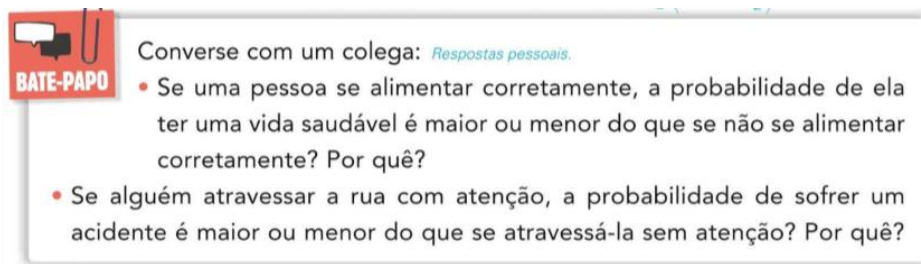
- T_3 : *Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.*

As técnicas apontadas utilizam as noções de razão (ou fração) de um conjunto de elementos. Temos, então, a técnica τ_6 :

τ_6 : *Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades.*

Essa técnica está relacionada a definição clássica de probabilidade, em que os eventos são equiprováveis. Após essas primeiras situações, são propostas mais tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) que mobiliza a técnica τ_6 para resolução, visto que o MP aponta que “a medida da chance é a probabilidade. Em todas as situações citadas o aluno deve indicar a probabilidade por meio de uma fração” (DANTE, 2014, v.5, p.379), mas as representações em “razão” também estão presentes nas respostas.

Para finalizar essa seção, é proposta uma atividade para ser discutida em sala, intitulada *Bate-Papo*, com as seguintes questões:



BATE-PAPO Converse com um colega: *Respostas pessoais.*

- Se uma pessoa se alimentar corretamente, a probabilidade de ela ter uma vida saudável é maior ou menor do que se não se alimentar corretamente? Por quê?
- Se alguém atravessar a rua com atenção, a probabilidade de sofrer um acidente é maior ou menor do que se atravessá-la sem atenção? Por quê?

Figura 17: Tarefas do tipo T_5 no quinto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 147

No MP é dito que nas “conversas do dia a dia, é comum aparecer a palavra probabilidade. Analise com a classe o assunto levantado no Bate-papo dessa página. Peça que discutam seu significado em cada caso” (DANTE, 2014, p. 379). A sugestão é que o professor

discuta com as crianças os significados de probabilidade, em matemática e no cotidiano. Como vimos no PNAIC (BRASIL, 2014) é muito importante tratar de maior e menor chance de acontecimentos e atividades como a proposta acima podem possibilitar tais discussões.

Nessas duas situações da Figura 17, as respostas pessoais envolverão crenças e opiniões daquele que estará respondendo. Vemos, assim, que não haverá uma técnica modelável para questões desse tipo, visto que exige um raciocínio pessoal, ou seja, não se trata de uma técnica explícita. Na primeira situação relativa a “mais ou menos chance” na introdução do tema, que tratava de bolas em um recipiente de vidro, havia uma lógica matemática ao relacionar a maior quantidade de bolas à maior chance. Já nessas duas situações da Figura 17, existe uma lógica em que se pode chegar à conclusão de que “uma pessoa que se alimenta melhor tem maior probabilidade de ter uma vida saudável” e “se uma pessoa atravessar a rua com atenção tem menor probabilidade de sofrer um acidente”. Mas essas não são as únicas respostas possíveis, visto que cada criança poderá levantar em consideração outros fatores, outras opiniões e crenças quanto a situações do cotidiano como essas. Tais situações se enquadram na concepção de probabilidade subjetiva, uma vez que mobilizam crenças, intuições e opiniões daqueles que buscarem resolvê-las. Com isso, agrupamos essas duas tarefas ao subtipo $T_{3.1}$ (*Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento*) por tratarem de questões “relativas a maior ou menor probabilidade de ocorrência de um evento”, mas que mobilizarão técnicas não descritíveis. É importante destacarmos que esta é a primeira situação envolvendo a probabilidade subjetiva, ainda que informalmente.

Na seção *Fração e Porcentagem*, antes de propor atividades de probabilidade, é apresentado o conceito de porcentagem a partir da fração (fração com denominador 100), e do cálculo de porcentagem. Identificamos uma nova técnica que será utilizada para resolução de tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) e que representa a probabilidade por meio do ostensivo *porcentagem*, que é obtido por uma fração. Modelamos essa nova técnica como sendo τ_7 :

τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.

Ainda nesta seção, identificamos duas tarefas para o estudo de probabilidade. A primeira contém o enunciado a seguir:

12 **Porcentagem e probabilidade**

Uma roleta tem 5 setores de tamanhos iguais marcados com as letras de **A** a **E**. Ao girá-la, qual é a probabilidade de a seta parar em uma vogal?

Dê a resposta no caderno em fração e em porcentagem.

$\frac{2}{5}$ ou 40% (5 letras (A, B, C, D, E); 2 vogais (A, E); 2 em 5 = $\frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100} = 40\%$).

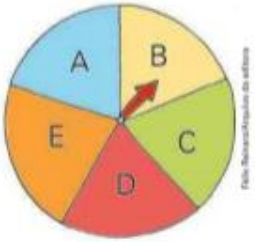


Figura 18: Porcentagem e probabilidade no quinto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 151

Nessa tarefa, uma roleta é dividida em cinco partes iguais (congruentes), cada qual com uma cor e letra do alfabeto. Pede-se a probabilidade de, ao girar a roleta, parar em uma vogal. Trata-se, então, de uma tarefa do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*). Ao solicitar que a resposta seja representada por uma fração e por uma porcentagem, as técnicas τ_6 (*Escrever a razão (ou fração) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) e τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*) deverão ser mobilizadas.

A última tarefa proposta, relacionada à probabilidade e porcentagem, foi identificada na seguinte atividade:

13 Agora é você quem cria a situação!

Copie e complete no caderno:

Em uma caixa há cartões azuis, cartões vermelhos e cartões brancos. Sorteando um desses cartões, a probabilidade de sair um cartão é de 50%.

Resposta pessoal. Exemplo: 2 cartões azuis, 6 vermelhos e 4 brancos; cartão vermelho: 6 em 12 = $\frac{6}{12} = \frac{1 \times 50}{2 \times 50} = \frac{50}{100} = 50\%$.

Figura 19: Criando uma situação envolvendo probabilidade no quinto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 151

No MP afirma-se que “é importante que o aluno crie sua própria situação, como na atividade 13, mostrando, assim, se assimilou o assunto estudado” (DANTE, 2014, v.5, p.379). Modelamos como tipo de tarefa T_4 :

- T_4 : Criar uma situação que envolva noções de probabilidade.

A técnica para resolução deste tipo de tarefa envolve, novamente, uma resposta pessoal, mas que se restringe a um raciocínio matemático em que, com os valores escolhidos pela criança, dê a probabilidade indicada na tarefa.

Uma última situação é proposta para a finalização do estudo de probabilidade neste volume por meio da seguinte tirinha:



Figura 20: Proposta de discussão do termo “probabilidade” no quinto ano

Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 151

No MP, é solicitado que essa tirinha seja interpretada com as crianças, mas não há orientações de discussões. Caberá, então, ao professor propor a abordagem da interpretação e discussão sobre o termo “probabilidades” usado pela personagem da tirinha. Entendemos que esta é a última tarefa proposta para o estudo de probabilidade e que é uma tarefa de um novo tipo que modelamos como segue:

- *T5: Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.*

Nesta situação não é possível identificar uma maneira de resolução, por se tratar de uma proposta de discussão que pode ser feita de diversas formas, cabendo ao professor conduzir as discussões e conclusões a serem observadas.

As unidades da coleção dos anos iniciais são finalizadas com uma seção intitulada *O que estudamos* em que são relacionadas as principais temáticas trabalhadas na unidade. Na unidade 6, em que identificamos a introdução do conceito de probabilidade, entendemos que a esta seção se caracteriza como o momento de *avaliação* do estudo de probabilidade. Para tanto, em uma frase afirma-se o que foi trabalhado e é dado um exemplo de situação com a representação da probabilidade de um evento específico:

Trabalhamos com a noção de probabilidade, que é a medida da chance. Ela pode ser indicada por uma fração ou uma porcentagem.

- Sorteando uma letra da palavra TIGRE, a probabilidade de sair uma vogal é de 2 em 5 ou $\frac{2}{5}$ ou 40%.


Figura 21: Momento de avaliação do estudo de probabilidade no quinto ano

Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 158

Neste momento de avaliação, probabilidade é definida como “a medida da chance” e pode ser representada pelos ostensivos razão (ou fração) e porcentagem. Com isso, percebemos a evolução das praxeologias até aqui e que pretendeu-se chegar a definição clássica de probabilidade calculada por uma fração ou uma porcentagem.

Para finalizar, o momento de institucionalização do conceito de possibilidade é mais uma vez tratado no glossário deste volume. Apontou-se a definição e os dois exemplos: “Cada fato que pode ocorrer em uma situação. Quando lançamos uma moeda, sair cara é uma possibilidade. São 6 as possibilidades de resultado quando lançamos um dado” (DANTE, 2014, v.5, p. 282), bem próximo ao que foi observado no volume anterior. Encontramos, também, a institucionalização do conceito probabilidade e um exemplo que aponta a probabilidade de um evento sendo representada por meio dos ostensivos fração (ou razão) e porcentagem, como vemos a seguir:

Probabilidade (p. 147)
 Medida da chance de algo ocorrer.
 Em um saquinho há 8 bolas: 6 são vermelhas, e 2 são verdes.



Ao retirar uma bola ao acaso (sem olhar), a probabilidade de sair uma vermelha é de $\frac{3}{4}$
 ou 75% $\left(6 \text{ em } 8 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%\right)$.

Figura 22: Probabilidade no glossário do quinto ano
Fonte: Coleção Ápis – Matemática, volume 5, p. 282

Este é o primeiro episódio que vemos a ocorrência do termo “acaso”, que também traz uma noção importante ao estudo de probabilidade, a noção de aleatoriedade, como vimos nos documentos oficiais. Novamente a probabilidade de um evento ocorrer é representada pelos ostensivos fração (ou razão) e porcentagem, o que reforça a mobilização das técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) e τ_7 (*Dado a fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento, calcular a fração equivalente de denominador 100*) no cálculo das probabilidades de eventos.

Observamos, também, que a justificativa para usar o ostensivo fração (ou razão) aparece na definição de probabilidade e no exemplo de fração de um conjunto de elementos. Isso aponta para um início de constituição do entorno tecnológico-teórico que valida as técnicas que mobilizam fração e porcentagem na representação da medida de chance, a probabilidade.

A seguir, apresentamos uma síntese dos dados produzidos na coleção de livros didáticos destinados aos anos iniciais do ensino fundamental quanto à proposta de ensino de probabilidade nesta etapa de escolarização básica.

4.4 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS NA COLEÇÃO DOS ANOS INICIAIS

Na coleção de livros didáticos dos anos iniciais, buscamos identificar as praxeologias propostas para o estudo de probabilidade. Como vimos, nesta coleção não havia capítulos específicos para o estudo deste tema. Com as leituras realizadas para o entendimento de probabilidade, percebemos que algumas palavras e conceitos estão fortemente relacionadas a esse estudo, que é o caso das ideias de possibilidades, chance, acaso, incerteza, dentre outras, em contextos envolvendo a aleatoriedade. Ao procurarmos pela ocorrência dessas palavras ao longo da coleção, nos volumes referentes ao segundo, terceiro, quarto e quinto anos, foram identificadas atividades de “possibilidades” que preparavam para o estudo de probabilidade, em situações de aleatoriedade.

No volume referente ao segundo ano, identificamos o primeiro encontro com a praxeologia por meio de uma primeira tarefa que modelamos como sendo do subtipo $T_{1.1}$ (*Escrever/desenhar algumas possibilidades de ocorrência de um determinado evento*) e uma primeira técnica de resolução τ_1 (*Manipular ostensivos – dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*), ou seja, vinculou-se ao momento de exploração de um tipo de tarefas e elaboração de uma técnica para sua resolução.

No terceiro ano, dois novos tipos e tarefas são modelados, $T_{1.2}$ (*Completar as possibilidades que faltam de ocorrência de um determinado evento*) e T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) e uma nova técnica, τ_2 (*Escrever o nome correspondente à face representada no ostensivo figural*). E, no quarto ano, mais um subtipo de tarefas inédito $T_{2.1}$ (*Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) que mobiliza a técnica τ_3 (*Contar os elementos do espaço amostral*). Momentos de institucionalização do termo “possibilidade” foram identificados nos segundo, terceiro e quarto volumes por meio da apresentação de definição ou exemplificações nos glossários, localizados ao final de cada volume.

Na organização praxeológica do volume referente ao quinto ano, além de identificarmos uma atividade de possibilidades, deparamo-nos com duas seções que trabalham a introdução do conceito de probabilidade. Observamos que a escolha didática foi de apresentar primeiramente as técnicas de resolução (por meio de exemplos resolvidos de situações probabilísticas), a institucionalização de probabilidade como a “medida de chance” para, então, propor tarefas relativas à probabilidade. Neste volume também identificamos o momento de institucionalização dos termos “possibilidade” e “probabilidade”, assim como um momento de avaliação da praxeologia em que se valorizou a representação da probabilidade por meio dos ostensivos fração (ou razão) e porcentagem, o que acreditamos ter enfatizado, inclusive, a definição clássica de probabilidade.

Vimos que em algumas ocasiões as visões intuitiva e subjetiva de probabilidade também estiveram presentes nessa organização proposta, ainda que pouco, por meio de tarefas que exigiam argumentações e estratégias pessoais da resolução das crianças e diferentes interpretações para os significados de probabilidade no cotidiano, bem como crenças para decisões do cotidiano em que a probabilidade de algum acontecimento é classificada como maior ou menor.

Nesta coleção não identificamos a visão frequentista de probabilidade, que acreditamos que já poderia ter sido explorada por meio de experimentos e observações de resultados, como em lançamentos de medas e dados, que foram inclusive os ostensivos mais apresentados para manipulação em situações de aleatoriedade. Isso porque, “ao observarem a frequência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem suas primeiras noções de probabilidade” (BRASIL, 1997, p. 58). Além disso, corroboramos com Borba (2017, p.92) ao afirmar que:

A defesa de iniciar o estudo desses conceitos complexos bem antes, está amparado na ideia de que os raciocínios combinatório e probabilístico levam muito tempo para seus desenvolvimentos e iniciar cedo a discussão sobre os mesmos possibilita um mais amplo desenvolver posterior. O estudo da Combinatória e da Probabilidade junto a crianças novas é defendido aqui com uso de recursos e suportes representacionais adequados. O uso de material manipulativo, de jogos e de construção de árvores – virtuais ou não – têm se mostrado como meios eficientes para crianças pensarem em situações combinatórias e probabilísticas.

Já em relação à visão axiomática de probabilidade, que também não se fez presente, nos parece ter um alto grau de complexidade e rigor matemático que, para essa etapa de escolarização, não precisaria ser explorada.

Nos quadros que seguem, sistematizamos todos os tipos e subtipos de tarefas, bem como as técnicas, presentes na coleção destinada aos anos iniciais do ensino fundamental que analisamos:

Quadro 3: Tipos de tarefas, subtipos de tarefas e técnicas identificadas na Coleção Ápis

T ₁ : Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico.	T _{1.1} : Escrever/desenhar algumas possibilidades de ocorrência de um determinado evento.
	T _{1.2} : Completar as possibilidades que faltam de ocorrência de um determinado evento.
	T _{1.3} : Indicar/escrever a quantidade total de possibilidades de ocorrência de um determinado evento.
T ₂ : Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.	T _{2.1} : Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	T _{3.1} : Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento.
T ₄ : Criar uma situação que envolva noções de probabilidade.	
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.	
Técnicas	
τ ₁ : Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento.	
τ ₂ : Escrever o nome correspondente à face representada no ostensivo figural.	
τ ₃ : Contar os elementos do espaço amostral.	
τ ₄ : Escrever todas as possibilidades de decomposição da soma solicitada.	
τ _{4.1} : Contar os elementos (possibilidades) de um evento específico.	
τ ₅ : Associar os eventos específicos à: <ul style="list-style-type: none"> • maior chance de ocorrência, quando tiver a maior quantidade de elementos; • menor chance de ocorrência, quando tiver a menor quantidade de elementos. 	
τ ₆ : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades.	
τ ₇ : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de um evento.	

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No quadro a seguir, apresentamos o quantitativo de tipos de tarefas, subtipos de tarefas e as técnicas que mobilizadas o longo da coleção Ápis:

Quadro 4: Quantitativo de tipos de tarefas, subtipos de tarefas e técnicas ao longo da Coleção Ápis

Volume	Tipos e subtipos de tarefas propostos	Técnicas que se espera que sejam mobilizadas	Total
2º ano	T _{1.1}	τ_1	1
3º ano	T _{1.2}	τ_1 ou τ_2	1
	T ₂	τ_1	3
4º ano	T ₂	τ_1	1
	T _{2.1}	τ_3	1
5º ano	T ₁	τ_4	1
	T _{1.3}	$\tau_{4.1}$	1
	T _{3.1}	τ_5	1
			2
	T ₃	τ_6	8
		τ_6 e τ_7	1
	T ₄		1
T ₅		1	
Total de tarefas			23

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Na primeira coluna são indicados os volumes, na segunda os tipos de tarefas e na terceira coluna as técnicas que podem ser mobilizadas para as resoluções. Na última coluna indicamos a quantidade de vezes que o tipo de tarefa, resolvível pela determinada técnica, foi proposta em cada volume. As partes em cinza indicam as técnicas mobilizadas para resolver as tarefas do tipo T_{3.1} (*Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento*), T₄ (*Criar uma situação que envolva noções de probabilidade*) e T₅ (*Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade*), que não puderam ser descritas por envolver estratégias pessoais dos alunos.

Observamos que no volume referente ao quinto ano ocorre um crescimento significativo de tarefas e técnicas propostas para o estudo de probabilidade, isso porque é nesta ocasião que são introduzidos os primeiros conceitos relativos a esta temática.

A técnica τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*) esteve presente nos segundo, terceiro e quarto volumes, podendo ser mobilizada em seis tarefas. Acreditamos que as tarefas dos tipos T₁ (*Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico*), T₂ (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*), e subtipos T_{1.1} (*Escrever/desenhar algumas possibilidades de ocorrência de um determinado evento*), T_{1.2} (*Completar as possibilidades que faltam de ocorrência de um determinado evento*), T_{1.3} (*Indicar/escrever a quantidade total de possibilidades de um determinado evento*) e T_{2.1} (*Indicar/escrever a quantidade de elementos*

do espaço amostral de um experimento aleatório) preparam para o cálculo das possibilidades de eventos específicos em experimentos de natureza aleatória e visam trabalhar a ideia de espaço amostral e eventos em experimentos.

Silva (2016, p.15) afirma que:

[...] conhecer e entender o espaço amostral é parte essencial para encontrar a solução de situações de probabilidade, uma vez que o cálculo é baseado na análise do espaço amostral do problema. Assim, um bom caminho para resolução de muitos problemas de probabilidade é, de fato, conhecer o espaço amostral que pode ser visto como a listagem de todas as possibilidades de ocorrência de todos os possíveis eventos, como, por exemplo, as faces cara e coroa no lançamento de uma moeda.

O tipo de tarefas T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) e o subtipo de tarefas $T_{3.1}$ (*Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento*) já trabalham a noção de chance e sua medida, a probabilidade, visto que neste momento é institucionalizado tal conceito. T_3 foi o tipo de tarefas mais proposto neste volume e a técnica τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*), como a maneira de resolver, o que aponta para o momento de exploração deste tipo de tarefas e trabalho dessa técnica e também indica a valorização da visão clássica de probabilidade. Já os demais tipos de tarefas, T_4 (*Criar uma situação que envolva noções de probabilidade*) e T_5 (*Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade*), que também tratam de ideias relativas a probabilidade, não apresentaram técnicas descritíveis, visto que diferentes estratégias podem ser realizadas para suas resoluções. Observamos que só apareceu uma tarefa do tipo T_4 e uma do tipo T_5 , indicando pouca atenção ao longo do estudo proposto neste volume.

Quanto aos tipos e subtipos de tarefas mais frequentes ao longo desta coleção, destacamos que foram:

- 9 tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*);
- 4 tarefas do tipo T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*);

Com isso, inferiu-se que as tarefas mais propostas visam o trabalho de determinação de probabilidades e determinação do espaço amostral de situações probabilísticas.

Já em relação às técnicas mais frequentes, identificamos:

- 9 tarefas em que poderiam ser mobilizadas as técnicas τ_6 (*Escrever a razão entre os elementos favoráveis e o total de casos (possibilidades)*) ou τ_7 (*Escrever a*

fração cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades);

- 6 tarefas em que poderia ser mobilizada a técnica τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*).

Vemos, então, que as representações por meio do ostensivo fração (ou razão) das probabilidades desejadas foram as mais valorizadas. E, ao propor tarefas que mobilizam a manipulação de ostensivos, acredita-se que há uma intenção de valorização do trabalho de manipulação de ostensivos para o estudo inicial de probabilidade. Isso porque nas tarefas identificadas a manipulação de moedas, dados e notas foram propostos em atividades de determinação de possibilidades e espaço amostral de eventos.

No Quadro 5, trazemos os contextos aos quais as 23 tarefas identificadas são relacionadas ao longo da coleção dos anos iniciais:

Quadro 5: Quantitativo de tarefas e contextos da Coleção Ápis

Volume	Contextos	Quantidade de tarefas
2º ano	Lançamento de dois dados (iguais)	1
3º ano	Lançamento de duas moedas	1
	Retirada, ao acaso, de valores monetários de um recipiente	3
4º ano	Lançamento de uma moeda	2
5º ano	Lançamento de dois dados com cores diferentes	2
	Saúde alimentar	1
	Atenção no trânsito	1
	Retirada, ao acaso, de objetos de um recipiente	2
	Giro de uma roleta dividida em n partes iguais	6
	Lançamento de uma moeda	1
	Sorteio de um cartão em uma caixa	2
	Uso do termo “probabilidade” no cotidiano	1
Total de contextos		12

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Os contextos propostos nas atividades também apontam as escolhas didáticas, dos elaboradores da coleção, quanto ao estudo de probabilidade. Como podemos observar, no volume referente ao quinto ocorre um crescente de contextos propostos. Isso porque há um aumento significativo de tarefas para esse estudo.

Além de agruparmos as tarefas em relação aos contextos propostos, organizamos no Quadro 6 que segue o quantitativo de tarefas propostas em cada volume que, formal ou informalmente, mobilizam conhecimentos de combinatória ou estatística. Sejam conhecimentos de possibilidades, combinação, arranjo, interpretação de tabelas e gráficos, interpretação de amostra de dados, frequência relativa, etc. Assim, organizamos a frequência (e porcentagem) de tarefas que relacionam conhecimentos de estatística e combinatória em cada volume das coleções destinadas aos anos iniciais do ensino fundamental na proposta de estudo de probabilidade.

Quadro 6: Frequência e porcentagem de tarefas que relacionam combinatória ou estatística no estudo de probabilidade em cada volume analisado nas coleções dos anos iniciais do ensino fundamental

Volume	Conhecimentos de combinatória	Conhecimentos de estatística
2º ano EF	1 (100)	–
3º ano EF	4 (100)	–
4º ano EF	2 (100)	–
5º ano EF	2 (12,5)	–

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Na coleção do ciclo de alfabetização e no volume destinado ao quarto ano, que apresentam tarefas de possibilidades, relacionam o raciocínio combinatório nos momentos de determinar as possibilidades de eventos ou do espaço amostral das situações aleatórias. Já no quinto ano, há poucas tarefas que relacionam probabilidade e combinatória. Não encontramos nas tarefas propostas relacionações com a estatística.

Quanto ao momento de constituição do entorno tecnológico-teórico, observamos que as justificativas para as técnicas de resolução dos tipos de tarefas modelados, é visto superficialmente quando são validados o uso dos ostensivos fração (ou razão) e porcentagem como representações de probabilidades dos eventos. Acreditamos que nessa etapa inicial da educação básica, as técnicas apresentadas para o estudo de probabilidade são auto tecnológicas e por isso não há a necessidade de momentos de justificção dessas. Por exemplo, em tarefas do tipo T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) a manipulação de ostensivos dados, moedas e notas já mostra a validade da técnica τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*).

De maneira geral, levando em consideração os momentos didáticos identificados e o modelo de organizações didáticas proposta por Gascón (2003), acreditamos que nesta coleção predominou uma organização didática *empirista* por valorizar a exploração de tipos de tarefas, elaboração e trabalho de técnicas para o estudo de probabilidade.

No próximo capítulo, trazemos os resultados da análise da coleção de obras didáticas destinadas aos anos finais do ensino fundamental.

5. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DESTINADA AOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo apresentamos a produção e análise de dados da coleção de livros didáticos referente aos anos finais do ensino fundamental. Para isso o capítulo foi dividido em seis seções. Na primeira é apresentada a estrutura da coleção, visto que cada volume é proposto com seções semelhantes para o estudo das diferentes temáticas. Nas quatro seções seguintes, apresentamos a organização praxeológica dos volumes destinados ao sexto, sétimo, oitavo e nono ano, respectivamente. Por fim, assim como na análise da coleção anterior, apresentamos uma síntese dos dados produzidos na coleção como um todo.

5.1 ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Na coleção de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental é reservada uma seção específica para o estudo de probabilidade no volume referente ao sexto ano. Em relação aos demais volumes, no MP do volume referente ao sétimo ano, é apontado que “Destaque maior ao assunto foi dado nos volumes de 7º, 8º e 9º anos, que reservam o capítulo final para abordar Estatística e Probabilidade” (DANTE, 2015, v.2, p. 16). Diante disto, optamos por analisar as organizações praxeológicas propostas nessa seção do primeiro volume, que é referente ao sexto ano, e os capítulos destinados ao estudo de probabilidade nos demais volumes. Isso não foi possível na análise da coleção dos anos iniciais, visto que não havia seções ou capítulos destinados ao estudo de tal tema (exceto o volume do quinto ano). Ao folhearmos todas as obras desta coleção dos anos finais, confirmamos não haver propostas para o estudo de probabilidade em outras situações dos volumes senão a seção e capítulos indicados no MP. Tal análise é feita de forma sequencial, conforme a organização praxeológica é apresentada.

Os quatro volumes desta coleção apresentam uma organização semelhante. Os volumes são divididos em quatro unidades que são separadas por diferentes temáticas. As unidades são compostas por capítulos com conteúdos associados às temáticas, de forma que cada volume possui um total de nove capítulos. Ao final de cada capítulo, há uma pequena seção intitulada *Tratamento da informação*, com situações-problema envolvendo estatística. Há também as seções *Outros contextos* nas quais, segundo o MP do volume referente ao sexto ano, são propostas “atividades adicionais que envolvem situações-problema contextualizadas” (DANTE, 2015, v.1, p. 7), *Praticando um pouco mais* com “questões geralmente extraídas de vestibulares e de avaliações oficiais que visam explorar mais o assunto estudado” (ibid., p.7) e *Revisão cumulativa* com “atividades, problemas e testes que revisam contínua e

cumulativamente os conceitos e procedimentos fundamentais estudados nos capítulos e nos anos anteriores” (ibid., p. 7). As *Parte curso* e *Atividades propostas* foram identificadas em seções ao longo do estudo de probabilidade em toda a coleção. São essas partes que descrevemos com maiores detalhes nas seções separadas para cada volume analisado.

Em alguns capítulos encontramos ainda a seção *Conexões* abordando temas transversais, com “um ou mais textos acompanhados de questões que estimulam os alunos a perceber a presença da Matemática nos mais diferentes contextos e propiciam a reflexão e compreensão de situações atuais” (ibid., p. 7). Ao final de cada unidade é proposta a seção *Ponto de chegada* que é a “seção de encerramento de cada Unidade, composta de um ou dois pequenos textos, uma seção de atividades e uma autoavaliação” (ibid., p. 7). Essa coleção disponibiliza também ao final de cada volume, assim como na coleção dos anos iniciais, um glossário com significados de alguns termos que aparecerem ao longo dos volumes.

Após essa visão geral da coleção dos anos finais do ensino fundamental, apresentamos a seguir, a análise da organização didática e da organização matemática do volume referente ao sexto ano da coleção dos anos finais do ensino fundamental.

5.2 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO SEXTO ANO

No MP destaca-se que “as ideias de **chance** e sua medida – a **probabilidade** – são trabalhadas intuitivamente no Capítulo 6 por meio de situações-problema” (DANTE, 2015, v.1, p. 47). Tal capítulo encontra-se na unidade 3 que apresenta como temática central *Frações e números decimais*, composta pelos capítulos seis e sete. Dedicamos a análise ao capítulo seis, intitulado *Frações e porcentagens*, onde são apresentadas ideias associadas a fração em seções e, dentre elas, uma seção (apresentada em uma única página) que trata do estudo de probabilidade.

A seção destinada ao estudo de probabilidade tem como título *Fração como comparação de dois números naturais*. Nesta o ostensivo fração é apresentado como comparação de dois números naturais e probabilidade é apresentada somente neste episódio, visando as noções de razão e fração obtidas por esse tipo de comparação. Um comentário apresentado no LD do professor afirma que: “Essa ideia de fração está associada à de razão. Por exemplo, cinco em oito, dois em três, quatro em sete, etc. é o mesmo que falar na razão de cinco para oito, na razão de dois para três, na razão de quatro para sete, etc.” (DANTE, 2015, v.1, p.175).


Em seguida, são apresentados dois exemplos com situações envolvendo aleatoriedade e o cálculo da probabilidade de um evento mobilizando a técnica τ_6 (*Escrever a fração (ou razão)*

cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades), que já havíamos identificado no volume referente ao quinto ano do ensino fundamental.

Veja outros dois exemplos:

1ª) Quando lançamos uma moeda, há duas possibilidades de resultado:

- pode sair cara:
- pode sair coroa:




Face "cara" de uma moeda OU Face "coroa" de uma moeda

Por isso, dizemos que a **chance** ou a **probabilidade** de sair cara é $\frac{1}{2}$ (1 em 2). Observe que, nesse caso, também estamos usando a fração para expressar uma **comparação** de dois números naturais.

2ª) Quando lançamos um dado, há seis possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima:

A probabilidade de sair o número 5 é de 1 em 6, ou seja, $\frac{1}{6}$.

A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6 ou $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



Balões

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Dados

Figura 23: Exemplos de situações envolvendo probabilidade no sexto ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 1, p. 175

No primeiro exemplo a probabilidade está ligada à ideia de uma situação ocorrer diante de um total de possibilidades. Considera-se assim neste exemplo o lançamento de uma moeda e a chance de sair cara. Neste caso o total de possibilidades é 2, pois a moeda possui dois lados, sai cara e coroa, assim, em um lançamento, a chance de sair cara é de 1 possibilidade em 2. Na forma de fração representa-se, de acordo com o exemplo anterior, o total no denominador e a situação desejada no numerador, logo tem-se $\frac{1}{2}$. No volume do quarto ano, essas duas possibilidades também haviam sido apontadas, mas não se falava ainda de a probabilidade do evento ser representada pelo ostensivo fração (ou razão) “ $\frac{1}{2}$ ” ou “1 em 2”.

No segundo exemplo de probabilidade, o contexto novamente envolve o lançamento de um dado de seis faces. Dessa vez, o desenho ao lado do exemplo ilustra “todas as possibilidades quando a face fica voltada para cima” e dois exemplos de medida de chance são dados: a probabilidade de sair o número cinco, sendo “ $\frac{1}{6}$ ” ou “1 em 6”, e a probabilidade de sair um número ímpar que é “ $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ” ou “3 em 6”. Neste último exemplo vemos que há o uso de fração equivalente para que a resposta seja a mais simplificada possível. Como não é dito que há uma obrigação de simplificar as frações, este será opcional para as crianças. Ambos exemplos apresentados até então têm o propósito de mostrar o uso da técnica apresentada por meio de

uma fração que “expressa uma comparação de dois números naturais” ou, como vimos no volume do quinto ano, “fração de um conjunto de elementos”.

Ressalta-se que neste volume o termo probabilidade é tido como sinônimo de chance, o que corrobora com o que é apresentado no Guia do PNLD/2017 (2016, p.49) ao dizer que “a definição clássica tem como premissa que os eventos possíveis – as possibilidades – tenham a mesma probabilidade (**chance**) de ocorrer”. (grifo nosso). Vimos que, até então, probabilidade estava sendo definida como “medida da chance” de um evento ocorrer, o que, de acordo com o texto do Guia do PNLD 2017, não está incorreto, especialmente para esse nível de escolaridade. Entretanto, esse já não é o caso com a definição de probabilidade trazida no glossário ao final do livro:

- Probabilidade: medida da **possibilidade** de uma situação ocorrer. Imagine que em um saco há 2 bolas vermelhas e 3 azuis. Ao tirar uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul é de 3 em 5 ou $\frac{3}{5}$ ou 60%.
- Possibilidade: cada resultado que pode ocorrer em uma dada situação. No lançamento de uma moeda, há duas possibilidades de resultado: cara ou coroa. (DANTE, 2015, v.1, p. 316, grifo nosso).

Como vemos, nesse glossário “probabilidade” é definida como “medida da possibilidade” de um evento ocorrer. Nessa ocasião, “possibilidade” é, também, trazida como sinônimo de “chance”, que por sua vez foi formalizada anteriormente como “probabilidade”. Isso pode ser entendido como um equívoco cometido pelos elaboradores da coleção, ao apresentarem “possibilidade” como sinônimo de “probabilidade”. Esse equívoco pode acarretar em dificuldades de compreensão dos alunos quanto a diferenciação “possibilidade” de “probabilidade”.

Após os exemplos resolvidos (Figura 23), propõe-se ainda na mesma página doze atividades, algumas agrupadas em um mesmo enunciado. Dessas, identificam-se apenas quatro tarefas associadas à ideia de probabilidade apresentada anteriormente e pertencem a um enunciado sobre lançamento de um dado de faces. Em uma, solicitou-se a quantidade total de faces que o dado possui, ou seja, o espaço amostral do experimento. Essa tarefa é do subtipo T_{2.1} (*Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*), em que a técnica τ_3 (*Contar os elementos do espaço amostral*) pode ser mobilizada. Quanto às outras três tarefas, o objetivo descrito no MP é *relacionar uma fração com a probabilidade de ocorrer um evento*. As três tarefas pedem para determinar a probabilidade de: sair a face “quatro”; sair uma face com número par de pontos; e sair uma face com números de pontos maior do que um. Temos, assim, três tarefas do tipo T₃ (*Determinar a probabilidade de*

ocorrência de um evento específico), podendo ser resolvidas por meio da técnica τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*). Novamente notamos a escolha didática em apresentar primeiramente a técnica e definição do conceito de probabilidade e posteriormente a proposta de tarefas.

Essa é a praxeologia identificada no sexto volume. Vimos que neste volume a continuidade do estudo de probabilidade foi feita de modo muito sucinto, em apenas uma página, porém coerente com algumas ideias apresentadas no volume referente ao quinto ano. Ainda que exista essa coerência, no Guia do PNLD/2017 afirma que, considerando a coleção toda, há um equilíbrio na “distribuição dos conteúdos por campo. Mas não acontece o mesmo ao longo de cada livro. Os conceitos de números e operações são privilegiados no 6º ano, em detrimento dos campos de geometria e de estatística e **probabilidade**” (BRASIL, 2016, p. 88, grifo nosso). Não houve ampliação de conceitos e não foram identificados tipos de tarefas e técnicas inéditas. Passamos agora para a organização praxeológica do volume do sétimo ano.

5.3 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO SÉTIMO ANO

Na obra referente ao sétimo ano do ensino fundamental, aponta-se no MP que:

No campo da Teoria das Probabilidades, introduzimos o conceito de probabilidade como medida de chance de um evento acontecer. São propostas várias situações-problema contextualizadas relacionadas a conceitos de Estatística e Probabilidade [...]. Nos dois anos seguintes, esses assuntos serão ampliados e sistematizados com maior aprofundamento. (DANTE, 2015, v.2, p. 48).


Ainda no MP deste volume, afirma-se que no sexto ano “iniciamos um trabalho informal com Probabilidade ao estudarmos frações” (ibid., p. 67). Já no sétimo ano, o último capítulo, que é o nono, destinou-se ao estudo de estatística e probabilidade, no qual é realizada “uma primeira sistematização da noção de probabilidade, definindo-a como uma razão” (ibid., p. 67). Neste Capítulo 9, após nove páginas de estudo exclusivo de estatística, há quatro páginas dedicadas à probabilidade. As demais seções que compõem o capítulo apresentam atividades e problemas envolvendo ora estatística, ora probabilidade.

Descrevemos, a seguir, a organização praxeológica da proposta de estudo de probabilidade no volume destinado ao 7º ano.

O estudo de probabilidade é iniciado na seção intitulada *Probabilidade: a medida da chance de um evento ocorrer* com a seguinte situação: “Ao ler o jornal, Carlos encontrou uma pesquisa interessante. Em determinada região, verificou-se que, de cada 100 habitantes

escolhidos ao acaso, 2 eram ruivos. Carlos ficou intrigado. Como era possível chegar a esses dados? É possível saber a chance de algo ocorrer?” (DANTE, 2015, v. 2, p. 286). Em seguida, algumas conceituações e a resolução desta situação é apresentada conforme vemos na Figura 24:

Quem esclareceu a dúvida foi sua professora de Matemática.



É possível medir a chance de algo acontecer. Essa medida é chamada de **probabilidade** e é dada por uma razão entre dois números.

$$\text{probabilidade de um evento} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

No caso da pesquisa citada no jornal, podemos afirmar que, ao escolher um habitante dessa região, a probabilidade de que ele seja ruivo é:

$$2 \text{ em } 100 \text{ ou } \frac{2}{100} = \frac{1}{50} \text{ ou } 2\%$$


Observação: A Teoria das Probabilidades é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos que deem os resultados prováveis ou as chances de determinado resultado ocorrer.

Figura 24: Primeiro encontro com a probabilidade no sétimo ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 267

Nesse momento, que é o encontro com a praxeologia proposta, institucionalizou-se probabilidade como a medida da chance de algo ocorrer e essa medida pode ser dada por meio dos ostensivos uma fração e um porcentagem. Também é explicitada uma técnica para encontrar/calcular essa medida: τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*), identificada anteriormente. Além disso, vemos elementos do bloco tecnológico-teórico na observação trazida ao final da explicação da situação, na qual situa-se a *Teoria das Probabilidades* como um ramo da Matemática e explicita-se seus objetos de estudo.

Após esse primeiro momento, dois exemplos são apresentados através de situações contextualizadas:



Para calcular a medida da chance, isto é, a **probabilidade** de Rose ganhar a rifa, devemos estabelecer uma **razão**:

4 em 100 → $\frac{4}{100}$


bilhetes comprados por Rose
número total de bilhetes

A razão $\frac{4}{100}$ ou $\frac{1}{25}$ indica a **probabilidade** de Rose ganhar a bicicleta: 1 em 25 ou 4%.

b) Ricardo escreveu em pedaços iguais de papel o nome de cada dia da semana. Dobrou-os igualmente de modo que qualquer um deles tivesse a mesma chance de ser retirado de uma caixa. Qual a probabilidade de que o nome do dia da semana retirado por Ricardo comece pela letra **S**?
Mais uma vez vamos escrever a razão que indica essa probabilidade:

3 em 7 → $\frac{3}{7}$

dias da semana que começam por S
total de dias da semana



Essa razão indica que a probabilidade de sair um nome que começa pela letra **S** é de 3 em 7 ou $\frac{3}{7} \approx 0,4286$, ou seja, aproximadamente 42,9%.

Observação: Quando a probabilidade é zero, dizemos que o **evento é impossível**.
Quando a probabilidade é 1 ou 100%, dizemos que é um **evento certo**.
No exemplo anterior, sair um nome de dia que comece com a letra **R** é um evento impossível e sair um nome de dia com mais de 5 letras é um evento certo.

Figura 25: Momento de institucionalização no sétimo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 286 e 287

A primeira situação é: “ Para obter verbas para a festa do 7º ano, a equipe de Rose rifou uma bicicleta. A rifa tinha 100 números e Rose comprou 4 deles. Qual a chance de Rose ganhar a bicicleta?” (DANTE, 2015, v.2, p.286) e a segunda: “Ricardo escreveu em pedaços iguais de papel o nome de cada dia da semana. Dobrou-os igualmente de modo que tivesse a mesma chance de ser retirado de uma caixa. Qual a probabilidade de que o nome do dia da semana retirado por Ricardo comece com a letra S?” (ibid., p. 287). Como podemos notar, ambas situações pedem para determinar a probabilidade de certo acontecimento aleatório, remetendo ao tipo de tarefas T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*).

Novamente os resultados da probabilidade desejada foram representados por meio dos ostensivos fração (ou razão) e porcentagem. Nos exemplos, entendemos que as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) e τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de um evento*) são mobilizadas. Na última

observação expressa na introdução do estudo de probabilidade, vemos a definição de evento impossível e de evento certo.

Após essa introdução do conceito de probabilidade, na seção *Exercícios e problemas* foram propostas atividades que pudemos classificar segundo alguns tipos de tarefas. Tarefas do tipo T₃ (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) foram as mais presentes nesta seção, num total de 32 tarefas. Para essas, ainda que o MP apontou como objetivo “Apresentar o cálculo de probabilidades com porcentagens” (DANTE, 2015, v.2, p.395), vimos que as respostas no livro do professor estavam representadas tanto em fração (ou razão) como em porcentagem. Entendemos, então, que as técnicas τ_6 ou τ_7 podem ser mobilizadas para a resolução dessas tarefas. Identificamos e modelamos, ainda, alguns novos tipos de tarefas e técnicas presentes nesta seção. Esses tipos de tarefas e técnicas inéditas são descritos a seguir.

Encontramos uma proposta de atividade que se caracteriza como um tipo de tarefas inédito neste volume. Nesta atividade, cujo contexto é o lançamento de um dado de seis faces, busca-se a verificação do resultado de um item anterior por meio da experimentação. Em uma atividade anterior, item c, solicitou-se a probabilidade do evento “menor do que 3” na situação aleatória “lançamento de um dado de seis faces”. Como há duas possibilidades desse evento específico (1 e 2), o resultado é $\frac{2}{6}$ ou 33,33..%. Em seguida, nessa atividade 29, solicitou-se a verificação do resultado por meio da experimentação, isto é, realizando lançamentos de um dado de seis faces, conforme vemos a seguir na Figura 26:

29. Atividade em equipe

Vamos comparar a porcentagem do item c da atividade anterior com o resultado prático de um experimento. Para isso, três equipes devem ser formadas na classe.

- a) Uma equipe lança um dado 10 vezes, anota os números obtidos e calcula a porcentagem dos que são menores do que 3.
- b) Outra equipe faz o mesmo, mas lançando o dado 20 vezes.
- c) A terceira equipe também repete o procedimento, mas lançando o dado 40 vezes.
- d) No fim, verifiquem qual das três equipes chegou a um valor mais próximo da probabilidade do item c da atividade anterior.

Figura 26: Tarefa do tipo T₆ no sétimo ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 288

Entendemos, então, como sendo uma atividade caracterizando-se como uma tarefa de um novo tipo, que modelamos como tipo de tarefas T_6 :

- T_6 : *Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento.*

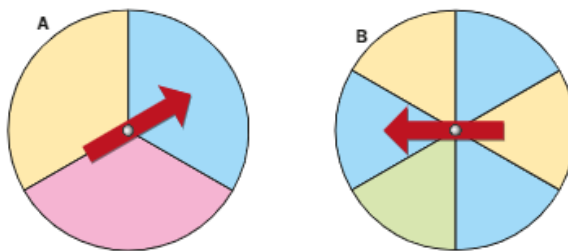
Para tal experimentação, solicita-se que a sala seja dividida em três equipes e que façam experimentos de lançar um dado de seis faces. Uma equipe lança 10 vezes, outra 20 vezes e a outra 40 vezes, anotando os resultados de cada lançamento para que, ao final de todos os lançamentos, verifiquem qual das equipes obteve o resultado mais próximo daquele obtido no item c. Inferiu-se, então, que a técnica para realizar de tal atividade é a τ_8 :

τ_8 : *Manipular ostensivos, dados ou moedas, quantas vezes for solicitado, anotando os resultados de cada lançamento.*

Em seguida propõe-se que os alunos joguem um jogo envolvendo o lançamento de dois dados, cujo enuncia é: “Providencie dois dados e jogue com um colega o jogo ‘soma 7’. Vence quem obtiver ‘soma 7’ primeiro” (DANTE, 2015, v.2, p. 288). Nessa situação entendemos o jogo como uma escolha didática envolvendo o estudo de probabilidade. Assim, consideramos tal atividade como sendo do tipo T_6 (*Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento*), visto que realizar lançamentos de dados para a obtenção do evento “soma 7” é um experimento proposto no trabalho com conceitos de probabilidade. Nesse caso, pretende-se a manipulação de dois dados para obter somas. Recordamos, então, da primeira técnica identificada no volume referente ao segundo ano do ensino fundamental (τ_1 : *Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento*) e consideramos como sendo a técnica mobilizada para tal jogo.

Na mesma página, ainda na seção *Exercícios e problemas*, identificamos uma nova técnica de resolução de um tipo de tarefas já modelado anteriormente.

31. Observe as roletas abaixo e responda:



- a) Qual é a probabilidade de a seta parar sobre a cor azul na roleta **A**? $\frac{1}{3}$
- b) Qual é a probabilidade de a seta parar sobre a cor azul na roleta **B**? $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \right)$.
- c) Em qual das duas roletas há maior chance de a seta parar sobre a cor azul? **Na roleta B** $\left(\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \right)$.
- d) Qual é a probabilidade de a seta não parar sobre a cor verde na roleta **B**? $\frac{5}{6}$

Figura 27: Atividade com tarefas do tipo T_3 e subtipo $T_{3.1}$
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 288

Nessa atividade o contexto está relacionado a duas roletas em que uma está dividida em três partes iguais cujas partes são pintadas de cores diferentes e a outra está dividida em seis partes iguais em que três partes são azuis, duas são amarelas e uma é verde. Nos itens *a*, *b* e *d* foram propostas tarefas para determinar a probabilidade de eventos específicos, ou seja, pertencem a T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*). Já no item *c*, questionou-se em qual das roletas “há maior chance de a seta parar sobre a cor azul”. No volume referente ao quinto ano, modelamos o subtipo de tarefas $T_{3.1}$ (*Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento*). Entendemos que esse item *c* pertence a esse subtipo de tarefa, pois é necessário identificar em qual das roletas há maior chance de ocorrer o evento “parar sobre a cor azul”.

No LD do professor foi apresentada como resposta (Figura 27) a roleta B, pois $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ fazendo-se uma comparação das probabilidades deste evento ocorrer nas duas roletas. Inferiu-se, então, que uma nova maneira de resolução é proposta para essa tarefa do subtipo $T_{3.2}$ e chamamos de técnica τ_9 :

τ_9 : Comparar probabilidades, verificando qual é maior.

Após essa seção de exercícios e problemas envolvendo probabilidade, propõe-se as seções *Desafios* e *Curiosidade matemática*, em que na primeira são apresentados dois problemas, conforme vemos na Figura 28:

Desafios (Total de possibilidades: 6 (1, 2, 3, 4, 5 e 6); nem par nem múltiplo de 3: 1 e 5; probabilidade: 2 em 6 = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$)

1. No lançamento de um dado, qual a probabilidade de não sair número par nem número múltiplo de 3? $\frac{1}{3}$
2. Uma moeda viciada é aquela em que a probabilidade de sair qualquer uma das faces é diferente de 50%. Suponha que, em uma moeda viciada, a probabilidade de sair cara seja o triplo da probabilidade de sair coroa. Qual é a probabilidade de sair cara nessa moeda, em porcentagem? 75%

(probabilidade de sair coroa: x ; probabilidade de sair cara: $3x$; $x + 3x = 100 \Rightarrow x = 25$; $3x = 3 \cdot 25 = 75$; ou probabilidade de sair coroa: x ; probabilidade de sair coroa: y ; $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 100\% \end{cases} \Rightarrow 3y + y = 100 \Rightarrow 4y = 100 \Rightarrow y = 25$; $x = 3 \cdot 25 = 75$)

Figura 28: Problemas caracterizados como tarefas do tipo T_3 no sétimo ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 289

Esses problemas trazem alguns elementos novos. No primeiro problema, ao solicitar a probabilidade de “não sair número par e nem número múltiplo de 3” em um lançamento de um dado de seis faces, vemos que há uma relação entre esses dois eventos. Nesse sentido, não se trata de tarefa em que o aluno deverá “determinar a probabilidade de um evento”. Modelamos, assim, como um novo tipo de tarefas T_7 :

- T_7 : Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente.

Observamos que, até esse episódio do estudo de probabilidade proposto neste volume, não foi apresentado o princípio multiplicativo (em que as probabilidades de ocorrência dos eventos independentes são multiplicados) como técnica para a resolução de probabilidades de eventos independentes ocorrerem simultaneamente. Assim, infere-se que o aluno precisará compreender que, das seis possibilidades, duas atendem a ambas as exigências simultaneamente: 1 e 5 não são múltiplos de 3 nem par. Sabendo, então, que são duas possibilidades para a ocorrência de ambos os eventos, as técnicas τ_6 (Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades) ou τ_7 (Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento) podem ser mobilizadas para a obtenção da resposta em forma de fração (razão) ou porcentagem. Acreditamos que compreender a relação entre eventos é um elemento a mais que deveria ser discutido, mas que não foi proposto neste volume.

Já em relação ao segundo problema, percebemos que é a única tarefa que trata de eventos que não são equiprováveis, visto que apresentou uma ideia de “moeda viciada”. Entendemos essa tarefa como uma situação-problema que, no livro do professor, foi resolvida por meio da elaboração de um sistema de equações de primeiro grau, com duas equações e duas incógnitas. Esse assunto foi trabalho no Capítulo 5 deste volume, intitulado *Equações do 1º grau com duas*

incógnitas – Inequações de 1º grau com uma incógnita - Sistemas. Vemos, assim, que uma nova técnica é proposta para a resolução desta tarefa, que modelamos como τ_{10} :

τ_{10} : *Elaborar e resolver um sistema de equações de primeiro grau com os dados apresentados no enunciado da tarefa.*

Como podemos observar, essa técnica apresenta uma particularidade em relação às demais técnicas identificadas até então. Isso porque trata-se de uma técnica que não resolve somente um tipo de tarefas, uma vez que é uma técnica de modelagem. Assim, pode ser que em outros estudos ela seja mobilizada para a resolução de diversos conteúdos que exijam a modelagem da tarefa em um sistema de equações de primeiro grau, não se restringindo ao estudo de probabilidade.

Na seção *Curiosidade matemática*, propõe-se alguns experimentos cujo contexto é o lançamento de uma moeda. Entendemos, assim, como sendo tarefas do tipo T_6 (*Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento*), em que uma moeda deverá ser manipulada. Espera-se resposta pessoal em cada item, mas a técnica τ_8 (*Manipular ostensivos, dados ou moedas, quantas vezes for solicitado, anotando os resultados de cada lançamento*) também possibilita a experimentação proposta. Em um comentário apresentado no livro do professor, afirmou-se: “A medida que aumentamos o número de lançamentos, a tendência é que o número de vezes que aparece uma face vá se aproximando mais da metade do total de lançamentos” (DANTE, 2015, v. 2, p. 289). Consideramos que nesta seção a proposta de experimentação vai ao encontro das ideias de probabilidade frequentista, que vimos brevemente no primeiro capítulo. Entretanto, não encontramos orientações, exceto o comentário acima, quanto às possíveis discussões que poderiam ser realizadas durante a realização desses experimentos.

Coutinho (1994) evidenciou a importância de se trabalhar não só a visão clássica de probabilidade, razão entre o número de casos favoráveis e o número total de possibilidades, mas também a frequentista, que aproxima a probabilidade de um evento pela sua frequência quando repetida a experiência inúmeras vezes. Acreditamos, então, que nesta situação de experimentação, poderia ter sido proposta orientações de discussão quanto à concepção de probabilidade frequentista.

Dando continuidade à análise deste volume, a próxima seção do Capítulo 9 foi intitulada *Outras atividades que envolvem Estatística e Probabilidade*, em que se propõem exercícios e problemas envolvendo conceitos de estatística e de probabilidade. Em uma atividade, cujo

contexto é um recipiente contendo três bolas azuis, cinco bolas vermelhas e duas bolas amarelas, uma das tarefas é: “Retirando uma delas ao acaso, qual é a probabilidade de ser uma bola amarela ou vermelha?” (DANTE, 2015, v. 2, p. 290). Nessa ocasião, ao solicitar a probabilidade de um ou outro evento, percebemos um novo tipo de tarefas que modelamos como sendo T_8 :

- T_8 : Determinar a probabilidade de ocorrência de um **ou** outro evento.

Nessa situação, o princípio aditivo (em que as probabilidades de ocorrência dos eventos independentes são somadas) não foi apresentado como uma técnica de resolução da tarefa. Como não foi proposta essa técnica de resolver a tarefa, acredita-se que o aluno precisará compreender que como há cinco bolas vermelhas e duas amarelas tem-se setes possibilidades de um total de dez bolas, logo o resultado é dado por 7 em 10, $\frac{7}{10}$ ou 70%. Assim as técnicas τ_6 (Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades) ou τ_7 (Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento) podem ser mobilizadas para a determinação desta probabilidade. Em seguida, em uma atividade contendo cinco tarefas, identificamos alguns elementos inéditos na organização praxeológica proposta para o estudo de probabilidade, conforme observamos na Figura 29:

35. O cardápio do restaurante da mãe de Juliana é composto dos itens do quadro abaixo. Cada pessoa deve escolher um item de cada grupo para formar sua refeição.

Grupo I	Grupo II	Grupo III
Filé de carne	Maionese	Salada de frutas
Filé de frango	Salada mista	Sorvete
Filé de peixe		Pudim

- a) Escreva duas possibilidades de uma pessoa compor uma refeição e depois descubra quantas possibilidades há no total. *Resposta pessoal. (por exemplo: filé de peixe, maionese e sorvete ou filé de frango, salada mista e sorvete); 18 possibilidades (3 · 2 · 3).*
- b) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolher filé de peixe? $\frac{1}{3}$ (1 em 3) $\frac{1}{2}$ ou 50% (9 em 18)
- c) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolher maionese?
- d) Qual é a probabilidade de uma pessoa escolher como refeição filé de frango, maionese e pudim? $\frac{1}{18}$ (1 em 18)
- e) Qual é a probabilidade de a refeição ser filé de carne, maionese e sorvete ou pudim? $\frac{1}{9}$ (2 em 18 = $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$)



Amigas almoçando.

Figura 29: Atividade com tarefas do tipo T_3 , T_7 , T_8 e subtipo $T_{2.1}$ no sétimo ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 290

Nesta atividade, o contexto é o cardápio de um restaurante com opções de carne, salada e sobremesa, conforma observamos na Figura 29. No item *a* propôs-se que aluno escreva duas

possibilidades de composição de uma refeição (que permite apenas uma opção de cada grupo do cardápio) e, em seguida, que descubra a totalidade de possibilidades. Ao solicitar duas possibilidades da situação “composição de uma refeição”, entendemos que é uma tarefa em que o aluno precisará determinar alguns elementos do espaço amostral (nesse caso dois) e que descubra todas as possibilidades, ou seja, todos os elementos do espaço do amostral. Trata-se, então, de uma tarefa do subtipo $T_{2.1}$ (*Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*). Na primeira parte deste item, para determinar duas possibilidades de refeição, espera-se uma estratégia pessoal do aluno. Já para descobrir todas as possibilidades (espaço amostral), é preciso combinar os grupos de carne, salada e sobremesa. Uma estratégia apresentada no livro do professor é o produto cartesiano desses três grupos, isto é, $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ possibilidades. O produto cartesiano é uma estratégia presente em situações de combinatória. Segundo Borba (2017, p. 86 e 87):

No que se refere à *escolha* de elementos que constituem as possibilidades, há dois tipos de problemas: aqueles nos quais a escolha se dá a partir de conjuntos distintos (os problemas denominados de *produto cartesiano* ou também conhecidos como *produto de medidas*) e aqueles nos quais a escolha ocorre dentro de um conjunto único (problemas de *arranjo*, de *combinação* e de *permutação*). Assim, em *produtos cartesianos* as possibilidades são compostas a partir de relações *um-para-muitos*, nos quais cada elemento de um conjunto é combinado com os elementos de outro conjunto (ou outros conjuntos, pois, nesse tipo de problema, podem ser envolvidos dois ou mais conjuntos).

Identificamos, então, uma nova técnica para determinar a quantidade de elementos do espaço amostral de uma situação:

τ_{11} : *Efetuar o produto cartesiano dos conjuntos de elementos que compõem o experimento.*

Os itens *b* e *c* são tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*), o item *d* é uma tarefa do tipo T_7 (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) e o item *e* é uma tarefa do tipo T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um **ou** outro evento*). Todas poderão ser resolvidas por meio das técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*), que foram as propostas até aqui. Para finalização desta seção, propõem-se mais cinco tarefas – três do tipo T_3 , uma do tipo T_7 , e uma tarefa do tipo T_8 – resolvíveis pelas técnicas τ_6 ou τ_7 .

No tópicos seguintes deste capítulo, cujo título é *Tratamento da informação*, encontramos duas atividades que podem ser caracterizadas como tarefas do tipo T₃. A partir dessa seção, observamos que em algumas atividades (inclusive nos próximos volumes), para organizar as informações da situação contextualizada proposta, as quantidades são dispostas em uma tabela ou gráfico (de barra ou de setores). Nessas, o aluno precisará interpretar os dados nas tabelas para retirar os valores que serão utilizadas na etapa de calcular a probabilidade do evento desejado. Assim, alguns estudos da estatística serão necessários para a resolução dessas tarefas. Ainda que as técnicas τ_6 , τ_7 ou τ_8 possam ser mobilizadas, a análise dos dados dispostos nas tabelas ou gráficos é uma técnica a ser mobilizada primeiramente. Modelamos, assim – como uma técnica que antecede τ_6 ou $\tau_7 - \tau_{6.1}$:

$\tau_{6.1}$: Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado.

Nessa seção há mais uma atividade em que é apresentada uma nova técnica para determinar o espaço amostral de situações probabilísticas, conforme observamos na Figura 30:

40. Árvore de possibilidades

Quando desejamos saber todas as possibilidades de combinar um determinado número de elementos ou o número de resultados possíveis de um experimento, podemos utilizar um esquema que facilita essa contagem. Trata-se da **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**.

Acompanhe a situação a seguir.

Valdecir foi a uma lanchonete em que são oferecidos 3 tipos de *pizza* (muçarela: *m*, calabresa: *c* e escarola: *e*) e 2 tipos de suco (laranja: *l* e uva: *u*). Observe as escolhas que ele pode fazer para um tipo de *pizza* e um tipo de suco.

No total, ele tinha 6 possibilidades de escolha: (*m, l*), (*m, u*), (*c, l*), (*c, u*), (*e, l*), (*e, u*).

Agora é sua vez. Considere que uma moeda seja lançada três vezes e faça o que se pede em relação às faces sorteadas:

- Quantos e quais são os resultados possíveis desse experimento? **8 resultados possíveis** (c coroa; k: cara; (k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (k, c, c), (c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k).
- Construa a árvore de possibilidades desse experimento. [Veja a resolução deste item no Manual do Professor.](#)
- Em quantos desses resultados é possível sair cara nos três lançamentos? **Em um resultado**

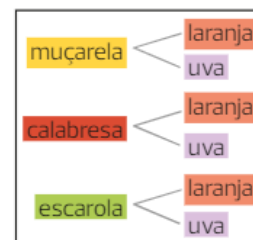


Figura 30: “Árvore de possibilidades” como técnica de determinação do espaço amostral
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 273

Nessa situação, cujo contexto é o lançamento de uma moeda, apresentou-se o ostensivo *árvore de possibilidades* ou *diagrama de árvore* como estratégia para a construção do espaço amostral do experimento que, segundo Borba (2017, p. 90), é “um bom recurso que incentiva o levantamento de espaços amostrais e o desenvolvimento de modos de pensar, como o raciocínio combinatório”. Modelamos essa estratégia como a nova técnica τ_{12} :

τ_{12} : Construir a árvore (ou um diagrama²⁰) de possibilidades.

Nesta atividade os itens *a* e *b* pertencem ao tipo de tarefas T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) e subtipo de tarefas $T_{2.1}$ (*Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*), em que o aluno terá que construir a árvore de possibilidades desta situação (técnica τ_{12}) e contar o total de elementos deste espaço amostral (técnica τ_3 : *Contar os elementos do espaço amostral*). Vale ressaltar que o ostensivo árvore de possibilidades já havia sido apresentada para o estudo de combinatória desde a coleção dos anos iniciais do ensino fundamental, mas somente nesta ocasião ela é proposta como ferramenta (técnica) para a determinação do espaço amostral de situações probabilísticas.

No item *c*, solicita-se o quantitativo do evento específico “sair cara nos três lançamentos”, caracterizando-se como uma tarefa do subtipo $T_{1.3}$ (*Indicar/escrever a quantidade total de possibilidades de ocorrência de um determinado evento*). Para isso, o aluno deve observar os elementos do espaço amostral e encontrar as situações em que a face “cara” aparece nos três lançamentos que, nesse caso, ocorre em apenas uma situação. Ou seja, ele deve contar os elementos do espaço amostral em que tal evento ocorre; mobilizando, assim, a técnica que modelamos como sendo $\tau_{4.2}$:

$\tau_{4.2}$: A partir do espaço amostral, identificar os elementos (ou a quantidade de elementos) que satisfazem o evento desejado.

Praticando um pouco mais é a seção seguinte em que identificamos uma tarefa do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) e uma do tipo T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um **ou** outro evento*), ambas podendo ser resolva pelas técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*).

A *Revisão cumulativa* é a penúltima seção deste capítulo e identificamos cinco tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*), podendo ser resolvidas por τ_6 ou τ_7 . Além dessas tarefas, identificamos um novo tipo de tarefas a partir da atividade seguinte:

²⁰ O diagrama será visto em técnicas apresentadas na coleção do ensino médio.

4. Em uma gaveta, há lenços de três cores, em um total de 15 lenços. Se uma pessoa retirar um lenço sem olhar, a probabilidade de ela tirar:
- um lenço azul é de 40%;
 - um lenço verde é o dobro da probabilidade de tirar um branco.
- Calcule quantos são os lenços de cada cor.
6 lenços azuis; 3 lenços brancos e 6 lenços verdes.

Figura 31: Tarefa do tipo T_9 no sétimo ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 2, p. 273

Nesta situação-problema, apresentou-se um contexto relacionado à quantidade de lenços em uma gaveta. Com as informações dadas, solicitou-se que o estudante calcule a quantidade de lenços de cada cor. Entendemos que é uma tarefa de um novo tipo por solicitar a quantidade de elementos que compõem o espaço amostral, dado os valores das probabilidades dos eventos dessa situação. Chamamos, então, de tipo de tarefas T_9 :

- T_9 : *Dadas as probabilidades dos eventos que compõem o experimento, determinar a quantidade de elementos de cada evento.*

Nesta tarefa, não é apresentada uma maneira de resolução, ou seja, trata-se de uma tarefa cuja técnica não é algorítmica, cabendo ao aluno buscar por uma estratégia de resolução para esta tarefa.

O capítulo 9 é encerrado com a seção *Ponto de chegada* cujo objetivo apresentado no MP é de: “Rever conceitos e procedimentos de assuntos estudados, tais como: probabilidade de eventos utilizando porcentagem [...]” (DANTE, 2015, v.2, p. 100). Apenas uma atividade foi proposta para rever o estudo de probabilidade, com o seguinte enunciado: “Elabore em seu caderno um problema que envolva probabilidade. Você pode usar moedas, dados, bolas numeradas, etc. Passe para um colega responder. Você resolve o que ele criou” (ibid., p. 297). Tal tarefa nos remeteu ao tipo de tarefas identificado no volume destinado ao quinto ano do ensino fundamental, T_4 (*Criar uma situação que envolva noções de probabilidade*), ainda que apareceu apenas uma vez em todo o volume. O aluno poderia olhar as atividades presentes no livro e fazer algo semelhante, o que não necessariamente estaria auxiliando em rever o conteúdo. Ainda assim, não há uma única maneira de resolver tal tarefa e, muito menos, uma técnica algorítmica para tal resolução.

No volume anterior, referente ao sexto ano, vimos um momento de institucionalização dos termos probabilidade e possibilidade apresentado no glossário. Neste volume, apresentou-se no glossário a definição de “Probabilidade” e “Teoria das Probabilidades”:

- Probabilidade: medida da chance de ocorrer um evento.
No lançamento de um dado, a probabilidade de sair um número maior do que 4 é $\frac{1}{3}$ (2 em 6 ou $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$). No lançamento de uma moeda, a probabilidade de sair coroa é 50% (1 em 2 ou $\frac{1}{2}$ ou 50%).
- Teoria das Probabilidades: Ramo da Matemática que trata de situações que envolvem probabilidade. [...] O estudo das chances e de se obter certo número na face voltada para cima quando jogamos um dado, por exemplo, faz parte da Teoria das Probabilidades. (DANTE, 2015, v.2, p. 303 e 305).

Diferentemente do equívoco cometido no volume anterior ao apresentar “possibilidade” como sinônimo de “chance”, neste volume probabilidade é institucionalizada como a medida da chance de ocorrência de alguma situação. Tal definição vai ao encontro da apresentada no volume referente ao quinto ano do ensino fundamental. Não foi apresentada a definição de “possibilidade”, que esteve presente nos glossários dos volumes referentes ao terceiro, quarto, quinto e sexto ano do ensino fundamental. A Teoria das Probabilidades recebe destaque nesse momento de institucionalização do estudo de probabilidade, o que, mais uma vez, explicita a elaboração de um bloco tecnológico-teórico para o estudo de probabilidade pautado na Teoria das Probabilidades.

Descritos, então, os principais elementos propostos neste volume para o estudo de probabilidade, esquematizamos o quantitativo de tarefas do mesmo tipo e técnicas mobilizadas neste volume no Quadro 7:

Quadro 7: Quantitativo de tarefas do mesmo tipo, subtipo e técnicas mobilizadas no livro do 7º ano

Tipos e subtipos de tarefas propostos	Técnicas que se espera que sejam mobilizadas	Total de tarefas
T _{1.3} : Indicar/escrever a quantidade total de possibilidades de ocorrência de um determinado evento.	$\tau_{4.2}$: A partir do espaço amostral, identificar os elementos (ou a quantidade de elementos) que satisfazem o evento desejado.	2
T ₂ : Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.	τ_{12} : Construir a árvore (ou um diagrama) de possibilidades.	1
		2
T _{2.1} : Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.	τ_3 : Contar os elementos do espaço amostral.	3
	τ_{11} : Efetuar o produto cartesiano dos conjuntos de elementos que compõem o experimento.	1
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	τ_6 Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades. ou τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.	46
	$\tau_{6.1}$: Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado. e τ_6 ou τ_7	2
	τ_{10} : Elaborar e resolver um sistema de equações de primeiro grau com os dados apresentados na tarefa.	1
T _{3.1} : Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento.	τ_9 : Comparar probabilidades, verificando qual é maior.	1
T ₄ : Criar uma situação que envolva noções de probabilidade.		1
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.		1
T ₆ : Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento.	τ_1 : Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades do evento.	1
	τ_8 : Manipular ostensivos, dados ou moedas, quantas vezes for solicitado, anotando os resultados de cada lançamento.	5
T ₇ : Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente.	τ_6 ou τ_7	4
T ₈ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento.	τ_6 ou τ_7	4
T ₉ : Dadas as probabilidades dos eventos que compõem o experimento, determinar a quantidade de elementos de cada evento.		1
		76

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Os espaços em cinza representam que não havia técnicas específicas para a resolução das tarefas, cabendo ao aluno desenvolver uma estratégia de resolução. Neste volume, revelou-se um crescente de tarefas propostas para o estudo de probabilidade, como podemos notar com o quadro anterior, em que quatro novos tipos de tarefas e seis novas técnicas foram modeladas. Embora o tipo de tarefas T_6 (*Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento*) e técnicas τ_1 (*Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades do evento*) e τ_8 (*Manipular ostensivos, dados ou moedas, quantas vezes for solicitado, anotando os resultados de cada lançamento*), identificados em algumas ocasiões, caracterizam uma proposta com foco na experimentação, sentimos falta de orientações para discussões nesses episódios de realização de experimentos com moedas e dados, principalmente quanto à conceitos da probabilidade frequentista.

Os contextos propostos nas atividades também apontam as escolhas didáticas para o estudo de probabilidade. Neste volume observamos a proposta de alguns contextos que já haviam sido propostos em volumes anteriores e outros que, até então, não haviam sido exploradas. A seguir, apresentamos o quantitativo de atividades e os contextos propostos neste volume quanto ao estudo de probabilidade:

Quadro 8: Quantitativo de tarefas e contextos propostos no livro do sétimo ano

Contextos	Quantidade de tarefas
Sorteio (fichas, papeis numerados, rifas)	14
Números: Formar números com três algarismos	4
Natalidade	1
Anagrama	4
Conceito de “evento”	1
Retirada, ao acaso, de objetos em um recipiente/local	7
Lançamento de um dado não viciado	8
Lançamentos de dois dados não viciados	6
Giro de uma roleta dividida em n partes iguais	7
Lançamento de uma moeda não viciada	8
Lançamento de uma moeda viciada	1
Lançamento de duas moedas diferentes	4
Composição de refeições de um cardápio	5
Amostra de empregados de uma indústria	1
Amostra de pessoas e tipo sanguínea	1
Análise de gráfico de tipos de veículos e acessórios	1
Divisores positivos de 60	1
Criar um problema de probabilidade (contexto livre)	1
Relação entre funcionários de uma escola e tamanho de calçados	1
Total de contextos	19

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Desses contextos, observamos que duas tarefas utilizaram alguns conceitos de estatística, que é o caso da tarefa solicitando a probabilidade de um evento específico e contextualizada a partir de um gráfico sobre itens observados na compra de um carro. E uma tarefa cujo contexto era a amostra de trabalhadores de uma indústria e solicitava a probabilidade de um evento específico a partir dos dados dessa amostra. Como pode ser observado, há um significativo aumento de contextos propostos neste volume e relação a todos os volumes anteriores e, inclusive, a coleção de livros didáticos dos anos iniciais, analisada no capítulo anterior. Isso certamente se justifica pelo fato de neste volume ter sido proposto, até o momento, a maior quantidade de tarefas para o estudo de nossa temática de investigação.

Tarefas de tipos T_7 (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) e T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento*) não receberam devida atenção quanto a discussão relativa as probabilidades de eventos independentes ocorrerem simultaneamente ou não. Ou seja, os princípios multiplicativo e aditivo não foram propostos como técnicas de resolução de tarefas desses tipos, respectivamente. Tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*), assim como na coleção anterior, foram as mais presentes (49 tarefas).

Na seção que segue, apresentamos a organização didática e a organização matemática proposta para o volume referente ao oitavo ano do ensino fundamental.

5.4 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO OITAVO ANO

No volume referente ao oitavo ano, assim como no volume anterior, destinou-se o Capítulo 9 ao estudo de estatística e probabilidade. No MP, afirma-se que “A probabilidade é uma parte desafiadora da Matemática, estimula o raciocínio do aluno e é propícia à contextualização. Por apresentar situações bastante variadas e por conter poucos padrões, entendemos que deva ser desenvolvida com o maior número possível de problemas” (DANTE, 2015, v. 3, p.368).

Inicialmente, dedicou-se nove páginas do capítulo para o trabalho de noções de estatística e, em seguida, sete páginas para o estudo de probabilidade. As demais seções que compõem o capítulo tratam das duas temáticas. Quanto à probabilidade, inicia-se o estudo com a seguinte enunciação:

Nos anos anteriores você deve ter estudado que é possível medir a chance de um evento acontecer e que essa medida é chamada de **probabilidade**. E que a **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos que dão resultados prováveis ou as chances de determinado resultado ocorrer.

Vamos agora ampliar esses assuntos, estudando novos conceitos e aplicando-os em diferentes tipos de problemas. (DANTE, 2015, v. 3, p. 318, grifos do autor).

O primeiro encontro com a praxeologia proposta neste volume é realizado por meio do momento de institucionalização das noções de *experimento aleatório* e *espaço amostral*. Esse primeiro momento também está vinculado ao momento de constituição do entorno tecnológico teórico durante toda a proposta de estudo de probabilidade, neste volume. Esse momento é visto na figura abaixo:

Experimento aleatório e espaço amostral

Bruna e Lucas estavam jogando um dado de 6 faces durante um jogo de tabuleiro.



Observe os valores que Lucas obteve em 7 jogadas diferentes:

- 1ª jogada: 6
- 2ª jogada: 3
- 3ª jogada: 4
- 4ª jogada: 1
- 5ª jogada: 2
- 6ª jogada: 5
- 7ª jogada: 5

Em nenhuma das jogadas foi possível prever o resultado que iria sair.

Se, em condições idênticas, fizermos repetidos lançamentos de um dado, não podemos prever que face cairá voltada para cima, ou seja, os resultados são imprevisíveis. Por isso, dizemos que o lançamento de um dado é um **experimento aleatório**. [Estimule os alunos a pesquisar no dicionário o significado da palavra aleatório.](#)

Experimento aleatório é aquele que, se for repetido diversas vezes, sob condições idênticas, produz resultados imprevisíveis, entre uma gama de possibilidades.

Figura 32: Primeiro encontro com a praxeologia no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 318

Para definir experimento aleatório, optou-se por apresentar uma situação em contexto de jogo de tabuleiro envolvendo o lançamento de um dado de seis faces, exemplificando alguns possíveis resultados de lançamentos, como vemos na Figura 32. Após a definição, um último exemplo de situação reforça a ideia trabalhada, em que a situação de lançamento de uma moeda é apresentada. Para definir espaço amostral, a escolha também foi de, primeiramente, remeter-se a situação do jogo de dados. Assim, afirma-se que “no lançamento do dado de 6 faces, os

resultados possíveis são: 1, 2, 3, 4, 5, ou 6. Dizemos, então, que esses resultados correspondem ao **espaço amostral**” (DANTE, 2015, v. 3, p. 319).

Com isso, definiu-se:

Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Representamos o espaço amostral pela letra U (de “Universo”). Assim, no caso do dado que Bruna e Lucas estão jogando, o espaço amostral é representado por $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Figura 33: Definição de espaço amostral no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 319

Como podemos observar, neste volume inicia-se uma notação diferenciada para identificação do espaço amostral de experimentos, sendo representado por U . Nos volumes anteriores, não identificamos notações como essa.

Após esse primeiro momento de institucionalização, propõem-se as primeiras tarefas para o estudo dos conceitos apresentados. Tratam-se de três tarefas que solicitam a determinação do espaço amostral dos experimentos aleatórios apresentados. Para isso, o aluno precisará escrever todos os elementos que compõem o espaço amostral do experimento aleatório em questão. Nessa ocasião, entendemos que o tipo de tarefas T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) passa a ser uma técnica para tarefas do subtipo que chamamos de $T_{2.2}$:

- $T_{2.2}$: *Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório.*

Assim, na primeira tarefa solicita-se o espaço amostral do experimento “lançamento de uma moeda”; na segunda, o espaço amostral do experimento “sorteio de um número par maior do que zero e menor do que 10”; e na terceira, o espaço amostral do experimento “lançamento simultâneo de um dado e uma moeda”. Em todas essas tarefas, que são do subtipo $T_{2.2}$, a técnica de resolução será $\tau_{2.2}$:

$\tau_{2.2}$: *Escrever todos os elementos do espaço amostral do experimento aleatório.*

Posteriormente, novo momento de institucionalização é apresentado, desta vez quanto ao conceito de evento e tomando como exemplo a situação anterior, em que os personagens Bruna e Lucas lançam um dado de seis faces em um jogo de tabuleiro.

Evento

Bruna e Lucas continuaram a partida no jogo de tabuleiro. O jogo se aproximava do fim. Para ganhar, Bruna precisava tirar um número maior ou igual a 5 no lançamento do dado.

Em outras palavras, ela precisava tirar 5 ou 6 para ganhar. Observe que esse conjunto de resultados que dariam a vitória a ela é um subconjunto do espaço amostral $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esse subconjunto é chamado de **evento**.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.

Geralmente, um evento é representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto (A, B, C, \dots, Z) e diferente de U . Na situação acima, por exemplo, o evento "sair um número maior ou igual a 5" pode ser representado por $A = \{5, 6\}$.



Figura 34: Conceituação de “evento” no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 319

Nessa situação de conceituação do termo “evento”, são utilizadas as noções de conjunto e evento como subconjunto do espaço amostral (U) de um experimento aleatório. Em seguida, ainda na mesma página, são propostas dez tarefas para que seja descrito os eventos específicos em experimento aleatórios solicitados. Para tal descrição, será necessário escrever todas as possibilidades de ocorrência do evento específico. Vemos, então, que nesse momento o tipo de tarefas T_1 (*Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico*) também passa a ser uma técnica (que chamamos de $\tau_{1.4}$) para resolução de tarefas do subtipo modelado como $T_{1.4}$:

- $T_{1.4}$: *Descrever eventos.*

$\tau_{1.4}$: *Escrever todas as possibilidades de ocorrência do evento específico.*

Após as dez tarefas de subtipo $T_{1.4}$, que mobilizam a técnica $\tau_{1.4}$ para resolução, novo momento de institucionalização é apresentado. Nessa vez, conceitua-se probabilidade e cálculo de probabilidades, bem como a notação que será utilizada neste volume para representação da probabilidade de um evento específico. Observemos tal momento por meio da Figura 35:



Árbitro venezuelano Juan Soto inicia partida entre o Atlético da Colômbia e o Int Gas Deportes do Peru, em Medellín (Colômbia). Foto de agosto de 2013.

Cálculo de probabilidade

A primeira abordagem deste assunto foi feita no 7º ano desta coleção.

Ao lançar uma moeda, podemos dizer que a chance de sair qualquer uma das faces voltada para cima é a mesma, ou seja, existe 50% de chance de ela cair com a face "coroa" voltada para cima e 50% de chance de ela cair com a face "cara" voltada para cima.

A medida da **chance** de ocorrer um desses eventos é chamada, na Matemática, de **probabilidade**. Assim, a probabilidade de ocorrer um evento A pode ser indicada por $P(A)$ (lê-se "P de A"). Esse valor corresponde à **razão entre o número de resultados favoráveis** (ou seja, o número de elementos do evento, representado por $n(A)$, que se lê "n de A") e o **número de resultados possíveis** (ou seja, o número de elementos do espaço amostral, representado por $n(U)$, que se lê "n de U").

Desse modo, podemos escrever:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

ou, de forma equivalente:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis ao evento } A}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}$$

Figura 35: Conceituação de "probabilidade" no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 320

Nessa situação, contextualizou-se o lançamento de uma moeda em que sair "cara" ou sair "coroa" tem probabilidade de 50%. A probabilidade, mais uma vez, é conceituada como a medida da chance de ocorrência de eventos. Essa medida é apontada como a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de casos possíveis. Assim, a técnica τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) é proposta para o cálculo de probabilidades de eventos. Um diferencial foi quanto ao ostensivo apresentado: $P(A)$ é a probabilidade de um evento A ocorrer; $n(A)$ é o número de resultados favoráveis ao evento A ; e $n(U)$ é o número de resultados possíveis do experimento, ou seja, o espaço amostral do experimento. Assim, a técnica de determinar a probabilidade de ocorrência do evento A foi apontada como: $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$.

Ainda neste momento de institucionalização do conceito de probabilidade, apresentou-se dois exemplos de situações probabilísticas resolvidas. O exemplo tem como enunciado: "Lurdes lançou um dado de 6 faces sobre um tabuleiro. Vamos calcular a probabilidade de ela obter: a) um número par; b) um número maior do que 4" (DANTE, 2015, v.3, p. 320). A resolução do item a foi apresentado conforme vemos na Figura 36:

Resolução:

a) Chamando o evento "obter um número par" de evento A , ele é indicado por $A = \{2, 4, 6\}$. Logo, o número de resultados favoráveis é 3. Representamos esse número por $n(A) = 3$.

O espaço amostral, isto é, o conjunto de resultados possíveis, é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Então, o número de resultados possíveis é 6. Representamos esse número por $n(U) = 6$.

Portanto, a probabilidade de Lurdes obter um número par ao lançar o dado é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$



Figura 36: Técnica apresentada para o cálculo de probabilidade de eventos no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 285

Com essa situação resolvida, vemos a mobilização das técnicas τ_6 e τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de um evento*), e que são reforçadas pela fala apresentada no balãozinho. O item *b* também foi resolvido por meio das técnicas τ_6 e τ_7 , conforme o modelo apresentado na Figura 36. Após a conceituação/institucionalização de probabilidade e das técnicas para o cálculo de probabilidade de eventos, propõem-se doze tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*), que podem ser resolvidos pela mobilização das técnicas τ_6 e τ_7 .

Último momento de institucionalização foi proposto, desta vez para definição de “eventos impossíveis” e “evento certo”. Utilizando um contexto de sorteio de um livro para uma turma de 30 alunos com papéis números de 1 a 30, alguns exemplos de eventos impossíveis e evento certo foram apresentados, como: “a probabilidade de o professor Paulo sortear um número maior do que 40 é 0, ou seja, esse evento nunca ocorrerá” (DANTE, 2015, v.3, p. 322) e “a probabilidade de o professor Paulo Sortear um número menor ou igual a 30 é 1 ou 100%, ou seja, podemos garantir, com certeza, que esse evento ocorrerá” (ibid., v.3, p. 322). Nessas situações, os cálculos das probabilidades foram realizados pelas técnicas τ_7 e τ_8 e, em seguida, chegou-se às seguintes definições:

Existem alguns eventos que nunca ocorrerão. Eles são chamados de **eventos impossíveis**.

A probabilidade de acontecer um evento impossível é sempre zero.

Todo evento que podemos garantir que ocorrerá é chamado de **evento certo**.

Para que isso ocorra, é necessário que o evento coincida com todos os casos possíveis, ou seja, com o espaço amostral. Nesse caso, a probabilidade é 1 ou 100%.

Assim, podemos concluir o seguinte:

Qualquer que seja o evento A , a probabilidade de ocorrer A é um número que varia de zero até um: $0 \leq P(A) \leq 1$.

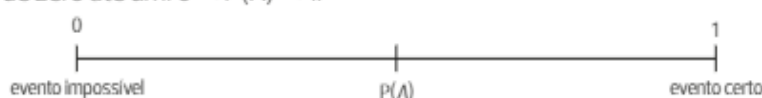


Figura 37: Conceituação de "eventos impossíveis" e "evento certo" no oitavo ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 322

Para este último momento de institucionalização de conceitos relacionados ao estudo de probabilidade, propõem-se seis tarefas para que o estudante identifique o evento como evento impossível (EI) ou evento certo (EC). Tratam-se, então, de tarefas do subtipo $T_{1,4}$ (*Descrever eventos*). Para tal descrição, o estudando precisará mobilizar a seguinte técnica que modelamos como τ_{13} :

τ_{13} : *Classificar como:*

- *EI, se a probabilidade de ocorrência do evento é zero;*
- *EC, se a probabilidade de ocorrência do evento é 1 ou 100%.*

A seção seguinte é intitulada *Outros exercícios e problemas que envolvem Probabilidade*, em que se propõem mais atividades para o estudo de probabilidade. Identificamos 23 tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) e uma tarefa do tipo T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento*) que mobilizam as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*). Além dessas, foram propostas três tarefas do tipo T_9 (*Dadas as probabilidades dos eventos que compõem o experimento, determinar a quantidade de elementos de cada evento*) em que a técnica de resolução não é algorítmica, visto que envolve estratégia pessoal

dos estudantes. A seguir destacamos aquelas atividades com tarefas ou técnicas inéditas desta seção.

Na atividade 32 (Figura 38) desta seção, é proposta uma atividade na qual os alunos devem analisar os resultados fornecidos:

32. Avaliação de resultados

Em uma questão em que o professor perguntou qual era a probabilidade de um evento acontecer, veja as respostas de seis alunos.

- Rui: 40%
- Pedro: $\frac{5}{7}$
- Carla: $\frac{2}{5}$
- Mário: $\frac{7}{5}$
- Rafael: 0
- Ana: 50%

a) Dos seis alunos, qual é o que podemos garantir que deu uma resposta incorreta? **Mário, pois $\frac{7}{5} > 1$.**

b) Após a correção, o professor afirmou que dois dos seis alunos acertaram. Quais são eles?

c) Se o evento citado fosse impossível, qual dos seis alunos teria acertado? **Rafael**
Rui e Carla, pois $40\% = \frac{2}{5}$.

Figura 38: Atividade com tarefas do tipo T_{10} no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 324

Nesta atividade contextualizou-se uma situação em que alunos responderam à questão elaborada pelo professor quanto à probabilidade de um evento ocorrer. A partir das respostas desses, propõe-se que esses resultados sejam avaliados, nos itens *a*, *b* e *c*. Modelamos, assim, como um novo tipo de tarefas, no estudo de probabilidade, T_{10} :

- T_{10} : Avaliar, dentre os resultados apresentados, quais resultados podem representar probabilidades de eventos.

No item *a*, o aluno terá que avaliar quais dos resultados apresentados não representam a probabilidade de um evento. Nesse caso, o único resultado que não pode representar a probabilidade de algum evento é $\frac{7}{5}$, pois é maior que 1. Assim, a técnica de resolução se baseia no momento de institucionalização visto da Figura 37, e que modelamos como técnica τ_{14} :

τ_{14} : Classificar um resultado (número) como representante da probabilidade de um evento se este varia de 0 até 1.

Com essa técnica, os números acima de 1 ou negativos, por exemplo, não podem representar probabilidades de eventos.

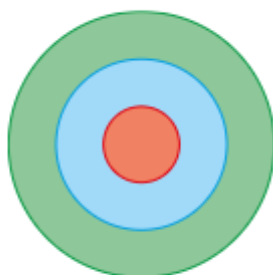
No item *b*, afirma-se que dois dos resultados estão corretos e questiona-se quais são eles. Nesse caso o aluno verificará quais dos resultados apresentados correspondem ao mesmo valor, ainda que estevam representados pelos ostensivos fração (ou razão) e porcentagem, e concluirá que os resultados de Carla e Raul são correspondentes, pois $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$. Assim, modelamos a técnica para resolução desta tarefa como sendo τ_{15} :

τ_{15} : Verificar, dentre os resultados apresentados na tarefa, quais resultados representados em diferentes ostensivos correspondem ao mesmo valor.

Já no item *c*, o aluno terá que avaliar qual dos resultados poderia representar um evento impossível. Neste caso é o resultado Rafael em que foi escrito que probabilidade é zero. Assim, a técnica para este item é a primeira parte da τ_{13} (*Classificar como: EI, se a probabilidade de ocorrência do evento é zero*).

Ainda nesta seção, identificamos uma última atividade com tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) e que mobilizam uma técnica inédita, conforme vemos na figura a seguir:

38. Francisco estava lançando dardos em um alvo formado por três círculos concêntricos.



Sabendo que Francisco acertou o alvo, que o círculo vermelho tem raio 2 dm, o círculo azul tem raio 4 dm e o círculo verde tem raio 6 dm, qual é a probabilidade de Francisco ter acertado:

- a) a parte vermelha do alvo? $P(A) = \frac{4\pi}{36\pi} = \frac{1}{9}$
 b) a parte azul do alvo? $P(B) = \frac{16\pi - 4\pi}{36\pi} = \frac{12\pi}{36\pi} = \frac{1}{3}$
 c) a parte verde do alvo? $P(C) = \frac{36\pi - 16\pi}{36\pi} = \frac{20\pi}{36\pi} = \frac{5}{9}$

Figura 39: Tarefas do tipo T_3 e contexto geométrico no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 325

Nesta atividade propõe-se um contexto geométrico em que um alvo de lançamentos de dardos é formado por três círculos de mesmo centro. São informadas as medidas dos raios de cada um dos círculos e nos itens *a*, *b* e *c* solicita-se a probabilidade de acerrar a parte vermelha,

azul e verde, respectivamente, $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$. Para isso, o aluno precisará mobilizar conhecimentos relacionados à área de círculos e a técnica que modelamos como sendo τ_{16} :

τ_{16} : Escrever a fração cujo denominador representa a área da figura desejada e numerador a área total da figura.

Após essa seção de atividades e problemas, é apresentada a definição de *eventos equiprováveis* e *eventos não equiprováveis* (Figura 40):

Eventos equiprováveis e eventos não equiprováveis

No lançamento de um dado de seis faces a probabilidade individual de sair qualquer uma das faces é $\frac{1}{6}$. A eventos que têm a mesma probabilidade de ocorrer damos o nome de **eventos equiprováveis**. Nesse caso, dizemos que o dado é perfeito, honesto ou não viciado.

Agora, imagine um dado de seis faces, porém sem a face com o número 1, com duas faces com o número 6 e as demais faces com a incidência normal. No lançamento desse dado, qual seria a probabilidade de sair a face com número 1 voltada para cima? E com a face número 4? E com a face número 6?

É fácil observar que as respostas são respectivamente $P(A) = 0$ (evento impossível), $P(B) = \frac{1}{6}$ e $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Esses eventos não têm a mesma probabilidade de acontecer e chamamos de **eventos não equiprováveis**. Esse dado do exemplo chamamos de dado imperfeito, desonesto ou viciado.

Nas figuras ao lado, temos a planificação de dois dados viciados de 6 faces.

1º dado

		3		
6	5	6	2	
		4		

2º dado

		3		
1	5	6	5	
		4		


Figura 40: Conceituação de *eventos equiprováveis* e *eventos não equiprováveis* no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 325

Para a conceituação de eventos equiprováveis apresentou-se como exemplo o contexto de um dado “honesto” ou “não viciado” em que, ao ser lançado, todas as faces têm a mesma probabilidade de ocorrência. Já em eventos não equiprováveis, cujo contexto é um dado viciado em que não se tem a face “1” e há duas faces “6”, as probabilidades de ocorrências de eventos como “sair a face 1”, “sair a face 6” ou “sair a face 2” são diferentes.

Duas representações de planificações de dois dados viciados também foram apresentadas nessa situação e devem servir para a resolução de uma atividade com cinco tarefas propostas em seguida. Tratam-se de tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) cujos contextos são os lançamentos desses dados viciados, e podem ser mobilizadas as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*).

A próxima seção é *Conexões*, em que apresentou um texto com algumas informações sobre mortes de motociclistas no trânsito do Maranhão e, com essas informações, algumas tarefas são propostas. Dentre essas, identificamos duas tarefas do tipo T_3 , que mobilizam as técnicas τ_7 ou τ_8 como resolução.

Uma atividade de experimentação foi proposta, em seguida, na seção *Oficina de Matemática*, conforme vemos na Figura 41:



Oficina de Matemática

Par ou ímpar

Reúna-se com um colega para realizar esta atividade, que envolve o conhecido jogo do par ou ímpar.


Lembremos que, no jogo de par ou ímpar, o resultado é par quando ambos os jogadores colocam números pares ou quando ambos os jogadores colocam números ímpares; e o resultado será ímpar quando um jogador colocar um número par e o outro colocar um número ímpar.

Seria possível concluir, então, que, na brincadeira do par ou ímpar, é mais fácil ganhar quem pediu par do que quem pediu ímpar?

Antes de responder a essa pergunta, realizem a atividade a seguir.

Inicialmente, decidam quem será o jogador que vai pedir sempre par e quem será o jogador que vai pedir sempre ímpar. Não se pode trocar a escolha no meio do jogo.

Completem o quadro abaixo, colocando um **X** para cada vitória. Repitam o procedimento até completarem 10 rodadas.



Mãos representando uma jogada de par ou ímpar.

	Par	Ímpar
	Nome do jogador: _____	Nome do jogador: _____
1ª rodada		
2ª rodada		
3ª rodada		
4ª rodada		
5ª rodada		
6ª rodada		
7ª rodada		
8ª rodada		
9ª rodada		
10ª rodada		
Total		

E agora? Vocês consideram que é possível afirmar que é mais fácil ganhar quem pediu par do que quem pediu ímpar? Por quê? Observem o quadro e troquem ideias a respeito.

🗨️ Comente com os alunos que a probabilidade de sair soma par é a mesma de sair soma ímpar ($U = \{(P, P), (P, I), (I, P), (I, I)\}$).

Figura 41: Atividade de experimentação no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 328

Nesta atividade os resultados das dez rodadas propostas devem ser anotados na tabela e espera-se que a conclusão seja de que a probabilidade de sair um número par ou número ímpar é a mesma. Entendemos, então, essa atividade de experimentação como sendo uma tarefa do

tipo T_6 (*Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento*), em que as estratégias de resolução são pessoais, ainda que os dedos serão utilizados para obter os resultados das somas em cada rodada.

Ainda quanto à situação apresentada na Figura 41, o comentário presente no livro do professor diz: “Comente com os alunos que a probabilidade de sair soma par é a mesma de sair soma ímpar ($U = \{(P,P), (P,I), (I,P), (I,I)\}$)” (DANTE, 2015, v.3, p.328). Essa justificativa nos parece muito vaga e insuficiente. Seria interessante, por exemplo, mostrar ou pedir que os estudantes determinem todas as possibilidades de somas pares e ímpares, percebendo que esse espaço amostral apresenta metade de somas pares e a outra metade de somas ímpares.

Nas últimas quatro seções que compõem o Capítulo 9 (*Tratamento da informação, Outros contextos, Praticando um pouco mais e Revisão cumulativa*) encontramos oito tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) com diferentes contextos. Dessas, quatro são de múltipla escolha cujas alternativas estão representadas por meio do ostensivo fração, ou seja, o aluno deve mobilizar a técnica τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*), uma outra de múltipla escolha com alternativas em porcentagem em que a técnica τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*) deve ser utilizada. As três tarefas restantes podem ser resolvidas por ambas as técnicas.

A unidade em que o Capítulo 9 está contido é finalizada com a seção *Ponto de chegada*. Nela, um dos textos apresentados para leitura e discussão foi intitulado *Um pouco da história da Teoria das Probabilidades* que, de acordo com MP:

[...] contextualiza historicamente o estudo da Probabilidade, permitindo que o aluno conheça como os matemáticos começaram a se interessar por esse assunto; como, apesar de ser um campo da Matemática de amplas aplicações, seu estudo se iniciou relacionado a um assunto trivial (jogo de dados); e como vários cientistas, de diferentes nacionalidades, ao longo de séculos de pesquisa, ajudaram a desenvolver as ideias desse ramo de conhecimento, ilustrando mais uma vez que a Matemática, assim com outras ciências, é fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes momentos históricos. (DANTE, 2015, v.3, p. 69).

Após a leitura deste texto, é proposto que o aluno: “Explique a ideia principal do texto. [...] Troque ideias com seus colegas sobre onde é possível aplicar as noções de probabilidade na Medicina, na Economia e no trânsito”. (DANTE, 2015, v.3, p. 334). Entendemos que esta é uma tarefa do tipo T_5 (*Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade*), em que não há uma técnica algoritmizável para sua resolução.

A unidade é finalizada, então, com mais algumas atividades com assuntos trabalhos nos capítulos 7, 8 e 9. Dentre essas, identificamos quatro tarefas do tipo T_3 que também mobilizam as técnicas τ_7 ou τ_8 . No glossário presente neste volume, notamos mais um momento de institucionalização dos conceitos de *espaço amostral*, *evento*, *evento impossível*, *evento certo*, e *experimento aleatório* por meio de definições e exemplos, bem como a notação que está sendo utilizada para eventos e espaço amostral. Assim, a mesma conceituação apresentada início do estudo de probabilidade para esses termos, é reforçada neste momento de institucionalização.

<p>Evento: Qualquer subconjunto do espaço amostral. Geralmente, é representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto (A, B, C, etc.).</p> <p>Se a probabilidade de um evento ocorrer é zero, ele é chamado evento impossível. Se a probabilidade for 1 (ou 100%), dizemos que é um evento certo.</p> <p>Ver <i>espaço amostral</i>.</p> <p>No lançamento de um dado de 6 faces, o evento "sair um número par" pode ser representado por $A = \{2, 4, 6\}$. Nesse caso, por exemplo, o evento "sair um número maior do que 6" é um evento impossível, e o evento "sair um número entre 0 e 7" é um evento certo.</p>	<p>Experimento aleatório: Experimento que, se for repetido diversas vezes, sob condições idênticas, produz resultados imprevisíveis, entre uma gama de possibilidades.</p> <p>O lançamento de uma moeda é um exemplo de experimento aleatório.</p>
	<p>Espaço amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.</p> <p>Representamos o espaço amostral pela letra U (de "Universo").</p> <p>Ver <i>experimento aleatório</i>.</p> <p>No lançamento de um dado de 6 faces, o espaço amostral é representado por $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.</p>

Figura 42: Último momento de institucionalização no oitavo ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 3, p. 340

Essa é a organização praxeológica identificada no volume referente ao oitavo ano. No Quadro 9, esquematizamos o quantitativo de tarefas de um mesmo tipo ou subtipo e as técnicas mobilizadas neste volume:

Quadro 9: Quantitativo de tarefas de mesmo tipo ou subtipo e técnicas propostas no livro do 8º ano

Tipos e subtipos de tarefas propostos	Técnicas que se espera que sejam mobilizadas	Total de tarefas
T _{1.4} : Descrever eventos.	$\tau_{1.4}$: Escrever todas as possibilidades de ocorrência do evento específico.	10
	τ_{13} : Classificar como: <ul style="list-style-type: none"> • EI, se a probabilidade de ocorrência do evento é zero; • EC, se a probabilidade de ocorrência do evento é 1 ou 100%. 	6
T _{2.2} : Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório.	$\tau_{2.2}$: Escrever todos os elementos do espaço amostral do experimento aleatório.	3
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	τ_6 : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades; ou τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.	51
	$\tau_{6.1}$: Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado. e τ_7 ou τ_8	3
	τ_{16} : Escrever a fração cujo denominador representa a área da figura desejada e no numerador é a área total da figura.	3
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.		1
T ₆ : Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento.		1
T ₈ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento.	τ_6 ou τ_7	1
T ₉ : Dadas as probabilidades dos eventos que compõem o experimento, determinar a quantidade de elementos de cada evento.		3
T ₁₀ : Avaliar, dentre os resultados apresentados, quais resultados podem representar probabilidades de eventos.		1
	τ_{13}	1
	τ_{14} : Classificar um resultado (número) como representante da probabilidade de um evento se este varia de 0 até 1.	1
	τ_{15} : Verificar, dentre os resultados apresentados na tarefa, quais resultados representados em diferentes ostensivos correspondem ao mesmo valor.	1
		86

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Nesta organização praxeológica percebemos, ainda, um início de axiomatização de noções envolvidas no estudo de probabilidade, por meio das notações de espaço amostral, eventos e da linguagem de subconjunto atribuída ao conceituar evento. Novamente notamos o destaque dado as tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) que remetem a definição clássica de probabilidade, bem como as técnicas relativas à fração e à porcentagem como maneiras de determinar as probabilidades dos eventos. Como podemos observar, foi proposta apenas uma tarefa do tipo T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um **ou** outro evento*) e, assim como no volume anterior, o princípio aditivo (em que as probabilidades de ocorrência dos eventos independentes são somadas) também não foi apresentado como uma técnica de resolução da tarefa.

Dessas 86 tarefas, também identificamos os contextos aos quais foram propostas e que esquematizamos no Quadro 10:

Quadro 10: Quantitativo de tarefas e contextos propostos no livro do oitavo ano

Contextos	Quantidade de tarefas
Sorteio (número, bolas/papéis numerados, objetos, cartas, baralho, etc.)	28
Educacional, sala de aula com alunos e professor	3
Oráculo e mentira	1
Retirada, ao acaso, de objetos em um recipiente	10
Lançamento de um dado não viciado	6
Lançamento de um dado viciado	3
Lançamentos de dois dados não viciados	4
Lançamento de dois dados viciados	2
Giro de uma roleta numerada	1
Análise de gráfico sobre acidentes de trânsito	1
Seleção brasileira de futebol	2
Aniversariantes de uma turma de alunos	1
Lançamento de uma moeda não viciada	1
Lançamento simultâneo de uma moeda e um dado de seis faces	1
Calendário, dias do mês	2
Números (ímpares, pares, múltiplos)	3
Triângulo, cubo	2
Lançamento de um icosaedro regular numerado	7
Chave correta em um molho de chaves	1
Senha (com números ou letras)	1
Números de telefone	1
Contexto geométrico (alvo em forma de círculos concêntricos)	3
Jogo par ou ímpar	1
História da Teoria das Probabilidades	1
Total de contextos	24

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Percebemos que neste volume, assim como houve um aumento da quantidade de tarefas propostas em relação ao volume anterior, a quantidade de contextos também aumentou. Ainda

assim, predominam os contextos relativos à sorteio e à retirada, ao acaso, de objetos em um recipiente.

Quanto a tipos/subtipos de tarefas e técnicas inéditos, neste volume foram modeladas um tipo e dois subtipos de tarefas inéditos, além de quatro novas técnicas. Destacamos, ainda, que dois tipos de tarefas, identificados na coleção dos anos iniciais, tornaram-se técnicas para resolver tipos de tarefas inéditas. Essa evolução foi esquematizada na figura a seguir:

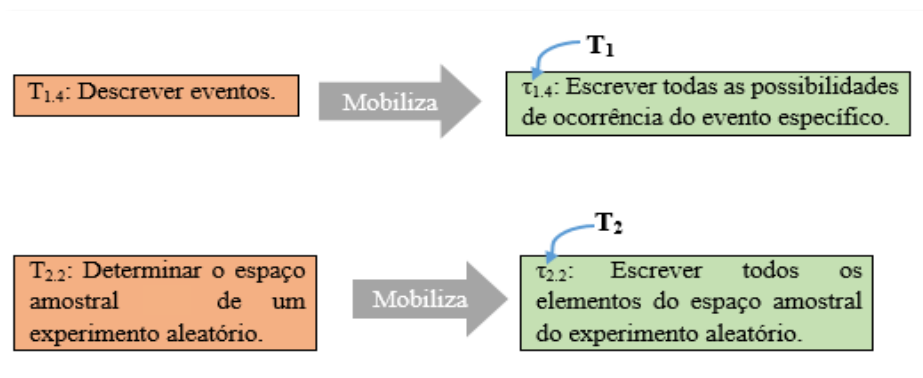


Figura 43: Tipos de tarefas T_1 e T_2 que passam a ser técnicas $\tau_{1.4}$ e $\tau_{2.2}$ no oitavo ano
Fonte: Elaborado no desenvolvimento da pesquisa

Os tipos de tarefas T_1 e T_2 , identificados na coleção destinada aos anos iniciais do ensino fundamental, passam a ser as técnicas $\tau_{1.4}$ e $\tau_{2.2}$ para resolverem tarefas dos subtipos $T_{1.4}$ e $T_{2.2}$, respectivamente. Esses subtipos de tarefas foram identificados neste volume.

Na seção seguinte apresentamos a organização praxeológica do volume referente ao nono ano do ensino fundamental.

5.5 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO NONO ANO

No volume destinado ao nono ano do ensino fundamental, novamente é no Capítulo 9 que encontramos uma organização praxeológica proposta para estudo de probabilidade. Tal capítulo é subdividido em cinco partes e cinco seções. As três primeiras partes são destinadas ao estudo de Estatística e Combinatória, separadamente. Em seguida iniciam-se os estudos de probabilidade. Quando a esse estudo, afirma-se no MP que há uma retomada dos estudos anteriores e:

Introduzimos a noção de probabilidade condicional, que é a probabilidade de ocorrer um evento A condicionado ao fato de um evento B que já ocorreu. Apresentamos também a ideia de distribuição probabilística, que é a organização dos eventos em uma tabela, com sua frequência e a probabilidade de ocorrerem. (DANTE, 2015, v.4, p. 59).

O primeiro encontro com a praxeologia ocorre por meio de dois exemplos de situações em que a probabilidade de eventos é calculada, como vemos na Figura 44:

4 Probabilidade

Acompanhe os exemplos a seguir.

1ª) Lançando-se uma moeda, qual é a probabilidade de ocorrer o evento "sair cara"?



Chamando esse evento de A , ele será dado por $A = \{\text{cara}\}$. Logo, o número de resultados favoráveis é 1. Representamos esse número por $n(A) = 1$.

O espaço amostral, isto é, o conjunto de resultados possíveis, é $U = \{\text{cara, coroa}\}$.

Então, o número de resultados possíveis é 2. Representamos esse número por $n(U) = 2$.

Portanto, a probabilidade de sair cara será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

2ª) Girando a roleta representada a seguir, qual é a probabilidade de sair a cor amarela?



Chamando o evento "sair cor amarela" de evento B , ele será dado por $B = \{\text{amarelo}\}$.

Logo, o número de resultados favoráveis é 1, ou seja, $n(B) = 1$.

Já o espaço amostral é $\{\text{amarelo, azul, verde, verde, vermelho, vermelho, rosa, rosa}\}$.

Então, o número de resultados favoráveis é $n(U) = 8$. A probabilidade de sair a cor amarela será.

$$P(B) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{8} \text{ ou } 12,5\%$$


Figura 44: Primeiro encontro com a praxeologia no estudo de probabilidade no nono ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 355

Nesse primeiro momento de institucionalização de conceitos relacionados à probabilidade, retomou-se a concepção de probabilidade como medida de chance de um acontecimento ocorrer. Nos exemplos resolvidos, são apresentadas duas tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) nas quais as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) e τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*) são mobilizadas. A

notação “ $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$ ” também é apresentada para probabilidade de ocorrência de um evento “A”, assim como no volume anterior. Esse primeiro momento é finalizado com a afirmação: “Os exemplos acima envolvem várias ideias relacionadas à noção de probabilidade, entendida como a medida da chance de determinado evento ocorrer. Você deve ter estudado essas ideias nos anos anteriores e, agora, vai aprofundar seus conhecimentos sobre esse assunto” (DANTE, 2015, v.4, p. 355).

Posteriormente conceitua-se *Probabilidade condicional*, que é ilustrada por uma situação-problema (Figura 45):



Crianças praticando equoterapia.

Probabilidade condicional

A probabilidade de ocorrer um evento **A condicionado** ao fato de um evento **B** que já ocorreu é denominada **probabilidade condicional**.

Análise a seguinte situação:

Uma estrebaria possui 18 animais em treinamento, que são destinados à terapia de crianças, entre eles cavalos e éguas. Dos 9 animais que já estão com ferraduras, 5 são éguas. Dos cavalos, 6 ainda não receberam ferraduras.

a) Sorteando um animal desse grupo, qual é a probabilidade de ele estar sem ferradura?

b) No mesmo grupo, qual é a probabilidade de se ter uma égua com ferradura?

Para resolver essa situação, podemos montar uma tabela. Observe.

Animais da estrebaria em treinamento

	Com ferradura	Sem ferradura	Total
Cavalos	4	6	10
Éguas	5	3	8
Total	9	9	18

Dados fictícios.

A probabilidade de, tomado ao acaso, um animal estar sem ferradura é:

$$P(\text{sem ferradura}) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de esse animal, tomado ao acaso, ser égua com ferradura é **condicionada**. Assim:

$$P(\text{com ferradura/égua}) = \frac{5}{8}$$

Figura 45: Conceituação de probabilidade condicional no nono ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 356

Nesse momento de institucionalização de probabilidade condicional é utilizada uma tabela para organizar os dados relativos à quantidade de éguas e cavalos (com e sem ferraduras). Para o cálculo da probabilidade primeiro evento “P (sem ferradura)” (uma tarefa do tipo T₃) mobiliza-se, então, a técnica $\tau_{6.1}$ (*Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado*) e, em seguida, a técnica τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador*

representa o total de possibilidades). Já para segunda situação, entendemos como sendo uma tarefa de um novo tipo de tarefas que modelamos como T_{11} :

- T_{11} : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu.

Para resolver tarefas desse tipo, além de mobilizar $\tau_{6.1}$, fez-se o uso de uma técnica específica para o cálculo de probabilidade condicionada: a probabilidade de um evento ocorrer, sob certa condição, é a fração cujo numerador representa o número de casos favoráveis que satisfaz a condição em questão e o denominador representa o total de casos.

τ_{17} : Escrever a fração cujo denominar representa o número de casos favoráveis, que satisfaz a condição dada, e o denominador representado o total de casos.

Atividades e problemas são propostos em seguida, em que identificamos três tarefas do tipo T_{10} e que mobilizam as técnicas $\tau_{6.1}$ e τ_{18} . Uma destas atividades é a que segue:

54. Na classe em que Leandro estuda, 20% dos meninos e 30% das meninas usam óculos.

a) Complete a tabela abaixo.

Uso de óculos em uma classe

	Não usam óculos	Usam óculos	Total
Meninos	12	3	15
Meninas	14	6	20
Total	26	9	35

Dados fictícios.

b) Sorteando ao acaso um aluno que usa óculos, qual é a probabilidade de que seja menino?

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 33,3\%$

Figura 46: Tarefas do tipo T_{11} e T_{12} no nono ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 356

No item *a* solicitou-se que a tabela seja completada com os dados que faltam. Para isso, o aluno deverá mobilizar uma estratégia pessoal para calcular as quantidades que faltam com base nas porcentagens e valores que já foram fornecidos. Trata-se, então, de uma tarefa de um novo tipo em que a técnica não é algorítmica. Modelamos como uma tarefa do tipo T_{12} :

- T_{12} : Completar tabela/diagrama.

Já o item *b* caracteriza-se como uma tarefa do tipo T_{11} : (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu*) que mobiliza as técnicas $\tau_{6,1}$ (*Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado*) e τ_{17} (*Escrever a fração cujo denominador representa o número de casos favoráveis, que satisfaz a condição dada, e o denominador representado o total de casos*).

Após esse momento de trabalho com tarefas e técnicas de resolução, apresenta-se a noção de *distribuição probabilística*, por meio da situação que segue:

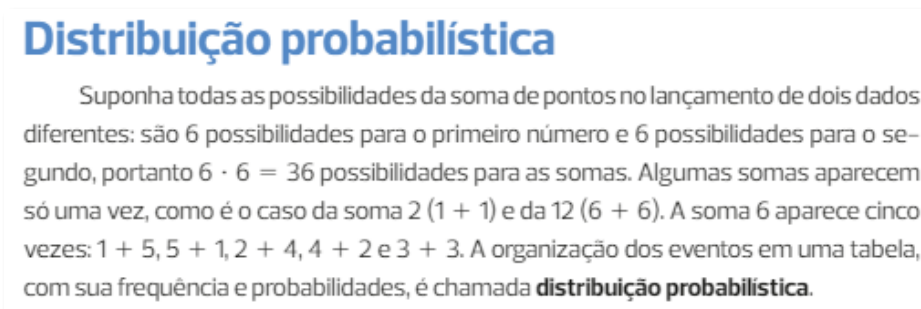


Figura 47: Conceituação de distribuição probabilística no nono ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 357

Nesse momento de institucionalização, um novo tipo de tarefas, T_{13} , e uma nova técnica τ_{19} , são apresentados para o estudo de probabilidade:

- T_{13} : *Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento.*

τ_{18} : *Construir uma tabela e organizar os elementos que compõem o espaço amostral do experimento da seguinte forma: eventos, frequência e probabilidades.*

Novo momento de trabalho com os tipos de tarefas e técnicas é proposto, posteriormente, na seção *Exercícios e problemas*. Neste, identificamos cinco tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) que mobilizam as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*); outras onze tarefas do tipo T_3 que mobilizam as técnicas $\tau_{6,1}$ (*Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado*) e τ_7 ou τ_8 ; duas tarefas do tipo T_{12} (*Completar tabela/diagrama*) que não mobilizam uma técnica algoritmizável; uma tarefa do tipo T_{13} (*Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento*) que mobiliza a técnica τ_{18} (*Construir uma tabela e organizar os elementos que compõem o espaço amostral do*

experimento da seguinte forma: eventos, frequência e probabilidades) e uma tarefa do subtipo T_{2.2} (Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório) que mobiliza a técnica τ_{11} (Efetuar o produto cartesiano dos conjuntos de elementos que compõem o experimento).

Além dessas, identificamos três tarefas do tipo T₇ (Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente) em que é apresentada uma nova técnica para sua resolução. O enunciado da primeira das três tarefas é:

61. (Vunesp) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal **A** e 11 por uma parasitose intestinal **B**, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de **A** e **B**.
Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra.
Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por **A** e a segunda por **B**. Aproximadamente 2,8%.
[Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.](#)

Figura 48: Tarefa do tipo T₇ no nono ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 358

A nova técnica utiliza o princípio multiplicativo de eventos independentes, conforme observamos na resolução abaixo, disponibilizada no MP:

$$\begin{aligned} 61. \quad P(A) &= \frac{25}{100} \\ P(B) &= \frac{11}{100} \\ P(A \text{ e } B) &= P(A) \cdot P(B) = \frac{25}{100} \cdot \frac{11}{100} = \frac{275}{10\,000} = \\ &= 0,0275 \approx 2,8\% \end{aligned}$$

Figura 49: Nova técnica para resolução de tarefas do tipo T₇

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, manual do professor, p. 111

Modelamos, então, como técnica τ_{20} :

τ_{19} . Efetuar o produto das probabilidades dos eventos independentes.

Na página seguinte (359), em outras duas tarefas foram propostas, encontramos um momento de institucionalização de *eventos independentes* e validação da nova técnica:

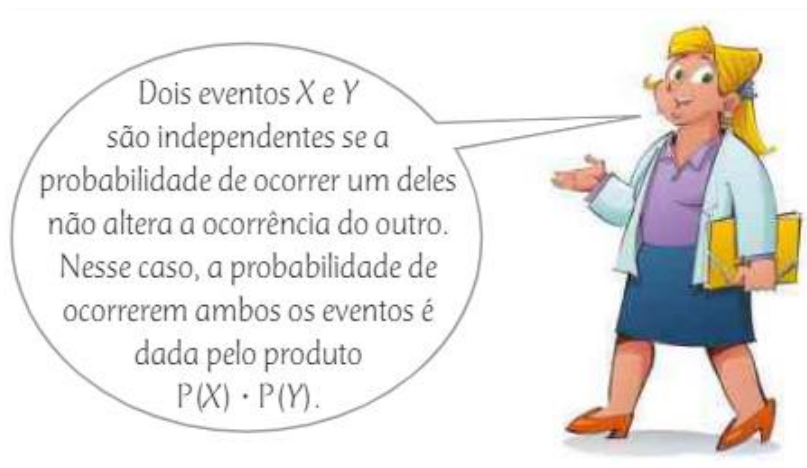


Figura 50: Institucionalização da técnica τ_{20}

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 359

Como podemos perceber, tarefas do tipo T_7 (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) já haviam sido propostas no volume referente ao sétimo ano, mas não foi apresentado o princípio multiplicativo com técnica de resolução, cabendo aos alunos mobilizarem as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*). Nos volumes referentes ao sétimo e oitavo ano também não se institucionalizou *eventos dependentes* ou *independentes*, mesmo que algumas tarefas em que esses conceitos são importantes tenham sido propostas.

Após essa seção de trabalho com tarefas e técnicas, apresentou-se uma nova técnica para algumas tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*). É o que contemplamos na Figura 51:

Estimando probabilidades a partir de dados estatísticos

Considere a seguinte situação:

Uma fábrica produz 1 milhão de canetas por mês. Como saber a probabilidade de se encontrar uma caneta defeituosa se conhecemos apenas o número de elementos do espaço amostral?

Em situações como essa, a solução pode ser dada por meio de uma **estimativa da probabilidade**. Estimar, nesse caso, significa calcular um valor aproximado da probabilidade de um evento ocorrer. Isso é possível a partir de um grupo representativo de elementos, ou seja, uma amostra.



Suponha que um funcionário da fábrica de canetas da situação acima tenha reunido uma amostra de canetas coletadas aleatoriamente e tenha construído a tabela abaixo.

Produção de canetas

	Data	Tamanho da amostra de canetas	Canetas defeituosas (Frequência absoluta)	Frequência relativa
1	3/10/15	1200	9	0,75% ou $\frac{3}{400}$
2	4/10/15	2000	22	1,10%
3	5/10/15	1500	13	0,86%
4	6/10/15	3000	33	1,10%
5	7/10/15	800	9	1,13%
6	10/10/15	900	10	1,11%
7	11/10/15	1400	6	0,43%
8	12/10/15	2200	30	1,36%
9	13/10/15	3400	25	0,74%
10	14/10/15	1000	14	1,40%
11	17/10/15	600	6	1,00%
12	18/10/15	700	8	1,14%
13	19/10/15	1000	13	1,30%
14	20/10/15	1100	9	0,81%
15	21/10/15	2300	18	0,78%
16	24/10/15	1200	14	1,16%
17	25/10/15	600	7	1,16%
18	26/10/15	1400	16	1,14%
19	27/10/15	2000	20	1,00%
20	28/10/15	1700	18	1,06%
Total		30000	300	

Figura 51: Conceituação de estimativa da probabilidade de um evento no nono ano

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 360

Nessa situação é necessário que o estudante já tenha compreendido o conceito de *amostra*, uma vez que a estatística vinha sendo trabalhada nos volumes anteriores. Na tabela, foram organizadas algumas informações fictícias para a estimativa da probabilidade do evento “canetas defeituosas” ocorrer, conforme vemos na sequência:

Observe que a probabilidade, na última coluna, oscila, na maioria das vezes, entre 0,80% e 1,20%. No entanto, para termos uma estimativa mais real da probabilidade de encontrar uma caneta defeituosa, usamos a soma das amostras e a soma das canetas defeituosas. Logo, como a soma das amostras é 30 000 e a soma das canetas defeituosas é 300, temos:

$$P(A) = \frac{300}{30\,000} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Portanto, a probabilidade estimada de encontrarmos uma caneta defeituosa é de 1%. Por exemplo, em um lote com 10 000 canetas, o valor estimado do número de canetas defeituosas é 1% de 10 000, ou seja, 100 canetas $\left(\frac{1}{100} \cdot 10\,000\right)$.

Figura 52: Técnica para estimar probabilidades de eventos a partir de uma amostra
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 361

Com isso, temos uma nova técnica τ_{20} , a ser mobilizada em tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*).

τ_{20} : Escrever a porcentagem a partir da fração cujo numerador representa a frequência absoluta e o denominador representa a quantidade total de elementos da amostra.

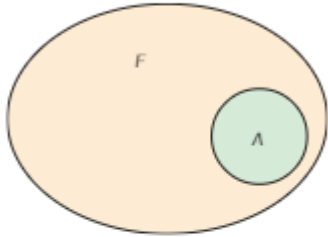
Após a conceituação de estimativa da probabilidade a partir de uma amostra e, apresentada a técnica para essa estimativa, na seção *Problemas* são propostas tarefas para o trabalho com essa nova técnica. Identificamos uma tarefa do tipo T_{12} (*Completar tabela/diagrama*), que envolve estratégia pessoal de resolução, e cinco tarefas do tipo T_{14} que mobilizam a técnica τ_{20} .

A próxima seção é *Conexões*, em que é apresentado um texto cuja temática é *o aumento da participação de idosos no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)*. A partir desse texto, são propostas duas tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) que mobilizam as técnicas τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*) ou τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*) e uma tarefa do subtipo $T_{3.1}$ (*Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento*), que mobiliza a técnica τ_{10} (*Comparar probabilidades, verificando qual é maior*).

Nas seções *Outros contextos*, *Praticando um pouco mais* e *Revisão cumulativa* propõem-se ainda nove tarefas de tipos identificadas anteriormente e que mobilizam técnicas já conhecidas. Essas estão contabilizadas no Quadro 10, mais adiante. Dentre essas nove tarefas destacamos a seguinte (Figura 53), que nos parece um momento de institucionalização de uma técnica para a resolução de tarefas para determinar a probabilidade de eventos em contexto geométrico:

73. Probabilidade geométrica

Suponha que uma figura plana A seja parte de outra figura plana F e que se escolha ao acaso um ponto de F . Então, a probabilidade (geométrica) de que o ponto selecionado esteja em A , será:

$$P = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } F}$$


Com base no conceito apresentado acima, resolva a situação a seguir:

Um alvo tem a forma da figura ao lado, em que um círculo está inscrito em um quadrado, cujos vértices são os pontos médios dos lados de outro quadrado de lado 40 centímetros. Se um dardo é arremessado no alvo e o atinge, qual é a probabilidade de acertar um ponto do círculo? Dê a resposta em forma de porcentagem. **Aproximadamente 39%**

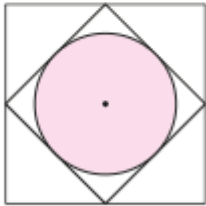


Figura 53: Técnica para o cálculo de probabilidade em contexto geométrico

Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 365

Nessa atividade, primeiramente apresentou-se a técnica de resolução de tarefas em contexto geométrico. Trata-se da técnica τ_{16} (*Escrever a fração cujo denominador representa a área da figura/parte desejada e o numerador representa a área total da figura em que a parte está contida.*), que já havíamos identificado em uma atividade do volume anterior, mas que naquele episódio não havia sido institucionalizada. Tendo essa situação como exemplo solicitou-se, em seguida, a resolução de uma tarefa do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) que mobiliza a técnica τ_{16} . Como a resposta deve estar em

porcentagem, o aluno também deverá mobilizar a técnica τ_7 (*Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento*).

Último momento de institucionalização é proposto por meio do *Glossário*, quando mais uma vez é dada uma definição de *probabilidade* e de *Teoria das Probabilidades* (Figura 54):

Probabilidade: Medida da chance de uma possibilidade ocorrer.

Quando sorteamos uma letra da palavra AMIGO, a probabilidade de sair uma consoante é de $\frac{2}{5}$ ou 40%
 $(2 \text{ em } 5 = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%)$.

Teoria das Probabilidades: Ramo da Matemática que trata de situações que envolvem probabilidade.
 Ver *probabilidade*.
 O estudo das chances de se ganhar na loteria, por exemplo, faz parte da Teoria das Probabilidades.

Figura 54: Último momento de institucionalização no nono ano
Fonte: Coleção Projeto Teláris – Matemática, volume 4, p. 375 e 378

No volume destinado ao sétimo ano, probabilidade foi institucionalizada como medida da chance de um “evento” ocorrer. Neste volume, início do Capítulo 9, também é definida desta forma. Já no *Glossário*, como podemos perceber, institucionalizou-se como a medida da chance de uma “possibilidade” ocorrer. Ou seja, nessa ocasião “chance” e “possibilidade” estão sendo tomadas como sinônimo. Como vimos no Guia do PNLD/2016 (BRASIL, 2016, p. 49), quanto a definição clássica de probabilidade: “A definição clássica tem como premissa que os **eventos possíveis** – as **possibilidades** – tenham a mesma probabilidade (chance) de ocorrer. Dizemos, então, que os eventos são equiprováveis” [grifos nossos]. Acredita-se que tratar “eventos possíveis” como sinônimo de “possibilidades” não é um equívoco, visto que os eventos possíveis são os subconjuntos dentro no espaço amostral de um experimento e, isso, é o mesmo que dizermos “as possibilidades” do espaço amostral.

Esta é a organização praxeológica proposta no último volume da coleção dos anos finais do ensino fundamental, destinado ao nono ano. No Quadro 11 organizamos os quantitativos de tarefas de mesmo tipo ou subtipo e técnicas mobilizadas neste volume:

Quadro 11: Quantitativo de tarefas de mesmo tipo ou subtipo e técnicas propostas no livro do 9º ano

Tipos e subtipos de tarefas propostos	Técnicas que se espera que sejam mobilizadas	Total de tarefas
T _{2.2} : Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório.	τ_{12} : Efetuar o produto cartesiano dos conjuntos de elementos que compõem o experimento.	1
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	τ_6 : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades; ou τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.	11
	$\tau_{6.1}$: Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado. e τ_6 ou τ_7	12
	τ_{16} : Escrever a fração cujo denominador representa a área da figura/parte desejada e o numerador representa a área total da figura em que a parte está contida. e τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de um evento.	1
	τ_{20} : Escrever a porcentagem a partir da fração cujo numerador representa a frequência absoluta e o denominador representa a quantidade total de elementos da amostra.	6
T _{3.1} : Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento.	τ_9 : Comparar probabilidades, verificando qual é maior.	1
T ₇ : Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente.	τ_{19} : Efetuar o produto das probabilidades dos eventos independentes.	5
T ₁₁ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu.	$\tau_{6.1}$ e τ_{17} : Escrever a fração cujo denominador representa o número de casos favoráveis, que satisfaz a condição dada, e o denominador representado o total de casos.	3
T ₁₂ : Completar tabela/diagrama.		4
T ₁₃ : Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento.	τ_{18} : Construir uma tabela e organizar os elementos que compõem o espaço amostral do experimento da seguinte forma: eventos, frequência e probabilidades.	1
		45

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Novamente tarefas do tipo T₃ (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) foram as mais presentes, num total de trinta tarefas, o que aponta para um predomínio da visão clássica de probabilidade. A ideia de probabilidade de eventos serem

representadas como razão entre dois números não recebeu destaque neste volume, em detrimento das noções de fração e porcentagem.

Percebemos, ainda, que neste volume buscou-se trabalhar mais a relação entre as noções de estatística e de probabilidade, visto que dois novos tipos de tarefas modelados, T_{12} (*Completar tabela/diagrama*) e T_{13} (*Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento*) estão relacionados quanto a estatística quanto a probabilidade. Tarefas do tipo T_3 (*Estimar a probabilidade de um evento ocorrer*) que exigem a mobilização da técnica τ_{20} (*Escrever a porcentagem a partir da fração cujo numerador representa a frequência absoluta e o denominador representa a quantidade total de elementos da amostra*) também requer conhecimentos de estatística.

Assim como nos volumes anteriores, também quantificamos os contextos aos quais as tarefas foram propostas. Das 45 tarefas, quantificamos e agrupamos os contextos no quadro abaixo:

Quadro 12: Quantitativo de tarefas e contextos propostos no livro do oitavo ano

Contextos	Quantidade de tarefas
Sorteio/seleção ao acaso de pessoas de um grupo	26
Retirada, ao acaso, de objetivos em um recipiente	1
Lançamento de um dado não viciado	3
Lançamentos de dois dados não viciados	2
Amostra de pessoas de uma classe	1
Educacional: alunos e notas	1
Participação de idosos no ENEM	1
Amostra de pessoas e tipo sanguínea	1
Calendário, dias do mês	1
Senha (com números ou letras)	1
Contexto geométrico	1
Prática de esporte	2
Concurso de premiação	4
Total de contextos	13

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Neste volume há uma redução da quantidade de tarefas propostas em relação aos dois volumes anteriores, há mesma redução se dá em relação a quantidade contextos aos quais essas tarefas foram apresentadas. O contexto mais proposto foi o de sorteio, que também foi um dos mais presentes nos volumes destinados aos sétimo e oitavos anos.

Passamos, agora, para a síntese dos dados produzidos na coleção destinada aos anos finais do ensino fundamental, composta pelos quatro volumes analisados neste capítulo.

5.6 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS NA COLEÇÃO DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Nos quatro livros didáticos da coleção destinada aos anos finais do ensino fundamental, buscamos identificar as propostas para o estudo de probabilidade. Como vimos, no volume referente ao sexto ano o estudo de probabilidade não recebeu muita atenção pois apenas foi retomado brevemente em um capítulo que trata de fração. Ao tratar de fração como comparação de dois números naturais foram apresentados dois exemplos, em contextos de lançamento de uma moeda e lançamento de um dado de seis faces, envolvendo as ideias de possibilidades e probabilidade. Nesse volume, não foram identificados novos tipos de tarefas ou técnicas para o estudo de probabilidade, nem a conceituação de novas noções para o estudo de probabilidade. As únicas três tarefas identificadas puderam ser classificadas como sendo do tipo T_6 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) e a técnica indica para suas resoluções foi a τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*). Notamos que no glossário trazido ao final da obra houve um momento de institucionalização dos termos “probabilidade” e “possibilidade”, em que um equívoco foi cometido ao tratar “possibilidade” como sinônimo de “chance”.

A organização didática dos LD do 7º, 8º e 9º anos seguiu uma certa linearidade em que, para os momentos de institucionalização de conceitos, optou-se pela apresentação de situações contextualizadas e exemplos resolvidos com as técnicas ali propostas. Após esses momentos de institucionalizações, vinham os momentos de trabalho com tarefas e técnicas. Como vimos, em poucas seções de *Atividades e problemas* identificamos tarefas e técnicas inéditas. Último momento de institucionalização de alguns conceitos foi destinado, nesses volumes, no glossário ao final de cada obra. Acreditamos, assim, que nesta coleção predominou uma organização didática que valorizou mais os momentos de trabalho das técnicas apresentadas e a institucionalização de conceitos para o estudo de probabilidade no ensino fundamental, em detrimento dos demais momentos de estudo.

Quanto a esses três volumes, observamos ainda, um aumento considerável de tipos de tarefas e técnicas também inéditas. Para uma visão geral da quantidade de tarefas e técnicas propostas nesta coleção, organizamos esse quantitativo nos quadros que seguem:

Quadro 13: Quantidade de tarefas em função dos tipos na Coleção Projeto Teláris

Tipos de tarefas	T _{1.3}	T _{1.4}	T ₂	T _{2.1}	T _{2.2}	T ₃	T _{3.1}	T ₄	T ₅	T ₆	T ₇	T ₈	T ₉	T ₁₀	T ₁₁	T ₁₂	T ₁₃
Quantidade	2	16	3	4	4	136	2	1	2	7	9	5	4	4	3	4	1

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Quadro 14: Relação dos tipos de tarefas e técnicas na Coleção Projeto Teláris

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)																
	$T_{1.3}$	$T_{1.4}$	T_2	$T_{2.1}$	$T_{2.2}$	T_3	$T_{3.1}$	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}
τ_1																	
$\tau_{1.4}$																	
$\tau_{2.2}$																	
τ_3																	
$\tau_{4.1}$																	
τ_6																	
$\tau_{6.1}$																	
τ_7																	
τ_8																	
τ_9																	
τ_{10}																	
τ_{11}																	
τ_{12}																	
τ_{13}																	
τ_{14}																	
τ_{15}																	
τ_{16}																	
τ_{17}																	
τ_{18}																	
τ_{19}																	
τ_{20}																	

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 13 destacamos os dois tipos de tarefas mais trabalhados ao longo desta coleção, T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) com uma quantidade muito acima das demais tarefas propostas e $T_{1.4}$ (*Descrever eventos*).

No Quadro 14, observamos a relação entre os tipos de tarefas e as técnicas percebidas nesta coleção. A relação entre um tipo de tarefas e uma técnica foi destacada em preto. Tarefas dos tipos T_4 (*Criar uma situação que envolva noções de probabilidade*), T_5 (*Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade*), T_9 (*Dadas as probabilidades dos eventos que compõem o experimento, determinar a quantidade de elementos de cada evento*) e T_{12} (*Completar tabela/diagrama*) não apresentaram técnicas descritíveis ao longo da coleção, exigindo que o aluno desenvolva uma estratégia pessoal para resolver essas tarefas. Como não houve relações desses tipos de tarefas com técnicas, destacamos em cinza. Ainda em relação ao Quadro 14, observamos que o tipo de tarefas T_3 é o que mais mobiliza diferentes técnicas de resolução.

No Quadro 15 que segue, apresentamos a frequência e porcentagem de tarefas que relacionam os conhecimentos de combinatória e estatística no estudo de probabilidade proposto nessa coleção destinado aos anos finais do ensino fundamental:

Quadro 15: Frequência e porcentagem de tarefas que relacionam combinatória ou estatística no estudo de probabilidade em cada volume analisado na Coleção Projeto Teláris

Volume	Conhecimentos de combinatória	Conhecimentos de estatística
6º ano EF	–	–
7º ano EF	4 (5,26)	4 (5,26)
8º ano EF	–	2 (2,32)
9º ano EF	1 (2,22)	35 (77,77)

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Observa-se que no volume destinado ao sexto ano, em que só haviam três tarefas para o estudo de probabilidade, essas não relacionavam conhecimentos de combinatória e tão pouco de estatística. No sétimo ano há 5,26% de tarefas que relacionam conhecimentos de combinatório e também 5,26% de tarefas que relacionam conhecimentos de estatística. No oitavo ano, apenas duas tarefas (2,32%) que relacionam conhecimentos de estatística e, no ano nono ano, uma tarefa relacionando conhecimentos de probabilidade e combinatória. Ainda quanto ao nono ano, vemos uma ampliação de tarefas que relacionam conhecimentos de estatística, sendo 35 tarefas (77,77%).

Essa é a síntese dos dados produzidos e analisados quanto a coleção dos anos finais do ensino fundamental. No capítulo a seguir, apresentamos a produção e análise de dados da coleção de livros didáticos destinados a última etapa de escolarização básica: o ensino médio.

6. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DESTINADA AO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos a produção e análise de dados da coleção destinada ao ensino médio. Para isso dividiu-se o capítulo em quatro seções. Na primeira seção apresentamos a estrutura da coleção analisada. Na segunda e terceira seção apresentamos a organização praxeológica dos volumes referentes ao segundo e terceiro ano do ensino médio, respectivamente, uma vez que no primeiro volume da coleção não há proposta de ensino de probabilidade. Por fim, é apresentada uma síntese dos dados produzidos e analisados referentes a esta coleção.

6.1 ESTRUTURA DA COLEÇÃO

A coleção de obras didáticas destinada ao ensino médio é dividida em volumes propostos para os três anos desta que é a última etapa de escolarização básica. No MP, afirma-se que “Nesta coleção procuraram de forma ativa a recordação, a ampliação, o aprofundamento de conceitos e procedimentos já explorados durante o Ensino Fundamental, apresentando-se sob diversos pontos de vista e linguagem: natural, gráfica e simbólica” (DANTE, 2016, v.1, p. 301). Observa-se, ainda, que:

A coleção introduz o método axiomático dedutivo de forma criativa, utilizando-se de retículas coloridas para identificar as definições (em retículas rosas), axiomas ou postulados (em retículas azuis) e teoremas (em retículas laranja), assim, intuitivamente, o aluno poderá compreender como a Matemática se estrutura. [...] Destaques, quadros-resumos, resultados que antecedem diretamente um teorema e/ou consequências diretas de um teorema são expressos em retículas roxas. (ibid., v.1, p. 301).

Cada volume é dividido em quatro unidades que, por sua vez, são subdivididas em dois ou três capítulos. Os capítulos são apresentados por meio de algumas seções com diferentes objetivos. As *Parte curso* e *Atividades propostas*, assim como na coleção analisada anteriormente, também foram identificadas em seções ao longo do estudo de probabilidade em toda a coleção. Destacamos a seguir as seções que identificamos no estudo de probabilidade dos volumes analisados.

Exercícios resolvidos “Apresenta a resolução detalhada de uma questão ou problema. Não são modelos a serem seguidos, mas visam inspirar e indicar estratégias de resolução” (DANTE, 2016, v. 1, p. 4). Entendemos essas seções como sendo os momentos em que as técnicas são apresentadas para a resolução dos tipos de tarefas propostos. *Exercícios* é a seção em que as tarefas são propostas para o trabalho com as técnicas apresentadas; normalmente é proposta após a seção *Exercícios resolvidos*. *Leitura(s)* apresenta “textos que visam ampliar e

enriquecer o conteúdo estudado no capítulo” (ibid., p.5); *Outros contextos* propõe “temas interessantes e curiosos que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas e com temas como Arquitetura, Saúde, Sociedade, entre outros” (DANTE, 2016, v. 1, p.5). *Pensando no Enem* é a seção com “questões contextualizadas que visam ao desenvolvimento das competências e habilidades previstas na Matriz do Enem” (ibid., p.5), *Caiu no Enem* apresenta questões extraídas no Enem e relacionadas aos conteúdos na unidade estudado; e *Vestibular de Norte a Sul* é a seção com “questões de vestibulares, de todas as regiões geográficas do Brasil, relacionadas aos conteúdos estudados” (ibid., p.5).

Além dessas seções, encontramos ao longo dos capítulos, *Para refletir*, *Fique atento!* e *Você sabia?* que são pequenos boxes apresentados nas laterais das páginas dos volumes:

Para refletir apresenta questões que visam destacar algo que merece reflexão. São indicadores de investigação a ser realizada de modo que os alunos percebam alguma propriedade ou fato, ou que constatem, descubram, ou provem algo. Pode representar uma complementação do estudo do tópico que está sendo abordado. *Fique atento!* apresenta conteúdos que o aluno já estudou e devem ser lembrados ou relacionados com o assunto que está sendo representado ou detalhes importantes que devem ser ressaltados. (DANTE, 2016, v.1, p. 302 e 303).

Como já vimos em volumes anteriores, esses pequenos boxes também são importantes no decorrer da análise, pois muitas vezes contêm explicações e informações relacionados ao entorno tecnológico-teórico da praxeologia proposta.

Em relação a divisão dos conteúdos em cada volume, vemos que no primeiro volume as quatro unidades trabalham, respectivamente: Números e funções; Função afim e função quadrática; Função exponencial e Função logarítmica; e Sequências e Trigonometria. Neste primeiro volume não há momentos de estudo de probabilidade. Já no segundo volume, encontramos: Trigonometria; Matrizes, Determinantes e Sistemas lineares; Geometria plana e espacial; e Análise combinatória e Probabilidade. Isto é, neste segundo volume, a proposta de estudo de probabilidade é feita na última unidade do volume. E no último volume, as unidades são: Matemática financeira e Estatística; Geometria espacial e Geometria analítica; Geometria analítica e números complexos; e Polinômios, equações algébricas e equações trigonométricas. Ressaltamos na segunda unidade deste volume há uma seção destinada para o estudo intitulado *Estatística e probabilidade*, o qual faz parte de nossa produção e análise de dados.

Esta é, então, a visão geral da estrutura da coleção de livros didáticos do ensino médio que passamos, a seguir, a descrever. Assim, na seção que segue, apresentamos a organização praxeológica proposta para o estudo de probabilidade no volume destinado ao segundo ano do ensino médio.

6.2 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO

No volume relativo ao segundo ano do ensino médio²¹, destinou-se o último capítulo da obra para o estudo de probabilidade, Capítulo 10 (Unidade 4). Ao todo, foram propostos sete tópicos de estudo da *Parte Curso* e *Atividades propostas*, dividido em distintas seções. O primeiro encontro com a praxeologia é feita por meio da definição de *Fenômenos aleatórios*, conforme observamos na Figura 55:

1 Fenômenos aleatórios*

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá cara ou coroa. Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de **fenômenos aleatórios** (ou **casuais**).

Por exemplo, são aleatórios os fenômenos:

- lançamento de um dado **não viciado**;
- resultado de um jogo de roleta;
- número de pessoas que ganharão na loteria.

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as **probabilidades** de determinado resultado ocorrer. A **teoria das probabilidades** é um ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Para refletir
Qual é o significado de expressões como "moeda perfeita" ou "dado não viciado"?

Os dois lados da moeda ou as seis faces do dado têm a mesma chance de sair.




Figura 55: Primeiro encontro com a praxeologia proposta no 2º ano do EM
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 232

Nesse primeiro encontro com a com a praxeologia, além da definição e exemplificação de *fenômenos aleatórios*, apresentou-se a *teoria das probabilidades* como o ramo da Matemática responsável pelo estudo de tais fenômenos. No boxe *Para refletir*, propõe-se uma tarefa do tipo T₅ (*Interpretar/discutir sobre termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade*). Em seguida, ainda na mesma página, propõe-se um texto sobre *jogo de roleta* com algumas questões para serem discutidas em grupo. Tratam-se de três tarefas também do tipo T₅, em que os estudantes devem interpretar e discutir a partir do ponto de vista de cada um. Isto é, não há uma técnica algoritmizável para tais tarefas.

Nas quatro páginas que seguem são apresentadas definições e técnicas de resolução de tarefas de tipos já identificados nas coleções analisadas anteriormente. Nessa ocasião, por se tratar da última etapa de escolarização básica em que os assuntos estudados no ensino fundamental serão recordados, ampliados e aprofundados, como afirmou-se no MP, as definições são apresentadas em uma linguagem mais formal e em linguagem axiomática.

²¹ Neste capítulo, utilizamos a sigla EM nas legendas das figuras para denotarmos ensino médio.

Apresenta-se, então, como segundo tópico de estudo, a conceituação de *espaço amostral* e *evento* como vemos na Figura 56:

2) Espaço amostral e evento

Em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado **espaço amostral** (Ω). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado **evento**.

Neste capítulo nos referimos apenas a conjuntos finitos.

Acompanhe alguns exemplos de fenômenos (ou experimentos) **aleatórios**. Quando não especificado, os dados dos experimentos são sempre os comuns, de 6 faces e **não viciados**.

a) Lançamento de um dado e registro do resultado.

Conjunto de todos os resultados possíveis: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Um **subconjunto** dele é $\{1, 3, 5\}$, que pode ser identificado por “ocorrer número ímpar no lançamento de um dado”.

- espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- evento A: “ocorrer número ímpar no lançamento de um dado” $\rightarrow A = \{1, 3, 5\}$

b) Retirar uma carta de um baralho de 52 cartas e registrar o seu naipe.

Considerando C = copas, E = espadas, O = ouros e P = paus, temos:

Conjunto de todos os resultados possíveis: $\{C, E, O, P\}$

Um subconjunto dele é $\{O\}$, que pode ser identificado por “retirar uma carta cujo naipe seja ouros”.

- espaço amostral: $\Omega = \{C, E, O, P\}$

- evento A: “retirar uma carta cujo naipe seja ouros” $\rightarrow A = \{O\}$

Observação: Quando um evento é formado apenas por um elemento do espaço amostral, ele é chamado **evento elementar**.

Figura 56: Conceituação de *espaço amostral* e *evento* no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 233

A linguagem e a notação de conjuntos estão presentes em todos os momentos de constituição do bloco tecnológico-teórico neste volume. Espaço amostral, por exemplo, é definido como o conjunto de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório e representado pela letra grega Ω (ômega). E *evento* é qualquer subconjunto desse espaço amostral. Após alguns exemplos, definiu-se *evento elementar*.

Logo em seguida, apresentou-se alguns exercícios resolvidos, com tarefas do subtipo T_{2.2} (*Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório*) e do tipo T₁ (*Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico*). Para determinar o espaço amostral na primeira situação, utilizou-se um novo ostensivo: o diagrama, e associado a ele a técnica τ_{12} (*Construir a árvore (ou um diagrama) de possibilidades*). Em seguida, listou-se todos os elementos desse espaço amostral, totalizando 36 elementos. Isto é, utilizou-se as técnicas τ_3 (*Contar os elementos do espaço amostral*) e $\tau_{2.2}$ (*Escrever todos os elementos do espaço amostral do experimento aleatório*). Para determinar os eventos solicitados, mobilizou-se a técnica $\tau_{4.2}$: (*A partir do espaço amostral, identificar os elementos (ou a quantidade de*

elementos) que satisfazem o evento desejado). Já na segunda situação, mobilizou-se as técnicas $\tau_{2.2}$ e $\tau_{4.2}$. Para melhor visualização deste momento, destacamos as tarefas em verde e as técnicas mobilizadas em verde na figura a seguir:

Exercícios resolvidos

T2.2

1. No lançamento simultâneo de dois dados, um verde e um vermelho, determine o espaço amostral e os eventos A: "sair o mesmo número em ambos os dados"; B: "sair soma 7"; C: "sair soma maior do que 10"; D: "sair soma menor do que 5"; E: "sair soma maior do que 12" e F: "sair soma maior do que 1 e menor do que 13".

Resolução:
Nesse caso, podemos representar o espaço amostral por um diagrama:

Fique atento!
O espaço amostral depende do experimento. Veja a diferença quando se tem o lançamento de um dado e de dois dados.

dado vermelho	(1,6) (2,6) (3,6) (4,6) (5,6) (6,6)
(1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (5,5) (6,5)	
(1,4) (2,4) (3,4) (4,4) (5,4) (6,4)	
(1,3) (2,3) (3,3) (4,3) (5,3) (6,3)	
(1,2) (2,2) (3,2) (4,2) (5,2) (6,2)	
(1,1) (2,1) (3,1) (4,1) (5,1) (6,1)	
<div style="display: flex; justify-content: space-around; font-size: x-small;"> ▢ ▢ ▢ ▢ ▢ ▢ </div>	

dado verde

O espaço amostral é formado por 36 elementos. São eles:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

evento A: "sair o mesmo número em ambos os dados"

$$\rightarrow A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

evento B: "sair soma 7" $\rightarrow B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

evento C: "sair soma maior do que 10" $\rightarrow C = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

evento D: "sair soma menor do que 5" $\rightarrow D = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

evento E: "sair soma maior do que 12" $\rightarrow E = \emptyset$

evento F: "sair soma maior do que 1 e menor do que 13" $\rightarrow F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\} = \Omega$

2. No lançamento de uma moeda, determine o espaço amostral e o evento "sair cara".

Resolução:
Denotamos "cara" por C e "coroa" por \bar{C} . Logo: espaço amostral: $\Omega = \{C, \bar{C}\}$
evento A: "sair cara" $\rightarrow A = \{C\}$

Figura 57: Primeiro momento de exercícios resolvidos no 2º ano do EM
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 233

Ainda neste momento de constituição do entorno tecnológico-teórico, conceitua-se *evento certo*, *evento impossível* e *eventos mutuamente exclusivos*. Para isso, utilizou-se como contexto o lançamento de um dado e por meio de seu espaço amostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e exemplos de eventos definiu-se *evento certo* e *evento impossível*.

No tópico seguinte de estudo, conceituou-se por meio de exemplos: união de eventos, intersecção de eventos, eventos complementares e eventos mutuamente exclusivos. Essas noções serão usadas mais adiante na continuação do momento de constituição do entorno tecnológico-teórico.

Dadas essas primeiras definições, institucionalizou-se, na sequência, a técnicas para o cálculo de probabilidades, bem como um teorema relativo a evento certo (certeza) e evento impossível (impossibilidade), apresentados na Figura 58:

4 Cálculo de probabilidades

Quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma chance de ocorrer (o espaço é **equiprovável**), a **probabilidade** de ocorrer um evento A , indicada por $p(A)$, é um número que mede essa chance e é dado por:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Nesse caso, os eventos elementares são chamados **eventos equiprováveis**, pois todos têm a mesma chance de ocorrer. Os eventos aqui trabalhados serão todos equiprováveis.

Fique atento!

Lembre-se: evento elementar é aquele formado por apenas um elemento do espaço amostral.

Certeza e impossibilidade

Vamos agora relacionar a probabilidade do evento impossível e do evento certo com os demais eventos. Os conjuntos \emptyset , A e Ω estão sempre relacionados por $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

Relacionando o número de elementos desses conjuntos, temos $n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(\Omega)$.

Dividindo esses três números por $n(\Omega) > 0$, encontramos $\frac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$.

Como $n(\emptyset) = 0$, $\frac{n(A)}{n(\Omega)} = p(A)$ e $\frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$, concluímos:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Isso significa que a probabilidade pode assumir valores de 0 a 1.

Quando $p(A) = 0$, o evento A é o **evento impossível**, e **não há possibilidade** de que ele venha a ocorrer. Quando $p(A) = 1$, o evento A é o **evento certo**, e **há certeza** de que ele ocorrerá.

Figura 58: Conceituação do cálculo de probabilidades, certeza e impossibilidade no 2º ano do EM
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 234 e 235

Nessa situação definiu-se o cálculo de probabilidades de eventos equiprováveis, em que para probabilidade de um evento “ A ” é apresentado o ostensivo: $p(A) = \frac{\text{numero de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$. Assim, a técnica mobilizada nessa situação, já vista nas coleções anteriores, é a τ_6 (*Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades*), mas com uma linguagem mais simples. Posteriormente, tendo sido institucionalizada a técnica de cálculo de probabilidade, com algumas manipulações chegou-se ao resultado apresentado em forma de teorema (retícula laranja): “ $0 \leq p(A) \leq 1$ ”. Com isso, o uso da técnica τ_{13} (*Classificar como: EI, se a probabilidade de ocorrência do evento é zero; EC, se a probabilidade de ocorrência do evento é 1 ou 100%*) é, então, justificada.

Na sequência, são propostas as seções *Exercícios resolvidos* e *Exercícios*, em que no primeiro as técnicas de resolução são mobilizadas em tarefas de alguns tipos de tarefas e, na seção seguinte, tarefas dos mesmos tipos apresentadas na seção *Exercícios resolvidos*, são propostas para o aluno mobilize as técnicas já disponíveis até aqui.

Como no capítulo anterior trabalhou-se noções de combinatória, foram institucionalizadas as noções de *permutação simples*, *permutação com repetição*, *arranjos simples* e *combinação* como sendo:

Esses agrupamentos ordenados (diferem pela ordem) recebem o nome de **permutações simples**. Indicamos por P_n o número de permutações simples de n elementos e escrevemos:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

O número de permutações de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro e γ é de outro, com $\alpha + \beta + \gamma = n$, é dado por:

$$P_n^{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma!} \quad \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \text{ representam o número de vezes que certo elemento se repete.}$$

Arranjos simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados.

Indica-se por $A_{n,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$$

ou

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Combinações simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$) são os subconjuntos com exatamente p elementos que se podem formar com os n elementos dados.

Indica-se por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$ o número total de combinações de n elementos tomados p a p e calcula-se por $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n - p)!}$ ou $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$.

Figura 59: Noções de análise combinatória institucionalizadas no 2º ano do EM
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 206, 209, 211 e 215

Todas essas noções servirão, neste capítulo, como técnicas para a determinação de alguns espaços amostrais de experimentos aleatórios. Ainda que algumas dessas noções já haviam sido trabalhadas na coleção anterior (anos finais do ensino fundamental), apenas nesta ocasião são propostas como ferramentas para determinar espaços amostrais finitos, mas com um grande número de elementos. Assim, modelamos como uma nova técnica τ_{21} :

τ_{21} : Utilizar as fórmulas para o cálculo de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples ou combinações simples quando a tarefa se caracterizar em um desses casos de agrupamento.

Para visualização dos tipos de tarefas e técnicas propostas nas seções *Exercícios resolvidos* e *Exercícios*, organizamos o quadro que segue:

Quadro 16: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções *Exercícios resolvidos* e *Exercícios* – 1ª etapa

Exercícios resolvidos		Exercícios
Tipos de tarefas apresentados	Técnicas mobilizadas	Quantidade de tarefas desse tipo propostas
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	τ_6 : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades; ou τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.	40
T _{2.2} : Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório	$\tau_{2.2}$: Escrever todos os elementos do espaço amostral do experimento aleatório; τ_3 : Contar os elementos do espaço amostral; τ_{12} : Construir a árvore (ou um diagrama) de possibilidades; τ_{21} : Utilizar as fórmulas para o cálculo de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples ou combinações simples quando a tarefa se caracterizar em um desses casos de agrupamento.	4
T ₁ : Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico	$\tau_{4.2}$: A partir do espaço amostral, identificar os elementos (ou a quantidade de elementos	5

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Nas duas primeiras colunas do Quadro 16, organizamos as tarefas e técnicas mobilizadas na seção *Exercícios resolvidos*. Já na última coluna quantificamos as tarefas dos mesmos tipos em relação à primeira coluna, propostas na seção *Exercícios*.

A proposta de ensino de probabilidade deste volume segue, então, para o quinto tópico, que é a *Definição teórica de probabilidade* e propriedades advindas desta definição. Utilizando o contexto de lançamento de uma moeda perfeita, determinou-se o espaço amostral do experimento, os subconjuntos desse espaço amostral e a união entre dois eventos mutuamente exclusivos (Figura 60):

5 Definição teórica de probabilidade e consequências

Vamos analisar o fenômeno aleatório **lançamento de uma moeda perfeita**.

Nesse caso, temos:

- $\Omega = \{C, \bar{C}\} \Rightarrow p(\Omega) = 1$
- Os subconjuntos de Ω são: \emptyset , $\{C\}$, $\{\bar{C}\}$ e $\{C, \bar{C}\}$.
Assim, $p(\emptyset) = 0$; $p(\{C\}) = \frac{1}{2}$; $p(\{\bar{C}\}) = \frac{1}{2}$ e $p(\{C, \bar{C}\}) = 1$.
Vemos que $p(A) \geq 0$, para todo $A \subset \Omega$.
- Considerando $A = \{C\}$ e $B = \{\bar{C}\}$, vemos que $A \cap B = \emptyset$ e
 $p(A \cup B) = p(\{C\} \cup \{\bar{C}\}) = p(\{C, \bar{C}\}) = p(\Omega) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = p(\{C\}) + p(\{\bar{C}\}) = p(A) + p(B)$

Definimos teoricamente probabilidade como uma função que associa a cada evento A um número $p(A)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- 1ª) P_1 : $0 \leq p(A) \leq 1$ para todo evento A
- 2ª) P_2 : Se Ω é o espaço amostral, então $p(\Omega) = 1$
- 3ª) P_3 : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, quando $A \cap B = \emptyset$ (eventos mutuamente exclusivos)

Figura 60: Definição teórica de probabilidade e propriedades no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 238

Nessa situação, apresenta-se como contexto o experimento “lançamento de uma moeda perfeita”. Em seguida, o espaço amostral desse experimento, os subconjuntos do espaço amostral e a união de eventos A (sair cara) e B (sair coroa). Essa união também pode ser entendida como uma tarefa do tipo T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento*). Nessa situação especificamente, como a intersecção desses eventos é vazio (\emptyset), visto que são eventos mutuamente exclusivos, a união destes é equivalente à soma das probabilidades de ocorrência dos eventos A e B , que é dada por $p(A) + p(B)$. Trata-se, assim, de uma nova técnica, τ_{22} , para a resolução de tarefas do tipo T_8 , modelada como segue:

τ_{22} : *Dados dois eventos A e B , a probabilidade da união desses eventos será:*

- $p(A) + p(B)$, se eventos mutuamente exclusivos;
- $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, se eventos quaisquer.

Outras tarefas do tipo T_8 já haviam sido propostas nos volumes referentes ao sétimo e oitavo anos, mas o princípio aditivo ainda não havia sido apresentado como técnica de resolução. A união de eventos quaisquer em que $p(A \cap B) \neq 0$ será vista na sequência. Ainda quando esse momento de institucionalização que vemos na Figura 60, chamou-se de “definição teórica de probabilidade” a função que associa a cada evento A um valor $p(A)$ que satisfaça as propriedades descritas como P_1 , P_2 e P_3 . Em seguida, apresentou-se como consequência dessa definição de probabilidade as seguintes propriedades:

Consequências da definição

Como consequências da definição teórica de probabilidade, temos as seguintes propriedades:

1ª propriedade: Impossibilidade ou $p(\emptyset) = 0$

Como um evento qualquer A (A subconjunto de Ω) pode ser escrito como $A \cup \emptyset$ e como $A \cap \emptyset = \emptyset$, podemos aplicar a propriedade **P₃** e temos:

$$p(A) = p(A \cup \emptyset) \stackrel{\mathbf{P}_3}{=} p(A) + p(\emptyset) \Rightarrow p(\emptyset) = 0$$

$$p(\emptyset) = 0$$

2ª propriedade: Probabilidade do evento complementar

Observe que, sendo \bar{A} a notação para “complementar de A ”, temos:

$$A \cup \bar{A} = \Omega \text{ e } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Logo:

$$p(\Omega) = p(A \cup \bar{A})$$

Aplicando **P₂** e **P₃**, temos:

$$1 = p(A) + p(\bar{A}) \text{ ou, equivalentemente, } p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

3ª propriedade: Probabilidade da união de dois eventos

A partir do número de elementos da união de dois conjuntos, demonstraremos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow \text{probabilidade da união de dois eventos quaisquer}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B), \text{ quando } A \cap B = \emptyset \text{ (eventos mutuamente exclusivos)}$$

Demonstração:

Conhecemos as probabilidades de ocorrência de dois eventos quaisquer A e B e procuramos a probabilidade de ocorrer o evento $A \cup B$. Ou seja, conhecemos $p(A)$ e $p(B)$ e procuramos uma expressão que nos dê $p(A \cup B)$. Vejamos qual é essa expressão.

Já sabemos, pela propriedade **P₃**, que, se $A \cup B = \emptyset$, então

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Sabemos também que, se A e B são conjuntos quaisquer, temos:

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \quad \textcircled{I}$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \quad \textcircled{II}$$

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Como $(A \cap \bar{B})$, $(A \cap B)$ e $(\bar{A} \cap B)$ são dois a dois disjuntos, podemos aplicar **P₃** e obtemos:

$$p(A \cup B) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \quad \textcircled{III}$$

Considerando as probabilidades dos eventos A e B em **II**, temos:

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \quad \textcircled{IV}$$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) \quad \textcircled{V}$$

Substituindo **IV** e **V** em **III**, concluímos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow \text{probabilidade da união de dois eventos quaisquer.}$$

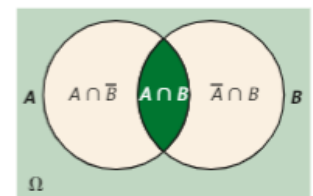


Figura 61: Consequências da definição teórica de probabilidade no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 238 e 239

Esta ocasião, que se caracteriza como o momento de constituição do entorno tecnológico-teórico, as propriedades são apresentadas e também justificadas. A primeira propriedade é relativa a noção de impossibilidade ou evento impossível. Na segunda

propriedade, apresentou-se a técnica para o cálculo de um evento complementar. Anteriormente essa noção foi apenas exemplificada, sem qualquer cálculo. A técnica institucionalizada nessa situação poderá ser mobilizada em tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*), desde que seja um evento complementar em relação a outro evento, isto é, $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$. Modelamos, então, como técnica τ_{23} :

τ_{23} : Se B é um evento complementar de A , então: $p(B) = 1 - p(A)$

Já na terceira e última propriedade, apresentou-se a probabilidade da união de dois eventos quaisquer e dois eventos mutuamente exclusivos (técnica τ_{22}), juntamente com a demonstração de tal propriedade.

Novamente as duas seções seguintes são *Exercícios resolvidos* e *Exercícios*. Vemos a mesma proposta que a anterior (Quadro 16), em que tarefas de alguns tipos de tarefas são resolvidas por meio de técnicas já institucionalizadas e, em seguida, são propostas tarefas em que os alunos também poderão mobilizar as mesmas técnicas para as resoluções. Organizamos essas duas seções no quadro que segue:

Quadro 17: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções *Exercícios resolvidos* e *Exercícios* – 2ª etapa

Exercícios resolvidos		Exercícios
Tipos de tarefas apresentadas	Técnicas mobilizadas	Quantidade de tarefas desse tipo propostas
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	τ_6 : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades; ou τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.	7
	τ_{23} : Se B é um evento complementar de A , então: $p(B) = 1 - p(A)$.	8
T ₈ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento.	τ_{22} : Dados dois eventos A e B , a probabilidade da união desses eventos será: • $p(A) + p(B)$, se eventos mutuamente exclusivos; • $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, se eventos quaisquer.	5
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.	Estratégia pessoal	1
Tipos de tarefas propostas	Técnicas que podem ser mobilizadas	
T ₇ : Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente.	τ_6 ou τ_7	7

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 17, observa-se os tipos de tarefas e técnicas mobilizadas na seção *Exercícios resolvidos* e o quantitativo de tarefas presentes na seção *Exercícios*. Destacamos que na última linha deste quadro tarefas do tipo T₇ foram propostas apenas na seção *Exercícios*, em que as técnicas τ_7 e τ_8 podem ser mobilizadas. Isso porque o princípio aditivo para o cálculo de eventos independentes será institucionalizado posteriormente neste volume.

Após essas seções, duas situações são apresentadas para caracterizar *Probabilidade condicional* e, ao final, a definição de probabilidade condicional é institucionalizada. Podemos observar a primeira situação na figura a seguir:

Probabilidade condicional

Analisemos as seguintes situações:

- 1ª) Experimento: um dado não viciado é lançado e observamos a sua face de cima.

Neste caso, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ e } n(\Omega) = 6$$

Consideremos o evento $A = \{\text{o resultado é ímpar}\} = \{1, 3, 5\}$.

Neste caso, temos $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$. Essa é a probabilidade

antes de o experimento ser realizado.

Vamos supor agora que, ao realizar o experimento, verificou-se que o resultado não foi o número 6, isto é, que ocorreu:

$$B = \{\text{o resultado é diferente de 6}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } n(B) = 5$$

Agora, a **probabilidade de ocorrer A, sabendo que já ocorreu B**, que denotamos por $p(A/B)$, é:

$$p(A/B) = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ (probabilidade de ocorrer A condicionada ao fato de já ter ocorrido B)}$$

Observe que agora os casos possíveis são todos os elementos de B e não mais todos os elementos de Ω . E que os casos favoráveis à ocorrência de A não são mais todos os elementos de A e sim os elementos de $B \cap A$, pois só os elementos pertencentes a B podem ocorrer.



Lançamento de um dado não viciado.

Figura 62: Conceituação de Probabilidade condicional no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 243

O conceito de probabilidade condicional foi apresentado anteriormente apenas no volume referente ao nono ano do ensino fundamental, em que para tarefas do tipo T₁₁ (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu*) foi apresentada a técnica τ_{17} (*Escrever a fração cujo denominar representa o número de casos favoráveis, que satisfaz a condição dada, e o denominador representado o total de casos*). Nesta primeira situação, essa técnica também é mobilizada. Observemos, agora, a segunda situação apresentada para a institucionalização de probabilidade condicional e a definição apresentada na Figura 63:

- 2ª) Oito amigos, sendo 4 homens e 4 mulheres, estão reunidos para revelar seus amigos secretos durante uma confraternização de final de ano. Todos estão sentados na sala, escolhendo quem irá começar. Filipe se dispõe a ser o primeiro a falar. Ele se levanta e vai para o meio da roda. Nesse momento, a chance de um dos sete participantes sentados ser o amigo secreto de Filipe é de $\frac{1}{7}$. Lúcia, como uma das participantes, tem essa chance de $\frac{1}{7}$. Gabriel também.

Matematicamente, a situação atual é a seguinte:

$$\Omega = \{\text{todos os 7 amigos, exceto Filipe}\}; n(\Omega) = 7$$

$$L = \{\text{Lúcia}\}; n(L) = 1 \text{ e } p(L) = \frac{n(L)}{n(\Omega)} = \frac{1}{7}$$

$$G = \{\text{Gabriel}\}; n(G) = 1 \text{ e } p(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{1}{7}$$

Filipe começa: “Meu amigo secreto é uma mulher!”. Nesse momento, Gabriel exclama decepcionado. Ele sabe, mesmo que intuitivamente, que a partir desse momento a chance de um dos homens ser o amigo secreto de Filipe é zero. Ao mesmo tempo, a chance de Lúcia, bem como das outras três mulheres, passou a ser de $\frac{1}{4}$.

Essas probabilidades mencionadas, zero e $\frac{1}{4}$, são probabilidades condicionadas a uma informação extra.

A presença dessa informação extra modifica as probabilidades iniciais, pois ela modifica o espaço amostral. Matematicamente, indicamos a probabilidade de ocorrer o evento A , condicionada ao fato de já ter ocorrido o evento B por $p(A/B)$.

Agora vamos definir os eventos existentes nessa situação:

M é o evento “o amigo secreto de Filipe é mulher”, representado pelo conjunto

$$M = \{\text{Lúcia, Flávia, Denise, Fernanda}\}$$

L é o evento “o amigo secreto de Filipe é Lúcia”, representado pelo conjunto

$$L = \{\text{Lúcia}\}$$

G é o evento “o amigo secreto de Filipe é Gabriel”, representado pelo conjunto

$$G = \{\text{Gabriel}\}$$

Quando os eventos L e G não estavam condicionados a nenhuma informação extra, tínhamos $p(L) = p(G) = \frac{1}{7}$, como já visto anteriormente.

Mas agora, ambos estão condicionados ao fato que M ocorreu. Assim, devemos calcular $p(L/M)$ e $p(G/M)$.

Intuitivamente, sabemos que $p(L/M) = \frac{1}{4}$ e $p(G/M) = 0$. Vamos aprender como calculá-los.

Note que, quando o evento M ocorre, o espaço amostral passa a ser os elementos de M . No caso, são as 4 mulheres. Assim, o número de elementos de M é 4, ou seja, $n(M) = 4$.

Para o cálculo de uma probabilidade condicional, é necessário verificar se o evento está ou não contido no novo espaço amostral. Gabriel, que é homem, não pertence ao conjunto M das mulheres. Ou seja, $G \cap M = \emptyset$ e portanto $n(G \cap M) = 0$. Esse é o motivo pelo qual $p(G/M) = 0$.

$$\text{Acompanhe: } p(G/M) = \frac{n(G \cap M)}{n(M)} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$\text{Lúcia, por sua vez, pertence a } M, \text{ ou seja, } L \cap M = \{\text{Lúcia}\} \text{ e } n(L \cap M) = 1. \text{ Então, } p(L/M) = \frac{n(L \cap M)}{n(M)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Este fato nos sugere que } p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

$$\text{Como } \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \cdot \frac{n(\Omega)}{n(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ segue a definição de probabilidade condicional.}$$

Definição:

Dados dois eventos A e B , com $p(B) > 0$, a probabilidade condicional de ocorrer

$$A, \text{ já tendo ocorrido } B, \text{ é um número dado por: } p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Para refletir

Constata a veracidade desta fórmula nos dois exemplos anteriores.

Figura 63: Definição de Probabilidade condicional no 2º ano do EM
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 243 e 244

Nesse segundo caso, contextualizou-se uma situação de “sorteio de amigo secreto entre oito amigos”, em que quatro são homens e quatro são mulheres. A situação de probabilidade condicionada ocorre quando se calcula a probabilidade de Lúcia e de Gabriel, uma das amigas e um dos amigos, ser “o amigo” secreta de Filipe, sabendo que ele tirou uma mulher. Com isso, chegou-se a definição de probabilidade condicional e a nova técnica para a resolução de tarefas do tipo T₁₁ (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu*), que modelamos como sendo τ_{24} :

τ_{24} : Dados dois eventos A e B , com $p(B) > 0$, a probabilidade de ocorrer o evento A , já que ocorreu o evento B , é $p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Na sequência, é apresentada a seção *Exercícios resolvidos* com quatro tarefas do tipo T₁₁ que mobilizam a técnica τ_{24} . A última tarefa resolvida dessa seção é do tipo T₇ (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) e mobiliza uma nova técnica a partir da noção de probabilidade condicional (Figura 64):

18. Uma bolsa não transparente contém 3 bolinhas de plástico azuis e 5 bolinhas de plástico vermelhas. Retiram-se, aleatoriamente, sucessivamente e sem reposição, duas bolinhas dessa bolsa. Qual é a probabilidade de ambas serem vermelhas?

Resolução:
Consideramos os eventos:
 $B = \{\text{a primeira bolinha retirada é vermelha}\}$
 $A = \{\text{a segunda bolinha retirada é vermelha}\}$
Queremos determinar $p(A \cap B)$.

Sabemos que $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, daí:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

(consequência da definição de probabilidade condicional)

Como $p(B) = \frac{5}{8}$ e $p(A/B) = \frac{4}{7}$, temos:

$$p(A \cap B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{10}{28} = 0,36$$

Figura 64: Nova técnica para a resolução de tarefas do tipo T₇
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 245

Nessa situação resolvida, ao realizar uma manipulação na definição de probabilidade condicionada, estabelece-se uma nova técnica, τ_{25} , para resolução de tarefas do tipo T7 (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*).

$$\tau_{25}: \text{Dados dois eventos } A \text{ e } B, \text{ em } A \text{ é condicional ao fato de } B \text{ já ter ocorrido, } p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Na seqüência institucionalizou-se *Eventos independentes*, em que o contexto foi o lançamento de dois dados perfeitos, conforme observamos na Figura 65:



Lançamento de dois dados perfeitos de cores diferentes.

Eventos independentes

O conceito de independência de eventos é muito importante em probabilidade. Após analisar um exemplo, definiremos o que são **eventos independentes**.

Consideremos o experimento “lançar dois dados perfeitos de cores diferentes”. Seja A o evento “sair 6 no 1º dado” e B o evento “sair 3 no 2º dado”. Observemos que:

- $n(\Omega) = 36$
- $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
- $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$
- $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $A \cap B = \{(6, 3)\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{36}$
- $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$

Assim, $p(B) = p(B/A) = \frac{1}{6}$, ou seja, a probabilidade de “sair 3 no 2º dado” não foi afetada pelo fato de “sair 6 no 1º dado”, ou, ainda, a probabilidade de ocorrer B **não dependeu** da ocorrência de A .

Nesse caso, dizemos que A e B são **eventos independentes**. A probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de ter ou não ocorrido o outro.

Dessa forma, também é verdade que $p(A) = p(A/B)$.

Assim, como $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ temos:

$$p(A \cap B) = \underbrace{p(A/B)}_{p(A)} \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B)$$

Logo, o fato de A e B serem eventos independentes é equivalente a dizer que $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Podemos, então, dar a definição:

Dois eventos A e B de um espaço amostral Ω (com $p(A) \neq 0$ e $p(B) \neq 0$) são independentes se, e somente se, $p(A/B) = p(A)$, ou, de modo equivalente:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Com isso, podemos afirmar que dois eventos A e B são **dependentes** quando $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$.

Figura 65: Conceituação de eventos independentes e dependentes no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 245

Nessa situação, para calcular a probabilidade de sair 6 no primeiro dado – $p(B)$ – e 3 no segundo dado – $p(B)$ –, tarefa do tipo T7, também foi mobilizada a técnica τ_{25} . Nota-se que $p(B)$

= $p(B/A)$, uma vez que ter ocorrido A não interfere na ocorrência de B. Com isso, definiu-se A e B como eventos independentes. A técnica apresentada aqui é a τ_{19} (*Efetuar o produto das probabilidades dos eventos independentes*) já vista no volume referente ao nono ano do ensino fundamental e que, neste momento, é justificada.

As duas seções posteriores são *Exercícios resolvidos* e *Exercícios*, seguindo a proposta já vista anteriormente quando essas seções foram apresentadas. Novamente organizamos o quantitativo de tarefas do mesmo tipo e técnicas mobilizadas nestas seções no Quadro 18, a seguir:

Quadro 18: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções *Exercícios resolvidos* e *Exercícios* – 3ª etapa

Exercícios resolvidos		Exercícios
Tipos de tarefas apresentadas	Técnicas mobilizadas	Quantidade de tarefas desse tipo propostas
T ₇ : Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente.	τ_{19} : Efetuar o produto das probabilidades dos eventos independentes; τ_{25} : Dados dois eventos A e B, em A é condicional ao fato de B já ter ocorrido, $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$.	12
Tipos de tarefas propostas	Técnicas que podem ser mobilizadas	
T ₁₁ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu.	τ_{17} : Escrever a fração cujo denominar representa o número de casos favoráveis, que satisfaz a condição dada, e o denominador representado o total de casos. τ_{24} : Dados dois eventos A e B, com $p(B) > 0$, a probabilidade de ocorrer o evento A, já que ocorreu o evento B, é $p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$;	16
T ₈ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento.	τ_{22} : Dados dois eventos A e B, a probabilidade da união desses eventos será: • $p(A) + p(B)$, se eventos mutuamente exclusivos; • $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, se eventos quaisquer.	4
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	τ_6 : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades; ou τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de ocorrência de um evento.	7
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.	Estratégia pessoal	1

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Conforme observamos no Quadro 18, tarefas do tipo T₇ foram apresentadas na seção *Exercícios resolvidos* em que as técnicas τ_{19} e τ_{25} foram mobilizadas. Na seção seguinte, *Exercícios*, além de 12 tarefas desse tipo, tarefas dos tipos T₃, T₅, T₈, e T₁₁ também foram propostas. Essas tarefas já haviam sido propostas anteriormente.

O sexto tópico de estudo proposto relaciona conceitos de *Binômio de Newton*, que foi trabalhado no capítulo anterior que tratava de conceitos de combinatória, com o estudo de probabilidade. Para isso, o assunto foi introduzido da seguinte forma:

6 **O método binomial** Assunto
opcional

O método do produto de probabilidades é usado, por exemplo, quando se quer saber qual é a probabilidade de, em uma família, todas as crianças serem meninos ou todas serem meninas. Se um casal planejou ter 4 filhos, a probabilidade de que todos sejam meninos é:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Quando há mistura de sexos, por exemplo, 3 meninos e 1 menina, 2 meninos e 2 meninas, etc. e não se especifica a ordem de ocorrência, podemos usar o **método binomial**.

Figura 66: Método binomial para o estudo de probabilidade no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 249

Logo após essa breve introdução retomou-se algumas potências do binômio $(a + b)^n$, conhecidas como binômio de Newton, estudadas no capítulo anterior. Retomou-se, ainda, que os coeficientes dos binômios são os elementos do triângulo de Pascal, também conhecidos como números binomiais. Feito isso, apresentou-se dois exemplos de situações que podem mobilizar o *método binomial* como técnica de resolução para tarefas do tipo T₇ (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) em que a ordem de ocorrência dos eventos não é especificada. Foi o que chamamos, então, de técnica τ_{26} :

τ_{26} : *Método binomial*.

Não descrevemos o método, uma vez que em cada situação poderão ser mobilizadas potências diferentes para o binômio. Por exemplo, na Figura 67, podemos observar a primeira situação apresentada em que o método binomial foi mobilizado:

a) Consideremos uma família com 2 crianças. Se representamos o nascimento de 1 menino por M e o nascimento de 1 menina por F, temos:

- $p(M) = p = \frac{1}{2}$
- $p(F) = q = \frac{1}{2}$
- $\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$

Para refletir

O nascimento de meninos e de meninas é considerado um evento equiprovável, isto é, que tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Como experimentalmente sabemos que cada nascimento é independente de nascimentos anteriores, temos:

- $p(MM) = p(M) \cdot p(M) = p \cdot p = p^2 = \frac{1}{4}$
- $p(MF) = p(M) \cdot p(F) = p \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $p(FM) = p(F) \cdot p(M) = q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- $p(FF) = p(F) \cdot p(F) = q \cdot q = q^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Observe que a probabilidade total é igual a 1:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Se não consideramos a ordem em que ocorreram os nascimentos, podemos escrever:

p^2	+	$2pq$	+	q^2	=	1
probabilidade de nascerem 2 meninos {MM}		probabilidade de nascerem 1 menino e 1 menina {MF, FM}		probabilidade de nascerem 2 meninas {FF}		

Fique atento!

Lembre-se de que o quadrado de uma soma é indicado por: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Assim:

- a probabilidade de nascerem 2 meninos é p^2 , ou seja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- a probabilidade de nascerem 1 menino e 1 menina (sem considerar a ordem) é $2pq$, ou seja:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- a probabilidade de nascerem 2 meninas é q^2 , ou seja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Observemos que:

$$1p^2 + 2pq + 1q^2 = \binom{2}{0}p^2 + \binom{2}{1}pq + \binom{2}{2}q^2 = (p + q)^2 = 1^2 = 1$$

Figura 67: método binomial como técnica para tarefas do tipo T₇ no 2º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 250

A segunda situação assemelha-se a essa, mas num contexto de três nascimentos. Assim

o binômio mobilizado foi o $(a + b)^3$.

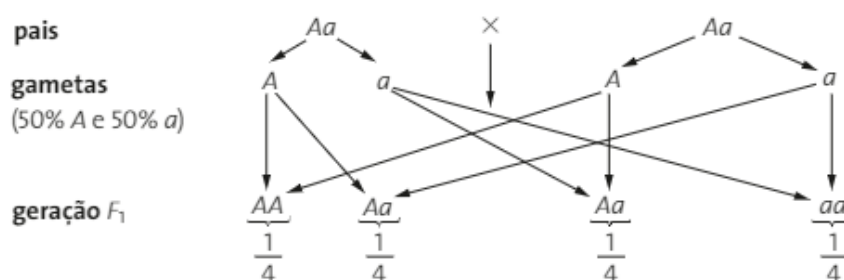
As duas seções seguintes são *Exercícios resolvidos* e *Exercícios* em que, na primeira, tarefas do tipo T₇ (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) são apresentadas e mobilizam a técnica τ_{26} (*Método binomial*) e, na segunda, dez tarefas deste mesmo tipo são propostas para os alunos resolverem por meio de τ_{26} .

O sétimo e último tópico de estudo proposto neste capítulo trata da probabilidade no contexto da Genética, conforme vemos na Figura 68:

7 Aplicações de probabilidade à Genética

A Genética é, talvez, o ramo da Biologia que mais utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso porque, em probabilidade, trabalhamos com os eventos chamados aleatórios, e um bom exemplo de evento aleatório é o encontro de dois tipos de gametas com determinados genes. Um indivíduo heterozigoto para determinada característica (Aa) forma dois tipos de espermatozoides, A e a . Se uma mulher também for heterozigota, poderá formar óvulos A e a . Depende apenas do acaso o fato de ser o espermatozoide A ou a o responsável pela fecundação, assim como também depende apenas do acaso o fato de ser a célula feminina A ou a a fecundada.

Assim, considere o seguinte esquema:



Para refletir

Pesquise o que significa um "indivíduo heterozigoto" e um "indivíduo homozigoto".

e o quadro de possibilidades com suas respectivas probabilidades:

	♀	$A \rightarrow \frac{1}{2}$	$a \rightarrow \frac{1}{2}$
♂			
	$A \rightarrow \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ AA	$\frac{1}{4}$ Aa
	$a \rightarrow \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ Aa	$\frac{1}{4}$ aa

Fique atento!

Nos exercícios abaixo, quando não mencionado, considere os eventos apresentados como sendo equiprováveis.

Figura 68: Aplicações de probabilidade à Genética no 2º ano do EM
Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 2, p. 253

Nessa situação de contexto envolvendo conceitos da Biologia, em especial da genética, para descrever as possibilidades de fecundação, utilizou-se a ferramenta *tabela de dupla entrada* para determinar o espaço amostral. Essa é uma ferramenta também utilizada nos

estudos de combinatória, assim como a árvore de possibilidades. Vemos, então, uma proposta de interdisciplinaridade que atende, por exemplo, às orientações dos PCNEM ao afirmar que:

Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p. 44 e 45).

Essa situação que vimos na Figura 68 é um bom exemplo de articulação entre conhecimentos de probabilidade com outras áreas de conhecimento que, nesse caso, foi quanto à Biologia.

As duas seções que seguem são *Exercícios resolvidos* e *Exercícios* em que, ainda nesse contexto de genética, tarefas dos tipos T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*), T_7 (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) e T_8 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um **ou** outro evento*) são propostos em que técnicas já vistas são mobilizadas. O quantitativo dessas tarefas será apresentado no Quadro 20, mais adiante.

O capítulo, bem como a unidade a qual esse último capítulo pertence, é encerrado com as seções *Pensando no Enem*, *Outros contextos*, *Leitura*, *Vestibulares de Norte a Sul*, e *Caiu no Enem*. Nessas são propostas tarefas relacionadas aos estudos da unidade em que alguns envolvem os conceitos de probabilidade, totalizando quinze tarefas, contabilizadas, em relação aos tipos de tarefas, e apresentadas na última seção deste capítulo.

Essa é a organização praxeológica identificada no volume referente ao segundo ano da coleção de livros didáticos destinado ao ensino médio. Segue-se, agora, para a análise da organização praxeológica do último livro didático desta coleção, relativo ao terceiro ano do ensino médio.

6.3 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

No último volume da coleção de livros didáticos do ensino médio, não se destinou um capítulo específico para o estudo de probabilidade. Ao folharmos a coleção, percebemos que o Capítulo 2 é destinado ao estudo de Estatística. Em tal, a *Parte Curso* é separada em cinco tópicos de estudo, em que o último tópico foi intitulado *Estatística e probabilidade*. Segundo o MP: “Finalizando o capítulo, temos que destacar a relação entre Estatística e probabilidade, uma vez que a frequência relativa pode ser usada para estimar a probabilidade de ocorrência de um determinado evento” (DANTE, 2016, p. 305). Assim, nosso olhar voltou-se para a análise

deste tópico, que apresenta como introdução ao estudo de Estatística e probabilidade o que vemos na figura que segue:

5 Estatística e probabilidade

A Estatística também é usada para estimar a probabilidade de ocorrência de um evento, principalmente quando ela não pode ser calculada teoricamente pela razão $P = \frac{\text{evento}}{\text{espaço amostral}}$.

Quando se diz que a probabilidade de um avião cair é de uma em um milhão, é porque a frequência relativa de ocorrência de acidentes é de um acidente a cada um milhão de decolagens. Ao longo dos anos, ocorrerão mais decolagens e essa probabilidade pode mudar. Dos anos 1960 para cá, a frequência relativa de acidentes aéreos no mundo diminuiu cerca de 15 vezes. Isso significa que a probabilidade de ocorrer um acidente nos anos 1960 era 15 vezes maior do que agora.

Quanto maior for a quantidade de experimentos, melhor será a estimativa da probabilidade usando-se a frequência relativa. Ao jogar uma moeda duas vezes, é possível que ocorra duas vezes cara. Seria absurdo afirmar que a probabilidade de ocorrer cara é de 100%, pois a quantidade de experimentos é muito pequena e não pode ser utilizada para tal afirmação. Entretanto, ao jogar uma moeda 200 vezes, é possível observar algo como 94 caras e 106 coroas; jogando 2 000 vezes, 1 034 caras e 966 coroas; 20 000 vezes, 10 091 caras e 9 909 coroas.

© Frequências de ocorrer cara por lançamentos de uma moeda

Número de jogadas	FA (cara)	FR (cara)
2	2	100%
200	94	47%
2 000	1 034	51,7%
20 000	10 091	50,45%

Fonte: Dados fictícios.

Pela tabela acima, portanto, percebe-se que a frequência relativa tende ao valor teórico de 50% para a probabilidade de ocorrer cara e coroa. Isso é chamado **lei dos grandes números**.

Previsões do tempo, resultados eleitorais, mortalidade causada por doenças, entre outras, são probabilidades calculadas usando-se frequências relativas de pesquisas estatísticas. Nesses casos, quanto maior for o histórico de dados a ser analisado, melhor será a previsão.

Figura 69: Probabilidade no 3º ano do EM

Fonte: Coleção Matemática: Contexto e Aplicações, volume 3, p. 57

Nessa introdução do tópico *Estatística e probabilidade*, apresentou-se uma situação no contexto “lançamento de uma moeda”, em que foram organizadas em um quadro frequências de ocorrer o evento “cara” por lançamentos da moeda. Com isso, mostrou-se que quanto maior a frequência de lançamentos, a frequência relativa tende ao valor teórico 50% para a probabilidade de ocorrer o evento.

As duas seções seguintes, propostas para a finalização deste tópico, são *Exercícios resolvidos* e *Exercícios*. A quantificação dos tipos de tarefas e técnicas mobilizadas ou possíveis de serem mobilizadas são descritas no Quadro 19:

Quadro 19: Tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas seções *Exercícios resolvidos* e *Exercícios* no 3º ano do EM

Exercícios resolvidos		Exercícios
Tipos de tarefas apresentadas	Técnicas mobilizadas	Quantidade de tarefas desse tipo propostas
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.	Estratégia pessoal	3
T ₁₃ : Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento.	τ_{18} : Construir uma tabela e organizar os elementos que compõem o espaço amostral do experimento da seguinte forma: eventos, frequência e probabilidades.	1
Tipos de tarefas propostas	Técnicas que podem ser mobilizadas	2
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	$\tau_{6.1}$: Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado. τ_{20} : Escrever a porcentagem a partir da fração cujo numerador representa a frequência absoluta e o denominador representa a quantidade total de elementos da amostra.	
T ₆ : Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento.	τ_8 : Manipular ostensivos, dados ou moedas, quantas vezes for solicitado, anotando os resultados de cada lançamento.	

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Como podemos observar no Quadro 19, foram apresentados dois tipos de tarefas na primeira seção, *Exercícios resolvidos*, T₅ e T₁₃. Na seção seguinte, além dessas tarefas propostas, outras tarefas do tipo T₆ e T₁₄ também foram propostas, totalizando oito tarefas para o estudo de probabilidade envolvendo conceitos estatísticos.

O capítulo é finalizado, então, com as seções *Matemática e tecnologia*, *Pensando no Enem*, *Outros contextos* e *Vestibulares de Norte a Sul*, nas quais foram propostas tarefas relacionadas aos estudos do capítulo. Não identificamos tarefas relacionando estatística e probabilidade.

Essa é a organização praxeológica identificada no volume referente ao terceiro ano do ensino médio. A seguir, apresentamos uma síntese dos dados produzidos e analisados nessa coleção destinada a última etapa de escolarização básica.

6.4 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS NA COLEÇÃO DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo buscamos analisar a proposta de ensino de probabilidade na coleção aprovada no PNL D/2019, destinada ao ensino médio. No primeiro volume não se destinou capítulos ou tópicos para o estudo desta temática, enquanto que no segundo volume, referente

ao segundo ano, o último capítulo do volume foi destinado a tal estudo. Ainda em relação ao LD do segundo ano, no quadro a seguir apresentamos a quantidade de tarefas, em função de cada tipo de tarefas, propostas ao longo deste volume:

Quadro 20: Quantidade de tarefas em função dos tipos no 2º ano do ensino médio

Tipos de tarefas	T ₁	T _{2.2}	T ₃	T ₅	T ₇	T ₈	T ₁₁	Total
Quantidade	5	4	74	2	34	11	17	147

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Quadro 21: Quantidade de tarefas em função dos tipos no 3º ano do ensino médio

Tipos de tarefas	T ₃	T ₅	T ₆	T ₁₃	Total
Quantidade	2	3	2	1	8

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Como podemos notar no Quadro 20, assim como também vimos na coleção dos anos finais do ensino fundamental, tarefas do tipo T₃ (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) foram as mais frequentes no volume referente ao segundo ano do ensino médio, seguido de tarefas do tipo T₇ (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*). Em relação aos volumes das duas coleções anteriores, neste volume percebemos um grande aumento de tarefas propostas, bem como momentos de constituição do entorno tecnológico-teórico e justificativas de técnicas que já haviam sido apresentadas no ensino fundamental, mas sem uma justificativa teórica. Tais justificativas identificadas neste volume foram apresentadas por meio da linguagem axiomática, com axiomas, teoremas propriedades e algumas demonstrações. Assim, observamos que as visões de probabilidade clássica e axiomática foram as privilegiadas nesse volume. Não houve propostas de experimentação, como em algumas ocasiões dos volumes anteriores analisados, bem como não foram contempladas as visões intuitiva, geométrica, frequentista e subjetiva de probabilidade.

Já no Quadro 21 que apresenta a quantidade de tarefas em função dos tipos no volume referente ao terceiro ano do ensino médio, fica evidenciada a pouca atenção dada ao estudo de probabilidade, ainda que buscou-se relacionar Estatística e Probabilidade. Assim, observamos que só as visões de probabilidade clássica e frequentista foram privilegiadas neste volume, ainda que sem muito aprofundamento.

No Quadro 22 também apresentamos os contextos aos quais as tarefas do estudo de probabilidade foram relacionadas nos dois volumes analisados:

Quadro 22: Frequência (e porcentagem) de tarefas e seus contextos na Coleção Matemática – Contextos e Aplicações/ Ensino Médio

Contextos	2º ano	3º ano
Giro de uma roleta (dividida em n partes iguais)	2 (1,36)	–
Lançamento de duas moedas honestas	7 (4,76)	–
Lançamento de um dado honesto	8 (5,44)	2 (25)
Retirada, ao acaso, de objetos em recipiente	14 (9,52)	1 (12,5)
Sorteio	8 (5,44)	–
Lançamentos de dois dados não viciados	14 (9,52)	–
Lançamento de três dados não viciados	5 (3,40)	–
Enquete: entrevista com estudantes	7 (4,76)	–
Anagrama	1 (0,68)	–
Baralho: retirada de cartas	27 (18,38)	–
Educacional: classe com alunos	1 (0,68)	–
Lançamento de uma moeda não viciada	9 (6,12)	4 (50)
Lançamento de um dado viciado	4 (2,72)	–
Urbanismo e população	–	1 (12,5)
Lançamento de uma moeda viciada	1 (0,68)	–
Jogo de computador	1 (0,68)	–
Máquina produtora de peças	3 (2,04)	–
Lançamento de uma moeda e um dado honesto	1 (0,68)	–
Pescaria	2 (1,36)	–
Grupo de pessoas e profissão	7 (4,76)	–
População e saúde	1 (0,68)	–
Tipagem sanguínea	1 (0,68)	–
Esporte: salto à distância	2 (1,36)	–
Festa e convidados	1 (0,68)	–
Cofre bancário e senha (com números ou letras)	1 (0,68)	–
Educacional: pesquisa realizada por estudantes	1 (0,68)	–
Alimentação: preferência entre prato doce ou salgado)	1 (0,68)	–
Cartuchos de impressora	1 (0,68)	–
Teste de aptidão para cargo em uma empresa	1 (0,68)	–
Compra de produtos em uma loja	1 (0,68)	–
Biologia: Natalidade, genótipo, etc.	11 (7,48)	–
Contexto matemático	3 (2,04)	–
Total de contextos	31	4

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Na coleção do ensino médio, o segundo ano apresenta mais contextos em relação as quatro coleções, bem como o que mais identificamos tarefas, como já vimos. Ainda neste volume, notamos que a maior quantidade de tarefas propostas apresentaram o contexto de sorteio de cartas de baralho (18,38%), seguido de tarefas com contextos de retirada de objetos de recipientes (9,52%), lançamento de dois dados não viciados (9,52%) e biologia (7,48%). A esse último contexto, inclusive, destinou-se um tópico de estudo próprio. No volume referente ao terceiro ano identificamos apenas quatro contextos, em que o predominante é o de lançamento de uma moeda não viciada.

Apresentamos, ainda, no quadro a seguir, a relação entre os tipos de tarefas e técnicas verificados neste volume referente ao segundo ano do ensino médio:

Quadro 23: Relação entre tipos de tarefas e técnicas no segundo e terceiro anos do ensino médio

Técnicas (τ_n)	Tipos de tarefas (T_n)									
	T_1	$T_{2.2}$	T_3	T_5	T_6	T_7	T_8	T_{11}	T_{13}	
$\tau_{2.2}$		■		■						
τ_3				■						
$\tau_{4.2}$	■			■						
τ_6			■	■		■				
$\tau_{6.1}$			■	■						
τ_7				■		■				
τ_8				■	■					
τ_{10}		■		■						
τ_{12}		■		■						
τ_{17}				■				■		
τ_{18}				■					■	
τ_{19}				■		■				
τ_{20}			■	■						
τ_{21}		■		■						
τ_{22}				■			■			
τ_{23}			■	■						
τ_{24}				■				■		
τ_{25}				■		■				
τ_{26}				■		■				

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

No Quadro 23, observamos a relação entre os tipos de tarefas e as técnicas percebidas nesta coleção do ensino médio. Pintamos a célula de preto para indicar tal relação. Tarefas dos tipos T_5 (*Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade*) não apresentaram técnicas descritíveis ao longo da coleção, exigindo que o aluno desenvolva uma estratégia pessoal para resolver essas tarefas. Como não houve relações desses tipos de tarefas com técnicas, destacamos em cinza. Novamente o tipo de tarefas T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) foi o que apresentou mais técnicas, com um total de seis relações entre esse tipo de tarefas e técnicas. Em seguida, tarefas do tipo T_7 (*Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente*) também apresentam mais relações com técnicas distintas, num total de cinco relações.

Neste volume não identificamos novos tipos de tarefas, mas foram modeladas cinco novas técnicas:

- τ_{21} (*Utilizar as fórmulas para o cálculo de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples ou combinações simples quando a tarefa se caracterizar em um desses casos de agrupamento*) para tarefas do tipo $T_{2.2}$ (*Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório*);

- τ_{22} (Dados dois eventos A e B , a probabilidade da união desses eventos será: $p(A) + p(B)$, se eventos mutuamente exclusivos; $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, se eventos quaisquer) para tarefas do tipo T_8 (Determinar a probabilidade de ocorrência de um **ou** outro evento);
- τ_{23} (Se B é um evento complementar de A , então: $p(B) = 1 - p(A)$) para tarefas do tipo T_3 (Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico);
- τ_{24} (Dados dois eventos A e B , com $p(B) > 0$, a probabilidade de ocorrer o evento A , já que ocorreu o evento B , é $p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$) para tarefas do tipo T_{11} (Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu);
- τ_{25} (Dados dois eventos A e B , em A é condicional ao fato de B já ter ocorrido, $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$) e τ_{26} (Método binomial) para tarefas do tipo T_7 (Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente).

Em relação ao terceiro volume, notamos que em um capítulo destinado ao estudo de estatística, foi destinado um tópico para tratar da relação entre estatística e probabilidade. Apresentou-se algumas situações resolvidas por meio de técnicas já vistas em volumes anteriores e, ao final, oito tarefas de tipos conhecidos foram propostas, podendo ser mobilizadas técnicas também já vistas.

No Quadro 24 organizamos as tarefas que relacionam conhecimentos de combinatória e estatística nos dois volumes em que foi proposto o estudo de probabilidade, isto é, nos volumes referentes ao segundo e terceiro ano do ensino médio:

Quadro 24: Frequência e porcentagem de tarefas que relacionam combinatória ou estatística no estudo de probabilidade em cada volume analisado Coleção Matemática – Contextos e Aplicações/ Ensino Médio

Volume	Conhecimentos de combinatória	Conhecimentos de estatística
2º ano EM	21 (14,38)	4 (2,73)
3º ano EM	–	4 (50)

Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Por meio deste quadro, notamos que no segundo ano do ensino médio há 14,38 % de tarefas que relacionam conhecimentos de combinatória e probabilidade. Isso decorre do fato de que no capítulo anterior ao estudo de probabilidade, intitulado *Análise combinatória*, vimos que as noções de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples e combinação foram retomadas e a técnica τ_{21} (Utilizar as fórmulas para o cálculo de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples ou combinações simples quando a tarefa se caracterizar em um desses casos de agrupamento) proposta para determinar o espaço amostral de situações probabilísticas. Apenas quatro tarefas relacionavam conhecimentos de estatística

no estudo de probabilidade. Já em relação ao volume referente ao terceiro ao do ensino médio, em que vimos que havia uma seção destinada ao estudo de probabilidade no Capítulo 2 intitulado *Estatística*, das oito tarefas propostas, quatro relacionavam conhecimentos de estatística e probabilidade.

De maneira geral, nesta coleção destinada ao ensino médio predominaram os momentos de trabalho de técnicas e a constituição do entorno tecnológico-teórico. Ou seja, levando em consideração os momentos didáticos identificados e o modelo de organizações didáticas proposta por Gascón (2003), uma organização didática *clássica* foi proposta nesta coleção.

A seguir, apresentamos as considerações finais desta investigação em que buscamos destacar os principais aspectos identificados quanto à proposta de ensino de probabilidade ao longo das quatro coleções analisadas, que perpassam a educação básica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de responder à questão de pesquisa – Como é proposto o ensino de probabilidade ao longo da educação básica em coleções de livros didáticos de mesma autoria? – buscamos analisar a proposta de ensino de probabilidade nas coleções de livros didáticos *Ápis (Alfabetização Matemática)* e *Ápis (Matemática)* que compõem a coleção destinada aos anos iniciais do ensino fundamental, *Projeto Teláris*, destinada aos anos finais do ensino fundamental, e *Matemática – Contextos e Aplicações*, relativa ao ensino médio. Todas estas coleções foram aprovadas nos PNLD dos anos de 2016, 2017 e 2018, respectivamente, e todas são de autoria de Luiz Roberto Dante. A escolha dessas coleções deu-se por inferirmos que em obras didáticas de mesma autoria haveria (ou poderia haver) uma continuidade da proposta do estudo de probabilidade. Além disso, nosso estudo sobre pesquisas já realizadas identificou a ausência de análises longitudinais sobre a temática “ensino de probabilidade”, o que trazia mais legitimidade ao nosso estudo.

A Teoria Antropológica do Didático, nosso referencial teórico e metodológico, e o modelo desenvolvido por Bittar (2017) para análise de livros didáticos, nos permitiram identificar e compreender a proposta de ensino da temática investigada. As concepções de organização praxeológica, dos momentos de estudo e das fases do caminho metodológico de produção e análise de dados possibilitaram identificar, nas obras investigadas, as características essenciais da proposta de ensino de probabilidade. Nesse sentido, pudemos responder aos objetivos específicos elencados anteriormente: um quanto às escolhas matemáticas e o outro quanto às escolhas didáticas para o estudo de probabilidade. Para isso, dividiu-se a parte de produção e análise de dados em capítulos e seções conforme acreditou-se necessário, com o intuito de detalhar os resultados obtidos na pesquisa.

Embasadas em investigações relacionadas à nossa temática de pesquisa e teóricos que se dedicaram aos estudos quanto à probabilidade, entendemos que esta temática se relaciona à diversos conceitos e ideias, tais como possibilidades, chance, acaso, incerteza, dentre outras, mobilizadas em situações de aleatoriedade, além de conceitos como fração, proporção, razão, porcentagem (SANTANA, 2011). Na coleção de livros didáticos destinada aos anos iniciais do ensino fundamental percebemos não haver capítulos específicos para o estudo de probabilidade, mas notamos que algumas propostas de atividades trabalhavam noções de possibilidade e situações de aleatoriedade, que preparam para o estudo de probabilidade.

Nessa coleção dos anos iniciais, identificamos vinte e três tarefas que pudemos classificar em cinco tipos e cinco subtipos de tarefas. Apenas no primeiro volume não

identificamos atividades que acreditamos preparar, ainda que intuitivamente, para o estudo de probabilidade. Nos livros de segundo ao quinto ano, encontramos nove tarefas de possibilidades envolvendo situações de aleatoriedade. Tratavam-se de tarefas que trabalhavam a determinação de possibilidades de eventos específicos em experimentos aleatórios ou do espaço amostral de experimentos. Para isso, das quatro técnicas identificadas mobilizadas nas tarefas, duas possuem caráter experimental ao propor a manipulação de ostensivos dados de seis faces e moedas ou notas que representam o sistema monetário brasileiro.

Uma particularidade do livro do quinto ano é que, além de tarefas de possibilidades, houve uma introdução ao conceito de probabilidade sendo proposto a partir do estudo de fração e de porcentagem. Nessa ocasião institucionalizou-se probabilidade como “medida de chance”, podendo ser representado por meio dos ostensivos razão ou fração e, posteriormente, como porcentagem. As quatorze tarefas propostas neste volume puderam ser classificadas em quatro tipos de tarefas, algumas mobilizando técnicas propostas de resolução e outras em que havia a necessidade de estratégias pessoais de resolução ou de respostas que envolviam crenças das crianças. Nessas em especial, entendemos estar sendo envolvidas algumas noções de probabilidade intuitiva e subjetiva, ainda que informalmente. A visão clássica de probabilidade foi a mais observada neste volume.

No momento inicial de introdução do estudo de probabilidade, também entendido como primeiro encontro com a organização praxeológica, percebemos algo comum às quatro coleções analisadas quanto à escolha didática de apresentar primeiramente situações em contextos envolvendo aleatoriedade e atividades resolvidas, já apontando as técnicas a serem mobilizadas. No livro do sexto ano, observou-se pouca exploração no estudo de probabilidade que foi contemplado em apenas uma página das 304 páginas do livro e somente quatro tarefas propostas. No livro do sétimo ano, percebemos uma ampliação de conceitos que constituem o estudo de probabilidade, como os conceitos de evento impossível e evento certo, uma proposta de discussão quanto ao significado de “evento”, bem como a constituição do entorno tecnológico-teórico pautado na Teoria das Probabilidades.

Ainda quanto ao livro do sétimo ano, observamos que é o volume com mais propostas de tarefas, num total de sessenta e seis tarefas. Modelamos quatro novos tipos de tarefas e sete novas técnicas para classificação de outras tarefas e estratégias de resolução. A experimentação, assim como em algumas tarefas dos volumes anteriores, também foi proposta neste volume além de um jogo, envolvendo lançamento de dados. Em algumas propostas de experimentação, sentiu-se falta da discussão de algumas noções de probabilidade frequentista visto a relevância dessa concepção e a articulação da probabilidade clássica e frequentista no estudo de

probabilidade. Conforme afirmamos anteriormente, é de extrema importância articular as visões de probabilidade (clássica, intuitiva, subjetiva, frequentista, axiomática e o contexto geométrica) ao longo da escolarização básica, uma vez que essas articulações possibilitam a construção de um conjunto de conceitos relativos à probabilidade. Ainda que em algumas ocasiões foram contempladas não só a visão clássica de probabilidade, a articulação não estava presente.

No volume referente ao oitavo ano identificamos oitenta e seis tarefas. Foram modelados um novo tipo de tarefas e quatro novas técnicas. O tipo de tarefas T_{10} (*Avaliar, dentre os resultados apresentados, quais resultados podem representar probabilidades de eventos*) foi identificada apenas neste volume. Houve uma evolução em relação a duas tarefas identificadas em volumes anteriores, que passaram a ser técnicas deste volume. São elas: T_2 (*Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório*) que passa a ser técnica para tarefas do subtipo $T_{2.2}$ (*Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório*), e T_1 (*Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico*) que se torna técnica para tarefas do subtipo $T_{1.4}$ (*Descrever eventos*). São institucionalizados conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento, eventos impossíveis e certo, equiprováveis e não equiprováveis.

Observamos, ainda, que neste volume a técnica para determinar probabilidades a partir de uma razão não recebe tanto destaque, como pudemos observar no volume anterior, ainda que tenha sido apresentada no momento de institucionalização de probabilidade de um evento. A probabilidade frequentista é contemplada, de maneira informal, em apenas uma atividade de experimentação (*Jogo de ímpar ou par*). A linguagem de conjuntos começa a ser introduzida neste volume. A probabilidade geométrica foi contemplada em três tarefas e é nesse episódio que a técnica é apresentada. As visões subjetiva e intuitiva de probabilidade não foram identificadas neste volume.

No volume referente ao nono ano, identificamos quarenta e cinco tarefas, quatro novos tipos de tarefas e quatro novas técnicas. Conceituou-se probabilidade condicional, distribuição probabilística, eventos independentes, estimativa da probabilidade, probabilidade geométrica e Teoria das Probabilidades. A visão de probabilidade frequentista é completada neste volume, ainda que informalmente, nas tarefas em que o aluno deve estimar probabilidade de eventos a partir de uma amostra com as frequências relativas de ocorrência dos eventos. Apenas uma tarefa foi proposta no contexto geométrico, assim como no volume anterior. As notações para os momentos de cálculos de probabilidade e espaço amostral são apresentadas em uma linguagem semelhante à da probabilidade axiomática (assim como observamos no volume do

oitavo ano), ainda que as propriedades e axiomas não tenham sido institucionalizadas neste volume. As visões intuitivas e subjetivas não foram completadas neste volume. Percebe-se, assim, que nas coleções destinadas aos anos iniciais do ensino fundamental as visões subjetivas e intuitiva de probabilidade estavam presentes. Já na coleção destinada aos anos finais do ensino fundamental, a visão clássica é a predominante e, em algumas poucas atividades, observou-se a visão frequentista sendo proposta informalmente e o contexto geométrico. Mas ressaltamos mais uma vez: sem haver articulações.

Na coleção de obras didáticas destinada ao ensino médio, o primeiro volume não apresentou capítulos ou tópicos de estudo de probabilidade. Já no segundo volume, um capítulo foi separado para tal estudo. Neste, identificamos uma quantidade de tarefas bem maior em relação a todos os outros volumes, sendo cento e quarenta e sete tarefas propostas, em que modelamos seis novas técnicas para tipos de tarefas já vistos em outros volumes. As visões frequentista, geométrica, intuitiva e subjetiva não foram completadas neste volume. Já em relação ao último volume que compõe a coleção do ensino médio, identificamos apenas um tópico proposto para o estudo de probabilidade, relacionado ao estudo de estatística. Apenas oito tarefas foram propostas. A visão frequentista foi contemplada, também de maneira informal, no breve estudo proposto neste volume, em detrimento das demais visões de probabilidade. Nos deparamos, assim, com uma organização didática bem teoricista e tecnicista, isto é, uma OD clássica, em que o bloco tecnológico-teórico está sendo constituído desde o primeiro encontro com a praxeologia e as tarefas são propostas após a apresentação de técnicas de resolução destas. É nesta coleção que muitas das técnicas foram justificadas, seja por axiomas, teoremas ou demonstrações dos teoremas apresentados. A probabilidade axiomática foi a base desse estudo, e a probabilidade clássica também esteve presente durante toda a organização praxeológica nesta obra.

Diante desses primeiros resultados, identificamos que as quatro coleções apresentaram organizações didáticas diferentes. Isto é, nos anos iniciais uma OD *empirista*, nos anos finais a valorização dos momentos de trabalho das técnicas apresentadas e a institucionalização de conceitos para o estudo de probabilidade e no ensino médio com uma OD *clássica*. Com isso, nossa hipótese inicial de que em coleções de mesma autoria haveria uma continuidade da proposta de ensino de probabilidade aparenta ser falha. Entretanto, percebe-se que mesmo com OD distintas, há uma certa coerência interna nos volumes pertencentes à mesma coleção. Em algumas poucas ocasiões essa coerência falha como, por exemplo, no volume referente ao sexto ano do ensino fundamental em que houve um equívoco ao tratar “possibilidade” como sinônimo de “chance”. Ainda assim, entende-se que caso uma escola escolhesse essas coleções para que

os professores utilizassem como recurso, a incoerência é pequena. A desarticulação é maior em relação às concepções de probabilidade que, de uma coleção para outra, é valorizada em alguns volumes, mas nunca retomada e aprofundada, com exceção da concepção clássica de probabilidade.

Vimos nos documentos curriculares oficiais a importante relação entre combinatória, estatística e probabilidade e que, inclusive, esses três temas compõem o bloco de conteúdos Tratamento da Informação. Em alguns documentos, como o Guia PNLD/2016, a combinatória foi integrada ao bloco *Números e operações* por tratarem o princípio da contagem como sendo uma temática relativa a números e operações. Apesar dessa discordância em algumas situações, inclusive entre autores, acreditamos que há estreita relação entre essas temáticas. Diante disto, buscamos identificar se nas quatro coleções analisadas essas relações são contempladas. Pudemos concluir que as relações entre combinatória e estatística no estudo de probabilidade foram pouco contempladas nas coleções de LD analisadas em nossa pesquisa. A combinatória (em especial os conceitos de arranjo, permutação e combinação) é relacionada ao estudo de probabilidade no volume relativo ao segundo ano do ensino médio. Já quanto à estatística, a relação com o estudo de probabilidade é mais valorizada no volume referente ao nono ano do ensino fundamental e no volume referente ao terceiro ano do ensino médio.

Quanto às tarefas menos propostas, T_4 (*Criar uma situação que envolva noções de probabilidade*) aparece apenas duas vezes. Inferimos que seja pelo fato de que, para atender a uma demanda da noosfera, surge uma tarefa que logo já não aparece em outros volumes. Em um dos documentos curriculares oficiais, por exemplo, um dos objetivos para o ensino fundamental é “questionar a realidade **formulando-se problemas e tratando de resolvê-los**, utilizando para isso o pensamento lógico, a **criatividade**, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação” (BRASIL, 1998, p.8, grifos nossos).

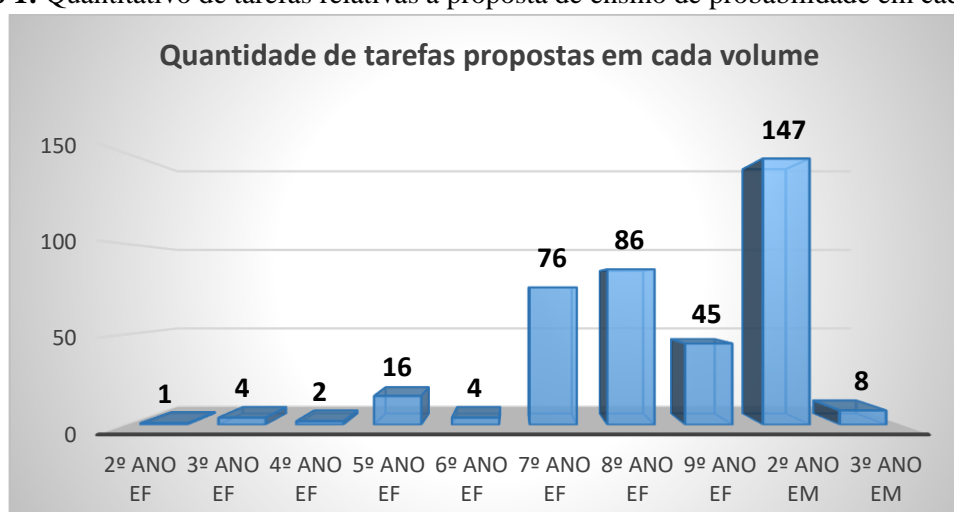
Além dessa, o tipo de tarefa T_{13} (*Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento*) foi proposto apenas uma vez. T_{13} é proposta, inclusive, em momento de institucionalização de *distribuição probabilística*, mas pouco explorada. Nesse caso inferimos que há uma necessidade de mostrar a relação entre estatística e probabilidade, mas essa relação não é tomada como relevante ao longo das coleções. Essa pouca atenção também é percebida na relação de combinatória e probabilidade, como já vimos. Por exemplo, as técnicas e τ_{13} (Construir a árvore de possibilidades) e τ_{12} (Efetuar o produto cartesiano dos conjuntos de elementos que compõem o experimento) que claramente são ferramentas da combinatória são pouco mobilizadas ao longo das coleções. Em relação às visões de probabilidade, ainda que em

algumas coleções fossem propostas tarefas que completassem outras visões de probabilidade, essas foram muito poucas, predominando a concepção clássica.

Os contextos propostos nas tarefas ao longo das coleções também apontam as escolhas didáticas para o estudo de probabilidade. Vale ressaltar que não realizamos uma análise aprofundada dos contextos envolvidos na proposta de ensino de probabilidade nas coleções, visto que o fator tempo nos impossibilitou. Ainda assim, observou-se que na coleção dos anos iniciais, o quinto ano apresentou mais contextos em relação aos demais volumes. Isso porque é neste volume que se introduz o estudo de probabilidade e que mais tarefas são propostas. Na coleção dos anos finais do ensino fundamental, o sétimo e oitavo anos são os que apresentam mais contextos nas tarefas propostas, que também são os dois volumes com maior quantidade de tarefas nesta coleção. Nesses volumes, assim como no volume referente ao nono ano, predominou tarefas com contextos de sorteio. Observamos, ainda, que tarefas relacionadas aos contextos de lançamento de dados e retiradas de objetos em recipientes também são numerosas, mas não é proposta a manipulação desses ostensivos. Contextos se aproximam de situações do cotidiano que evidenciam a tentativa de relacionar a probabilidade à realidade, o que corrobora com orientações de documentos curriculares oficiais que afirmam, por exemplo, que “aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real” (BRASIL, 2000, p. 44).

No Gráfico 1 apresentamos o quantitativo de tarefas propostas em cada volume analisado:

Gráfico 1: Quantitativo de tarefas relativas a proposta de ensino de probabilidade em cada volume



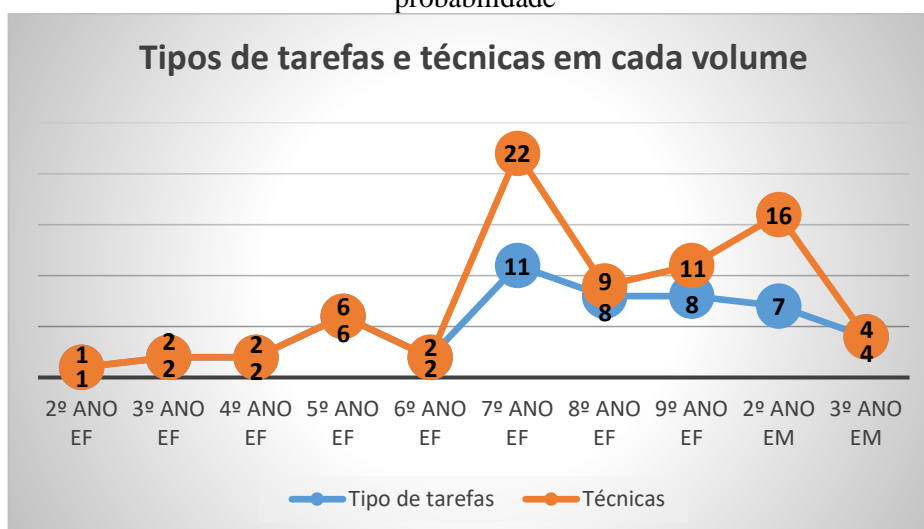
Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Como podemos observar neste gráfico, a coleção dos anos iniciais do ensino fundamental apresentou uma baixa quantidade de tarefas para o estudo de probabilidade, e no

Guia PNLD/2016 afirmou-se justamente que “a grande maioria das obras aprovadas tem reservado um espaço bem abaixo do que é desejável para este campo. As restantes se aproximam um pouco mais do padrão recomendado. O mesmo ocorre nas coleções de 4º e 5º anos” (BRASIL, 2015, p. 50). Quanto às demais coleções, os volumes do oitavo ano do ensino fundamental e do segundo ano do ensino médio foram os volumes com maior quantidade de tarefas propostas. Os volumes da coleção dos anos iniciais do ensino fundamental foram os com menos tarefas propostas, com exceção do último volume (quinto ano) no qual foi introduzido o estudo de probabilidade.

No Gráfico 2, apresentamos o comportamento dos tipos de tarefas e técnicas ao longo desses volumes que trabalharam o estudo de probabilidade. Para tal, mostramos o quantitativo de tarefas e técnicas mobilizadas em cada volume das coleções de LD analisadas.

Gráfico 2: Quantitativo de tipos de tarefas e técnicas em cada volume em que foi proposto o ensino de probabilidade



Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

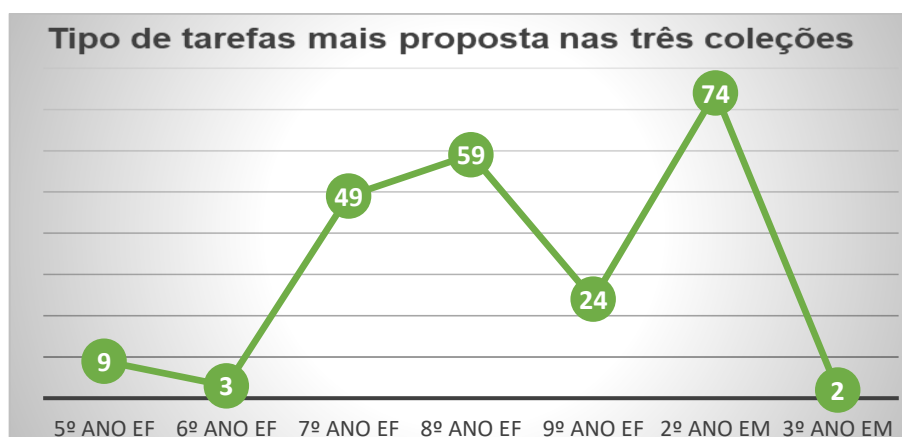
No Gráfico 2 vemos a quantidade de tipos de tarefas e técnicas mobilizadas em cada volume em que houve proposta de estudo de probabilidade. Quando o tipo de tarefas coincide com quantidade de técnicas, vemos somente a bola laranja. Por exemplo, dos volumes referentes ao segundo, terceiro e quarto anos do ensino fundamental há a mesma quantidade de tipos de tarefas e técnicas. O mesmo ocorre no volume referente ao terceiro ano do ensino médio. Na coleção dos anos iniciais, no quinto ano foram propostas mais tarefas e técnicas (seis de ambas). No sexto ano há uma queda significativa, visto que o estudo foi desvalorizado neste volume como vimos anteriormente. No volume destinado a sétimo ano, vemos uma maior quantidade técnicas (vinte e duas) em relação aos tipos de tarefas (onze). No oitavo ano, foram oito tipos de tarefas e nove técnicas. No nono ano também foram oito tipos de tarefas, mas onze

técnicas mobilizadas. E no segundo ano do ensino médio, sete tipos de tarefas e dezesseis técnicas.

Como podemos observar ainda no Gráfico 2, o volume do sétimo ano foi o que mais mobilizou tipos de tarefas e técnicas e, em seguida, vemos o volume do segundo ano do ensino médio. Mas em relação a quantidade de tarefas identificadas em cada um desses volumes, o volume do segundo do ensino médio foi o que contabilizamos mais tarefas, totalizando 147 tarefas (Gráfico 1) em relação ao volume do sétimo ano do ensino fundamental, que totalizou 76 tarefas (Gráfico 1).

Vimos, também, que tarefas do tipo T_3 (*Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico*) foram as mais contempladas em todas as coleções (Quadros 4, 8, 14 e 15). No gráfico abaixo podemos observar o comportamento desse tipo de tarefas ao longo das coleções:

Gráfico 3: Quantitativo de tarefas do tipo T_3 em cada volume



Fonte: Elaborado a partir do desenvolvimento da pesquisa

Com esse gráfico, observa-se que a valorização do tipo de tarefa T_3 mostra a predominância da concepção clássica nos volumes analisados. Isso, por sua vez, o que reforça resultados apontados em documentos oficiais e em pesquisas com o enfoque na temática “ensino de probabilidade”.

Nesse momento, elencamos alguns pontos que acreditamos serem relevantes para discussões que não pudemos realizar nesta pesquisa. Um deles é o fato de que nossa investigação foi relativa a uma coleção de LD, assim tivemos um desenho da proposta para o estudo de probabilidade em uma amostra de coleções de mesma autoria, o que não significa que outras coleções façam essa mesma proposta. Uma perspectiva seria então de estender a análise de livros a outras coleções e isso para toda a educação básica. Outro ponto é de compreender quais modificações a organização praxeológica proposta para o estudo de probabilidade nessas

coleções (ou em outras coleções) sofreria até chegar ao aluno e, isso, ao olhar como o professor estaria colocando em prática essa proposta. Essa é uma discussão que aponta para a concepção de transposição didática (CHEVALLARD, 1991) e a importância de compreender as transformações dessa organização praxeológica das coleções para o professor e deste para o aluno. Outro ponto que destacamos é que nossa investigação permitiu caracterizar nas coleções analisadas o que Gascón (2014) denominado como sendo o Modelo Epistemológico Dominante (MED). A partir deste MED temos a possibilidade de pensar em outras propostas de ensino de probabilidade.

Por fim, elencamos algumas questões que julgamos importantes. Por exemplo, em relação a questionar por quais motivos não são articuladas diferentes visões de probabilidade. Quais dificuldades haveria em articular outras visões de probabilidade no estudo ao longo da educação básica? Por que a pouca atenção do estudo de probabilidade nos anos iniciais da escolarização? Quais as condições e restrições do ensino de probabilidade na educação básica na rede pública brasileira? Esses são alguns dos questionamentos suscitados ao longe desta pesquisa que podem, inclusive, serem respondidos com a elaboração de estudos e pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- ABE, Thatiana Sakate. **O ensino de probabilidades por meio das visões clássica e frequentista**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, São Campo Grande. 2011.
- BARROS, Manuel de. **Cantigas por um passarinho à toa**. 1 ed. São Paulo: Companhia das Letrinhas. ISBN 978-85-7406-787-2. 2018.
- BATANERO, Carmen. DIAZ, Carmen. **Meaning and understanding of mathematics. The case probability**. In JP. Van Bendegem y K. François (Eds); *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (p. 107-128). New York: Springer, 2007.
- BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez. 2017, p.364-387.
- BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de; PAIS, Luiz Carlos. Reflexões sobre a Orientação de Pesquisas de Pós-Graduação em Educação Matemática com o Suporte da Teoria Antropológica do Didático. **Perspectivas da Educação Matemática**, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, v. 7, p. 380-406, ISSN 2359-2842, 2014.
- BOSCH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. v.19, n.1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=35> Acesso em: 4 jul. 2018.
- BORBA, Rute Elizabete Souza de Rosa. Crianças de Anos Iniciais Levantando Espaços Amostrais: Relações Entre Pensamentos Combinatório e Probabilístico. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEEM)**. v.10, n.2, p. 86-92, 2017.
- BRASIL. Decreto-Lei n. 93, de 21 de dez. de 1937. **Cria o Instituto Nacional do Livro**, Rio de Janeiro, RJ, dez 1937.
- _____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- _____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2000.
- _____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2, 2006.

_____. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística**. Brasília: MEC, SEB, 2014.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2016**. Brasília: MEC/SEF, 2015.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2017**. Brasília: MEC/SEF, 2016.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2018**. Brasília: MEC/SEF, 2017.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Acesso em: 26 de dez. 2017.

_____. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curriculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso: 26 de dez. 2017.

BRYANT, Peter. NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability: a literature review**. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf>. Acessado em: 03 jan. 2018.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes de. (Coord.) **Matemática: Ensino Fundamental** (Coleção Explorando o Ensino). v. 17. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 248 p.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. **Perspectives curriculaires: la notion de modélisation**. Petit x n°19, pp 43-75, 1989.

_____. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Paris: La Pensee Sauvage, 1991.

_____. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Traduzido por Ricardo Barroso Campos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, RDM, v. 19, n. 2, p. 221-66, 1999.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Introdução ao conceito de probabilidade pela visão frequentista – estudo epistemológico e didático**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífice Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 1994.

_____. (Coord.) **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica**. 1 ed. Campinas: Mercado de letras. São Paulo, 2013.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva.; NOVAES, Diva Valério. **Estatística para Educação Profissional**. São Paulo: Editora Atlas S. A., 2009.

CORRÊA, Marcio Welker. **O conhecimento profissional e a abordagem do Ensino de Probabilidade: um estudo de caso**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontífice Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2010.

CORRÊA DA COSTA, Jéssica Serra. **O cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2018.

CNPQ. **Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico**. Disponível em: <<http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/6981577138939987#>>. Acesso em: 12 de dez. 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Ápis: Alfabetização matemática**. Obra em três volumes para alunos do primeiro ao terceiro ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

_____. **Projeto Ápis: Matemática**. Obra em dois volumes para alunos do quarto e quinto ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2014.

_____. **Projeto Teláris: matemática: ensino fundamental 2**. Obra em 4 volumes para alunos do sexto ao nono ano. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

_____. **Matemática: contexto e aplicações: ensino médio**. Obra em 3 volumes. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

FERNANDES, José António da Silva. **Instituições e aprendizagem de probabilidades - Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade**. Tese (Doutorado em Educação) Universidade do Minho. 1999.

FULGENCIO, Paulo Cezar. **Glossário Vade Mecum: administração pública, ciências contábeis, direito, economia, meio ambiente: 14.000 termos e definições**. Rio de Janeiro: Mauad X, 2007. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=i3ztZnKEpOoC&pg=PA269&lpg=PA269&dq=#v=onepage&q&f=false>>. Acesso em: 03 de set. 2018.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

FRISON, Marli Dallagnol; et al. Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. In: Encontro Nacional De Pesquisas Em Educação E Ciências (Enpec), 7, 2009, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2009.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning** (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers, 2005.

GASCÓN, Josep. La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. **Educación Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11-35, 2003.

_____. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación matemática**, v. 26, n. 1, p. 99-123, 2014.

GONÇALVES, Kleber Ramos. **A Teoria Antropológica do Didático como Ferramenta para o Estudo de Transposições Didáticas: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2016.

KASPARY, Danielly Regina dos Anjos. **Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental.** (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande. 2014.

_____. Relations entre deux institutions noosphériques: effets d'un système d'évaluation de manuels didactiques. In: **6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique - CITAD**, Autrans. Anais do 6e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique - CITAD, v. 1, 2018, no prelo.

LOPES, Celi Aparecida Espasandin. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.** Dissertação (Mestrado em Educação) Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas: 1998.

_____. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação de professores.** Cad. Cedes. Campinas, vol.28, n.74, p.57-73, jan./abr. 2008.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica.** (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande. 2008.

OLIVEIRA, Esmeralda Maria Queiroz de. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2007.

OLIVEIRA, Paulo Iorque Freitas de. **A estatística e a probabilidade nos livros didáticos de matemática do ensino médio.** (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2006.

PESSÔA, Esther Bahr; JÚNIOR, Valdir Damázio. Contribuições da Educação Matemática Crítica para o processo de materacia nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um olhar através dos Parâmetros Curriculares Nacionais. **BoEM**, Joinville, v.1. n.1, p. 76-98, jul./dez. 2013.

RAMALHO, Luana Vieira. **Trigonometria em livros didáticos do 9º do ensino fundamental.** (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande. 2016.

ROCHA, Cristiane de Arimatéa; LIMA, Ana Paula Barbosa de; BORBA, Rute Elizabete Souza de Rosa. **Conhecimentos Pedagógicos para Ensinar Combinatória: currículo e documentos orientadores para os anos iniciais.** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM TEIA), vol. 7, n. 1, 2016.

SANTANA, Michaelle Renata Moraes de. **O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental.**

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SANTANA, Michaelle Renata Moraes de; BORBA, Rute Elizabete Souza de Rosa. Como a probabilidade tem sido abordada nos Livros Didáticos de Matemática de Anos Iniciais de Escolarização. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 10., 2010. **Anais...** Bahia: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1 – 10.

SANTOS, Rodrigo Medeiros dos; FIORENTINI, Dario. A Educação Estatística Brasileira: Um Olhar A Partir Da Produção Em Programas De Pós-Graduação. **VIDYA**. Santa Maria: ISSN 2176-4603, v. 36, n. 2, p. 203-217, jul./dez. 2016.

SILVA, Ismael de Araújo. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2002.

SILVA, Rita de Cássia Batista da. **É a moeda que diz, não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife. 2016.

SOARES, Elizabeth. **Uma análise sobre as atividades de probabilidade propostas nos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2014.

TURÍBIO, Solange Ramos Teixeira; SILVA, Adelmo Carvalho da. A Influência do Livro Didático na Prática Pedagógica do Professor que Ensina Matemática. **Revista Prática Docente**. Confresa: ISSN 2526-2149, v. 2, n. 2, p. 158-178, jul/dez 2017.

APÊNDICE A: Descrição dos tipos de tarefas

Tipos e subtipos de tarefas	
T ₁ : Escrever todas as possibilidades de ocorrência de um evento específico.	T _{1.1} : Escrever/desenhar algumas possibilidades de ocorrência de um determinado evento.
	T _{1.2} : Completar as possibilidades que faltam de ocorrência de um determinado evento.
	T _{1.3} : Indicar/escrever a quantidade total de possibilidades de ocorrência de um determinado evento.
	T _{1.4} : Descrever eventos.
T ₂ : Escrever todos os elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.	T _{2.1} : Indicar/escrever a quantidade de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.
	T _{2.2} : Determinar o espaço amostral de um experimento aleatório.
T ₃ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento específico.	T _{3.1} : Identificar maior ou menor chance/probabilidade de ocorrência de um determinado evento.
T ₄ : Criar uma situação que envolva noções de probabilidade.	
T ₅ : Interpretar/discutir termos, conceitos ou situações relacionadas ao estudo de probabilidade.	
T ₆ : Realizar experimentos com os conceitos de probabilidade e responder questões relacionadas ao experimento.	
T ₇ : Determinar a probabilidade de dois (ou mais) eventos ocorrerem simultaneamente.	
T ₈ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um ou outro evento.	
T ₉ : Dadas as probabilidades dos eventos que compõem o experimento, determinar a quantidade de elementos de cada evento.	
T ₁₀ : Avaliar, dentre os resultados apresentados, quais resultados podem representar probabilidades de eventos.	
T ₁₁ : Determinar a probabilidade de ocorrência de um evento condicionado ao fato de que outro evento já ocorreu.	
T ₁₂ : Completar tabela/diagrama.	
T ₁₃ : Fazer a distribuição probabilística de determinado experimento.	

APÊNDICE B: Descrição das técnicas

Técnicas
τ_1 : Manipular ostensivos - dados, moedas ou notas-, buscando por possibilidades de ocorrência do evento.
τ_2 : Escrever o nome correspondente à face representada no ostensivo figural.
τ_3 : Contar os elementos do espaço amostral.
τ_4 : Escrever todas as possibilidades de decomposição da soma solicitada.
$\tau_{4.1}$: Contar os elementos (possibilidades) de um evento específico.
$\tau_{4.2}$: A partir do espaço amostral, identificar os elementos (ou a quantidade de elementos) que satisfazem o evento desejado.
τ_5 : Associar os eventos específicos à: <ul style="list-style-type: none"> • maior chance de ocorrência, quando tiver a maior quantidade de elementos; • menor chance de ocorrência, quando tiver a menor quantidade de elementos.
τ_6 : Escrever a fração (ou razão) cujo numerador representa o número de casos favoráveis e o denominador representa o total de possibilidades.
$\tau_{6.1}$: Analisar tabela ou gráfico e retirar os dados necessários para o cálculo da probabilidade do evento desejado.
τ_7 : Calcular a porcentagem a partir de uma fração que representa a probabilidade de um evento.
τ_8 : Manipular ostensivos, dados ou moedas, quantas vezes for solicitado, anotando os resultados de cada lançamento.
τ_9 : Comparar probabilidades, verificando qual é maior.
τ_{10} : Elaborar e resolver um sistema de equações de primeiro grau com os dados apresentados na tarefa.
τ_{11} : Efetuar o produto cartesiano dos conjuntos de elementos que compõem o experimento.
τ_{12} : Construir a árvore de possibilidades.
τ_{13} : Classificar como: <ul style="list-style-type: none"> • EI, se a probabilidade de ocorrência do evento é zero; • EC, se a probabilidade de ocorrência do evento é 1 ou 100%.
τ_{14} : Classificar um resultado (número) como representante da probabilidade de um evento se este varia de 0 até 1.
τ_{15} : Verificar, dentre os resultados apresentados na tarefa, quais resultados representados em diferentes ostensivos correspondem ao mesmo valor.
τ_{16} : Escrever a fração cujo denominador representa a área da figura desejada e no numerador é a área total da figura.
τ_{17} : Escrever a fração cujo denominador representa o número de casos favoráveis, que satisfaz a condição dada, e o denominador representado o total de casos.
τ_{18} : Construir uma tabela e organizar os elementos que compõem o espaço amostral do experimento da seguinte forma: eventos, frequência e probabilidades.
τ_{19} : Efetuar o produto das probabilidades dos eventos independentes.
τ_{20} : Escrever a porcentagem a partir da fração cujo numerador representa a frequência absoluta e o denominador representa a quantidade total de elementos da amostra.

τ_{21} : Utilizar as fórmulas para o cálculo de permutação simples, permutação com repetição, arranjos simples ou combinações simples quando a tarefa se caracterizar em um desses casos de agrupamento.

τ_{22} : Dados dois eventos A e B, a probabilidade da união desses eventos será:

- $p(A) + p(B)$, se eventos mutuamente exclusivos;
- $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, se eventos quaisquer.

τ_{23} : Se B é um evento complementar de A, então: $p(B) = 1 - p(A)$.

τ_{24} : Dados dois eventos A e B, com $p(B) > 0$, a probabilidade de ocorrer o evento A, já que ocorreu o evento B, é $p(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

τ_{25} : Dados dois eventos A e B, em A é condicional ao fato de B já ter ocorrido, $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$.

τ_{26} : Método binomial.