

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**

**UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE DE  
FUNÇÃO POR ESTUDANTES NOS CONTEXTOS BRASIL E FRANÇA**

**CAMPO GRANDE - MS  
MAIO / 2019**

**SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**

**UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE DE  
FUNÇÃO POR ESTUDANTES NOS CONTEXTOS BRASIL E FRANÇA**

Tese de doutorado apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como registro à obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

**Orientador:** Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas.

**Coorientadora:** Professora Doutora Cécile Ouvrier-Bufferet.

CAMPO GRANDE - MS  
MAIO / 2019

**SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**

**UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE DE  
FUNÇÃO POR ESTUDANTES NOS CONTEXTOS BRASIL E FRANÇA**

Tese de doutorado apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como registro à obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Data de aprovação: Campo Grande / MS 15/04/2019.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (Orientador)

---

Profa. Dra. Iranete Maria da Silva Lima (UFPE)

---

Prof. Dr. Mustapha Rachidi (INMA/UFMS)

---

Profa. Dra. Shirley Takeco Gobara (PPEC/UFMS)

---

Profa. Dra Edilene Simões Costa dos Santos (PPGEduMat/UFMS)

---

Profa. Dra Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa (INMA/UFMS)

## **Dedico este trabalho às mulheres da minha vida!**

A Dona **Evanina**, minhas recordações de infância mais doces foram com ela em São Paulo.

E não me refiro às balas dadinho que ela me dava toda vez que saíamos..., e como saíamos, ela não parava!  
Era uma linda mulher.

Ela cantava, tinha com uma voz forte e harmoniosa. Resquícios do tempo que estudou música, de quando era mocinha e tocava bandolim nas festas, sempre acompanhada por seu pai.

Até que se casou e, na noite de núpcias, seu precioso bandolim foi quebrado e ela ouviu que jamais poderia tocá-lo novamente... Ela foi uma mulher forte e admirável. Em uma época complicada para as mulheres, ela conseguiu deixar para trás um marido cruel e extremamente violento e foi cuidar dos seus filhos.

Perdeu a vontade de tocar bandolim, mas não de cantar, e cantava! Fazia graça com tudo e, como boa mineira que era, cozinhas muito bem.

Não tinha muito dinheiro, vivia com muita dificuldade, mas amor não faltava para dar. Quando eu chegava a sua casa nas férias ela sempre me perguntava: o que você quer que eu faça para você comer filha?  
Polenta molinha com carne moída vovó!

Hum... Adoro até hoje.

Com ela aprendi a importância de aproveitar cada momento ao lado dos que amo, e das coisinhas pequenas e doces da vida. A rir de coisas que parecem sérias, rir lendo, rir sozinha e das minhas bobagens.

A Dona **Eunice**, uma mulher forte e linda. Não conseguiu deixar para trás seu casamento, era entristecida, perdeu um filho tão esperado, tão amado, de forma tão violenta.

Ela me ensinou a ser uma mulher forte e independente, não foi de modo gentil, ela não me fazia rir.

Partiu o ano passado, me deixou. Não sabia que iria sentir tanto sua falta, que a amava tanto mãe!

A **Cassia**, com ela eu conheci um sentimento estranho, forte. Um amor diferente de tudo que eu conhecia.

Preocupações estranhas, olhar ela dormindo para ver se está respirando! Tenho medo do que não tenho como controlar.

Minha filha... Ela se tornou uma mulher forte, tão linda!

E hoje, estou aqui me sentindo uma mulher corajosa, morrendo de medo e, ao mesmo tempo, rindo de mim mesma e pensando,  
Vai, Sonia Maria, e seja forte!

## AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao meu orientador Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas, por me aceitar como orientanda e ter compartilhado essa caminhada comigo.

Ao Professor Doutor Mustapha Rachidi por me apresentar aos professores da Universidade de Reims possibilitando meu estágio na França. E por sua infinita generosidade em compartilhar seus conhecimentos comigo ao longo desses anos. Que Deus lhe preserve assim professor, generoso e paciente com as pessoas que estão em processo de aprendizagem como eu. O senhor me fez refletir o quanto preciso melhorar como ser humano. Obrigada!

Às professoras Dra. Iranete Maria da Silva Lima, Dra. Shirley Takeco Gobara e Dra. Edilene Simões Costa dos Santos, pelas valiosas contribuições dadas na ocasião do exame de qualificação. Evidenciando que fizemos uma ótima escolha para composição da banca examinadora. Foi um momento muito importante para qualificação desta tese, em que aprendi muito com vocês professoras, obrigada!

À Professora Doutora Cécile Ouvrier-Bufferet pela coorientação com valiosíssimas contribuições durante o meu estágio na Universidade de Champagne-Ardenne de Reims. Foi um grande prazer ter trabalhado com você durante esse período e espero podermos continuar nossos estudos por muito tempo.

Aos alunos da turma de Cálculo I do Curso de Matemática – Licenciatura da UFMS e da turma do *Terminale* do *lycée* da cidade de Troyes da França.

Às professoras dessas turmas, Professoras Karina e Martha que permitiram que eu acompanhasse suas turmas, algumas vezes atrapalhando seus planejamentos, mas sempre vocês foram extremamente atenciosas e dispostas a me auxiliarem. Obrigada professoras!

Às minhas amigas tão queridas Magda e Larissa que me aguentaram durante esse doutorado. Sei que sou exagerada e que faço drama a cada probleminha, e foram muitos dramas ao longo desses quatro anos, e tive vocês sempre me fazendo rir dessas minhas bobagens. Mas também tive problemas reais, em menos de um ano, perdi meu pai e em seguida minha mãe! Foram momentos tão difíceis... Uma dor terrível, desconhecida! Obrigada por ficarem comigo!

À Jéssica, Juliana e ao Relicler por me ouvirem, me ouvirem e ouvirem (como eu falo!) e vocês sempre tentando me animar. Em especial ao Relicler, por ler meu texto ao longo desse processo. Você me ajudou extremamente em um momento muito difícil da minha vida, acho que você nem tem ideia como foi bom o que me disse quando eu estava na França. Muito obrigada a vocês!

Aos meus colegas do grupo do DDMat e da primeira turma do curso de Doutorado em Educação Matemática – PPGEduMat, pelos momentos de estudo e discussão.

A minha filha e as minhas irmãs por me darem apoio e acreditarem em mim!

Ao Josué, sem você ao meu lado esse doutorado teria sido muito, muito mais difícil para mim. Obrigada, meu amor!

A Deus pela vida e por colocar todos vocês em meu caminho!

Muito obrigada!

## RESUMO

Nesta tese investigamos o processo de construção do conceito de limite de função com alunos do Brasil, na disciplina de Cálculo I, do Curso de Matemática – Licenciatura, e da França com uma turma do *Terminale* (3º ano) do *lycée* (ensino médio). Este conceito é considerado problemático e vem sendo tema de vários estudos. Sua aprendizagem envolve uma diversidade de conceitos sendo alguns de difícil compreensão, tais como: função, infinito e números reais. Nessa pesquisa estudamos as ações dos alunos ao lidar com situações para introdução desse conceito, pautadas principalmente na teoria dos campos conceituais. Primeiramente, delimitando o campo conceitual para estudo, em função do nível em que esse conceito é introduzido nesses dois países, e também considerando as dificuldades evidenciadas nas pesquisas. Nossa metodologia foi baseada na aplicação de questionários, atividades e entrevistas. Investigamos, nas ações dos alunos, o que eles mobilizavam ao lidar com as atividades. Essas ações foram modelizadas conforme nossa metodologia de análise em: regras em ação, que são responsáveis pelo desenvolvimento temporal das ações, envolvendo os meios de tomada de informação e de controle na ação; e de teoremas em ação, que são a parte conceitual responsável pela organização das regras. São elementos dos esquemas da teoria dos campos conceituais, que nos permitiram estudar filiações e rupturas nas adaptações dos esquemas utilizados pelo aluno ao lidar com as situações. Além disso, esses elementos foram relidos como imagens associadas ao conceito imagem de limite de função, conforme as noções de conceito imagem e conceito definição. Com nossos resultados de análise, identificamos que as variações de representações utilizadas nas atividades e nas ações dos alunos foram importantes para as adaptações dos esquemas mobilizados para lidar com as situações. E se constituíram também meios para associações de imagens mais próximas das definições apresentadas pelo ensino. Permitindo que apontássemos imagens que estavam se constituindo em um possível conceito definição pessoal de limite de função. Além disso, contribuiu para discussão das aproximações nas produções do estudante brasileiro e francês. Outro ponto importante evidenciado em nosso estudo foi com relação às filiações e/ou rupturas. Verificamos que elas perpassam o processo de compreensão de um conceito ao longo do ensino, algumas vezes elas podem não serem pertinentes ao processo de construção do conceito. Ao mesmo tempo, o conceito de limite tido como estável pelo professor pode ser alterado, seja por associações de imagens não pertinentes, ou pela mobilização de teoremas em ação incorretos para a situação tratada. Em nossa investigação também identificamos situações que se constituíram como pertinentes para a introdução do conceito de limite de função, como também para o trabalho com os conceitos ligados ao limite e que antecedem a sua apresentação.

**Palavras-chave:** Regras em ação. Teorema em ação. Conceito imagem e conceito definição. Conceito definição pessoal. Esquemas.

## RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous avons étudié le processus de construction du concept de limite de fonction avec des étudiants brésiliens, du cours de Calcul I en Licenciatura de Matemática, et avec des élèves d'une classe de Terminale S (lycée) en France. Ce concept est considéré comme problématique a fait l'objet de plusieurs études. Son apprentissage implique une diversité de concepts difficiles tels que: fonction, infini et nombres réels. Dans cette recherche, nous avons étudié les actions des étudiants face à des situations pratiques pour introduire ce concept, en sur basant principalement sur la théorie des champs conceptuels. Tout d'abord, on a délimité le champ conceptuel à étudier, en tenant compte du niveau d'introduction de ce concept dans ces deux pays. On a également considéré les difficultés liées à son apprentissage, qui sont mises en évidence dans la littérature. Notre méthodologie reposait sur l'application de questionnaires, d'activités et d'entretiens. Nous avons examiné les actions mobilisées par les élèves, lors de la résolution des activités proposées. Ces actions ont été modélisées selon notre méthodologie d'analyse à savoir: les règles d'action et les théorèmes en acte. Les premières sont responsables du développement temporel des actions, impliquant les moyens de collecte et de contrôle des informations en action, les seconds sont la partie conceptuelle responsable de l'organisation des règles. Ce sont des éléments des schèmes de la théorie conceptuelle des champs, qui nous ont permis d'étudier les affiliations et les ruptures dans les adaptations des schèmes utilisés par l'élève pour faire face aux situations. De plus, ces éléments ont été réinterpréter en termes d'images associées au concept image de la limite d'une fonction, conformément aux notions de concept image et de concept définition. Avec nos résultats d'analyse, nous avons identifié que les variations de représentations, utilisées dans les activités et dans les actions des étudiants, étaient importantes pour l'adaptation des schèmes mobilisés afin de faire face aux situations à étudier. De telles représentations constituaient également un moyen d'association d'images plus proche des définitions présentées par l'enseignement. Cela nous permis d'identifier les images qui constituaient un éventuel concept définition personnelle de limite. En outre, cette diversité de représentations a contribué à l'analyse et la discussion des approximations dans les productions des étudiants brésiliens et français. Un autre point important mis en évidence dans notre étude concerne les affiliations et / ou les ruptures. Nous avons constaté que les affiliations, comme les ruptures, accompagnent le processus de compréhension du concept de limite tout au long de son enseignement, parfois ils peuvent ne pas être pertinents pour le processus de construction de ce concept. En même temps, le concept de limite considéré comme stable par l'enseignant peut être modifié dans lors des actions des élèves, soit par des associations d'images non pertinentes, soit par la mobilisation de théorèmes en acte, qui sont incorrects pour la situation traitée. Lors de notre enquête, nous avons également identifié des situations jugées pertinentes pour l'introduction du concept de limite, ainsi que pour le travail avec les concepts qui lui sont liés et qui précèdent sa présentation.

**Mots-clés:** Règles d'action. Théorème en acte. Concept image et concept définition. Concept définition personnelle. Schèmes.

## ABSTRACT

In this thesis we investigated the process of constructing the concept of limit of function with students in the discipline of Calculus I in the course of graduate degree in mathematics in Brazil, and with a class of Terminale (3rd year) of lycée in France. This concept is considered problematic and has been the subject of several studies. The learning of this concept involves various concepts some of them are difficult to understand such as: function, infinity and real numbers. In this research we study the actions of the students, when they are dealing with situations for introducing this concept, using mainly the theory of conceptual fields. First, we delimit the conceptual field of our study, according to the level in which this concept is introduced in these two countries, and also considering the difficulties related to this concept, evidenced in several researches of literature. Our methodology is based on the application of questionnaires, activities and interviews. We studied what the students mobilize in dealing with our activities. These actions were modeled according to our methodology of analysis in: rules in action, which are responsible for the temporal development of actions, involving the means of information gathering and control in action; and theorems in action, which are the conceptual part responsible for organizing the rules. They are elements of the schemes of conceptual field theory, which allowed us to study affiliations and ruptures in the adaptations of the schemes used by the students in dealing with situations. In addition, these elements are reinterpreted as images, associated with the concept image of the limit, according to the notions of concept image and concept definition. With our results of analysis, we identified that the variations of representations used in the activities and in the actions of the students were important for the adaptations of the schemes mobilized to deal with the situations. And they were also a means for image associations closer to the definitions presented by the teacher, which allowed us to highlight images that constituted a possible concept definition personal of the limit. In addition, this study contributed to our analysis and discussion of the approximations in Brazilian and French student productions. Another important point evidenced in our study was with regard to affiliations and / or ruptures. We find that affiliations as well as ruptures accompany the process of understanding the concept of limit throughout teaching, sometimes affiliations may not be relevant to the process of constructing the concept. At the same time, the concept of the limit considered as stable by the teacher can be altered, either by associations of images that are not pertinent, or by the mobilization of theorems in action that are incorrect, for the situation treated. During our investigation, we also identified situations deemed relevant for the introduction of the limit, as well as for working with the other concepts related to the limit, and that precede its presentation.

**Keywords:** Rules in action. Theorem in action. Concept image and concept definition. Concept definition personal. Schemes.

.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 1 – EXEMPLO UTILIZANDO A IDEIA INTUITIVA.....                | 54  |
| FIGURA 2 – FUNCIONAMENTO DO SISTEMA COGNITIVO .....                 | 63  |
| FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA COGNITIVO .....                 | 63  |
| FIGURA 4 – OPERAÇÕES COM LIMITES DE FUNÇÕES .....                   | 75  |
| FIGURA 5 – TEOREMAS DE COMPARAÇÃO E DE GENDARMES .....              | 76  |
| FIGURA 6 – DEFINIÇÃO LIMITE PROPOSTA EM UM LIVRO DIDÁTICO.....      | 76  |
| FIGURA 7 – FUNÇÕES INDICADAS PARA O ESTUDO COM AS DERIVADAS .....   | 77  |
| FIGURA 8 – MOMENTOS DA PESQUISA REALIZADOS NO BRASIL .....          | 84  |
| FIGURA 9 – MOMENTOS DA PESQUISA REALIZADA NA FRANÇA.....            | 86  |
| FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO DA FASE I DA METODOLOGIA DE ANÁLISE.....  | 88  |
| FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO DAS FASES II E III .....                  | 89  |
| FIGURA 12 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE..... | 99  |
| FIGURA 13 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (1.1) ITEM (A)FIGURA.....        | 113 |
| FIGURA 14 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (1.2) ITENS (A) E (B) .....      | 113 |
| FIGURA 15 – EXEMPLO DA MODELAGEM REALIZADA.....                     | 115 |
| FIGURA 16 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA ATIVIDADE (2.1) .....          | 116 |
| FIGURA 17 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (2.1) ITENS (A) E (B) .....      | 117 |
| FIGURA 18 – RESOLUÇÃO DO ITEM (C) DA ATIVIDADE (2.1).....           | 118 |
| FIGURA 19 – RESOLUÇÃO DO ITEM (D) DA ATIVIDADE (2.1).....           | 119 |
| FIGURA 20 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (2.2) ITEM (A) .....             | 119 |
| FIGURA 21 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (2.2) DO ITEM (B).....           | 120 |
| FIGURA 22 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (2.2) ITEM (D) .....             | 121 |
| FIGURA 23 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (2.3).....                       | 122 |
| FIGURA 24 – INÍCIO DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (1).....               | 125 |
| FIGURA 25 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (1) DOS ITENS (A) E (B) .....    | 126 |
| FIGURA 26 – RASCUNHO UTILIZADO NA ATIVIDADE (3) .....               | 128 |
| FIGURA 27 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (5) ITENS (A) E (B) .....        | 129 |
| FIGURA 28 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (6) ITENS (A) E (B) .....        | 130 |
| FIGURA 29 – RESOLUÇÃO DO ITEM (B) DA ATIVIDADE (7).....             | 131 |
| FIGURA 30 – SIMPLIFICAÇÃO REALIZADA NA ATIVIDADE (8) .....          | 132 |
| FIGURA 31 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (8).....                         | 133 |
| FIGURA 32 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (8) ITEM (B).....                | 134 |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 33 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE (8) ITEM (C).....                       | 136 |
| FIGURA 34 – QUADRO DA ATIVIDADE (11).....                                  | 137 |
| FIGURA 35 – RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES (11) E (12) .....                     | 138 |
| FIGURA 36 – RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 13.....                                 | 139 |
| FIGURA 37 – RELAÇÕES ESTABELECIDAS NAS ATIVIDADES (2.1) E (2.3).....       | 142 |
| FIGURA 38 – RELAÇÕES ESTABELECIDAS NAS ATIVIDADES (2.2) E (3).....         | 143 |
| FIGURA 39 – O CONCEITO DEFINIÇÃO PESSOAL DE MATEUS .....                   | 148 |
| FIGURA 40 – RELAÇÕES ESTABELECIDAS NAS ATIVIDADES (1), (2), (8) E (9) .... | 149 |
| FIGURA 41 – REGRAS EM AÇÃO COM OS TEOREMAS EM AÇÃO .....                   | 153 |
| FIGURA 42 – REGRAS EM AÇÃO E OS TEOREMAS EM AÇÃO.....                      | 157 |
| FIGURA 43 – IMAGENS DO CONCEITO DEFINIÇÃO PESSOAL DE MATEUS .....          | 162 |
| FIGURA 44 – ATIVIDADE INTRODUTÓRIA DOS LIMITES NO INFINITO .....           | 166 |
| FIGURA 45– INDICAÇÕES DA PROFESSORA NA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA....           | 167 |
| FIGURA 46 – REPRESENTAÇÕES UTILIZADAS NA ATIVIDADE (1.2).....              | 168 |
| FIGURA 47 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA UTILIZADA NA ATIVIDADE (1.3).....        | 169 |
| FIGURA 48 – QUADRO DE VARIAÇÕES .....                                      | 170 |
| FIGURA 49 – ATIVIDADE DO LIVRO .....                                       | 170 |
| FIGURA 50 – ATIVIDADES PARA ESTUDO DO LIMITE DE FUNÇÃO.....                | 172 |
| FIGURA 51 – REPRESENTAÇÕES DA FUNÇÃO INVERSA .....                         | 173 |
| FIGURA 52 – EXEMPLO DE UMA FUNÇÃO QUE NÃO TEM LIMITE .....                 | 174 |
| FIGURA 53 – LIMITES DAS FUNÇÕES DE REFERÊNCIAS .....                       | 175 |
| FIGURA 54 – REGRAS PARA O CÁLCULO DE LIMITE DE FUNÇÃO .....                | 176 |
| FIGURA 55 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA QUESTÃO (4).....                      | 183 |
| FIGURA 56 – REPRESENTAÇÃO UTILIZADA NA ATIVIDADE (5).....                  | 184 |
| FIGURA 57 – PARTE DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1 DE BAPTISTE .....            | 188 |
| FIGURA 58 – PARTE DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1 DE BAPTISTE .....            | 191 |
| FIGURA 59 – PARTE DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2 DE BAPTISTE .....            | 192 |
| FIGURA 60 – PARTE DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2 DE BAPTISTE .....            | 192 |
| FIGURA 61 – PARTE DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3 DE BAPTISTE .....            | 194 |
| FIGURA 62 – PARTE DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1 DE BAPTISTE .....            | 195 |
| FIGURA 63 – RESOLUÇÃO DE PARTE DA ATIVIDADE 3 DE BAPTISTE .....            | 195 |
| FIGURA 64 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA APRESENTADA NA ATIVIDADE 3 ....          | 196 |
| FIGURA 65 – REPRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 4 DA ENTREVISTA .....               | 198 |
| FIGURA 66 – REPRESENTAÇÃO QUESTÃO (10) DO QUESTIONÁRIO.....                | 200 |

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FIGURA 67 – RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES E A AÇÕES .....                        | 203 |
| FIGURA 68 – RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES E AS REGRAS EM AÇÃO.....               | 205 |
| FIGURA 69 – ACONTECIMENTOS NO PROCESSO VIVENCIADO .....                      | 207 |
| FIGURA 70 – AS REGRAS EM AÇÃO COM AS FUNÇÕES.....                            | 211 |
| FIGURA 71 – AS REGRAS EM AÇÃO COM AS FUNÇÕES.....                            | 212 |
| FIGURA 72 – ASSOCIAÇÕES REALIZADAS POR BAPTISTE .....                        | 215 |
| FIGURA 73 – ASSOCIAÇÕES PARA O (3º) CASO.....                                | 216 |
| FIGURA 74 – REPRESENTAÇÃO DAS ASSOCIAÇÕES .....                              | 219 |
| FIGURA 75 – AS REGRA EM AÇÃO E OS TEOREMAS EM AÇÃO.....                      | 220 |
| FIGURA 76 – IMAGENS DO CONCEITO DEFINIÇÃO PESSOAL DE BAPTISTE .....          | 223 |
| FIGURA 77 – DIFERENÇAS NA COLETA DE DADOS OBTIDOS NO BRASIL E NA FRANÇA..... | 224 |
| FIGURA 78 – AÇÕES DE MATEUS E BAPTISTE .....                                 | 228 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| QUADRO 1 – DEFINIÇÕES PROPOSTAS NO LIVRO DE STEWART (2003) .....     | 48  |
| QUADRO 2 – SÍNTESE DOS ASPECTOS DISCUTIDOS NA SEÇÃO 2 .....          | 51  |
| QUADRO 3 – EQUIVALÊNCIA DO ENSINO BRASILEIRO COM O FRANCÊS .....     | 67  |
| QUADRO 4 – INDICAÇÕES PARA A APRESENTAÇÃO DO BOLETIM OFICIAL .....   | 74  |
| QUADRO 5 – DELIMITAÇÃO DO CAMPO CONCEITUAL .....                     | 80  |
| QUADRO 6 – SÍNTESE DAS QUESTÕES DO QUESTIONÁRIO .....                | 82  |
| QUADRO 7 – ATIVIDADE 1.1 SOBRE FUNÇÕES .....                         | 96  |
| QUADRO 8 – ATIVIDADE 1.2 SOBRE FUNÇÕES .....                         | 96  |
| QUADRO 9 – ATIVIDADE 1.3 SOBRE FUNÇÕES .....                         | 98  |
| QUADRO 10 – ATIVIDADES 1, 2 E 3 .....                                | 100 |
| QUADRO 11 – ATIVIDADE 4 .....                                        | 102 |
| QUADRO 12 – ATIVIDADES DO GRUPO III .....                            | 104 |
| QUADRO 13 – ATIVIDADE 7 DO GRUPO III .....                           | 105 |
| QUADRO 14 – ATIVIDADES 8, 9, 10, 11, 12 E 13 DO GRUPO III .....      | 106 |
| QUADRO 15 – DATAS DAS ATIVIDADES REALIZADAS NO BRASIL .....          | 110 |
| QUADRO 16 – CASOS DE LIMITES COM AS FUNÇÕES TRABALHADAS .....        | 140 |
| QUADRO 17 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (1º) CASO .....     | 145 |
| QUADRO 18 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (2º) CASO .....     | 151 |
| QUADRO 19 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (3º) CASO .....     | 155 |
| QUADRO 20 – IMAGENS DO CONCEITO IMAGEM ASSOCIADAS AO (4º) CASO ...   | 158 |
| QUADRO 21 – SÍNTESE DAS ESCOLHAS DIDÁTICAS UTILIZADAS .....          | 176 |
| QUADRO 22 – OS CASOS DE LIMITES E AS REPRESENTAÇÕES UTILIZADAS ..... | 202 |
| QUADRO 23 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (1º) CASO .....     | 209 |
| QUADRO 24 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (2º) CASO .....     | 214 |
| QUADRO 25 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (3º) CASO .....     | 218 |
| QUADRO 26 – CONCEITO IMAGEM E A DEFINIÇÃO PARA O (4º) CASO .....     | 221 |
| QUADRO 27 – PRODUÇÕES DE MATEUS E DE BAPTISTE .....                  | 225 |

## **LISTA DE SIGLAS**

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais

GEEMPA – Grupo de Estudos em Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação

INMA – Instituto de Matemática

PDSE – Programa Institucional de Doutorado-sanduíche no Exterior

PPC – Projeto Pedagógico do Curso

PPGEduMat – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PPEC – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências

UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

## SUMÁRIO

|                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>                                                   | <b>19</b>  |
| <b>2. O CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÕES .....</b>                              | <b>27</b>  |
| 2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS E EPISTEMOLÓGICOS .....                              | 27         |
| 2.2 O QUE DIZEM AS PESQUISAS .....                                           | 35         |
| 2.3 APRESENTAÇÃO DA NOÇÃO INTUITIVA E DA DEFINIÇÃO FORMAL.....               | 46         |
| <b>3. A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE COM O REFERENCIAL TEÓRICO .....</b> | <b>53</b>  |
| 3.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS .....                                    | 53         |
| 3.2 AS NOÇÕES DE CONCEITO IMAGEM E CONCEITO DEFINIÇÃO.....                   | 60         |
| 3.3 AS REFERENCIAIS EM NOSSAS ANÁLISES .....                                 | 64         |
| <b>4. O CONCEITO DE LIMITE NO BRASIL E NA FRANÇA .....</b>                   | <b>67</b>  |
| 4.1 AS INDICAÇÕES DOS PROGRAMAS DE ENSINO NO BRASIL E NA FRANÇA ...          | 68         |
| <b>5. OBJETIVOS E ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA .....</b>        | <b>78</b>  |
| 5.1 INSTRUMENTOS UTILIZADOS .....                                            | 81         |
| 5.2 METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS DADOS .....                                   | 86         |
| 5.3 SUJEITOS DA PESQUISA .....                                               | 89         |
| <b>6. MOMENTOS DA PESQUISA REALIZADA NO BRASIL .....</b>                     | <b>91</b>  |
| 6.1 A DISCIPLINA DE CÁLCULO I .....                                          | 92         |
| 6.1.1 CONHECENDO OS COLABORADORES BRASILEIROS .....                          | 93         |
| 6.1.2 ATIVIDADES QUE ELABORAMOS PARA EXPERIMENTAÇÃO.....                     | 94         |
| 6.1.3 AS ENTREVISTAS.....                                                    | 108        |
| 6.2 O TRABALHO COM OS ESTUDANTES .....                                       | 109        |
| 6.2.1 MATEUS EM ATIVIDADE .....                                              | 110        |
| 6.2.1.1 FASE I - AS AÇÕES DE MATEUS DURANTE NOSSA EXPERIMENTAÇÃO .....       | 111        |
| 6.2.1.2 FASES II E III – ANÁLISE DOS CASOS DE LIMITE DE FUNÇÃO .....         | 140        |
| 6.2.1.3 SINTETIZANDO OS CAMINHOS PERCORRIDOS POR MATEUS.....                 | 159        |
| <b>7. MOMENTOS DA PESQUISA REALIZADA NA FRANÇA .....</b>                     | <b>164</b> |
| 7.1 UMA TURMA DO <i>TERMINALE</i> DO <i>LYCÉE</i> .....                      | 164        |
| 7.1.1 OBSERVANDO O TRABALHO DE UMA PROFESSORA NO <i>LYCÉE</i> .....          | 165        |
| 7.1.2 CONHECENDO OS COLABORADORES FRANCESES .....                            | 178        |
| 7.1.3 QUESTÕES QUE ELABORAMOS PARA AS ENTREVISTAS .....                      | 179        |
| 7.2 AS ENTREVISTAS .....                                                     | 185        |
| 7.2.1 BAPTISTE EM ATIVIDADE .....                                            | 185        |
| 7.2.1.2 FASE I – AS AÇÕES DE BAPTISTE DURANTE A ENTREVISTA .....             | 187        |
| 7.2.1.3 FASES II E III – ANÁLISE DOS CASOS DE LIMITE DE FUNÇÃO .....         | 202        |
| 7.2.1.4 SINTETIZANDO OS CAMINHOS PERCORRIDOS POR BAPTISTE.....               | 222        |
| <b>8. OS PROCESSOS INVESTIGADOS NO BRASIL E NA FRANÇA .....</b>              | <b>224</b> |
| <b>9. FINALIZANDO A TESE.....</b>                                            | <b>231</b> |
| <b>10. REFERÊNCIAS .....</b>                                                 | <b>238</b> |

|                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| <b>ANEXOS .....</b>                                       | <b>243</b> |
| ANEXO A – QUESTIONÁRIO APLICADO NO BRASIL .....           | 244        |
| ANEXO B – QUESTIONÁRIO APLICADO NA FRANÇA .....           | 246        |
| ANEXO C – GRADE DE ANÁLISE .....                          | 248        |
| ANEXO D – ATIVIDADES APLICADAS NO BRASIL.....             | 249        |
| ANEXO E – ROTEIRO DA ENTREVISTA REALIZADA NA FRANÇA ..... | 258        |

## APRESENTAÇÃO

Primeiramente, é preciso contar uma história, pois esta pesquisa de doutorado é fruto das minhas inquietações, como professora de matemática. Tudo teve início no meu segundo mês como docente de uma instituição pública com três turmas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral<sup>1</sup>. Naquela época eu, recém-formada, me sentia imensamente feliz por iniciar nessa profissão ministrando a disciplina que tinha uma afeição particular.

Sempre gostei muito de matemática, mas houve momentos durante o ensino médio que comecei a me questionar sobre isso. Algumas funções apresentadas pelo professor de matemática não eram bem compreendidas e as explicações dele mais me confundiam do que esclareciam minhas dúvidas. Particularmente, algumas representações gráficas eram muito difíceis, por exemplo, a da função tangente era por demasiadamente “estranha” para mim. Bem, mas acabei seguindo o conselho da minha irmã e decidi fazer o curso para ser professora de matemática. E tive uma boa surpresa logo na primeira disciplina do curso, a disciplina de Cálculo I, na época ela durava um ano e se chamava Cálculo Integral e Diferencial I. Nessa disciplina fui apresentada ao conceito de limite de função. E, com ele, eu consegui tanto esclarecer minhas dúvidas com relação à representação gráfica de algumas funções, como também, relacionar os elementos que antes foram mal compreendidos. Assim, assim essa disciplina passou a ser especial para mim, o que explica a afeição inicial que tive por ela.

Como disse no início, quando iniciei meu percurso como docente, acredito que a maioria dos professores também o faz, fui conversar com outros professores que já ministraram essa disciplina e também com os coordenadores dos cursos em que eu iria trabalhar. Fiquei sabendo que uma dessas três turmas era de estudantes que tinham uma boa formação no ensino médio, o que seria bom, pois eles conseguiriam acompanhar melhor os conceitos da disciplina. Em relação às outras duas turmas, fui informada que deveria tomar mais cuidado, ir mais devagar, pois eles provavelmente teriam muita dificuldade em conceitos de matemática básica. Em dois meses de curso, percebi que essas informações não tinham ajudado muito, pois havia alunos com dificuldades em conceitos de matemática básica, que iam sendo identificadas, discutidas e trabalhadas durante as atividades, e eles acabavam conseguindo compreender e resolver as questões. Ao mesmo tempo, tinha alguns alunos

---

<sup>1</sup> Atualmente esta disciplina é denominada de Cálculo I e, ao longo do texto, iremos nos referenciar a ela assim sempre que estivermos nos referindo a disciplina do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

considerados bons em matemática básica que não conseguiam resolver os limites e não compreendiam as noções sobre o limite de função.

Diante desse problema, resolvi buscar auxílio com os professores mais experientes e também fui estudar sobre o ensino e aprendizagem desse conceito. Primeiramente, busquei estudar dificuldades relacionadas a conceitos da matemática básica, o que resultou em uma dissertação de mestrado e, em mais indagações. Que foram sendo ampliadas ao longo dos anos, principalmente, nos últimos sete anos, como professora da disciplina de Cálculo I para alunos do Curso de Matemática – Licenciatura na modalidade EaD.

Tenho o interesse particularmente nesse curso porque é nele que se dá a formação dos professores de matemática. Nesta história que contei, foi um professor de matemática (do ensino médio) que apresentou alguns conceitos sem justificativas, nem de modo intuitivo, quando eu era estudante. E também foi um professor de matemática (da graduação) da disciplina de Cálculo I, que apresentou as justificativas para as incompreensões que eu tive no ensino médio.

Atualmente penso que o professor do ensino médio poderia ter me dado outra explicação, ao invés de dizer simplesmente que o gráfico era assim e que eu deveria decorar a forma dele. Céus!! Eu tinha, e ainda tenho muita dificuldade em decorar coisas que não vejo sentido. Bem, então o que o professor do ensino médio poderia ter me dito quando o questionei? Ele poderia ter me explicado a representação gráfica da função tangente, por exemplo, escolhendo pontos próximos de um ponto fora do domínio da função e ir discutindo o que acontecia com os valores da função, no caso, algumas vezes os valores iriam crescer infinitamente, outras vezes decresceriam infinitamente. São explicações iniciais intuitivas que são esclarecedoras, e que não falam em limite de função.

Esse exemplo ilustra como é possível fazer algumas discussões no ensino médio, de aspectos de difícil compreensão para o aluno e que, dependendo do curso escolhido para graduação, será formalizado posteriormente. Nunca esqueci que éramos 125 alunos matriculados na disciplina de Cálculo I e desses, menos de 20 foram aprovados no final de um ano da disciplina. O índice de aprovação não melhorou ao longo desses anos.

## 1. INTRODUÇÃO

O conceito de limite de função é considerado como a noção fundamental da análise real. O seu ensino é considerado problemático e encontramos diversos pesquisadores que têm se debruçando sobre esse tema. Esses estudos buscam compreender dificuldades no seu ensino e aprendizagem dos alunos. Tanto pesquisas nacionais (NASSER, 2004; ZUCHI, 2005; FERNANDES, 2015) como também internacionais (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983; LECORRE, 2016; SIERSPINSKA 1985) argumentam que essas dificuldades são de natureza variada, como: epistemológica, cognitiva e didática, entre outras.

Um estudo que se tornou referência importante em pesquisas sobre a construção da noção de limite foi a tese defendida por Cornu (1983). Segundo ele, os alunos têm muita dificuldade em compreender os conceitos que envolvem o limite, sendo que a ideia de infinito é uma das mais difíceis. Ela é utilizada no estudo de limite que o autor denomina de não trivial, visto que aparecem ideias mais complexas, como a de números infinitamente pequenos. Para este pesquisador, existe uma “distância” entre a noção de limite, que envolve aspectos dinâmicos, que seriam as expressões: “tende para” e “se aproxima de”, e a definição de limite formal por épsilon e delta.

Desse modo, trabalhar com essas duas definições não fará com que os alunos compreendam que se trata do mesmo conceito, pois elas envolvem conhecimentos que são considerados obstáculos epistemológicos. Segundo o autor, seriam dificuldades relacionadas ao desenvolvimento histórico do conceito, e para superá-las um primeiro passo seria saber que eles existem e buscar trabalhar esses aspectos e, também, ter em vista que o processo de aprendizagem é longo.

Pesquisadores vêm questionando essa apresentação da definição formal com épsilon e delta desvinculada da sua definição dada intuitivamente<sup>2</sup>, argumentando sobre a necessidade de se trabalhar buscando fazer uma aproximação entre essas duas definições. Zuchi (2005), por exemplo, investigou uma proposta para o ensino e a aprendizagem deste conceito buscando relacionar a noção intuitiva com a definição formal, no ambiente papel e lápis e com uso de um *software*. Ela propôs um percurso para formalizar o conceito de limite explorando inicialmente situações concretas com a análise de exemplos numéricos e em

---

<sup>2</sup> Quando dizemos definição intuitiva estamos nos referindo à definição sem os quantificadores épsilon e delta dada em linguagem natural. Como, por exemplo, a proposta no livro de Stewart: Escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , e dizemos “o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é igual a  $L$ ” se pudermos tornar os valores de  $f(x)$  arbitrariamente próximos de  $L$  (tão próximos de  $L$  quanto quisermos), tornando  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , mas não igual a  $a$ . (2003, p. 91).

seguida situações com o uso de um  $\epsilon$  fixo até chegar a sua generalização. Ela concluiu que essa proposta foi pertinente para a compreensão da relação entre as duas definições.

Com relação aos conceitos envolvidos nas situações utilizadas para introdução do limite de função, Artigue (1995) destaca que os conceitos de funções e de números reais fazem parte da construção desse conceito. Segundo essa autora, são conceitos vistos como disponíveis para os alunos, afinal, foram trabalhados antes. Todavia, ela argumenta que a construção desses conceitos leva muito tempo e que é exatamente no estudo com o limite que aspectos importantes do conjunto dos números reais e de funções são trabalhados. Ou seja, esses conceitos ainda estão em processo de construção e necessitam serem mobilizados para introdução do conceito de limite, esses aspectos são importantes para refletirmos sobre a aprendizagem do limite de função.

Concordamos com Rezende (2003) quando diz que a dificuldade de aprendizagem do conceito de limite de funções não pode ser reduzida simplesmente à preocupação com falta de conceitos da matemática básica. No caso da manipulação algébrica, por exemplo, esse problema só evidencia que os alunos têm dificuldade no estudo dos procedimentos para encontrar limites. Essa dificuldade será vivenciada em outros conceitos, em outras disciplinas, mas o baixo desempenho na disciplina em que o limite de funções é apresentado é extremamente maior, ou seja, “parece” que essa dificuldade não é tão problemática quando os alunos lidam com outros conceitos (REZENDE, 2003).

No Brasil esses estudos vêm orientando algumas indicações para o ensino do conceito de limite de função. Encontramos, por exemplo, sugestões para se introduzir a noção desse conceito por meio do estudo das derivadas e, inclusive, alguns livros já trazem propostas nesse sentido (BARUFI, 1999). Essa discussão geralmente vem de estudos sobre a necessidade, ou motivo, para apresentação desse conceito em cursos como de engenharias. Um dos argumentos seria que o conceito de limite de função em cursos como esses têm sentido somente para a construção dos conceitos de derivada e integral. Todavia, o conceito de limite de funções parece ter um status importante mesmo nestes cursos, que questionam se o conceito de limite deveria ser ensinado na disciplina de Cálculo I.

Fernandes (2015) em sua pesquisa ao questionar professores da disciplina de Cálculo I, se o conceito de limite era importante para esses cursos, observou que todos os professores entrevistados concordaram que é importante. Contudo, disseram que esse conceito não é explorado nos cursos que eles dão aula e sim o de derivada e integral. Argumentaram que o conceito de limite de funções é apresentado de maneira muito formal para os alunos das engenharias e, que essa apresentação era indicada somente para os alunos do curso de

matemática. Entretanto, parece que mesmos os estudantes dos cursos de matemática estão tendo problemas na aprendizagem desse conceito, em particular os alunos da licenciatura, também têm dificuldades na compreensão do conceito de limite (MATEUS, 2014; SANTOS 2013). Contudo não é somente com a compreensão da definição por épsilon e delta e na relação dela com a definição intuitiva que o aluno do Curso de Matemática – Licenciatura tem dificuldades.

Esses estudantes também estão tendo problemas em lidar com a definição intuitiva nas atividades. Outro problema evidenciado nas pesquisas foi o conhecimento insuficiente de conceitos de matemática básica. São dificuldades relacionadas tanto a conceitos do ensino fundamental, como a manipulação algébrica: multiplicação e redução de polinômios e a fatoração, sendo essa última muito evidenciada como problemática nas atividades iniciais. Esses conceitos são necessários na introdução do limite com as funções racionais, por exemplo, em que para lidar com o limite a primeira ação a ser feita é fatorar.

Com relação aos conceitos do ensino médio, consideramos que eles são os mais problemáticos, no caso o conjunto dos números reais e as funções. Existem aspectos desses conceitos que os alunos têm muita dificuldade em compreender e que aparecem nas situações para introdução do conceito de limite de função. São noções relacionadas a esses conceitos, mas que em geral, não são trabalhadas no ensino médio, como: se aproximar de um número por números cada vez mais próximos dele, “tão próximo quanto se queira” ou os valores da função tendem a um número, em que os valores da função vão se tornando arbitrariamente próximos a uma curva.

Realmente, para enfrentamento dessas dificuldades com conceitos de matemática básica, o Curso de Matemática – Licenciatura que pesquisamos, por exemplo, criou uma disciplina denominada de Introdução ao Cálculo para ser trabalhada antes do Cálculo I. A ideia foi retomar conceitos da matemática básica com revisão desses conceitos antes do início da disciplina de Cálculo I. Houve um trabalho mais intenso com auxílio de monitores para atender os estudantes, além de propostas de projetos para acompanhamento do aluno iniciante com mais dificuldades. Também tivemos um aumento no número de vagas para monitores especificamente para a disciplina de Cálculo I. Entretanto, os problemas continuaram e vimos que não ocorrem somente no Brasil (SANTOS, 2013), mas também em outros países.

A França é um país que vem desenvolvendo pesquisas sobre esse tema e tem trazido diversas contribuições para ampliar a discussão e a compreensão dessa problemática. Diferentemente do Brasil, a apresentação da noção introdutória de limite é realizada no *lycée*, equivalente ao nosso ensino médio, e depois formalizada e ampliada no ensino superior, no

caso da França na Escola Superior de Ensino e de Educação. Sendo realizado um estudo mais profundamente nos cursos de exatas, mas em geral e visto na maioria dos cursos de graduação.

Independente de quando é realizada a introdução do conceito de limite, observamos que os alunos encontram dificuldade na sua construção, e tanto aqui no Brasil como na França os pesquisadores continuam a estudar sobre este tema. A França vem se configurando como um país de frutíferas parcerias com o Brasil em vários estudos. Essa proximidade se deu principalmente por professores brasileiros que foram fazer doutorado na França e também pela vinda de professores franceses às universidades brasileiras, como é o caso da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)<sup>3</sup>. Com isso, decidimos fazer um período de estudo na França para ampliarmos nosso campo de investigação e, assim, trazermos mais elementos para compreensão do nosso objeto de estudos que é um tema de interesse comum nesses países. O que nos leva a apresentar nossa temática.

Nesta tese buscamos: ***Compreender os processos mobilizados por estudantes ao lidarem com situações introdutórias do conceito de limite de funções.*** As pesquisas nacionais e internacionais que citamos nos conduziram a considerar dois pontos importantes na constituição do nosso estudo: os conceitos e as representações.

Esses pontos aparecem nas investigações que buscaram compreender dificuldades na aprendizagem do conceito de limite de função. Em nossa pesquisa, focamo-nos nos conceitos de números reais e de funções, pois eles fazem parte da construção do conceito de limite de função e são os que mais aparecem como problemáticos nas pesquisas. As dificuldades são tanto envolvendo aspectos desses conceitos relacionados a conceitos da matemática básica, como em operar com alguns números reais, ou na manipulação de expressões algébricas que definem as funções. Como também, envolvendo outros conceitos como: propriedade dos números reais, a noção de infinito, a noção de função. Além disso, os alunos têm dificuldades em trabalhar com algumas formas de representações desses conceitos nas atividades e também em fazer relações entre elas, particularmente nas representações gráficas e as algébricas.

Assim, escolhemos para esse estudo referenciais que considerassem toda a variedade de conceitos envolvidos nas atividades de introdução do conceito de limite, bem como as

---

<sup>3</sup>Alguns professores do Instituto de Matemática da UFMS foram fazer doutorado na França, com isso foram desenvolvidas parcerias entre o Brasil e a França. Por exemplo, o desenvolvimento de pesquisas de cooperação vinculadas ao programa CAPES-COFECUB, que tem como objetivo a formação de recursos humanos de alto nível nesses países. Esse programa fomenta o intercâmbio científico entre Instituições de Ensino Superior do Brasil e da França.

formas de representações que são utilizadas. Pautamo-nos principalmente na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990, 2002, 2007, 2009, 2015, 2016), essa escolha se deu pelo fato de que concordamos que:

É inútil estudar a formação de um só conceito, de um só esquema, ou de uma só representação, uma vez que o desenvolvimento cognitivo, pelo aprendizado e pela experiência, diz respeito a uma grande variedade de situações, de esquemas, de conceitos e de formas de representação. (VERGNAUD, PLAISANCE, 2003, p. 77).

Para Vergnaud (1990, 2015) é preciso que o aluno lide com uma grande variedade de situações envolvendo o conceito a ser apreendido, pois serão as situações vivenciadas pelo estudante que farão com que o conceito adquira sentido para ele. E isso pode ocorrer ao longo de muito tempo de estudo do aluno. Envolvendo tanto o conceito a ser apreendido, como também outros conceitos envolvidos nas situações, bem como uma diversidade de formas de representação.

Em função disso, para estudar a construção de um conceito é preciso considerar esse conjunto de situações que compõem o que Vergnaud (1990) denomina de campo conceitual. Sabemos que em um campo conceitual as situações são imbricadas em conjuntos de conceitos, o que torna muito difícil pensarmos em separar as situações para estudo de um dado conceito. Todavia,

[...] é preciso estudar, em didática, o ensino e a aprendizagem de campos conceituais de certa extensão. Para analisar tais campos conceituais, é necessário apoiar-se ao mesmo tempo na epistemologia dos conhecimentos de referência e na análise dos comportamentos e das dificuldades dos alunos. (VERGNAUD, PLAISANCE, 2003, p. 77).

Por essa razão em nossa pesquisa fizemos uma delimitação do campo conceitual e escolhemos algumas situações para investigarmos a introdução do conceito de limite de funções. Trabalhamos principalmente com os aspectos que citamos dos conceitos de função e de números reais, tanto na elaboração das atividades, como também nas análises realizadas.

Assim, após delimitação do campo conceitual, elaboramos as situações para nosso estudo. Para coleta e produção dos dados utilizamos: questionários, grupos de atividades e fizemos entrevistas nos estudantes. As atividades foram elaboradas utilizando as representações algébricas, gráficas e linguagem natural escrita. Além disso, planejamos momentos de discussão sobre dúvidas que poderiam surgir e outros em que o aluno deveria explicar, oralmente, suas resoluções e também justificar. Buscamos fazer com que o aluno mobilizasse as diversas representações que orientavam suas resoluções. Assim obtivemos dados escritos nas folhas das atividades, como também orais por meio dos áudios que foram obtidos durante a realização das atividades e das entrevistas.

A nossa metodologia de análise foi composta por três fases: na primeira, modelizamos as ações dos alunos ao resolverem as atividades em elementos dos esquemas, no caso: as regras em ação e os teoremas em ação. No segundo momento, os elementos modelizados na fase inicial, nas produções dos alunos, foram analisados em termos de esquemas, para estudarmos as adaptações, no caso filiações e rupturas dos esquemas para lidar com as atividades. Na terceira fase, os elementos modelizados foram relidos em termos de imagens associadas ao conceito de limite de função, além de outras produções consideradas pertinentes para o estudo do conceito imagem. Esses elementos fazem parte do referencial teórico escolhido, no caso a teoria dos campos conceituais e as noções de conceito imagem e conceito definição.

Os elementos do esquema foram escolhidos para compreendermos o processo de conceitualização do aluno (VERGNAUD, 1986, 1990, 2009, 2015), em particular nos interessamos por dois deles, no caso os que foram utilizados para nossa modelização: as regras em ação e o teorema em ação. Segundo Vergnaud, é preciso investigar o aluno em ação, ou seja, resolvendo uma atividade para estudarmos as filiações e rupturas em seu esquema inicial ao lidar com uma situação envolvendo um novo conceito. Para Vergnaud (2007), as regras em ação são responsáveis pelo desenvolvimento temporal das ações, incluem os meios de tomadas de informação e de controle durante a ação. Os teoremas em ação estão envolvidos na parte conceitual do esquema e organizam o desenvolvimento das regras em ação. Analogamente, utilizamos as noções de conceito imagem e de conceito definição, relendo os elementos que foram modelizados em termos de imagens que os alunos associaram ao conceito, no caso como elementos do conceito imagem (CI) do limite de função (TALL e VINNER, 1981). O estudo das imagens do (CI) nos permitiu também compreender o processo de conceitualização, de um modo mais geral, considerando as definições da noção de limite de função como são apresentadas pelo ensino, no caso a intuitiva e a formal. E, assim, estudar tanto imagens que poderiam causar problemas a aprendizagem futuras, como também investigar as associações que estavam sendo realizadas com relação a essas definições.

Nossa investigação com estudantes brasileiros e franceses se deu no momento em que eles precisavam lidar com as atividades para introdução do conceito de limite de função. Como esses países têm propostas bem diferentes para introdução desse conceito, nosso estudo experimental no Brasil foi com estudantes da disciplina de Cálculo I, em que aplicamos um questionário, algumas atividades e também fizemos entrevistas. Na França, conseguimos

acompanhar a introdução desse conceito em uma sala de aula do ensino médio, aplicamos um questionário e ao final entrevistamos alguns estudantes.

Todos esses encaminhamentos foram em função dos objetivos específicos de nossa pesquisa, em que buscamos:

- ✓ Investigar como os estudantes organizam seus esquemas de raciocínio;
- ✓ Investigar regras em ação e teoremas em ação, com suas representações conforme o tipo de problema, mobilizados pelos estudantes para resolver as atividades, buscando caracterizar os esquemas;
- ✓ Investigar as imagens associadas pelos estudantes ao conceito de limite de funções;
- ✓ Investigar aproximações, ou diferenças, nos conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros e franceses.

Para essa tese escolhemos apresentar as produções de dois desses sujeitos investigados, um brasileiro e outro francês. O estudo foi pautado na metodologia de análise citada, na qual estudamos as adaptações nos esquemas mobilizados para lidar com as situações introdutórias do conceito de limite de funções. E também as imagens associadas ao conceito imagem da noção de limite de função, Ou seja, o processo de adaptação, e/ou construção, de esquemas para lidar com as situações e as associações de imagens que estavam compondo tanto o conjunto do conceito imagem, como também do conceito definição pessoal da noção de limite de função.

Os resultados desse trabalho se deram principalmente nas seções: 6.2, 7.2 e 8. Em que conseguimos estudar filiações, e rupturas, nos esquemas mobilizados pelos estudantes. Nesse sentido, nossa metodologia de análise se mostrou pertinente ao evidenciar como uma análise mais fina, por meio das regras em ação e dos teoremas em ação foi importante na compreensão dessas filiações. Por exemplo, na identificação de representações que favoreceram filiações mais favoráveis para as adaptações necessárias aos esquemas dos alunos, tanto nas produções do estudante brasileiro, como nas do francês.

Como também na Identificação de imagens do (CI) da noção de limite de função que estavam conflitando com outras desse conjunto, bem como com a compreensão da definição do conceito de limite de função, seja a definição mais formal por  $\epsilon$  e  $\delta$ , ou a intuitiva. Por exemplo, tivemos um aluno que ao lidar com funções descontínuas representadas graficamente achava que o limite só existia se o ponto de investigação estivesse no domínio da função. E quando precisa lidar com caso semelhante de função na representação algébrica ele utiliza a ideia de aproximação do ponto para identificar o limite, no caso a noção intuitiva, sem se importar que o ponto não pertencia ao domínio da função.

São imagens do mesmo conceito que conflitam entre si conforme a representação utilizada, mas que quando são mobilizadas isoladamente não são percebidas pelo estudante. Todavia, essas imagens poderão se tornar um problema na compreensão desse conceito utilizando a definição intuitiva e também quando for trabalhar com a definição formal. Além disso, identificamos imagens desse conjunto que estavam se constituindo em um conceito definição pessoal dos alunos para algumas das situações de limites de funções que tratamos na pesquisa.

Organizamos a apresentação desse texto em seções, após essa introdução, trazemos na seção 2 uma discussão sobre o conceito de limite de funções. Iniciando por uma breve apresentação do seu desenvolvimento como objeto matemático. Tivemos a intenção de elencar alguns fatos sobre sua constituição até chegarmos ao que conhecemos hoje como sendo o conceito de limite de funções. Em seguida, discutimos algumas pesquisas que contribuíram tanto na constituição como no desenvolvimento e nas análises realizadas. Ao final da seção, trazemos as ideias que estão veiculadas no ensino desse conceito geralmente denominadas de noções intuitivas e de definição formal (por meio dos quantificadores  $\epsilon$  e  $\delta$ ).

Na seção 3 explicitamos nosso aporte teórico, iniciando pela teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1986, 1990, 2002, 2015, 2016), em que discutimos os elementos utilizados em nossas análises, como as noções de esquema em seguida as noções de conceito imagem e conceito definição de Tall e Vinner (1981). Buscamos apresentar esses elementos teóricos já inseridos com nosso objeto de estudo, no caso o conceito de limite de função. Bem como justificar essas escolhas em função do nosso objeto de pesquisa e de nossos objetivos.

Na seção 4 fazemos uma breve apresentação de como o conceito de limite de funções aparece nos programas do ensino no Brasil e na França. Na seção 5 expomos nosso objetivo de pesquisa e nossos encaminhamentos metodológicos.

Nas seções 6 e 7 apresentamos detalhes do nosso planejamento e da experimentação realizada no Brasil e na França, respectivamente, juntamente com o percurso realizado pelos nossos colaboradores. Na seção 8 apresentamos para discussão alguns elementos de aproximação e de diferenças nos caminhos cognitivos escolhidos pelos estudantes, e ao final na seção 9 tecemos nossas considerações finais.

## 2. O CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÕES

*“A definição intuitiva é quando a função tende a se aproximar de um ponto  $x$  e no eixo  $y$  ela vai tender a um número. A definição formal é quando já tem o limite”.*  
*Mateus (acadêmico brasileiro).*

O conceito de limite de função é considerado difícil (IGLIORI, 2008) e vem preocupando diversos estudiosos (COURNU, 1985, NASSER, 2004; REIS, 2001; REZENDE, 2003; SANTOS, 2013; TALL VINNER, 1981) de vários países. Provavelmente, a maioria dos professores com experiência na disciplina de Cálculo I concordaria com isso e teria algo a dizer sobre os problemas que os alunos têm ao lidar com esse conceito.

Nessa seção apresentamos dados dos estudos que orientaram e embasaram nossa pesquisa, buscando evidenciar nossas escolhas diante do vasto resultado de estudos existentes sobre o conceito de limite de funções. Nosso objetivo foi evidenciar os elementos que permitiram compreendermos nosso problema de pesquisa em um contexto mais amplo, e que subsidiaram nossa pesquisa ao longo de nosso percurso investigativo.

Na tentativa de tornar mais clara essa nossa intenção, decidimos iniciar cada tópico dessa seção com uma questão. Relacionamos cada uma delas a um aspecto que consideramos importante sobre o conceito de limite de funções e, assim, buscamos responder as seguintes questões:

- ✓ Como chegamos à noção e a definição do conceito de limite de função como a conhecemos atualmente?
- ✓ Quais elementos vêm sendo mais destacados pelas pesquisas como mais problemático para aprendizagem desse conceito?
- ✓ O que são noção intuitiva de limite e definição formal de limite?

A primeira questão envolve aspectos históricos e epistemológicos do conceito de limite de funções, ela é discutida no item (2.1). Na sequência trazemos para nossa discussão o que dizem alguns pesquisadores sobre esse tema e que está relacionado à nossa segunda questão (2.2). Ao final, no item (2.3), discutimos noções que são utilizadas na introdução desse conceito, buscando identificar, e delimitar, nessas noções os elementos que são considerados intuitivos e formais. Respondendo, assim, a questão três.

### 2.1 Aspectos históricos e epistemológicos

O conceito de limite de função, como nós conhecemos atualmente, teve a sua construção permeada por muitas discussões e até algumas coincidências, digamos, curiosas.

Todavia, parece que na transposição didática<sup>4</sup> desse conceito foram retirados os “percalços” que aconteceram no seu desenvolvimento até chegarmos ao que é apresentado hoje nos livros didáticos e nas abordagens em sala de aula. É sobre isso que nos debruçamos a seguir.

Vemos que a ordem de apresentação dos conteúdos seguem o mesmo padrão da maioria dos cursos de graduação ao observarmos as ementas propostas para a disciplina de Cálculo I, em que esse conceito é trabalhado. No caso do Brasil, por exemplo, em que esse conceito geralmente é introduzido na graduação, observa-se que, primeiramente, é trabalhado o conceito de limite de funções, apresentando noções intuitivas desse conceito e depois uma definição considerada mais formal. Em seguida, trabalha-se o conceito de derivada e ao final o de integral. Também são estudadas as propriedades e algumas aplicações desses conceitos, sendo que os dois últimos conceitos são aprofundados nos outros cálculos (II, III e IV) conforme os objetivos dos cursos em que esses conceitos são trabalhados.

Essa ordem foi escolhida e, apesar das críticas e propostas em sentido diferente<sup>5</sup>, ainda é defendida por muitos estudiosos, e logicamente é a mesma apresentada na maioria dos livros didáticos. Muitas dessas críticas, com relação a essa ordem de apresentação do conceito de limite de função, dizem respeito ao fato dela não ter relação com o que realmente aconteceu no desenvolvimento desse conceito. Como também, por ignorar obstáculos e dificuldades que ocorreram durante esse processo. A definição pelos quantificadores épsilon e delta, como a conhecemos, só foi obtida muitos anos depois do surgimento do conceito, em que vários matemáticos se debruçaram buscando dar um aspecto formal ao conceito de limite. Entretanto, encontramos alguns livros didáticos, por exemplo, em que essa definição é escolhida para fazer a introdução do conceito de limite de funções, ou seja, é o primeiro contato do aluno com esse conceito.

Buscando compreender como foram realizadas essas escolhas, bem como outras, para os programas do ensino do conceito de limite de função, iremos apresentar alguns aspectos do desenvolvimento histórico desse conceito; particularmente pretendemos responder sucintamente a questão: *Como chegamos à noção e a definição do conceito de limite de função como a conhecemos atualmente?*

---

<sup>4</sup> Chevallard (1991) define como transposição didática as transformações que um conceito matemático, tido como objeto do saber desenvolvido pela comunidade de matemáticos, sofre ao se adaptar para se tornar um objeto de ensino.

<sup>5</sup> Encontramos diversos autores que propõem um estudo mais sintético sobre limite, com suas ideias intuitivas e com as aproximações, para um estudo mais aprofundado das derivadas e de integral; ou mesmo alterar as ordens de apresentação desses conceitos iniciando, por exemplo, com as derivadas (MACHADO, 2012; TREVISAN, MENDES, 2017).

O conceito de limite é considerado como o alicerce do cálculo diferencial e integral, sendo os conceitos de derivada e de integral construídos como limites particulares. Essa forma de apresentação desse conceito, proposta pelo ensino pode passar a impressão de que esse conceito foi o primeiro a ser desenvolvido pela matemática e que os outros foram sendo desenvolvidos a partir dele. Entretanto, ele apenas foi estruturado como o conhecemos hoje, somente após o desenvolvimento dos conceitos de derivada e de integral.

Alguns estudos (ROQUE, 2012) trazem que isso se deve ao fato de que as primeiras noções de limite estavam ligadas a argumentações muito vagas, e até mesmo filosóficas, relacionadas ao infinito. Encontramos registros dessas noções já na Grécia, em tentativas de resolver problemas relacionados a problemas práticos, em que surgiam números infinitamente grandes (ou pequenos) com apelo geométrico subjetivo e indefinido. Se, atualmente, com todo aparato teórico e técnico desenvolvido, ainda é difícil de compreender os conceitos de infinito e de limite não é de se estranhar os entraves ocorridos durante o desenvolvimento.

Arquimedes foi considerado um dos maiores matemáticos da antiguidade, segundo historiadores. Seu trabalho sobre áreas de figuras curvilíneas, em que ele propôs um refinamento das ideias de Eudoxo sobre o problema do cálculo da área do círculo, que é um dos mais famosos. O método de Eudoxo envolvia uma figura curvilínea que poderia ser um círculo, por exemplo, em que se inscreviam polígonos regulares, e dobrava-se o número de lados dos polígonos inscritos “até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada.” (ROQUE, 2012, p.203). Arquimedes utilizou essa ideia de modo mais elaborado, ele propôs que comprimissemos:

[...] a figura entre duas outras cujas áreas mudam e tendem para a da figura inicial, uma crescendo e outra decrescendo. A área de um círculo, por exemplo, era envolvida por polígonos inscritos e circunscritos, de modo que, aumentando-se o número de lados, suas áreas se aproximam da área da circunferência.<sup>6</sup> Ou seja, a diferença entre as áreas dos dois lados polígonos deve poder ser tornada menor do que qualquer quantidade dada quando o número de lados aumenta. (ROQUE, 2012, p. 203).

Quanto mais aumentasse o número dos lados dos polígonos, inscritos e circunscritos, maior seria a precisão do resultado, e, com isso, Arquimedes aprimorou as ideias de Eudoxo e encontra “dois conceitos que se tornariam extremamente importantes mais tarde – o conceito de limites e o conceito de infinito” (ROONEY, 2012, p. 150). Em um de seus livros, Arquimedes descreve seu método se referindo ao procedimento para encontrar a “medida do círculo”, muito mais tarde, no século XVII, ficou conhecido como “método de exaustão”.

---

<sup>6</sup> É importante destacar que não havia distinção entre círculo e circunferência, ou seja, no caso ele está se referindo à área da região interna delimitada pela circunferência.

Denominação não adequada já que esse método tem como princípio básico o fato de não ser possível exaurir o infinito, podemos nos aproximar o quanto quisermos, mas nunca chegaremos a ele (ROQUE, 2012).

Outro aspecto notável no trabalho de Arquimedes foi encontrar o limite para a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência. Posteriormente matemáticos deram um valor aproximado para essa razão, mas somente séculos depois com os estudos de Leibniz houve a necessidade de se olhar para essa razão, no caso o  $\pi$ , como um número.

Do mesmo modo, que o comportamento do número  $\pi$  demorou a ser “aceito”, os conceitos de infinitamente pequeno (ou grande) e o infinito foram ainda mais difíceis, como dissemos no início do texto. Contudo, mesmo não conseguindo compreender totalmente esses conceitos, eles ainda foram acompanhando o desenvolvimento matemático, sendo utilizados em várias áreas, particularmente importante na física.

Essas noções foram importantes no desenvolvimento dos conceitos de derivada e de integral. Esses conceitos foram desenvolvidos independentemente por Newton e Leibniz por volta de 1670, eles descobriram um método similar para resolver o problema: Como encontrar a tangente a uma curva em um ponto específico? A resposta a essa questão resolveria, por exemplo, situações em que era preciso encontrar a velocidade de um corpo em determinado instante. Além disso, esses cientistas perceberam que a integral era o inverso da derivada, em que se integrando o resultado da diferenciação chega-se à função inicial.

Eles desenvolveram aspectos diferentes do cálculo e também tinham ideias distintas em como usá-lo. Newton trabalhou o cálculo para somas infinitas de potências múltiplas de  $x$ , desenvolvendo métodos tanto para derivar, como integrar séries de potências. Enquanto Leibniz se ocupou com as propriedades de sistemas que se alteram e no somatório de infinitesimais (ROONEY, 2012).

Nesse aspecto, Roque (2012) se reporta a um estudioso da obra Newton que fala que a maior diferença entre esses cientistas é com relação à ênfase e expectativas que eles tinham relacionadas ao cálculo:

A orientação das pesquisas de Leibniz e Newton seguia direções diferentes. Para o primeiro, os problemas de fundamento do cálculo não deveriam interferir no desenvolvimento dos algoritmos diferenciais. Ao passo que o segundo se esforçou para expressar sua teoria em uma linguagem rigorosa, no caso, a da geometria clássica. Leibniz promoveu sua teoria e o uso dos infinitesimais como maneira de descobrir novas verdades. Já Newton, para fazer com que sua teoria fosse aceita, se preocupou em garantir uma continuidade histórica entre seus métodos e o dos antigos. (GUICCIARDINI, 2003 apud ROQUE, 2012, p.365).

Novamente, vemos as discussões que os infinitesimais causavam, e a escolha de Leibniz para lidar com esse problema, provavelmente deve ter causado diversas rejeições a suas justificações.

De fato, encontramos o manifesto de 1734, do bispo Berkeley, por exemplo, no qual ele fez uma crítica aos métodos do cálculo infinitesimal de Newton e de Leibniz cujo título já denotava o teor do seu texto: “O Analista: um discurso dirigido a um matemático infiel.” Era um momento histórico importante, em que a ciência avançava e colocava a igreja em uma posição desconfortável, onde os dogmas religiosos já não explicavam mais os fenômenos. Berkeley inicia o manifesto, argumentando que os matemáticos se sentem “os grandes senhores da razão” e, com isso, tomam decisões de “assuntos sobre os quais eles não têm qualquer direito de decidir. Essa é uma causa da infidelidade.” (BERKELEY, 2010, p. 634).

Vejamos um momento do seu texto se referindo as noções do cálculo:

Ora, conceber uma quantidade infinitamente pequena, isto é, infinitamente menor que qualquer quantidade sensível ou imaginável ou, ainda, a menor de todas as magnitudes finitas, confesso que está acima da minha capacidade. Mas conceber uma parte de tal quantidade infinitamente pequena que fosse ainda infinitamente menor que ela e que, conseqüentemente, embora multiplicada infinitamente, jamais fosse igual à menor de todas as quantidades finitas, **suspeito que seja uma dificuldade infinita para qualquer homem** – algo que será admitido por quem declara honestamente o que pensa, contanto que realmente pense e reflita, e não aceite nada com base na confiança. (BERKELEY, 2010, p. 639, grifo nosso).

Berkeley fez uma refutação bem argumentada de modo que a resposta precisaria explicar o que, de certa forma, era o problema em questão, afinal os grandes cientistas daquela época que usavam essas noções não conseguiam explicar, simplesmente sabiam que funcionava. Somente mais de 100 anos após o manifesto de Berkeley, suas objeções foram completamente respondidas, pelo lógico Abraham Robinson (1918-74) e, assim, a noção de infinitesimal foi considerada consistente e os infinitesimais poderiam ser considerados como um tipo de número. (ROONEY, 2012).

Nesse meio tempo, tivemos várias contribuições para chegarmos à atual noção e definição de limite. Cauchy, ao trabalhar na *École Polytechnique* buscou escrever seu curso de análise para alunos de engenharia de modo mais rigoroso possível. Ele publicou para esse curso o livro *Cours d'analyse* (1821) em que na primeira parte fez um estudo sobre a *Analyse algébrique* apresentando esse conceito, bem como outros envolvidos na sua construção. Ao mesmo tempo, em que ele buscou fazer uma apresentação com rigor, se preocupou com as críticas que poderiam surgir e fez menção à geometria, afinal, o novo não poderia desprezar o que havia sido produzido até aquele momento pela geometria. Desse modo, na introdução do seu livro, ao apresentar sua metodologia, Cauchy fez uma crítica à generalidade da álgebra

dizendo que buscou tratar com “todo o rigor que se espera da geometria”, segundo Roque (2012) isso seria uma tentativa de “[...] conciliar o método dos limites e o dos infinitamente pequenos, praticados desde 1811 na *École Polytechnique*.” (ROQUE, 2012, p. 413). Vejamos a sua definição de limite:

Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a acabar diferindo tão pouco quanto você quer, o último é chamado o limite de todos os outros. (CAUCHY, 1821 apud LECORRE, 2016, p. 29, tradução nossa).

Nessa definição ainda não aparecia os quantificadores, mas já era o início do que ficou conhecido como a “idade do rigor” no século XIX. Esse movimento iniciado por Cauchy trouxe uma nova preocupação aos matemáticos, eles deveriam usar somente as propriedades definidas. Assim noções que eles utilizavam implicitamente deveriam ser explicitadas. “A noção de função será então definida antes das noções de continuidade, limite e derivada, a fim de eliminar as incertezas ligadas à concepção sobre essas noções.” (ROQUE, 2012, p. 414).

Segundo Roque é importante contextualizar a noção de rigor, pois ela é histórica e não podemos olhar para esse período como se os matemáticos dessa época tivessem se reunido e combinado de organizar o que faziam, ou que já havia sido feito, “preocupados com um suposto estado caótico de sua disciplina” (2012, p. 406). Assim, a “idade do rigor” é relativa ao rigor como conhecemos até hoje, a autora enfatiza que os estudiosos do século XVIII não viam problemas, como a falta de rigor ou desorganização, em seus métodos. A necessidade de um maior rigor veio da própria matemática, pois as crenças e técnicas utilizadas anteriormente pelos matemáticos não resolviam os problemas que estavam surgindo dentro da matemática. Além disso, esse rigor não foi compreendido do mesmo modo entre os dois pesquisadores mais importantes desse período, no caso Cauchy (1789-57) da França e também com Weierstrass (1815-97) da Alemanha: “[...] a noção de rigor de Lagrange era diferente da de Cauchy, que por sua vez, também seria criticada por Weierstrass, baseada em sua própria concepção de aritmética.” (2012, p.407).

O grupo conhecido como “escola de Weierstrass” teve início aproximadamente em 1860, após o Seminário Matemático Internacional de Berlim. Weierstrass começava seus cursos e se interessou em estudar a teoria das funções analíticas, fato que mais tarde fez com que ele rejeitasse a abordagem de Cauchy. O rigor da matemática em Berlim passa a ser baseada nas noções aritméticas e no final do século viria a se tornar predominante. O conceito de número desvinculado da noção de quantidade ou de qualquer realidade externa passa a ser a preocupação dos matemáticos. Momento oportuno para surgimento de outra definição

envolvendo o conceito de limite. Weierstrass então define continuidade de uma função com rigor da concepção da aritmética dada em termos de épsilon e delta.

É oportuno destacar que não existe uma produção de Weierstrass desses cursos, toda produção que são relacionadas como suas formulações foram obtidas das notas das aulas de seus alunos, como também de registros manuscritos de suas palestras. Desse modo, podemos encontrar algumas pequenas variações conforme a fonte utilizada. Todavia, é consenso que “A principal concepção do método  $\varepsilon - \delta$  foi formada em suas palestras em Berlim. (SINKEVICH, 2016, p.197, tradução nossa), vejamos a definição de Weierstrass para uma função contínua utilizando esses quantificadores:

*$f$  é contínua em  $x_0$  se, para todo real  $\varepsilon$  estritamente positivo, existir um  $\delta$  estritamente positivo tal que, se  $x$  estiver a uma distância de  $x_0$  estritamente menor que  $\delta$ , então o valor da função  $f$  em  $x$  está a uma distância estritamente menor que  $\varepsilon$  do valor da função  $f$  em  $x_0$ . (RACHIDI, 2018, curso p. 6).<sup>7</sup>*

Essa definição de Weierstrass utiliza épsilon e delta e as noções de distância, buscando especificar a relação que deve existir entre o intervalo dos valores que a função assume, com o intervalo do domínio onde os valores de  $x$  estão ao se aproximar de um dado  $x_0$ . É uma definição rigorosa do conceito por meio da linguagem natural que explicita alguns aspectos envolvidos na compreensão do conceito, na medida em que detalha como esses elementos estão sendo relacionados. É importante destacar que era um momento de mudanças e que na matemática, padrões de rigor sofreram alterações durante seu desenvolvimento, como também na importância dada ao rigor no seu desenvolvimento em determinadas épocas.

*A preocupação dos matemáticos em relação aos diferentes aspectos da atividade matemática muda no decorrer do tempo. Assim, por exemplo, no século XVIII, a atenção no cálculo diferencial e integral estava voltada à procura de novos resultados e não no rigor, ou à busca de fundamentos para esse campo em constituição, pois havia a crença de que, depois de certo acúmulo de fatos isolados, a razão conseguiria fundamentá-los devidamente. No início do século XIX, devido a uma conjunção de fatores, entre os quais estão os problemas surgidos com o ensino do cálculo, a preocupação dos matemáticos incidiu sobre o rigor. (GRABINER, 1974 apud MIGUEL, BRITO, 1996, p.55).*

Assim, surgem novas definições buscando atender essas novas demandas. A definição dada por Weierstrass para continuidade, por exemplo, é reescrita simbolicamente com o uso das inequações e com a nova notação de módulos, como:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . (RACHIDI, 2018, curso p. 6).

Atualmente encontramos praticamente essa mesma definição de continuidade de funções nos livros didáticos. Guidorizzi (2013), por exemplo, inicia sua definição pelas

---

<sup>7</sup> Notas da disciplina do Prof. Mustapha Rachidi do Curso de Doutorado em Educação Matemática da UFMS, ministrada no 2º semestre de 2018.

inequações, faz uma observação relacionando as inequações com suas escritas na forma de inequações com módulos e, em seguida, ele introduz a definição de continuidade inserindo também os módulos:

Definição: Sejam  $f$  uma função e  $p$  um ponto de seu domínio. Definimos:

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ (} \delta \text{ dependendo de } \varepsilon \text{)} \\ \text{tal que, para todo } x \text{ em } D_f, \\ p - \delta < x < p + \delta \Rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon. \end{cases}$$

Observação. Sabemos que

$$|x - p| < \delta \Leftrightarrow p - \delta < x < p + \delta$$

e

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon, \Leftrightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon.$$

A definição anterior pode, então, ser reescrita, em notação de módulo, na seguinte forma:

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ dado, existe } \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \text{ em } D_f, \\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon. \end{cases}$$

(GUIDORIZZI, 2013, p. 61-62).

Weierstrass também formulou uma definição do limite e da derivada com uso de épsilon e delta e, como as definições de continuidade foram reescritos na linguagem simbólica como a conhecemos hoje. Essa definição pode ser encontrada atualmente nos livros didáticos e no item (2.3) dessa seção apresentaremos alguns exemplos dessa definição nos livros didáticos.

O rigor foi importante na constituição da matemática como a conhecemos. Todavia, a ênfase dada somente à apresentação rigorosa de um conceito, como no caso do nosso objeto de estudo o conceito de limite de funções, deixou de lado aspectos importantes da sua constituição. Como as dificuldades em compreender: as noções de infinito e de infinitésimo, se o limite seria “alcançado”, entre outras. Chegou-se a uma definição concisa e formal como desejo da comunidade matemática, em que se retiraram noções intuitivas e foram acrescentados novos elementos, os quantificadores épsilon e delta. A definição de limite de uma função se torna precisa e clara com esses novos elementos e é apresentada de modo mais conciso com a nova simbologia utilizando as inequações e os módulos. Se, por um lado, a comunidade matemática resolveu o seu problema com a falta de rigor de um conceito considerado fundamental no campo da análise, por outro lado trouxe um problema a ser enfrentado pelo ensino na apresentação desse conceito.

Uma das soluções para esse impasse, que se mantém até nossos dias, foi fazer a introdução do conceito de limite de funções iniciando com noções intuitivas, que explicitam o que acontece, por exemplo, com os valores de uma função quando tomamos valores próximos de um ponto. Para, em seguida, trabalhar com a definição por épsilon e delta. Todavia, isso se mostrou insuficiente e, esse, ainda é um problema que diversos pesquisadores têm se

debruçado. Alguns estudos apontam que os alunos têm dificuldades, tanto na compreensão de aspectos envolvidos na noção intuitiva do conceito de limite, como também da definição formal, além do fato de que eles não vêem relação entre essas duas noções, ou mesmo percebem que elas tratam do mesmo conceito. O que nos leva ao nosso próximo tópico em que buscamos responder a questão: *Quais elementos vêm sendo mais destacados pelas pesquisas como mais problemático para aprendizagem do conceito de limite de funções?*

## 2.2 O que dizem as pesquisas

Deparamo-nos com um vasto resultado de pesquisas sobre nosso objeto de estudo para responder essa nossa questão. O que por um lado foi extremamente rico para nossa investigação, pois nos forneceu muitos elementos que colaboraram durante todo nosso percurso investigativo. Por outro lado, tivemos uma quantidade enorme de pesquisas para nos debruçarmos, com isso, a seleção de autores para apresentarmos neste texto sempre nos parecerá injusta, mas se fez necessária.

Assim, escolhemos apresentar os dados das pesquisas pelos temas que fomentaram tanto nossas escolhas metodológicas, como também teórica. Como nosso estudo buscou compreender processos mobilizados pelos estudantes na introdução do conceito de limite de funções, iniciamos com as pesquisas que investigaram dificuldades encontradas referentes à aprendizagem do conceito de limite de funções.

Uma discussão que aparece em quase todas as pesquisas, principalmente as que encontramos no Brasil, diz respeito à falta de conceitos da educação básica para construção do conceito de limite. Se questionarmos qualquer professor da disciplina em que esse conceito é apresentado, provavelmente todos dirão algo semelhante ao que os professores pesquisados por Reis disseram: “[...] que a formação inadequada dos alunos é a principal causa dos problemas no processo ensino aprendizagem [...]”. (REIS, 2001, p. 21).

Vemos que esses estudos repercutem no ensino ao encontrarmos em diversas universidades a inserção de disciplinas que buscam minimizar esses problemas, denominadas de Pré-Cálculo, Introdução ao Cálculo, entre outras. Essas disciplinas são trabalhadas geralmente no primeiro semestre dos cursos visando preparar os alunos para a disciplina de Cálculo I que virá após. Nelas são retomados diversos conceitos do ensino fundamental e médio. Apresentamos como exemplo a ementa do Curso de Matemática – Licenciatura no qual trabalhamos, primeiramente, a de 2014 que estava em vigor quando iniciamos nossa pesquisa e também a ementa com a alteração realizada em 2018:

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO: Números Reais. Funções Elementares. Proporcionalidade e Funções Afins. Funções quadráticas. Funções Exponenciais e Logarítmicas. Trigonometria e Funções Trigonométricas. (UFMS, 2014, p. 13).  
 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO: Conjuntos Numéricos. Funções. Funções Polinomiais de Graus 1 e 2, e Modular. Potenciação e Radiciação. Função Exponencial. Logaritmos e Função Logarítmica. Funções Trigonométricas. (UFMS, 2018, p. 17).

Nessa alteração a disciplina que tinha 102 horas diminuiu para 68 horas, e foi retirado o estudo de proporcionalidade, mas foi acrescentada potenciação e radiciação. Além disso, a bibliografia básica foi toda alterada. Antes os livros didáticos eram de cálculo e na nova ementa passaram a ser indicados os da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, volumes 1, 2 e 3<sup>8</sup>. Essas alterações visam atender essas demandas evidenciadas tanto pelas pesquisas, como pelas práticas dos professores que precisam lidar com essas dificuldades dos alunos ao longo dos anos.

Além da criação dessas disciplinas, encontramos também proposta de monitorias, oficinas e projetos, sendo que algumas delas foram introduzidas por falta de efetividade dessas disciplinas (NASSER, 2004). Essas propostas, em geral, são trabalhadas com os alunos concomitantes a disciplina de Cálculo I, visando atender, tanto essas dificuldades de matemática básica, como também problemas relacionados à compreensão dos conceitos da disciplina de Cálculo I (CAVASSOTO, 2010). Todavia são tentativas de sanar dificuldades de conceitos de matemática básica que estão sendo mobilizados na construção de um novo conceito, em um contexto muito diferente do que aluno vivenciou. O que traz novos elementos a se considerar quando se decide retomar esses conceitos que os alunos estão tendo dificuldade. Por exemplo, alguns estudos apontam que os alunos têm dificuldades na manipulação de expressões algébricas, com a fatoração, em operar com equações e inequações.

Essas dificuldades são identificadas na manipulação das expressões algébricas que aparecem nas atividades, e que definem a função que se investiga o limite. Por exemplo, ao tentar resolver um limite, o estudante utiliza propriedades que não são válidas, como no caso em que é preciso encontrar o  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1}$ , “O aluno “cancela” o  $x^2$  do numerador com o  $x$  do denominador, obtendo a expressão  $-(x-3)$  e substituindo, então, o valor de  $x$ .” (CURY e CASSOL, 2004, p.5). Esse problema é comum e aparece em outros estudos (ALVARENGA e

---

<sup>8</sup> Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1:** Conjuntos, Funções. Ed. São Paulo, SP: Atual, 2004. Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Murakami, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, vol.2:** Logaritmos. Ed. São Paulo, SP: Atual, 2011. Iezzi, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, vol.3:** Trigonometria. Ed. São Paulo, SP: Atual, 2013.

SAMPAIO, 2016; VOGADO, 2014), encontramos erros também no uso da fatoração de expressões algébricas e na multiplicação e redução dessas expressões, tais como:

$$\Rightarrow (x + c)^2 \rightarrow x^2 + 2c$$

$$\Rightarrow (x + c)^2 \rightarrow x^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a(x - b) \rightarrow ax - b$$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{a} \rightarrow x$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} < \frac{c}{d} \rightarrow \frac{x}{a} < \frac{d}{c}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 \rightarrow x^2 + 2x \rightarrow 3x^2$$

Esses erros são importantes, pois aparece no momento em que o estudante inicia sua resolução buscando encontrar um limite. Não está relacionado à compreensão do conceito de limite, mas compromete essa compreensão no momento em que não permite o aluno seguir com um procedimento, no caso algébrico, para encontrar o resultado de um limite e, assim, poder analisar, e compreender, o que o resultado encontrado significa no contexto do conceito de limite de uma função.

A função é outro conceito evidenciado como problemático para os alunos, as pesquisas apontam dificuldades, tanto na compreensão do conceito, como também em lidar com suas diversas representações (ALVARENGA, SAMPAIO, 2016; CURY, CASSOL, 2004; JUNQUEIRA, CAMPOS, 2016; NASSER, SOUZA, TORRACA, 2016; SEGADAS-VIANNA, 2016). A representação gráfica é um dos aspectos destacado como de difícil compreensão para os alunos, tanto dos elementos envolvidos na sua construção no plano cartesiano, como também quando precisam relacionar a representação gráfica com a expressão algébrica. Até porque para alguns alunos o conceito de função está vinculado a uma de suas representações. Encontramos situações em que ao serem questionados sobre o que seja uma função, muitos apresentam sua expressão algébrica, ou sua representação gráfica. No caso da representação algébrica, alguns a relacionam a uma fórmula, assim, casos como de uma função constante ou de uma função definida por várias sentenças, não seriam considerados como funções. Nesse último caso de função, também encontramos erros na construção da sua representação gráfica, como, por exemplo, “A crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta.” (NASSER, SOUZA, TORRACA, 2016, p. 187). Esse problema compromete tanto esses casos de funções definida por várias sentenças, como também casos envolvendo as funções racionais. No ensino médio, a construção da representação gráfica das funções, geralmente é trabalhada assim, sabe-se a “forma” da representação gráfica conforme a

expressão analítica, por exemplo, se for  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ , se trata de uma reta, então basta encontrar dois pontos e fazer sua ligação obtendo sua representação no plano cartesiano. É proposta uma abordagem similar para outras funções, em que o estudo geralmente é sobre crescimento, decrescimento, pontos críticos, zeros da função, domínio e imagem. Os alunos acabam memorizando representações gráficas de algumas funções, mas não conseguem relacionar a representação encontrada com os elementos dados pela expressão algébrica.

De fato, Cornu (1983) em seu estudo encontrou estudantes do ensino médio que não sabiam relacionar a representação gráfica com a algébrica de uma função. Quando questionados sobre o que acontecia com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , dada por sua representação algébrica e gráfica, eles não sabiam onde “olhar” para o  $x$  na representação gráfica para responder o que estava acontecendo com os valores da função. Segundo Sagada-Vianna:

Gráficos são utilizados mais como ilustrações dos conceitos do que como ferramentas nas resoluções de questões. As ferramentas que os alunos utilizam são predominantemente algorítmicas, algumas refletindo o fato de memorizarem procedimentos que funcionam em casos particulares, mas não aplicadas em geral. (SEGADAS-VIANNA, 2016, p. 120).

Outro ponto importante, com relação ao estudo das funções, é o conjunto em que elas estão definidas. As que particularmente nos interessa, em relação ao nosso objeto de pesquisa, são as funções definidas no conjunto dos números reais. Pesquisadores apontam que os alunos têm dificuldades tanto nas representações desses números (nas formas numéricas e geométricas), em manipular e operar com eles. Como também, em aplicar propriedades e com continuidade de funções numéricas. (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983; GRANDE, PIRES, 2016). Um aspecto relevante para nosso estudo diz respeito a compreensão dos números reais, Cornu (1983) em sua pesquisa identificou que:

Uma primeira dificuldade é dar sentido à escrita  $0,999 \dots$ : ela representa bem um número? Parece que, muitas vezes,  $0,999 \dots$  representa o “último número antes de 1”. Um estudante do primeiro ano da universidade disse que  $0,999 \dots$  é o máximo do intervalo  $[0, 1[$ , enquanto que o intervalo  $[0, 1]$  tem por máximo o 1. Às vezes,  $0,999 \dots$ , representa um número da forma  $0,99 \dots 9$ , isto é com um número finito de 9: “Mais há 9, mais  $0,99 \dots$  próximo de 1”. Este tipo de dificuldade persiste por muito tempo, e é encontrado em estudantes de todos os níveis. Deve-se notar que a demonstração matemática da igualdade  $0,999 \dots = 1$ , nem sempre impede a certeza de que esses números são diferentes: “1 é maior, mais podemos mostrar que eles são iguais”. (CORNU, 1983, p.88-89, tradução nossa).

Artigue (1995) também argumenta sobre esses problemas, tanto com relação aos números reais como também com as funções, e acrescenta um ponto que consideramos de extrema importância para esse debate. Segundo a autora, é preciso saber que o aluno não tem construído os conceitos de função e de números reais quando é apresentado ao conceito de

limite de funções, como pensam alguns professores, mas que esses conceitos ainda estão em processo de construção. E, será justamente, ao trabalhar com o conceito de limite, que fará com que o aluno precise lidar com situações nunca antes vivenciadas envolvendo aspectos do conceito de função e de números reais. É o momento que “vai se tornar exatamente um dos motores de sua conceituação.” (ARTIGUE, 1995, p. 108, tradução nossa). Desconstruindo a ideia de que o aluno tem esses conceitos “prontos” para serem mobilizados na introdução do conceito de limite.

Com relação ao conceito de limite, encontramos estudos indicando que os alunos têm dificuldades em vários elementos que fazem parte da construção desse conceito, como:

- ✓ Em compreender expressões como: “tende a”, “tão próximo quanto se queira”, “tem por limite”, “suficientemente grande”, “suficientemente pequeno”;
- ✓ Em trabalhar com a definição formal por meio dos quantificadores épsilon e delta;
- ✓ Em relacionar a definição intuitiva com a sua definição formal;
- ✓ Compreender a noção de infinito.

Alguns pesquisadores consideram que algumas dessas dificuldades, que fazem parte da construção desse conceito são de natureza epistemológica. Podemos nos reportar à ideia de obstáculos epistemológicos<sup>9</sup> para discussão dessas dificuldades. Essa noção foi introduzida por Bachelard (1938) e Brousseau (2008) levou para a educação matemática.

Nesse aspecto, Cornu (1983) é um autor que contribuiu com essa discussão sobre obstáculos relacionados à aprendizagem de limite, em sua tese ele elencou quatro principais obstáculos. O primeiro está pautado sobre “aspectos metafísicos da noção de limite”, em que o autor pondera que o conceito de limite e a noção de infinito surgiram como sendo mais dos campos da metafísica e da filosofia, por esse motivo alguns matemáticos tinham resistência a essas noções. E com a introdução do conceito de limite os alunos precisam lidar com novas situações que não são mais resolvidas como anteriormente, com uma simples manipulação algébrica e o uso de suas propriedades, pois são acrescentados “novos” elementos. Um que é particularmente problemático para os alunos é o de infinito. Nesse sentido Caraça já nos avisava que: “Estamos à porta do domínio do infinito; preparemo-nos para o salto no desconhecido.” (2003, p.11). De fato, os estudantes não o compreendem e têm dificuldades em acreditar, Cornu exemplifica trazendo algumas falas dos alunos diante de tais situações:

---

<sup>9</sup> Obstáculo epistemológico, como proposto por Brousseau (2008), trata-se de uma ideia ou concepção arraigada, tanto na formação quanto no desenvolvimento de um conceito, ou seja, um conhecimento anterior bem sucedido em situações de um domínio particular, mas que teria que ser abandonado por não ser válido num contexto mais amplo.

“Não é rigoroso... mas funciona”  
 “Não existe... é abstrato”  
 “O método está certo se estamos satisfeitos com um valor aproximado”.  
 (CORNÜ, 1985, p.151, tradução nossa).

Segundo Cornü (2002), aspectos mais complexos da noção de infinito só são vivenciadas pelos alunos na introdução do conceito de limite. Desse modo, nossos estudantes precisaram compreender ao mesmo tempo, tanto um novo conceito que está sendo introduzido, como também nuances de um conceito que ele ainda está em processo de compreensão. Se pensarmos particularmente no nosso curso, isso se torna ainda mais preocupante, pois eles serão professores de matemática, Rezende evidencia esse problema ao nos trazer que:

O infinito é um elemento estranho para o nosso aluno do ensino médio e, por conseguinte, para o nosso aluno de Cálculo. Mas continua estranho para o estudante, mesmo após um curso de Análise. Alguns desses estudantes agora são professores de matemática, lecionam no ensino médio e fundamental, e o conceito de infinito continua estranho para a maioria deles. Com isso, reproduzem o ciclo que eles próprios vivenciaram. (REZENDE, 2003, p. 320).

Sierpinski (1985) também investigou sobre obstáculos epistemológicos e considera que o infinito é um dos obstáculos mais problemáticos para a compreensão do conceito de limite, ela o denomina de “horror ao infinito”. Destacando a dificuldade em compreender e justificar matematicamente esse conceito ao longo do seu desenvolvimento.

O segundo obstáculo está relacionado às noções de “infinitamente pequeno” ou “infinitamente grande”. Cornü destaca, com relação à primeira noção, uma questão que preocupou muitos matemáticos: “Há quantidades ainda não nulas, mas que não são mais “atribuíveis”, quantidades “evanescentes”; o que está acontecendo no momento quando uma quantidade desaparece?” (1983, p. 59, tradução nossa).

Questão como essa, evidencia a complexidade dessas noções no desenvolvimento do conceito de limite, e não podemos ignorar esse fato ao pensarmos no caminho cognitivo que o aluno precisará trilhar para a compreensão desse conceito. Cornü nos apresenta alguns exemplos de falas dos estudantes para ilustrar problemas na compreensão dessas noções:

“...o mais perto possível”  
 “Chegando o mais próximo possível do zero absoluto”  
 “Quando A e M tocam, mas não serão confundidos”  
 “As encostas são, em certo momento, muito pouco diferentes, mas não iguais.”  
 “O maior número é 0,999... : este é o último número antes de 1”.  
 (CORNÜ, 1985, p.152, tradução nossa).

O terceiro obstáculo está relacionado ao fato de “Um limite ser alcançado?”. Muitas expressões usadas na introdução do conceito de limite são conhecidas dos alunos, e elas trazem significados que podem interferir na construção do conceito que será apresentado.

Sabemos que a aprendizagem é um processo em que o estudante vai se adaptando às novas situações, utilizando, e/ou modificando, o conhecimento que ele tinha ao que é novo; isto é, ele sempre tem conhecimentos prévios que serão mobilizados diante de uma situação em que precisará resolver (VERGNAUD, 2015). Diante disso, podemos encontrar problemas na introdução da noção de limite com o uso das expressões “tende a” e “o limite”, pois elas podem ter significados variados para os estudantes quando utilizadas nesse novo contexto, vejamos alguns exemplos apresentados por Cornu (2002):

“Tende a”:  
 Se aproximar (eventualmente ficar longe dele)  
 Se aproximar... sem alcançá-lo  
 Se aproximar... apenas alcançando  
 Assemelhar-se (sem qualquer variação, como “este azul tende a violeta”).  
 “O limite”[...] Na maioria das vezes como um “limite intransponível”, mas também pode ser:  
 Um limite intransponível que é alcançável,  
 Um limite intransponível que é impossível alcançar,  
 Um ponto que se aproxima, sem alcançá-lo,  
 Um ponto que se aproxima e atinge,  
 [...]  
 O que vem imediatamente após o que pode ser alcançado,  
 Uma restrição, uma proibição, uma regra,  
 O fim, o acabamento,  
 (CORNÜ, 2002, pp.154-155, tradução nossa).

Ao diferenciar essas noções Cornu (1983) apresenta que para muitos alunos a noção de “limite” estaria associada a algo preciso, enquanto que “tende a” estaria relacionada a algo mais vago. Enfatiza que podem ocorrer variações desses significados no mesmo indivíduo, em situações diferentes por muito tempo. Simplesmente pelo fato de que essas variações de significados, mesmo sendo conflitantes vão sendo ampliadas, e/ou modificadas, com a formalização do conceito de limite. Todas essas noções vão se constituir no “conceito imagem” do sujeito. Cornu (2002) faz referência à noção de conceito imagem<sup>10</sup> com base nas ideias de Tall e Vinner (1981) para dizer que essas noções podem conviver mesmo sendo conflitantes e o aluno irá utilizar cada uma delas conforme a situação, sem se dar conta de que há um problema. Somente se o ensino propuser atividades em que elas possam trazer algum problema ao aluno ele poderá refletir sobre essas contradições, caso contrário, elas poderão conviver por muito tempo.

A transposição numérica das grandezas é o quarto obstáculo apresentado por Cornu (1983), em que a dificuldade está relacionada à abstração necessária para passar do contexto geométrico e cinemático para o numérico.

<sup>10</sup> Na seção 3.1 discutimos a noção de conceito imagem e conceito definição de Tall e Vinner (1981).

Outro ponto destacado por Cornu é com relação à noção de limite e sua definição. É o primeiro contato do estudante com o conceito de limite, momento em que surgem expressões como “tende a” ou “se aproxima de”, sendo em seguida trabalhada a definição. O autor diferencia essas duas apresentações, sendo a primeira como dinâmica e a segunda como estática, em que essa última não retoma essas expressões trabalhadas na noção dinâmica:

A definição transformou uma noção extremamente complexa em que se mistura o infinito, a ideia de aproximação, a ideia de se aproximar de algo, sem alcançá-lo ou alcançando, em um objeto de natureza diferente, onde se misturam quantificadores e desigualdades. (CORNÜ, 1983, p. 23, tradução nossa).

Para Cornu (1983) existe uma “lacuna” entre essa noção de limite dinâmica, como conceito, e a sua definição em termos de  $\epsilon$  e  $\delta$ . Esse problema surge tanto na compreensão de cada uma delas, como também para entender que se tratam do mesmo conceito. Podemos encontrar alunos que compreendem a definição e sabem lidar com as situações que aparecem no ensino com a definição, mas que não compreendem o conceito de limite. Como também, alunos que conseguem resolver várias situações, pois sabem lidar com as ideias de limite, mas que não compreendem a definição. O autor enfatizava que é apresentada a definição de limite por  $\epsilon$  e  $\delta$ , e espera-se que os estudantes após verem alguns exemplos a compreendam, não levando em conta que o aluno, na maioria das vezes, não precisará dessa definição para lidar com as situações para encontrar o limite.

De fato, Fernandes (2015) ao fazer um estudo sobre o conceito de limite de funções e listar algumas técnicas para encontrar o limite não incluiu como uma técnica a definição de limite, sua justificativa seria que é uma técnica: “[...] de pequeníssimo alcance por não se aplicar a uma variedade de funções, razão pela qual não é explorada.” (2015, p.146). A definição para esse autor estaria relacionada ao bloco teórico, no caso seria a matemática que validaria o resultado encontrado. Entretanto, ela não justifica, em geral, as técnicas mobilizadas nas resoluções, que geralmente vêm de propriedades de manipulações algébricas e de funções. Uma questão decorrente disso é: como o aluno poderá fazer para lidar com essa “lacuna” entre essas duas formas de apresentação do conceito de limite? Provavelmente buscará compreender o conceito de limite com as noções que ele está lidando o tempo todo, podendo até esquecer a definição de limite. Entretanto, a definição de limite formal por  $\epsilon$  e  $\delta$  é apresentada já no início do estudo desse conceito, na disciplina em que fazemos nossa investigação sem que seja utilizada nas atividades geralmente trabalhadas pelos alunos. Assim, não podemos ignorar que as situações propostas para essa apresentação poderão possivelmente influenciar as escolhas que os alunos fazem no processo de construção desse conceito. Segundo Artigue:

Por um lado, essa formalização funciona como um todo indivisível, enquanto o estudante tende a considerá-los como dois processos distintos: um que se realiza sobre a variável e outro sobre os valores da função. A implicação necessária opera, em um sentido que não é nada natural: para expressar que o limite da função  $f$  é 1 quando  $x$  tende ao infinito, por exemplo, não se escreve que para um  $x$  muito grande,  $f(x)$  se aproxima de 1. Pelo contrário, se estabelece a veracidade de 1 que se trata de garantir que, se  $x$  é suficientemente grande,  $f(x)$  estará em uma vizinhança. Essa imbricação, pouco natural, induz a que em todas as definições padrão haja uma alternância de quantificadores que, de antemão se sabe, serão mal trabalhados nesse nível de ensino. (ARTIGUE, 1995, p. 114, tradução nossa).

Todos esses problemas indicados nessas pesquisas fomentaram outros estudos com propostas de investigações que trouxessem mais elementos para se trabalhar com essas dificuldades. Relacionado ao último tema a apresentação do conceito de limite, encontramos pesquisas que apontam para a necessidade de se trabalhar situações que favoreçam uma aproximação entre a noção intuitiva de limite com a sua definição formal. Zuchi (2005) em sua pesquisa trabalhou com atividades buscando fazer essa aproximação, ela propôs situação problema em que os alunos deveriam lidar com elementos da imagem da função buscando relacionar com variação de valores de  $x$ . Em seguida, eles trabalhavam com o mesmo problema, mas envolvendo os quantificadores épsilon e delta, para ao final, apresentar a definição de limite de uma função por épsilon e delta. Observamos em suas análises que os alunos tiveram muitas dúvidas quando precisaram lidar com esses quantificadores, dos 34 que participavam 10 deixaram em branco, 14 tentaram explicar a relação entre o épsilon e o delta mobilizando equações, a representação gráfica da função, mas não conseguiram encontrar a relação; e 10 alunos conseguiram encontrar uma relação genérica entre o épsilon e o delta. Alguns alunos conseguiam explicar o que estava acontecendo com a situação, observando a representação gráfica, mas não encontraram um modo de representar algebricamente o épsilon relacionado ao delta.

Esses alunos tiveram dificuldades também em relacionar a variação da imagem para o domínio, esse problema foi destacado por Cornu (1983) e por Artigue (1995). Segundo Cornu (1983), a definição de limite investigando o que acontece com os valores da função quando  $x$  se aproxima de um número envolve expressões como “tende a” ou “se aproxima de”, são aspectos dinâmicos, em que o aluno investiga elementos do domínio para encontrar os valores da imagem que se aproximam do valor que será o limite. Enquanto que a definição formal por épsilon e delta é estática e faz o caminho inverso da dinâmica, pois o aluno precisa trabalhar com elementos da imagem buscando uma relação entre eles e os valores do domínio.

Esse ponto é importante e envolve as dificuldades já citadas no estudo com as funções, em que vimos que será na introdução do conceito de limite de funções que surgirão situações

que vão ampliar a sua conceitualização. Sabemos que esse caminho inverso citado pelos pesquisadores não vem sendo trabalhado no ensino das funções e que é preciso considerar esse fato como um complicador a mais na compreensão da definição de limite de função estática, bem como na relação entre ela e a definição dinâmica.

Essas pesquisas trazem à tona discussões sobre a necessidade de se fazer a introdução do conceito de limite de funções já no ensino médio. No Brasil, esse conceito já fez parte do ensino médio, sendo que em 1961 ele saiu do programa (CARVALHO, 1996). Algumas dessas propostas são para fazer uma abordagem somente intuitiva, outras trazem sugestões para se trabalhar com o conceito de limite no estudo das sequências (SILVA, 2011).

Encontramos, também, sugestões para se fazer a introdução do conceito de limite por meio do estudo das derivadas. Artigue (1995) comenta uma proposta semelhante a essa ideia de se trabalhar com aproximações do conceito, mas sem apresentar explicitamente o conceito de limite, ela exemplifica que o trabalho deve:

[...] permitir ao aluno associar a derivabilidade de uma função em um ponto com a imagem de uma função cuja representação gráfica, por aproximações sucessivas, termina por confundir-se com uma reta, a noção de tangente globalmente assimilada com a “tangente prática reta que passa por dois pontos muito próximos da curva representativa. Assim, o conceito de limite permaneceu implícito. (ARTIGUE, 1995, p. 119, tradução nossa).

Essa abordagem vem sendo utilizada no ensino francês, em que o estudo da derivada é realizado no segundo ano do ensino médio (*Première*) e o conceito de limite é trabalhado no ano seguinte (*Terminale*), iniciando pelo estudo de limite das sequências e em seguida o limite de funções. Como dissemos, no Brasil, o conceito de limite de funções também já esteve presente no ensino médio e sua retirada desse nível de ensino gerou, e ainda gera muitas discussões (LIMA, 2001). Com certa razão, pois os alunos chegam às universidades e já precisam lidar rapidamente com a noção e a definição de limite de funções, sem tempo de refletir sobre o que está sendo ensinado. Entretanto, sabemos que mesmo que estivéssemos com a apresentação da noção de limite de funções no ensino médio ainda assim teríamos problemas.

Na França, por exemplo, vimos que a introdução desse conceito é realizada no ensino médio, com abordagem sugerida por alguns dos estudos que citamos. Apesar disso, encontramos diversos estudos evidenciando que eles também estão tendo problemas na aprendizagem do conceito de limite de funções. A aprendizagem de um conceito é um processo longo, de enfrentamento de situações que vão sendo assimiladas no decorrer dos anos de estudos. As dificuldades relacionadas à construção do conceito de limite envolvem

diversos fatores que precisam ser considerados se estamos interessados na sua aprendizagem.

De fato, encontramos na fala de Lecorre que:

A noção de limite é, na verdade, conhecida pela dificuldade que gera nos estudantes em todos os níveis em que é ensinada, no ensino médio, como no início da universidade, e isso na França, como em muitos outros países. A literatura extremamente rica sobre esse conceito identifica e analisa as muitas dificuldades associadas a ele. (LECORRE, 2016, p. 423, tradução nossa).

Além disso, orientam sobre o uso de sequências didáticas buscando trabalhar com essas dificuldades, com estudantes dos diversos níveis de escolarização (LECORRE, 2016; SILVA, 2011; ZUCHI, 2005). Bem como utilizando tecnologias para se trabalhar com aspectos dinâmicos do conceito de limite de funções (ZUCHI, 2005), ou mesmo com atividades de manipulação que favoreçam o aluno conjecturar sobre o que está acontecendo com a função. Encontramos também indicações para se iniciar a apresentação do conceito de limite pelo estudo dos infinitésimos, como dissemos pelas derivadas, e também pela discussão de problemas motivadores para se introduzir o conceito (STEWART, 2003; TREVISAN e MENDES, 2017).

Como havíamos dito, temos uma vasta bibliografia para embasar nosso estudo e nessa seção falamos brevemente de alguns dele, mas buscamos nos concentrar nos autores que mais contribuíram no delineamento de nossa investigação. No caso, foram pesquisas que discutiram a importância em se planejar momentos de discussões durante as atividades para se trabalhar com os alunos as dificuldades. Como, por exemplo, no caso dos conceitos da matemática básica, como as manipulações algébricas. Esses conceitos aparecem nas situações de limite de função e, apesar de não fazerem parte da construção desse conceito, essas dificuldades podem fazer com que os alunos não avancem no decorrer das atividades.

Com relação ainda aos conceitos vistos na educação básica, temos os que são envolvidos na construção do conceito de limite e que ainda estão em processo de conceitualização, como o de função e números reais. São pontos que consideramos importantes, bem como, a necessidade de utilizar as diversas formas de representações desses conceitos, tanto nos enunciados das situações, como na maneira com a qual os alunos resolvem as atividades. Vimos que cada representação, ao mesmo tempo em que pode trazer dificuldades, ela também permite a compreensão de outros aspectos do conceito que está sendo apresentado, ou mesmo que ainda está em processo de conceitualização.

Essa variedade de representação de um conceito também é pertinente para lidar com as dificuldades relacionadas ao conceito de limite de funções. Identificamos várias expressões, algumas que são utilizadas no cotidiano, que acabam comprometendo a compreensão desse

conceito. Além do fato de que muitos desses conceitos envolvidos na construção do conceito de limite de funções foram problemáticos ao longo do seu desenvolvimento, sendo inclusive considerados obstáculos epistemológicos pelos pesquisadores.

Todos esses pontos foram importantes na elaboração dos nossos instrumentos de pesquisa, no decorrer das próximas seções, sempre que necessário, iremos nos reportar novamente a eles e, assim, teceremos mais considerações sobre essas pesquisas e em como elas contribuíram na tessitura desta tese. Em seguida, apresentamos o último tópico desta seção, em que buscando responder a questão apresentada inicialmente: *O que são noção intuitiva de limite e definição formal de limite?*

### 2.3 Apresentação da noção intuitiva e da definição formal

Na apresentação do conceito de limite de funções encontramos usualmente as expressões: noções intuitivas e definição formal. Nesse pequeno percurso que fizemos no desenvolvimento desse conceito, vimos que a sua construção envolveu diversos conceitos e noções que por muito tempo não haviam sido definidas formalmente, como a conhecemos. Entretanto, os matemáticos a utilizavam e compreendiam seu “funcionamento” mesmo não compreendendo, ou explicitando, totalmente os elementos que estavam lidando, aqui nos referimos principalmente ao conceito de infinito, ao infinitamente pequeno e infinitamente grande.

Encontramos certo consenso em relação à ordem de apresentação do conceito de limite de função, em que, primeiramente, é trabalhada a noção intuitiva até se chegar à definição formal, que é o objetivo de aprendizagem desse conceito. Para assim, utilizar essas ideias formais para provar propriedades e os outros conceitos relacionados. Vejamos como os livros didáticos trabalham essa ideia de noção intuitiva do limite:

**Definição:** Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

E dizemos “o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é igual a  $L$ ” se pudermos tornar os valores de  $f(x)$  arbitrariamente próximos de  $L$  (tão próximos de  $L$  quanto quisermos), tornando  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , mas não igual a  $a$ . (STEWART, 2003, p. 91).

Uma definição informal do conceito de limite:

Se  $f(x)$  se torna arbitrariamente próxima de um único número  $L$  à medida que  $x$  se aproxima de  $c$  pela direita e pela esquerda, diz-se que o **limite** de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $c$  é  $L$ , e nesse caso escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

(LARSON et al, 1998, p. 58).

O primeiro autor faz referência à apresentação como uma definição, mas em seguida argumenta que será apresentada uma definição mais precisa posteriormente. Enquanto o outro autor procura apresentar inicialmente já especificando que é uma definição informal do conceito. Nesse livro Larson (1998) faz o estudo de todos os casos de limites, juntamente com as suas propriedades e aplicações e, somente no final do capítulo ele retoma essa definição informal e apresenta o que ele chama de: “[...] definição formal de limite usando  $\varepsilon$  e  $\delta$ .” (LARSON et al, 1998, p. 92). Encontramos livros que não fazem uma apresentação dessa noção intuitiva explicitamente, como esses autores fizeram, preferem apresentar alguns exemplos particulares e ir discutindo a ideia de encontrar o limite intuitivamente. Somente denominam de definição a que utiliza os quantificadores, como a que esses autores chamaram: de definição mais precisa e de definição formal; vejamos como eles apresentam:

Definição:

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto que contém o número  $a$ , exceto possivelmente no próprio  $a$ . Então dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo número  $\varepsilon > 0$  há um número correspondente  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

(STEWART, 2003, p. 113).

Definição de limite:

Seja  $f$  uma função definida em um intervalo contendo  $c$  (exceto, possivelmente, em  $c$ ) e seja  $L$  um número real. A notação

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Significa que, para cada  $\varepsilon > 0$  dado, existe um  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

(LARSON et al, 1998, p. 93).

As duas definições utilizam as ideias de Weierstrass com os quantificadores  $\varepsilon$  e  $\delta$ , escritas em termos das inequações e módulos, mas nestas definições a variável  $x$  não pode assumir o valor de  $x_0$ , pois não se trata da definição de continuidade que apresentamos na seção 2.1. Olhando essas noções e definições utilizadas na introdução do conceito de limite e refletindo sua apresentação no ensino, podemos questionar quais elementos elas trazem para compreensão do conceito? Como elas se relacionam? Entretanto, uma questão vem antes dessas, o que é uma definição? Não é difícil encontrar professores que ainda acreditam que basta apresentar a definição de um conceito com vários exemplos para que o aluno consiga utilizá-lo quando necessário.

No ensino de matemática, é comum se iniciar a introdução de um novo conceito apresentando sua definição, suas propriedades e trazer alguns exemplos de como é possível aplicar essa definição, juntamente com suas propriedades. Mesmo com as novas discussões sobre o ensino, em que podemos encontrar algumas variações, como: iniciar com uma

situação problema e, a partir dela, se chegar à definição; ou utilizar algum recurso tecnológico, entre outras. Poderíamos citar várias outras indicações de trabalho, contudo, o objetivo não muda, gostaríamos que o aluno compreendesse o novo conceito e soubesse utilizar a sua definição e suas propriedades.

Voltando à questão, o que é uma definição? Vimos que após Cauchy e Weierstrass apresentarem suas definições sobre a noção de limite houve certo aceitação de algumas noções que pareciam incompreensíveis para os estudiosos. Vejamos no quadro (1) como podemos relacionar os elementos que aparecem nessas definições, que são consideradas próximas, do ponto de vista matemático, olhando as duas definições de limite propostas por Stewart (2003). Bem como, alguns conceitos e relações envolvidos em cada uma delas.

Quadro 1 – Definições propostas no livro de Stewart (2003)

| Definição intuitiva                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Definição formal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Escrevemos:</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>E dizemos “o limite de <math>f(x)</math>, quando <math>x</math> tende a <math>a</math>, é igual a <math>L</math>” se pudermos tornar os valores de <math>f(x)</math> arbitrariamente próximos de <math>L</math> (tão próximos de <math>L</math> quanto quisermos), tornando <math>x</math> suficientemente próximo de <math>a</math>, mas não igual a <math>a</math>.</p> | <p>Seja <math>f</math> uma função definida em um intervalo aberto que contém o número <math>a</math>, exceto possivelmente no próprio <math>a</math>. Então dizemos que o limite de <math>f(x)</math> quando <math>x</math> tende a <math>a</math> é <math>L</math>, e escrevemos</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ <p>se para todo número <math>\varepsilon &gt; 0</math> há um número correspondente <math>\delta &gt; 0</math> tal que</p> $ f(x) - L  < \varepsilon \text{ sempre que } 0 <  x - a  < \delta$ |
| Relações                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p>“Se pudermos tornar”</p> <p>Os valores de <math>f(x)</math> arbitrariamente próximos de <math>L</math> (tão próximos de <math>L</math> quanto quisermos).</p> <p>Tornando <math>x</math> suficientemente próximo de <math>a</math>, mas não igual a <math>a</math>.</p>                                                                                                                                                        | <p>Todo número <math>\varepsilon &gt; 0</math> há [...] tal que <math>\delta &gt; 0</math></p> $ f(x) - L  < \varepsilon$ $0 <  x - a  < \delta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Elementos do campo conceitual                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <p>Funções</p> <p>Densidade dos números reais</p> <p>Aproximação de valores da função de um ponto do contradomínio.</p> <p>Aproximações de um ponto, que não pertence ao domínio</p>                                                                                                                                                                                                                                              | <p>Funções</p> <p>Inequações</p> <p>Módulos</p> <p>Intervalos de raios definidos pelos quantificadores <math>\varepsilon</math> e <math>\delta</math></p> <p>Relação de dependência entre esses intervalos dados (em termos de <math>\varepsilon</math> e <math>\delta</math>)</p>                                                                                                                                                                                                                                    |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Observando os conceitos e relações que aparecem nas duas definições, vemos que aparecem noções de difícil compreensão para os alunos iniciantes. Por exemplo, na definição chamada de intuitiva temos a expressão “ $f(x)$  arbitrariamente próximos de  $L$ ”, pode ter

significado muito diferente para o aluno (CORNU, 1983; Tall e Vinner, 1981). Enquanto o ensino se refere a um intervalo do conjunto dos números reais, em que, por ser denso permite que nos aproximemos “tão próximos de  $L$  quanto quisermos”. Para o estudante, essa ideia de tão próximo de  $L$  pode ser, por exemplo, tomar valores, como:  $L - 1$ , ou  $L + 1$ , talvez isso seja o mais próximo que ele consiga pensar inicialmente. Sabemos que essas relações dos números reais algumas vezes só são vivenciadas pelos alunos nas situações com o conceito de limite (ARTIGUE, 1995). Analogamente para o caso em que “Tornando  $x$  suficientemente próximo de  $a$ ”. O mais preocupante é que esses exemplos são com a noção considerada como a “mais fácil” de ser compreendida pelos estudantes. No caso da definição formal, isso se agrava, pois essas noções estão implícitas nas expressões dadas, que geralmente são incompreensíveis para os estudantes. Essas expressões envolvem conceitos de matemática básica que os estudantes, em geral, têm dificuldades, agravadas pelo fato de que esses conceitos aparecem nessas expressões de forma extremamente diferente do que eles viram nos anos anteriores. Misturam-se: módulos, inequações, funções e os quantificadores  $\epsilon$  e  $\delta$  que são números, mas que não são para serem operados na função, e sim utilizados para definir o raio das aproximações.

Essas definições têm diferenças, tanto com relação aos conceitos matemáticos envolvidos, como também nas representações utilizadas. Vimos na seção anterior que os alunos têm dificuldades em compreender tanto a noção intuitiva, como a definição formal de limite; e que não conseguem ver relação entre essas duas apresentações. Todavia, são noções semelhantes a essas que eles precisam lidar durante o processo de aprendizagem do conceito de limite. A ideia de que a definição deve conter as características do conceito não é uma tarefa simples, os matemáticos conseguiram chegar ao que eles consideram um encadeamento lógico e formal da definição de limite de funções. Entretanto, essa apresentação envolve diversos outros conceitos que, nesse contexto, são utilizados de modo diferente ao que os estudantes viram nos anos anteriores.

Em nosso estudo utilizamos essa noção intuitiva de limite de função, no caso as definições que utilizam o que Cornu (1983) chama de noção de limite dinâmica, que envolve expressões como: tende a, se aproxima de, suficientemente grande, suficientemente próximo, entre outras. Mas, também, tivemos momentos em que a noção de limite estática foi utilizada, no caso a definição de limite de funções com os quantificadores épsilon e delta, em termos de inequações, ou de inequações e módulos.

Essas escolhas se deram pelo fato de que nosso estudo foi realizado com alunos que estavam lidando com as atividades para introdução do conceito de limite de funções e, como

vimos, esse conceito é trabalhado inicialmente com a definição intuitiva para, em seguida, ser realizado seu estudo pela definição formal. Nessa seção observamos como foi complexo o desenvolvimento do conceito de limite de funções, para se chegar ao que atualmente chamamos de definição formal, ou mesmo a intuitiva. Como também, o de outros conceitos que estão envolvidos nessas definições. As pesquisas apontam diversas dificuldades na compreensão desse conceito, e de outros conceitos que estão diretamente ligados à sua construção, além dos que são utilizados nas situações que são trabalhadas na introdução do limite de função. No quadro 2 apresentamos uma síntese das escolhas realizadas em função dessas discussões realizadas ao longo dessa seção e que nortearam nossa pesquisa.

Quadro 2 – Síntese dos aspectos discutidos na seção 2

| Limite de funções                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p data-bbox="518 338 1131 371" style="text-align: center;"><b>Indicações de pesquisas e/ou documentos oficiais</b></p> <p data-bbox="240 383 1410 450">Utilizar várias representações nas atividades: algébricas, gráficas, numérica e linguagem natural (oral e escrita);</p> <p data-bbox="240 461 1139 495">Trabalhar com aspecto dinâmico e estático da definição de limite de função;</p> <p data-bbox="587 506 1062 539" style="text-align: center;"><b>Dificuldades apontadas nas pesquisas</b></p> <p data-bbox="240 551 488 584"><b>Matemática básica:</b></p> <p data-bbox="240 595 1410 663">Manipulação algébrica de polinômios, como a fatoração, a multiplicação, simplificação e a redução de termos;</p> <p data-bbox="240 674 1390 741"><b>Relacionadas aos números reais, as funções, as noções de infinito e com a noção de limite de função:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="292 752 1410 831">☞ Aproximação de um número seja do conjunto de números do domínio ou da imagem de uma função, a ideia de poder se aproximar infinitamente;</li> <li data-bbox="292 842 1410 920">☞ Representar conjunto de números na notação de intervalos abertos e/ou fechados, e na forma de inequações;</li> <li data-bbox="292 931 1370 976">☞ A ideia de que em um intervalo, aberto e/ou fechado, existem infinitos números;</li> <li data-bbox="292 987 1002 1032">☞ Relacionar a representação algébrica com a gráfica;</li> <li data-bbox="292 1043 1410 1122">☞ Relacionar um conjunto de elementos da imagem, com o seu respectivo conjunto de pontos do domínio;</li> <li data-bbox="292 1133 1410 1211">☞ A noção do valor de uma função tender a infinito, quando tomamos valores próximos de um ponto do domínio;</li> <li data-bbox="292 1223 1230 1267">☞ Estudar o comportamento das funções para encontrar os limites, seja:             <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="387 1279 983 1323">☞ Por manipulação algébrica das expressões;</li> <li data-bbox="387 1335 1142 1379">☞ Calculando pontos próximos do ponto de investigação;</li> <li data-bbox="387 1391 971 1435">☞ Pela observação da representação gráfica;</li> <li data-bbox="387 1447 1062 1491">☞ Calculando pontos que estão tendendo a infinito;</li> <li data-bbox="387 1503 967 1547">☞ Pela construção da representação gráfica;</li> <li data-bbox="387 1559 1410 1637">☞ Calculando pontos da função que estão ficando cada vez maiores, ou menores, que estão tendendo a infinito.</li> </ul> </li> <li data-bbox="292 1648 1102 1693">☞ As expressões que aparecem no estudo do limite de função:             <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="387 1704 1410 1771">☞ “tende a”, “infinitamente pequeno”, “infinitamente grande”, “tão próximo quanto se queira”, “suficientemente grande”, “suficientemente pequeno”.</li> </ul> </li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Todos esses trabalhos contribuíram tanto no delineamento de nossa pesquisa, como também nas escolhas que foram sendo realizadas para construção desta tese. Nosso referencial teórico principal, por exemplo, foi escolhido por considerar toda essa diversidade de conceitos, de dificuldades, de representações que citamos e que estão envolvidas nas situações

que o aluno precisa lidar no estudo introdutório do limite de funções. No caso, referimo-nos a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990) que apresentamos na próxima seção, juntamente com algumas noções de Tall e Vinner (1981) utilizadas em nossa pesquisa.

### 3. A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE COM O REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1986, 1990, 2015, 2016) é a nossa principal base teórica. Esse teórico propõe estudar a formação e a construção dos conhecimentos pelo sujeito, por meio do estudo de filiações e de rupturas encontradas neste processo. Ele parte do pressuposto que essa investigação deve ser realizada por meio das situações que esse sujeito precisa lidar, ou melhor, das atividades utilizadas pelo ensino na apresentação de um conceito.

Tall e Vinner (1981) também se interessaram em compreender o processo de construção de conceitos, eles inclusive realizaram estudos sobre o conceito de limite. Assim como Vergnaud, eles consideram a necessidade de se investigar o sujeito em ação, são as situações que precisam ser resolvidas que permitirá ao pesquisador identificar as imagens que o aluno está associando ao conceito que está sendo trabalhado.

Essas teorias têm como diferencial a realização de estudos considerando as especificidades dos conceitos matemáticos. A seguir, expomos os elementos teóricos dessas teorias que foram utilizados em nosso estudo, buscando exemplificá-los com nosso objeto de pesquisa. Primeiramente, apresentamos a teoria dos campos conceituais e, em seguida, as noções propostas por Tall e Vinner (1981).

#### 3.1 A teoria dos campos conceituais

Com base nessa teoria, não é possível aceitar que um conceito matemático se limite a sua definição, principalmente quando estamos interessados na sua aprendizagem. A compreensão de um conceito envolve vários outros elementos que estão relacionados a esse conceito. Em função disso, Vergnaud (1990) ao falar de um conceito, utiliza um tripé composto por três conjuntos:

$$C = (S, I, \mathcal{F})$$

S= O conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência)

I= O conjunto de invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (O significado)

$\mathcal{F}$  = O conjunto de formas linguísticas ou não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os processos de tratamento (O significante)

(VERGNAUD, 1990, p. 145, tradução nossa).

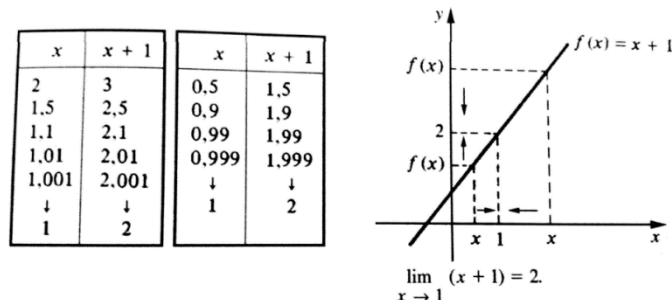
Desse modo, para Vergnaud um conceito é composto pelas situações em que ele aparece, pelos conhecimentos matemáticos utilizados para lidar com essas situações, bem como, pelas representações linguísticas (ou não) mobilizadas, tanto para representar as situações, como também os conhecimentos matemáticos que serão utilizados para resolvê-las.

Neste aspecto, Vergnaud considera que um conceito não é construído isoladamente e que sua aprendizagem envolve diversos outros conceitos de maneira imbricada. Trata-se de um processo que pode levar muito tempo, que demanda de idas e vindas, de reinvestimento deste conceito por meio de uma variedade de situações, envolvendo outros aspectos do conceito e, que o estudante irá encontrar ao longo de suas vivências. Desse modo, cada situação<sup>11</sup> que esse aluno irá se defrontar demandará conceitos variados, o que é fundamental para que seja possível abarcar os diferentes aspectos envolvidos na especificidade de um conceito. É diante disso que Vergnaud fala da importância de investigarmos o processo de aprendizagem de um conceito por meio do estudo do seu campo conceitual.

É ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos ligados entre si. Com isto, quero dizer que o significado de um conceito não vem de uma única situação, mas de uma variedade de situações e que, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada apenas com um conceito, mas sim com vários conceitos, formando sistemas. (VERGNAUD, 2009, p.29, tradução nossa).

Nas escolhas das situações para o estudo de um conceito deve-se estar atento a essas especificidades, aos conceitos que serão necessários para tratar a situação. Por exemplo, a apresentação do conceito intuitivo de limite em alguns livros didáticos do Brasil é realizada por meio de uma situação em que se pede para calcular o  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$  e é proposta a resolução conforme figura 1:

Figura 1 – Exemplo utilizando a ideia intuitiva



Fonte: Livro de Cálculo I volume I (GUIDORIZZI, 2013, p. 55).

Nesse exemplo, temos uma atividade para introdução da noção intuitiva de limite em que podemos listar diversos conceitos que aparecem envolvidos. Os estudantes precisam deles

<sup>11</sup> A noção de situação para Vergnaud (1990) não tem o mesmo significado da situação proposta por Brousseau (2008).

para compreender o novo conceito que está sendo apresentado, como: função de primeiro grau e sua representação na sua forma analítica e gráfica, valores da função representados em uma tabela e também destacados no plano cartesiano, entre outros. Outra atividade próxima da apresentada poderia ser: o  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ , em que poderíamos ter a mesma tabela de valores para os pontos da função, além disso, a representação gráfica também seria a mesma com exceção de que esta função não seria contínua em  $x = 1$ . Entretanto, esta atividade irá demandar outros conceitos, além dos que foram citados para o estudo da função da Figura 3.1, como: fatoração e simplificação de expressões algébricas, representação gráfica de uma função não contínua, funções com o mesmo comportamento, com exceção de um ponto do domínio, entre outros.

Temos nesses exemplos duas atividades para se explorar a noção intuitiva de limite. Se questionarmos um professor experiente na disciplina de Cálculo I, ele provavelmente dirá que é preciso investir em muitas outras atividades para poder tratar deste conceito. Neste aspecto, Vergnaud (1990) enfatiza que realmente é preciso uma grande variedade de atividades para explorar os diversos aspectos de um conceito, ele denomina de situações ao conjunto dessas atividades que permitem dar sentido ao conceito.

Essa diversidade de situações é fundamental para abarcar todas as especificidades de um conceito, mas elas, geralmente, não são trabalhadas em um só momento do ensino, os estudantes poderão lidar com elas também em outros anos e, em outras disciplinas. É um processo de reinvestimento que deve ser realizado ao longo do tempo. Além disso, cada situação envolve uma variedade de outros conceitos que precisam ser considerados se estamos interessados na aprendizagem de um conceito pelo aluno.

Podemos apresentar diversas outras atividades, como os exemplos citados, que o estudante terá de lidar ao longo dos seus estudos para podermos falar da aprendizagem do conceito de limite. Para Vergnaud (1990), é difícil delimitar um campo conceitual de um conceito, como dissemos, ele envolve uma diversidade de outros conceitos e de situações que os estudantes precisarão lidar ao longo da vida. Contudo, podemos pensar em propor algumas delimitações para se investigar como, por exemplo, em nossa pesquisa para a introdução do conceito de limite, analisando o que é proposto para seu estudo inicial: nas diretrizes curriculares, nas ementas das disciplinas envolvidas com a apresentação do conceito, pelas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de limite e também pelos livros didáticos utilizados. Essa delimitação é importante e necessária para podermos compreender as relações que os alunos poderão estabelecer com as situações que terão de enfrentar considerando o arcabouço

de conhecimentos que eles “carregam” em função de todas as situações que eles já experimentaram.

Neste aspecto, o conceito de situação para Vergnaud é toda atividade que demanda a utilização de conhecimentos racionais. É como uma tarefa, na qual os conhecimentos do sujeito podem ser operatórios ou não para a tarefa dada. Esse autor diferencia dois tipos de situações: uma em que o sujeito já dispõe de conhecimentos disponíveis para resolver. E outra em que ele não dispõe de todas as competências imediatas para lidar com a atividade. Essa última situação, demanda de um tempo de reflexão, reconhecimento de algumas similaridades com outras atividades já vivenciadas e possivelmente uma reorganização do pensamento inicial, bem como de toda escolha que será feita ao longo da ação de tentativa de resolução.

A introdução do conceito de limite se encaixa no segundo caso dessas situações. Exatamente essa organização da ação do sujeito ao lidar com as atividades introdutórias de limite que buscamos elementos para identificá-las nos caminhos para construção dessa noção. Neste aspecto, o conceito de esquema<sup>12</sup> busca modelar essas escolhas em termos de ações tanto físicas como de operações mentais que acreditamos pertinentes para nossa investigação.

Um esquema para Vergnaud (1990, 2016) é uma organização invariante da ação do sujeito destinada a um conjunto de situações, composto por: um objetivo, ou vários; regras de ação, tomada de informação e controle; invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação e possibilidades de inferência. Esses elementos guiam e orientam a ação do sujeito agindo na situação dada.

Esses quatros componentes são absolutamente essenciais. A intencionalidade, a generalidade e a conceitualização estão todos obrigatoriamente na ação, mesmo que totalmente implícitas ou mesmo inconscientes. Quanto às inferências, elas são extremamente necessárias: de fato, como o esquema não é um estereótipo, ele sempre chama “cálculos inferenciais” em situação. O que o cientista faz de forma mais explícita e completa pelo raciocínio, o pensamento em ato o faz espontaneamente, de maneira implícita e incompleta na maioria das vezes, mas com certo sucesso. (VERGNAUD, 2002, p. 114, tradução nossa).

Pode-se dizer que todo algoritmo é um esquema, mas nem todo esquema é um algoritmo. Eles são próximos, “mas, ao contrário dos algoritmos, os esquemas não conduzem necessariamente, com um número finito de passos, a uma solução do problema proposto, se houver uma, ou para a demonstração de que não há solução” (VERGNAUD, 2016, p.3). Contudo, é somente por meio de seus esquemas que o aluno pode lidar com as situações que ele irá enfrentar. Para situações novas esses esquemas, provavelmente não serão efetivos, mas

---

<sup>12</sup> Estamos traduzimos o termo *schèmes* de Vergnaud como esquema, em francês a tradução de esquema é *schéma*. Alguns autores brasileiros utilizam outras palavras, como, por exemplo, o Grupo de Estudos em Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (GEEMPA) utiliza a palavra *eskema*.

eles serão o ponto de partida para o aluno lidar com a nova situação, que talvez tenha relação com um novo conceito, ou não, podendo ser somente um novo aspecto de um conceito já estudado e que não foi vivenciado em todas as suas possibilidades.

Ao resolver uma nova situação, o aluno busca encontrar similaridades com outras situações já vivenciadas e por meio desse reconhecimento ele irá, durante a ação, mobilizar esquemas que foram efetivos anteriormente. Com isso, ele identifica objetivo, ou alguns subobjetivos que precisam ser atingidos. Qual a intenção da atividade em questão, a necessidade e/ou expectativa de se resolver? As regras em ação e as antecipações irão gerar uma série de ações para atingir um determinado objetivo. Para Vergnaud:

A atividade não é apenas ação, mas também a identificação dos objetivos e subobjetivos, assim como **de tomada de informações e controles**, gerados durante o desenvolvimento da atividade. É estranho que a tomada de informação tenha sido tão mal teorizada, uma vez que é um dos pontos essenciais das atividades complexas: na condução de veículos e máquinas, na leitura, etc.. Como são necessárias categorias para coletar informações, e para selecionar o que é pertinente, os conceitos em ação estão no centro da organização dos esquemas; e os teoremas em ação são os meios de inferir, na maioria das vezes de maneira totalmente implícita, os objetivos e as regras apropriados. É necessário, então, possibilidades de **inferência** imediatamente: elas permitem a adaptação da atividade à situação atual. (VERGNAUD, 2007, p. 292, tradução e grifo nosso).

Esses elementos podem estar presentes durante toda a ação do sujeito, precedendo e acompanhando a resolução da atividade. Essas ações farão com que o sujeito vá selecionando o que parece pertinente para lidar com a situação matemática, e que são os conhecimentos matemáticos necessários para resolver a atividade, mobilizados durante a ação. São os invariantes operatórios compostos por conceitos em ação e teoremas em ação, eles fazem parte dos esquemas, e não são verdadeiros conceitos e teoremas matemáticos, são construções, e na maioria das vezes são escolhas inconscientes.

Os conceitos em ação são escolhas que podem ser relevantes ou não para lidar com a situação, enquanto que os teoremas em ação são proposições, ligadas aos conceitos, mas que podem ser verdadeiras (ou não) para a situação. Para Vergnaud a principal função dos invariantes operatórios é colher e selecionar as informações que são relevantes para resolver a situação, bem como inferir as possíveis implicações úteis dessas escolhas, permitindo ao aluno acessar e controlar as informações durante toda ação.

Toda atividade é constantemente gerida por meio de ações que vão se adaptando conforme as mudanças realizadas no percurso de resolução da situação, pelo aluno que faz inferências durante a ação. Ao mobilizar um esquema para resolver a situação o aluno pode perceber que os invariantes operatórios que estão sendo utilizados não estão sendo pertinentes, isso ocorre por meio da tomada de informação, durante a ação que está sendo

realizada. As inferências surgem na ação do estudante, como quando ele percebe que utilizou um teorema em ação que foi inadequado para lidar com a situação (VERGNAUD, 2007).

Esse reconhecimento pode ser por meio das representações que ele está utilizando ao lidar com a situação. Por exemplo, diante da atividade de encontrar o  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  o aluno pode substituir diretamente o valor  $x = 1$  na função dada, obtendo  $\frac{0}{0}$ . Contudo, se ele sabe que em uma fração o denominador não pode ser zero, provavelmente ele irá inferir que o conhecimento que ele utilizou não está “funcionando” para essa situação. Podemos modelar esse conhecimento como um teorema em ação (TA): se preciso encontrar o limite de uma função, então preciso substituir o valor do  $x$  na função dada para encontrar o limite. Esse (TA) não é indicado para todos os casos de limite de função, como vimos no exemplo citado, pois ele não pode ser aplicado diretamente. Antes o aluno precisará fazer uma simplificação para só então, depois, poder utilizar esse (TA).

O esquema pode ser aparentado, por exemplo, uma situação bastante trabalhada é para encontrar as raízes no estudo das equações, como também de funções. Geralmente os estudantes vêm com esquemas já estabilizados para lidar com esses casos e, ao lidarem com novas situações como no caso do estudo de limites de funções, em que ainda não dispõem de todas as competências necessárias, eles buscam inicialmente mobilizar o esquema utilizado e que foi efetivo para uma situação anterior. Afinal, o aluno reconhece certa familiaridade nesta nova situação. Assim, ele pode pensar que se trata de uma atividade semelhante e igualar à expressão a zero, tentando obter as raízes. Porém, por meio da tomada de informações e das inferências sobre as ações realizadas na situação, ele percebe que suas escolhas foram ineficazes, fazendo com que o estudante tenha que reorganizar seu esquema inicial e precise mobilizar outros invariantes operatórios.

Neste aspecto, podemos nos referenciar, e o próprio Vergnaud o faz, à Piaget (1996) quando discute o processo de assimilação e acomodação, proporcionado por uma nova situação, em que o sujeito não dispõe de esquemas eficazes para tratá-la e é preciso readequar seus esquemas, ou criar novos para trabalhar com esse novo conhecimento, ou um novo aspecto de um conceito já visto. Essa experiência com o “novo” gera um conflito cognitivo que necessitará de uma nova reorganização cognitiva, seja para readaptar seu esquema, ou até mesmo abandoná-lo totalmente e, assim, iniciar a construção de outro esquema que pode ser algo novo para o sujeito.

Por exemplo, caso um aluno precise resolver o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2)$ , suponhamos que ele já tenha um esquema estabilizado para lidar com esse limite. Para resolver,

primeiramente ele pode identificar o objetivo da questão, poderia ser encontrar o limite, a tomada de informação, que seria o momento que o aluno precisa refletir se é possível substituir o valor do  $x=1$  na expressão algébrica da função. Faz antecipações do que irá acontecer se ele fizer essa ação, pensa e toma a decisão de agir. Ele age sobre a situação e observa o resultado, mas em todo momento seja antes, durante ou após a sua ação, são realizadas inferências, tomada de informação e controle. O aluno busca, em sua memória, semelhanças com o resultado inferido e/ou encontrado naquele momento com outros em que obteve êxito. Essas ações são todas automatizadas e inconscientes por parte desse aluno e quanto mais estável o esquema mais rápido será esse processo.

Se esse mesmo aluno precisar lidar pela primeira vez com o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ , provavelmente ele vai mobilizar esse mesmo esquema já efetivo para o primeiro exemplo. Contudo, ao identificar o objetivo da questão, como sendo o mesmo da primeira, faz a substituição e se depara com um problema, o zero no denominador. O objetivo que era encontrar o limite não foi alcançado, ele precisará refletir sobre a situação, encontrar similaridade, por exemplo, na expressão algébrica da função do limite com outra de uma situação vivenciada na simplificação de expressões algébricas. Desse modo, elencar um subobjetivo como simplificar a expressão algébrica da função antes de fazer a substituição na função. Em todo momento ele estará tomando decisões em função das informações que ele obtém, seja pensando e/ou agindo sobre a situação. Conseguindo resolver o objetivo do seu esquema inicial, ele pode após essa situação, ou várias como está, ampliar o seu esquema inicial já adaptando para atividades semelhantes a essa situação.

Esses esquemas não são pertinentes para uma situação em que o aluno precise, por exemplo, verificar se  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2) = -1$  satisfaz a definição utilizando o épsilon e delta. São esquemas que não trazem aspectos similares, com essa atividade, é que serão necessários para lidar com a nova situação, assim, ele precisará criar outro esquema. O objetivo já não é encontrar o limite, afinal ele faz parte da nova expressão a se resolver. Muitos conflitos cognitivos podem surgir neste momento com esse aluno. Como ele irá lidar com esse desequilíbrio cognitivo? Quais situações vivenciadas têm familiaridade com essa nova? Quais invariantes operatórios estão disponíveis para lidar com essa nova situação? Quais filiações e rupturas serão necessárias para lidar com as situações?

Para compreender o processo de aprendizagem, decidimos investigar como os esquemas vão sendo construídos e/ou readaptados. Vimos que ele é composto por: um objetivo ou vários; regras de ação, de tomada de informação e de controle; invariantes

operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação; e possibilidades de inferência. Segundo Vergnaud (2016), essas quatro propriedades permitem tanto analisar, como também estudar diferenças nos esquemas. Diante disso, decidimos trabalhar com duas delas em nossa pesquisa e escolhemos nos concentrar no estudo das regras em ação e dos teoremas em ação. A primeira é a propriedade que gera os esquemas e é concernente ao “[...] desenvolvimento temporal da atividade (ações e coleta de informação) [...]”, enquanto que teorema em ação é um dos elementos relativos “[...] às conceituações (frequentemente implícitas, eventualmente explícitas) que organizam esse desenvolvimento [...]” (VERGNAUD, 2016, p.3)

Esses elementos teóricos possibilitam estudar o processo de conceitualização, ou a construção do conceito, por meio da “atividade em situação” (VERGNAUD, 2015, p.21). As situações para introdução do conceito de limite de funções envolvem uma diversidade de conceitos, mas também vimos que na seção 2 existem diversas definições possíveis de limite, algumas mais formais do que outras, juntamente com suas respectivas representações. Essas definições vão sendo construídas em estreita relação com as experiências do estudante, num processo dinâmico. Um estudante pode ter uma definição de limite bem memorizada, mas não ter nenhum esquema efetivo para lidar com atividades relacionadas com essa definição. Entretanto, ele pode ter esquemas estáveis para enfrentar vários casos de limite sem ter memorizado a definição.

Questionamos, então: como poderíamos estudar esse processo de conceitualização do conceito de limite de função, e, ao mesmo tempo, considerar nesse processo a construção da definição desse conceito apresentada pelo ensino? Encontramos em Tall e Vinner (1981), algumas noções que consideramos pertinentes e que apresentamos em seguida.

### **3.2 As noções de conceito imagem e conceito definição**

Para Vinner (2002) a apresentação da definição, seja ela de modo intuitivo, ou mais formal, acompanhada de diversos exemplos, não é suficiente para abarcar todos os aspectos envolvidos na compreensão de um conceito. Apesar disso, esse autor argumenta que essa vem sendo a prática de sala de aula e, também a maneira, como os conceitos matemáticos são apresentados por muitos livros didáticos. Dificilmente um professor de matemática discordaria desse pesquisador, tanto por sua experiência como estudante, mas também como professor de matemática. Para esse pesquisador (2002), essa apresentação dos conceitos matemáticos é baseada parcialmente nos pressupostos de que:

- ✓ Os conceitos são adquiridos principalmente por meio de suas definições;

- ✓ Os estudantes usarão definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessário do ponto de vista matemático;
- ✓ As definições devem ser mínimas, ou seja, elas não devem conter partes que podem ser inferidas matematicamente a partir de outras partes da definição;
- ✓ É desejável que as definições sejam elegantes;
- ✓ As definições são arbitrárias.

Essas escolhas podem fazer com que a apresentação dos conceitos matemáticos seja extremamente complicada para os alunos. Embora, para alguns professores, esta abordagem clássica seja um modo mais organizado e claro de introduzir um conceito, os processos cognitivos não necessariamente seguem esta lógica da matemática. As situações e todo arcabouço de experiências do aluno que influenciam tanto a formação dos conceitos matemáticos como também as relações que serão estabelecidas com esses conceitos (VINNER, 2002). Um aluno após algum tempo de estudo sobre limite de funções, pode ter esquemas estáveis para resolver atividades de limites de funções racionais e mesmo assim não saber relacionar, ou mesmo falar sobre uma definição intuitivamente, ou menos formal sobre limite. Eles não estão familiarizados com situações envolvendo a definição, certamente pelo fato de que tanto os livros didáticos quanto as abordagens nas aulas não oportunizam essas situações, em geral as definições são apresentadas como prontas.

De fato, para Ouvrier-Buffet (2011) nós professores não ensinamos nossos alunos a definir. Uma situação importante de se trabalhar com eles seria propor para que construíssem definições, já que sabemos que a apresentação de uma definição, seja intuitiva ou formal, é insuficiente para que o aluno consiga mobilizar os invariantes operatórios necessários para situações que envolvam esses conceitos. Entretanto, se a definição faz parte do conjunto de situações que dá sentido ao conceito (VERGNAUD, 1990), como no caso do limite de função, ela precisa ser trabalhada nas atividades com os alunos.

Neste sentido, Tall e Vinner (1981) argumentam que muitos dos conceitos que utilizamos quotidianamente não são formalmente definidos e que são utilizados pelo seu reconhecimento de experiências anteriores. Podemos nos reportar a Vergnaud e dizer que diante das situações vivenciadas em que ao reconhecer semelhanças, com as que foram enfrentadas anteriormente, o aluno resolve estas situações utilizando os esquemas que funcionaram. Neste ponto, vamos acrescentar a distinção proposta por Tall e Vinner (1981) quando utilizam os termos conceito imagem e conceito definição.

Para esses autores o conceito imagem (CI) é composto pela estrutura cognitiva relacionada com o conceito. São todas as imagens mentais e propriedades relacionadas ao

processo de aprendizagem do conceito e que vão se estruturando, mas sempre pelas situações que o estudante vai se defrontando ao longo do tempo. Elas podem se desenvolver como um conjunto de forma coerente, ou não, pois algumas imagens mentais podem ser conflitantes com algum aspecto do conceito, mas se elas forem utilizadas em contextos nos quais elas funcionem bem, o aluno não verá problema nenhum. “Uma criança não precisa ver nenhum conflito nos diferentes métodos, ela simplesmente utiliza o método que ela considera apropriado em cada ocasião.” (TALL e VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa). Em razão disso, reiteramos a importância em se trabalhar com uma ampla variedade de situações envolvendo um dado conceito ao longo do ensino. Desse modo, o aluno poderá tanto ampliar suas imagens mentais como também vivenciar situações que possibilitem que ele utilize possíveis imagens conceituais já enraizadas, mas que são conflitantes, ou entre elas, ou com a definição formal do conceito caso ela tenha sido apresentada. As imagens conceituais não são formadas necessariamente o tempo todo.

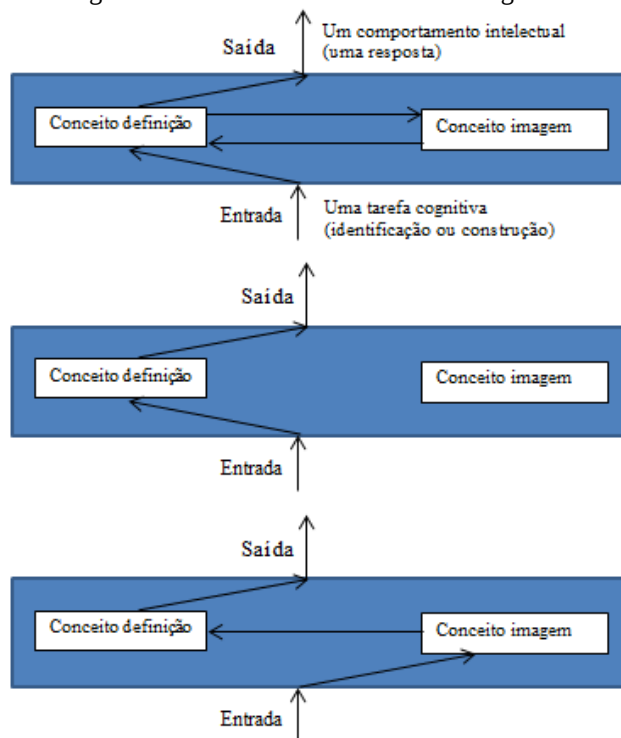
O cérebro não funciona assim. Sensores de entrada ativam certos caminhos neuronais e inibem outros. Desta forma diferentes estímulos podem ativar diferentes partes do conceito imagem, desenvolvendo então de uma forma que não precisa fazer um todo coerente. (TALL e VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Em função disso, esses autores denominam de conceito imagem evocado (CIE) a uma parte do (CI) que é evocado em determinado momento. O confronto de (CIE) conflitantes pode oportunizar uma ampliação do (CI) tornando mais próximo da definição do conceito apresentada pelo ensino. Quando uma definição é apresentada aos alunos, o conceito definição (CD) é “um conjunto de palavras usadas para especificar esse conceito” (TALL e VINNER, 1981, p. 152), que aceite pela comunidade matemática. Algumas vezes o aluno pode ter memorizado essas palavras e não evocar nenhum (CI) relacionado a este (CD). Vinner<sup>13</sup> (2002) diferencia um caso assim acrescentando a ideia de célula, em que a nossa estrutura cognitiva é composta por duas células, uma para a(s) definição(ões) do conceito e outra para as imagens mentais associadas ao conceito. Como no caso citado do aluno que somente memorizou a definição do conceito, diz-se que a célula do (CD) é vazia. Podemos ter somente uma das células vazia, ou mesmo as duas. Podendo haver interação ou não entre elas. Um exemplo que podemos apresentar como uma falta de interação, considerando essas duas células é com relação ao conceito de limite de funções. Muitos alunos vão construindo (CI) ao longo da noção introdutória de limite e quando uma definição mais formal é apresentada a

<sup>13</sup>Tall e Vinner trabalham com as mesmas noções de conceito imagem e conceito definição. Entretanto, com relação ao conceito definição eles consideram de modo diferente. Para Tall (1992) o conceito definição faz parte do conceito imagem. Em nosso estudo utilizamos o conceito definição como Vinner conforme reportamos no texto.

eles, as células do (CD) podem não interagir com nenhuma célula do (CI) associada ao conceito de limite. Isso pode ocorrer tanto quando este (CD) é trabalhado na mesma disciplina do estudo inicial de limite, ou mesmo, por exemplo, no caso do Curso de Matemática – Licenciatura em esse conceito é novamente trabalhado em uma disciplina do último ano desse curso. Vinner (2002) apresenta figuras para exemplificar as diferentes maneiras pelas quais um sistema cognitivo pode funcionar.

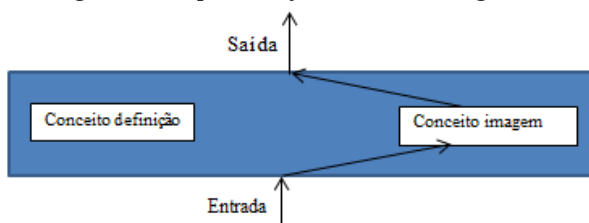
Figura 2 – Funcionamento do sistema cognitivo



Fonte: Sistema cognitivo apresentadas por Vinner (2002, p.71-72).

Essas representações de Vinner (Figura 3.2) mostram sistemas com uma característica comum, isto é, eles sempre buscam solução consultando a definição do conceito. É o que para o autor seria o desejável, entretanto a realidade é diferente e ele faz outra representação para exemplificar o que ocorre na prática, figura 3.

Figura 3 – Representação do sistema cognitivo



Fonte: Sistema cognitivo proposto por Vinner (2002, p. 73).

O aluno dificilmente consulta a célula da definição do conceito ao lidar com uma situação proposta, mesmo que ela não esteja vazia. Segundo Vinner, seria contrária à natureza da formação das imagens mentais, pois elas seguem hábitos do pensamento cotidiano.

Situações mais complexas, ou em momentos em que as imagens mentais são incompletas com relação ao conceito, que podem fazer com que o estudante consulte o (CD). Essas atividades, em geral, são vistas pelos estudantes como fora do comum e por vezes injustas, pois saem do que consideramos como situações similares que tratam somente de alguns aspectos do conceito.

Consideramos que a aprendizagem de um conceito é um processo, e que são as diversas situações que possibilitam uma ampliação das imagens do (CI) do aluno, bem como a possibilidade de aproximação entre (CI) e o (CD). Vamos considerar também a noção de conceito definição pessoal (CDP) de Tall e Vinner (1981) como sendo uma construção pessoal do aluno. Trata-se, portanto, de uma reconstrução do conceito pelo aluno, um modo pessoal de explanação desse conceito que vai sendo adquirido com a rotina de estudo. “Desta forma, um conceito definição pessoal pode diferir de um conceito definição formal, sendo esta última uma definição de conceito que é aceita pela comunidade matemática em geral.” (TALL VINNER, 1981, p. 153). Pode estar relacionado em maior ou menor grau de aproximação com o conceito, ou com a variedade de aspectos envolvidos em um conceito. Ao lidar com uma diversidade de situações, o aluno vai fazendo associações e ampliando o seu (CI) podendo ter nessas associações imagens que estejam se constituindo em elementos do seu (CDP). Ao mesmo tempo, ele pode estar fazendo associações de imagens que podem ser conflitantes entre si, dentro do conjunto do seu próprio (CI) relacionado ao conceito, pode ocorrer também de encontrarmos imagens que estejam em conflito com o (CD). São problemas que podem comprometer as aprendizagens futuras, afinal muitas das definições que os alunos precisarão lidar, bem como propriedades, podem estar relacionadas a definição de limite de função por exemplo.

Dessa forma, as imagens mentais vão contendo cada vez mais elementos, no caso imagens, pertinentes para lidar com as situações que favorecem a compreensão do conceito como um todo.

### **3.3 As referenciais em nossas análises**

Nossa problemática é identificar os processos cognitivos dos alunos ao lidar com situações de introdução do conceito de limite. Os elementos teóricos que apresentamos nesta seção foram importantes para nossa investigação e consideramos que eles têm certa aproximação. Vimos que o processo de construção de um conceito demanda um longo tempo, tanto para Tall e Vinner (1981) como para Vergnaud (1990). São nas atividades, ou nas

situações, relacionadas ao conceito que o aluno enfrenta ao longo do ensino que vão permitir que ele componha o conceito imagem, ou os esquemas. Esses teóricos consideram que o aluno pode ter concepções conflitantes, ou mesmo errôneas, com alguns aspectos do conceito trabalhado, mas que o aluno mobiliza sem perceber que há problema. Para Tall e Vinner, são as imagens do conceito que podem conflitar, tanto entre si como, com o conceito definição. Para Vergnaud temos os teoremas em ação que podem ser adequados ou não para a atividade; apesar disso, são escolhas tidas como pertinentes pelos alunos.

No início de nossa análise, caracterizamos, em termos de esquemas, as ações realizadas pelos estudantes ao responderem as situações. Esses esquemas foram decompostos em: objetivo, subobjetivo; regras de ação, tomada de informação e controle; invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação e possibilidades de inferência. Dentre esses elementos nos concentramos em modelar as regras em ação utilizadas nesses esquemas e também os teoremas em ação (adequados ou não) escolhidos para lidar com as atividades.

Um ponto importante com relação aos teoremas em ação de Vergnaud (1990) é que só podemos dizer que o aluno “tem” determinado teorema em ação, se identificamos esse teorema em ação em diversos momentos do trabalho de um aluno ao lidar com as situações, ao longo de um tempo. Para nossas análises, tanto do Brasil como da França, modelizamos as ações em termos de teoremas em ação com objetivo de evidenciar em que momento foi percebido na ação do estudante, buscando uma caracterização local de um esquema. Assim, em nossas análises, quando dizemos que o aluno **mobilizou tal teorema em ação**, estamos modelando o seu percurso naquela situação.

Esses elementos dos esquemas, bem como outros, foram relidos como imagens conceituais dos sujeitos de nossa investigação. Possibilitando complementar as análises dos esquemas, bem como, olhar com outro ponto de vista as produções matemáticas. Com Vergnaud (1986, 1990) fazemos uma análise mais detalhada do processo de conceitualização, por meio do estudo das adaptações que ocorrem nos esquemas mobilizados pelo sujeito ao lidar com as situações propostas. Enquanto que com o estudo do conceito imagem (CI) conseguimos investigar as imagens que vão sendo associadas a esse conjunto (CI) e analisar essas imagens diante do que o ensino propõe. Relacionando tanto com as situações para a introdução do limite de função, como para as definições que serão utilizadas. De certa maneira, investigamos de modo mais “afastado” o processo de conceitualização ao identificarmos imagens que podem trazer problemas à compreensão do conceito de limite de função, e também a sua definição (intuitiva ou formal). Além disso, possibilita o estudo de imagens que estão se constituindo como um conceito definição pessoal do estudante.

Permitindo, ao final, a identificação e análise de imagens que estavam se constituindo em um (CDP) do aluno, e também imagens do (CI) que poderiam se tornar fatores de conflitos tanto entre si, como com o (CD). Ao mesmo tempo, o estudo dos esquemas utilizados diante das situações propostas, por meio da análise de filiações, e de rupturas, ocorridas no processo de adaptação desses esquemas para lidar com a introdução de um novo conceito, no caso o limite de função.

Em seguida, discutimos a introdução do conceito de limite de função no Brasil e na França.

#### 4. O CONCEITO DE LIMITE NO BRASIL E NA FRANÇA

Nesta seção discutimos a apresentação do conceito de limite de funções no Brasil e na França identificando as escolhas que são realizadas para a introdução desse conceito. E, mesmo que não tenha referência explícita ao termo limite inicialmente, até o momento em que são inseridas as definições e as notações.

Os sistemas de ensino brasileiro e francês podem ser considerados semelhantes no que concerne à quantidade de anos de estudo para educação básica. Podemos observar no quadro (3) a designação do sistema de ensino francês correspondente ao nosso sistema de ensino brasileiro, a partir dos anos finais do ensino fundamental.

Quadro 3 – Equivalência do ensino brasileiro com o francês

| <b>Ensino brasileiro</b>               | <b>Ensino francês</b>                          |
|----------------------------------------|------------------------------------------------|
| <b>Ensino fundamental: anos finais</b> | <b><i>École élémentaire</i></b>                |
| 6º ano                                 | <i>Sixième</i>                                 |
| 7º ano                                 | <i>Cinquième</i>                               |
| 8º ano                                 | <i>Quatrième</i>                               |
| 9º ano                                 | <i>Troisième</i>                               |
| <b>Ensino médio</b>                    | <b><i>Lycée</i></b>                            |
| 1º ano                                 | <i>Seconde</i>                                 |
| 2º ano                                 | <i>Première</i>                                |
| 3º ano                                 | <i>Terminale</i>                               |
| <b>Ensino Superior – Graduação</b>     | <b><i>Enseignement supérieur – Licence</i></b> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Apesar das divisões semelhantes, com relação aos anos escolares, os programas desses países são bem diferentes conforme o objetivo de cada sistema. Por exemplo, no Brasil o ensino médio é pensado como uma formação geral, em que o estudante, ao final, terá de escolher uma área de interesse para cursar uma graduação, ou equivalente. Enquanto que, no ensino francês, o estudante já pode escolher durante seus estudos no *lycée* uma área de maior interesse para se aprofundar, conforme o curso que ele pretende fazer após terminar essa etapa de escolaridade. Este dado é importante para nossa investigação, já que a apresentação do conceito de limite é realizada de modo diferente conforme a área de interesse do aluno.

A seguir, discutimos de modo geral como os programas orientam a apresentação e estudo do conceito de limite de função nos sistemas de ensino do Brasil e da França. Buscamos também, exemplificar alguns elementos dessas apresentações, vistas nas orientações dos documentos oficiais com um livro didático.

#### 4.1 As indicações dos programas de ensino no Brasil e na França

O estudo do conceito de limite de funções no Brasil, geralmente, é introduzido no ensino superior, nos cursos da área de exatas, mas também encontramos em cursos como: Ciências Biológicas, Administração, dentre outros. Este conceito já fez parte do currículo do ensino médio brasileiro, mas atualmente só é introduzido nesta fase do ensino em alguns: colégios particulares, colégios militares e institutos federais. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) que norteiam os conteúdos para as escolas, não fazem menção ao estudo deste conceito nesta fase do ensino. E, apesar de estarmos em um período de desenvolvimento de uma nova proposta para o ensino médio, são ainda estas orientações que estão vigentes no ensino médio. Um detalhe importante é que o ensino médio no Brasil é realizado como uma formação geral, em que, ao final dessa etapa, se o estudante quiser continuar seus estudos, ele poderá escolher qualquer área para fazer um curso de graduação.

Desse modo, caso o estudante escolha fazer o curso de Licenciatura em Matemática<sup>14</sup>, provavelmente será neste curso que ele irá trabalhar com o conceito de limite de funções. Nestes cursos, em geral, é apresentado, primeiramente, o limite de função em um ponto, de maneira intuitiva para em seguida ser introduzido a definição formal, que usualmente se denomina definição por  $\epsilon$  e  $\delta$ .

O documento no Brasil que orienta a constituição desses cursos de graduação é as Diretrizes Curriculares Nacionais - DCN (BRASIL, 2001), o referido documento apresenta os conteúdos que devem ser comuns a todos os cursos. No caso do curso de Licenciatura em Matemática, o conceito de limite é apresentado e aprofundado ao longo do curso, ele traz os conteúdos de: cálculo diferencial e integral e fundamentos de análise. Além de indicar que é necessário trabalhar também com os conteúdos matemáticos que estão presentes na educação básica na área de análise.

Essas diretrizes apresentam essas indicações de maneira geral, como citamos, mas orientam que o objetivo principal do curso de Licenciatura em Matemática é formar professores para a educação básica. Assim, a maneira como os cursos irão ser constituído será orientado pelas DCN, mas também pelo grupo de professores que irá elaborar o Projeto Pedagógico do Curso (PPC), pelos documentos de cada universidade, bem como pelos livros didáticos utilizados nos cursos, dentre outros. Desse modo, um caminho para buscarmos

---

<sup>14</sup> Diferentemente da UFMS, as DCN (BRASIL, 2001) denominam de Licenciatura em Matemática esses cursos e assim utilizaremos ao longo do texto quando nos referirmos ao curso de licenciatura de modo geral. Quando estivermos nos referindo ao curso da UFMS diremos Curso de Matemática – Licenciatura.

elementos para identificar como o conceito de limite é apresentado e trabalhado ao longo do curso de Licenciatura em Matemática no Brasil são as pesquisas que tratam sobre o tema e também os livros didáticos utilizados nesses cursos.

Ao final da seção 2 discutimos sobre algumas pesquisas realizadas no Brasil, inclusive sobre livros mais utilizados pelos professores. Nesse aspecto, encontramos semelhanças no Curso de Matemática – Licenciatura da UFMS/INMA de nossa pesquisa quando olhamos para bibliografia indicada na ementa da disciplina:

CÁLCULO I: Funções de uma variável real. Limite e continuidade. Derivadas e aplicações. Integrais indefinidas. Bibliografia Básica: THOMAS, G. B.; Cálculo – volume 1 – São Paulo: Pearson Editora, 2008. GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo – volume 1 – Rio de Janeiro: L. T. C. Editora, 2001. ÁVILA, G. S. S.; Cálculo das funções de uma variável real. Rio de Janeiro. LTC Editora, 2003. STEWART, J. Cálculo – volume 1 – São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. Bibliografia Complementar: LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica – São Paulo: Editora HARBRA, 1994. FLEMMING, D. M. e GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivação, integração – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. (UFMS, 2014, p. 7).

Essa disciplina tem 102 horas as quais são divididas em 51 encontros de duas horas cada. O conceito de limite geralmente é trabalhado aproximadamente após o 10º encontro. Para discutirmos a apresentação do conceito de limite no Brasil, vamos nos centrar sobre o Curso de Matemática – Licenciatura que investigamos, pois vimos na seção 2.3 que nessa disciplina não encontramos diferenças significativas, com relação à apresentação do conceito de limite nesses cursos. Particularmente discorreremos sobre o trabalho dos últimos dois anos da professora que estava ministrando essa disciplina, em conversa informal, ela nos informou que seguia a ordem de apresentação dos conteúdos próximo do que é proposto pelo livro didático Cálculo volume 1 (GUIDORIZZI, 2013). Neste livro, a introdução do conceito de limite é realizada nos capítulos 3 e 4, elencamos em seguida somente os tópicos desses capítulos que devem ser utilizados conforme a ementa dessa disciplina. No capítulo 3 – Limite e continuidade são trabalhados os tópicos:

- ✓ Introdução
- ✓ Definição de função contínua
- ✓ Definição de limite
- ✓ Limites laterais
- ✓ Limite de função composta
- ✓ Teorema do confronto
- ✓ O limite fundamental  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$
- ✓ Propriedades operatórias. Demonstração do Teorema do Confronto

No capítulo 4 – Extensão do conceito de Limite são trabalhados os seguintes tópicos:

- ✓ Limites no infinito
- ✓ Limites infinitos
- ✓ O número  $e$

Esse livro faz a discussão inicial do limite pela continuidade, porém a professora nos informou que mantinha a organização da ementa e que trabalhava a continuidade somente após o estudo com os limites laterais. Assim, ela iniciava com a apresentação da noção intuitiva de limite finito de uma função em um ponto, discutia uma função particular e, em seguida, apresentava:

Intuitivamente, dizer que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $p$ , é igual a  $L$  que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

Significa que quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$  tende a  $L$ .  
(GUIDORIZZI, 2013, p.55).

Eram trabalhados aspectos geométricos desse conceito na representação gráfica da função, os numéricos por meio de cálculos de alguns valores próximos do ponto de investigação do limite. Como também, aspectos algébricos utilizando a notação de limite e fazendo manipulações algébricas na expressão que define a função. Esse livro faz alguns exemplos e geralmente trabalha buscando relacionar os limites com a sua representação gráfica. A definição desse caso de limite ele o faz já utilizando os quantificadores:

**Definição:** Sejam  $f$  uma função e  $p$  um ponto do domínio de  $f$  ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de  $f$ . Dizemos que  $f$  tem limite  $L$ , em  $p$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existir um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in D_f$ .

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tal número  $L$ , que quando existe é único, será indicado por  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ . Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

(GUIDORIZZI, 2013, p. 72).

Os outros casos de limites são apresentados diretamente pela definição com uso de quantificadores, vejamos como esse livro faz para o caso dos limites no infinito:

**Definição 1:** Sejam  $f$  uma função e suponhamos que exista  $a$  tal que  $]a, +\infty[ \subset D_f$ .

Definimos:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \end{array} \right.$

**Definição 2:** Sejam  $f$  uma função e suponhamos que exista  $a$  tal que  $] -\infty, a[ \subset D_f$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \end{array} \right.$$

(GUIDORIZZI, 2013, p. 99-100).

Em seguida, a essas definições o livro apresenta como exemplo resolvido, o limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ . Inicia a resolução observando que quanto maior o valor de  $x$  mais próximo de zero

estará à expressão  $\frac{1}{x}$ , aplica a definição justificando que o limite será zero e apresenta a representação gráfica da função com as indicações dos quantificadores encontrados. Em seguida, são trabalhados os outros tópicos até finalização com a noção de integral indefinida.

Com relação às pesquisas sobre livros didáticos utilizados nesses cursos, encontramos, por exemplo, Barufi (1999) que traz mais informações sobre as escolhas de Guidorizzi (2013) na apresentação dos conceitos. Com relação a esse livro, ela identificou e analisou os seguintes aspectos:

- ❖ Ideias: o livro não traz uma preocupação com as ideias fundamentais do cálculo, os conceitos são apresentados e formalizados, vistos como parte de uma estrutura pronta. O desenvolvimento dos conceitos que historicamente levaram ao desenvolvimento do que atualmente se constitui como o cálculo integral e diferencial não aparece;
- ❖ Linguagem: no livro predomina a linguagem matemática, uso da linguagem natural é mínimo, sendo que seria uma “[...] ferramenta poderosa na busca do convencimento [...]” (BARUFI, 1999, p. 130);
- ❖ Problematização: o livro utiliza não problemas como motivação para estudo dos conceitos, eles aparecem como aplicações dos conceitos estudados;
- ❖ Visualização: as argumentações do livro são algébricas ou analíticas, e as figuras e gráficos são utilizados para visualização desses resultados, “[...] apenas para que o estudante verifique aquilo que foi estabelecido [...]” (BARUFI, 1999, p. 131);
- ❖ Argumentação: o livro utiliza somente argumentação da lógica interna, “[...] caracterizando a dedução e evitando ao máximo a intuição que poderia tornar mais razoáveis os raciocínios efetuados [...]” (BARUFI, 1999, p. 132);
- ❖ Formalização: há uma preocupação com a formalização e com a generalização dos resultados encontrados, o livro “[...] pretende estabelecer um curso de cálculo que, no final de contas, ainda revelado, permanecendo a noção de transmissão de conhecimentos, em lugar da construção.” (BARUFI, 1999, p. 133).

Segundo a professora da disciplina, mesmo utilizando o livro do Guidorizzi (2013) como suporte para apresentação dos conceitos nessa disciplina, o curso não tem essa preocupação excessiva na formalização dos conceitos. Eles são apresentados e definidos, tanto intuitivamente como formalmente, mas na maior parte do tempo os alunos utilizam as ideias e propriedades que foram formalizadas. Assim, no caso, do limite de função, por exemplo, os estudantes mobilizam na maioria das vezes a definição intuitiva, e quando são necessárias as regras de manipulações algébricas e também as propriedades.

Na França, o conceito de limite é introduzido no *lycée* nas classes de *Première* e *Terminale*, equivalentes ao segundo e terceiro anos do ensino médio brasileiro, sendo apresentado neste nível de ensino de maneira menos formal. Diferentemente do Brasil, na

França, o *lycée* já é direcionado para as áreas de interesse do estudante, e os documentos que orientam essa etapa do ensino já trazem indicações mais detalhadas de como deve ser introduzido o conceito de limite, bem como os conceitos que serão necessários tanto para sua apresentação, como também para o aprofundamento deste conceito ao longo dos anos de estudos. Diante disso, na França, escolhemos fazer nossa experimentação em uma classe do *lycée* opção *Scientifique* (S),<sup>15</sup> essa é a escolha dos alunos em geral que vão fazer matemática (bem como, física, química, engenharias, medicina, ciências da vida e da terra, etc.).

Encontramos nos Boletins Oficiais Especiais do Ministério da Educação Nacional da França indicações dos conteúdos que devem ser trabalhados, bem como orientações para o trabalho dos professores do *lycée*. O conceito de limite aparece pela primeira vez no programa de *première*:

Introduzimos uma nova ferramenta: a derivação. A aquisição do conceito de derivada é um ponto fundamental do programa de *première*. As funções estudadas são todas regulares e estamos satisfeitos com uma abordagem intuitiva da noção de limite finito em um ponto. É esperado pelo programa o cálculo de derivas simples; no caso de situações mais complexas, solicita-se um *software* de cálculo formal. (BO, 2010, p. 2, tradução nossa).

A derivada aparece para o estudo da reta tangente a uma curva representativa de uma função derivável em um ponto. É visto também as funções deriváveis, proposto a derivada de uma soma, de um produto e de um quociente, nessas operações são utilizadas as funções chamadas de usuais:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  e  $f(x) = x^n, n \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Vejamos a definição de derivada apresentada em um livro didático:

Definições: Dizemos que a função  $f$  é **derivável em**  $I$  quando ela é derivável para todo real  $a$  de  $I$ .

A função que, para todo real  $x$  de  $I$ , associa o número derivado de  $f$  em  $x$ , é chamada de **função derivada** de  $f$  e é notada  $f'$ . Temos assim  $f': x \mapsto f'(x)$ .

(MALAVAL, 2012 p. 56, tradução nossa).

O número obtido pela derivada é o coeficiente angular da tangente. Nos comentários desse livro é indicado que o número resultante da derivada seja definido também como limite de uma taxa de crescimento média  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  quando  $h$  tende a 0, sendo orientado que a definição formal de limite não seja apresentada e que se evite o excesso no uso de técnicas no cálculo de derivadas.

No Boletim Oficial Especial (BO), a apresentação das sequências é indicada por meio do estudo dos fenômenos discretos, com uso de diferentes registros: algébrico, gráfico,

<sup>15</sup> Na França nas outras opções para o ensino médio, as tecnológicas, o conceito de limite também é apresentado, mas com um nível de exigência e aprofundamento menor.

numérico e geométrico. Sendo um momento importante para propor questionamento sobre o seu comportamento, “[...] levando a uma primeira abordagem da noção de limite que será desenvolvida na classe *terminal*.” (BO, 2010, p.2, tradução nossa). As aproximações com a noção de limite deverá ser por meio de exemplos e, nos comentários, é orientado que a definição formal de limite não seja trabalhada no estudo das sequências.

Na classe do *Terminale*, o conceito de sequência deve ser retomado e ampliado com a noção de limite. É proposto um estudo aprofundado para que, em seguida, seja introduzido o conceito de limite de funções (BO, 2011), são trabalhados os limites finitos e infinitos de uma sequência. É sugerido que se trabalhe também com exemplos de sequências que não têm limite. Neste documento também aparece o que é esperado dos alunos, por exemplo: “No caso de um limite infinito, dado uma sequência crescente  $(u_n)$  e um número real  $A$ , com ajuda de um algoritmo encontrar o inteiro natural  $n$  a partir do qual  $u_n$  é superior a  $A$ .” (BO, 2011, p.3, tradução nossa). Os limites também são trabalhados por comparação e o teorema de gendarmes<sup>16</sup> é admitido. São realizadas as operações sobre limites: de uma soma, de um produto e de um quociente de duas sequências.

O limite de funções é proposto para ser trabalhado, em seguida, e, no BO, aparece um quadro com as seguintes informações:

---

<sup>16</sup> No Brasil esse teorema é conhecido como teorema do confronto, ou do sanduiche.

Quadro 4 – Indicações para a apresentação do Boletim Oficial

| Conteúdos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Capacidades esperadas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Comentários                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Limite de funções</b><br><br>Limite finito ou infinito de uma função no infinito.<br><br>Limite infinito de uma função em um ponto.<br><br>Limite de uma soma, de um produto, de um quociente ou de uma composição de duas funções.<br><br>Limites e comparação.<br><br>Assíntota paralela a um dos eixos coordenados. | <br><br><br><br><br><br><br><br><br><br>Determinar o limite de uma soma, de um produto de um quociente ou de uma composição de duas funções.<br><br><br><br>Determinar os limites das funções limitadas superiormente ou inferiormente e também limitadas superiormente e inferiormente.<br><br><br>Interpretar graficamente os limites obtidos. | O Trabalho realizado sobre as sequências é estendido às funções, sem formalização excessiva. O objetivo essencial é permitir aos alunos se apropriarem do conceito de limite<br><br><br><br><br><br>A composta de duas funções é vista nessa ocasião, mas sem a teoria geral. |

Fonte: Dados do Boletim Oficial Especial nº8 (2011, p. 4, tradução nossa).

As operações com os limites de funções são admitidas e apresentadas em quadros para serem utilizadas pelos alunos, geralmente, com as funções usuais. Encontramos em um livro didático um exemplo dessa proposta de trabalho na figura 4:

Figura 4 – Operações com limites de funções

Les fonctions  $f$  et  $g$  ont le même ensemble de définition.  
 $a$  désigne un nombre réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  et  $\ell, \ell'$  désignent des nombres réels.

**PROPRIÉTÉS (ADMISES) Limite d'une somme**

|                                  |              |           |           |           |           |           |
|----------------------------------|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Si $f$ a pour limite en $a$      | $\ell$       | $\ell$    | $\ell$    | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| et $g$ a pour limite en $a$      | $\ell'$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| alors $f+g$ a pour limite en $a$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI        | $-\infty$ |

FI signifie forme indéterminée

**PROPRIÉTÉS (ADMISES) Limite d'un produit**

|                                         |             |            |            |            |            |           |           |           |                        |
|-----------------------------------------|-------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|------------------------|
| Si $f$ a pour limite en $a$             | $\ell$      | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0                      |
| et $g$ a pour limite en $a$             | $\ell'$     | $+\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors $f \times g$ a pour limite en $a$ | $\ell\ell'$ | $+\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI                     |

**PROPRIÉTÉS (ADMISES) Limite d'un quotient**

• Cas où  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ .

|                                          |                      |                        |             |             |             |             |                        |
|------------------------------------------|----------------------|------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------------|
| Si $f$ a pour limite en $a$              | $\ell$               | $\ell$                 | $+\infty$   | $+\infty$   | $-\infty$   | $-\infty$   | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| et $g$ a pour limite en $a$              | $\ell' \neq 0$       | $+\infty$ ou $-\infty$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $\ell' > 0$ | $\ell' < 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en $a$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0                      | $+\infty$   | $-\infty$   | $-\infty$   | $+\infty$   | FI                     |

• Cas où  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .

|                                          |                         |                         |                         |                         |    |
|------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|----|
| Si $f$ a pour limite en $a$              | $\ell > 0$ ou $+\infty$ | $\ell < 0$ ou $-\infty$ | $\ell > 0$ ou $+\infty$ | $\ell < 0$ ou $-\infty$ | 0  |
| et $g$ a pour limite en $a$              | 0 en restant positif    | 0 en restant positif    | 0 en restant négatif    | 0 en restant négatif    | 0  |
| alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en $a$ | $+\infty$               | $-\infty$               | $-\infty$               | $+\infty$               | FI |

Fonte: Livro de Matemática do *Terminale* (MALAVAL, 2012 p. 96).

Como orientado no BO (2011), as operações são admitidas e apresentadas resumidamente nesses quadros da figura 4. É indicado que o professor prepare o aluno “[...] para transformar a expressão da função para permitir que ele tenha condições de aplicar as regras operacionais. As palavras "de acordo com a regra operacional sobre os limites" são então suficientes como justificção.” (APMEP, [201-], p.9, tradução nossa).

Nas indicações dos conteúdos na figura 5, o teorema de gendarmes, apresentado anteriormente, continuará a ser mobilizado para fazer as comparações para encontrar os limites, e também o teorema de comparação para os limites infinitos.

Figura 5 – Teoremas de comparação e de gendarmes

**Théorèmes de comparaison : limite infinie**

**PROPRIÉTÉ** Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que :

(1) pour  $x$  assez grand,  $f(x) \geq g(x)$       (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  
 alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**PROPRIÉTÉ** Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que :

(1) pour  $x$  assez grand,  $f(x) \leq g(x)$       (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ ,  
 alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

**Théorème des gendarmes : limite réelle**

**THÉORÈME (ADMIS)** Si  $f, g, h$  sont des fonctions et  $\ell$  est un nombre réel tels que :

(1) pour  $x$  assez grand,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$   
 (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ ,  
 alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

Fonte: Livro de Matemática do *terminale* (MALAVAL, 2012 p. 98).

As definições de limites devem ser trabalhadas para os casos de limites finitos no infinito, sem excesso de formalismo, segundo indicações do BO (2011). Para os outros casos, a associação dos professores de Matemática do ensino Público (APMEP) no documento em que discute aplicações do BO, orienta que preparem os alunos para terem “uma boa percepção (principalmente gráfica) dessas situações” (APMEP, [201-], p. 9) e que se deve evitar o uso de quantificadores. Nesse aspecto, vejamos na figura 6 a proposta de um livro didático para apresentação da definição de limite finito quando  $x$  tende a  $+\infty$ , bem como exemplos desse limite em algumas funções:

Figura 6 – Definição limite proposta em um livro didático

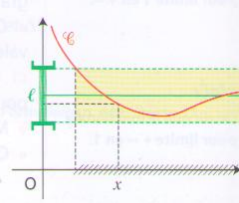
**Limite finie en  $+\infty$  ou en  $-\infty$**

**DÉFINITION** Dire qu'une fonction  $f$  a pour **limite le nombre réel  $\ell$  en  $+\infty$**  signifie que tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand.  
 On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

**Remarque** : On définit de façon analogue une limite réelle en  $-\infty$ .

**EXEMPLES 1** : Fonctions de référence de limite 0 en  $+\infty$ .  
 $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  (avec  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ),  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x \mapsto e^{-x}$ .

**EXEMPLE 2** : La fonction  $x \mapsto e^x$  a pour limite 0 en  $-\infty$ .



Fonte: Livro do *terminale* (MALAVAL, 2012, p. 92).

Os próximos conceitos trabalhados são de continuidade de uma função em um intervalo, o teorema do valor intermediário, e é retomado o conceito de derivada. Novamente as derivadas são trabalhadas utilizando as operações vistas no *première*, mas são apresentadas as derivadas de outras funções, podemos observar na figura 7:

Figura 7 – Funções indicadas para o estudo com as derivadas

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sqrt{u(x)} ; \\ x &\mapsto (u(x))^n, n \text{ entier relatif non nul} ; \\ x &\mapsto e^{u(x)} ; \\ x &\mapsto \ln(u(x)). \end{aligned}$$

Fonte: Boletim Oficial Especial nº 8 (2011, p. 5)

O conceito de limite será retomado no ensino superior, mas nesta fase do ensino é trabalhado com sua definição formal, por épsilon e delta e a ênfase e profundidade serão em função das especificidades dos cursos.

Para nossa investigação, escolhemos atividades que fossem próximas das que são utilizadas na introdução do conceito de limite, mas também que envolvessem aspectos que as pesquisas apresentam como difíceis para os alunos. Ao mesmo tempo, elaboramos algumas atividades para serem aplicadas no Brasil e na França. Em função disso, fizemos uma delimitação do campo conceitual que iríamos considerar para nossa pesquisa e que será discutido na próxima seção.

Apresentamos a seguir, os objetivos desta pesquisa juntamente com nossos encaminhamentos metodológicos.

## 5. OBJETIVOS E ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Nesta pesquisa, buscamos compreender o processo de construção do conceito de limite de função em situações propostas para sua introdução. Elaboramos atividades próximas das que geralmente são trabalhadas para apresentação desse conceito na disciplina de Cálculo I, particularmente investigamos Curso de Matemática – Licenciatura do INMA – UFMS. Com intuito de ampliar nosso campo de investigação, decidimos estudar outro quadro diferente do Brasil. Na seção 4, vimos que a introdução desse conceito na França é realizada de modo diferenciado do Brasil, são diferenças tanto com relação ao nível de ensino em que é realizada, como também, com as situações que são utilizadas nessas apresentações. Como dissemos na introdução, nossa universidade vem desenvolvendo projetos de cooperação com a França, o que possibilitou que fizéssemos um estágio de sete meses nesse país<sup>17</sup>.

Deste modo, nosso objetivo de pesquisa se constituiu em: realizar um estudo para compreender os processos mobilizados por alunos, na introdução do conceito de limite de funções, em situações elaboradas no quadro brasileiro e no quadro francês. Investigamos os conhecimentos mobilizados por esses estudantes ao lidarem com as primeiras atividades de introdução desse conceito. Para isso, organizamos nosso estudo buscando:

- ✓ Investigar como os estudantes organizam seus esquemas de raciocínio;
- ✓ Investigar regras em ação e teoremas em ação, com suas representações conforme o tipo de problema, mobilizados pelos estudantes para resolver as atividades, buscando caracterizar os esquemas;
- ✓ Investigar as imagens associadas pelos estudantes ao conceito de limite de funções;
- ✓ Investigar aproximações, ou diferenças, nos conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros e franceses.

Para compreender como se dá a construção de um conceito precisávamos estudar o estudante em ação, ou como nos traz Vergnaud (1990), por meio de situações que o sujeito precisa lidar que podemos investigar filiações e rupturas necessárias na formação e desenvolvimento de um conceito. Nossa pesquisa se enquadra em um estudo experimental, segundo Mazucato é utilizado “Quando, para se obter informações sobre um determinado fato, fenômeno ou processo, torna-se necessário manipulá-lo, controlando algumas variáveis, para verificar como o mesmo se ocorrerá [...]” (MAZUCATO, 2018, p. 58). Em nosso caso, o processo de aprendizagem do conceito de limite. Para isso, elaboramos e aplicamos

---

<sup>17</sup> Como também a possibilidade de bolsa do Programa Institucional de Doutorado-sanduíche no Exterior (PDSE) concedida pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

instrumentos buscando colocar o estudante diante de situações que favorecessem ele agir nas atividades propostas, como também com momentos para discussão individual das resoluções apresentadas. Diante disso, dois pontos foram centrais para condução de nossa investigação: as escolhas das situações e dos instrumentos que permitissem a produção de dados para atingirmos nossos objetivos.

As situações foram elaboradas com atividades próximas das que são propostas para introdução do conceito de limite de funções nos dois países de investigação (BO, 2011; UFMS, 2014). Pautadas em estudos sobre o ensino e aprendizagem do conceito de limite de funções. Esses dois aspectos foram tratados, de modo geral, nas seções 2.2 e 2.3 e também nas discussões das atividades onde essas relações foram estabelecidas com as questões elaboradas. No caso, no momento em que apresentamos como foram constituídos os instrumentos para nossa produção de dados<sup>18</sup>.

Discutimos também na seção 4 algumas diferenças na apresentação do conceito de limite de função no Brasil e na França. E, apesar dessas diferenças, encontramos pesquisas que mostram que os estudantes desses países, como de outros, têm dificuldades semelhantes (CORNU, 1983; TALL e VINNER, 1981). Um estudo do processo de construção desse conceito traz elementos importantes para discussão e compreensão dessa problemática e, a inclusão da França em nosso campo de investigação permitiu ampliarmos e aprofundarmos ainda mais essa discussão.

Para elaboração das atividades de nossa experimentação foi preciso delimitar o campo conceitual para a introdução do conceito de limite de funções. Nossas escolhas foram em função do estudo que fizemos na seção 4, sobre apresentação desse conceito no Brasil e na França, como também, baseadas nas discussões realizadas na seção 2. A seguir, no quadro 5, apresentamos as situações de limite de função que foram selecionadas, os conceitos, as relações envolvidas, bem como as representações utilizadas.

---

<sup>18</sup> Especificamente nas seções: 6.1, 7.1.2 e 7.1.3.

Quadro 5 – Delimitação do campo conceitual

| Estudo de limite finito de uma função em um ponto                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Representações:</b></p> <p>Utilizadas nas atividades: Algébricas, gráficas e linguagem natural.</p> <p>Solicitadas aos alunos nas atividades: Algébricas, gráficas e linguagem natural escrita e oral.</p> <p><b>Funções trabalhadas:</b></p> <p>Funções polinomiais e racionais de grau menor do que três e também funções definidas por partes.</p> <p><b>Conceitos e as relações utilizadas:</b></p> <p>Manipulação algébrica de polinômios, como a fatoração, a multiplicação, simplificação e a redução de termos;</p> <p><b>Números reais:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>☞ Aproximação de um número seja do conjunto de números do domínio ou da imagem de uma função, a ideia de poder se aproximar infinitamente;</li> <li>☞ Representar conjunto de números na notação de intervalos abertos e/ou fechados, e na forma de inequações;</li> <li>☞ A ideia de que em um intervalo, aberto e/ou fechado, existem infinitos números;</li> </ul> <p><b>Funções:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>☞ Relacionar a representação algébrica com a gráfica;</li> <li>☞ Relacionar um conjunto de elementos da imagem, com o seu respectivo conjunto de pontos do domínio.</li> <li>☞ Estudar o comportamento das funções para encontrar os limites, seja:             <ul style="list-style-type: none"> <li>☞ Por manipulação algébrica das expressões;</li> <li>☞ Calcular pontos próximos do ponto de investigação;</li> <li>☞ Pela observação da representação gráfica;</li> <li>☞ Por informações memorizadas, como: quadro de operações sobre limite utilizado na França, comportamento das funções consideradas de referências, a forma da representação algébrica ou gráfica da função.</li> </ul> </li> </ul> |
| Estudo de limites $+\infty$ (ou $-\infty$ ) e de limites $+\infty$ (ou $-\infty$ ) em um ponto                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p><b>Representações:</b></p> <p>Utilizadas nas atividades: Algébricas, gráficas e linguagem natural.</p> <p>Solicitadas aos alunos nas atividades: Algébricas, numérica, gráficas e linguagem natural escrita e oral.</p> <p><b>Funções trabalhadas:</b></p> <p>Funções racionais de grau menor do que três e também funções definidas por partes.</p> <p><b>Conceitos e as relações utilizadas:</b></p> <p>Manipulação algébrica de polinômios, como a fatoração, a multiplicação. A simplificação e a redução de termos;</p> <p><b>Números reais:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>☞ Aproximação de um número seja do conjunto de números do domínio ou da imagem de uma função, a ideia de poder se aproximar infinitamente de um número;</li> <li>☞ Representar conjunto de números na notação de intervalos abertos e/ou fechados, e na forma de inequações;</li> <li>☞ A ideia de que em um intervalo, aberto e/ou fechado, existem infinitos números;</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

☞ A noção de um número tender a infinito, poder tomar valores de um conjunto infinitamente.

**Funções:**

☞ Relacionar a representação algébrica com a gráfica;

☞ Relacionar um conjunto de elementos da imagem, com o seu respectivo conjunto de pontos do domínio.

☞ Estudar o comportamento das funções para encontrar os limites, seja:

☞ Por manipulação algébrica das expressões;

☞ Calcular pontos próximos do ponto de investigação;

☞ Calcular pontos que estão tendendo a infinito;

☞ Pela construção da representação gráfica;

☞ Por informações memorizadas, como: quadro de operações sobre limite utilizado na França, comportamento das funções consideradas de referências, a forma da representação algébrica ou gráfica da função.

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Nesse quadro temos as situações e os conceitos que foram utilizados em nosso estudo de modo geral, mas nem todas elas foram aplicadas na França em função do pouco tempo que tivemos para nosso estudo nesse país. Esse recorte é discutido em mais detalhes no momento da apresentação das atividades elaboradas para aplicação no Brasil e na França, respectivamente nas seções 6 e 7.

A seguir, apresentamos os instrumentos selecionados para nossa experimentação e, posteriormente, os elementos da nossa metodologia de análise. Todavia, é preciso que se tenha claro que todos esses elementos foram se constituindo no desenvolvimento da nossa investigação de modo imbricado, e sempre com momentos de idas e vindas durante o nosso percurso investigativo.

## 5.1 Instrumentos utilizados

Escolhemos para a coleta de dados, instrumentos que favorecessem uma produção suficiente de dados, mas também que propiciassem uma variedade representativa dos conhecimentos utilizados pelos estudantes, visto nosso interesse em compreender os processos mobilizados por eles ao resolver as atividades. Assim, optamos por mais de um instrumento de coleta de dados para a experimentação e, ao longo da pesquisa, utilizamos três tipos: questionários, conjuntos de atividades e entrevistas. Todavia, nem todos esses instrumentos foram utilizados para produção de dados nos dois países investigados, como veremos, em seguida, na apresentação de cada um desses instrumentos e nas justificativas dessas escolhas.

O questionário foi escolhido para fazermos uma primeira aproximação com os possíveis sujeitos desta pesquisa. Precisávamos de um instrumento que pudesse nos fornecer algumas informações de um número relativamente grande de indivíduos, mas que fosse aplicado de modo mais rápido e prático. No caso desse instrumento, ele foi composto tanto por questões abertas, como também fechadas (MAZUCATO, 2018). Nosso interesse principal foi identificar possíveis sujeitos para nosso estudo, mas também investigar alguns conhecimentos que eles tinham sobre o conceito de limite, bem como algumas dificuldades com relação a esse conceito, e sobre conceitos envolvidos na construção do conceito de limite. Estamos nos referindo aos conceitos de número reais e de funções que constituem aspectos importantes nas situações de introdução do conceito de limite de funções (ARTIGUE, 1995).

As questões fechadas do questionário foram escolhidas por possibilitar “[...] categorias diferenciadas e pré-definidas; [...] em que o informante escolhe sua resposta entre outras opções já estabelecidas.” (MAZUCATO, 2018, p. 75). Essa forma de questionário facilitou nosso trabalho de pesquisa ao restringir a liberdade total de respostas. Desse modo, preparamos algumas questões com alternativas de múltipla escolha apresentando respostas que abrangessem diversos aspectos do assunto que nos interessava e assim caberia ao sujeito escolher a que lhe fosse mais adequada. As questões abertas foram escolhidas por proporcionarem ao sujeito explicar sua resposta, por exemplo, ao dizer sim ou não em uma questão ele deveria justificar sua escolha. Além disso, para obtermos algumas informações concernentes às dificuldades desse aluno e sua compreensão sobre alguns conceitos.

Utilizamos esses dois tipos de questões nos questionários que aplicamos, tanto no Brasil como na França. No entanto, devido ao tempo que tivemos disponível para trabalhar nesses dois países e o fato deles terem programas diferentes, esse instrumento foi elaborado com algumas questões diferentes. Como na França, tínhamos somente sete meses de estágio, decidimos inserir algumas questões sobre limite de função para que os estudantes tivessem oportunidade de resolver e justificar cada resolução. No quadro 6, apresentamos uma síntese dos objetivos das questões elaboradas para cada um desses países.

Quadro 6 – Síntese das questões do questionário

| Objetivos                                        | Brasil                                                                                                        | França                                                                                                        |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Identificar sujeitos para participar da pesquisa | Identificar alunos que:<br>- Tinham interesse em participar;<br>- Nunca tinham estudado o conceito de limite. | Identificar alunos que:<br>- Preencheram todo questionário;<br>- Apresentaram justificativas mais detalhadas. |
| Identificar dificuldades                         | Identificar dificuldades em                                                                                   | Identificar dificuldades em conceitos                                                                         |

| Objetivos                                                                           | Brasil                                                                                                                                                     | França                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| em conceitos de matemática básica                                                   | conceitos envolvidos:<br>- Na construção do conceito de limite;<br>- Nas situações propostas de outros campos conceituais, como, por exemplo, a fatoração. | envolvidos:<br>- Na construção do conceito de limite;<br>- Nas situações propostas de outros campos conceituais, como, por exemplo, a fatoração.                                                                                         |
| Verificar se conheciam a definição intuitiva de limite.                             | - Não tinham visto                                                                                                                                         | - Verificar como estavam compreendendo essa definição.                                                                                                                                                                                   |
| Verificar se conheciam a definição formal de limite                                 | - Não tinham visto                                                                                                                                         | - Verificar como estavam compreendendo essa definição.                                                                                                                                                                                   |
| Estudar como identificavam limites por meio da representação gráfica de uma função. | - Não tinham visto                                                                                                                                         | Identificar:<br>- Conceitos utilizados nas justificativas;<br>- Elementos da definição nas justificativas dadas;<br>- Relações entre as justificativas dadas para o limite encontrado com as respostas sobre como compreendiam o limite. |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Foi possível a inserção da questão sobre limite de função na França, pois aplicamos o questionário somente após a introdução desse conceito. Desse modo, essa escolha permitiu que pudéssemos obter mais dados sobre a produção desses estudantes e sobre conhecimentos concernentes ao conceito de limite de função. No Brasil, esse instrumento foi importante ao fornecer elementos sobre conceitos envolvidos na construção do conceito de limite, como também nas situações trabalhadas, que o aluno tinha dificuldade, ou teve na educação básica.<sup>19</sup>

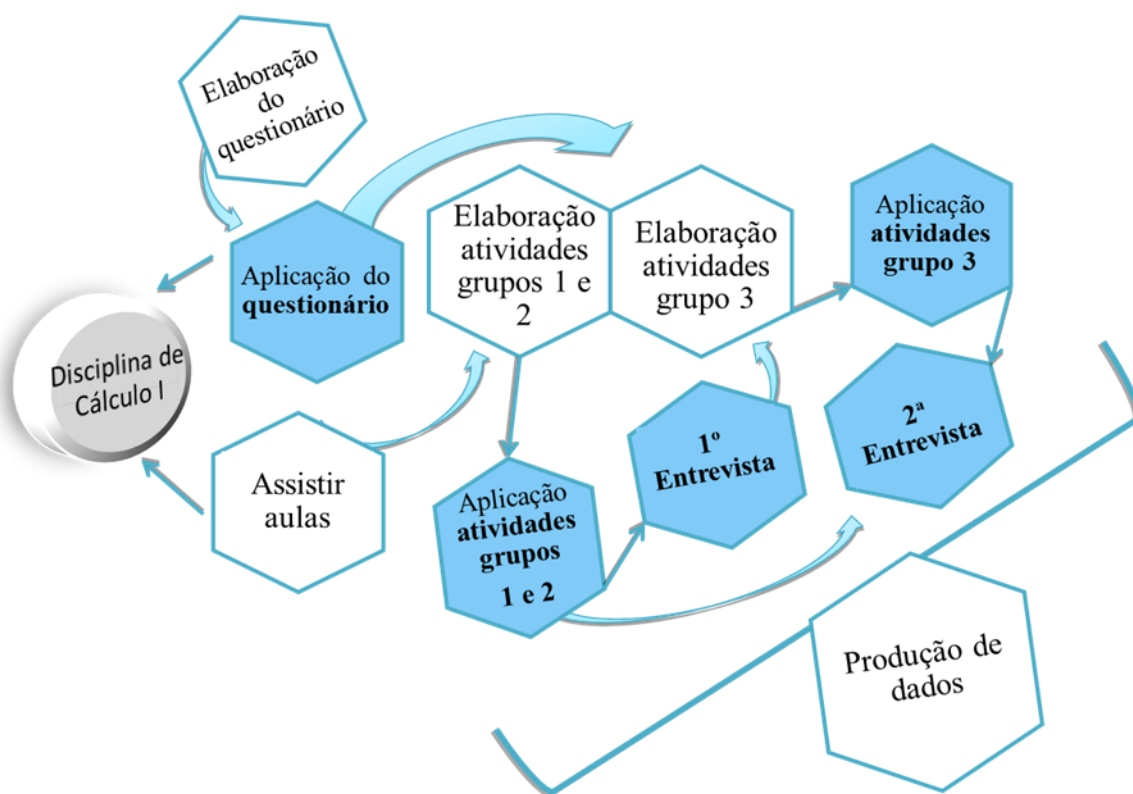
No Brasil, tivemos a oportunidade de fazer um estudo mais longo e escolhemos trabalhar com três conjuntos de atividades, próximas do que é trabalhado em sala de aula. Para isso, decidimos assistir algumas aulas da professora da disciplina de Cálculo I e estudamos seu plano de ensino. Também olhamos as listas de atividades trabalhadas com os alunos e o livro didático que orientava o trabalho dessa professora. Além disso, buscamos trabalhar nessas atividades alguns conceitos considerados problemáticos para os estudantes (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983) de modo diferenciado, no caso os conceitos de números reais e de funções foram trabalhados mais detalhadamente em algumas questões. Também optamos em acompanhar o processo de construção do aluno em momentos que ele pudesse discutir com outro aluno, além dos momentos de discussão com a pesquisadora. Diante disso, escolhemos trabalhar algumas atividades em dupla e o último conjunto de atividades foi resolvido individualmente. Ao final o aluno apresentava sua resolução a um colega e eles

<sup>19</sup> Na seção 6.1.1 trazemos uma discussão sobre a elaboração desse questionário aplicado no Brasil e na seção 7.1.2 do aplicado na França. As questões desses questionários encontram-se respectivamente nos anexos A e B.

discutiam suas resoluções e justificavam suas escolhas. Todas as sessões foram gravadas em áudio e cada estudante tinha sua folha de atividade que deveria ser trabalhada.

Para obtermos mais elementos sobre as produções dos alunos no Brasil, acrescentamos também a entrevista, no caso trabalhamos com a entrevista semiestruturada. Esse instrumento se mostrou pertinente por permitir levantarmos mais elementos de fatos observados durante a experimentação, como também, de inserirmos outras questões suscitadas a partir das discussões que fossem acontecendo no decorrer da entrevista. (MAZINI, TOLOI, 2013). Aplicamos duas entrevistas, uma ao final das atividades dos grupos 1 e 2 e outra seis meses após aplicação das atividades do grupo 3. Apresentamos, em seguida, na figura 8, uma síntese dos momentos de nossa pesquisa no Brasil.<sup>20</sup>

Figura 8 – Momentos da pesquisa realizados no Brasil



Fonte: Produzido pela autora.

Na França, tivemos pouco tempo para fazermos o estudo com os alunos. Assim, escolhemos novamente utilizar uma entrevista semiestruturada para obtermos os elementos para produção de dados. Inicialmente acompanhamos uma professora ao introduzir o conceito de limite de funções em uma classe do *terminale*. Escolhemos trabalhar com a observação estruturada e, para isso, elaboramos uma grade de análises “[...] em condições controladas com a finalidade de dar respostas a determinados objetivos anteriormente definidos.

<sup>20</sup> Na seção 6.1.3 discutimos as questões que nortearam essas entrevistas.

(MAZUCATO, 2018, p.64). Nesse sentido, buscamos identificar diferentes momentos do trabalho dessa docente ao introduzir esse conceito. Em seguida, apresentamos alguns indicativos das questões que nortearam nossa grade de análise:

- ✓ Quais conceitos são retomados para introdução do conceito de limite? Quais representações (geométrica, algébrica, gráfica, funcional, numérica, etc.), definições, propriedades são retomadas e introduzidas? Quais problemas são utilizados? Quais dentre os conceitos relacionados (número real, outros conceitos envolvidos nesse campo conceitual) são mobilizados? Como eles são representados?
- ✓ Como são as atividades de introdução? Utiliza problemas? Quais representações são utilizadas?
- ✓ Como é feita a institucionalização? Apresenta uma definição intuitiva, formal ou propriedades?
- ✓ Como são planejados os reinvestimentos do conceito? Como eles ocorrem?

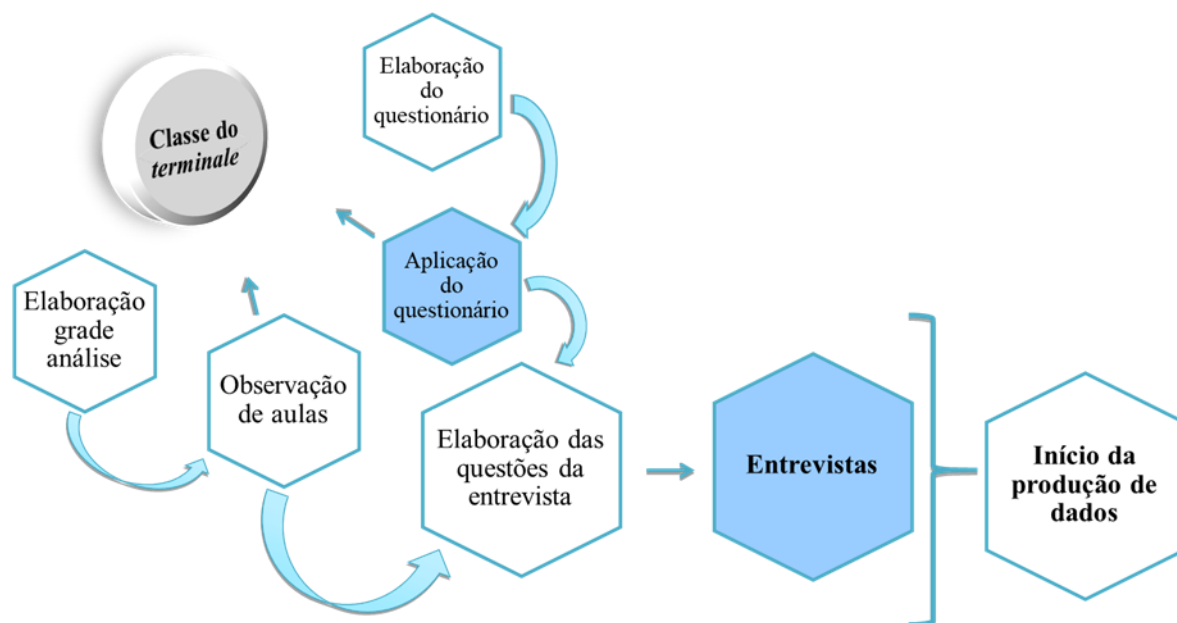
Em todas as aulas fizemos as anotações conforme essas indicações e também gravamos em áudio as falas da professora<sup>21</sup>. Além disso, ela nos disponibilizou seu plano de aula e também as listas de atividades utilizadas para introdução do conceito de limite de função.

Elaboramos a entrevista com atividades sobre o conceito de limite de funções para os alunos resolverem e irem justificando as escolhas que faziam. Esse instrumento permitiu que pudéssemos ir acrescentando questões para compreendermos melhor, tanto as resoluções como as justificativas que eles iam mobilizando ao resolverem as atividades. Favorecendo também que pudéssemos ter uma variedade de representações desses conhecimentos mobilizados. Apresentamos na figura 9, em seguida, uma síntese de nossos momentos da pesquisa vivenciados na França.

---

<sup>21</sup> A professora se dispôs a ficar com um gravador em seu bolso para que pudéssemos obter os áudios dessas aulas e permitiu também que tirássemos algumas fotos do trabalho realizado no quadro.

Figura 9 – Momentos da pesquisa realizada na França



Fonte: Produzido pela autora

Todos esses instrumentos permitiram que nós pudéssemos trabalhar com os estudantes: individualmente (na França), individualmente e em dupla (no Brasil), como também de interagirmos com eles, e assim, obtermos mais informações sobre suas resoluções. Com isso, obtivemos elementos das produções escritas e orais dos alunos para nossa análise.

## 5.2 Metodologia de análise dos dados

Nosso movimento de análise foi pautado na construção de uma metodologia baseada no estudo de esquemas e de conceito imagem. Investigar os processos dos alunos com os esquemas é uma análise mais fina, como se colocássemos uma “lupa” para olharmos mais detalhadamente as produções dos alunos. Com os esquemas é preciso especificar o tipo de problema, os processos, os sistemas de representações, etc., usados sistematicamente, para investigarmos as adaptações desses esquemas. Enquanto que, com o estudo por meio das imagens do conceito imagem (CI), podemos, de certo modo, nos “afastarmos” para fazer uma análise mais geral desse processo de conceitualização vivenciado pelo estudante, considerarmos tanto as imagens associadas as situações como com as definições do conceito de limite de função utilizadas no ensino.

A ideia de uma possível contradição entre vários conhecimentos coexistentes no mesmo aluno e o fato de uma propriedade em ação, ou regra de ação, ter um domínio de validade também fazem parte do arcabouço teórico de Vergnaud (1986), notadamente com o

estudo dos domínios de validade e dos conhecimentos. Analogamente em Tall e Vinner (1981), com as imagens que podem conflitar tanto com outras do (CI), como com o conceito definição apresentado aos alunos. Desse modo, essas duas teorias nos permite estudar o processo de aprendizagem do conceito de limite de função e identificar conhecimentos que podem se tornar um problema, seja para compreensão desse conceito, como para aprendizagens futuras de outros conceitos que possam estar vinculados a situações que eles enfrentarão, e que tenham alguma semelhança com as tratadas anteriormente no estudo com o limite.

Para análise dos conhecimentos mobilizados pelos alunos durante nossa experimentação, decidimos separar as discussões conforme esses elementos teóricos. Essa escolha se deu pelo fato de que gostaríamos que ficasse mais explícito as análise e as contribuições, tanto das noções de esquema como as do conceito imagem dos estudantes, para nossa pesquisa. Todavia, consideramos possível, e pertinente, a análise conjunta desses elementos. Assim, para esta tese nos concentramos nos seguintes procedimentos metodológicos:

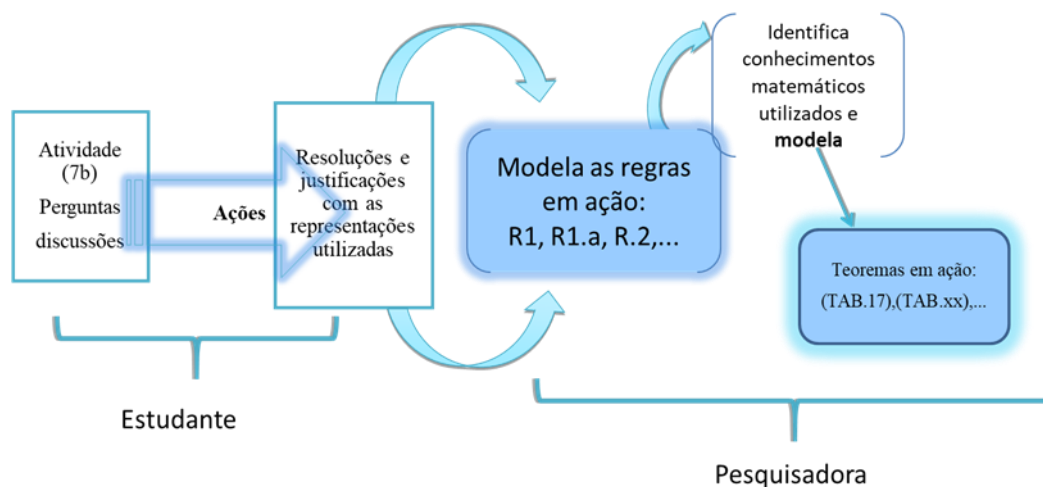
**Fase I** – A partir da produção dos dados obtidos nas atividades introdutórias e nas entrevistas, modelizamos as regras em ação e os teoremas em ação associados, relativos a seus domínios de validade<sup>22</sup>. Essa modelização foi orientada tanto pelos estudos sobre nosso objeto de pesquisa, como também considerando o que é proposto pelo ensino para sua apresentação nesses dois países. Além disso, identificamos conhecimentos dos alunos sobre conceitos relacionados, e que são considerados como fundamentais, para a construção do conceito de limite de função para os casos que estamos estudando (por exemplo, funções, números reais, etc.). Também identificamos cada enunciado "em ação" dos alunos por um índice<sup>23</sup> e relacionando ao tipo de representação utilizada por eles (algébrico, natural-oral, natural-escrito, tabela de variações, gráfico, desenho). Conforme, sintetizado na figura 10;

---

<sup>22</sup> No caso nos referimos a situação trabalhada, as atividades e representações utilizadas.

<sup>23</sup> Apresentamos a modelização das regras em ação e dos teoremas em ação, com as escolhas dos índices, nas seções que antecedem as análises. No caso, na seção (6.2) da experimentação realizada no Brasil e na seção (7.2) na França.

Figura 10 – Representação da fase I da metodologia de análise

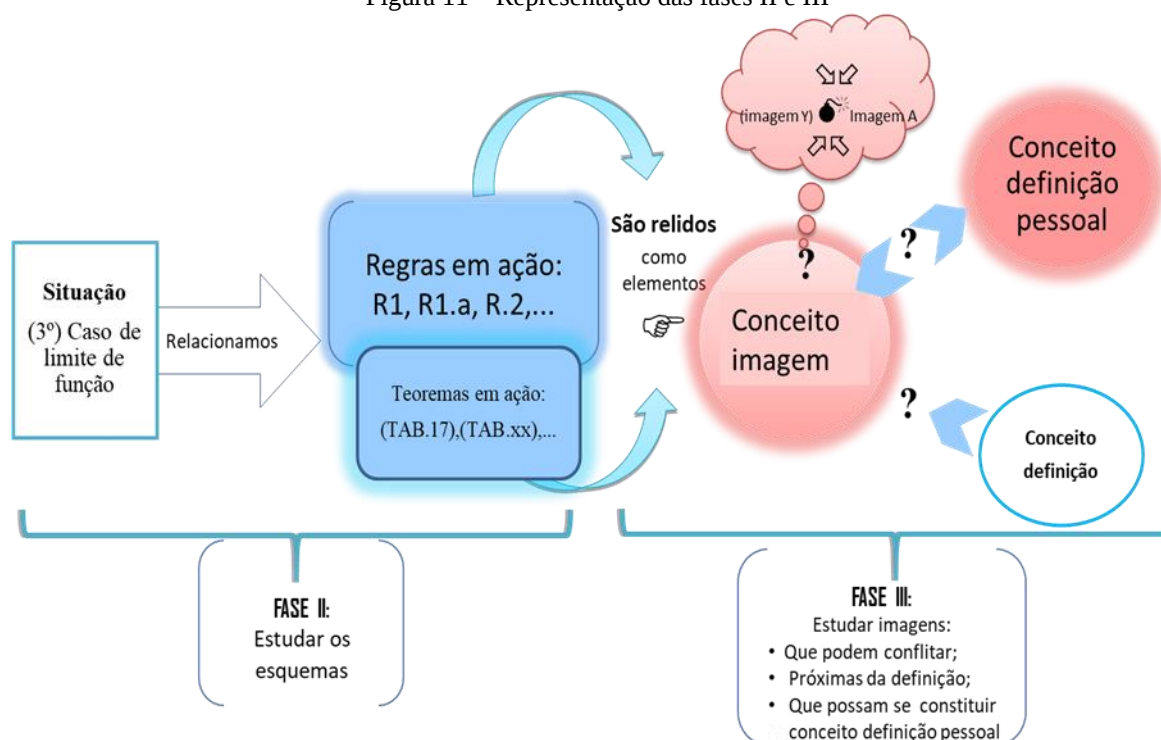


Fonte: Produzido pela autora.

**Fase II** – Relacionamos esses elementos, modelizados a partir das produções dos alunos, às suas respectivas situações de limite de função que foram trabalhadas. Separamos as atividades conforme os casos de limite que foram tratados, com suas respectivas representações, e relacionamos as regras em ação e os teoremas em ação mobilizados pelos estudantes ao lidarem com as atividades. Buscamos, com isso, estudar esquemas mobilizados por eles durante a experimentação.

**Fase III** – As regras em ação e os teoremas em ação associados foram relidos em termos de conceito imagem do aluno, juntamente com outras mobilizações que o estudante fez ao lidar com as situações. Nosso objetivo foi modelizar imagens do conceito imagem (CI) do estudante, para estudar imagens que pudessem conflitar com outras imagens do (CI), ou com o conceito definição (CD). Bem como, identificar imagens desse conjunto (CI) que poderiam se constituir em um conceito definição pessoal (CDP) desse aluno.

Figura 11 – Representação das fases II e III



Fonte: Produzido pela autora.

Essa abordagem foi escolhida por permitir a realização de um estudo do processo de construção do conceito de limite de funções dos alunos. Um estudo por meio de teoremas em ação e de regras de ação, no sentido de Vergnaud (1990), torna possível descrever os processos dos alunos em relação a um determinado tipo de problema e a um conceito matemático em particular. Ela permite também ter uma imagem dos conhecimentos dos alunos. Com Tall e Vinner (1981), podemos olhar esses conhecimentos como elementos do conceito imagem do aluno, buscando identificar imagens desse conjunto que possam se constituir como conceito definição pessoal desse aluno. Ao mesmo tempo, podemos investigar lacunas entre conhecimentos e definições formais e algum possível impacto na aprendizagem futura. Consideramos uma maneira mais "flexível" de estudar conhecimentos para identificar e antecipar dificuldades dos alunos. Sendo complementar à abordagem de Vergnaud (1990), especialmente quando um conceito matemático (como o conceito de limite) envolve vários outros conceitos.

### 5.3 Sujeitos da pesquisa

Como dissemos, nossa pesquisa buscou compreender o processo de construção do conceito de limite de função em situações para sua introdução. Utilizamos instrumentos para coleta e produção dos nossos dados no Brasil e na França e, em seguida, analisamos conforme

nossa metodologia. Um ponto importante a se considerar em nosso estudo é o fato de que trabalhamos com dois grupos diferentes de alunos nesses dois países, um da graduação e outro do ensino médio. Além disso, esses grupos não vivenciaram as mesmas etapas durante a experimentação. Todavia, nossos instrumentos de coleta de dados juntamente com os elementos teóricos apresentados permitiu que fizéssemos nosso estudo desse processo de aprendizagem com os alunos brasileiros e franceses. Para apresentação nesta tese trazemos um estudante de cada país, sendo que nossa escolha foi pelo aluno que:

- ☞ Resolveu todas as atividades e apresentou justificativas;
- ☞ Discutia suas resoluções com um colega, ao longo da experimentação, buscando tirar dúvidas, ou comparar resoluções encontradas, no caso específico dos alunos do Brasil;
- ☞ Utilizou as representações, gráficas, algébricas e linguagem natural escrita e oral;
- ☞ Não manifestasse muita dificuldade em conceitos envolvidos nas situações, como fatoração, as funções que foram utilizadas, etc.

Essas escolhas foram fundamentadas no estudo apresentado na seção 2, quando discutimos como foi difícil o desenvolvimento do conceito de limite pelos matemáticos até se tornar o objeto de ensino trabalhado atualmente. Como também pelas dificuldades evidenciadas em pesquisas, tanto com relação aos conceitos envolvidos na construção do limite de função, como com os conceitos de matemática básica utilizados nas atividades para sua introdução.

Diante disso, precisávamos de sujeitos com as características citadas para podemos atingir nosso objetivo de pesquisa. Por exemplo, um aluno que tivesse muita dificuldade na construção e compreensão da representação gráfica de uma função, dificilmente teria como fazer filiações pertinentes nas atividades que envolvesse esse tipo de representação. Inviabilizando nossa investigação de filiações e de rupturas de seus esquemas com essa representação. Analogamente para o estudo do conceito imagem, pois não teríamos como identificar imagens desse conjunto associadas a esse tipo de representação.

Apresentamos nas próximas seções o detalhamento de nossa pesquisa, primeiramente, nosso estudo realizado no Brasil e, em seguida, o nosso estágio na França. Posteriormente, discutimos alguns elementos que modelizamos nesses países buscando identificar pontos de aproximações nas produções desses alunos, considerando as diferenças discutidas na seção 4.

## 6. MOMENTOS DA PESQUISA REALIZADA NO BRASIL

Nossa pesquisa foi realizada com alunos da disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Um dos motivos para essa escolha se dá pelo fato de ser o curso em que trabalhamos. Nossa experiência ao longo dos anos nos trouxe muita inquietação com relação ao desempenho dos nossos graduandos nessa disciplina. Sabemos, como todo professor de matemática que já ministrou essa disciplina, que os alunos geralmente têm muita dificuldade quando o conceito de limite é apresentado a eles. É fato que, esse tema tem sido objeto de estudo de várias pesquisas, as quais vêm apontando diversos fatores relacionados a essa dificuldade, envolvendo aspectos epistemológicos, didáticos, entre outros.

O fraco embasamento matemático da educação básica também aparece em quase todos os estudos, principalmente, os que necessitam ser mobilizados na construção do conceito de limite de funções. Pensando em nosso licenciando em matemática, vale ressaltar que os conceitos da educação básica não precisariam ser compreendidos apenas para serem utilizados na construção do conceito de limite, ou em outras disciplinas, mas também serão importantes para a prática profissional desses estudantes, afinal, eles serão professores da educação básica. Alguns desses conteúdos são considerados muito problemáticos, como funções e o conjunto dos números reais.

Desse modo, escolhemos investigar a apresentação do conceito de limite por meio da abordagem de situações que favorecessem aspectos considerados de difícil compreensão para os alunos, como aproximação de um ponto, bem como a ideia de número arbitrariamente pequeno, juntamente com o estudo de funções. Assim, delimitamos, de certo modo, o campo conceitual (VERGNAUD, 1990) para apresentação do conceito de limite, priorizando na sua apresentação, conceitos evidenciados por análises de livros didáticos, pesquisas sobre o ensino e aprendizagem desse conceito e também orientações contidas em documentos como as diretrizes curriculares para a graduação em licenciatura em matemática, ementa da disciplina, entre outros.

Discutimos a seguir os elementos que permitiram nossa produção de dados no Brasil, em que dividimos em duas partes. Na primeira, apresentamos a disciplina em que selecionamos os estudantes para nossa pesquisa, o questionário que permitiu conhecermos nossos colaboradores e as atividades que elaboramos para realizarmos com os estudantes.

Na segunda parte apresentamos nossas análises diante das escolhas realizadas pelos estudantes ao lidarem com as atividades para introdução do conceito de limite de funções.

## 6.1 A disciplina de Cálculo I

Os estudantes iniciam o curso de Matemática – Licenciatura com a disciplina de Introdução ao Cálculo. Ela é oferecida no primeiro semestre do curso, tem carga horária de 68 horas e seu objetivo principal é retomar alguns conceitos de matemática básica. Sua introdução no curso veio para atender uma necessidade em recuperar, ou mesmo de introduzir, alguns conceitos de matemática da educação básica. São indicações de diversos estudos realizados, bem como da experiência dos professores que vêm trabalhando ao longo dos anos com essa disciplina nessa universidade. Na ementa dessa disciplina, encontramos os conteúdos: conjuntos numéricos; funções; funções do primeiro grau; funções quadráticas e modulares; potenciação e radiciação; funções exponenciais; logaritmos e funções logarítmicas; e funções trigonométricas.

No segundo semestre é oferecida a disciplina de Cálculo I, que tem carga horária de 102 horas. Em sua ementa é proposto trabalhar os conteúdos de: funções de uma variável real; limite e continuidade; derivada e aplicações; e integrais indefinidas.

Começamos a trabalhar com essa turma no segundo semestre de 2016<sup>24</sup>, e no ano de nossa pesquisa havia 65 estudantes matriculados. A professora que trabalhou com a disciplina de Cálculo I já tinha experiência nessa disciplina e conhecia a maioria dos alunos, pois foi ela quem ministrou a disciplina de Introdução ao Cálculo I no primeiro semestre.

Nossa proposta inicial era acompanharmos os alunos na introdução do conceito de limite de funções no decorrer da disciplina. Pensamos em propormos inicialmente atividades sobre funções, que trabalhassem a ideia de aproximações de pontos, tanto do domínio como da imagem da função, para, em seguida, discutirmos a noção intuitiva de limite de funções. Buscando relacionar essa noção com a definição formal por  $\epsilon$  e  $\delta$ . Como era uma proposta diferenciada, solicitamos à professora a possibilidade de trabalharmos essa parte da disciplina com as nossas atividades, sendo a pesquisadora encarregada de aplicar as atividades aos alunos durante a disciplina. Além disso, precisaríamos de mais tempo para nossa experimentação, pois segundo a programação da disciplina esse tópico seria trabalhado em duas aulas.

Havia 65 alunos matriculados nessa disciplina no ano de 2016, mas em média 35 participaram das aulas, tanto das que ministramos como também das aulas que assistimos. É

---

<sup>24</sup> Em função da greve dos professores das universidades federais de 2015 o calendário acadêmico havia sido alterado, as disciplinas do segundo semestre que deveriam iniciar em agosto e terminar em dezembro, começaram no dia 31 de outubro, pararam para o recesso de final do ano em 24/12/2016; e retornaram em janeiro sendo finalizadas em 29/03/2017.

importante frisar que essa disciplina vem tendo desistência muito grande dos alunos já nas primeiras semanas de aula. É uma turma composta tanto por alunos do primeiro ano, que acabaram de iniciar o curso, como também por alunos que já fizeram a disciplina e reprovaram ou que desistiram no meio da disciplina.

A professora da disciplina iniciou fazendo uma revisão sobre intervalos do conjunto  $\mathbb{R}$  e em seguida abordou o conteúdo de funções. A partir deste ponto aplicamos as nossas atividades, que serão apresentadas, em seguida, em todos os alunos da turma e também os convidamos para participarem do nosso estudo. Tivemos dezenove alunos que se interessaram em participar do estudo, mas no decorrer das atividades somente seis alunos vieram nas aulas e participaram das atividades, sendo que ao final tivemos somente três que fizeram todas as atividades.

#### **6.1.1 Conhecendo os colaboradores brasileiros**

Elaboramos nosso questionário inicial buscando levantar elementos tanto para conhecermos esses alunos, como também para identificarmos os que teriam interesse em participar de nossa pesquisa.

Assim, iniciamos questionando se eles entraram no curso pensando em serem professores de matemática; qual a idade e em qual semestre estavam no curso; se trabalhavam; se estavam cursando a disciplina pela primeira vez; e se tinham interesse em participar de nosso estudo.

Com essas questões buscamos informações para escolhermos os alunos que iriam participar de nosso estudo, primeiramente identificando os que tinham interesse em participar da pesquisa, bem como os que estavam cursando a disciplina pela primeira vez. Sabíamos que muitos deles já haviam cursado essa disciplina antes.

Escolhemos trabalhar com estudantes para os quais não havia sido apresentado ao conceito de limite. Essa escolha se deu pelo fato de termos a possibilidade de acompanharmos mais tempo esses graduandos, por ser no Brasil. Com isso, poderíamos investigar as primeiras filiações, e possíveis, rupturas no processo de aprendizagem e, assim, modelar os esquemas iniciais desse aluno nesse processo de construção de um novo conceito. (VERGNAUD, 1990, 2015).

Inserimos também algumas questões para vermos se eles tinham, ou se tiveram dificuldades: em trabalhar com algum conjunto numérico, em operar com números reais, na forma fracionária ou decimal, e em escolher números reais em intervalos, abertos e fechados.

Diversos estudos (CURY, 2008; VOGADO, 2014) trazem que os alunos têm problemas no estudo de limite relacionado a isso, assim gostaríamos de identificar se esses estudantes também tiveram problemas nos anos anteriores de estudo, bem como se estavam tendo durante o curso.

Essa escolha também se deu por sabermos que o conjunto dos números reais é importante para construção da noção de limite, e que algumas situações necessárias para construção desse conceito só são vivenciadas exatamente no estudo de limite (ARTIGUE, 1995; CORNU 1991).

Ao final questionamos como estava sendo para o estudante fazer o Curso de Matemática – Licenciatura, qual era a motivação e a expectativa dele sobre o mesmo.

Identificamos 19 alunos que poderiam ser colaboradores de nossa pesquisa, pois não tinham estudado o conceito de limite de funções; seja por não terem feito a disciplina anteriormente, ou por não terem visto no ensino médio.

### **6.1.2 Atividades que elaboramos para experimentação**

Como discutimos em nosso percurso metodológico, no decorrer da pesquisa, tivemos de fazer diversas modificações no nosso planejamento inicial. Contudo, para facilitar o leitor iremos apresentar as atividades que foram aplicadas e analisadas de maneira linear, sem discutir os percalços que foram vivenciados.

As atividades foram divididas em três grupos que versavam sobre:

- ☞ Estudo de funções por meio de aproximações de um número real;
- ☞ Estudo de limite finito de uma função em um ponto;
- ☞ Estudo de limites no infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ) e de limites infinitos em um ponto.

As atividades foram pensadas para serem trabalhadas disponibilizando mais tempo para os alunos. Gostaríamos que eles refletissem sobre as escolhas que fariam e que também pudessem discutir entre eles. Assim as atividades dos dois primeiros grupos foram realizadas em duplas, e as do último grupo foi realizada individualmente, mas ao final o aluno deveria apresentar sua resolução a um colega e justificar as escolhas realizadas. Inferimos que eles teriam um pouco de dificuldade na compreensão dos enunciados e também em justificar as resoluções apresentadas, pois eles estavam habituados a lidar com questões diferentes das que havíamos elaborado.

Além disso, não iríamos interferir no trabalho dos alunos, nossa participação seria em levar as questões que eles tivessem a outra dupla, ou para todo o grupo. Buscando responder as questões, com outras questões, para que pudessem trabalhar pesquisando e discutindo entre eles. Fizemos as correções com apresentações de definições somente em dois momentos: ao final das situações do grupo I sobre o estudo com funções, introduzimos a noção de limite de funções; e antes de apresentarmos a última atividade do grupo II, após as correções das atividades iniciais fizemos a discussão da definição de limite.

Elaboramos as atividades buscando manter a ordem de apresentação do conteúdo utilizada pela professora. Desse modo, quando ela finalizou o estudo com as funções, nós iniciamos o nosso trabalho com essas atividades, em seguida, apresentamos as questões que elaboramos para esses três grupos.

### **I. Estudo de funções por meio de aproximações de um número real**

Nessas primeiras atividades buscamos levantar elementos relacionados aos conceitos de números reais e de funções. Eles são considerados importantes na construção da noção de limite de funções e nos permitem trabalhar com a ideia de aproximação de um número real, seja por valores do conjunto do domínio, como também da imagem da função.

Pensamos em trabalhar com mais tempo e também detalhando cada etapa da atividade para que o aluno pudesse refletir sobre as ideias de aproximação de um ponto e de número arbitrariamente pequeno, no estudo com funções; já pensando na introdução da noção intuitiva de limite de função que faríamos em seguida.

As duas primeiras atividades tinham enunciado similares, sendo a diferença mais em função das variáveis didáticas que escolhemos trabalhar. Essa escolha foi por acreditarmos que possibilitaria observar outros elementos que, geralmente, são problemáticos para os alunos, por exemplo, a aproximação ao número zero e ao número dois mobiliza conhecimentos diferentes.

A primeira atividade foi desenvolvida com a função  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ , em que o aluno deveria preencher as tabelas fornecidas com valores da função quando  $x$  assume valores próximos de  $x = 1$ , no caso para  $x > 1$  e para  $x < 1$ . Depois deveria responder as questões, conforme o quadro a seguir:

Quadro 7 – Atividade 1.1 sobre funções

- a) Represente na reta numérica todos os números que você escolheu, em seguida, escreva este conjunto na forma de intervalo.
- b) Tem outros números entre:
  - i. Os dois maiores números que você escolheu para valores de  $x < 1$ ? Caso sim apresente três números, no caso de não existir apresente uma justificativa.
  - ii. Os dois menores números que você escolheu para valores de  $x > 1$ ? Caso sim apresente três números, no caso de não existir apresente uma justificativa.
- c) Quantos números você acha que tem entre esses dois números, pensando no item (i)? Escreva o que isso quer dizer para você.
- d) Qual é o número que você escolheria mais próximo de 1, diferente do que está na sua tabela, sendo ele maior do que 1?
- e) Você consegue listar facilmente 10 valores entre o número 1 e o valor que você escolheu na tabela mais próximo de 1, sendo ele menor do que 1? Justifique sua resposta e, caso ela tenha sido sim, encontre 3 números. Em seguida, discuta com seu colega a sua resposta e veja se vocês obtiveram respostas semelhantes ou não.
- f) Analise os valores da tabela e diga o que acontece com os valores da função  $f(x)$  quando tomamos valores bem próximos de 1, seja por valores maiores do que 1 ou menores do que 1.
- g) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ . O que seria possível observar no gráfico, nos valores que a função assume, quando os valores de  $x$  ficam próximos do ponto.

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

A segunda atividade era com a função  $f(x) = (x + 1)$ , e o aluno deveria preencher as tabelas para valores de  $x$  próximos a zero, sendo uma tabela para  $x > 0$  e outra para  $x < 0$ , em seguida deveria responder as questões, conforme o quadro a seguir:

Quadro 8 – Atividade 1.2 sobre funções

- a) Represente na reta numérica os números que você escolheu, em seguida, escreva na forma de intervalo.
- b) Olhando para a representação geométrica, escolha um intervalo mais próximo de zero, tanto para valores  $x < 0$  como também  $x > 0$ .
- c) É possível representar os dois intervalos que você encontrou no item (b) como somente um intervalo? Caso sim represente o intervalo, e caso não seja possível justifique.
- d) Esboce o gráfico da  $f(x) = (x + 1)$  e encontre no eixo dos  $y$  o intervalo que corresponde aos números do(s) intervalo(s) encontrado(s) no item (c) e responda:
  - i) Qual valor que a função assume próximo de  $x = 0$ , tanto por valores  $x > 0$  como também  $x < 0$ ?
  - ii) Esse é um bom método para se descobrir o valor que uma função tem em um ponto. Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

Nessa atividade os alunos poderiam encontrar um pouco de dificuldade em representar o conjunto de números que eles escolheram na forma de união de intervalos, principalmente por não poderem incluir o número 1, tendo dúvida em como escrever essa restrição. No caso o intervalo é um subconjunto dos números reais que precisaria ser aberto no extremo de número 1. Nesse momento o aluno precisaria mobilizar o conhecimento de que se retirarmos o número 1, ainda existirão infinitos números antes dele, e que é preciso incluí-lo na extremidade do intervalo, mas em aberto, para poder incluir esses infinitos números. Um aspecto importante no estudo do limite, é que a existência do limite da função num ponto não

depende do que ocorre no ponto, mas sim nas proximidades dele. Um teorema em ação inadequado que eles poderiam mobilizar nessa situação é buscar um número como sendo o que fica mais “próximo” ao 1, por exemplo, se o maior e menor número escolhidos foram respectivamente 0 e 2, escreverem a união de intervalos  $[0; 0,99] \cup [1,99; 2]$  ou  $[0; 0,99[ \cup ]1,99; 2]$ .

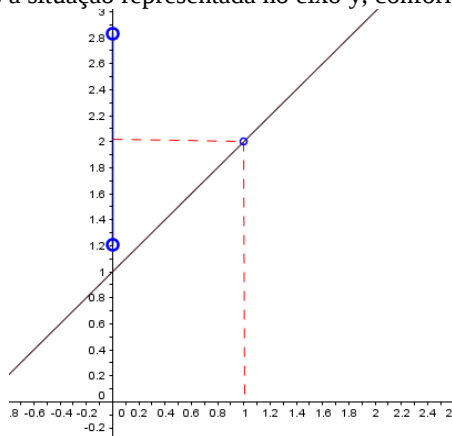
Escolhemos a primeira função para que pudéssemos trabalhar a ideia de aproximação de pontos do domínio, com uma situação em que o ponto de aproximação não estava definido. Além disso, por ser uma função em que inferimos que eles de início não saberiam a representação gráfica. Desse modo, poderíamos observar os esquemas que eles iriam mobilizar para lidar com essa função no momento de trabalhar a aproximação numérica, bem como na representação gráfica. Seria um momento oportuno também para discutirmos quando duas funções são iguais, pois ao fazerem a “troca” da função dada pela  $f(x) = x$ , precisariam observar que não estava definida em  $x = 1$ .

A segunda função foi escolhida para continuarmos discutindo a ideia de podermos tomar um número tão próximo quanto quisermos de outro número, mas com um número que geralmente os alunos têm dificuldade em fazer aproximações por valores menores, no caso o zero. Possibilitaria estudarmos como os alunos fariam as escolhas de valores próximos de zero, e como representariam esses valores na reta numérica. Quais seriam os intervalos escolhidos, mais próximos de zero, e como eles representariam graficamente esses intervalos.

Elaboramos a última atividade pensando em aproximar a noção intuitiva de limite que é trabalhada com aproximações de pontos do domínio, com a definição formal que faz o caminho inverso, como discutimos na seção 2.2. Vejamos seu enunciado no quadro em seguida:

Quadro 9 – Atividade 1.3 sobre funções

Observe, em seguida, a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ , podemos verificar que quando  $x$  se aproxima de 1, tanto por valores maiores do que 1 como por valores menores, a função  $f(x)$  se torna próxima de 2. Se tomarmos valores próximos de 2, no caso considerando valores da função no conjunto  $]1,2; 2 \cup ]2; 2,8[$ , ou seja  $1,2 < f(x) < 2,8$ , teremos a situação representada no eixo  $y$ , conforme em seguida.



- Cite alguns valores de  $x$  em que a função fica no conjunto  $]1,2; 2 \cup ]2; 2,8[$ . Descreva como você encontrou estes valores.
- Podemos tomar  $x = 1$ ? Justifique sua resposta.
- Escolha alguns valores para  $x$  compreendidos entre os números que você encontrou.
- Escreva em forma de intervalo os valores de  $x$  para que os valores da função  $f(x)$  fique compreendido no intervalo  $1,2 < f(x) < 2,8$ . Em seguida, faça a representação geométrica deste intervalo.
- Descreva com suas palavras como encontrou este intervalo.

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

Essa atividade é sobre funções, mas inserimos ideias do limite. Primeiramente no enunciado quando já é apresentado que essa função está se aproximando de 2, quando tomamos valores de  $x$  próximos de 1. Como também, nas questões quando relacionamos os intervalos dos valores da função que se aproximam de 2, com o intervalo dos valores de  $x$  correspondentes. Encontramos pesquisas que falam que os alunos têm dificuldade de fazer essa relação e que ela é importante para compreensão do conceito de limite (CORNU, 1995; ZUCHI, 2005). É uma situação que os alunos dificilmente lidam no estudo com as funções, mas que precisam quando passam do trabalho com a noção intuitiva de limite de funções para o estudo da definição formal.

Nessas atividades com funções pretendíamos investigar quais esquemas eles iriam mobilizar para lidar com esses elementos que explicitamos das questões, e que são importantes na construção do conceito de limite. Visamos também, estudar as representações escolhidas e as relações que eles estabelecem entre elas, identificando filiações e rupturas que podem contribuir na construção, ou mesmo adaptação, de esquemas para lidar com o conceito de limite.

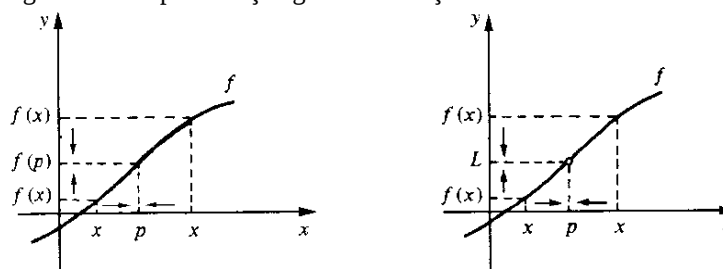
Apresentamos, após a discussão final dessas atividades, a noção intuitiva de limite de funções, e escolhemos a do livro que a professora da disciplina mais utiliza, no caso a do livro de Cálculo I do Guidorizzi:

Intuitivamente, dizer que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $p$ , é igual a  $L$  que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

Significa que quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$  tende a  $L$ . (GUIDORIZZI, 2013, p. 55).

Figura 12 – Representação gráfica da noção intuitiva de limite



Quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$

Quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$  tende

Fonte: Representação gráfica do livro Guidorizzi (2013, p. 55).

Retomamos as três funções trabalhadas anteriormente, mas com a notação de limite de funções:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x + 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . Discutimos com os alunos o que fizemos até aquele momento, que foi tentar compreender o que acontecia próximo de um ponto de uma função. Por meio de questionamentos, voltamos a algumas ideias e conceitos que foram utilizadas nas atividades, perguntamos: Por que podemos:

- ✓ Escolher números arbitrariamente próximos de um ponto?
- ✓ Escolher infinitos pontos em um intervalo?
- ✓ Escolher um intervalo tão próximo de um ponto o quanto quisermos?
- ✓ Simplificar uma função para depois encontrar o limite em um ponto?

Programamos que esse momento ocorresse ao final de um encontro para que os alunos pudessem refletir sobre o trabalho realizado e também sobre a definição apresentada.

## II. Estudo de limite finito de uma função em um ponto

As três primeiras atividades eram para trabalhar com a noção intuitiva de limite de função apresentada anteriormente, na seção 2.3. O objetivo principal foi discutir a noção intuitiva do conceito de limite e buscar aproximá-la da definição formal, por épsilon e delta que seria apresentada ao final das atividades desse grupo. Para tal, a proposta era fazer com

mais detalhes as representações de conjuntos por meio de intervalos, de módulos e de inequações, como também, a representação na forma geométrica. Vejamos os enunciados:

Quadro 10 – Atividades 1, 2 e 3

- (1) Esboce a representação gráfica da função  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ , em seguida responda as questões:
- Encontre o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e explique como fez para determinar este valor.
  - Para encontrar o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  devemos calcular o valor  $f(x)$  para  $x = 1$ ? Justifique sua resposta.
  - Os valores encontrados nos itens (a) e (b) são iguais/diferentes? Justifique sua resposta.
  - Considere os intervalos para valores de  $x$   $[0,1[ \cup ]1,2]$  e determine um intervalo no eixo  $y$  para os valores de  $f(x)$  que ficarão compreendido neste intervalo.
- (2) Considere o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$  e suponha que encontramos o valor deste limite investigando o intervalo do eixo dos  $y$  próximos de 2 mas agora escolhemos o “tamanho” desta proximidade, no caso com amplitude 0,5 que vamos chamar de épsilon ( $\varepsilon$ ), ou seja,  $\varepsilon = 0,5$ . Assim, estamos olhando os valores da função no eixo  $y$  em que  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ , ou de outro modo  $1,5 < f(x) < 2,5$ .
- Encontre valores no eixo  $x$  que correspondam exatamente aos valores da função com a amplitude  $\varepsilon = 0,5$  e explique como você fez para encontrá-los.
  - Escreva a resposta encontrada no item (a) na forma de desigualdade e veja se consegue determinar uma amplitude para o intervalo encontrado e denomine de  $\delta$  (delta).
  - Pensando agora que estamos interessados em escolher valores para  $x$  para que todo  $f(x)$  correspondente fique  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ , poderíamos ter outros valores para  $\delta$ ? Justifique sua resposta.
  - Somando 2 em todos os membros das desigualdades  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$  obtemos  $-\varepsilon < f(x) - 2 < \varepsilon$  e escrevendo na forma de módulo, temos  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ . Escreva na forma de módulo a desigualdade encontrada no item (b).
  - Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  destacando os intervalos das desigualdades encontradas no item (b) e também  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ .
- (3) Vamos retomar a questão da primeira sessão em que trabalhamos com a  $f(x) = (x + 1)$ , mas agora discutindo o  $\lim_{x \rightarrow 1} x + 1$ .
- Encontre o limite de maneira intuitiva.
  - Dado um  $\varepsilon = 0,3$  encontre um  $\delta > 0$  tal que toda vez que  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$  teremos também que  $1 - \delta < x < 1 + \delta$ .
- Explique com suas palavras como fez para encontrar o  $\delta$  e se ele é único.

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

A primeira função foi escolhida para que pudéssemos trabalhar com a situação em que o limite da função no ponto é diferente do valor que a função assume no ponto, logo em seguida da definição intuitiva. Esse aspecto é importante na compreensão do conceito de limite, pois possibilita ao estudante refletir mais especificamente sobre o fato de que o limite independe do ponto, tanto que pode ser diferente do valor que a função assume no ponto. Inferimos que essa atividade seria mais problemática que as anteriores, em que a função não estava definida no ponto de aproximação. Os momentos de dúvidas seriam oportunos para que os alunos discutissem a definição intuitiva de limite apresentada e, com isso, possibilitaria

nossa investigação dos invariantes operatórios mobilizados e do modo como estavam organizando seu esquema.

Essas atividades eram para identificar as primeiras escolhas dos alunos ao lidarem com a noção intuitiva de limite, como também investigar a possibilidade de aproximação dessa noção com a definição formal de limite. Assim, inserimos inequações com a expressão de função, como aparece na definição de limite, já pensando em como o aluno poderia relacionar tanto com a escrita da definição, como também com os intervalos trabalhados na representação gráfica.

Além disso, introduzimos os quantificadores épsilon e delta para que os alunos pudessem conhecê-los trabalhando inicialmente com uma função particular e com um épsilon fixo. Sabemos que os alunos têm muitos problemas em compreender, e trabalhar, com esses quantificadores. Essas escolhas foram realizadas a partir dos estudos que fizemos em que consideramos esses pontos importantes para compreensão do conceito de limite, mas que são problemáticos para os alunos (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983; ZUCHI, 2005).

Na discussão final da correção dessas atividades apresentamos a definição de limite de função do livro de Cálculo I do Guidorizzi:

**Definição:** Sejam  $f$  uma função e  $p$  um ponto do domínio de  $f$  ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de  $f$ . Dizemos que  $f$  tem limite  $L$ , em  $p$ , se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existir um  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in D_f$ .

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tal número  $L$ , que quando existe é único, será indicado por  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ .

Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

(GUIDORIZZI, 2013, p. 72).

No próximo encontro as três atividades iniciais são retomadas: (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  sendo  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ , (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  e (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$ , discutindo com os alunos o que foi realizado até o momento. No caso, conjecturar o limite da função em um ponto, utilizando a noção intuitiva de limite para verificar o que acontecia próximo de um ponto do domínio, como também do seu contradomínio, seja numericamente, algebricamente ou graficamente. Entretanto, naquele momento iríamos conhecer uma linguagem matemática para expressar as ideias utilizadas anteriormente, de maneira intuitiva, para encontrar o valor para o limite. Assim, retomam-se no quadro a definição formal de limite de função apresentada juntamente com a noção intuitiva que havia sido trabalhada nessas atividades, em seguida eles deveriam resolver a atividades (4), conforme o quadro 11 a seguir:

## Quadro 11 – Atividade 4

- (4) Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5 = 1$  pela noção intuitiva, confira se o valor encontrado para o limite pode ser verificado pela definição formal e responda os itens em seguida.
- a) Relacione as desigualdades encontradas, ou os módulos, da definição por épsilon e delta com a definição intuitiva de limite e justifique como fez estas relações.
  - b) Faça a representação gráfica da função dada com os intervalos encontrados.
  - c) Explique o limite da função com suas palavras, levando em consideração os itens (a) e (b), utilizando tanto a definição formal, como a intuitiva.

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

O objetivo da atividade era discutir pontos de aproximação da definição de limite de função dada com a noção intuitiva que foi trabalhada. Relacionando os elementos, como desigualdades, e/ou módulos, com as noções intuitivas “quando  $x$  tende a  $p$ ,  $f(x)$  tende a  $L$ ”, bem como, observando graficamente o que estava acontecendo com a função.

Pretendíamos identificar como o aluno estava organizando seu esquema para lidar com a definição formal de limite, e se ele conseguiria fazer alguma relação com a noção intuitiva. Alguns estudos propõem aproximações como a que fizemos para diminuir a “distância” que existe entre a definição formal de limite e a noção intuitiva (CORNU, 1983; ZUCHI, 2005). Assim, elaboramos algumas questões buscando trabalhar essa possibilidade.

Ao término discutimos com os alunos o que fizemos até esse momento, que foi tentar compreender a definição intuitiva e a definição formal de limite, mas com funções que conhecemos o comportamento, ou que podem ser facilmente resolvidas após manipulações algébricas. Nosso objetivo era focar na compreensão dos conceitos e relações envolvidas nas definições.

As próximas atividades foram trabalhadas após o recesso de final de ano e assim tivemos tempo de refletir sobre algumas produções dos alunos e reorganizamos nossa programação inicial. Uma mudança que fizemos foi trabalhar no horário fora das aulas da professora e somente com os colaboradores de nossa pesquisa. Essa escolha se deu pelo fato de que o acompanhamento dos alunos na sala de aula ficou inviável, primeiro porque os áudios ficaram ruins por haver muito ruído. E no decorrer da experimentação somente três estudantes participaram de todas as atividades. Além disso, na sala de aula não teríamos como fazer as atividades com mais tempo como pretendíamos, pois a professora precisava seguir com a sua programação. Essa escolha permitiu que pudessemos trabalhar mais próximos dos nossos colaboradores.

Decidimos, também, trabalhar as próximas atividades com os limites no infinito e limites infinitos, mas não iríamos trabalhar com a definição formal por épsilon e delta.

Fizemos essa escolha, pois vimos que os alunos tiveram muitos problemas em trabalhar com a definição formal e não conseguiram mobilizar nenhum esquema para lidar, mesmo que parcialmente, com essa situação. Diante disso, escolhemos utilizar algumas ideias intuitivas que são geralmente mobilizadas na apresentação desses casos de limites, como: de tornar  $x$  suficientemente próximo de um ponto; tomar valores de  $x$  cada vez maiores (positivos ou negativos); e a função  $f(x)$  assume valores (positivos ou negativos) cada vez maiores, cresce sem limites. Esses alunos não tinham visto esses casos de limite e isso só ocorreu após a finalização de nosso estudo no início de fevereiro de 2017, mas já conheciam a notação de limites laterais que seriam utilizadas nas atividades.

### **III. Estudo de limites no infinito ( $+\infty$ ou $-\infty$ ) e de limites infinitos em um ponto**

No estudo dos limites infinitos e no infinito, geralmente a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  é utilizada para exemplificar esses casos de limite, sendo ela já conhecida, pois é trabalhada com os alunos na disciplina de introdução ao Cálculo. Desse modo, também elaboramos as primeiras atividades com essa função, no quadro a seguir apresentamos essas questões:

## Quadro 12 – Atividades do grupo III

- 1) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  assume valores próximos de zero. Em seguida responda os itens abaixo:
  - a) Explique o que acontece com os valores da função quando  $x$  assume valores próximos de zero:
    - i. para valores de  $x > 0$ ?
    - ii. para valores de  $x < 0$ ?
  - b) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $]0, 2]$ .
  - c) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $[-2, 0[$ .
  - d) O que você pode dizer sobre o limite da função quando  $x$  tende a zero?
- 2) Investigue os limites da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  nos casos:
  - a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$
- 3) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  assume valores positivos cada vez maiores, ou seja, quando  $x$  cresce sem limite. O que acontece com os valores da função? Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $[1, +\infty[$ .
- 4) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  assume valores negativos cada vez menores, ou seja, quando  $x$  decresce sem limite. O que acontece com os valores da função? Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $]-\infty, -1]$ .
- 5) Investigue o limite da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  nos casos:
  - a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$
- 6) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  utilizando e destacando, no gráfico, os limites encontrados nas atividades (2) e (5).

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

Programamos para que as atividades de 1 até a 5 ocorressem no mesmo encontro para que pudéssemos trabalhar os casos de limites infinitos e limite no infinito com essa função que eles conheciam. Sabíamos que os alunos haviam trabalhado com essa função tanto na disciplina anterior, como também no início da disciplina de Cálculo I. O objetivo era identificar os elementos que iriam orientar as primeiras escolhas desses alunos, pensamos que essa função serviria tanto como meio de inferências, como também de controle nessas questões. Assim, poderíamos observar as representações e os teoremas em ação relacionados a situações vivenciadas com essa função que os estudantes mobilizariam para lidar com esses casos de limite.

Escolhemos trabalhar com a ideia de aproximações, em que o aluno deveria explicar o comportamento da função verificado numericamente, utilizando a linguagem natural, em seguida fazer representações gráficas dos intervalos. Depois explicar o comportamento da função diante das variações de  $x$  que foram trabalhadas, mas como um limite e com a notação de limite.

Decidimos manter uma ordem de apresentação próxima do que é proposto no ensino, mas buscamos também trabalhar as várias representações indicadas para o estudo do limite. Além disso, decidimos trabalhar o comportamento gráfico inicialmente por intervalos, pois como esses alunos poderiam ter decorado a representação gráfica dessa função, não gostaríamos que eles simplesmente fizessem o gráfico, mas que refletissem sobre o comportamento da função em cada intervalo. Assim, teríamos a possibilidade de discutir em mais detalhes algumas ideias relacionadas a esses limites, como, por exemplo, a função se torna arbitrariamente próxima de zero. A representação gráfica dessa função para todos os pontos do domínio foi proposto no final, na atividade 6, em que o aluno deveria indicar também todos os limites encontrados.

No próximo encontro incluímos a atividade 7 com duas funções semelhante a função trabalhada, em que os alunos deveriam encontrar os limites e fazer a representação gráfica. Buscamos observar se eles manteriam as escolhas feitas para a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  e também quais escolhas fariam para lidar com o caso negativo.

Quadro 13 – Atividade 7 do grupo III

- 7) Determine os limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  das funções abaixo e, em seguida, faça a representação gráfica das funções.
- a.  $f(x) = \frac{3}{x}$
  - b.  $f(x) = \frac{-3}{x}$

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

As próximas atividades tinham enunciados semelhantes às anteriores, mas com uma função diferente. No quadro a seguir apresentamos as questões:

Quadro 14 – Atividades 8, 9, 10, 11, 12 e 13 do grupo III

- 8) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  assume valores próximos de zero. Em seguida responda os itens.

| X               | -1/10 | -1/100 | -1/1000 | 1/10000 | 1/1000 | 1/100 | 1/10 | 1 | 2 |
|-----------------|-------|--------|---------|---------|--------|-------|------|---|---|
| $\frac{2+x}{x}$ |       |        |         |         |        |       |      |   |   |

- a. Explique o que acontece com os valores da função quando  $x$  assume valores próximos de zero:
- para valores de  $x > 0$ ?
  - para valores de  $x < 0$ ?
- b. Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $]0, 2]$ .
- c. Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $[-2, 0[$ .

- 9) O que podemos concluir sobre os limites da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  nos casos:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+x}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{x}$

- 10) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  assume valores positivos cada vez maiores, ou seja, quando  $x$  cresce para  $+\infty$ . Complete o quadro e diga o que acontece com os valores da função. Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $[1, +\infty[$ .

| X               | 1 | 10 | 100 | 1.000 | 10.000 | 100.000 | 1.000.000 |
|-----------------|---|----|-----|-------|--------|---------|-----------|
| $\frac{2+x}{x}$ |   |    |     |       |        |         |           |

- 11) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  assume valores negativos cada vez menores, ou seja, quando  $x$  cresce para  $-\infty$ . Complete o quadro e diga o que acontece com os valores da função. Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $] -\infty, -1]$ .

| X               | -1.000.000 | -100.000 | -10.000 | -1.000 | -100 | -10 | -1 |
|-----------------|------------|----------|---------|--------|------|-----|----|
| $\frac{2+x}{x}$ |            |          |         |        |      |     |    |

- 12) O que podemos concluir sobre o limite da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  nos casos:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+x}{x}$

- 13) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  utilizando e destacando, no gráfico, os limites encontrados nas atividades (08) e (10).

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

Escolhemos trabalhar com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , primeiramente, por ser uma função que tem a representação algébrica semelhante a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , e também por ter a mesma representação gráfica só estando transladada uma unidade acima. Inferimos que o aluno não saberia de imediato que esta função teria o comportamento semelhante, mas somente após fazer uma manipulação algébrica que teria certeza.

Inserimos a mesma ideia da atividade anterior de fazer aproximações numéricas para investigação dos limites. Pensamos que seria uma situação pertinente para estudar como o aluno conjecturaria o comportamento da função quando  $x$  tende a infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ), pois acreditávamos que eles não saberiam de imediato como era a representação gráfica dessa função. Observamos durante a aplicação das primeiras atividades que os alunos utilizam a representação gráfica tanto como meio de tomada de informação, como de controle das ações em seus esquemas. Desse modo, pretendíamos observar as mobilizações que eles fariam quando precisassem lidar com outras representações da função, seja para encontrar os limites como também para fazer a construção gráfica.

Outra variável que inserimos foi um quadro com alguns valores nas atividades (8), (10) e (11). Essa escolha se deu pelo fato de que após aplicação da atividade inicial observamos que eles não escolheram valores de  $x$  para ver o que estava acontecendo com a função no início, pois sabiam a representação gráfica da função. Todavia, neste caso gostaríamos que o aluno fizesse os cálculos e observasse o que estava acontecendo com os valores da função. Com isso, poderíamos observar se o esquema mobilizado para a função anterior seria utilizado novamente, ou se ele faria modificações, pois aqui o estudante não teria mais a representação gráfica como meio de controle de suas ações.

Cada representação comporta aspectos diferentes de um conceito, o que faz com que o aluno precise mobilizar outros invariantes. Como essas atividades são para que o estudante faça as primeiras filiações com esquemas anteriores, essa outra representação poderá dar a esse estudante outros meios tanto de controle sobre suas ações como também de inferência, que são fundamentais para que ele consiga construir esquemas eficazes para esses casos de limite.

Essa variação de representação também possibilita que o aluno faça novas associações de imagens e, assim, vá ampliando seu conceito imagem sobre esse limite de função. Esse aspecto é importante e foi destacado em algumas das pesquisas que discutimos na seção 2. A necessidade de se trabalhar com diversas representações na introdução do conceito de limite de funções, buscando relacionar aspectos dos conceitos envolvidos nas atividades com o conceito que está em construção (ALVARENGA, SAMPAIO, 2016).

Quando finalizamos as atividades sobre limite de função em um ponto, elaboramos algumas questões para entrevistarmos os alunos, bem como ao final das questões sobre limites infinitos e limite no infinito. Em seguida, apresentamos nossas escolhas para as entrevistas.

### 6.1.3 As entrevistas

Fizemos duas entrevistas com os estudantes do Brasil, uma no ano de 2016 e outra em 2017. A primeira foi realizada após a aplicação das atividades das situações de funções e dos limites finitos em um ponto; ocorreu no dia 16/12/2016, uma semana antes do recesso de final de ano. Teve como objetivo compreender melhor alguns elementos que surgiram durante a aplicação das atividades, e escolhemos nortear nossa discussão com as questões:

- ✓ Como foi fazer as atividades?
- ✓ Teve dificuldade nas atividades, seja: nos enunciados, nos números escolhidos, nas operações, nas comparações entre conjuntos, nas inequações, nos módulos, etc.
- ✓ Quais conceitos da educação básica você utilizou para compreender/responder as questões?
- ✓ O que achou mais difícil de compreender?
- ✓ O que é para você o limite de uma função, ou calcular o limite de uma função?
- ✓ A definição formal e a intuitiva, consegue relacionar uma com a outra?
- ✓ Quais questões foram mais problemáticas e quais foram esses problemas?

Essa primeira entrevista foi realizada em dupla, mantendo o modo de trabalho feito até aquele momento no andamento das atividades. Entretanto, as atividades seguintes foram realizadas pelos estudantes individualmente e, assim, também fizemos nossa segunda entrevista individualmente, sendo um estudante entrevistado no dia 25 e o outro no dia 27/07/2017.

As atividades que eles trabalharam individualmente consistiam de situações envolvendo os limites no infinito e limites infinitos. As discussões da entrevista foram norteadas conforme as respostas do estudante, desse modo, algumas das questões foram diferentes. Apresentamos as questões que fizemos ao estudante<sup>25</sup> que foi selecionado para nossas análises:

1. Como você escreveria na representação de intervalo o conjunto dado por  $x > 2$ ?      Você consegue me dizer o primeiro número depois do 2?
2. O que é o limite de uma função em um ponto?
3. Qual número é menor?
  - a. 0,6 ou 0,324?
  - b. 0,59 ou 0,589?
  - c. 0,13 ou 0,3?

---

<sup>25</sup> Ao final da nossa experimentação tínhamos quatro alunos participando, sendo que alguns deles não fizeram todas as atividades e nem a última entrevista. Somente dois deles participaram de todas as atividades e das entrevistas, um deles é o aluno que apresentamos na tese.

4. Quanto é 0,0003-1?
5. Você lembra-se da noção intuitiva de limite trabalhada nas primeiras atividades? A definição formal de limite, com  $\epsilon$  e  $\delta$ ?
6. Na atividade (1) do dia 23/01/2017 você respondeu no item (a) que:  
 *$f(x)$  tende a  $+\infty$ , pois quando escolhemos valores de  $x$  maiores que zero e próximos do mesmo o valor de  $f(x)$ , para os valores de  $x$  escolhidos, começa a tender para  $+\infty$ .*

**Explique as frases:**

- a) O valor de  $f(x)$ , para os valores de  $x$  escolhidos, começa a tender para  $+\infty$ .
- b) O valor de  $f(x)$ , para os valores de  $x$  escolhidos, começa a tender para  $-\infty$ .
7. Como você faria para esboçar o gráfico das funções:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2+3x^3}, \text{ b) } f(x) = \frac{1}{3x^3}, \text{ c) } f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

Escolhemos as questões iniciais relacionadas ao conjunto dos números reais para buscarmos mais informações nos esquemas que esse estudante mobilizava para resolver as atividades; tanto com limites finitos em um ponto, como também com limites no infinito. Nos áudios encontramos diversos momentos em que ele discutia com seu colega sobre situações semelhantes, tendo dúvidas em como: escrever extremos de intervalos abertos, ou em fazer contas com números na forma decimal.

Em seguida apresentamos nosso estudo com o estudante brasileiro.

## 6.2 O Trabalho com os estudantes

Iniciamos nosso trabalho com os alunos em dezembro de 2016. Naquele mês realizamos cinco encontros de aproximadamente 1h e 30 minutos cada, em que aplicamos as atividades sobre limites finitos de função em um ponto. Os alunos trabalharam em duplas, mas cada um resolvia sua atividade em uma folha separada, ao final fizemos a primeira entrevista. Após o recesso de final de ano retomamos nosso estudo e aplicamos as atividades sobre limites infinitos e limite no infinito, em quatro encontros de aproximadamente 2 horas cada. Os alunos trabalharam individualmente nessas atividades. Todas as discussões que ocorreram durante as atividades foram registradas em áudio, e aproximadamente seis meses após aplicação das atividades fizemos nossa segunda entrevista. Apresentamos no quadro 15 essas informações especificando as datas em que elas aconteceram.

Quadro 15 – Datas das atividades realizadas no Brasil

| Atividades                                                     | Itens e datas de aplicação                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Questionário                                                   | 30 de novembro de 2016                                                                                                                                                                |
| Atividades sobre funções: 1, 2 e 3                             | 05/12/2016 – Apresentação da pesquisa e atividade 1<br>07/12/2016 – Atividades 2 e 3 – Apresentação da noção intuitiva de limite                                                      |
| Limite finito<br>Atividades: 1, 2, 3 e 4.                      | 09/12/2016 – Atividade 1 e iniciamos a 2<br>12/12/2016 – Atividades 2 (Finalização) e 3 – Apresentação da definição de limite por $\epsilon$ e $\delta$ .<br>14/12/2016 – Atividade 4 |
| 1ª entrevista                                                  | 16/12/2016 – Em dupla                                                                                                                                                                 |
| Limites infinitos e limite no infinito<br>Atividades: 1 até 13 | 23/01/2017– Atividades 1 a 5<br>25/01/2017– Atividades 5 (continuação) e 6<br>27/01/2017– Atividades 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 (início)<br>30/01/2017– Atividade 13 (continuação)      |
| 2ª entrevista                                                  | 25/07/2017 – Individual                                                                                                                                                               |

Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Tivemos dois estudantes<sup>26</sup> brasileiros que participaram de todas as atividades aplicadas no Brasil. Como os dois não tiveram muita diferença quanto aos pontos que citamos na metodologia<sup>27</sup> para estudo do processo de construção do conceito de limite, selecionamos um deles para apresentarmos nesta pesquisa.

### 6.2.1 Mateus em atividade

Decidimos dividir nossa apresentação dos caminhos percorridos por Mateus<sup>28</sup> em nossa experimentação em dois momentos. Primeiramente trabalhamos a fase I de nossa metodologia de análise, em que expomos os dados produzidos na ordem das atividades realizadas, inserindo também os que foram obtidos nas entrevistas. O objetivo foi detalhar as produções desse aluno, conforme as representações utilizadas, buscando evidenciar a modelagem que fizemos das ações dele em elementos dos esquemas, no caso as regras em ação e os teoremas em ação.

Num segundo momento, trabalhamos as fases II e III de nossa metodologia de análise. Momento em que separamos os casos de limite de funções com as funções, e as representações, utilizadas nas atividades. Nossa intenção foi relacionar esses elementos modelizados com os casos de limite de funções, para estudarmos esquemas mobilizados por

<sup>26</sup> Esses dois alunos estavam junto quando trabalharam nas atividades dos grupos I e II, realizadas em duplas. Somente eles fizeram todas as atividades, tivemos mais três alunos que trabalharam até o final, mas que faltaram em algumas das atividades ao longo da experimentação.

<sup>27</sup> Mantivemos o mesmo aluno que apresentamos na qualificação, pois não identificamos diferenças que fossem significativas para o estudo proposto nessa pesquisa. Todavia, pretendemos produzir artigos com outras discussões sobre as produções dos outros estudantes brasileiros.

<sup>28</sup> O estudante consentiu que mantivéssemos seu nome verdadeiro para apresentação em nossa pesquisa.

Mateus para esses limites. Em seguida, esses elementos foram retomados, e relidos, como imagens do conceito imagem desse aluno, relativo aos casos de limite de função. Nosso interesse foi investigar as imagens mobilizadas por esse aluno relacionadas com a definição intuitiva de limite de funções apresentada no livro adotado e no ensino. Como também, identificar imagens que poderiam conflitar, tanto com outras imagens do conceito imagem, ou ainda com algum aspecto envolvido na definição apresentada. Bem como, imagens que poderiam estar se constituindo como um conceito definição pessoal de Mateus para esses casos de limite de funções.

Iniciamos nossa experimentação no dia 30 de novembro de 2016 aplicando o questionário. Mateus tinha 17 anos quando respondeu nosso questionário se propondo a participar de nossa pesquisa. Ele relatou que na educação básica teve dificuldade em trabalhar com os conjuntos de números racionais e irracionais, e que estava cursando a disciplina de Cálculo I pela primeira vez. É um acadêmico que escolheu fazer o Curso de Matemática – Licenciatura, pois deseja ser um professor de matemática e, apesar de ser essa a finalidade do curso, sabemos que nem todo aluno ingressa com esse intuito (BITTAR, OLIVEIRA, SANTOS & BURIGATO, 2012). Muitos procuram esse curso com objetivo de aprender mais matemática, por exemplo, para passarem em concursos, mas para Mateus os conceitos matemáticos farão parte da sua prática profissional.

Em seguida, iniciamos a apresentação do percurso do Mateus durante aplicação das atividades.

#### **6.2.1.1 Fase I - As ações de Mateus durante nossa experimentação**

Iniciamos nossa experimentação com atividades sobre funções, buscando estudar o que acontecia com os valores da função quando tomamos valores próximos de um ponto. Nestas atividades Mateus teve um pouco de dificuldade em compreender os enunciados e discutiu bastante com o seu colega para poderem chegar a um consenso sobre o que estava sendo pedido nas atividades. Esse aspecto foi destacado em sua fala na primeira entrevista, segundo ele foi importante ter discutido com um colega, pois o auxiliou tanto na compreensão dos enunciados, como também permitiu que ele pudesse conferir suas respostas com a de outro colega.

Na atividade (1.1) Mateus iniciou escolhendo valores para a função e fazendo as contas, mas depois percebeu que se tratava de uma função similar à função identidade e que não precisaria ficar fazendo contas. Do mesmo modo, na atividade (1.3), ele percebeu que

poderia simplificá-la e trabalhar com a expressão mais simples. No caso, consideramos que ele mobilizou o teorema em ação adequado: Se tenho uma função que consigo simplificar através de manipulação algébrica, então essa nova função simplificada, com o mesmo domínio da função inicial, será equivalente à função inicial. Este conhecimento também está relacionado ao fato dessas funções iniciais terem uma restrição em um ponto do domínio, no caso o ponto em que as atividades estavam relacionadas. Mateus comentou isso em alguns momentos dos áudios e, na folha da atividade (1.3) no item (b) ele justificou que não pode tomar  $x=1$  porque não faz parte do domínio da função. Assim, consideramos também como um teorema em ação adequado: Se a função tem restrição em algum ponto do domínio então eu não posso calcular  $f(x)$  neste ponto.

Nas atividades de aproximação, ou de escolha de números em um intervalo, Mateus trabalhou inicialmente com números na representação decimal, mas percebeu que seu colega estava colocando os números na forma de fração e o questionou *<Tem de pôr como fração?>* Seu colega disse que achava que não, mas ao final Mateus mudava para a representação na forma de frações, sendo algumas delas frações decimais, isso talvez tenha acontecido porque seu colega disse que era mais fácil utilizar números nessa forma.

Ao longo das duas atividades (1.1) e a (1.2), Mateus manteve essa escolha, mas na atividade (1.3) voltou a utilizar números na representação decimal e no item (c) teve dúvida em escolher números entre o intervalo  $]0,4; 0,6[$ . Ele questionou o colega *<0,41 fica entre 0,4 e 0,6, né?>* seu colega diz que sim e, em seguida, Mateus perguntou se o número 0, 411 também ficava entre os extremos do intervalo dado e obtém como resposta um modo para verificar: *<faz assim, coloca 0, 400, aí fica fácil para você verificar>*. Essa é uma dúvida que aparece bastante em pesquisas, identificar qual número é maior, ou menor, entre dois números na representação decimal. Depois dessa sugestão dada por seu colega, Mateus não teve mais dificuldade em atividades semelhantes. Podemos inferir que esse conhecimento sugerido por seu colega, se constituiu em um teorema em ação adequado que permitiu ao Mateus ter um meio de controle e de inferência para verificar sua resolução, já que pelas suas falas vimos que ele apresentava um número que satisfazia a resposta, mas ficava em dúvida se estava realmente correto. Modelizamos como um teorema em ação: se acrescentarmos zeros na representação decimal de um número, após a vírgula, esse número não será alterado (se em 0,d acrescentarmos mais zeros como 0,d000, então  $0,d=0,d000$ ).

Outra dúvida que Mateus teve na atividade (1.1) foi em como representar um intervalo em que um dos extremos não faz parte do conjunto. No caso, ele deveria representar os conjuntos  $[-9, 1[ \cup ]1, 9]$ , mas teve dificuldade em colocar esse intervalo sem o número 1 e

acabou escolhendo um número que considerou mais próximo do 1, podemos observar sua resposta na figura 13:

Figura 13 – Resolução da atividade (1.1) item (a)

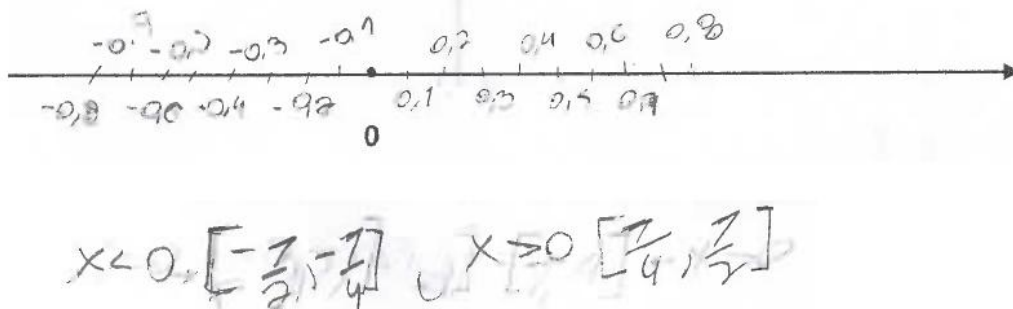
The image shows a handwritten mathematical expression:  $x \in \mathbb{R} [-9, -2] \cup [2, 9]$ . The expression is written in black ink on a white background. There is a small green underline under the union symbol  $\cup$ .

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Desse modo, inferimos que naquele momento ele usou um conhecimento que poderia se constituir como teorema em ação matematicamente incorreto. Modelizamos como: Se o número  $x$  não faz parte do intervalo então é preciso escolher um número mais próximo dele para ser o extremo do intervalo, neste caso ele escolheu o número inteiro mais próximo de modo a deixar o número  $x$  fora do intervalo.

Observamos esse mesmo equívoco na atividade (1.2) no item (b) em que era preciso escolher intervalos mais próximos de  $x < 0$  e  $x > 0$ , conforme a representação geométrica do item (a). Podemos ver na figura 14 como Mateus lidou com a atividade.

Figura 14 – Resolução da atividade (1.2) itens (a) e (b)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

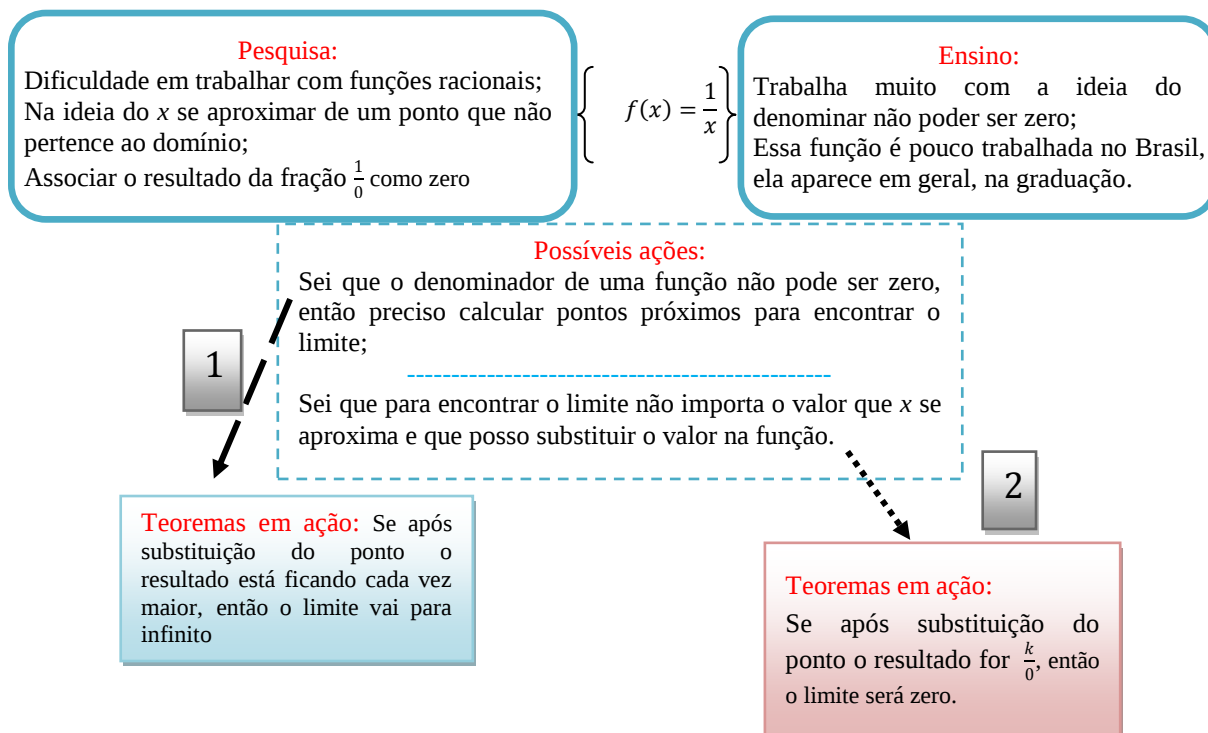
Novamente Mateus escolheu um número que considerou mais próximo do número que não fazia parte dos intervalos, no caso o número zero. Ele escolheu um número racional na forma de fração, mas conseguimos ver que primeiramente utilizou números na representação decimal e depois apagou. Apesar disso, ele não teve dúvidas ao dizer que em um intervalo como  $[-3, -2]$  há infinitos números, apresentou três números neste intervalo como exemplo  $\{-\frac{5}{2}, -\frac{23}{10}, -\frac{28}{10}\}$  e justificou dizendo que isso acontece porque se está trabalhando com o conjunto dos números reais. Utilizando assim um teorema em ação para validar sua resolução, que modelizamos como: sejam  $a$  e  $b$  números reais, tais que  $a < b$ , se  $a$  e  $b$  são extremidades de um intervalo, aberto ou fechado, então existem infinitos números reais no interior deste intervalo.

A noção de que o limite de uma função é o valor que a função se aproxima quando  $x$  se torna próximo de um ponto, mesmo esse ponto não fazendo parte do domínio da função,

não é evidente. Ela demanda o conhecimento de que é possível se aproximar desse ponto, tão próximo quanto se queira e, por isso, não é possível escolher qual é o número mais próximo, pois se for escolhido um número sempre haverá outro depois dele que será mais próximo e assim sucessivamente. O que envolve a compreensão de aspectos do conjunto dos números reais envolvidos na construção do conceito de limite. Esse fato é importante, pois pesquisas apontam que os alunos têm dificuldades em lidar com essas noções (ARTIGUE, 1995; CORNU, 1983).

Para compreensão dos processos vivenciados pelo aluno, primeiramente, por orientação da teoria de Vergnaud (1986, 1990), escolhemos identificar e modelar elementos dos esquemas, que citamos na seção 3.1 no caso as regras em ação e os teoremas em ação. Esse primeiro é gerador do esquema, responsável pelo desenvolvimento das ações ao longo do tempo na atividade, tanto na obtenção das informações (tomada de informação) como nos meios de controle. O segundo auxilia na organização do primeiro e nos permite identificar elementos do processo de conceitualização, na maioria das vezes implícitos, nas ações realizadas. Vejamos na figura 15, um exemplo de como fizemos esse trabalho, considerando a função trabalhada, elementos do ensino e das pesquisas e dois possíveis caminhos de modelagem.

Figura 15 – Exemplo da modelagem realizada



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Essa modelagem foi feita considerando a discussão que fizemos na apresentação das atividades, as dificuldades evidenciadas nas pesquisas e que foram sintetizadas no quadro 2. As relações imbricadas no campo conceitual que apresentamos no quadro 5, bem como a proposta para introdução do conceito de limite de função do livro didático e também as listas de atividades utilizadas pela professora desse curso. Assim, buscamos levantar um maior número de informações da resolução apresentada pelo estudante, como desenhos, contas em rascunhos, suas explicações escritas e orais e também suas discussões com outro colega. Com isso, modelizamos as regras em ação, como as ações que geram o esquema e que, ao mesmo tempo, são responsáveis pelo desenvolvimento temporal das ações que ocorrem ao longo da atividade. Possibilitando que o aluno, ao mesmo tempo, consiga as informações necessárias para condução da atividade, como também tenha meios de controle sobre as ações. Vinculamos as regras em ação aos teoremas em ação que identificamos e modelizamos no mesmo conjunto de ações. A partir desse momento apresentamos a modelagem que fizemos dos elementos dos esquemas mobilizados com a notação<sup>29</sup>:

- ✓ (RB.nº) – São as **regras em ação** do estudante **brasileiro** seguido de um número de identificação [1, 1.a, 1.b, 2,...];

<sup>29</sup> Colorimos essas explicações para ficar mais fácil de perceber a diferença entre as notações.

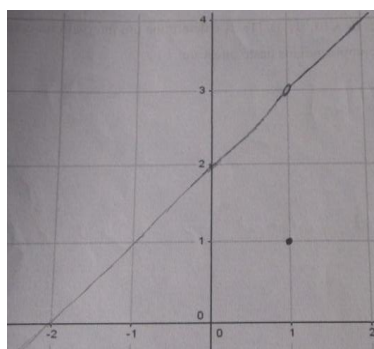
- (TAB.nº) – São os **teoremas em ação** do estudante **brasileiro** seguido de um número de identificação [i, ii, iii,...];
- (TAB.nº) – São os **teoremas em ação** do estudante **brasileiro** seguido de um número de identificação [1, 2, 3,...] que são **incorretos** do ponto de vista matemático, ou não são válidos para a situação.

Em seguida apresentamos o percurso do Mateus nas atividades de introdução do conceito de limite de função em um ponto e no decorrer delas discutimos suas ações ao lidar com as questões, e se o teorema em ação incorreto, citado anteriormente, voltou a aparecer em suas resoluções. Bem como, a dificuldade que ele apresentou quando precisou determinar qual número era maior, entre dois números representados na forma decimal, e também com relação à ideia de entre dois números reais existem infinitos números. Essa dificuldade, bem como a ideia de que, estão relacionadas à compreensão do conjunto dos números reais, e sabemos que eles são importantes na construção do conceito de limite (ARTIGUE, 1995).

### Atividades envolvendo limite de uma função em um ponto

Dois dias após realização da atividade (1.3) e da apresentação da definição intuitiva, de limite finito de uma função em um ponto, iniciamos as atividades com limite de funções. Mateus iniciou a atividade (2.1) esboçando a representação gráfica da função, como se pedia no enunciado. Era a função  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$  e ele fez a representação gráfica corretamente como podemos observar na figura 16.

Figura 16 – Representação gráfica da atividade (2.1)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Mateus parece que não teve dificuldades em trabalhar com domínio e nem em fazer a representação gráfica dessa função. Suas ações são orientadas pelos conhecimentos que ele tinha sobre função, que modelizamos como uma regra em ação:

- ✓ (RB.2b) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função definida por partes, eu sei que preciso fazer cada parte do gráfico levando em

consideração somente os pontos do domínio em que a expressão algébrica está definida.

No item (a) Mateus escolheu pontos próximos a 1 para encontrar o limite e concluiu que o limite era 3. No item (b) parece que ele não teve dificuldade e apresentou a resposta correta, como pode ser visto na figura 17, a seguir.

Figura 17 – Resolução da atividade (2.1) itens (a) e (b)

a) Encontre o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e explique como fez para determinar este valor.

$f(0.8) = 2.8$   
 $f(0.9) = 2.9$   
 $f(1.1) = 3.1$   
 $f(1.2) = 3.2$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$   
 Encontrando os  $y$  para valores de  $x$  próximos a 1.

b) Calcular o valor  $f(x)$  para  $x=1$ .

$f(1) = 1$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Mateus mobilizou esquema que ele utilizava, e eram efetivos, para o estudo de funções e foi ampliando para o estudo de limite, modelizamos em suas ações a regra em ação:

- ✓ (RB.3) Quando preciso saber o limite de uma função em um ponto  $p$ , eu faço cálculos de vários pontos próximos ao ponto  $p$  para descobrir o que está acontecendo com o limite da função quando  $x$  se aproxima de  $p$ .

Assim, ele infere que o limite é 3, conforme observamos na figura 18. Contudo, quando precisou responder o item (c), ele ficou em dúvida e questionou a pesquisadora se o limite era 3. Disse a ele que era essa exatamente a pergunta daquela atividade e que gostaria de saber o que ele pensava sobre isso. Mateus então fala que fez os cálculos de alguns valores próximos do  $x=1$ , como fez na outra atividade, e que estava dando valores, como: 2.8, 2.9 e 3.1, aqui ele mobilizou novamente a regra em ação (RB.3) para lidar com a questão. Dito isso, ele questionou se o limite será o valor que está entre esses valores. Relembro para ele que em outra situação buscamos verificar o que acontecia com os valores da função quando nós nos aproximávamos de um ponto do domínio, sem calcular o valor da função nesse ponto, mas ele alega que aqui é diferente <quando é 1 é 3, mas aí o 1 aqui é diferente...>. Neste momento eu o deixei para que ele pudesse pensar e discutir com o seu colega.

Observando a resolução do Mateus na folha de atividade do item (c) poderíamos inferir que para ele o limite quando  $x$  tende a 1 tende a 3, não sendo 3. A ideia do limite não ser atingido, que aparece em alguns estudos (CORNU, 1983; SANTOS, 2013), vejamos sua resposta na figura 18.

Figura 18 – Resolução do item (c) da atividade (2.1)

c) Observando os itens (a) e (b) o que você diria sobre o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e justifique sua resposta.

C  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1 e  $y$  tende a 3, mas quando  $x = 1$  e  $y = 1$ .

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Nesse aspecto, o áudio foi importante para compreendermos a ideia de limite deste aluno, pois no momento em que seu colega diz que não havia entendido o que esta questão pedia, Mateus, ao discutir com seu colega, nos dá indícios do esquema que está mobilizando para resolver a atividade. Ele explica que *<quando  $x$  tende a 1 tem que ver os valores próximos de 1. Quando  $x$  é 1, os valores próximos aqui, você faz assim 0,9; 0,8; 1,1... aí você vê os valores que está no  $y$ . O limite vai ser o que ele tá tendendo, vai dar 3 porque quando você coloca 0,9 o 0,8 [...] o  $y$  vai tendendo a ser 3. O limite vai ser 3>*. E seu colega questiona sobre o  $f(1)=1$ , mas Mateus argumenta *<Quando  $f(x)$ ...o  $x$  tende a 1, o limite..  $y$  tende a 3, mas quando é igual a 1.. é igual a 1>*. Vemos que Mateus, ao conversar com seu colega vai refletindo e parece já compreender o que está acontecendo nesta atividade *<O  $y$  vai tendendo a ser 3, então o limite vai ser 3>*. Seu colega fala então: *<Ah! Que legal, e ela colocou outro ponto já para...hum...hum>*. Nesse momento Mateus volta com a mesma dúvida *<É tem esse negócio quando  $x$  é 1. Só que tem um negócio, o limite vai ser 3 ou vai ser 1? Que tipo aqui, ele vai tendendo a ser 3, mas quando é 1 ele é 1>*. Seu colega complementa *<Na verdade vai tendendo a 3, mas...>* e Mateus *<Mas quando é 1 ele é um 1>*. Seu colega finaliza explicando que *<É que está falando quando está tendendo a um, mas não quando é igual a 1>*.

A dúvida de Mateus não era se o limite seria 3, ou tenderia a 3, a ideia do limite não ser atingido, mas sim o fato do limite ser diferente do valor que a função assume no ponto. A discussão com o colega possibilitou que Mateus se convencesse que o valor do limite e o valor da função no ponto eram diferentes. Ele, já não tendo mais dúvida, começou a explicar para outro colega, ao lado de sua dupla, que estava tendo a mesma dificuldade em compreender essa atividade. Podemos inferir que ele utilizou o fato de que o limite em um ponto é o valor que a função assume próximo desse ponto e, com esse exemplo ele percebeu que nem sempre é o mesmo valor da função naquele ponto. Modelizamos nessas ações de Mateus os teoremas em ação:

- (TAB.i.a) Se os valores da função se aproximam de um valor  $L$  quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , então o limite da função é  $L$  quando  $x$  tende a  $p$ ;
- (TAB.ii) Se a função é definida no ponto  $p$  e tem limite neste ponto, nem sempre ele é o mesmo valor da função no ponto  $p$ .

O último item (d) em que deveria encontrar os intervalos no eixo y, relacionado com o intervalo dado no eixo x, Mateus não teve dificuldade, calculou os valores da função para os extremos dos intervalos e respondeu corretamente, conforme figura 19.

Figura 19 – Resolução do item (d) da atividade (2.1)

d) Considere os intervalos para valores de  $x$   $[0; 1[ \cup ]1; 2]$  e determine um intervalo no eixo y para os valores de  $f(x)$  que estão compreendidos neste intervalo.

$$y = [2, 3[ \cup ]3, 4]$$

Fonte: Coleta pela autora da pesquisa.

Na atividade (2.2) o colega do Mateus teve dificuldade em encontrar o ponto  $x$  correspondente ao  $f(x)$  dado e, ele explica, que é preciso encontrar o  $x$  correspondente aos valores da função, que no caso é dada pela expressão  $1,5 < f(x) < 2,5$ . Trata-se do caminho inverso que ele havia feito no item (d) da última questão. Podemos ver na figura 20 a sua resolução.

Figura 20 – Resolução da atividade (2.2) item (a)

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Mateus fez corretamente as manipulações algébricas, bem como a simplificação da expressão algébrica da função. Ele parece saber que se uma função pode ser simplificada através de manipulação algébrica, a nova função simplificada, com o mesmo domínio da função inicial, será equivalente à função inicial. Ele usou também o fato da função ter uma restrição no ponto  $x = 1$ . Em seu esquema modelizamos a regra em ação:

- ✓ (RB.4) Quando preciso encontrar o limite de uma função racional, eu sei que posso simplificar a expressão algébrica da função para trabalhar com uma expressão mais simples, para facilitar os cálculos.

Inferimos também que implicitamente ele mobiliza o teorema em ação:

- (TAB.vii) Se uma função  $f$  pode ser simplificada, então o limite da função  $f$  simplificada será igual ao limite da função  $f$ .

No item (b) ele deveria transformar os intervalos obtidos no item anterior e encontrar o delta. Mateus apresentou um valor correto para o delta, no caso  $\delta = 0,3$ , mas acreditamos que essa escolha foi por acreditar que precisaria encontrar um valor próximo ao ponto 1. Inferimos isso, primeiro porque no item (a), na figura 21, ele já havia feito a representação dos conjuntos na forma de inequações. No item (b) ele escolheu  $\delta = 0,3$  e depois subtraiu esse delta

do primeiro membro das desigualdades e somou ao último membro da última desigualdade, utilizando uma propriedade que não é válida como podemos ver na figura 21. Desse modo nos parece que a escolha desse delta não foi realizada refletindo sobre as inequações.

Figura 21 – Resolução da atividade (2.2) do item (b)  
 determinar uma amplitude para o intervalo encontrado e denome de  $\alpha$  (delta).

$$\alpha = 0,3 \rightarrow 0,5 - \alpha < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 1,5 + \alpha$$

$$0,2 < x < 1 \text{ ou } 1 < x < 1,3$$

$$0,2 < x < 1,3$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Observamos também, que ao final, Mateus coloca como resposta o conjunto referente a elementos da imagem, mesmo o enunciando se referindo ao conjunto do domínio, encontrado no item (a). Vemos que primeiramente ele faz o que o enunciado solicita, mesmo que incorretamente, mas não deixa explícito na resposta que se trata de elementos do domínio e sim da imagem. Inferimos que seu esquema está pautado na ação que modelizamos como a regra em ação:

- ✓ (RB.5) Se estou resolvendo qualquer atividade com funções, eu sei que preciso trabalhar com os elementos do domínio.

O que levou Mateus a mobilizar um conhecimento incorreto que modelizamos no teorema em ação:

- (TAB.3) No estudo de limite de funções, sempre é preciso trabalhar, com elementos do domínio para obter a resposta em termos de  $f(x)$ .

De fato, nos áudios observamos uma fala sobre isso, quando ele está explicando como fazer para um colega <Estou pensando em deixar em  $y$ , você não pode deixar em  $x$ >. Ele mostra ao colega o item e diz <Esse aqui, é esse intervalo que você só adicionou, ele é o  $x$ , mas acho que você tem de deixar assim como  $f(x)$ . Aí você só adiciona mais 1>. Essa ideia de somar mais 1 está relacionada à função trabalhada na atividade que após simplificada ficava  $f(x) = (x + 1)$ .

Mateus não soube interpretar o que encontrou, e também não conseguiu deixar a resposta em termos de  $x$ , no caso como elementos do domínio. Quando teve de justificar se o delta poderia ter outros valores, no item c, ele respondeu na folha de atividade que sim, e que poderiam ser <Outros valores próximos de 1, pois para se obter o limite tendendo a 1 precisamos descobrir os valores de  $f(x)$  próximos a 1>. Esse é o segundo ponto que nos fez inferir que o esquema de Mateus estava pautado na regra em ação que modelizamos como:

- ✓ (RB.6) Quando estou resolvendo uma atividade sobre limite e preciso lidar com elementos do domínio, eu sei que preciso trabalhar com valores próximos ao ponto que estamos lidando com o limite.

Mateus parece que teve dificuldade em trabalhar com o intervalo, ainda mais no sentido contrário ao trabalhado no ensino usual, do domínio para a imagem. Pela sua justificativa, o delta parece ser um ponto da função e não a amplitude do intervalo relacionado ao épsilon.

Vemos que ao justificar ele mobiliza o conhecimento que está em processo de construção, mas que se mostrou efetivo nas outras atividades, no caso o teorema em ação:

- (TAB.i.a) Se os valores da função se aproximam de um valor  $L$  quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , então o limite da função é  $L$  quando  $x$  tende a  $p$ .

Mateus buscou mobilizar elementos do novo conceito para lidar com uma nova situação, no caso a noção intuitiva de limite de função em um ponto. Contudo, como ele ainda tem forte a ideia de que para resolver uma situação sempre trabalhamos com elementos do domínio, e não com intervalos, ele tenta adequar seus esquemas para lidar com essas novas situações.

O item (d) era para escrever as inequações encontradas no item (b) em módulo. Mateus não conseguiu fazer corretamente e, sem saber o que fazer com esses dois números, épsilon e delta, optou por inseri-los de algum modo nas inequações, figura 22, mesmo sem coerência.

Figura 22 – Resolução da atividade (2.2) item (d)

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, there is a crossed-out expression  $1,24(x) \approx 1,8$ . Below it, the student has written three inequalities:  $2 - \epsilon - \delta < f(x) < 2 + \epsilon + \delta$ ,  $-\epsilon - \delta < f(x) - 2 < \epsilon - \delta$ , and  $|f(x) - 2| < \epsilon + \delta$ . The handwriting is somewhat messy, reflecting the student's confusion.

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa

Mateus estava muito confuso e mobilizava esquemas conhecidos para lidar com inequações, e de funções, de modo aleatório, inclusive errando propriedade de manipulação de inequações que ele parecia saber. Encontramos um momento nos áudios em que seu colega fala que está difícil, Mateus concorda e argumenta que está *<Complicado esse negócio, não estou entendendo nada!>*.

Nessas atividades, para discutir o limite de maneira intuitiva, ele parece estar tentando atribuir sentido a esse épsilon e delta que são números, mas que não são pontos nem do

domínio nem da imagem da função, mas que têm relação diretamente com esses pontos, mais precisamente com os conjuntos de pontos da imagem e do domínio. No gráfico, ele não conseguiu inserir esses intervalos das desigualdades que trabalhou corretamente, no item (a). Mateus ainda não compreende como esses números, representados por épsilon e delta, estão relacionados com a definição intuitiva. Diante deles, faz manipulação algébrica e tenta relacionar com a ideia de aproximação de um ponto, mas somente com os pontos do domínio. Inferimos que seus esquemas se pautam principalmente na regra em ação que modelizamos como:

- ✓ (RB.5) Se estou resolvendo qualquer atividade com funções, eu sei que preciso trabalhar com os elementos do domínio.

Na atividade (2.3), Mateus encontrou o limite corretamente, calculando alguns pontos próximos do valor de  $x=1$  e, em seguida, escreveu a expressão algébrica do limite com o resultado. No item (b) Mateus fez a manipulação das inequações dadas e encontrou o valor para o delta igual ao épsilon dado, na figura 23 apresentamos sua resolução.

Figura 23 – Resolução da atividade (2.3)

- a) Encontre o limite de maneira intuitiva.

$$\begin{array}{l} f(0,5) = 1,5 \\ f(0,7) = 1,7 \\ f(0,9) = 1,9 \\ f(1,1) = 2,1 \\ f(1,3) = 2,3 \\ f(1,5) = 2,5 \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$$

- b) Dado um  $\varepsilon = 0,3$  encontre um  $\delta > 0$  tal que toda vez que  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$  teremos também que  $1 - \delta < x < 1 + \delta$ .

$$\begin{array}{l} 1,7 < f(x) < 2,3 \\ 0,7 < x < 1,1 \\ \delta = 0,3 \end{array}$$

- c) Explique com suas palavras como fez para encontrar o  $\delta$  e se ele é único.

O  $\delta$  pode ser 0,3, pois  $1,7 < f(x) < 2,3 \rightarrow 0,7 < x < 1,1$   
e existe se  $\delta = 0,3$ .

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Modelizamos em suas ações a regra em ação:

(RB.3) Quando preciso saber o limite de uma função em um ponto  $p$ , eu faço cálculos de vários pontos próximos ao ponto  $p$  para descobrir o que está acontecendo com o limite da função quando ela se aproxima  $p$ .

E os teoremas em ação:

- (TAB.i) Se os valores da função se aproximam de um valor  $L$  quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , então o limite da função é  $L$ ;

- (TAB.iii) Se a função em que vou calcular o limite não tem nenhuma restrição no ponto de investigação do limite então posso substituir o ponto na variável  $x$  da função.

Para encontrar o delta ele fez a substituição pelo  $\epsilon$  dado nas inequações dos valores da função, no caso elementos do conjunto da imagem, e verificou a variação do  $x$  nesse conjunto do domínio. Com isso ele percebeu que dará certo se delta for igual a  $\epsilon$ , e nesse caso é porque estamos com a função  $f(x)=x+1$ . Assim, ele justifica que o delta deverá ser igual ao  $\epsilon$ . Esse novo conhecimento poderá se tornar um problema caso ele se estabilize, pois compromete a compreensão da definição de limite, tanto do ponto de vista de uma aproximação, como também pela noção de intervalo utilizada na definição formal. Modelizamos como um teorema em ação:

- (TAB.1) Se o limite existe, então o  $\delta$  deve ser igual ao  $\epsilon$  dado.

Na última atividade (3) o objetivo era que Mateus verificasse se o limite encontrado intuitivamente satisfazia a definição formal. A primeira dúvida dele era com relação aos novos elementos que surgiram com a definição por  $\epsilon$  e delta. Ele pergunta ao colega quem é o  $p$ ? E se  $x$  é 3? Ele se confunde com o  $x$  tendendo a 3 na expressão de limite, com o  $x$  que aparece na definição na expressão  $0 < |x-p| < \delta$ . Como esta era uma dúvida geral eu fui ao quadro falar sobre a definição formal, discutindo as inequações com módulos que aparecem com a expressão de limite, relacionando com a representação gráfica, para que eles mesmos pudessem identificar as relações do limite da atividade (3) que estavam trabalhando, com as expressões que aparecem na definição. Após essa apresentação eles continuaram a atividade, mas com bastante discussão entre eles sobre o que fazer com as expressões encontradas.

Mateus faz as substituições nas expressões da definição e inicia a resolução com a expressão  $|(2x-5)-1| < \epsilon$ , chegando a  $|x-3| < \epsilon/2$  percebe que é equivalente à parte das outras inequações  $0 < |x-3| < \delta$ , mas ele tem dificuldade em relacionar o  $\delta$  em termos de  $\epsilon$ . Na primeira entrevista, ele disse que achava estranho deixar com uma letra, pois acreditava que precisaria encontrar um valor. No esquema mobilizado pelo Mateus parece estável um conhecimento incorreto que modelizamos como o teorema em ação:

- (TAB.2) O resultado de uma atividade com uma expressão algébrica sempre será um número.

Essa dificuldade de Mateus é comum, evidenciada em estudos tanto sobre pesquisas com a álgebra, como também com as funções, em que os alunos acham estranho deixar como resposta um número na forma geral, ou uma expressão algébrica.

Ao final, no item (c), pede-se para relacionar o limite dado pela definição intuitiva com o limite verificado pela definição formal. Mateus consegue explicar a ideia intuitiva do limite, mas na definição formal ele não percebe que o delta está relacionado ao épsilon, parece pensar o inverso, pois diz que para encontrar *<o intervalo de  $|f(x)-1|<\varepsilon$  é preciso encontrar os valores de  $f(x)$  encontrando os  $x$  próximos a 3>*. No ensino básico os alunos lidam muito com essa ideia de que dado  $x$  eles precisam encontrar o valor da função, mas o caminho inverso parece não ser muito natural para os alunos. De fato, nos áudios foi possível observar o colega do Mateus argumentar sobre isso. Ele não conseguia inserir os intervalos na representação gráfica no eixo  $y$  e fala ao Mateus que no ensino médio *<A gente não via imagem, só domínio, domínio...>*. Seu esquema foi pautado na regra em ação:

- ✓ (RB.5) Se estou resolvendo qualquer atividade com funções, eu sei que preciso trabalhar com os elementos do domínio.

Esse problema precisará ser mais trabalhado nas situações de limite, para que o teorema em ação incorreto (TAB.3) mobilizado por Mateus nessas atividades não se torne estável em seus esquemas. Foi um dos aspectos que consideramos quando elaboramos essas atividades buscando relacionar a definição intuitiva com a definição formal de limite. Em alguns momentos observamos Mateus explicar para o seu colega, que a atividade era para trabalhar em termos de  $f(x)$  que eles estavam trabalhando, pois o colega fazia os cálculos buscando valores no domínio da função. Contudo, mesmo assim, parece que Mateus encontrava dificuldade em compreender que o intervalo dado pelo  $\varepsilon$ , ou melhor, de raio  $\varepsilon$ , que iria definir o intervalo de raio  $\delta$  para que o limite pudesse existir. Na entrevista, ele disse que não compreendeu direito, e que quando fez a atividade achou que precisava “criar” um delta para relacionar com o épsilon.

Mateus tem esquemas já estabilizados para várias situações para o estudo de funções, mas parece que não têm esquemas para atividades em que é preciso relacionar elementos da imagem com seus respectivos elementos do domínio. Nestas questões concernentes a um conceito novo, que ele ainda não possui todas as competências necessárias para lidar com elas, então ele busca esquemas que foram utilizados em situações que ele reconhece como semelhantes a estas novas. Contudo, essa familiaridade é só aparente e após algumas ações de tomada de informações, esse esquema se mostra ineficaz fazendo com que Mateus precise reorganizar suas ações, mobilizando outros invariantes operatórios.

Como nessas duas últimas atividades percebemos que Mateus mobilizou conhecimentos aleatórios, escolhemos inferir somente os elementos dos esquemas que citamos. Eles foram modelizados, baseados nos indícios observados nos áudios e na primeira

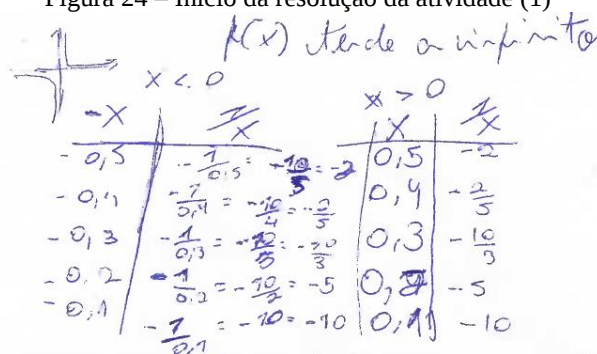
entrevista. Em seguida, continuamos o percurso do Mateus agregando novas situações de limite, no caso os limites infinitos e no infinito.

### Situações envolvendo limites infinitos e no infinito intuitivamente

Essas atividades foram aplicadas 46 dias após as atividades iniciais. Nesse primeiro encontro, de aproximadamente duas horas, aplicamos as atividades de (1) até a (4) e iniciamos a atividade (5).

As primeiras atividades (1) e (2) eram para investigar o que acontecia com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  tende a zero. Inicialmente Mateus fez um rascunho da representação gráfica e começou a responder os itens da atividade. Alguns minutos após a entrega da folha de atividade eu solicitei que todos fizessem uma tabela de valores de  $x$  bem próximos de zero, pois percebi que alguns dos estudantes não estavam fazendo. Neste momento, nos áudios foi possível perceber que Mateus reclamou por ter de fazer a tabela, mas apesar disso ele faz uma tabela para valores maiores do que zero e outra para valores menores do que zero. Para os valores de  $x > 0$  ele escolheu os números opostos aos que escolheu para  $x < 0$ , mas colocou os que davam os mesmos valores negativos. Esse equívoco talvez tenha sido somente por falta de atenção, considerando que ele respondeu corretamente ao item em que se questionava o que estava acontecendo com os valores da função quando  $x$  assumia valores próximos a zero, por valores maiores do que zero. Assim, acreditamos que ele tenha feito a tabela sem muita atenção, provavelmente fez para atender o que foi solicitado, e não a utilizou em nenhum momento para a resolução da atividade. Na figura 24, em seguida, apresentamos o rascunho dessa representação e também o desenho que ele fez do gráfico.

Figura 24 – Início da resolução da atividade (1)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Realmente, vimos que Mateus conseguiu resolver todos os itens corretamente e isso pode ter acontecido por ele já saber como era a representação gráfica da função, esse fato deve ter contribuído para que ele tivesse êxito nessas atividades. Inferimos que a sua resolução foi orientada pela regra em ação:

- ✓ (RB.1.a) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu faço a representação gráfica dessa função para observar o que acontece com a função quando  $x$  se aproxima de um ponto.

De fato, quando questionado sobre sua resolução, durante a atividade, ele disse que olhava a representação gráfica para ver os limites e, como ele havia feito um rascunho dessa representação ele conseguiu identificar o que estava acontecendo com a função. Desse modo, nem se preocupou em verificar se o que havia feito com as contas condizia com o que respondeu.

Mateus respondeu corretamente todos os itens das atividades (1) e (2), seja utilizando representações na forma algébrica, numérica, textual ou gráfica, inserimos algumas de suas resoluções na figura 25.

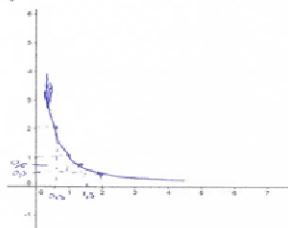
Figura 25 – Resolução da atividade (1) dos itens (a) e (b)

a) Explique o que acontece com os valores da função quando  $x$  assume valores próximos de zero:

i. para valores de  $x > 0$ ?

*$f(x)$  tende a  $+\infty$ , pois quando escolhemos valores de  $x$  maiores que zero e próximos do mesmo, o valor de  $f(x)$ , para os valores de  $x$  escolhidos, começa a tender para o infinito positivo.*

b. Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $]0, 2]$ .



| $x$ | $f(x)$ |
|-----|--------|
| 0,5 | 2      |
| 1   | 1      |
| 1,5 | 2/3    |
| 2   | 1/2    |

$$\frac{1}{0,5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{1}{1,5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Neste item (b) observamos que Mateus escolheu alguns pontos para o intervalo solicitado, mas fez a representação para valores de  $x$  um pouco maior do que o intervalo solicitado, no caso maior do que dois. Nos áudios observamos que um colega falou sobre isso e Mateus não achou importante ter feito pontos a mais, ele fez assim também para o intervalo  $[-2, 0[$  do item (c). Modelizamos em seu esquema a regra em ação:

- ✓ (RB.2.a) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função que já sei como é a sua forma, eu sei que posso escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano.

Outro fato que destacamos nas falas, sobre a construção desses gráficos, foi quando Mateus questiona a um colega *<onde fica o 2/3? Ele fica onde, você sabe? >* o colega fala que fica entre zero e um e mesmo assim ele tem dúvidas, então esse colega faz as contas e diz que é 0,6666...

Novamente vemos Mateus ter dificuldade em localizar pontos correspondentes aos números reais, a primeira vez foi nas atividades da primeira situação em que ele estava trabalhando com números na forma de representação decimal, e nesta atividade era na forma fracionária. Ele reclama de ter de fazer essas contas, acreditamos que seja por esses números não estarem na forma de frações decimais, porque já observamos que ele trabalha bem com frações decimais e também com os números decimais. Contudo, ficamos com uma dúvida, porque ele não fez a conta? Se seu colega fez rapidamente ele também faria, além disso, que ele poderia ter utilizado a calculadora do celular, optamos por acompanhar o andamento das atividades para compreender melhor.

Inferimos que o conhecimento que mais contribuiu para que Mateus tivesse êxito, como dissemos, foi o fato dele saber o comportamento gráfico da função. Modelizamos o invariante operatório mobilizado como um teorema em ação:

- (TAB.iv.a) O limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  tende ao ponto.

Quando questionei Mateus se, no ensino médio ou na universidade, ele tinha visto essa função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ele respondeu que a primeira vez que ele viu foi na universidade, na disciplina de introdução ao cálculo e que *<na escola a gente não vê, acho que ninguém na escola vê isso. >*. Entretanto, quando perguntei como ele tinha estudado esse gráfico na disciplina, ele disse *<A gente fez uns gráficos lá, mas eu não aprendi a fazer o gráfico e nem entendi>*. Assim, inferimos que ele utiliza somente a memorização da representação gráfica da função dada e, a partir dela, busca as informações que considera pertinentes para as questões.

Com essa fala, entendemos que Mateus utilizou essa representação para responder as questões, mas que essa atividade foi a primeira em que precisou refletir sobre o que acontecia com os valores dessa função quando  $x$  se aproxima de zero, pela direita e pela esquerda. Observando sua justificativa para o item (a)(i) da atividade (1) na figura 11, vemos que ele dá indícios que está compreendendo o que significa o limite da  $f(x)$  tender a  $+\infty$ , ao escrever que: *<f(x) tende a (+) infinito, pois quando escolhemos valores de  $x$  maiores que zero e próximos do mesmo, o valor de  $f(x)$ , para os valores de  $x$  escolhidos, começa a tender para o infinito positivo.>* Modelizamos esse novo conhecimento como um teorema em ação:

- (TAB.v.a) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero, por valores positivos, tende a  $+\infty$ .

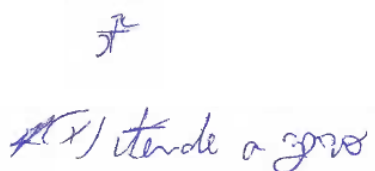
Analogamente a essa resolução temos a do item (a)(ii) que modelizamos como o:

- (TAB.v.b) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores negativos, tende a  $-\infty$ .

As atividades (3), (4) e (5) envolviam questões em que os valores de  $x$  cresciam sem limites, ou decresciam sem limites, ou seja, os limites no infinito. Novamente, Mateus inicia a atividade (3) fazendo um pequeno rascunho da representação gráfica da função como podemos observar na figura 26, consideramos que seu esquema é orientado pela regra em ação:

(RB.1.b) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu faço a representação gráfica dessa função para observar o que acontece com a função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ).

Figura 26 – Rascunho utilizado na atividade (3)

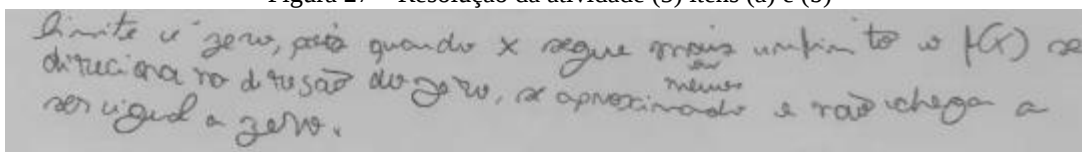


Fonte: coletada pela autora da pesquisa.

Observando a resolução apresentada na folha de atividades vimos que Mateus respondeu todas essas três atividades corretamente, inclusive justificando o limite encontrado. Entretanto, conferindo nos áudios é que relembramos que no dia da aplicação da atividade ele não havia colocado essa justificativa. Havia esboçado os gráficos e colocado nas atividades (3) e (4) que o limite da  $f(x)$  tendia a zero, e na atividade (5) respondeu que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Estava tudo correto, mas, eu o questionei porque ele dizia em alguns momentos que o limite da função tendia a zero e, em outros, que era igual a zero. Mateus ficou confuso, assim perguntei para ele quanto era  $f(0)$ , ele rapidamente disse zero, lembrei que a função não estava definida para o zero e ele respondeu <Ah não é o  $f(0)$  aqui!> Ele estava se referindo ao limite, porque já observamos que este estudante não apresentou dificuldades em trabalhar investigando domínios de funções. Questionei então, o que era, e Mateus tenta explicar dizendo que são os pontos ao redor do zero. Como percebi que ele estava com dificuldades de explicar falei para ele tentar pensar em justificar esse comportamento da função e deixei-o discutindo com seu colega. Momentos depois, perguntei novamente e obtive a resposta <Que ele tende a zero, que vai indo na direção do zero, mas não chega ao zero>. Eu solicitei que ele escrevesse o que estava entendendo e na figura 27

podemos observar a justificativa que Mateus apresentou para o limite da função ser zero, quando  $x$  tende  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Figura 27 – Resolução da atividade (5) itens (a) e (b)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

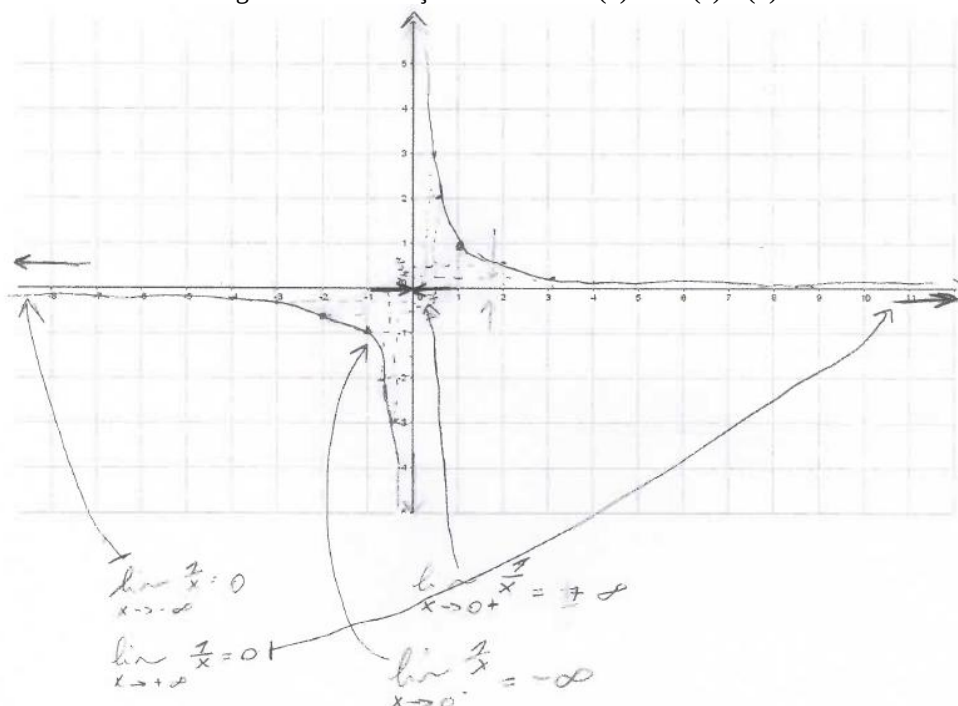
Com esta justificativa apresentada na folha de respostas poderíamos inferir que Mateus parece estar compreendendo o que está acontecendo com esta função nestes casos. Entretanto, ouvindo os áudios constatamos que esta resposta foi dita pelo seu colega, pois Mateus tentava explicar e não conseguia, ele argumentava <Não chega tipo a valer zero, não chega a...>. Assim, seu colega lhe explica o que compreendeu e eles escrevem respostas bem próximas e modelizamos suas ações nos teoremas em ação incorretos:

- (TAB.iv.b) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  cresce ou decresce;
- (TAB.vi) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) tende a zero.

Uma das explicações para essa nossa inferência é pelo fato da finalização dessa atividade (5), ter acontecido dois dias após o primeiro encontro. Desse modo, acreditamos que esses novos questionamentos, juntamente com as discussões que ele fez com seu colega, podem ser resultado de novas filiações aos esquemas que estavam sendo utilizados.

Após finalização dessa atividade propusemos a atividade (6). Nela Mateus deveria fazer a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  utilizando os limites encontrados nas atividades (2) e (5), mas sem olhar para essas folhas de atividades. Como já sabia a forma do gráfico, ele calculou vários pontos e fez a representação gráfica. Contudo, como a questão solicitava que se destacassem os limites encontrados anteriormente no gráfico, ele me questionou <O que é para fazer aqui mesmo? Desenha o gráfico e aí?> Eu expliquei que ele deveria indicar os limites encontrados nas atividades anteriores no gráfico que estava fazendo. Relembrei que ele havia dito que sabia os limites, pois “olhava” o gráfico, então solicitei que me indicasse onde olhava no gráfico e também que me indicasse os limites. E assim Mateus fez, como podemos observar na figura 28.

Figura 28 – Resolução da atividade (6) itens (a) e (b)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Essa atividade (6) foi aplicada dois dias após as anteriores e Mateus não teve dificuldade em esboçar o gráfico e nem em indicar os locais que poderíamos observar os limites encontrados. Segundo ele, era fácil porque sabia como era o gráfico. Então eu questionei se eu desse outra função e perguntasse qual o limite da função quando  $x$  se aproxima de zero, por valores menores do que zero? <Aí eu faço. Desenho aqui para ver e, se for assim, aí demora um pouco>. Mateus parece que tinha estável esse esquema e inferimos que utiliza novamente a regra em ação:

- ✓ (RB.2.a) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função que já sei como é a sua forma, eu sei que posso escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano.

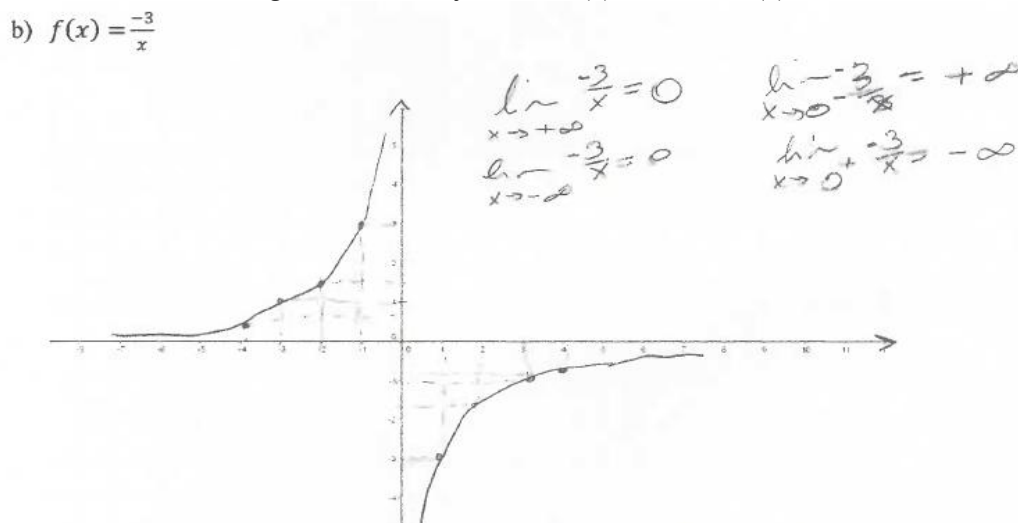
Com os teoremas em ação:

- (TAB.iv.a) O limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  tende ao ponto;
- (TAB.iv.b) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  cresce ou decresce.

A atividade (7) era semelhante ao que foi proposto nas anteriores e foi aplicada no mesmo dia que a atividade (6). Nela Mateus deveria determinar todos os limites e fazer a

representação gráfica das funções: (a)  $f(x) = \frac{3}{x}$  e (b)  $f(x) = \frac{-3}{x}$ . Na figura 29 podemos ver sua resolução para o item (b).

Figura 29 – Resolução do item (b) da atividade (7)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Mateus escolheu alguns pontos para esboçar o gráfico dos itens (a) e (b). Ao iniciar ele disse que a função  $f(x) = \frac{3}{x}$  <É mesma coisa desse aqui praticamente, só que esta se aproxima mais aqui>. Ele estava se referindo ao gráfico da atividade (6) da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  que tinha acabado de fazer. No item (b) também não teve dificuldade, fez e mostrou ao seu colega questionando <Quando é menos faz assim só, né?>, como seu colega concorda ele continua escolhendo pontos, em seguida esse aluno finaliza o gráfico e escreve os limites. Inferimos que mobilizou a regra em ação:

- ✓ (RB.2.a) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função que já sei como é a sua forma, eu sei que posso escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano.

Com os teoremas em ação:

- (TAB.v.a) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores positivos tende a  $+\infty$ ;
- (TAB.v.b) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores negativos tende a  $-\infty$ ;
- (TAB.iv.a) O limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  tende ao ponto;
- (TAB.iv.b) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores de  $y$  quando  $x$  cresce ou decresce.

Inferimos que seus esquemas se pautaram também nas regras:

- ✓ (RB.1.a) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu faço a representação gráfica dessa função para observar o que acontece com a função quando  $x$  se aproxima de um ponto;
- ✓ (RB.1.b) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu faço a representação gráfica dessa função para observar o que acontece com ela quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ).

As atividades (8) e (9) eram semelhantes às que foram trabalhadas nas atividades (1) e (2). Era para investigar o que acontecia com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  tende a zero, mas agora Mateus não sabia como seria exatamente a representação gráfica da função, o que iria inviabilizar o conhecimento que ele utilizou na atividade anterior. Desse modo, ele precisaria reorganizar o esquema mobilizado anteriormente.

Inicialmente Mateus não buscou simplificar a função para facilitar as contas e poder completar o quadro com os valores solicitados na atividade, no caso, valores maiores e menores do que zero. Entretanto, ele foi ficando entediado de ter de fazer tantas contas, mesmo podendo utilizar a calculadora, e eu questionei se não teria como simplificar a expressão. Ele fez algumas tentativas para simplificar, cometeu alguns erros como podemos observar na figura 30.

Figura 30 – Simplificação realizada na atividade (8)

The image shows handwritten mathematical work. On the left, the expression  $\frac{2+x}{x}$  is written and then crossed out with a large 'X'. Next to it, another version of  $\frac{2+x}{x}$  is also crossed out. To the right, the expression  $\frac{2+x}{x}$  is written again, followed by an equals sign and the simplified expression  $\frac{2}{x} + 1$ . The final simplified expression is written as  $\frac{2}{x} + 1$ .

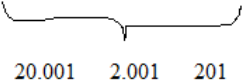
Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Mateus começou a fazer as contas com a expressão encontrada, no caso  $(2x + x^2)$ , mas percebeu o erro, ficou discutindo como fazer com um colega, quando percebeu que um outro havia feito uma simplificação. Então ele corrigiu e reescreveu a expressão  $\left(\frac{2+x}{x}\right)$ , como  $\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x}\right)$  e conseguiu chegar à expressão  $\left(\frac{2}{x} + 1\right)$ , fez as contas para alguns valores e preencheu toda a tabela, contudo acredito que ele fez as contas para  $\left(\frac{2}{\frac{1}{10}} + 1\right) = 21$  e deve ter pensado que para os outros valores, no caso  $\frac{1}{10000}$ ,  $\frac{1}{1000}$  e  $\frac{1}{100}$ , obteria comportamento semelhante ao de se acrescentar zero e colocou 21000, 2100 e 210, respectivamente.

Inferimos isso, pois nos itens (b) e (c), em que precisou fazer a representação gráfica da função nos intervalos  $]0,2]$  e  $[-2, 0[$ , ele escolheu os pontos na forma de fração e não errou nenhuma das contas. Então acreditamos que os erros com as frações decimais, nas contas anteriores possam ser pelo fato de Mateus esperar um comportamento similar e não por não saber fazer as contas corretamente. Na figura 31 podemos observar o quadro com os valores apresentados.

Figura 31 – Resolução da atividade (8)

| $x$             | $-1/10$ | $-1/100$ | $-1/10000$ | $1/10000$ | $1/1000$ | $1/100$ | $1/10$ | 1 | 2 |
|-----------------|---------|----------|------------|-----------|----------|---------|--------|---|---|
| $\frac{2+x}{x}$ | -19     | -109     | -1999      | 21000     | 2100     | 210     | 21     | 3 | 2 |


  
 20.001    2.001    201

Fonte: Coletado pela autora da pesquisa.

Esses erros nas contas não comprometeram a compreensão de que a função crescia ou decrescia infinitamente, quando  $x$  se aproximava de zero, já que Mateus conseguiu responder todos os itens corretamente, e neste caso os valores continuavam mantendo esse comportamento de crescimento e decrescimento. Inferimos que ele mobilizou a regra em ação:

- ✓ (RB.3) Quando preciso saber o limite de uma função em um ponto  $p$ , eu faço cálculos de vários pontos próximos ao ponto  $p$  para descobrir o que está acontecendo com o limite da função quando ela se aproxima  $p$ .

Ele também levou em consideração a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , pois ao olhar inicialmente a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  da atividade, ouvimos no áudio ele dizer ao seu colega que achava que essa função teria o mesmo comportamento da função anterior, só que estaria dois pontos acima. Desse modo, inferimos que na atividade (8) (a) nos itens (i) e (ii) Mateus mobilizou a regra em ação:

- ✓ (RB.1.c) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu penso na representação gráfica dessa função para lembrar o que acontece com a função quando  $x$  se aproxima de um ponto.

De fato, apesar de Mateus não ter feito um rascunho da representação gráfica da função para responder, por exemplo, que a função crescia infinitamente quando  $x$  assume valores próximos de zero, para  $x > 0$  no item (8) (a.i). Ao ser questionado como ele pensou depois que fez a atividade, ele justificou que viu pelas contas, mas que sabia que *<[...] ela tem*

a mesma característica da outra>, ele se referia a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , <É a mesma. A diferença é isso aí, é dois acima.>.

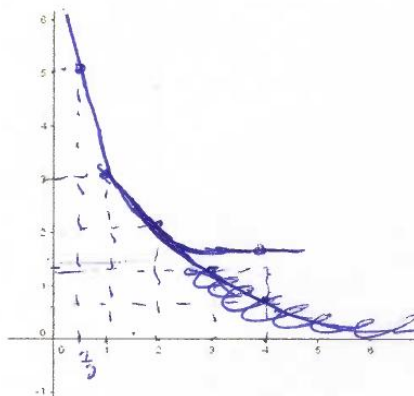
Assim, pelas resoluções e pelas falas, nós inferimos que ele utilizou os teoremas em ação:

- (TAB.iv.a) O limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  tende ao ponto;
- (TAB.i.b) Se os valores da função crescem sem limites por valores positivos quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , sendo  $x > p$ , então o limite da função tende a  $+\infty$  quando  $x$  tende a  $p$ ;
- (TAB.i.c): Se os valores da função decrescem sem limites por valores negativos quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , sendo  $x < p$ , então o limite da função tende a  $-\infty$  quando  $x$  tende a  $p$ .

Sobre esses últimos dois teoremas inferimos sua utilização pelo fato do Mateus se orientar pelo comportamento da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , mesmo ele tendo se enganado pensando que ela estaria transladada dois pontos para cima, isso não interferiu no resultado desse limite.

O item (b) era para esboçar a representação gráfica da função  $(x) = \frac{2+x}{x}$  no intervalo  $]0, 2[$ . Mateus inicialmente fez a representação para todo intervalo que estava no plano cartesiano para a resposta, e não somente para o intervalo solicitado, quando seu colega o questionou ele disse: “*eu sei, mas não ia ficar legal, tem de fazer tudo.*” Além disso, ele representou a função como se o limite dela tendesse a zero quando  $x$  crescia para  $+\infty$ . Depois ele riscou e corrigiu fazendo a curva tender a um, vejamos na figura 32 como ele fez.

Figura 32 – Resolução da atividade (8) item (b)



Fonte: Coletado pela autora da pesquisa.

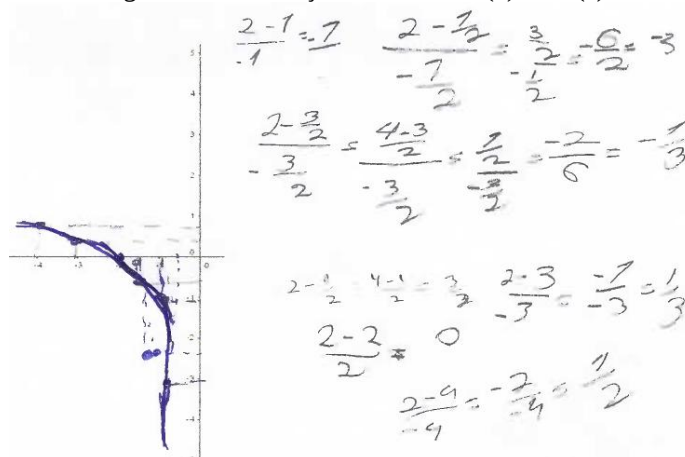
Acreditamos que esse engano tenha ocorrido, primeiramente porque Mateus não achou importante esboçar somente o intervalo solicitado, como no caso das outras atividades, (1) itens (b) e (c) e na (4). Além disso, porque ele achava que esta função teria o mesmo

comportamento gráfico da função que ele conhecia bem, no caso a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  em que o limite dá zero quando  $x$  tende para  $+\infty$ . Todavia, um colega que percebeu que a função não passa em  $y=1$ , observa a resposta do Mateus e o avisa do erro e diz para ele que: *<Então seria mesma a coisa que  $\frac{2}{x}$  que não toca no zero entendeu? Não toca no eixo zero, esse é o eixo zero. E daí agora como é mais um, foi para o um aqui. Esse eixo zero foi aqui, olha, entendeu?>* Ele se referia a função  $f(x) = \frac{2}{x}$  que não passa no  $y=0$  e agora nessa função  $f(x) = \left(\frac{2}{x} + 1\right)$ , mudaria, não passaria em  $y=1$ . Então Mateus compreende que essa nova função apesar de ter a forma semelhante à função anterior, não está posicionada exatamente como a anterior, como ele havia pensado que fosse. Ele então diz: *“Ah é, ela sobe um”*, e assim faz a correção do gráfico no intervalo para  $x>2$ . Inferimos que ele mobilizou a regra em ação:

- ✓ (RB.2.a) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função que já sei como é a sua forma, eu sei que posso escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano.

Mateus fez os cálculos para os pontos:  $f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f(3)$  e  $f(4)$ , mas posicionou incorretamente no início os valores de  $f(3) = \frac{5}{3}$  e  $f(4) = \frac{3}{2}$  e não percebeu. Provavelmente por já ter ideia de que o comportamento seria como o da função anterior, se aproximaria do eixo  $y=0$ . Esse equívoco não comprometeu a resposta da questão que era dizer o que acontecia com a função quando se aproximava de zero. No item (c) em que deveria representar a função para o intervalo  $[-2, 0[$  ele também calculou alguns pontos e agora fez corretamente a representação, levando em consideração que a função não passa em  $y=1$ , como podemos observar na figura 33.

Figura 33 – Resolução da atividade (8) item (c)



Fonte: Coletado pela autora da pesquisa.

Inferimos que ele mobilizou novamente a regra (RB.2.a) e, tanto neste como no item (b) o teorema em ação adequado (TAB.iv.a). Mateus sabe que a representação gráfica dessa função é semelhante à função trabalhada nas atividades anteriores, assim ele decide escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano.

Em seguida, ele respondeu corretamente o item (9) calculando os limites da função quando tende a zero pela direita e pela esquerda. Inferimos que se orientou pela regra em ação:

- ✓ (RB.1.c) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu penso na representação gráfica dessa função para lembrar o que acontece com a função quando  $x$  se aproxima de um ponto.

E que mobilizou os teoremas em ação:

- (TAB.iv.a) O limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  tende ao ponto;
- (TAB.i.b) Se os valores da função crescem sem limites por valores positivos quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , sendo  $x > p$ , então o limite da função tende a  $+\infty$  quando  $x$  tende a  $p$ ;
- (TAB.i.c) se os valores da função decrescem sem limites por valores negativos quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , sendo  $x < p$ , então o limite da função tende a  $-\infty$  quando  $x$  tende a  $p$ ;
- (TAB.v.c) O limite de uma função semelhante a  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores positivos tende a  $+\infty$ ;
- (TAB.v.d) O limite de uma função semelhante a  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende a zero por valores negativos, tende a  $-\infty$ .

Esses dois últimos teoremas, nós modelizamos com base na fala inicial do Mateus ao observar a função. Ele disse que esta nova função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  teria o gráfico com a mesma forma do gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  pelo fato delas terem o mesmo denominador, mas que a nova seria dois pontos acima por causa da expressão do numerador  $(2+x)$ .

As atividades (10), (11) e (12), como as (3), (4) e (5), eram para investigar o que acontecia com uma função quando  $x$  cresce para  $+\infty$ , ou decresce para  $-\infty$ , mas agora nessas atividades a função trabalhada era  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ . Mateus iniciou a atividade (10) completando os valores do quadro. Ele utilizou a expressão simplificada  $\left(\frac{2}{x} + 1\right)$  e não errou nenhum dos valores. Percebemos que neste item primeiramente substituía os valores para o  $x$ , no caso: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000, ele já fazia a mudança para a forma decimal e depois somava 1. Em seguida, Mateus fez a representação gráfica da função no intervalo solicitado  $[1, +\infty[$ .

A atividade (11) era similar à anterior, e era para fazer o mesmo estudo, mas só que no intervalo  $] -\infty, -1]$ . Mateus fez as contas corretamente para os valores de  $x=-1$  e  $x=-10$ , contudo para os outros valores ele cometeu um erro comum, já evidenciado por estudos, conforme podemos observar na figura 34 a seguir.

Figura 34 – Quadro da atividade (11)

$-\frac{2}{1000000} + 1 = -0,000002 + 1 = 0,999998$

|                 |          |         |        |       |      |      |    |
|-----------------|----------|---------|--------|-------|------|------|----|
| $x$             | -1000000 | -100000 | -10000 | -1000 | -100 | -10  | -1 |
| $\frac{2+x}{x}$ | 0,999998 | 0,99999 | 0,9999 | 0,999 | 0,99 | 0,98 | 1  |

0,999998   0,99999   0,9999   0,999   0,99   0,98

Fonte: Coletado pela autora da pesquisa.

Nestas duas questões acreditamos que Mateus utilizou a regra em ação:

- ✓ (RB.2.a) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função que já sei como é a sua forma, eu sei que posso escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano;
- ✓ (RB.1.d) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu **penso** na representação gráfica dessa função para lembrar o que acontece com a função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ).

Modelizamos essa regra um pouco diferente da outra (RB.1.b), pois não vimos nenhuma representação, escrita ou mesmo oral, mas inferimos que ele usa a representação mental da função que ele conhece bem o comportamento gráfico e que foi utilizada nas atividades anteriores. Desse modo, ele reconheceu que esta função era semelhante, bastando

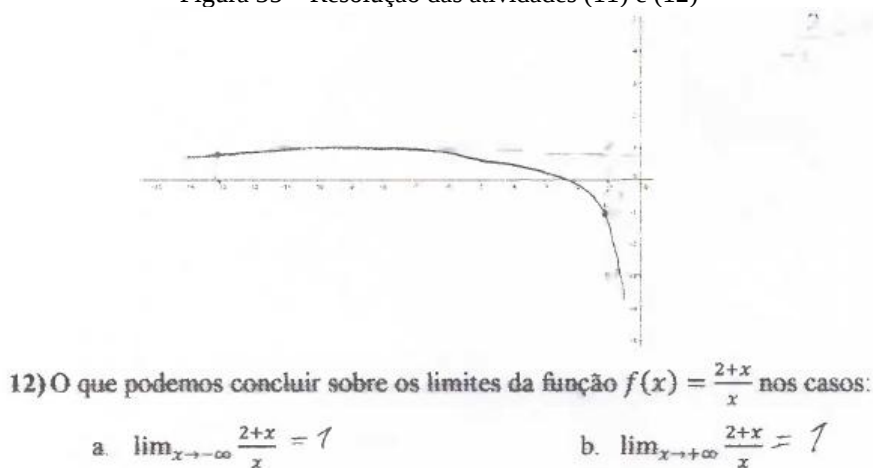
apenas verificar alguns pontos, se necessário, para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano, ou para investigar o limite. Modelizamos vinculado a essas ações o teorema em ação:

- (TAB.vi) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) tende a zero; pois vimos que ele simplificou a função dada e sempre se referia à nova função como semelhante à função de referência que ele utilizava.

Inferimos essas regras, pois vimos que mesmo cometendo os erros de contas que citamos, Mateus esboçou corretamente a representação gráfica da função e respondeu corretamente o item (12), figura 35, em que se questionava o limite da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  cresce para  $+\infty$ , ou decresce para  $-\infty$ , ele respondeu que seria 1, o que ficou estranho já que no caso do quadro para valores  $] -\infty, -1]$ , como ele errou os valores, a função estaria se aproximando de zero e não de 1. Assim, acreditamos que a representação gráfica da nova função, agora correta, depois de ter trabalhado nas questões (8.b) e (8.c), que ele se orientou para as resoluções dessas questões. Desse modo, inferimos que sua resolução foi norteadada pelo teorema em ação adequado:

- (TAB.iv.b) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) dado pela observação, ou memorização, de um gráfico é o que pode ser observado no gráfico com os valores de  $y$  quando  $x$  cresce ou decresce.

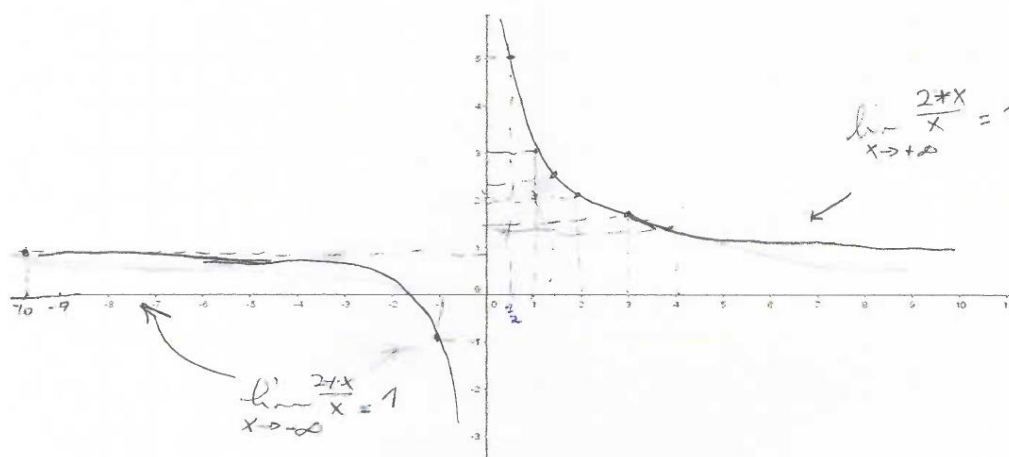
Figura 35 – Resolução das atividades (11) e (12)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Na atividade (13) Mateus inicia calculando alguns valores da função para esboçar a representação gráfica e, em seguida, indicar todos os limites encontrados anteriormente. Podemos observar esse fato na sua resolução, figura 36.

Figura 36 – Resolução da atividade 13



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Nessas atividades, Mateus continuou a se orientar pela representação gráfica, mesmo não tendo feito um rascunho no início das atividades com essa função, percebemos que ele tem a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  tanto como meio de seleção das regras em ação, bem como mecanismo de controle e de inferência. Assim, em suas ações modelizamos as regras em ação:

- ✓ (RB.2.a) Quando preciso fazer a representação gráfica de uma função que já sei como é a sua forma, eu sei que posso escolher alguns pontos para posicionar adequadamente o gráfico da função no plano cartesiano;
- ✓ (RB.1.a) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu **faço** a representação gráfica dessa função para observar o que acontece com a função quando  $x$  se aproxima de um ponto;
- ✓ (RB.1.b) Quando preciso saber o limite de uma função, ou como ela se comporta em um intervalo, eu **faço** a representação gráfica dessa função para observar o que acontece com a função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ).

Com essas regras modelizamos também os teoremas em ação:

- (TAB.iv.a) O limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores de  $y$  quando  $x$  tende ao ponto;
- (TAB.iv.b) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) dado pela observação, ou memorização, de um gráfico, é o que acontece no gráfico com os valores do  $y$  quando  $x$  cresce ou decresce;
- (TAB.iv.c) Se o limite da função tende a um número  $K$  quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), então na representação gráfica a reta  $y=k$  é onde, a partir de um certo  $x$ , a curva do gráfico irá se tornar cada vez mais próxima dessa reta, sem nunca tocar.

Em seguida, continuamos nossa investigação buscando compreender o processo vivenciado por Mateus ao lidar com as atividades que propomos. Estudando tanto os

esquemas mobilizados por ele, como também as imagens que foram associadas. Em função dos casos de limite de funções trabalhados, das suas respectivas funções e representações.

### 6.2.1.2 Fases II e III – Análise dos casos de limite de função

Relacionamos as atividades aplicadas na experimentação com os casos de limite de funções que foram trabalhados, evidenciando as representações que foram utilizadas nas questões, bem como, as que foram solicitadas ao aluno. Apresentamos no quadro 16 essas escolhas e, a seguir, nossa discussão sobre cada um desses limites de função.

Quadro 16 – Casos de limites com as funções trabalhadas

| Limites                                                                                 | Representações utilizadas nas atividades e as representações solicitadas na resolução          |              |                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------|
|                                                                                         | Resolver algebricamente                                                                        | Graficamente | Escrita natural |
| 1º)<br>$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$                                                | (2.1) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ | (2.1)        | (2.1) c)        |
|                                                                                         | (2.2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$                                                           |              |                 |
|                                                                                         | (2.3) $f(x) = (x + 1)$                                                                         |              |                 |
|                                                                                         | (3) $f(x) = (2x - 5)$                                                                          | (3) b)       | (3) c)          |
| 2º)<br>$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$                                           | (1) e (2) $f(x) = \frac{1}{x}$                                                                 | (1)          | (1)             |
|                                                                                         | (8) e (9) $f(x) = \frac{2+x}{x}$                                                               | (8)          | (8)             |
| 3º)<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$                                           | (3), (4) e (5) $f(x) = \frac{1}{x}$                                                            | (3) e (4)    |                 |
|                                                                                         | (10), (11) e (12) $f(x) = \frac{2+x}{x}$                                                       | (10) e (11)  |                 |
| 4º)<br>$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ | (6) $f(x) = \frac{1}{x}$                                                                       | (6)          |                 |
|                                                                                         | (7) $f(x) = \frac{3}{x}$ e $f(x) = \frac{-3}{x}$                                               | (7)          |                 |
|                                                                                         | (13) $f(x) = \frac{2+x}{x}$                                                                    | (13)         |                 |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Na primeira parte dessa seção, apresentamos as ações mobilizadas por Mateus ao lidar com as atividades propostas, no caso as situações que foram trabalhadas para a introdução do conceito de limite. Nosso objetivo foi modelar algumas dessas ações em elementos de seus esquemas, especificamente em termos de regras em ação e de seus teoremas em ação relacionados. Cujo domínio de validade são as situações de limites de funções utilizadas (VERGNAUD, 1986, 1990).

Nesta segunda parte, investigamos esquemas nas ações de Mateus ao lidar com as funções utilizadas para esses limites, expostos no quadro 8. Nosso interesse é evidenciar como esse aluno mobilizou esses esquemas estudando as filiações, e ou rupturas, nesse processo. Para isso, relacionamos as ações mobilizadas em termos de regras em ações com seus

respectivos teoremas em ação, com as representações, buscando estudar as adaptações que foram realizadas durante a resolução das atividades da experimentação.

Em seguida, discutimos todos esses elementos modelizados, apresentados sinteticamente, com outros que surgiram durante a experimentação. Buscamos identificar as imagens que Mateus evocou ao lidar com cada uma dessas atividades, com esse caso de limite de funções. E, com isso, caracterizamos o conceito imagem desse aluno referente a esse conceito. O que possibilitou, por um lado, discutirmos sobre as imagens desse conjunto que pudessem conflitar com a definição apresentada pelo ensino, no caso a definição intuitiva, ou que conflitassem entre si; pois as imagens são evocadas em função das representações que são utilizadas nas atividades. Por outro lado, pudemos estudar se nesse conjunto imagem de Mateus existiam imagens que estavam se constituindo como um conceito definição pessoal para esse caso de limite.

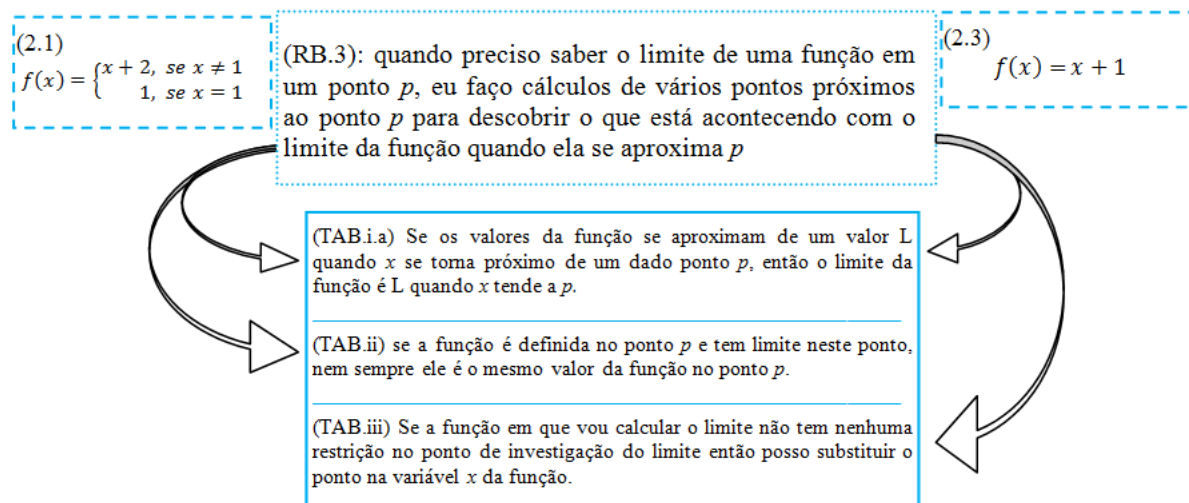
**(1º)  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$**

No primeiro caso de limite, tínhamos questões para serem resolvidas mobilizando as representações: algébricas, as atividades: (2.1); (2.2); (2.3) e (3); gráficas, as atividades: (2.1) e (3) e em linguagem natural, atividades: (2.1) e (3). Além da possibilidade da linguagem oral possibilitada pelos áudios.

Mateus teve um pouco mais de dificuldade nessas atividades quando apresentamos a primeira parte desta seção. Vejamos a seguir como ele lidou com essa situação ao ter de adaptar seus esquemas, principalmente os que eram utilizados no estudo com as funções, para esse primeiro caso de limite.

Nas atividades (2.1) e (3) encontramos uma regra em ação comum que orientou as escolhas dos teoremas em ação mobilizados, vejamos na figura 37 esses elementos mobilizados conforme a função dada.

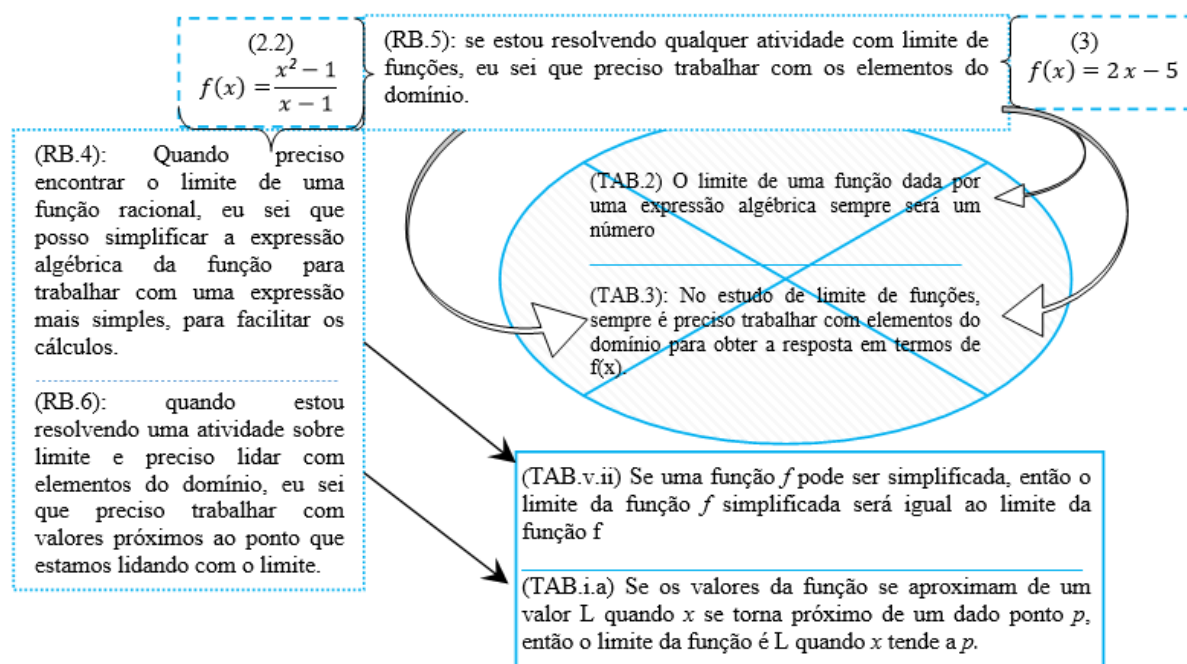
Figura 37 – Relações estabelecidas nas atividades (2.1) e (2.3)



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Essas duas funções são conhecidas desse aluno, mas a (2.1) envolve aspectos que só tem sentido no estudo com o limite de funções. No caso, estudar o que acontece próximo de um ponto que não pertence ao domínio da função, diferentemente da função (2.3) que é um limite que pode ser obtido por substituição direta. Desse modo, mesmo Mateus mobilizando esquemas das situações que ele precisou lidar no estudo com as funções, e os números reais, na função (2.1) ele precisou de elementos do novo conceito que estava sendo introduzido. Essa é uma função que os estudantes têm dificuldades tanto em fazer a representação gráfica, como também em compreender o que está acontecendo com a função (SEGADAS-VIANNA, 2016; TALL e VINNER, 1981). Todavia, Mateus fez corretamente a representação gráfica no início da atividade. Inferimos inclusive que, essa representação o auxiliou na discussão com o seu colega sobre o resultado do limite dessa função. Ele fez adaptações do esquema, utilizado para o estudo dessas funções, agregando novos elementos envolvidos na construção do conceito desse caso de limite, como os teoremas em ação e (TAB.i.a) e (TAB.ii). Para a outra função da atividade (2.3) também encontramos uma modificação nas ações de Mateus, ela foi a primeira em que ele, após fazer os cálculos com alguns pontos apresentou o resultado com a notação para esse caso de limite  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ . Essa função tem o mesmo comportamento da função (2.2), exceto no ponto  $x=1$ , que ele havia trabalhado na semana anterior. Apresentamos a seguir na figura 38 as relações que estabelecemos nas ações de Mateus para atividade com essa função e com a (3).

Figura 38 – Relações estabelecidas nas atividades (2.2) e (3)



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Nessas duas atividades buscamos relacionar elementos da definição intuitiva com a da definição formal, sendo que na atividade (2.2) Mateus só tinha visto a definição intuitiva e na (3) ele havia visto as duas definições. Essas foram as duas questões que ele teve muita dificuldade em lidar, foram momentos em que ele não conseguia adaptar os esquemas utilizados anteriormente, em situações para o estudo de funções, das inequações e de módulo para essa nova situação. Essa dificuldade já vem sendo discutida por pesquisadores (DOROUX, 1983), como vimos na seção 2.2, com relação a esses conceitos que estão envolvidos na definição formal de limite.

Um dos problemas que identificamos quando ele tentou adaptar o seu esquema, das situações vivenciadas com as funções, foi em romper com a ideia de que nas situações envolvendo funções sempre é preciso lidar, e deixar a resposta, em termos da imagem. Modelizamos essa ação na regra em ação (RB.5). Mateus já tinha conseguido adaptar esquema para algumas atividades com esse caso de limite de função, relacionados com a noção intuitiva. Todavia, quando precisou trabalhar com elementos do conjunto imagem da função ele não conseguiu identificar similaridade com nenhuma outra situação vivenciada e acabou fazendo filiações que não foram pertinentes para essas atividades, mobilizando os teoremas em ação (TAB.1) e (TAB.3) que são incorretos.

A falta de esquema para lidar com essa situação foi determinante para que Mateus não conseguisse avançar naquele momento, pois vimos que ele soube mobilizar e reorganizar suas

ações. Reconheceu familiaridade nos casos de funções trabalhadas anteriormente e, ao mesmo tempo, conseguiu ampliar seu esquema com os novos elementos vivenciados nas atividades com esse caso de limite. Todavia, ao ter que lidar naquele momento com essas atividades, ele não conseguiu gerar as regras necessárias para elaboração da sequência de ações em busca dos invariantes operatórios necessários para lidar com a atividade.

De fato, nos áudios conseguimos identificar o momento em que ele argumenta com seu colega que achava que a resposta deveria ser em função de  $f(x)$  e não em  $x$ , como havia obtido pela manipulação algébrica. Mateus resolveu corretamente a atividade, algebricamente, mas não aceitava o fato da resposta ser em termos de  $x$ , valores do domínio. Do mesmo modo, encontramos em sua resposta, a um item da atividade (3), um momento em que ele explica o que é o limite da função escrevendo:

O limite da função é como a função se comporta aproximando de um ponto  $x$  ou  $f(x)$ .

Mateus não estava compreendendo a relação entre esses dois elementos trabalhados e, diferentemente do que havia representado anteriormente para a noção desse caso de limite, ele fez filiações com situações anteriores. Elas não eram pertinentes, mas Mateus não teve meios de inferência e de controle para abandonar essa ideia equivocada e ampliar seu esquema. Nos áudios encontramos um momento em que ele reclamou por não ter conseguido resolver corretamente a atividade, depois que fizemos a correção. Ele argumentava que não estava acostumado a ver atividades assim, pois sempre trabalharam encontrando uma resposta, um valor para  $f(x)$  e que as atividades eram sempre iguais.

Mateus tinha razão. Seus esquemas estavam limitados às situações que ele havia vivenciado e que eram insuficientes para lidar com outros aspectos envolvidos com o conceito de função daquela atividade. Esse problema vem sendo apontado pelos pesquisadores (ARTIGUE, 1995; ZUCHI, 2005). Sabemos que é preciso vivenciar uma variedade de situações para compreensão de um conceito, e que elas estão imbricadas a diversos outros conceitos. Os esquemas para lidar com esses conceitos vão se constituindo ao longo do tempo por meio dessas situações (VERGNAUD, 1990, 2015). Como no caso das funções que perpassa diversos anos do ensino, não só de matemática, mas também de outras áreas, é possível proporcionar diversas situações que favoreçam o aluno ampliar seus esquemas para lidar com situações como as que Mateus precisou resolver em nossa experimentação.

Com relação à compreensão desse processo vivenciado por Mateus naquele momento, com a definição apresentada pelo ensino, investigamos imagens que ele associou a esse caso de limite. Para isso, reescrevemos os elementos que modelizamos desses esquemas de

Mateus, mais sinteticamente, e acrescentamos outros de suas produções, coletados principalmente nas representações escritas na linguagem natural, e oral, obtidas pelos áudios realizados tanto durante a experimentação, como também nas entrevistas. Apresentamos a seguir, no quadro 17, essas imagens que associamos ao conceito imagem de Mateus para esse caso de limite de funções, bem como as definições<sup>30</sup> que foram apresentadas.

Quadro 17 – Conceito imagem e a definição para o (1º) caso

| Definições apresentadas para o caso de $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Definição intuitiva:</b></p> <p>Intuitivamente, dizer que o limite de <math>f(x)</math>, quando <math>x</math> tende a <math>p</math>, é igual a <math>L</math> que, simbolicamente, se escreve</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ <p>Significa que quando <math>x</math> tende a <math>p</math>, <math>f(x)</math> tende a <math>L</math></p> <p><b>Definição formal:</b></p> <p>Sejam <math>f</math> uma função e <math>p</math> um ponto do domínio de <math>f</math> ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de <math>f</math>. Dizemos que <math>f</math> tem limite <math>L</math>, em <math>p</math>, se, para todo <math>\varepsilon &gt; 0</math> dado, existir um <math>\delta &gt; 0</math> tal que, para todo <math>x \in D_f</math>.</p> $0 <  x - p  < \delta \Rightarrow  f(x) - L  < \varepsilon.$ <p>Tal número <math>L</math>, que quando existe é único, será indicado por <math>\lim_{x \rightarrow p} f(x)</math>.</p> <p>Assim</p> $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 <  x - p  < \delta \Rightarrow  f(x) - L  < \varepsilon. \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p><b>Obtidos pelas respostas na forma algébrica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Se a função em que vou calcular o limite não tem nenhuma restrição no ponto de investigação do limite então posso substituir o ponto na variável <math>x</math> da função;</li> <li>✓ Se estou lidando com limite de funções, então sempre preciso trabalhar, com elementos do domínio para obter a resposta em termos de <math>f(x)</math>;</li> <li>✓ Eu trabalho com elementos do domínio das funções.</li> <li>✓ Se o limite existe então o <math>\delta</math> deve ser igual ao <math>\varepsilon</math> dado;</li> <li>✓ Eu faço cálculos de vários pontos próximos ao ponto para ver limite quando <math>x</math> tende a <math>p</math>.</li> <li>✓ Se uma função <math>f</math> pode ser simplificada, então o limite da função <math>f</math> simplificada será igual ao limite da função <math>f</math>;</li> <li>✓ Eu simplifico a expressão algébrica da função para facilitar os cálculos;</li> <li>✓ Eu trabalho com valores próximos ao ponto que estamos lidando com o limite;</li> <li>✓ O resultado de uma atividade com uma expressão algébrica sempre será um número.</li> </ul> <p><b>Obtidos pelas respostas na forma de linguagem natural, escrita ou oral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Para descobrir o limite eu encontro o <math>y</math> para valores de <math>x</math> próximos ao ponto de investigação do limite.</li> <li>✓ O limite da função é como a função se comporta quando aproxima de um ponto <math>x</math> ou <math>f(x)</math>.</li> <li>✓ Para obter o limite tendendo a um ponto <math>p</math> precisamos descobrir valores de <math>f(x)</math> próximos a ao ponto <math>p</math>.</li> <li>✓ O limite pode ser diferente do valor que a função assume no ponto de investigação do limite.</li> <li>✓ A função quando <math>x</math> tende a <math>p</math> tende a <math>L</math>, mas <math>f(p) \neq L</math>.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Nessa primeira situação de limite, Mateus mobilizou nessas quatro atividades a noção de proximidade referida na seção 6.1.2, no caso a noção intuitiva de limite de funções.

<sup>30</sup> As definições que apresentamos foram as que a professora da disciplina utilizou e são do livro do Guidorizzi (2013).

Observamos que ele resolve o limite algebricamente e escreve justificando como encontrou o limite apresentando argumentos como:

“Encontrando os valores dos  $y$  para valores de  $x$  próximos a 1.”

“A  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1 os  $y$  tendem a 3.”

“Outros valores próximos a 1, pois para se obter o limite tendendo a 1 precisamos descobrir valores de  $f(x)$  próximos a 1.”

“O intervalo encontrado são os valores de  $x$  próximos de 3 que são utilizados para encontrar o limite de  $x \rightarrow 3$ . O intervalo de  $|f(x)-1| < \varepsilon$  é o intervalo dos valores de  $f(x)$  encontrado pelos  $x$  próximos a 3.”

Essa última justificativa, em termos de intervalo com módulo, somente foi possível, pois ele estava olhando a definição formal de limite (com épsilon e delta) e também para representação geométrica quando resolveu essa atividade. Observamos que mesmo tendo trabalhado com intervalos e inequações nas atividades iniciais de funções, não conseguimos identificar nenhuma imagem do conceito de limite ligada a intervalos. Nas discussões dos áudios também só encontramos a ideia de proximidade, como quando ele explicava para um colega:

*- Quando  $x$  tende a 1 tem que ver os valores próximos de 1. Quando  $x$  é 1, os valores próximos aqui, você faz assim: 0,9; 0,8; 1,1... Aí você vê os valores que está no  $y$ , o limite vai ser o que ele está tendendo, vai dar 3 porque quando você coloca 0,9 o 0,8 ele vai se aproximando de 3.*

Essa noção intuitiva de aproximação estava se tornando estável nas resoluções e argumentações de Mateus. Isso estava sendo a base para formação das imagens do conceito de limite que ele utilizou nas atividades.

De fato, após a aplicação dessas atividades fizemos uma entrevista com ele na qual perguntamos o que era limite de funções, tanto de modo formal como também intuitivo. Mateus respondeu que:

*- É quando a função tende a se aproximar de um ponto  $x$  e no eixo  $y$  ela vai tender a um número. Formal é quando já tem o limite.*

Outra imagem associada à definição intuitiva de limite que identificamos nas produções de Mateus foi a percepção de que o limite pode ser diferente do valor que a função assume no ponto de investigação do limite. Ele já compreendia que a função poderia não ser definida no ponto de investigação e, com essa nova imagem percebeu também que no limite investigamos os valores de  $x$  próximos ao ponto e que nem sempre será o valor da função no ponto. Contribuindo para que ele percebesse que o  $x$  poderia, ou não, fazer parte do domínio para encontrar o limite, isto é, a ideia de que o limite não depende do ponto. São imagens que estavam se constituindo como conceito definição pessoal de Mateus para esse caso de limite de funções.

Identificamos também imagens que podem fazer com que Mateus tenha dificuldade em trabalhar com a definição formal de limite, vimos que ele não conseguia compreender que precisava trabalhar com elementos do conjunto imagem para encontrar a resposta em termos do conjunto do domínio. Podemos ver em algumas de suas falas dos áudios e da entrevista:

*- Tem de fazer para  $x$  mesmo ou com  $f(x)$ ?*

*- Esse aqui é esse intervalo que você só adicionou, ele é o  $x$ , mas acho que você tem de deixar assim como  $f(x)$ ...*

*- Porque eu achava que tinha que deixar sempre em  $f(x)$ .*

Outra dificuldade foi em trabalhar com os quantificadores, no caso épsilon e delta. Inicialmente ele pensava que precisaria encontrar um valor para esses números, provavelmente isso estava vinculado a ideia de ter que sempre encontrar uma resposta na forma de número. Todavia, na última entrevista quando mostramos essas atividades, que ele havia resolvido sete meses antes, vimos que ele estava fazendo novas associações. Ele nos disse que não havia entendido o que esses números representavam, e que fez a manipulação algébrica pensando em encontrar um número para o delta. E, que somente, depois que ele foi compreender que se tratava de uma relação entre esses números e que o valor de um iria “prender” o outro. Na figura 39, apresentamos uma representação do conceito imagem do Mateus, com as associações realizadas ao longo do nosso estudo, bem como algumas imagens que estavam se constituindo no seu conceito definição pessoal para esse caso de limite.



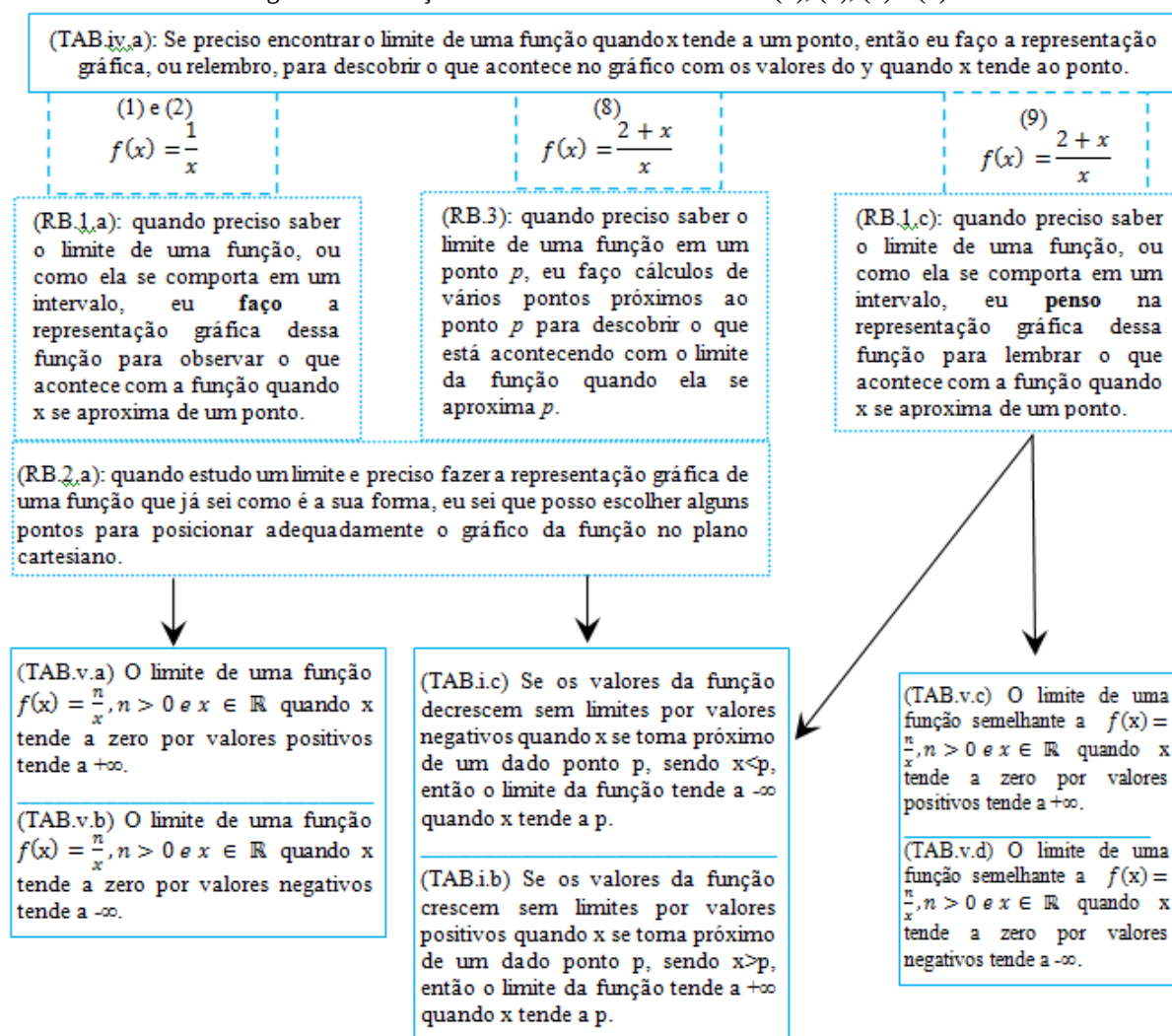
da definição intuitiva que estava sendo trabalhado e que, além disso, conseguimos identificar algumas que estavam se constituindo como um conceito definição pessoal desse estudante.

$$(2^{\circ}) \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$$

O segundo caso de limite  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$  eram questões que Mateus deveria resolver utilizando as representações: algébricas, atividades: (1), (2), (8) e (9); gráficas, atividades: (1) e (8); e em linguagem natural as atividades (1) e (8).

Nessas atividades modelizamos as regras em ação, e seus teoremas em ação vinculados, mobilizados por Mateus e, os relacionamos conforme, apresentamos na figura 40.

Figura 40 – Relações estabelecidas nas atividades (1), (2), (8) e (9)



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Caracterizamos nas ações de Mateus, o teorema em ação (TAB.iv.a) mobilizado nessas quatro atividades, seu uso foi suscitado pelo reconhecimento da função dada. Nossa

ideia inicial nas duas primeiras atividades era que ele identificasse o que estava acontecendo com a imagem da função calculando diversos pontos próximos de zero, inferisse que os valores da função cresciam, ou decresciam, e depois fizesse a representação gráfica da função no intervalo  $] -\infty; 0[$  e depois para  $] 0; +\infty[$ . Entretanto, Mateus seguiu outro caminho. Como ele sabia a forma da representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , suas ações foram orientadas, e controladas, por essa representação. As adaptações que ele precisou fazer em seu esquema, se pautaram nos invariantes operatórios relacionados a essa representação, no caso específico os teoremas em ação (TAB.v.a) e (TAB.v.b). Mateus observava a representação gráfica e dizia que a função tendia a infinito, positivamente ou negativamente

Nas duas primeiras atividades, seu esquema foi mobilizado de situações vivenciadas no estudo dessa função e foi se adaptando conforme ele agia, mas principalmente pelos momentos em que ele pode refletir sobre suas ações. Tanto, ao escrever nas folhas das atividades as justificativas sobre os resultados encontrados, como também nos momentos em que Mateus discutia sobre suas resoluções com o colega.

Nas atividades (8) e (9) com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , Mateus precisou fazer novas adaptações em seu esquema inicial, ele reconheceu semelhança dessa função com a trabalhada nas outras atividades, teve dificuldades na manipulação algébrica dessa função para responder aos itens iniciais, mas depois com auxílio de um colega conseguiu fazer a simplificação encontrando a expressão  $f(x) = \left(\frac{2}{x} + 1\right)$ . Entretanto, consideramos que o esquema foi efetivo para essas atividades, pois eles tinham resultados de limites iguais ao da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  que orientava as ações de Mateus naquele momento. Percebemos esse fato, tanto ao observarmos a representação gráfica que ele fez igual à da função conhecida, mas depois ele viu que estava diferente de seu colega e, calculou diversos pontos, corrigindo o gráfico. Como também, ao investigarmos seus esquemas para o próximo caso de limite.

Com relação às imagens que Mateus associou a esse caso de limite, apresentamos esses elementos a seguir, no quadro 18, com a definição formal que foi apresentada pela professora após nossa experimentação.

Quadro 18 – Conceito imagem e a definição para o (2º) caso

| Definição para o caso de: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Definição 1:</b></p> <p>Sejam <math>f</math> uma função, <math>p</math> um número real e suponhamos que exista <math>b</math> tal que <math>]p, b[ \subset D_f</math>. Definimos</p> $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } p + \delta > b \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \end{cases}$ <p>Analogamente para:</p> $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>Obtidos pelas respostas na forma algébrica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu sei que observar a representação gráfica me permite encontrar o limite de uma função quando <math>x</math> tende a um ponto.</li> <li>✓ Eu <b>faço</b> a representação gráfica da função para procurar o limite quando <math>x</math> tende a um ponto.</li> <li>✓ Se os valores da função crescem sem limites por valores positivos quando <math>x</math> se torna próximo de um dado ponto <math>p</math>, sendo <math>x &gt; p</math>, então o limite da função tende a <math>+\infty</math> quando <math>x</math> tende a <math>p</math>.</li> <li>✓ Eu faço cálculos de vários pontos próximos ao ponto <math>p</math> para ver limite quando <math>x</math> tende a <math>p</math>.</li> <li>✓ E <b>penso</b> na representação gráfica da função para lembrar o que acontece com a função quando <math>x</math> se aproxima de um ponto.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a zero, por valores positivos, tende a <math>+\infty</math>.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a zero, por valores negativos, tende a <math>-\infty</math>.</li> </ul> <p><b>Obtidos pelas respostas na forma gráfica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu <b>penso</b> na representação gráfica da função para lembrar o que acontece com a função quando <math>x</math> se aproxima de um ponto.</li> <li>✓ Escolho alguns pontos para posicionar o gráfico, quando já sei a forma da representação gráfica.</li> <li>✓ Eu sei que a função <math>f(x) = \frac{2+x}{x}</math> é a função <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> transladada, e que para representá-la adequadamente no plano cartesiano eu escolho alguns pontos, do intervalo solicitado.</li> </ul> <p><b>Obtidos pelas respostas na forma de linguagem natural, escrita ou oral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Sei que a <math>f(x)</math> tende a <math>(-)</math> infinito, quando escolho valores menores do que zero, e próximos a zero, e os valores da <math>f(x)</math> começam a tender para o infinito positivamente.</li> <li>✓ Sei que a <math>f(x)</math> tende a <math>(+)</math> infinito, quando escolho valores maiores do que zero, e próximos a zero, e os valores da <math>f(x)</math> começam a tender para o infinito negativamente.</li> <li>✓ Eu sei que a função <math>f(x) = \frac{2+x}{x}</math> é a função <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> transladada, então posso pensar que podem ter alguns limites iguais, eu calculo alguns pontos para verificar.</li> <li>✓ Quando <math>x</math> tende a zero por valores positivos, os valores da função <math>f(x) = \frac{2+x}{x}</math> crescem infinitamente.</li> <li>✓ Quando <math>x</math> tende a zero por valores negativos, os valores da função <math>f(x) = \frac{2+x}{x}</math> decrescem infinitamente.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

As imagens do conceito de limite de Mateus, nesse caso de limite, estão ligadas às representações gráficas das funções trabalhadas. Ele conseguiu resolver todas as questões corretamente, na maioria das vezes observando o que estava acontecendo na representação gráfica da função para responder as questões, seja algebricamente ou na linguagem natural escrita.

De fato, na primeira atividade Mateus inicia fazendo um desenho da representação gráfica da função dada e escreve ao lado que a função  $f(x)$  tende a  $+\infty$ . Em seguida, ele

começou a resolver as questões, tendo como referência a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Na justificativa ele escreveu que o limite seria mais infinito e que “cresce infinitamente” e, após conclusão da disciplina, na última entrevista quando perguntamos o que significava para ele  $f(x)$  tender a infinito, ele respondeu:

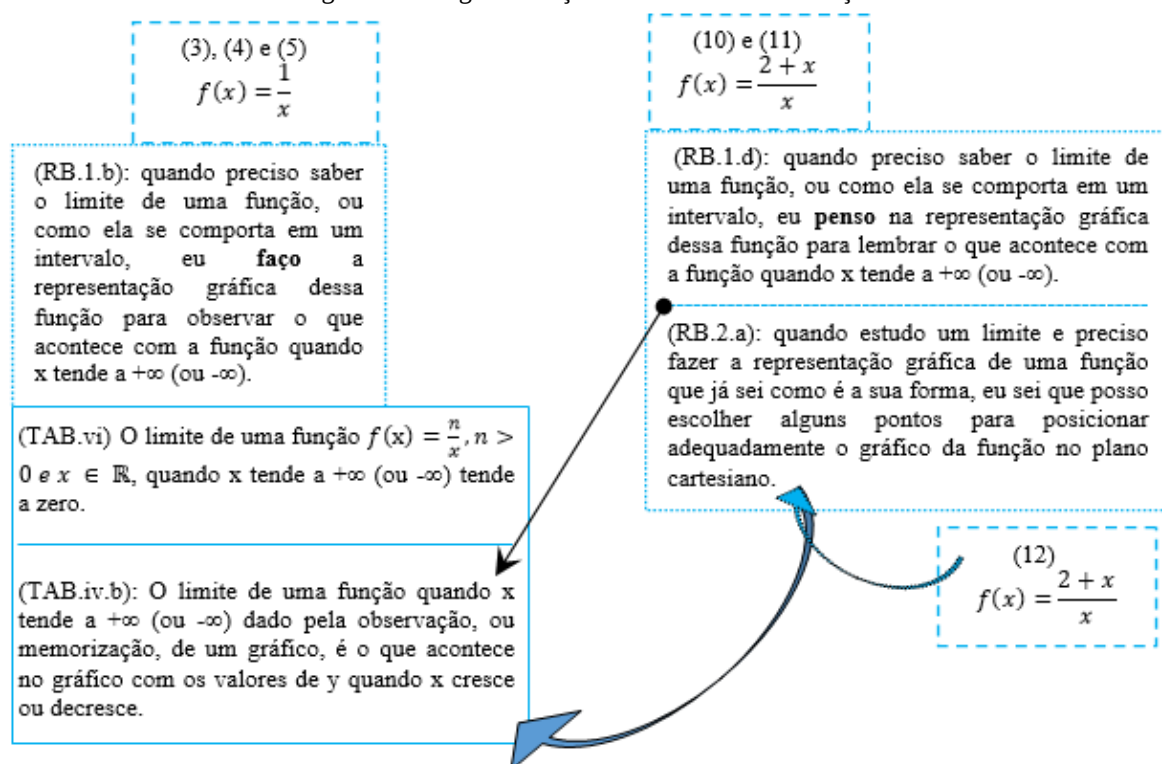
- *Aqui assim, nunca vai ter o máximo, [...]...ele continua sendo sempre maior que qualquer número.*
- *É o  $f(x)$ , ele sempre vai indo, maior do que qualquer número ...daqui.*
- *Ele não vai ter nenhum máximo.*

Mateus foi ampliando suas imagens conceituais, pois antes ele se referia somente aos valores da função que iam crescendo infinitamente, mas ao final ele já acrescentou outros elementos vistos na disciplina. Como as noções de máximos e mínimos de uma função, e também do comportamento das imagens da função, em que podemos escolher qualquer valor, ao argumentar “daqui” ele aponta para o eixo  $y$ , que o  $f(x)$  sempre será maior que qualquer número escolhido. São imagens que estão se constituindo no conceito definição pessoal de Mateus para esse caso de limite, elas são ligadas ao (3º) caso de limite e contribuem para sua compreensão.

### **(3º) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$**

As questões nesse caso de limite eram para ser resolvidas utilizando as representações: algébricas, com possibilidade de justificações na linguagem natural, as atividades: (3), (4), (5), (10), (11) e (12); e gráficas, as atividades: (3), (4), (10), e (11); e 8. Nessas atividades modelizamos as ações conforme explicitamos na figura 41 a seguir.

Figura 41 – Regras em ação com os teoremas em ação



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Como o caso de limite anterior, esse (3º) caso também foi orientado pelo reconhecimento de familiaridade com situações vivenciadas no estudo de funções, particularmente com a função utilizada nas atividades (3), (4) e (5). As regras em ação, com seus teoremas em ação, estavam vinculados inicialmente a observação da representação gráfica dessa função, mas foram sendo adaptadas para lidar com outros elementos que foram sendo discutidos nos itens de cada questão.

De fato, quando questionei sobre o resultado dos limites encontrados por Mateus com essa função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ele usava argumentos observando a representação gráfica e indicando onde a curva tendia a  $+\infty$ ,  $-\infty$  ou tendia a zero. Quando perguntei como ele compreendia isso, afinal ele fez a construção dessa representação, Mateus argumentou que só sabia como era o gráfico, mas que nunca tinha aprendido a fazer, e nunca havia pensado sobre isso. O fato de ele ter que apresentar uma justificativa para os limites encontrados, tanto escrito nas folhas das atividades, como também oralmente, fez com que refletisse sobre o que estava observando na representação gráfica.

Desse modo, Mateus precisou mobilizar outros conhecimentos para apoiar suas justificativas. Quando precisou lidar com a situação semelhante, mas com outra função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , utilizou novamente a representação da função conhecida, mas se preocupou em verificar algebricamente, como também numericamente o comportamento

dessa função para responder as questões. Na entrevista ele nos disse que sempre utilizava a representação gráfica das funções para resolver as atividades, mas que nunca havia encontrado situações que precisasse refletir sobre esses comportamentos que precisou observar nos gráficos, como precisou fazer em nossa experimentação para discutir os limites. Ao ser questionado como ele fazia quando não sabia a forma da representação gráfica da função, Mateus disse que calculava alguns pontos para fazer a representação e dava certo. Todavia, eram casos em que ele, de certo modo, conhecia a forma da representação gráfica das funções e, bastava calcular os pontos para perceber de qual forma de representação se tratava a função, ou especificamente, em que local deveria representá-la no plano cartesiano. No caso da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ele conhecia a representação e conseguia explicitar os limites, tanto para o (2º) como para o (3º) caso, mas inferimos que eram resultados das situações vivenciadas anteriormente, memorizações. Entretanto, esses limites representavam as assíntotas nos eixos e nessas atividades Mateus precisou explicar esse comportamento. Com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , seu esquema precisou se readaptar novamente, pois apesar dele saber que se tratava da mesma função transladada uma unidade acima no plano cartesiano, ele precisou mobilizar outros conhecimentos para esse limite. No caso, o fato dos valores da função se aproximarem da reta  $y=1$ , quando  $x$  tomava valores cada vez maiores, ou menores.

Outra adaptação no esquema de Mateus foi com relação aos meios de controle e validação, ele não gostava de fazer cálculos numéricos para resolver as atividades, dizia que achava demorado, mesmo podendo utilizar a calculadora. Em vários momentos durante as atividades vimos que ele teve problemas em fazer algumas contas, como também em utilizar os resultados obtidos para resolver as atividades que fazia. Provavelmente pela confiança que esse aluno tinha nas representações gráficas das funções, obtidas ao longo das situações que havia vivenciado na disciplina de introdução ao cálculo feita anteriormente. Entretanto, ao precisar lidar com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  e não conseguir resolver com as ações mobilizadas para a outra função, no início da atividade (8) no item (a), ele começou a fazer vários cálculos tanto para responder os outros itens, como também para as próximas atividades.

É uma ação importante na adaptação de seu esquema, pois permite inferir possíveis resultados a se verificar, como também identificar erros ao longo das escolhas que vão sendo realizadas. Cada representação utilizada traz aspectos e conceitos que permitem ampliar e tornar um esquema mais efetivo para essa classe de situação.

Do mesmo modo, permite fazer associações de imagens mais pertinentes para lidar com as atividades que virão ao longo do estudo. Vejamos a seguir no quadro 19 as imagens do conceito imagem de Mateus.

Quadro 19 – Conceito imagem e a definição para o (3º) caso

| Definição para o caso de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Definição 1:</b><br>Sejam $f$ uma função e suponhamos que exista $a$ tal que $]a, +\infty[ \subset D_f$ . Definimos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \end{cases}$   |
| <b>Definição 2:</b><br>Sejam $f$ uma função e suponhamos que exista $a$ tal que $]-\infty, a[ \subset D_f$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta > a \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \end{cases}$ |
| Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p style="text-align: center;"><b>Obtidos pelas respostas na forma algébrica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu sei que a representação gráfica me permite encontrar o limite de uma função quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math>, observando o que acontece com os valores do <math>y</math> quando <math>x</math> cresce ou decresce.</li> <li>✓ Eu <b>faço</b> a representação gráfica da função para procurar o limite quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>).</li> <li>✓ Eu <b>penso</b> na representação gráfica da função para determinar o limite quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>).</li> <li>✓ Eu faço cálculos de vários pontos para ver o que está acontecendo com os valores da <math>f(x)</math> quando <math>x</math> está tendendo a infinito (<math>+\infty</math> ou <math>-\infty</math>).</li> <li>✓ Se os valores do <math>x</math> cresce sem limite, e os valores da função vão ficando próximos de zero por valores positivos, então o limite será zero.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}</math>, <math>n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>) tende a zero.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>Obtidos pelas respostas na forma gráfica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu <b>penso</b> na representação gráfica da função para lembrar o que acontece com a função quando <math>x</math> se aproxima de um ponto.</li> <li>✓ Escolho alguns pontos para posicionar o gráfico, quando já sei a forma da representação gráfica.</li> <li>✓ Eu sei que a função <math>f(x) = \frac{2+x}{x}</math> é a função <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> transladada, e que para representa-la adequadamente no plano cartesiano eu escolho alguns pontos, do intervalo solicitado.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>Obtidos pelas respostas na forma de linguagem natural, escrita ou oral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> os valores da <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> tendem a zero.</li> <li>✓ O limite é zero, pois quando o <math>x</math> segue para mais infinito, ou menos, o <math>f(x)</math> se direciona na direção do zero, se aproximando e não chega a ser igual a zero.</li> </ul> |                                                                                                                                                                                                                                              |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Como no caso anterior, as imagens do conceito de limite de Mateus nessas atividades estão ligadas às representações gráficas das funções trabalhadas, seja diretamente na função da atividade, como nas questões 3, 4 e 5; em que ele fez, como no caso anterior, um desenho do gráfico e escreveu ao lado que a função tendia a zero. Também indiretamente, nas atividades 10, 11 e 12, pois vimos que já no início Mateus diz ao seu colega que pensa que a função dada seria como a outra:

*Porque é a mesma. A diferença é isso aí, é 2 acima.*

Quando Mateus diz que é a mesma, mas 2 acima, se referia a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , mas que no plano cartesiano estaria transladada dois pontos acima, a nova

função no caso  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ . Ele não estava totalmente enganado, pois era um ponto acima, mas durante a resolução da atividade (8) percebeu o erro e corrigiu.

Mateus resolveu todas as questões corretamente, e estava fazendo associações de imagens pertinentes também a esse caso de limite. Na entrevista quando questionamos como ele estava compreendendo esses casos de limite, em que o  $x$  cresce para  $+\infty$ , ou decresce para  $-\infty$ , e a função tende a zero, Mateus foi mostrando na representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  e explicando:

*- Você vê como todos os números aqui que vão indo para mais infinito. Eles nunca vão passar de zero, mas, se você pegar cada um, eles vão aproximando de um número que está próximo de zero, este também nunca vai... ele nunca vai ter um limite, porque você está vendo como um todo, que está chegando perto de zero, mas se você ver um só, aí ele vai estar aproximando de um número.*

Mateus vai explicando que o  $x$  vai indo para infinito, e que a cada  $x$ , seu correspondente  $f(x)$  é um número cada vez mais próximo de zero, mas que nunca vai ser zero. Argumenta que como esse conjunto não tem limite, ou seja, nunca irá parar, podemos ver como um todo que está chegando à zero.

Essa foi a única associação que identificamos nas ações de Mateus relacionada ao comportamento dos números reais, em que dado um número positivo, se dividimos ele por outro cada vez maior o resultado será um número muito próximo de zero; ou se dividimos esse mesmo por outro número muito próximo de zero, o resultado seria um número cada vez maior, ou menor se o número fosse negativo. Como vimos anteriormente, essas discussões são utilizadas pelo ensino na introdução desses casos de limites de funções.

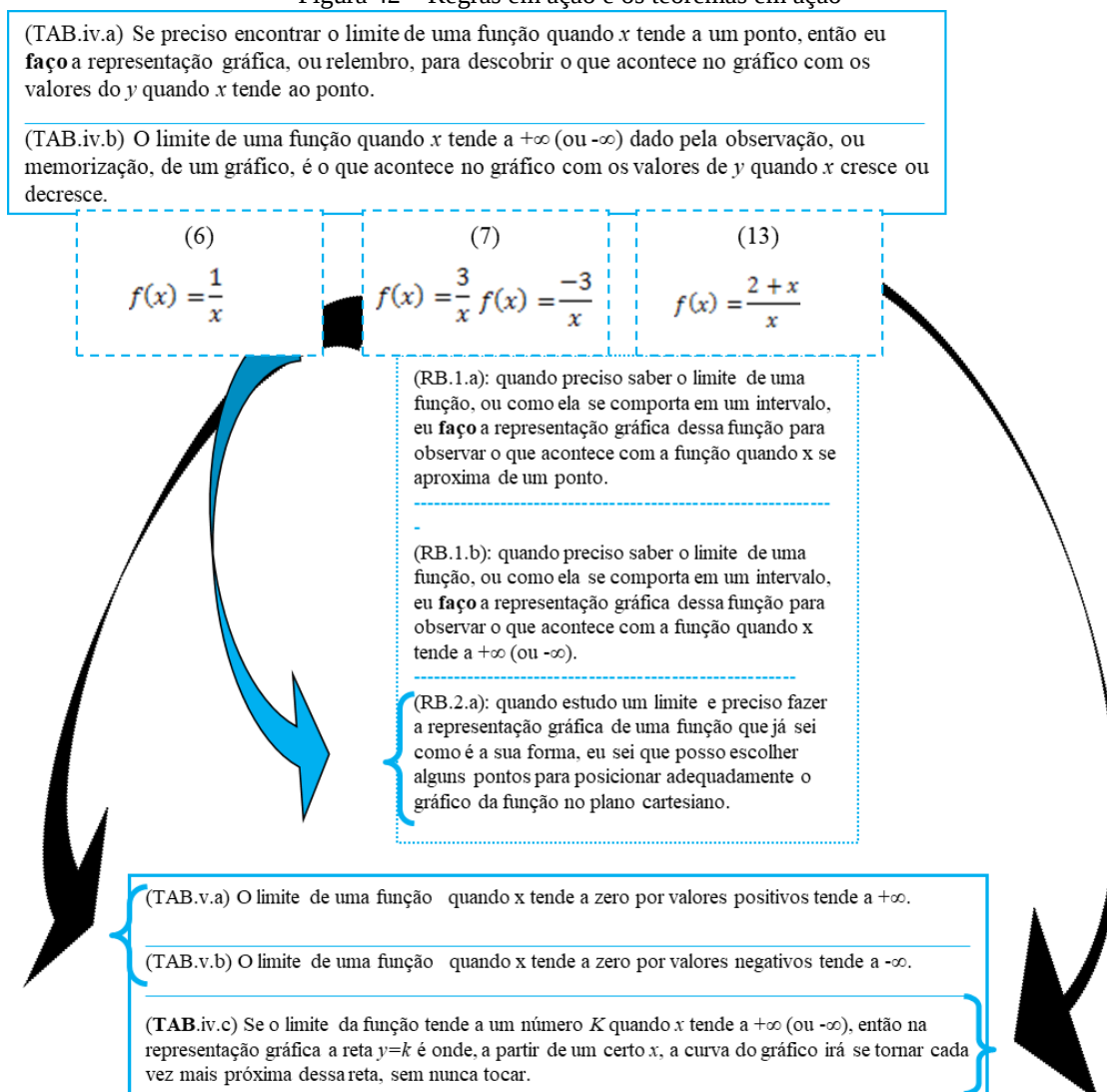
Não identificamos nenhuma imagem que pudesse conflitar com outras do conceito imagem de Mateus nessas atividades. Como também que pudessem trazer problemas a compreensão do conceito definição, ou favorecer aproximações. O que era esperado, pois o conceito definição, no caso a definição utilizando épsilon e delta, só foi trabalhado posteriormente pela professora, e também não trouxemos elementos envolvidos nessa definição para as nossas atividades.

**(4º)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$**

O último grupo de atividades, de limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$  eram questões para serem resolvidos: graficamente, atividades 6 e 13, e algebricamente e graficamente a atividade 7. Identificamos três teoremas em ação iguais mobilizados nessas atividades no esquema de Mateus, todavia encontramos diferença nas ações que orientaram

essas escolhas conforme a função que foi trabalhada, tanto nas regras em ação, como em outros teoremas em ação mobilizados, vejamos na figura 42.

Figura 42 – Regras em ação e os teoremas em ação



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

O esquema de Mateus para essas atividades foram sendo adaptados de situações anteriores no estudo de funções, acrescentando novos aspectos envolvidos nesses casos de limites de funções. As mudanças foram necessárias para que ele pudesse justificar os limites encontrados. Como ele argumentou durante as discussões, que sabia a forma da representação gráfica da função utilizada na atividade (6), só não sabia o motivo daquele comportamento: *<A gente fez uns gráficos lá, mas eu não aprendi a fazer o gráfico e nem entendi>*. O fato das atividades solicitarem a todo o momento que explicasse o comportamento dos limites das funções trabalhadas, tanto na forma algébrica, como gráfica, fez com que ele tivesse que mobilizar outras ações, a partir da memorização da representação gráfica dessa função. Ela foi

o apoio inicial para ele agir na situação e, ao mesmo tempo, um meio de controle sobre suas ações, permitindo que ele ampliasse seu esquema a cada atividade que foi tendo que lidar.

Cada representação utilizada para lidar com as situações de limites evocam aspectos diferentes do conceito desse conceito e vimos que Mateus buscou mobilizar a gráfica quando lidou com esses casos de limites. Desse modo, muitas de suas imagens associadas a esse conceito surgem a partir dessa representação, como podemos observar no quadro 20 a seguir.

Quadro 20 – Imagens do conceito imagem associadas ao (4º) caso

| Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Obtidos pelas respostas na forma algébrica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu sei que a representação gráfica me permite identificar o limite de uma função quando <math>x</math> tende a <math>\infty</math>, pelo que acontece com os valores do <math>y</math> quando <math>x</math> cresce ou decresce</li> <li>✓ Eu sei que a representação gráfica me permite encontrar o limite de uma função quando <math>x</math> tende a um ponto, observando o que acontece com os valores do <math>y</math> quando <math>x</math> se aproxima desse ponto.</li> <li>✓ Eu <b>faço</b> a representação gráfica da função para procurar o limite quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>), ou quando <math>x</math> tende a um ponto.</li> <li>✓ Eu <b>penso</b> na representação gráfica da função para determinar o limite quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>), ou quando <math>x</math> se aproxima de um ponto.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>) tende a zero.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math> quando <math>x</math> tende a zero por valores positivos tende a <math>+\infty</math>.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math> quando <math>x</math> tende a zero por valores negativos tende a <math>-\infty</math>.</li> </ul> <p><b>Obtidos pelas respostas na forma gráfica:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Escolho alguns pontos para posicionar o gráfico, quando já sei a forma da representação gráfica</li> <li>✓ Eu <b>penso</b> na representação gráfica da função para lembrar o que acontece com a função quando <math>x</math> se aproxima de um ponto, ou cresce (decresce) para infinito.</li> <li>✓ Escolho alguns pontos para posicionar o gráfico, quando já sei a forma da representação gráfica.</li> <li>✓ Eu sei que as representações gráficas das funções <math>f(x) = \frac{3}{x}</math> e <math>f(x) = \frac{-3}{x}</math> têm a mesma forma da função <math>f(x) = \frac{1}{x}</math>, e que para representá-las adequadamente no plano cartesiano eu preciso escolher alguns pontos.</li> <li>✓ Eu sei que a função <math>f(x) = \frac{2+x}{x}</math> é a função <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> transladada, e que para representá-la adequadamente no plano cartesiano eu preciso escolher alguns pontos, do intervalo solicitado.</li> <li>✓ Se o limite da função tende a um número <math>K</math> quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>), então na representação gráfica a reta <math>y=K</math> é onde, a partir de um certo <math>x</math>, a curva do gráfico irá se tornar cada vez mais próxima dessa reta, sem nunca tocar.</li> </ul> <p><b>Obtidos pelas respostas na forma de linguagem natural, escrita ou oral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu sei que a função <math>f(x) = \frac{3}{x}</math> é praticamente a mesma coisa dessa aqui <math>f(x) = \frac{1}{x}</math>, só que essa se aproxima mais dos eixos.</li> <li>✓ A função <math>f(x) = \frac{-3}{x}</math> têm a mesma forma da função <math>f(x) = \frac{1}{x}</math>, mas como é negativa é só inverter no plano cartesiano, onde era positiva passa a ficar negativo.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Podemos dizer que o conceito imagem de Mateus sobre esses casos de limites são fortemente associados à representação gráfica das funções, todavia durante seu percurso nessas atividades ele conseguiu fazer algumas associações com as representações algébricas das funções, bem como associar imagens a questões formuladas na linguagem natural escrita e também oral.

Outro ponto importante foi que não identificamos imagens que pudessem conflitar no seu conceito imagem até aquele momento, um bom começo para esse processo inicial que Mateus vivenciava e que iria se estender por mais algum tempo.

### **6.2.1.3 Sintetizando os caminhos percorridos por Mateus**

Nessas situações vivenciadas por Mateus, observamos que seus esquemas foram sendo construídos, e/ou modificados, principalmente pelas situações vivenciadas com o estudo de funções. São esquemas que se mostraram efetivos para lidar com algumas situações de funções, e ele sempre os mobiliza quando identifica semelhança com as funções conhecidas, sendo que esse reconhecimento pode ser tanto pela representação algébrica, como pela gráfica. Entretanto, percebemos que seus meios de tomada de informação, de controle e de inferência são mais eficazes por meio das representações gráficas. Vimos que seus invariantes operatórios mobilizados por essas representações contribuíram para que ele resolvesse a maioria das atividades corretamente. Notamos também que elas são as representações que ele tem mais confiança, ou talvez mais facilidade em manipular.

Em vários momentos, vimos que Mateus apresentou dificuldade na manipulação algébrica e também com o cálculo numérico, certamente devido a lacunas de sua formação no ensino médio. Em geral, ele não fazia as contas com números na forma de representação decimal e, quando era preciso, sempre buscava ajuda, ou tirava dúvidas, com seu colega. Com relação aos números reais, ele ainda mobiliza alguns teoremas em ação incorretos como, por exemplo, o (TAB): Se o número  $x$  não faz parte do intervalo então é preciso escolher um número mais próximo dele para ser o extremo do intervalo. É uma dificuldade relacionada a propriedade dos conjuntos dos números reais, evidenciada em vários estudos (CORNU, 1983; CURY, 2008; ARTIGUE, 1985), como sendo uma situação que, em geral, surge somente no estudo do conceito de limite. Todavia, podemos trabalhar esse aspecto dos números reais antes da introdução do conceito de limite, por exemplo, em situações envolvendo conceitos como: inequações, módulos, intervalos e com as funções. Além disso, é importante considerar que os alunos vão ter essa dificuldade, e deverão trabalhá-la nas situações iniciais envolvendo o conceito de limite. O professor precisa saber que esse problema pode existir, estar atendo aos seus alunos, e oportunizar situações ao longo do ensino que façam com que esse conhecimento seja confrontado para que o estudante possa perceber e corrigir, reorganizando assim seu esquema para esses casos. Segundo Vergnaud (1990, 2015) um teorema em ação

incorreto pode conviver muito tempo nos esquemas do aluno, sem que ele perceba que há qualquer problema.

De fato, na última entrevista quando discutíamos sobre algumas noções que o conceito de limite envolve, falávamos sobre a ideia de se tomar valores de  $x$  “tão próximo quanto se queira” de um ponto. Solicitamos que Mateus nos dissesse um número que ele achava que estava bem próximo do número dois, ele escreveu:  $\langle 2,00001 \rangle$  e disse que havia outros mais próximos. Questionei quantos números ele achava que tinham mais próximo e ele falou que têm infinitos. Então, perguntei ao Mateus qual o número que vem em seguida aos dois, ele ficou pensando e disse que não tinha. Como ele parecia muito confuso, pedi para me explicar porque não tinha, ele falou que *< Mas não tem como, aqui vai ser o primeiro número vai 000000 até chegar no numero 1 >* No caso ele se referia a  $2,000000...1$ , em seguida disse *< Vai ser 0,000000000... >*. Questionei quantos zeros tinha e Mateus disse que haveria infinitos. Contudo, ficamos em dúvida se ele se referia a um número muito pequeno ou vários números muitos pequenos, em sua fala ele disse que não tinha e, ao mesmo tempo, tentou escrever o primeiro número que viria depois. Então, perguntamos se ele conseguiria dizer o número que vem depois, ele fala que não *< Por que não dá para escrever mais não, mas existe sim >*. Mateus ficou com muita dúvida, em momentos dizia que não, pois têm infinitos, mas voltava a argumentar que existia só que não era possível escrever. Decidimos exemplificar com uma atividade semelhante a que foi desenvolvida na experimentação, no caso seria escrever na forma de intervalo o conjunto dos reais sendo  $x > 2$  ou  $x < 2$ . Como Mateus achava que existia um número antes do número 2, como também depois, supomos que existissem os números de  $a'$  e  $b'$ , respectivamente, tal que podemos escrever na forma de intervalos como:  $] -\infty; a'] \cup [b'; +\infty[$ . Ele nos disse que não *< Por que a gente não sabe qual que é o  $a'$  e qual que é o  $b'$  >*.

Percebemos que esses questionamentos deixaram Mateus incomodado, pois ele sabe que é possível escrever um número de forma geral se sabemos que ele existe. Entretanto, ele ainda nos pareceu relutante em abandonar a ideia que existia um número, mas inferimos que essas discussões o fizeram refletir sobre esse aspecto, realmente muito difícil, dos conjuntos reais (CORNU, 1983, REZENDE, 2003).

Um esquema que Mateus mobilizou, readaptado do estudo com as funções, para lidar com limite de funções, se pautava no teorema em ação incorreto:

- (TAB.3) Se estou lidando com limite de funções, então sempre preciso trabalhar, com elementos do domínio para obter a resposta em termos de  $f(x)$ .

Este esquema provavelmente era estável para algumas funções e Mateus ainda não tinha enfrentado situações que lhe trouxesse problemas. Porém, nessas atividades ele precisou refletir sobre isso e comentou que no ensino médio eles só trabalhavam com elementos do domínio para encontrar valores para  $f(x)$  e que demorou a perceber que nestas atividades isso seria diferente. Quando questionamos na última entrevista sobre esse fato, ele já mostrava indícios de que seu esquema estava se adaptando a essas novas situações, pois nos disse que não havia entendido o que a questão pedia quando resolveu. Então, como estava acostumado a deixar a resposta sempre como  $f(x)$  resolveu mudar o resultado obtido em termos de  $x$  para  $f(x)$ , mas que depois compreendeu o que a questão solicitava e que a resposta seria em termos de  $x$ . Para Mateus a questão do ponto de vista de invariantes operatórios, conceitos e propriedades matemáticas, não seriam tão difíceis para ele resolver, mas a falta de informações e meios de controle sobre os resultados da ação foram decisivos para que seu esquema não conseguisse fazer as rupturas necessárias naquele momento.

Sabemos que esses conhecimentos foram se constituindo ao longo dos anos nas situações vivenciadas por Mateus, e que provavelmente ainda vão surgir em outros momentos em situações que podem, inclusive, serem semelhantes as que foram tratadas nesse estudo. O professor precisa saber que isso pode acontecer, e acontece, do mesmo modo:

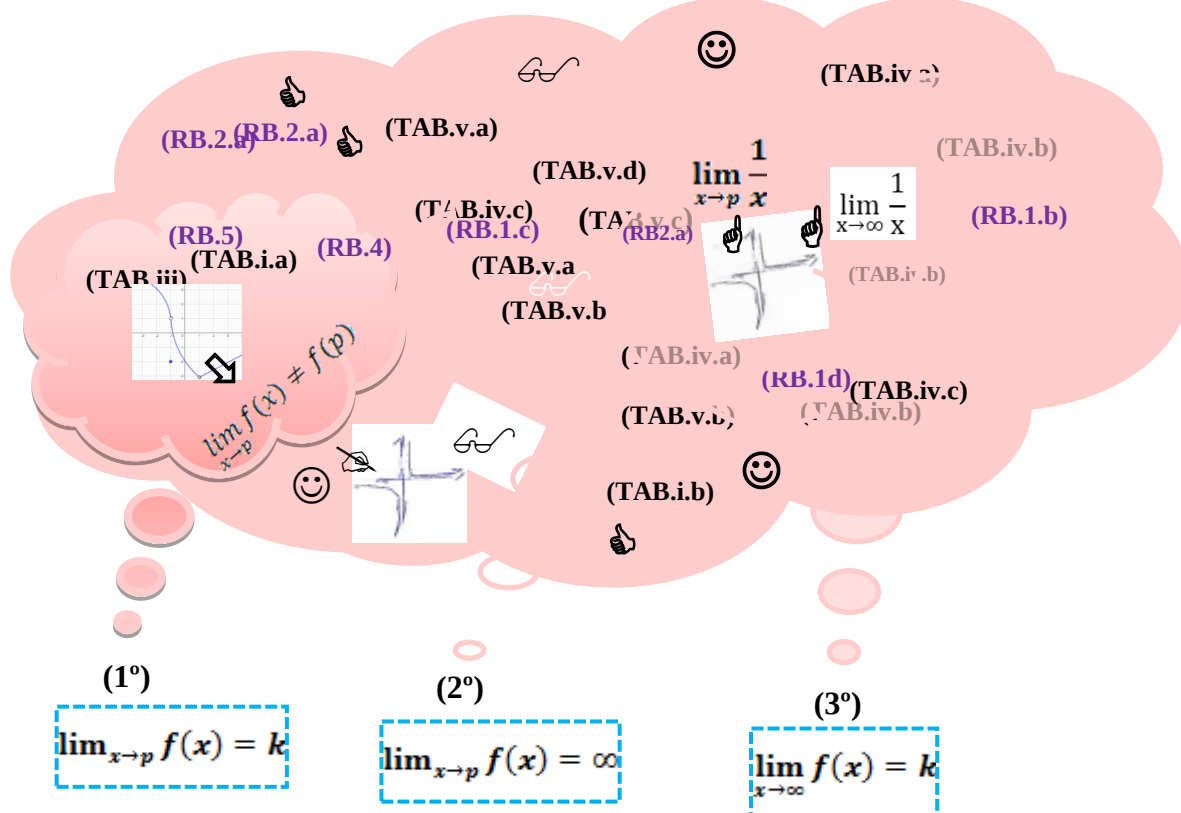
Em todas as classes de problemas, podem-se identificar as filiações "favoráveis", aquelas que permitem aos estudantes confiar nos conhecimentos prévios e progredir um pouco na complexidade (um está então na zona de desenvolvimento proximal, mais acessível) e aquelas que são "rupturas" e que apelam para a desestabilização dos estudantes: estamos então numa zona de desenvolvimento proximal menos acessível, para a qual o trabalho de mediação do professor é mais importante e complexo (VERGNAUD, 2007, p. 295-296, tradução nossa).

As filiações e rupturas vão acontecer o tempo todo durante a aprendizagem de novos conceitos, ou mesmo quando o aluno precisa lidar com situações de conceitos já antes iniciados, mas que trazem aspectos nunca antes trabalhados desses conceitos. Como é o caso do conceito de limite de funções, que no curso de Matemática, por exemplo, será retomado em outros momentos ao longo do curso. Esse recorte que fizemos para nossa experimentação do campo conceitual desse conceito evidenciou a importância de se considerar as situações, os conceitos que estão imbricados para se compreender essas filiações e rupturas envolvidas nos esquemas mobilizados pelo aluno.

Esses elementos identificados nos esquemas e que foram relidos em termos do conceito imagem de Mateus, nos permitiu identificar também imagens que ele estava associando às situações trabalhadas e que se constituíam como um conceito definição pessoal

desse aluno. Vejamos na figura 43 uma ilustração de como relacionamos essas imagens aos referidos casos de limite de funções.

Figura 43 – Imagens do conceito definição pessoal de Mateus



Fonte: Produzido pela autora da pesquisa.

Na última entrevista, Mateus estava fazendo associações mais pertinentes com as noções apresentadas, para esses casos de limite de funções, e já conseguia compreender alguns equívocos em associações realizadas anteriormente. Esse é um ponto importante no processo de aprendizagem, o aluno compreender que os conhecimentos que ele mobiliza podem ter aspectos que não estão bem compreendidos. Nas falas dos áudios vimos que, em vários momentos, ele sentia que havia algo errado em sua resolução. Saber que ele pode evocar, mobilizar, outras representações como meio para buscar outras informações, quando sente que há algum problema na sua resolução é fundamental no processo de aprendizagem de um conceito.

A cada imagem evocada, ele teria outros aspectos relativos ao conceito, a atividade trabalhada, podendo assim obter meios efetivos para lidar com as situações que precisa enfrentar ao longo do ensino. Com relação a definição formal por épsilon e delta, por exemplo, ele já conseguia fazer associações mais próximas. Algumas imagens equivocadas estavam sendo “abandonadas”, ou pelo menos questionadas, como vimos no caso da relação

entre esses quantificadores  $\epsilon$  e  $\delta$ . Bem como, com o modo que a função é trabalhada nessa definição formal, fazendo o caminho inverso do que ele estava acostumado a lidar.

Como dissemos no caso anterior da figura 39, nesta figura 43 pode conter imagens, e teoremas em ação, que trouxeram problemas no percurso vivenciado por Mateus em nossa experimentação, ou seja, eles podem ainda serem mobilizados em situações futuras. Todavia, o mais importante é que percebemos que Mateus conseguiu adaptar seu esquema para ser efetivo para lidar com as situações, como também associar imagens mais pertinentes. Desse modo, ele ampliou seus invariantes operatórios, como também imagens do seu (CI), diante de várias representações utilizadas. O que permitirá que ele tenha meios de controle, e validação, mais eficazes durante suas ações ao lidar com situações semelhantes futuramente.

A seguir, apresentamos nossa pesquisa realizada na França.

## 7. MOMENTOS DA PESQUISA REALIZADA NA FRANÇA

Em nossos estudos na seção 4 vimos que na França o conceito de limite é apresentado ao longo do segundo e do terceiro ano do *lycée*. Diante disso, escolhemos acompanhar a introdução do conceito de limite de função no terceiro ano, porque é mais próximo do trabalho que realizamos com os estudantes no Brasil.

Outra escolha que fizemos, principalmente pelo pouco tempo que teríamos para nosso estudo na França, foi com relação à elaboração e aplicação das atividades aos alunos franceses. Como nosso tempo de estágio foi de sete meses a partir de agosto de 2017, optamos por acompanhar a introdução do conceito de limite de funções por um professor e, em seguida, fazer uma entrevista com alguns alunos. Para isso, elaboramos uma grade de análise e acompanhamos a apresentação do conceito de limite de funções pela professora dessa turma.

Decidimos também aplicar um questionário, como fizemos no Brasil, nos alunos franceses ao final da introdução do conceito de limite de função. Com isso, inserimos atividades sobre esse conceito e, assim, conseguimos mais dados sobre as ações dos alunos diante dessas situações antes das entrevistas.

A seguir, apresentamos as observações que fizemos das aulas da professora, a elaboração do questionário e as questões da entrevista. Na segunda parte expomos as análises das produções obtidas durante a entrevista, bem como do questionário, com nosso estudante francês.

### 7.1 Uma turma do *Terminale* do *lycée*

Nossa pesquisa na França foi realizada em um colégio público localizado na cidade de Troyes. Com alunos de uma classe do *Terminale*<sup>31</sup> científico geral (opção ciências da vida e da terra), sendo que ao final do curso esses estudantes podem escolher diferentes especialidades como: informática, física, química, matemática, entre outras.

Nesta turma havia 27 alunos e eles tinham seis aulas de matemática por semana, de 55 minutos cada, sendo que todos eles estudavam nesta escola desde o início do ensino médio (*lycée*), com a mesma professora.

---

<sup>31</sup> Corresponde ao nosso 3º ano do ensino médio.

### 7.1.1 Observando o trabalho de uma professora no *lycée*

Acompanhamos a introdução do conceito de limite de funções com a classe da professora francesa utilizando a grade de análise que discutimos na metodologia<sup>32</sup>. Assim, as discussões que apresentamos são baseadas nas anotações que fizemos norteadas por esse instrumento, bem como pelos áudios. Além disso, a professora nos disponibilizou o plano de aula e as listas de atividades utilizadas nessas aulas.

Apresentação do conceito de limite de funções aconteceu em três encontros no mês de outubro de 2017, nos dias: 09 (uma aula), 13 (duas aulas) e 19 (duas aulas). Um detalhe importante no trabalho dessa professora é com relação à distribuição dos conteúdos em suas aulas. Essa escola tem quatro professores de matemática que buscam trabalhar de maneira próxima e segundo a professora é uma escolha deles trabalharem desse modo. Eles discutem a ordem de apresentação dos conteúdos, as listas de exercícios, o uso de tecnologias, entre outras coisas. Um ponto interessante é que eles decidiram trabalhar sempre dois conteúdos ao mesmo tempo, assim, quando a professora iniciou a apresentação de limite de funções os alunos estavam trabalhando também com números complexos. É a ideia de que é preciso um tempo de reflexão e amadurecimento para compreensão de um conceito.

A professora iniciou o estudo de limite de funções no dia 09 lembrando o estudo de limite que eles fizeram para sequência, argumentou que não seria difícil, pois eles já tinham feito algo parecido quando estudaram as sequências. A ideia geral seria a mesma: dado um  $x$  muito grande (ou pequeno se  $x$  for negativo), como foi feito com  $n$ , ela chama atenção para não confundirem o  $n$  muito grande com esse  $x$  muito grande, já que o  $n$  era um número natural e o  $x$ , nesse caso, seria um número real. Como nas sequências, o limite da função  $f(x)$  poderia ter as seguintes possibilidades:

- ✓ Os valores da função se tornam cada vez maiores (ou menores se a função for negativa);
- ✓ Os valores da função se aproximam de um número real;
- ✓ Os valores da função não permitem obter um valor particular.

A professora começou com o caso de limite de funções no infinito, aproveitando para relacionar ao que foi visto com o estudo das sequências. Ela propôs que os alunos fizessem a atividade (1.1) denominada de aproximação intuitiva, em dupla ou individualmente. Nessa introdução, eles deveriam relacionar a representação geométrica de uma função ao caso de

---

<sup>32</sup> A grade de análise pode ser conferida também no anexo C.

limite correspondente. Vejamos na figura 44 essa atividade, em que na primeira coluna, numeradas de (1) até (6), são expressões algébricas de limites com as seis possibilidades para os limites em que  $x$  tende a  $+\infty$  ou  $(-\infty)$ . Na segunda coluna, identificadas de (a) a (f) estão representações gráficas de funções. Uma variável importante de se observar é que essas representações contêm nos eixos cartesianos setas pontilhadas indicando para onde o  $x$  (ou  $f(x)$  no caso do eixo das ordenadas) está se dirigindo para o  $+\infty$  ou  $(-\infty)$ .

Figura 44 – Atividade introdutória dos limites no infinito<sup>33</sup>

Exercice 1.1. Approche intuitive

Relier chaque courbe à la catégorie qui lui correspond.

|                                                  |    |                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|--------------------------------------------------|----|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$    | a. | 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ | d. |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$    | b. | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ | e. |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ | c. | 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ | f. |

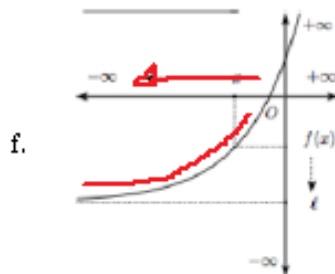
Fonte: Coletado pela autora da pesquisa

Os alunos deveriam relacionar cada caso de limite na sua forma algébrica, do número 1 ao 6, a sua respectiva representação gráfica, identificada de (a) até (f). Eles levaram aproximadamente 5 minutos para fazerem a atividade e a professora em seguida foi ao quadro para fazer a correção com o auxílio dos estudantes. Ela iniciou pela coluna das representações gráficas e foi escrevendo na forma algébrica de limite os dois casos de limites solicitados, quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ). Ela foi questionando os alunos o que estava acontecendo com o gráfico quando  $x$  fica muito grande (ou pequeno) e o  $y$  vai para  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), ou para um número. Em todo momento, a professora fazia gestos indicando, algumas vezes também ia marcando na imagem do quadro para onde o  $x$  estava tendendo,  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), e para onde o

<sup>33</sup> Enunciado tradução do exercício: “Aproximação intuitiva. Relacione cada curva a sua categoria correspondente”. (Tradução nossa)

$f(x)$ , ou  $y$ , estava indo na representação gráfica. Na figura 45, trazemos uma representação para exemplificar essas indicações que ela fazia na imagem dessa atividade<sup>34</sup>.

Figura 45– Indicações da professora na representação gráfica



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

A professora argumentava que tudo que eles fizeram foi conjecturar sobre os valores dos limites, por observação do gráfico. Ela enfatizou que para saber se realmente o que foi conjecturado está correto é necessário provar a conjectura. Em seguida, propôs uma atividade (1.2) denominada “Da intuição à definição...”, em que eles primeiramente deveriam conjecturar o limite da função  $f(x) = \sqrt{x}$  definida em  $[0; +\infty[$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ , e depois provar a conjectura inspirados na definição rigorosa de limite infinito de uma sequência. Ela indicou que eles utilizassem a calculadora para conjecturar o que estava acontecendo com a função quando  $x$  se torna muito grande.

A correção no quadro era sempre realizada a partir da resolução de um aluno, nessa atividade um deles foi dizendo a resposta que havia encontrado enquanto a professora ia escrevendo no quadro. Em seguida, ela indagou se alguém tinha resolvido diferente. Observamos que o tempo todo ela ia questionando os alunos para que eles participem da construção com ela. Eles conjecturaram que a função  $f$  admite por limite  $+\infty$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Em seguida, a professora solicitou a definição de limite infinito de uma sequência que eles já tinham visto anteriormente. Eles buscaram em seus cadernos ou nos livros, e um aluno foi dizendo a definição. Ela perguntou então como seria adaptar aquela definição para o caso de limite agora com as funções. Ao final foi realizada a correção no quadro com a seguinte representação algébrica da atividade:

$$f(x) > A \Leftrightarrow \sqrt{x} > A$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 > A^2 \text{ A função quadrática é estritamente crescente em } \mathbb{R}^+$$

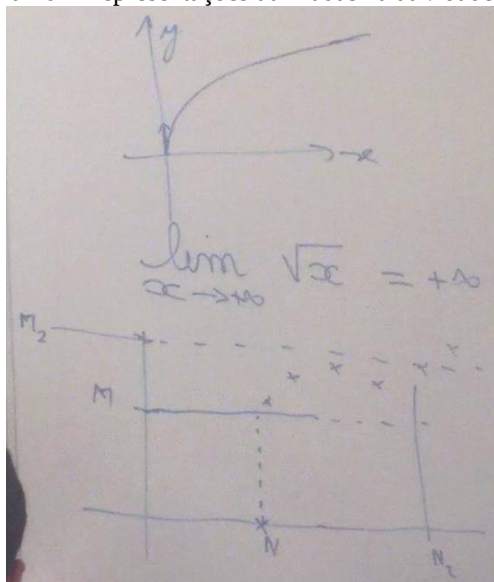
$$\Leftrightarrow x > A^2$$

$$\text{Assim para } m = A^2, \text{ se } x > m, \text{ então } f(x) > A$$

<sup>34</sup> As fotos do quadro não ficaram nítidas, pois fizemos imagens da apresentação no quadro branco com o datashow, assim riscamos a mesma atividade utilizada pela professora para exemplificar.

Podemos observar na figura 46 a representação gráfica da função, bem como a interpretação da representação geométrica que a professora utilizou na discussão da correção da atividade.

Figura 46 – Representações utilizadas na atividade (1.2)



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Em seguida a professora apresentou as seguintes definições:

**Para memorizar:**

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $] * ; + \infty [$  (\* Poderia ser um número real ou  $-\infty$ ).

Dizemos que  $f$  tem por limite  $+\infty$  em  $+\infty$ , se as imagens de  $x$  pela função  $f$  tomam valores maiores que qualquer real dado assim que  $x$  é suficientemente grande.

**Mais formalmente:**

A função  $f$  admite por limite  $+\infty$  em  $+\infty$ , se todo intervalo aberto  $]A; +\infty[$  contém todos os valores de  $f(x)$  quando  $x$  é suficientemente grande.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

A próxima atividade (1.3) eles deveriam utilizar essa definição para escrever uma definição análoga para os casos de limite quando:

- A função  $f$  admite por limite  $-\infty$  em  $+\infty$
- A função  $f$  admite por limite  $+\infty$  em  $-\infty$
- A função  $f$  admite por limite  $-\infty$  em  $-\infty$

Um ponto importante na fala da professora durante a institucionalização<sup>35</sup>, para esses casos, quando  $x$  tende a  $-\infty$ , foi quando ela fez uma observação nas resoluções apresentadas por dois alunos. Um havia colocado que “ $x$  é suficientemente negativo” outro que “ $x$  é suficientemente pequeno”. Na resolução deste último ela acrescentou entre parênteses: “ $x$  é

<sup>35</sup> Momento em que o conhecimento que estava sendo mobilizado na atividade é apresentado. No caso, as definições que serão utilizadas e as propriedades do conceito que está sendo introduzido, em processo de construção e que, de certa forma, estava sendo mobilizado implicitamente na resolução da atividade (BROUSSEAU, 2008).

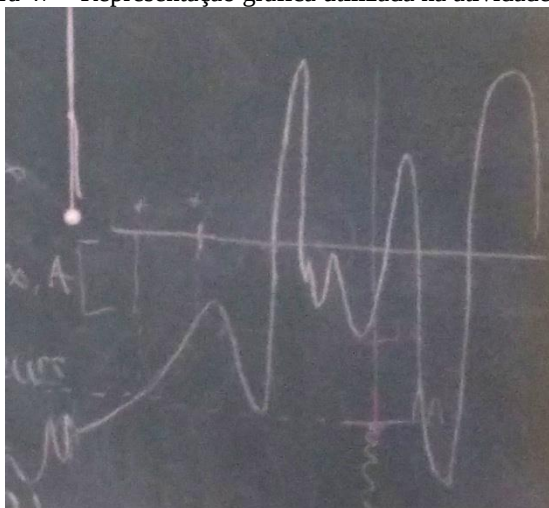
suficientemente pequeno (negativo)”. Argumentou que essas expressões são equivalentes e que eles alunos não deveriam confundir com o caso quando dizemos que  $x$  é suficientemente pequeno, que é para quando tomamos valores de  $x$  muito próximo de zero. Percebemos que a professora já estava se preocupando com o próximo caso de limite que eles teriam que lidar.

Além disso, a professora enfatizou que os alunos deveriam compreender palavra por palavra das definições e questiona se eles tinham dúvidas com relação a alguma parte das definições e, ao final, destaca os seguintes aspectos:

- ✓ Suficientemente negativo significa que os valores, seja de  $x$  ou de  $f(x)$ , estão indo para  $-\infty$ ;
- ✓ Suficientemente pequeno negativamente significa que os valores, seja de  $x$  ou de  $f(x)$ , estão indo para  $-\infty$ ;
- ✓ Suficientemente pequeno significa que os valores, seja de  $x$  ou de  $f(x)$ , estão indo para zero;
- ✓ Suficientemente grande significa que os valores, seja de  $x$  ou de  $f(x)$ , estão indo para  $+\infty$ .

Outro ponto interessante que observamos no trabalho da professora foram as representações utilizadas nas institucionalizações dessa atividade. Ela sempre explicava oralmente, escrevendo as representações gráficas e algébricas (figura 47). Essa prática vem sendo recomendada por vários estudos, inclusive encontramos nas orientações de alguns livros didáticos (STEWART, 2003), indicações para que os professores utilizem essas variações de representações no estudo de limites.

Figura 47 – Representação gráfica utilizada na atividade (1.3)

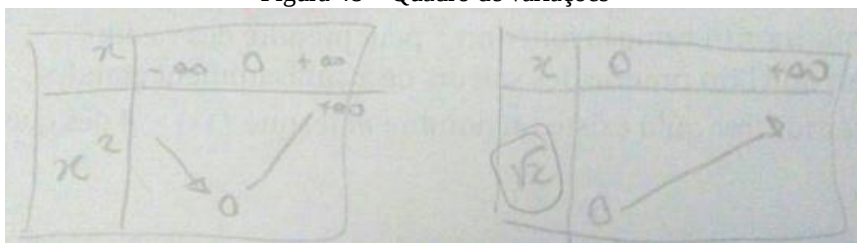


Fonte: coletada pela autora da pesquisa.

Ao final desse encontro a professora argumentou que a partir de agora eles iriam começar a trabalhar também com os quadros de variações das funções para identificarem os limites. Esses quadros são apresentações resumidas, por exemplo, no estudo de funções eles

utilizaram para ver crescimento, decrescimento, entre outros resultados. Os professores utilizam bastante esse recurso e ele aparece também nos livros didáticos, na figura 48 podemos ver dois exemplos, desses quadros que a professora fez durante uma atividade. No caso, quando ela trabalhou com as funções:  $f(x) = x^2$  e  $f(x) = \sqrt{x}$ .

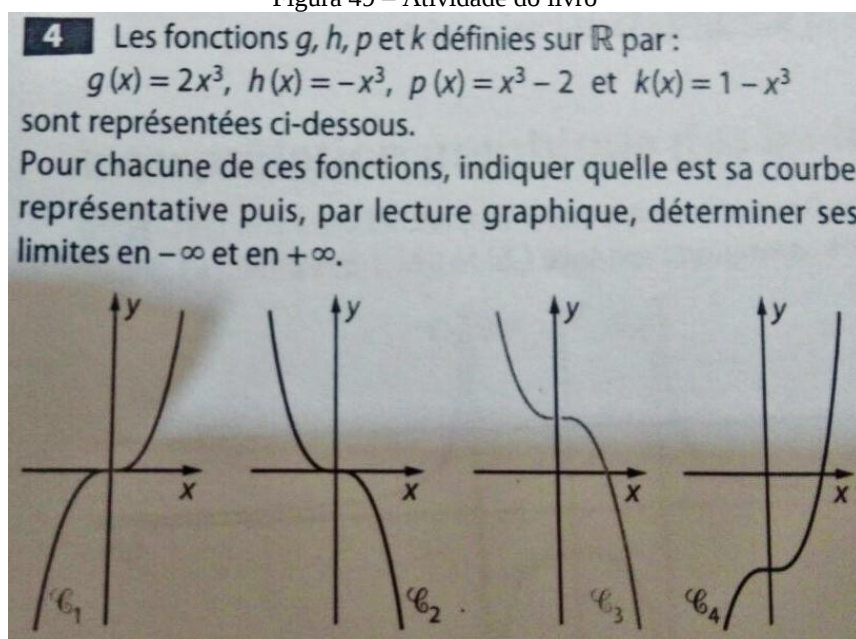
Figura 48 – Quadro de variações



Fonte: coletada pela autora da pesquisa.

No encontro seguinte a professora iniciou o trabalho com a noção de limite, corrigindo algumas atividades de casa, uma delas era do livro. Na figura 49, onde podemos observar no seu enunciado, que os estudantes deveriam relacionar a expressão algébrica de uma função com a sua representação gráfica e justificar a escolha. Em seguida, encontrar os limites das funções quando  $x$  tende para  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) por meio da observação gráfica.

Figura 49 – Atividade do livro



Fonte: coletada pela autora da pesquisa.

Vemos novamente a ideia de se relacionar os limites por meio das representações gráficas e algébricas, justificando tanto oralmente, como também por escrito essas escolhas.

O limite finito foi apresentado depois, a professora iniciou argumentando que eles fariam uma aproximação intuitiva para esse caso de limite, em seguida entregou uma folha de atividade com o seguinte enunciado:

#### 1.8 Aproximação intuitiva

Considere a função definida sobre  $]2, +\infty[$  por  $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

1. Com a ajuda da calculadora, conjecture o limite da função quando  $x$  tende a  $+\infty$ .

Esta conjectura não se constitui em uma prova.

No entanto, se for verdade, significa que podemos nos aproximar do valor obtido como quisermos. Verifique isso com a ajuda do algoritmo:

$d \leftarrow 0,001$   
 $X \leftarrow 10$

Como  $|f(x) - 3| > d$   
 $X \leftarrow 10 \times X$

Fim quando encontrar  $X$

2. Qual é o papel desse algoritmo? O que são essas variáveis?
3. Resolva a equação  $f(x) = 3$ . Interprete o resultado.
4. Calcule  $f(10^{11})$ . Conclua.

Vamos demonstrar rigorosamente nossa conjectura.

Para isso, vamos mostrar que podemos nos aproximar tão próximos quanto quisermos do limite 3, desde que  $x$  seja grande o suficiente.

5. Mostre que  $f(x) > 3$  para todo real de  $]2, +\infty[$ .
6. Mostre que existe um número real  $m$  tal que se  $x > m$ ,  $0 < f(x) - 3 < 10^{-n}$  para qualquer valor de  $n$ . Interprete esse resultado.

A professora propôs o trabalho do mesmo modo que o caso anterior de limite, os alunos resolveriam as questões e, em seguida, um deles deveria apresentar sua resolução para ser discutida por todo o grupo. Eles inicialmente fizeram até o item (4), corrigiram e discutiram e depois demonstraram a conjectura resolvendo os demais itens. Novamente ela argumentou que é preciso compreender cada resultado encontrado, enfatizando os seguintes aspectos:

- ✓ O papel do algoritmo em mostrar o primeiro valor de  $x$  para o qual  $|f(x) - 3|$  será inferior a  $d$ ;
- ✓ O resultado da equação, em que verificou-se que é impossível encontrar um  $x$  tal que  $f(x)$  seja 3; e o fato do algoritmo evidenciar que podemos nos aproximar de 3, tão próximos quanto quisermos;
- ✓ No intervalo  $]A, +\infty[$ , podemos escolher qualquer  $A$ , que a partir de um certo momentos todos os valores da  $f(x)$  estarão no intervalo.

Em seguida a professora apresentou as definições:

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $]a, +\infty[$  ( $a$  Poderia ser um número real ou  $-\infty$ ).

Dizemos que  $f$  tem por limite o número real  $l$  quando  $x$  tende a infinito se as imagens da  $f(x)$  são também próximas de  $l$ , se  $x$  for suficientemente grande.

Podemos formalizar essas coisas nos inspirando na definição dada para os limites finitos das sequências:

A função  $f$  admite por limite  $l$  se todo intervalo aberto  $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$  contém todos os valores de  $f(x)$  desde que  $x$  seja suficientemente grande.

Notação:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

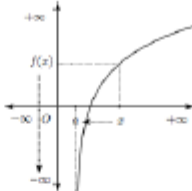
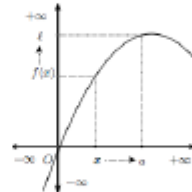
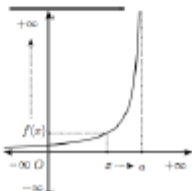
A reta de equação  $y=l$  é então a assíntota da curva em  $+\infty$ .

A professora fez uma discussão sobre essa definição e apresentou casos de funções que não têm limite finito nem infinito quando  $x$  tende a infinito, exemplifica com as funções seno e cosseno utilizando a representação gráfica.

No encontro seguinte, foi abordado o conceito de limite em um ponto. A professora iniciou a discussão dizendo que existe outro caso de limite que não existia no estudo das sequências, e que nessa nova situação será um valor particular que irá causar problemas. Argumentou que um exemplo simples para compreender essa noção é a função inversa no zero e toma como exemplo o caso da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  que não está definida no zero. Além disso, relembra que o inverso de um número positivo muito próximo de zero é um número muito grande.

Em seguida, propôs que eles conjecturassem os limites da próxima atividade de modo intuitivo. Como no caso anterior, a professora solicitou que os alunos relacionassem a representação gráfica de uma função com a expressão algébrica do limite correspondente e explorou três representações gráficas e algébricas, conforme podemos ver na figura 50:

Figura 50 – Atividades para estudo do limite de função

|                                            |                                                                                         |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$    | a.  |
| 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ | b.  |
| 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ | c.  |

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Após a discussão da correção no quadro, ela propôs outra atividade de aproximação intuitiva do limite, utilizando a mesma função utilizada anteriormente ]2,  $+\infty[$  por  $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ , também com a ajuda da calculadora e de um algoritmo, mas nesse caso para valores de  $x$

na vizinhança de 2. A atividade foi realizada como a anterior, em que os estudantes iam resolvendo e depois um deles, ou uma dupla, apresentava a solução aos demais colegas, e, ao final, a professora promovia uma discussão com todos e argumentava que eles deveriam memorizar a definição:

Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $]a; b[$ . Dizemos que  $f$  tende a  $+\infty$  quando  $x$  tende a  $a$  por valores superiores se pudermos fazer  $f(x)$  tão grande quanto quisermos se  $x$  for suficientemente próximo de  $a$  no intervalo  $]a; b[$ .

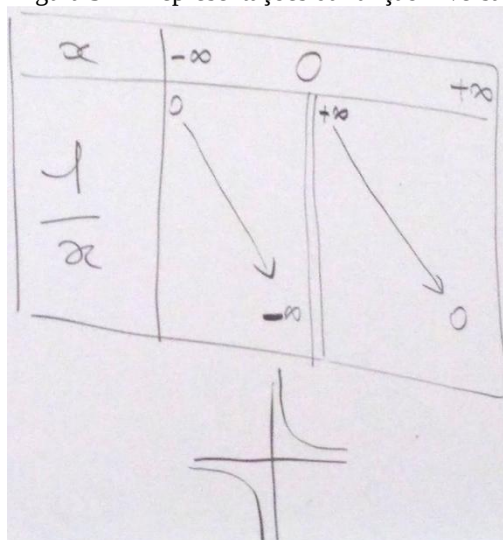
$$\text{Notação: } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

Então dizemos que a reta de equação  $x=a$  é assíntota da curva representativa de  $f$

Os outros limites são propostos como uma atividade para os estudantes, em que eles deveriam escrever uma definição análoga para os limites:  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x) = -\infty$ .

A função inversa foi retomada após a apresentação desses limites, sendo revistas as ideias de que o inverso de um número positivo muito pequeno é um número muito grande, e que isso se inverte quando se trata do inverso de um número negativo. Diante disso, a professora argumentou que temos os seguintes resultados:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$  e  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$  e que o eixo das ordenadas é a assíntota vertical da função inversa. Na atividade seguinte os alunos deveriam construir o quadro de variação dessa função, e na figura 51, podemos observar o quadro com uma representação do gráfico dessa função utilizado na correção da atividade.

Figura 51 – Representações da função inversa



Fonte: Coletado pela autora da pesquisa.

Em seguida, eles trabalharam com o quadro de variações, o enunciado da atividade propunha que:

Considere uma função  $f$ , cuja tabela de variações é dada abaixo. Observe que  $Cf$  é sua curva representativa.

|         |           |      |           |           |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $2$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$       | $-$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-1$ | $+\infty$ | $4$       |

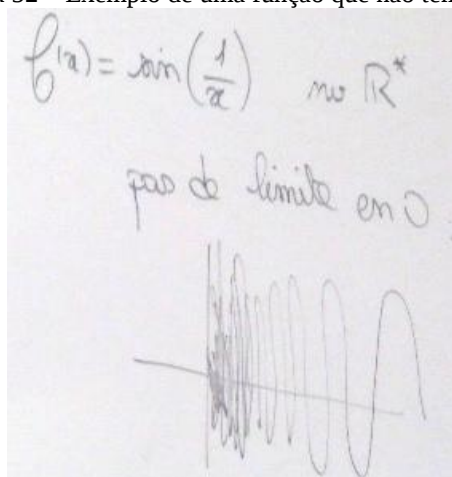
1. Qual é o conjunto de definição da função  $f$ ?
2. Quais são os limites indicados na tabela? Escreva usando a notação matemática.
3. Quais são as assíntotas da curva?
4. Dê uma possível curva representativa da função  $f$ .

Nessas atividades os alunos deveriam trabalhar com os limites com os quadros de variações, mas na primeira eles precisariam relacionar os limites da função inversa com o quadro de variações e também com a representação gráfica. Entretanto, a segunda atividade trazia o quadro de variações de uma função, incluindo as variações de sua derivada. Como vimos na seção 4 esses alunos tinham visto o conceito de derivada no segundo ano do *lycée* (*première*) e a professora o retoma para construção desses casos de limites.

Essa variedade de representações, segundo Vergnaud (1990) é importante na construção do conceito, sendo que cada uma delas agrega um conjunto de conceitos e de invariantes operatórios que irão contribuir no processo de aprendizagem do conceito. Bem como, na elaboração, ou adaptação, de esquemas mais efetivos para lidar com as novas situações.

Em seguida, a professora apresentou um exemplo de uma função que não tem limite em zero, como podemos observar na figura 52:

Figura 52 – Exemplo de uma função que não tem limite



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

A professora utilizou o exemplo da função  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  definida para os números reais positivo, e discutiu por meio da representação gráfica o fato dessa função não ter limite quando  $x$  tende a zero.

A definição de limite finito em um ponto foi apresentada diretamente aos alunos, dada por:

Definição: Seja  $f$  uma função definida no intervalo  $]a; b[$

Dizemos que  $f$  tende a  $l$  quando  $x$  tende a  $a$  por valores superiores se pudermos fazer os valores da  $f(x)$  também próximos de  $l$ , quanto quisermos se  $x$  for suficientemente próximo de  $a$  no intervalo  $]a; b[$

Notação:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Em seguida a professora propôs que os alunos fizessem uma definição análoga para o limite a direita do ponto, no caso  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  e, ao final, ela discutiu como os estudantes poderiam encontrar os limites de funções nas diversas situações. Primeiramente, são apresentados limites das funções que eles já conheciam no caso se tratavam das funções de referências e elas foram dadas conforme podemos observar na figura 53.

Figura 53 – Limites das funções de referências

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ , pour  $n$  impair
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ , pour  $n$  pair
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = \lim_{x \rightarrow 0} x^n = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ , pour  $n$  impair
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ , pour  $n$  pair

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Os alunos poderiam utilizar os resultados desses limites de funções diretamente nas atividades, como resultados válidos. Bem como, esses limites com as funções associadas a essas funções, por exemplo, no caso da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  as funções associadas são do tipo  $g(x) = \frac{k}{x}$ , com  $k > 0$ . Além disso, eram fornecidos quadros com regras para os alunos operarem e para encontrar alguns limites, vejamos na figura 54 uma dessas apresentações do planejamento de curso da professora.

Figura 54 – Regras para o cálculo de limite de função

**Regras de cálculo**

Considere no que segue,  $u$  e  $v$  duas funções definidas em um intervalo  $I$ ,  $a$  um número real ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ ,  $L$  e  $L'$  são dois números reais.

• **Soma de duas funções**

|                                  |          |           |           |           |           |
|----------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} u =$     | $L$      |           |           | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} v =$     | $L'$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} u + v =$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI        |

• **Produto de uma função por uma constante  $K$  não nula**

|                                       |         |              |           |
|---------------------------------------|---------|--------------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} u =$          | $L$     | $+\infty$    | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} k \times u =$ | $k > 0$ | $k \times L$ | $+\infty$ |
|                                       | $k < 0$ |              | $-\infty$ |

• **Produto de duas funções**

|                                       |         |               |           |           |           |
|---------------------------------------|---------|---------------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} u =$          | $L$     |               |           | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} v =$          | $L'$    | $+\infty$     | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} u \times v =$ | $L > 0$ | $L \times L'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|                                       | $L < 0$ |               | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

• **Inversa de uma função**

|                                        |               |           |           |    |           |           |
|----------------------------------------|---------------|-----------|-----------|----|-----------|-----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} u =$           | $L \neq 0$    | $+\infty$ | $-\infty$ | 0  | $0^+$     | $0^-$     |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{u} =$ | $\frac{1}{L}$ | $0^+$     | $0^-$     | FI | $+\infty$ | $-\infty$ |

Fonte: Coletada e traduzido pela autora da pesquisa.

Desse modo, os alunos conseguiriam trabalhar com uma diversidade de situações envolvendo: a soma, a subtração, a divisão e a multiplicação de funções conhecidas.

Em seguida, sintetizamos no quadro 21 a apresentação do conceito de limite de funções, com as principais escolhas realizadas pela professora durante a introdução desse conceito.

Quadro 21 – Síntese das escolhas didáticas utilizadas

| 1. Limites em $\infty$ (+ ou -)                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Da intuição à definição                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| - Identificar os limites na representação gráfica e relacionar com sua representação algébrica;                                                                                                                                                                                                                    |  |
| <b>1.1 Limites infinitos</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |
| - Conjecturar um limite particular $f(x) = \sqrt{x}$ ;                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
| - Inspirados na definição rigorosa de limite infinito de sequência e mostrar que a função tende a $+\infty$ quando $x$ toma valores grandes.                                                                                                                                                                       |  |
| <b>Para memorizar:</b><br>Seja $f$ uma função definida no intervalo $]a; +\infty[$ (* Poderia ser um número real ou $-\infty$ ).<br>Dizemos que $f$ tem por limite $+\infty$ em $+\infty$ , se as imagens de $x$ pela função $f$ tomam valores maiores que qualquer real dado quando $x$ é suficientemente grande. |  |

| 1. Limites em $\infty$ (+ ou -)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Mais formalmente:</b><br>A função $f$ admite por limite $+\infty$ em $+\infty$ , se todo intervalo aberto $]A; +\infty[$ contém todos os valores de $f(x)$ quando $x$ é suficientemente grande. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| <b>Analogamente</b> os alunos fazem para: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| <b>1.2 Limites finitos</b> Da intuição à definição.<br>Conjecturar o limite da $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ com ajuda da calculadora e de um algoritmo, em seguida demonstrar.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
| <b>Memorizar:</b> Seja $f$ uma função definida no intervalo $]a; +\infty[$ (*Poderia ser um número real ou $-\infty$ ).<br>Dizemos que $f$ tem por limite o número real $l$ quando $x$ tende a infinito se as imagens da $f(x)$ são também próximas de $l$ , se $x$ for suficientemente grande.<br><b>Formalmente:</b><br>A função $f$ admite por limite $l$ se todo intervalo aberto $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ contém todos os valores de $f(x)$ desde que $x$ seja suficientemente grande.<br>Nós anotamos como: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$<br>A reta de equação $y=l$ é então a assíntota da curva em $+\infty$ . |  |
| 2. Limites em um ponto                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
| Situações que não existiam nos limites de seqüências.<br>Utiliza a função $f(x) = \frac{1}{x}$ para discutir o limite quando $x$ tende a zero, enfatizando: que essa função não tem imagem em zero e que o inverso de um número positivo muito próximo de zero é um número muito grande.<br>Aproximação intuitiva:<br>- Identificar os limites na representação gráfica quando $x$ tende a um ponto e relacionar com sua representação algébrica.                                                                                                                                                                                        |  |
| <b>2.1 Limite infinito</b><br>Da intuição à definição.<br>Conjectura o limite da $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ com ajuda da calculadora e de um algoritmo, em seguida demonstrar.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| <b>Memorizar:</b> Seja $f$ uma função definida no intervalo $]a; b[$<br>Dizemos que $f$ tende a $+\infty$ quando $x$ tende a $a$ por valores superiores se pudermos fazer $f(x)$ tão grande quanto quisermos se $x$ for suficientemente próximo de $a$ no intervalo $]a; b[$<br>Notação: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$<br>A reta de equação $x=a$ é assíntota da curva representativa de $f$ .                                                                                                                                                                                                                                 |  |
| <b>Analogamente</b> os alunos fazem para: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
| Discussão dos limites da função $f(x) = \frac{1}{x}$ , da assíntota vertical e do quadro de variações juntamente com a representação gráfica.<br>- Identificar no quadro de variação de uma função: os limites, o domínio da função, as assíntotas e também esboçar uma representação gráfica de uma função para exemplificar as variações dadas pelo quadro.                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| <b>2.2 Limite finito</b><br>Apresentando diretamente a definição: Seja $f$ uma função definida no intervalo $]a; b[$<br>Dizemos que $f$ tende a $l$ quando $x$ tende a $a$ por valores superiores se pudermos fazer os valores da $f(x)$ também próximos de $l$ , quanto quisermos se $x$ for suficientemente próximo de $a$ no intervalo $]a; b[$<br>Notação: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$<br>O aluno deverá fazer uma definição análoga para: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$                                                                                                                                                   |  |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Observamos que a participação dos alunos dessa classe ocorria em todos os momentos das aulas, as resoluções eram sempre apresentadas por um deles, fosse oralmente ou escrevendo no quadro. Eles acompanhavam a resolução do colega discutindo alguma coisa que não compreendiam, ou não concordavam. Além disso, apresentavam resoluções que

faziam e que eram diferentes das que estavam proposta no quadro para serem também discutidas pelos grupos.

O papel da professora foi sempre o de propor as atividades para os alunos irem resolvendo. Eles poderiam escolher trabalhar em duplas, trios ou individualmente, mas não vimos nenhum aluno que preferisse ficar sozinho. No decorrer do trabalho vimos que ela ficava tirando dúvidas, dando indicações dos conceitos que eles precisariam mobilizar, no caso orientava para que eles procurassem nos livros ou nos cadernos. As dúvidas consideradas importantes eram discutidas no quadro com todos os alunos, percebemos que ela se preocupava em observar a participação de cada estudante, todos iam ao quadro apresentar sua resolução. Ela enfatizava que não tinha problema se houvesse algum erro, ou mesmo se o aluno não soubesse resolver toda a questão, pois os colegas poderiam o ajudar. A correção no quadro era sempre realizada pelas discussões dos alunos da resolução apresentada, em que ela ia questionando e corrigindo o que fosse necessário, para ao final institucionalizar o novo conceito.

No dia 19 de outubro após a finalização da apresentação do limite de funções pela professora, nós aplicamos um questionário em todos os alunos da classe. Esse instrumento teve objetivo de identificar sujeitos para nossa pesquisa, e também obter algumas produções sobre nosso objeto de estudo. A seguir, apresentamos e tecemos algumas considerações sobre a elaboração desse instrumento.

### **7.1.2 Conhecendo os colaboradores franceses**

Na França elaboramos e aplicamos um questionário como fizemos no Brasil, tanto para conhecermos um pouco os estudantes franceses, como também para selecionar alguns deles para nossa entrevista. Todavia, no Brasil, trabalhamos com acadêmicos do Curso de Matemática – Licenciatura e um dos nossos interesses era saber se eles queriam ser professores. Enquanto que na França, estávamos com alunos que poderiam escolher cursos diversos, em função disso, inserimos questões buscando informações sobre o que eles pretendiam cursar após o *lycée*, e também se algum deles já trabalhava.

Outra diferença é que no Brasil na disciplina de Cálculo I poderíamos ter alunos que já haviam visto o conceito de limite de funções, seja por serem alunos dos institutos federais ou do colégio militar, mas também poderíamos ter alunos que já haviam feito a disciplina e não foram aprovados. Entretanto, como na França sabíamos que eles já conheciam o conceito de

limite de sequência e também de derivada, decidimos aplicar o questionário após a apresentação do conceito de limite de funções e inserir algumas questões sobre limite.

Nas três primeiras questões, buscamos saber um pouco mais sobre o aluno, perguntávamos a idade, quais atividades ele realizava quando não estava no colégio, se trabalhava e se ele pretendia cursar uma universidade após o *lycée*, caso sim questionávamos qual e o porquê.

As outras questões eram sobre o conceito de limite nas quais questionávamos: como estava sendo a aprendizagem do conceito de limite de funções, se achava que estava sendo fácil ou difícil e por que; o que fazia quando estava com dificuldade em compreender alguma noção relacionada a esse conceito; se poderia escrever uma definição intuitiva de limite de funções e, em seguida, uma definição mais formal; quais conceitos conhecidos estavam sendo utilizados no estudo do conceito de limite de funções; e na última questão, apresentávamos uma representação gráfica de uma função, definida para todos os números reais, mas com pontos de descontinuidade, solicitávamos que encontrasse quatro limites e que justificasse como fez para identificar esses limites na representação dada.

Aplicamos o questionário nos 27 alunos da turma do *lycée* e após tabularmos as respostas selecionamos seis deles para nossa entrevista, sendo três rapazes e três moças. O critério para escolha foi o aluno ter respondido todas as questões buscando justificar suas respostas. Esses seis alunos aceitaram participar de nossa entrevista, mas uma das alunas ficou doente e não pudemos entrevistá-la. Desse modo participaram de nosso estudo cinco alunos franceses. Em seguida, apresentamos as questões que nortearam nossa experimentação na França.

### 7.1.3 Questões que elaboramos para as entrevistas

Escolhemos trabalhar com entrevista semiestruturada, pois ela permite, por um lado, direcionar as discussões para o nosso objeto de estudo e, ao mesmo tempo, discutir outros elementos que pudessem surgir no decorrer da entrevista.

Desse modo, durante a entrevista manteríamos sempre a mesma conduta, solicitaríamos que o aluno primeiramente resolvesse a questão e que, em seguida, explicasse como fez. Discutiríamos em mais detalhes cada elemento que fosse sendo apresentado nas resoluções, bem como, as dúvidas e dificuldades que pudessem surgir. Por exemplo, se o estudante nos dissesse que utilizou um gráfico, ou o quadro de variações de limite, iríamos

solicitar que ele fizesse no papel essa representação e nos explicasse como estava utilizando essa representação.

Segundo Vergnaud (2002), é por meio das representações mobilizadas na ação que podemos buscar indícios de filiações e rupturas no processo de aprendizagem de um conceito novo. Ele compara o tratamento dado pelo aluno na situação com a parte visível de um iceberg, uma vez que dificilmente um estudante consegue colocar em palavras o conhecimento científico, ou técnico utilizado. Diante disso, buscamos durante a entrevista levantar uma variedade de informações para podermos ter acesso a essa parte “não visível”. A coleta de uma diversidade de representações, orais e escritas, mobilizadas pelo estudante ao lidar com as situações, foi um elemento metodológico importante de nossa pesquisa. Foi por meio desses elementos que conseguimos modelar regra em ação e teorema em ação, para estudarmos os esquemas mobilizados por estudantes durante a ação. Assim como, fazermos uma releitura desses elementos como imagens do conceito imagem de limite de função do aluno. Possibilitando, com isso, uma discussão tanto sobre as adaptações dos esquemas mobilizados, como também sobre imagens que estavam se constituindo como um conceito definição pessoal, ou mesmo em imagens conflitantes.

Elaboramos a entrevista com seis questões sobre limite dentro do campo conceitual de nosso estudo, no caso, atividades de introdução ao conceito de limite de função. Optamos por funções usualmente utilizadas para essa introdução, observadas tanto no trabalho de sala de aula da professora, como também em alguns livros didáticos. As atividades eram sobre limite finito de uma função em um ponto. Limites no infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ) e limites infinitos em um ponto. Sendo todas as situações de limites trabalhadas por aproximações pela noção intuitiva de limite.<sup>36</sup>

Não inserimos atividades de aproximação de um ponto de uma função, como fizemos no Brasil, pois não teríamos tempo suficiente para discutir muitas atividades. Desse modo, acrescentamos uma questão sobre aproximação diretamente no conjunto de números reais, mas também consideramos que a ideia de aproximação de pontos da função poderia ser discutida durante a entrevista nas questões propostas. Uma das maneiras indicadas no ensino para se encontrar o limite é justamente fazer aproximações numéricas nas funções em que se está pesquisando o limite. Assim, esses elementos poderiam surgir nas resoluções dos alunos, por exemplo, em atividade para encontrar o limite como:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x}$ .

---

<sup>36</sup> Aqui nos referimos à definição intuitiva discutida na seção 4.

### 7.1.4 As questões da entrevista

Ao iniciar a entrevista entregávamos ao estudante uma folha com o enunciado da questão, sendo a primeira: «1. Qual é o limite  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x}$ ?». Em que deveria responder à questão e, em seguida lhe era solicitado a explicar como fez e o que pensou para chegar ao resultado apresentado. Em seguida, era entregue uma segunda folha com a pergunta: «E para encontrar o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  da função,  $f(x) = \frac{2}{x}$ , você resolve do mesmo modo?» Ao final da resolução na folha o aluno era novamente solicitado a explicar sobre sua resolução. O próximo item solicitava o limite com essa mesma função quando  $x$  tende a menos infinito, isto é,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}$ .

No primeiro item o aluno poderia substituir diretamente o valor de  $x$  na função e calcular o  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x} = 1$ , utilizando o fato de que para obter o valor do limite da função em um ponto sem restrição, podemos substituir o valor do ponto diretamente na expressão algébrica da função. Entretanto, ele não poderia fazer o mesmo procedimento no item seguinte,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , precisaria dispor de outros meios, talvez se lembrar do quadro de variações de limite que eles utilizaram na sala de aula, ou tentar fazer a representação gráfica. Poderia também fazer aproximações numéricas para encontrar os limites, entre outros.

Com qualquer uma dessas escolhas o estudante poderia inferir que não é possível calcular o limite diretamente no zero, já que a função assume sinais opostos antes e depois do zero. Do mesmo modo no caso de limite no infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ) a substituição direta não funciona e ele precisaria novamente utilizar outros invariantes. As indagações realizadas auxiliariam a compreender como o aluno utilizava esses invariantes, ou seja, o esquema que ele mobilizava para lidar com a situação. Por exemplo, ele poderia ter memorizado a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , afinal ela faz parte de um conjunto de funções que eles estudam e utilizam como funções de referência, e que tem um comportamento similar ao da função dada e, assim, apresentar corretamente os limites. Entretanto, ele poderia não estar compreendendo realmente o que esse resultado do limite significava, ou mesmo da representação gráfica, pois poderia ser somente uma memorização mecânica de um gráfico ou de um quadro de variações. Assim, as explicações eram fundamentais para nossa compreensão das escolhas dos estudantes.

A segunda questão era para determinar o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ . Nesta atividade a substituição direta do valor de  $x$  na função não era possível, como na primeira atividade e

assim o aluno já no início precisaria buscar outros invariantes para resolver. Acreditamos que ele poderia simplificar a função, quando percebesse que ela cai em um caso de indeterminação, após fazer a substituição do valor do  $x$  da função. Poderia também buscar auxílio no quadro de variações que é um dos recursos que eles utilizam em sala de aula. A simplificação dessa função também auxilia no momento da construção gráfica, pois permitiria inferir que essa função depois de simplificada tem comportamento similar a outra função mais conhecida, no caso a função  $f(x) = (x + 1)$ , sendo que elas apenas se diferenciam no ponto  $x = 1$ . Entretanto, poderia ter alguns enganos com relação ao resultado do limite, como apresentarem como resultado para o limite zero, inferindo que a expressão de indeterminação  $\frac{0}{0}$  significaria que o limite seria zero, ou que não é possível calcular o limite, ou mesmo erros de simplificações.

Esses equívocos poderiam fazer com que o aluno esboçasse a representação gráfica da função dada semelhante à função referência  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Entretanto, mesmo esse caminho sendo equivocado, ele permite uma nova tomada de informação. Por exemplo, ao escolher alguns valores para encontrar pontos do gráfico o estudante talvez percebesse algo estranho e refizesse, ou mudasse alguns caminhos escolhidos no início

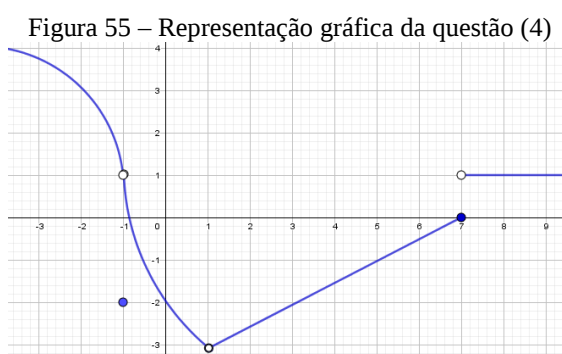
A terceira questão iniciava com o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  para a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , em seguida, era proposto o limite da mesma função quando  $x$  tende  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) e ao final o aluno deveria esboçar o gráfico da função.

Nesta função o aluno poderia escolher fazer a substituição direta, obter como resultado um número sobre zero e investigar o resultado encontrado no quadro de variações. Como eles estavam habituados a fazer esse estudo, provavelmente iria verificar que a função assume sinais diferentes quando muda de valores menores do que zero para valores maiores do que zero, com isso calcular os limites para os dois casos. Nas questões que seriam apresentadas em seguida poderíamos compreender se esse caminho era somente uma memorização do quadro de variações ou se o estudante compreendia o que estava acontecendo com os valores da função quando  $x$  se torna próximo de zero. Analogamente, os limites no infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ) poderiam ser encontrados com o auxílio do quadro de variações. Como dito, com as explicações das resoluções poderíamos identificar como o aluno utilizava esse recurso nas suas resoluções. Do mesmo modo, a construção gráfica, que poderia ser feita com os limites encontrados e com o cálculo de alguns pontos, mas também pelo reconhecimento de certa

similaridade dessa função após simplificação  $f(x) = \left(\frac{2}{x} + 1\right)$ , com a função de referência  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Poderiam ter alguns enganos com relação ao resultado do limite como apresentarem como resultado para o limite  $\frac{2}{0} = 0$  ou  $\frac{2}{0} = 2$ , ou que não é possível calcular o limite, ou mesmo erros de simplificações. Esses são equívocos já citados em diversos estudos sobre limite.

A quarta questão era para o aluno encontrar o limite por meio da representação gráfica, da figura 55:



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Os limites solicitados eram:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$
- d)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Nesta atividade tínhamos a possibilidade de buscar elementos para os esquemas que o aluno iria mobilizar para encontrar os limites, por meio da representação gráfica de uma função, com intervalos de continuidade e descontinuidades. Sabemos que essas últimas, em geral, trazem dificuldades aos alunos já no estudo com as funções, e inferíamos que eles iriam utilizar os esquemas que se mostraram efetivos para lidar com as situações conhecidas de funções, mas que não seriam adequados para o estudo de alguns dos limites da função aqui representada graficamente. Seria um momento oportuno também para estudarmos as adaptações desses esquemas comparando, com os que o aluno mobilizaria com a representação algébrica de limite de função, principalmente limite finito em um ponto.

Na quinta atividade, o aluno deveria escolher dois pontos mais próximos possíveis do número 2, sendo um deles menor do que dois e o outro maior do que dois. O enunciado aparecia também as notações:  $x_1 < 2$  e  $x_2 > 2$  ( $x_1$  inferior a 2 e  $x_2$  superior a 2) e a representação da reta, conforme a figura 56:

Figura 56 – Representação utilizada na atividade (5)



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Após a escolha dos dois números o aluno poderia ser indagado com questões como: existe outro número entre o que você escolheu, por exemplo, para  $x_1 > 2$  e o número 2? Quantos números você acha que existe entre esses dois números? O que você quer dizer quando fala que existem infinitos números? Entre outras questões que pudesse parecer pertinente conforme as respostas dos estudantes.

Nessa atividade investigamos a compreensão dos alunos com relação a intervalo de números reais, a ideia de podermos tomar valores tão próximos de um ponto quanto quisermos. Diversos estudos (GRANDE e PIRES, 2016; JUNQUEIRA e CAMPOS, 2016) têm mostrado que esse é um ponto que apresenta muita dificuldade para os alunos, pois muitos deles não aceitam que não existe um “último” ponto mais próximo do número dado, no nosso exemplo o número 2. Esse teorema em ação inadequado pode conflitar com os resultados de cálculos de alguns limites, como também com a representação gráfica, como no caso das funções que trabalhamos para os limites  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  para as funções  $f(x) = \frac{2}{x}$  e  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ . Desse modo, com essa questão poderíamos verificar se o aluno tem esse teorema em ação incorreto em seus esquemas, o que permitiria compreender algumas ações durante suas resoluções.

Além disso, tanto esse teorema em ação incorreto, como outras ações mobilizadas nessa atividade poderiam nos fornecer imagens que o aluno estava associando a noção de limite de função. Possibilitando identificar imagens que poderiam conflitar dentro do próprio conjunto imagem (CI), como com as definições apresentadas pelo ensino, fossem as definições intuitivas ou formais.

Na sexta questão o aluno deveria escrever o que é limite. Nessa atividade pretendíamos investigar quais invariantes operatórios que ele mobilizava para construção do conceito de limite de função, quando não trabalha com nenhuma representação visual, somente com a linguagem escrita e oral. Seria também uma possibilidade de verificar se o esquema mobilizado com essas representações estava aparentado, ou relacionado, aos outros

esquemas utilizados nas outras atividades com outras representações. Analogamente, seria uma ocasião de comparar as imagens obtidas anteriormente, com as que o aluno associaria a essa questão e verificar se havia algumas que poderiam trazer problemas a aprendizagem das definições apresentadas pelo ensino. Além disso, seria um momento também para identificar imagens que poderiam se tornar parte do conceito definição pessoal do estudante.

## 7.2 As entrevistas

As entrevistas foram realizadas individualmente e conforme disponibilidade dos alunos e da professora da turma, pois como são alunos menores de idade a professora deveria estar sempre presente. Ela organizava uma mesa em que ficávamos eu e o aluno, sendo que ela ficava na sala distante de nossa mesa fazendo seus planejamentos. É importante salientar que o *lycée* é integral, ou seja, esses alunos têm atividades o dia todo. Diante disso, as entrevistas começaram início de dezembro, mas pararam com o início das avaliações e do recesso de final de ano, quando as aulas retornaram em janeiro agendamos a última entrevista. Elas tiveram duração aproximada de 1h.

Em seguida, apresentamos as descrições e análises da entrevista de um<sup>37</sup> dos estudantes.

### 7.2.1 Baptiste em atividade

Dividimos a apresentação dos caminhos percorridos por Baptiste em dois momentos, compostos pelas três fases que explicitamos em nossa metodologia de análise. O primeiro momento é composto pela fase I, em que apresentamos nossas análises das produções de Baptiste seguindo a ordem das atividades discutidas durante a entrevista. Nossa intenção é evidenciar os dados produzidos no andamento da entrevista, buscando detalhar as ações realizadas por ele durante essas atividades que foram modeladas. No caso, explicitando a modelagem dos elementos que compõem os esquemas mobilizados, especificamente em termos de regras em ação e de teorema em ação. Foram inseridos também dados obtidos no questionário aplicado.

---

<sup>37</sup> Entrevistamos cinco estudantes franceses e escolhemos um deles conforme as indicações que apresentamos na metodologia. Na qualificação havíamos discutido as produções de uma aluna francesa, todavia essa aluna tinha muita dificuldade em trabalhar com a representação gráfica. Em função disso, escolhemos outro aluno para estudarmos o processo de construção do conceito de limite de função para podermos discutir as filiações e rupturas, como também as associações de imagens, relacionadas a essa representação. Pretendemos apresentar as produções dessa aluna, bem como de outros, em artigos.

O segundo momento é composto pelas fases II e III da nossa metodologia de análise. São apresentados os casos de limite de funções com as funções, e as representações, que foram utilizadas. Nossa intenção foi relacionar os elementos modelizados na fase I, e, assim, estudarmos esquemas mobilizados por Baptiste nesses casos de limites. Além disso, esses elementos foram retomados, e relidos, como imagens do conceito imagem de Baptiste relativo ao conceito de limite de função. Nosso interesse foi investigar as imagens mobilizadas por esse aluno relacionadas com a definição intuitiva de limite de funções apresentada no livro adotado e no ensino. Bem como, identificar imagens que poderiam conflitar, tanto com outras imagens do conceito imagem, como ainda com algum aspecto envolvido na definição apresentada. Como também, imagens que poderiam estar se constituindo como um conceito definição pessoal de Baptiste para esses casos de limite de funções.

A entrevista com Baptiste aconteceu no dia 05 de dezembro de 2017 e iniciamos apresentando a pesquisa e o que buscávamos investigar. Ele tinha 16 anos quando respondeu o questionário e aceitou participar de nossa pesquisa. Relatou-nos que estava sendo fácil compreender a noção de limite de função, achava que era lógico, sendo um “*mecanismo que permanecia sempre o mesmo*”. Suas dúvidas eram sempre resolvidas buscando auxílio da professora e, até aquele momento, ele sentia por não saber qual faculdade iria cursar após o *lycée*.

No dia da entrevista Baptiste nos pareceu tranquilo e foi sempre muito solícito durante nossa pesquisa. A seguir apresentamos os caminhos escolhidos por ele conforme nossos questionamentos e já modelando as regras em ação e os teoremas em ação. Conforme fizemos com as resoluções do estudante brasileiro, aqui também identificamos os elementos dos esquemas mobilizados com a notação:

- ✓ (RF.nº) – São as regras em ação do estudante francês seguido de um número de identificação [1, 1.a, 1.b, 2,...];
- (TAF.nº) – São os teoremas em ação do estudante francês seguido de um número de identificação [i, ii, iii,...];
- (TAF.nº) – São os teoremas em ação do estudante francês seguido de um número de identificação [1, 2, 3,...] que são incorretos do ponto de vista matemático, ou não são válidos para a situação.

Como na modelagem que fizemos para o estudante brasileiro, aqui também consideramos a discussão realizada na apresentação das questões da entrevista, as dificuldades destacadas nos estudos e que sintetizamos e apresentamos no quadro 2. As relações imbricadas no campo conceitual explicitadas no quadro 5, bem como a proposta para

introdução do conceito de limite de função do livro didático, das listas de atividades e das observações de aula da professora dessa turma.

Assim, buscamos levantar um maior número de informações da resolução apresentada pelo estudante, como desenhos, contas em rascunhos, suas explicações escritas e orais e também suas discussões com outro colega. Com isso, modelizamos<sup>38</sup> as regras em ação, como as ações que geram o esquema e que, ao mesmo tempo, são responsáveis pelo desenvolvimento temporal das ações que ocorrem ao longo da atividade. Possibilitando que o aluno, ao mesmo tempo, consiga as informações necessárias para condução da atividade, como também tenha meios de controle sobre as ações. Vinculamos as regras em ação aos teoremas em ação que identificamos e modelizamos no mesmo conjunto de ações.

### 7.2.1.2 Fase I – As ações de Baptiste durante a entrevista

A primeira atividade da entrevista era para encontrar o limite  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x}$ . Baptiste escreve sua resolução da folha de atividade:

- Substituindo na função  $\frac{2}{x}$ ,  $x$  por 2.
- Sabendo que nós podemos nos aproximar de 2 por valores maiores ou menores.
- Se  $x$  for maior que 2 e tende a 2:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2}{x} = 1$$

Solicitei que me explicasse sua resolução e Baptiste repete o que escreveu em sua folha de atividade. Questionei por que ele primeiramente substituiu o  $x$  da função por 2: *<Para saber o que acontece quando substituímos o  $x$  por 2, para saber o limite, o  $x$  chegará a 2.>* Ele não teve dificuldade neste item e argumentou que poderia se aproximar de 2 tanto por valores maiores, ou menores, e exemplificou para o caso  $x > 2$ . Apesar de não ser necessário, ele usou limite lateral para fazer esse limite. Inferimos que essa escolha tenha sido em função deles terem acabado de estudar continuidade e também por se tratar de uma função racional. Modelizamos as ações de Baptiste ao lidar com essa atividade nas seguintes regras em ação:

- ✓ (RF.1a) Quando eu estudo um limite, eu olho o limite à direita e o limite à esquerda;
- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício);

<sup>38</sup> Seguindo as mesmas indicações que exemplificamos na figura 15 apresentada na seção (6.2.1.1).

- ✓ (RF.5b) Quando eu estudo um limite, eu sei que posso escolher pontos próximos do valor que  $x$  tende para procurar o limite;
- ✓ (RF.4a) Quando eu estudo um limite e a função não tem nenhuma restrição, eu sei que posso fazer a substituição do valor que  $x$  se aproxima para encontrar o limite.

Relacionamos essas regras em ação ao teorema em ação:

- (TAF.iv) O limite de uma função que não tem restrição é encontrado substituindo o valor do  $x$  da função pelo valor que se está investigando o limite.

Entregamos outra folha com uma atividade utilizando a mesma função  $f(x) = \frac{2}{x}$  para encontrar o  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , e questionamos se ele achava que esse caso se resolveria do mesmo modo, ele respondeu que *< Sim, ...isso depende ... e podemos ter uma diferença entre os dois se  $x$  tende a zero por valor negativo e se  $x$  tende a zero por valor positivo, eu gosto de fazer assim e como  $x$  é uma aproximação de zero, eu acredito pela mesma razão que é parecido.>* Em seguida, ele começou a resolver a atividade, na figura 57 podemos observar a resolução apresentada por Baptiste.

Figura 57 – Parte da resolução da atividade 1 de Baptiste

Handwritten work by Baptiste:

- Si  $x \rightarrow 0$  et  $x$  est supérieur à 0 ;  

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{0^+} = +\infty$$
- Si  $x \rightarrow 0$  et  $x$  est inférieur à 0 ;  

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Questionei como ele sabia que os limites iriam para mais e menos infinito, ele explicou que: *< Porque um número dado que é dividido por um número menor que ele, que vai ficando cada vez menor, que se aproxima de zero, por exemplo, dividir um número inteiro por um número muito pequeno o resultado será um número muito grande, ou menor se for negativo. Se a fração tem sinal negativo e o limite está tendendo a zero, qual será entre esses, como fazer? ...O resultado será um número muito grande, e está ok, se o valor de  $x$  é negativo e o número está ficando muito pequeno; ou se  $x$  for positivo e muito pequeno.>*

Perguntei se ele fazia algum cálculo mentalmente quando se lembrava desses resultados, ou algo similar, Baptiste respondeu que era lógico e que: *< Se um número, pegue o 2, se ele é dividido por 3, sabemos que será um número inferior a 1, se dividimos o 2 por ele*

mesmo, será 1. Dizemos que um número dividido por um muito menor do que ele mesmo poderá ser um número muito grande, muito e muito grande, pois o número está se aproximando de zero. Se for um número negativo, se o 2 com -1 e ele for se aproximando mais de zero, dando negativo, ou sendo um número muito pequeno.>

Nessas produções de Baptiste modelizamos as regras em ação mobilizadas:

- ✓ (RF.1a) Quando eu estudo um limite, eu olho o limite à direita e o limite à esquerda;
- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício);
- ✓ (RF.4b) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima para procurar o limite, se o resultado é um número sobre o número zero, eu sei que o limite será  $\infty$  e que preciso estudar o sinal, ou olhar no quadro de variação de limite, para ver se será para  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Relacionamos essas regras aos teoremas em ação:

- (TAF.vi.a) O limite de uma função constante positiva dividida por um número que está ficando muito próximo de zero, por valores positivos, será um número muito grande positivo;
- (TAF.vii.a) O limite de uma função do tipo  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x$  em  $\mathbb{R}$ , quando  $x$  se aproxima de zero, por valores positivos, tende a  $+\infty$ ;
- (TAF.vi.b) O limite de uma função constante positiva dividida por um número que está ficando muito próximo de zero, por valores negativos, será um número muito grande negativo;
- (TAF.vii.b) O limite de uma função do tipo  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x$  em  $\mathbb{R}$ , quando  $x$  se aproxima de zero, por valores negativos, tende a  $-\infty$ .

Ao final dessa primeira questão, questionei qual seria o limite dessa mesma função se  $x$  tendesse para infinito. Ele começa respondendo oralmente <A gente vê que é zero, porque vamos dividir um número dado que não vai mudar, por um cada vez maior e, de repente, o resultado estará mais próximo, cada vez mais perto, finalmente estará mais e mais próximo de ... nulo, zero>. Baptiste explica seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior e, em seguida, ele escreve sua resolução na folha de atividade, conforme apresentamos a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

Quando nós dividimos um número dado (como  $a$ , por exemplo).

Se nós o dividirmos por um número muito grande, podemos obter dois resultados:

- Sabendo que  $a$  é negativo: a imagem de  $f$  nesse caso tende a zero (Sempre por valores negativos).

- Sabendo que  $a$  é positivo: a imagem de  $f$  nesse caso tende a zero (Sempre por valores positivos).

Modelizamos suas ações nessa atividade nas regras em ação:

- ✓ (RF.4c) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima e o resultado do limite é um número dividido por outro número maior, ou por números cada vez maiores, eu sei que o limite tende a zero e que preciso estudar o sinal, ou olhar no quadro de variação de limite, para ver se será por valores negativos ou positivos;
- ✓ (RF.1a) Quando eu estudo um limite, eu olho o limite à direita e o limite à esquerda;
- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício);
- ✓ (RF.4d) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima e o resultado do limite é um número dividido por  $+\infty$ , ou  $-\infty$ , eu sei que o limite tende a zero e que preciso estudar o sinal, ou olhar no quadro de variação de limite, para ver se será por valores negativos ou positivos.

Bem como, nos teoremas em ação:

- (TAF.i) O limite de uma função constante dividida por um número que está ficando cada vez maior, ou muito pequeno ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ), será um número muito próximo de zero;
- (TAF.v.b) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende a  $+\infty$  tende a zero por valores positivos;
- (TAF.v.c) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende a  $-\infty$  tende a zero por valores negativos.

Neste caso Baptiste parece conhecer bem o comportamento de divisão de números reais, bem como, os limites da função referência  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Particularmente nessa atividade de limite quando  $x$  tende a infinito, identificamos um fato importante ao observarmos sua preocupação em estudar se a função estava tendendo a zero por valores negativos, ou positivos. Ele poderia não ter se importado e dito simplesmente que seria zero, mas a percepção de que quando se aproxima de zero isso pode estar acontecendo por valores positivos ou negativos, mostra um conhecimento mais elaborado do conjunto dos números reais que é importante na construção do conceito de limite de funções.

A próxima atividade (2) era para encontrar o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ . Baptiste inicia sua resolução na folha de atividade e novamente divide o limite em dois casos, um para  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - x}{x - 1}$  e outro para  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - x}{x - 1}$  e faz a substituição do valor do  $x$  na função por 1,

chegando ao resultado de  $+\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente. Na figura 58 podemos observar uma dessas resoluções.

Figura 58 – Parte da resolução da atividade 1 de Baptiste

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0^+}{0^-} = -\infty$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Modelizamos suas ações nas seguintes regras em ação:

- ✓ (RF.1a) Quando eu estudo um limite, eu olho o limite à direita e o limite à esquerda;
- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício);
- ✓ (RF.4b) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima para procurar o limite, se o resultado é um número sobre o número zero, eu sei que o limite será  $\infty$  e que preciso estudar o sinal, ou olhar no quadro de variação de limite, para ver se será para  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Relacionamos essas regras ao teorema em ação incorreto que modelizamos como:

- (TAF.5) O limite de uma função que após substituição do  $x$  da função obtém-se a expressão  $0/0$  é infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$  conforme o sinal da expressão  $0/0$ ). É um conhecimento matemático que não é válido para todos os casos em que se obtém esse tipo de indeterminação, provavelmente é um resultado memorizado de outra situação que Baptiste reconheceu alguma semelhança com a expressão após ter feito a substituição direta do valor atribuído a  $x$ .

Nessa atividade apareceu a expressão de indeterminação  $\frac{0}{0}$ , que eles já trabalharam como sendo uma indeterminação. Todavia, naquele momento, Baptiste não reconheceu e mobilizou o resultado que é válido para número sobre zero, em que o limite vai para infinito, em seguida, fez estudo do sinal para ver se iria para infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ). Solicitei que ele me explicasse sua resolução e ele argumentou que *<O valor inicial de aproximação... Aqui é isso, eu não sei como explicar, aquele lá era mais certo>* Ele se referia a ideia de se aproximar do número 1, como na atividade anterior, mas aqui ele não conseguia explicar, pois a expressão encontrada não lhe remetia a nenhuma verificação por cálculo como ele havia feito anteriormente.

Perguntei se ele faria do mesmo modo para  $x$  tendendo para  $-\infty$ , ele disse que *<Talvez, talvez não, mas é preciso mudar para verificar>*, então questionei se ele saberia fazer a representação gráfica da função, ele disse que sim e solicitei que ele fizesse na folha de atividade. Ele desenhou o plano cartesiano e fez a simplificação da expressão algébrica da função para encontrar alguns pontos, olhou para a expressão encontrada e fez uma nova simplificação. Na figura 59 podemos observar a primeira e a segunda simplificação que ele fez.

Figura 59 – Parte da resolução da atividade 2 de Baptiste

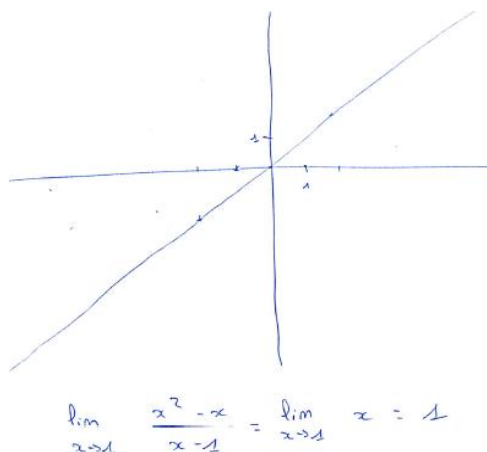
$$1^a) \quad \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x-1)}{x(1-\frac{1}{x})}$$

$$2^a) \quad \frac{x(x-1)}{(x-1)} = x$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Nesse momento Baptiste percebeu que havia algo errado ao marcar o ponto (1, 1) no plano cartesiano, ele fez a representação gráfica da função e depois refez o limite encontrado anteriormente, como podemos observar na figura 60.

Figura 60 – Parte da resolução da atividade 2 de Baptiste



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Durante sua resolução, percebi que ele não levou em consideração o fato do ponto (1, 1) não fazer parte do domínio da função. Assim, quando ele finalizou, eu perguntei se a representação passava pela origem, pois pretendia verificar se ele se preocuparia em retomar a expressão inicial da função antes da simplificação que ele havia feito. Baptiste respondeu que *<Sim, normalmente sim>*, em seguida começou a explicar sua resolução *<Em minha opinião é uma reta... Eu não cheguei... Onde estava aqui. Só que aqui é x... Em minha opinião é x, uma*

*equação.*> Perguntei sobre o limite e ele disse que tinha limite e que *<Normalmente tem limite, não importa qual. >* questionei para o caso em que  $x$  tende para  $+\infty$ , e ele respondeu que *<É mais infinito, é crescente nos reais>*.

Ao fazer a representação gráfica da função, Baptiste percebeu que havia algo errado com o limite encontrado anteriormente, ele pareceu compreender bem o comportamento da função encontrada, no caso a função identidade. Percebemos que seus esquemas estão bem adaptados para lidar com atividades envolvendo essa função, inclusive após simplificação da expressão inicial ele não mais utilizou a ideia de aproximação para encontrar os limites e nem os limites laterais. Entretanto, ele parece que não levou em consideração, pelo menos na representação gráfica, o fato da função simplificada não ter o mesmo domínio da função inicial. Naquele momento havíamos pensado que poderia ser somente falta de atenção, mas conforme continuamos a entrevista percebemos que Baptiste se preocupava se a função estava definida no ponto de investigação do limite. Esse fato será discutido mais detalhadamente, mais adiante, na análise dos casos de limite de funções com suas respectivas funções e representações utilizadas nas atividades.

Nesse item modelizamos suas ações ao corrigir a resolução anterior nas regras em ação:

- ✓ (RF.8) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima e o resultado é uma indeterminação, ou existe uma restrição, eu sei que tenho que simplificar a expressão para resolver o limite;
- ✓ (RF.4a) Quando eu estudo um limite e a função não tem nenhuma restrição, eu sei que posso fazer a substituição do valor que  $x$  se aproxima para procurar o limite;
- ✓ (RF.2c) Quando eu estudo um limite e preciso fazer a representação gráfica de uma função de referência, eu sei como é a representação gráfica e que preciso escolher alguns pontos para representá-la no plano cartesiano;
- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício).

Relacionamos essas regras aos teoremas em ação que modelizamos como:

- (TAF.iv) O limite de uma função que não tem restrição é encontrado substituindo o valor de  $x$  da função pelo valor que se está investigando o limite;
- (TAF.viii.a) O limite de uma função  $f(x) = x$ ,  $x > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a  $+\infty$ , tende a  $+\infty$ ;
- (TAF.viii.b) O limite de uma função  $f(x) = x$ ,  $x > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a  $-\infty$ , tende a  $-\infty$ ;
- (TAF.x) Se uma função  $f$  é simplificada, então o limite da função simplificada será igual ao limite da função  $f$ .

Na terceira atividade Baptiste deveria encontrar o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  para a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , após entregar a folha de atividade perguntei o que ele achava sobre esse limite e Baptiste diz que vai fazer primeiro para ver. Observamos que ele ficou preocupado em dar uma resposta antes de iniciar sua resolução, provavelmente por ter se enganado ao fazer a substituição direta na questão anterior e obtido uma resposta equivocada. Nessa questão ele procurou fazer a simplificação da expressão algébrica, para depois encontrar os limites, como podemos observar na figura 61.

Figura 61 – Parte da resolução da atividade 3 de Baptiste

$$\frac{2+x}{x} = \frac{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{x(1)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{x(1)} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Modelizamos as regras em ação:

- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício);
- ✓ (RF.8) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima e o resultado é uma indeterminação, ou existe uma restrição, eu sei que tenho que simplificar a expressão para resolver o limite;
- ✓ (RF.1a) Quando eu estudo um limite, eu olho o limite à direita e o limite à esquerda;
- ✓ (RF.2b) Quando eu estudo um limite de uma função que é parecida com uma função de referência, eu sei que o limite é o mesmo da função de referência (Aqui ele usou ao lidar com a expressão  $\frac{2}{x}$  como  $+\infty$ ).

Relacionamos essas regras aos teoremas em ação modelizados como:

- (TAF.vii.a) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}, n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores positivos tende a  $+\infty$ ;
- (TAF.vii.b) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}, n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores negativos tende a  $-\infty$ ;
- (TAF.ii) O limite de uma função  $f(x) = n, n \neq 0$  e  $\mathbb{R}$  tende a  $n$  independentemente do valor que  $x$  se aproxima, ou mesmo se  $x$  tende a infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ );
- (TAF.x) Se uma função  $f$  é simplificada, então o limite da função simplificada será igual ao limite da função  $f$ .

Baptiste me mostra sua resolução e eu questiono se ele faria do mesmo modo se  $x$  tendesse para mais infinito, ou seja,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  onde  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , pretendia verificar se ele iria perceber que o limite seria 1. Inferíamos que ele conseguiria identificar o limite observando a expressão simplificada, conforme vimos na figura 7.30, pois tinha reconhecido a expressão  $\frac{2}{x}$  como um dos casos de limites conhecidos, por se tratar de uma função referência.

De fato, Baptiste inicia sua fala um pouco receoso: <1... Não... Sim... Sim é 1, isso tende a mesma coisa. Isso sobre  $+\infty$  tende a zero, e  $\frac{1}{1} = 1$ >. No entanto, observamos que ele vai adquirindo confiança e consegue justificar o que está acontecendo com cada parte da expressão simplificada, com isso, ao final ele conclui que o resultado do limite será 1; na figura 62 trazemos indicações na expressão simplificada desse detalhamento relatado por Baptiste.

Figura 62 – Parte da resolução da atividade 1 de Baptiste

$$\frac{2+x}{x} = \frac{x\left(\frac{2}{x} + 1\right)}{x(1)}$$

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa

Em seguida, solicitei que ele escrevesse o que havia nos dito sobre aquele limite, na figura 63 apresentamos a resolução que Baptiste fez na folha da atividade.

Figura 63 – Resolução de parte da atividade 3 de Baptiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{2}{x} + 1\right)}{x(1)} = 1$$

cor  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$  (e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 0$ )

Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Modelizamos as ações do Baptiste nas regras em ação:

- ✓ (RF.2a) Quando eu estudo um limite, eu utilizo um resultado que eu memorizei (de uma aula ou de outro exercício);

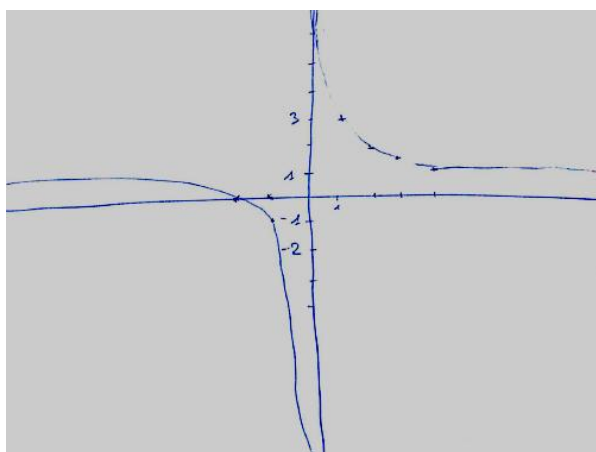
- ✓ (RF.2b) Quando eu estudo um limite de uma função que é parecida com uma função de referência, eu sei que o limite é o mesmo da função de referência. Aqui ele usou ao lidar com a expressão  $\frac{2}{x}$  como  $+\infty$ ;
- ✓ (RF.4d) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima e o resultado do limite é um número dividido por infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ), eu sei que o limite tende a zero e que preciso estudar o sinal, ou olhar no quadro de variação de limite, para ver se será por valores negativos ou positivos;
- ✓ (RF.8) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que  $x$  se aproxima e o resultado é uma indeterminação, ou existe uma restrição, eu sei que tenho que simplificar a expressão para resolver o limite.

Relacionamos essas regras aos teoremas em ação:

- (TAF.ii) O limite de uma função  $f(x) = n$ ,  $n \neq 0$  e  $\mathbb{R}$  tende a  $n$  independentemente do valor que  $x$  se aproxima, ou mesmo se  $x$  tende a infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ );
- (TAF.v.a) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) tende a zero;
- (TAF.x) Se uma função  $f$  é simplificada, então o limite da função simplificada será igual ao limite da função  $f$ .

Ao final dessa atividade eu questionei se ele sabia fazer a representação gráfica dessa função, Baptiste disse que sim e, então, solicitei que fizesse na folha da atividade. Na figura 64 podemos observar a representação que ele apresentou.

Figura 64 – Representação gráfica apresentada na atividade 3



Fonte: Coletada pela autora da pesquisa.

Baptiste fez rapidamente a representação gráfica dessa função, pois percebeu, após fazer a simplificação, que a representação dela seria semelhante à da função referência  $f(x) = \frac{n}{x}$  que ele conhece bem o comportamento. Ele escolheu alguns pontos e fez o esboço

da representação corretamente, provavelmente utilizando a representação algébrica da função simplificada, no caso  $f(x) = \frac{2}{x} + 1$  e o resultado dos limites que havia encontrado. Quando questionei se a curva cortava o eixo das ordenadas quando  $x$  se aproximava de zero por valores positivos, conforme esboço da figura 64, ele disse que não, que foi uma bobagem na hora de esboçar a curva, e que ela sempre ficaria acompanhando bem próximo o eixo das ordenadas, mas nunca cortaria. Vemos que mesmo não tendo se referido a  $x=0$  como a assíntota vertical da curva, ele soube explicar esse comportamento ao fazer a representação gráfica dessa função. Como também, no caso da reta  $y=1$  em que ele representou adequadamente como sendo uma assíntota horizontal.

Consideramos que as ações de Baptiste foram pautadas nas regras em ação que modelizamos como:

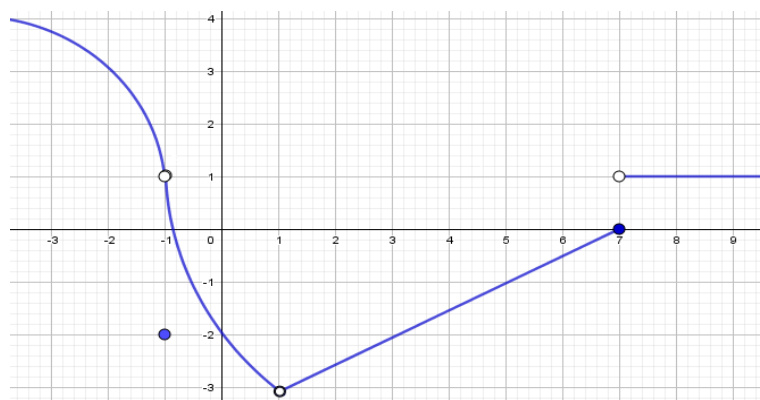
- ✓ (RF.2d) Quando eu preciso fazer a representação gráfica de uma função que parece com uma função de referência, eu sei que o gráfico será parecido com o gráfico da função referência e que eu preciso escolher alguns pontos para saber onde fazer a representação gráfica;
- ✓ (RF.2f) Quando eu estudo um limite de uma função quando  $x$  tende a um número e o resultado vai para  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), eu sei que esse número será uma assíntota horizontal desse gráfico;
- ✓ (RF.2e) Quando eu estudo um limite de uma função quando  $x$  tende  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) e o resultado é um número, eu sei que esse número será uma assíntota vertical desse gráfico.

Modelizamos também nessas ações os teoremas em ação:

- (TAF.xiv) Se o limite de uma função  $f$  é um número quando  $x$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), esse número é a assíntota horizontal da representação gráfica dessa função  $f$ ;
- (TAF.xv) Se o limite de uma função  $f$  tende a  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ), quando  $x$  tende a um número, esse número é a assíntota vertical da representação gráfica dessa função  $f$ .

Na quarta atividade Baptiste deveria conjecturar sobre os limites observando a representação gráfica e depois justificar sua resolução, retomamos essa representação na figura 65.

Figura 65 – Representação da atividade 4 da entrevista



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Nos itens (a) e (b) Baptiste apresentou as seguintes respostas:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

- Para  $x > 7$ ,  $f$  é uma constante, portanto o limite em  $+\infty$  é esta constante.

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$

- Podemos observar graficamente que quando  $x$  tende a zero o valor da função se aproxima de  $-2$ .

Nesses dois itens Baptiste não teve dificuldade e fez rapidamente, modelizamos a regras em ação e o teorema em ação vinculado, como:

- ✓ (RF.10c) Quando eu estudo um limite por uma leitura gráfica, e preciso saber o que acontece quando  $x$  tende a **infinito** ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ), eu sei que tenho que olhar o que está acontecendo com a **curva**, quando  $x$  tende a infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ ), para poder descobrir o limite.
- (TAF.ii) O limite de uma função  $f(x) = n$ ,  $n \neq 0$  e  $\mathbb{R}$  tende a  $n$  independentemente do valor que  $x$  se aproxima, ou mesmo se  $x$  tende a infinito ( $+\infty$  ou  $-\infty$ );
- ✓ (RF.10b) Quando eu estudo um limite por meio de uma leitura gráfica, eu sei que tenho que olhar o ponto **da abscissa** que está no **domínio** da função para identificar qual o ponto da **curva** que vai se aproximar na ordenada para poder descobrir o limite;
- (TAF.iii.b) O limite de uma função  $f$  quando  $x$  tende a  $p$ , representado por um gráfico, é o ponto  $y$  da ordenada em que a curva se aproxima quando  $x$  tende a  $p$ .

Observamos que Baptiste teve dificuldade nos outros três itens, uma vez que após resolver os dois primeiros me questionou sobre a representação gráfica, relativa ao item (e). Ele queria saber se havia um ponto acima ou embaixo da representação do plano cartesiano da folha de atividade que não era possível ver, quando  $x=1$ . Eu disse que não, mas ele estava

incomodado por não conseguir identificar o valor do  $f(1)$ . Em seguida, ele respondeu os itens que faltavam, vejamos suas respostas escritas na folha de atividade:

(c)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 0$

- $f$  é definida sobre o intervalo  $]1; 7]$  por uma reta de equação  $y = 0,5x - 3,5$ , em 7 esta reta corta o eixo das abscissas.

(d)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$

- Graficamente quando  $x$  tende a  $-1$ , vemos que a imagem de  $f$  é  $-2$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

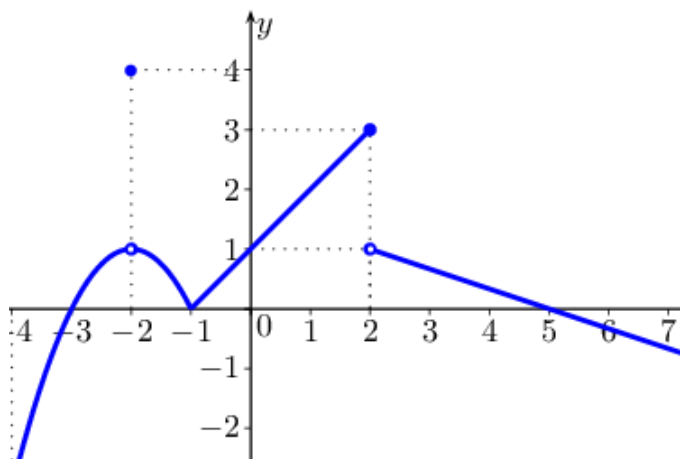
- Graficamente como  $f$  não está definida para  $x=1$  (as duas funções que precedem e seguem não estão definidas em 1), então não podemos definir o limite de  $f$  nesse valor de  $x$ . Poderia ser qualquer valor (que não é visível no gráfico)

Consideramos que a regra em ação (RF.10a) orientou as ações de Baptiste no esquema para lidar com essas três atividades. No item (c) ele considerou somente o intervalo em que o ponto de investigação do limite estava definido, inclusive encontrou a equação da reta representada graficamente explicitando seu intervalo para justificar sua resposta. Relacionamos essa ação aos teoremas em ação que são incorretos que modelizamos, como:

- ✓ (TAF.7) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $p$  sempre é o  $f(p)$ ; esse é incorreto para o caso em que as funções não são contínuas;
- ✓ (TAF.8) O limite de uma função, definida por partes, em um ponto de mudança de expressão da função, dada por uma representação gráfica, é o valor que a função assume no ponto em que se está investigando o limite.

No item (d) suas ações foram pautadas pela regra em ação (RF.10b) e, também, pelo teorema em ação incorreto (TAF.7). Inicialmente estranhamos essas respostas de Baptiste para os itens (c) e (d), pois esperávamos que elas fossem próximas ao que ele tinha feito no questionário. Nele havia uma questão muito semelhante e ele resolveu corretamente, vejamos na figura 66 a representação gráfica dessa questão.

Figura 66 – Representação questão (10) do questionário



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Baptiste respondeu corretamente todos os itens dessa questão, vejamos suas resoluções:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
- b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$  Boa questão  
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$   
 $x > 2$   $x < 2$
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Nas resoluções apresentadas no questionário, consideramos que a regra em ação que orientou as ações do seu esquema no item (b) foi:

- ✓ (RF.10a) Quando eu estudo um limite por uma leitura gráfica, eu sei que tenho que olhar o ponto da abscissa para identificar qual o ponto da ordenada que a curva vai se aproximar para poder descobrir o limite.

Apesar disso, na entrevista vimos que ele identificou a imagem do ponto como sendo o limite, ignorando totalmente a ideia de observar o ponto da função em que a curva se aproximava.

Outro item do questionário com resolução diferente da entrevista foi o item (c), Baptiste escreveu que era uma boa questão, percebeu que precisaria encontrar os limites laterais para resolver a questão e resolveu corretamente. Consideramos que seu esquema foi orientado novamente pela regra em ação (RF.10a) e também pela regra em ação:

- ✓ (RF.1a) Quando eu estudo um limite, eu olho o limite à direita e o limite à esquerda.

Na ocasião em que respondeu ao questionário Baptiste se preocupava em observar o que acontecia com a função quando  $x$  se aproximava de um ponto. A ideia de limite como

uma aproximação não estava vinculada com a necessidade de o ponto estar definido na função; diferentemente do momento em que ele participou da nossa entrevista.

De fato, no último item (e) da questão (4) da entrevista, Baptiste ficou incomodado por não conseguir identificar o  $f(1)$  na representação dada na atividade (Figura 65). No momento em que o questionei qual seria o limite quando  $x$  tende a 1, ele argumentou que *<Se é aberto para as duas funções o  $x=1$  não está definido, não tem nenhum limite, não é possível quando não está definido>*. Solicitei para que me explicasse melhor e ele continuou *<Como toda função que é aberta graficamente, não podemos ver o limite, talvez o limite seja 1772, talvez seja 15,2, não podemos ver, talvez seja mais ou menos infinito não importa o que... (rsrsr)... É um problema (rsrsr)>*.

Nesse item modelizamos as ações que orientaram o esquema de Baptiste na regra em ação:

- ✓ (RF.10b) Quando eu estudo um limite por meio de uma leitura gráfica, eu sei que tenho que olhar o ponto da abscissa que está no domínio da função para identificar qual o ponto da curva que vai se aproximar na ordenada para poder descobrir o limite.

Mobilizada juntamente aos teoremas em ação incorretos:

- (TAF.6) Se uma função não está definida em  $x=p$ , então não existe limite quando  $x$  tende a  $p$ ;
- (TAF.7) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $p$  sempre é o  $f(p)$ .

O esquema que Baptiste mobilizou para identificar o limite por observação gráfica, não foi efetivo para os casos em que a função apresentava descontinuidade. Seu esquema se apoia sobre o fato de que a função tem limite no ponto  $p$  se  $p$  faz parte do domínio da função, que modelizamos como teoremas em ação incorretos: (TAF.6) e (TAF.7).

Baptiste não mobilizou esses teoremas em ação incorretos quando respondeu a atividade (10) do nosso questionário, e não temos indícios de como ele pensou naquele momento, pois ele não justificou, somente apresentou a resposta.

A última questão da entrevista solicitava que Baptiste dissesse o que era limite de funções. Ele argumentou que era muito difícil, então disse para que ele escrevesse como estava compreendendo esse conceito, vejamos sua resposta escrita na folha da atividade:

O limite é um número que é dado como resultado de uma função, quando os números próximos a número dado se aproximam o mais possível desse número dado. (Limite).

Baptiste ao nos explicar o que estava compreendendo sobre o conceito de limite de funções se reporta ao caso de limite finito em um ponto. Observamos esse fato também na ocasião em que ele respondeu nosso questionário, utilizando a mesma ideia, tanto ao

responder como compreendia esse conceito de modo formal, como também intuitivamente. Vejamos em seguida essas respostas:

Formal: É resultado do qual nos aproximamos quando  $x$  tende a um valor dado. Não é exatamente isso.

Intuitiva: É o  $y$  o qual nos aproximamos quando  $x$  se aproxima mais possível, de um número dado.

Consideramos que no momento em que Baptiste precisava lidar com uma situação sobre limite de funções, sem nenhuma representação algébrica, ou gráfica, seu esquema se pautava nas situações de limite finito em um ponto. Modelizamos em suas ações a regra em ação e o teorema em ação:

✓ (RF.12) Eu sei que para procurar o limite eu preciso verificar o que ocorre com os valores da função quando  $x$  se aproxima de um número.

➤ (TAF.xiii) O limite de uma função quando  $x$  tende a  $p$  é o valor de  $y$  o qual a função se aproxima quando  $x$  se torna muito próximo  $p$ .

Em seguida apresentamos os casos de limite de funções relacionados às suas respectivas funções trabalhadas nas atividades.

### 7.2.1.3 Fases II e III – Análise dos casos de limite de função

Separamos as questões da entrevista conforme o caso de limite de funções, relacionando com a representação fornecida pela atividade, algébrica ou gráfica. Apresentamos uma síntese dessa organização, no quadro 22.

Quadro 22 – Os casos de limites e as representações utilizadas

| Limites                                                     | Número da atividade e sua representação                   |                         |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------|
|                                                             | Algébrica                                                 | Gráfica                 |
| $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$ <sup>(1º)</sup>           | (1) $f(x) = \frac{2}{x}$ e (2) $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ | 4.b), 4.c), 4.d) e 4.e) |
| $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$ <sup>(2º)</sup>      | (1) $f(x) = \frac{2}{x}$ e (3) $f(x) = \frac{2+x}{x}$     |                         |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ <sup>(3º)</sup>      | (1) $f(x) = \frac{2}{x}$ e (3) $f(x) = \frac{2+x}{x}$     | 4.a)                    |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ <sup>(4º)</sup> | (2) $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$                            |                         |

Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Esses casos de limites serão analisados, primeiramente buscando investigar os esquemas mobilizados nas atividades com funções representadas algebricamente, e com funções representadas geometricamente. Em seguida, estudamos as imagens do conceito

imagem, mobilizadas por Baptiste, relacionadas a esses limites de funções, com suas respectivas definições apresentadas pelo ensino.

**(1º)  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$**

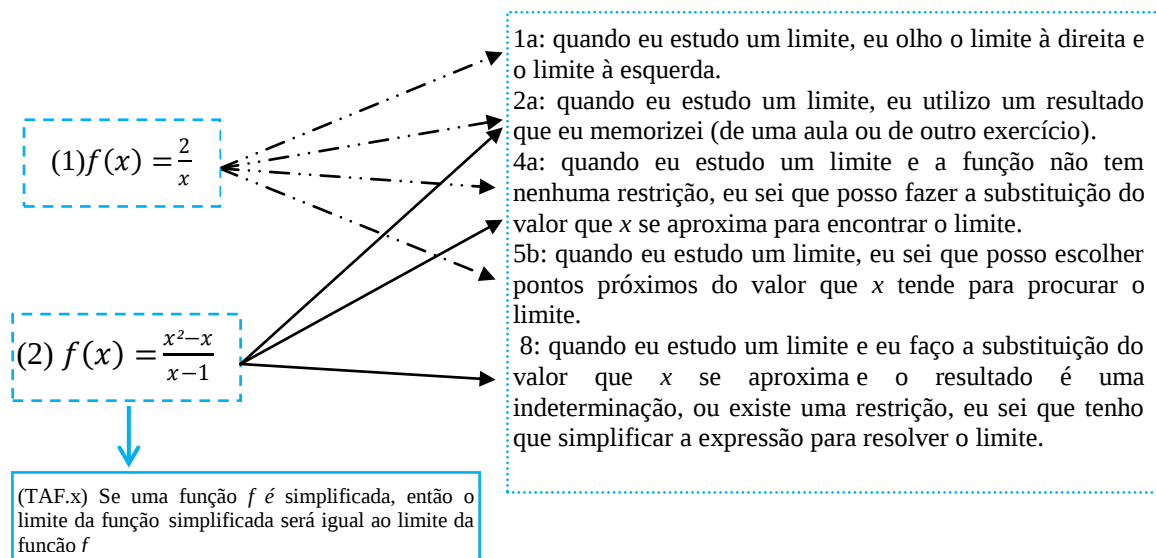
Esse caso de limite apareceu representado algebricamente nas funções das atividades (1) e (2). Conforme vimos anteriormente, Baptiste conseguiu encontrar os limites, e somente encontrou um problema ao iniciar a segunda atividade, mas conseguiu perceber o engano e corrigiu. Como consideramos que foi um erro isolado, visto que não se repetiu em outro momento em que trabalhamos com Baptiste, iremos desconsiderá-lo para estas análises.

Nessas duas funções representadas algebricamente, Baptiste mobilizou o mesmo teorema em ação:

- (TAF.iv) O limite de uma função que não tem restrição é encontrado substituindo o valor do  $x$  da função pelo valor que se está investigando o limite.

Todavia, algumas das regras em ação que orientaram essa escolha foram diferentes conforme a função dada. Vejamos a seguir, na figura 67, quais ações foram mobilizadas relacionadas conforme a função:

Figura 67 – Relações entre as funções e as ações



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

O esquema de Baptiste, para esse caso de limite, estava sendo adaptado, de esquemas mobilizados para situações que ele precisou lidar envolvendo o conceito de funções e de números reais, e que foram efetivos. Esses esquemas “são o reservatório de recursos ao qual vamos recorrer e em relação ao qual vamos poder nos adaptar às novas situações”. (VERGNAUD, 2015, p. 19). No caso da função (1), poderíamos resolvê-la sem utilizarmos a

noção de limite, afinal ela poderia ser resolvida simplesmente encontrando a imagem da função no ponto dado, no caso  $f(2) = 1$ . Todavia, Baptiste está mobilizando conhecimentos anteriores como ponto de apoio e, ao mesmo tempo, adaptando seu esquema para a situação nova.

De fato, identificamos isso nas ações de Baptiste quando encontramos elementos que fazem parte do conceito que está em processo de construção. No caso particular desse limite, ele identificou o objetivo da atividade, antecipou que se tratava de encontrar o limite de uma função quando  $x$  tende a um ponto. Mobilizou regras em ação pautadas na memorização de funções de referência, na ideia de limite de função como uma aproximação, por valores maiores e menores, e que quando não há restrição na função o limite pode ser encontrado substituindo diretamente o ponto na função.

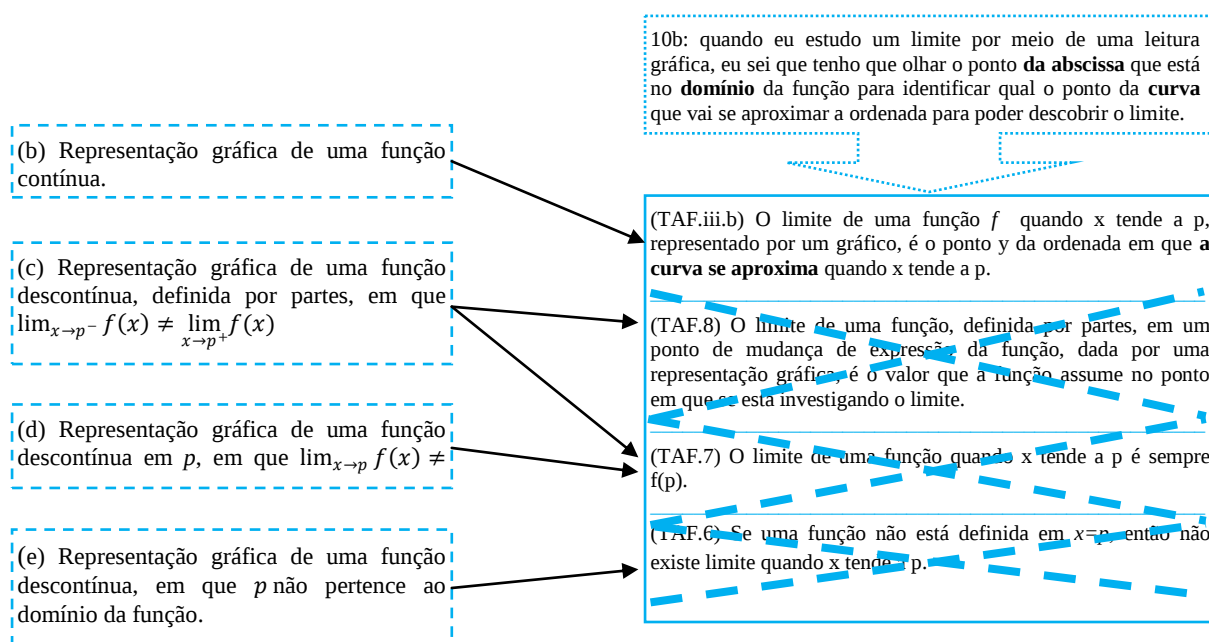
A função (2) não poderia ser resolvida com um esquema que não envolvesse a noção de limite, pois não podemos encontrar a imagem de um ponto que não está definido na função. Necessariamente, é uma situação que dá sentido ao conceito de limite de funções. Vimos que Baptiste, depois do engano inicial, percebeu que primeiro precisaria resolver o problema com a restrição no ponto da função. Suas ações foram pautadas na memorização de funções de referência, no fato de que podemos simplificar a expressão algébrica da função para resolvermos a restrição que existe para se determinar o limite no ponto dado, e que após eliminar a restrição na função podemos substituir o ponto na função.

A adaptação do esquema de Baptiste que citamos, também pode ser observada nessa função (2) quando essas mesmas ações orientaram a escolha de outro teorema em ação, no caso o teorema em ação:

- (TAF.x) Se uma função  $f$  é simplificada, então o limite da função simplificada será igual ao limite da função  $f$ .

Esse caso de limite  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$  também foi trabalhado na atividade (4), por meio de observação de representação gráfica de uma função. Vejamos em seguida, figura 68, quais ações foram mobilizadas relacionadas aos itens que compunham essa questão:

Figura 68 – Relações entre as funções e as regras em ação



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

As ações que orientavam o esquema mobilizado por Baptiste, por meio da observação da representação gráfica, se apoiavam na ideia de que o ponto de investigação deve pertencer ao domínio da função. Diferentemente de quando a função é representada algebricamente, como no caso da atividade (2)  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ . Apesar de não ter levado em consideração que o ponto não fazia parte do domínio ao fazer a representação gráfica da função, figura 61, ele identificou corretamente os limites. Suas regras em ação foram pautadas na memorização de funções de referência, na ideia de limite de função como uma aproximação, por valores maiores e menores, e no fato de que quando não há restrição na função o limite pode ser encontrado substituindo diretamente o ponto na função. Inclusive ele escreveu, na resolução da função (1), desse mesmo tipo de limite, que poderia se aproximar do ponto dado por valores próximos, maiores ou menores, a ideia do limite ser investigado por meio de aproximações em um ponto. Todavia, a representação geométrica possibilitou que tivéssemos acesso a outro elemento do esquema de Baptiste para esse mesmo caso de limite de funções.

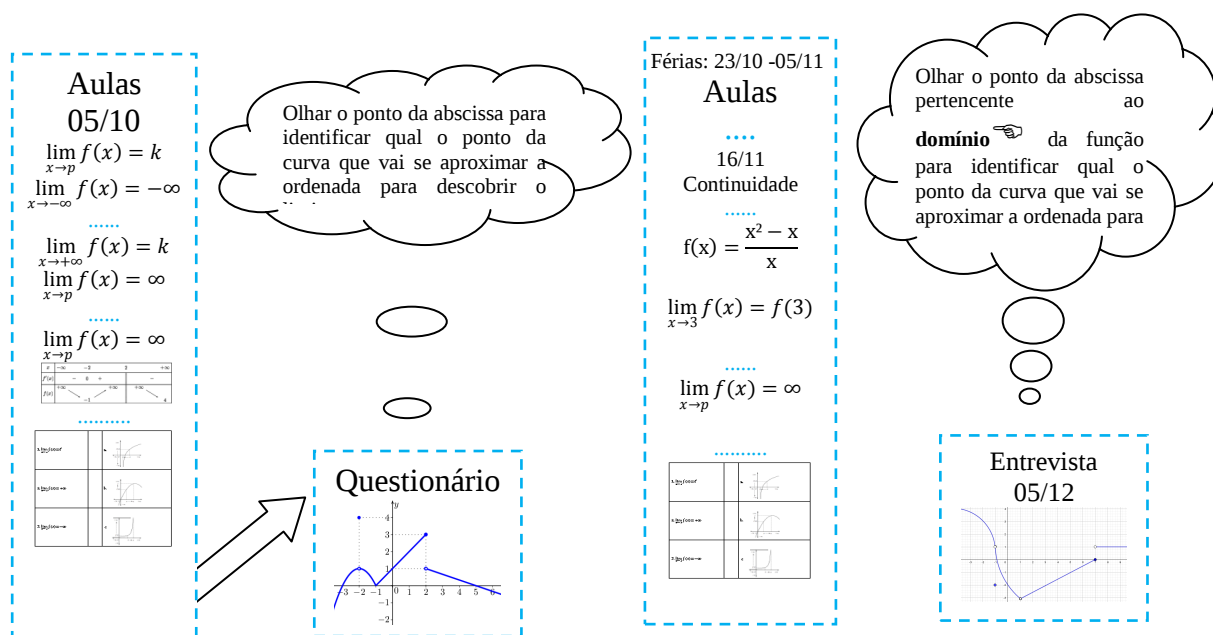
De fato, a regra em ação mobilizada por Baptiste para esse limite de função representado geometricamente, se pautava na observação do ponto da abscissa que se está investigando o limite e que precisava pertencer ao domínio da função; e, assim, identificar qual o ponto da ordenada em que a curva se aproxima para estudar o limite. Seu esquema, orientado por essa ação, acabou não sendo efetivo para essa situação representada geometricamente e ele não conseguiu encontrar os limites.

As ações que orientaram a busca de informações e de controle dos resultados da atividade, no caso as regras em ação, foram diferentes para Baptiste, e mobilizadas conforme a representação utilizada na atividade. Desse modo, elas influenciaram a seleção dos elementos relevantes da situação para escolha dos teoremas em ação pertinentes, ou não, para a atividade.

Poderíamos inferir que Baptiste tem esquemas que estão sendo adaptadas e se tornando efetivos para lidar com limite do tipo  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$ , quando é representado algebricamente, mas que seu esquema não é efetivo no momento em que ele investiga esse limite por meio de observação gráfica. Todavia, a aprendizagem é um processo e a todo o momento, ou melhor, a cada nova situação que o aluno precisa enfrentar ele faz filiações, se apoiando nos conhecimentos anteriores. Algumas vezes eles podem se constituir em problemas aos novos conhecimentos: "Porque não somente são pontos de apoio, mas também são maneiras de ver as coisas estruturadas e contra as quais temos de lutar para poder admitir coisas novas." (VERGNAUD, 2015, p.19).

O esquema de Baptiste para lidar com identificação desse caso de limite de função por observação gráfica vem fazendo filiações com as situações que ele vem lidando ao longo do estudo com a noção de limite de funções. Algumas foram sendo efetivas e pareciam estáveis, como por exemplo, quando ele respondeu uma questão similar a esta no questionário. Ele identificou corretamente todos os limites das funções representadas graficamente. Um ponto importante, que não podemos esquecer, é que naquele momento a professora havia finalizado a apresentação da noção de limite de funções. Sendo que ela trabalhou em vários momentos com a identificação do limite de funções por meio da representação gráfica. Desse modo, seu esquema estava fazendo filiações e se adaptando de situações vivenciadas e que foram efetivas para o estudo das funções e, ao mesmo tempo, inserindo novos conhecimentos das situações introduzidas para o conceito de limite de funções. Esse processo foi continuando e, assim, Baptiste foi tendo de lidar com novas situações envolvendo esses conceitos e agregando novos. Vejamos em seguida, na figura 69, uma representação simulando alguns acontecimentos envolvidos nesse processo de filiações e rupturas, explicitando algumas datas.

Figura 69 – Acontecimentos no processo vivenciado



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

É importante compreender que nesse processo as filiações acontecem o tempo todo e algumas podem influenciar um esquema que havia sido adaptado e se mostrava efetivo para uma dada situação. O professor precisa saber que o fato do aluno ter conseguido resolver satisfatoriamente atividades sobre certo conceito apresentado em sala de aula, em tarefas e avaliações, não significa que o aluno não terá problemas ao lidar com situação semelhante em outros momentos. É comum os professores dizerem que os alunos fazem as atividades e depois esquecem tudo, argumentando que eles parecem que não aprenderam realmente nada do que foi ensinado. No entanto, os esquemas vão sendo adaptados, e ou modificados, a cada situação que o aluno precisa lidar. Como no caso de Baptiste, em que naquele momento havia conhecimentos conflitantes entre si com relação ao conceito de limite finito de uma função em um ponto, mas que ele mobilizava sem se dar conta desse problema. Esse fato ocorreu provavelmente por que a entrevista aconteceu em seguida ao estudo sobre continuidade de funções que, em geral, é apresentado inicialmente com atividades por meio de representações gráficas de funções contínuas e descontínuas. Assim, no momento em que ele respondeu a essa atividade na entrevista, seu esquema para lidar com esse caso de limite por meio de identificação da representação gráfica estava fazendo filiações, e, ao mesmo tempo, buscando se adaptar a uma situação com esses novos conhecimentos.

Concordamos com Cornu, que os erros cometidos pelos alunos, em geral, não são somente frutos do acaso, de falta de conhecimento, ou falta de atenção: “[...] eles são frutos de concepções organizadas, de representações mentais precisas.” (1983, p. 69). No caso desse

aluno, esses erros faziam parte do processo de construção de novo conceito. E, ao mesmo tempo, que os conhecimentos anteriores são pontos de apoio para o estudante avançar, eles também podem ser pontos de conflitos cognitivos que o estudante precisa lidar nesse processo (VERGANAUD, 2015).

Nesse aspecto, tanto Vergnaud (1990, 2015) como Tall e Vinner (1981), consideram que o aluno pode ter conhecimentos que são conflitantes com o conceito que está em processo de construção. Como nesse caso, Baptiste mobilizava teoremas em ação corretos, mas também incorretos, pois seu esquema se organizava de modo diferenciado conforme a representação utilizada na situação. Enquanto que para Tall e Vinner (1981) são as imagens evocadas por Baptiste que podem conflitar com outra parte do conceito imagem, conforme a situação dada.

Na seção 7.1.1, vimos que esse caso de limite de funções foi trabalhado por último e a professora fez apresentação dessa definição diretamente, diferentemente dos outros casos em que a definição era apresentada ao final da discussão de uma atividade. Como também não encontramos atividades que exigiam a relação entre a representação gráfica desse limite de função com as suas representações algébricas. Poderíamos inferir que esse fato poderia se o motivo dos problemas que Baptiste teve ao resolver a questão da entrevista com essa mesma representação. Todavia, o questionário foi aplicado em seguida ao estudo desse limite e, como observamos, ele conseguiu identificar corretamente todos os limites das funções representadas graficamente. Desse modo, inferimos que as imagens que ele associava aquela atividade naquele momento estavam próximas da definição intuitiva apresentada pela professora. Ao trabalhar com outras atividades envolvendo outros conceitos, no caso particular do conceito de continuidade de funções, o conceito imagem de Baptiste foi ampliado com novas imagens, sendo que algumas delas estavam em conflito.

De fato, quando Baptiste resolvia uma atividade representada algebricamente, as imagens que ele mobilizava estavam próximas da definição intuitiva apresentada pela professora e não havia contradições entre elas. No entanto, quando ele precisou encontrar os limites por meio da representação gráfica, as imagens que ele associou a atividade estavam em conflito com algumas das imagens anteriores. Vejamos no quadro 23 as imagens associadas ao conceito imagem desse aluno, relativos às representações utilizadas nas atividades, bem como a definição apresentada pela professora para esse caso de limite de funções.

Quadro 23 – Conceito imagem e a definição para o (1º) caso

| Definição apresentada pela professora para $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Limite finito</b></p> <p><b>Definição:</b> Seja <math>f</math> uma função definida no intervalo <math>]a; b[</math> →</p> <p>Dizemos que <math>f</math> tende a <math>l</math> quando <math>x</math> tende a <math>a</math> por valores superiores se pudermos fazer os valores da <math>f(x)</math> também próximos de <math>l</math>, quanto quisermos, se <math>x</math> for suficientemente próximo de <math>a</math> no intervalo <math>]a; b[</math> →</p> <p>Notação: <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l</math></p> <p>Do mesmo modo:</p> <p><b>Definição:</b> Seja <math>f</math> uma função definida no intervalo <math>]c; a[</math> →</p> <p>Dizemos que <math>f</math> tende a <math>l</math> quando <math>x</math> tende a <math>a</math> por valores inferiores se pudermos fazer os valores da <math>f(x)</math> também próximos de <math>l</math>, quanto quisermos, se <math>x</math> for suficientemente próximo de <math>a</math> no intervalo <math>]c; a[</math> →</p> <p>Notação: <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l</math></p> | <p><b>Obtidos pelas representações algébricas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu olho o limite à direita e o limite à esquerda.</li> <li>✓ Eu relembro resultados de limites das funções de referências.</li> <li>✓ Eu escolho pontos próximos do valor que <math>x</math> tende para procurar o limite.</li> <li>✓ Quando a função não tem nenhuma restrição, eu faço a substituição do valor que <math>x</math> se aproxima para encontrar o limite.</li> <li>✓ Quando a função tem restrição eu faço uma fatoração e simplifico a expressão algébrica para encontrar o limite.</li> </ul> <p><b>Obtidos pelas representações gráficas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu procuro o <u>ponto da abscissa definido</u> na função para encontrar o limite.</li> <li>✓ Não tem nenhum limite, <u>não é possível quando não está definido</u>.</li> <li>✓ Graficamente quando <u><math>x</math> tende a <math>p</math>, vemos que o limite é a imagem, é de <math>f(p)</math></u>.</li> <li>✓ Graficamente como <math>f</math> não está definida para <math>x=1</math> (as duas funções que seguem e antecedem não estão definidas em 1), <u>então não podemos definir o limite de <math>f</math> nesse valor de <math>x</math></u>. Poderia ser qualquer valor que não é visível no gráfico.</li> </ul> <p><b>Obtidos por linguagem natural, escrita ou oral:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ O limite é um número que é dado como resultado de uma função, quando os números próximos de número dado se aproximam o mais possível desse número dado.</li> <li>✓ É resultado do qual nos aproximamos quando <math>x</math> tende a um valor dado.</li> <li>✓ É o <math>y</math> o qual nos aproximamos quando <math>x</math> se aproxima mais possível, de um número dado.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

As imagens que Baptiste associou quando lidava com a representação gráfica entram em conflito com aspectos da definição apresentada pela professora. Na definição desse caso de limite, o ponto de investigação do limite não pertence ao intervalo dado, enquanto que esse aluno associou o limite ao valor da função no ponto; como no caso da questão (4) itens (d) e (e). Do mesmo modo, algumas das imagens associadas ao conceito obtidas nas atividades com as outras representações também conflitavam com essas imagens. Afinal, como é possível se aproximar do ponto, por valores superiores e inferiores, para encontrar o limite e ao mesmo tempo pensar que o limite é a imagem da função no ponto dado?

Nesse aspecto, alguns estudos trazem que é importante destacar o fato de que o ponto não pertence ao domínio da função ao se trabalhar com a definição desse caso de limite, seja com a definição intuitiva, como também na definição formal. Apesar de que nessas definições aparece que a função não está definida no ponto, pois o intervalo é aberto no ponto de investigação do limite. Sabemos que muitos alunos têm problemas com relação a isso como

vimos na seção 2.2 (TALL e VINNER, 1981; CORNU, 1983). E identificamos esse problema quando Baptiste precisou lidar com a representação gráfica. Vimos que ele teve dificuldade em aceitar que poderia encontrar o limite mesmo que o ponto não pertencesse ao domínio da função, ou que o limite da função quando  $x$  tende ao ponto possa ser diferente do valor da imagem da função nesse ponto.

Nesse processo, retirando esse fator de conflito, vemos que Baptiste estava fazendo associações pertinentes ao que foi proposto como definição para esse caso de limite de funções. Sabemos que a construção desse conceito envolve aspecto de outros conceitos que causam muitas dificuldades aos alunos, principalmente o conjunto dos números reais, como citamos na seção 2.2 (CORNU, 1983; ARTIGUE, 1995). Nesse caso, referimo-nos à ideia apresentada na definição: “Se  $x$  for suficientemente próximo de  $a$  no intervalo  $]a; b[$ ”. Na entrevista, quando questionamos esse aluno sobre essa ideia de escolher pontos próximo de um ponto aberto, por valores maiores ou menores, ele nos deu indícios de que compreende essa ideia. Ele nos disse que há infinitos números, uma vez que se trata do conjunto dos reais, em que escolhendo um número sempre será possível encontrar outro mais próximo e assim sucessivamente.

Essas imagens são importantes na construção desse conceito e, Baptiste vem fazendo associações que são pertinentes tanto para lidar com as situações envolvidas nessa construção, como também, para compreensão do conceito definição desse conceito. Com relação às imagens conflitantes, sabemos que elas podem coexistir por muito tempo se o aluno não tiver oportunidade de lidar com situações em que elas sejam mobilizadas simultaneamente.

Como vimos na seção 2, diversos estudos trazem indicações desses pontos que podem trazer problemas na compreensão do conceito de limite de função. Saber disso e oportunizar situações para os estudantes lidarem com esses problemas é importante para aprendizagem desse conceito. Nesse ponto, concordamos com Cornu que:

O papel do ensino não é apenas dar uma teoria perfeita, das definições até as aplicações. Os professores devem atuar sobre as concepções próprias e transformá-las de modo a torná-las capazes de resolver vários problemas e de eliminar as contradições. Portanto, vemos o importante papel dos exemplos, contra-exemplos, e das situações conflitantes. (CORNU, 1983, p.70, tradução nossa).

Acrescentamos a essas constatações, a importância de explorar situações que favoreçam uma variedade de representações. Como vimos com Baptiste, os alunos fazem associações a imagens do conceito de maneira distinta em função das representações trabalhadas. Essa variedade de representações, não somente agregam fatores de conflitos, mas também contribuem ampliando o conceito imagem. Em suma, ao mesmo tempo em que é

preciso ampliar o conceito imagem, também é necessário saber, e ficar atento, sobre a possibilidade de parte dele, ou seja, algumas das imagens poderem se constituir como elementos de conflito.

$$(2^\circ) \lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$$

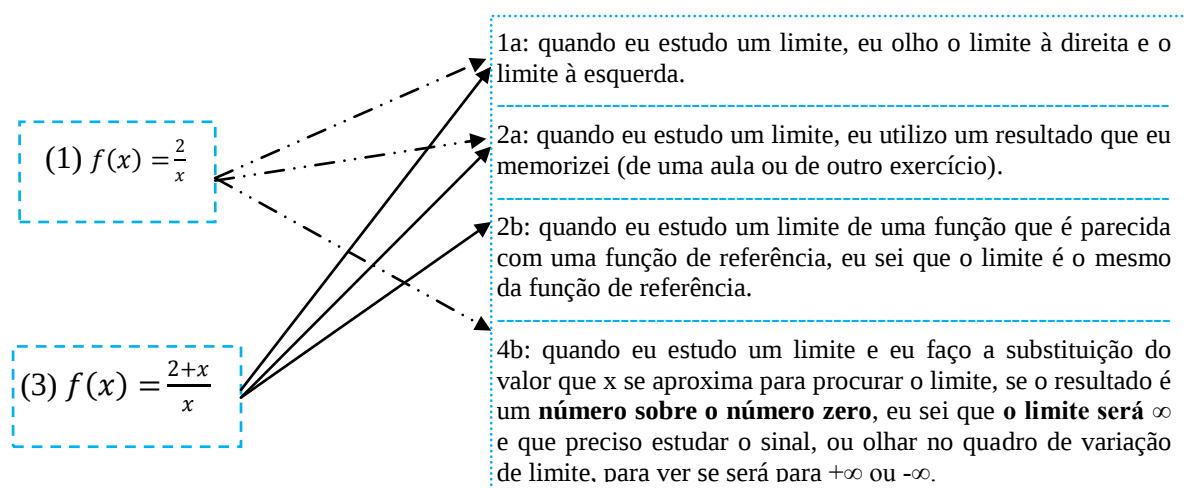
Trabalhamos com esse segundo caso de limite algebricamente nas atividades com as funções: (1)  $f(x) = \frac{2}{x}$  e (3)  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , e Baptiste identificou corretamente os limites dessas duas funções. A primeira era uma função semelhante a função referência que eles trabalham desde o primeiro ano do ensino médio, a segunda função, após simplificada recaia na função (1) transladada, ou seja  $f(x) = \frac{2}{x} + 1$ .

Baptiste mobilizou nessas duas funções os teoremas em ação:

- (TAF.vii.a) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}, n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores positivos tende a  $+\infty$ ;
- (TAF.vii.b) O limite de uma função  $f(x) = \frac{n}{x}, n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  quando  $x$  tende a zero por valores negativos tende a  $-\infty$ .

Como no caso anterior, ocorreram algumas variações nas regras em ação que orientaram a escolha desses teoremas, vejamos em seguida a relação dessas regras em ação com as duas funções, na figura 70.

Figura 70 – As regras em ação com as funções



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

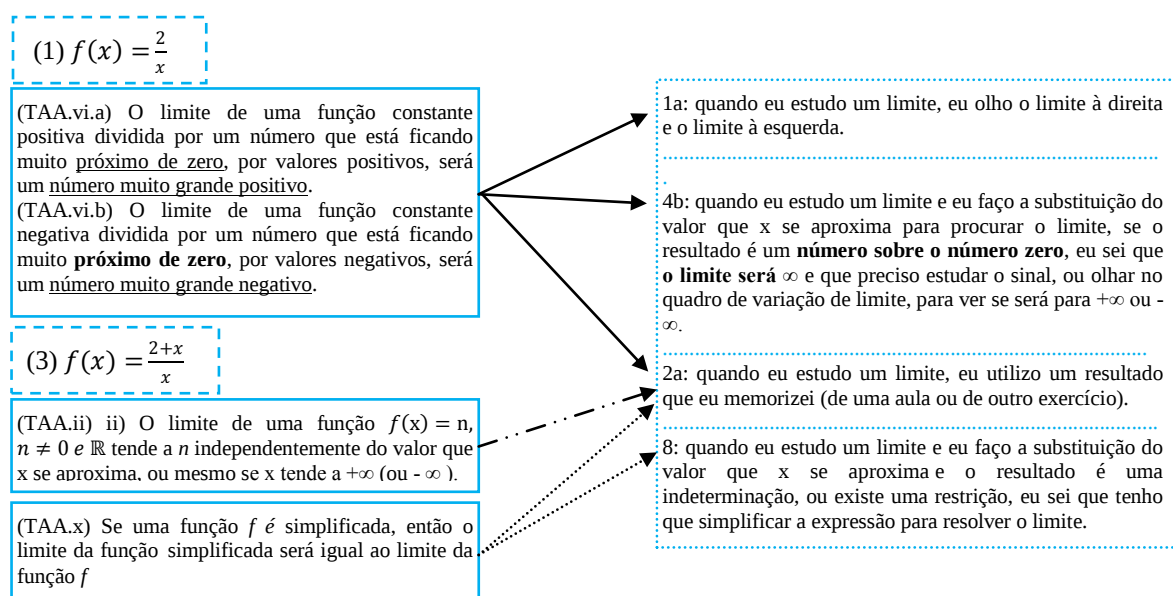
Esse caso de limite envolve aspectos dos conceitos de função e de números reais importantes na construção do conceito de limite de funções (ARTIGUE, 1995), mas que não aparecem nas situações sobre funções, ou números reais que os estudantes lidaram ao longo do estudo. O esquema que Baptiste mobilizou estava se filiando aos conhecimentos de situações tratadas anteriormente relativas a esses conceitos, mas ao mesmo tempo estava se

adaptando a esta nova situação. Ampliando os invariantes operatórios relativos a esses conceitos, bem como agregando regras em ação, e teoremas em ação, pertinentes para lidar com situações que envolviam esse tipo de limite de funções.

Os dois teoremas em ação (TAF.vii.a) e (TAF.vii.b) mobilizados nas funções (1) e (3) foram constituídos nas ações de Baptiste pautadas na memorização de atividades similares resolvidas anteriormente, que envolviam a necessidade de se investigar o limite pela direita e pela esquerda do ponto de investigação do limite. Sendo que na função (1) ele se orientou também pela ideia de aproximação, no caso do número zero, em que um número fixo dividido por outro muito próximo de zero, o limite tenderá a infinito; bem como, na necessidade de se estudar o sinal da função dada naquele ponto, tanto a direita como a esquerda, para saber se o limite tendia para infinito positivamente, ou negativamente. Enquanto que na função (3), após identificar que se tratava da função (1) transladada, Baptiste utilizou somente o resultado encontrado anteriormente.

Além desses dois teoremas em ação, Baptiste mobilizou outros nesse caso de limite, mas foram diferentes conforme a função. Vejamos na figura 71 essas relações.

Figura 71 – As regras em ação com as funções



Fonte: Elaborada pela autora da pesquisa.

Essas diferenças estão relacionadas às funções utilizadas, enquanto que na  $f(x) = \frac{2}{x}$ , a memorização de atividades anteriores, de propriedade de números reais e a ideia de limites laterais em ponto com alguma restrição foram conhecimentos que orientaram as ações do esquema. De outro modo, a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  exigiu outros conhecimentos. O esquema mobilizado para resolver a atividade da função (1) vai sendo adaptado para resolver a

atividade como a da função (3), que exige que o aluno amplie os conhecimentos utilizados nas suas ações, agregando outros pontos importantes relacionados ao conceito de limite. Para esse tipo de limite, Baptiste precisou das operações de soma e divisão de limites de funções, da simplificação da expressão algébrica da função inicial para resolver a indeterminação, memorização de limite de funções de referência, ou de atividades anteriormente resolvidas. Além disso, ele já mobiliza conhecimentos relacionados à compreensão de resultados desse limite, no caso o fato de  $x=p$  ser assíntota vertical da representação gráfica da função.

De fato, identificamos isso quando ele fez a representação gráfica da função (3) e por descuido deixou a curva ultrapassar um pouco o eixo das ordenadas quando  $x$  se aproximou de zero positivamente, figura 34 apresentada anteriormente. Eu o questionei se ela cortava o eixo e ele argumentou que foi um descuido e que a curva nunca cortaria o eixo, mas iria se aproximando cada vez mais.

Esses novos conhecimentos permitiram Baptiste compreender um comportamento importante das representações gráficas de algumas funções, que fora anteriormente memorizado, no caso a identificação de retas que são as assíntotas verticais. Adaptando, assim, o seu esquema às situações que ele precisou lidar,

Com relação as imagens associadas, a esse caso de limite de função, incluímos outros elementos das falas de Baptiste além dos que modelizamos dos esquemas, pois tudo que ele mobilizou se constitui em imagens mentais, propriedades e processos relacionados ao conceito. Vejamos o quadro 24, as imagens evocadas por Baptiste ao lidar com as atividades e também a definição apresentada pela professora.

Quadro 24 – Conceito imagem e a definição para o (2º) caso

| Definição apresentada pela professora para $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Memorizar:</b></p> <p>Seja <math>f</math> uma função definida no intervalo <math>]a; b[</math></p> <p>Dizemos que <math>f</math> tende a <math>+\infty</math> quando <math>x</math> tende a <math>a</math> por valores superiores se pudermos fazer <math>f(x)</math> tão grande quanto quisermos se <math>x</math> for suficientemente próximo de <math>a</math> no intervalo <math>]a; b[</math></p> <p><u>Notação:</u> <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty</math><br/><math>x &gt; a</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>A reta de equação <math>x=a</math> é assíntota da curva representativa de <math>f</math>.</li> </ul> <p>Analogamente para:</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad x < a$ $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty, \quad x < b$ $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty, \quad x > b$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu olho o limite à direita e o limite à esquerda.</li> <li>✓ Utilizo resultados de limites das funções de referências.</li> <li>✓ Se após a substituição do limite o resultado é um <b>número sobre o número zero, o limite será <math>\infty</math></b> e eu estudo o sinal, ou olho no quadro de variação de limite, para ver se será para <math>+\infty</math> ou <math>-\infty</math>.</li> <li>✓ Quando eu estudo um limite de uma função que é parecida com uma função de referência, eu sei que o limite é o mesmo da função de referência.</li> <li>✓ Quando a função tem restrição, ou recai em um caso de indeterminação, eu faço uma fatoração e simplifico a expressão algébrica para encontrar o limite.</li> <li>✓ Eu sei que o limite de uma função constante é a própria constante.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a zero, positivamente, tende a <math>+\infty</math>.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}, n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a zero, negativamente, tende a <math>-\infty</math>.</li> <li>✓ O limite de uma função permanece o mesmo se ela for simplificada.</li> <li>✓ No limite o <math>x</math> se aproxima do ponto.</li> <li>✓ No limite o <math>x</math> é uma aproximação do ponto.</li> <li>✓ Se <math>f</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>), quando <math>x</math> tende a um número, esse número é a assíntota vertical da representação gráfica.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Consideramos que a definição apresentada pela professora tem elementos que são importantes para compreensão do que está sendo definido, mas que podem não ser bem compreendidos pelos alunos (CORNU, 1983). Por exemplo, para o caso do limite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , temos:

- ✓ A função está definida em um intervalo aberto, ou seja, os pontos  $a$  e  $b$  não pertencem ao domínio da  $f$ ;
- ✓ O significado das expressões:
  - ☞ “ $f$  tende a  $+\infty$ ”;
  - ☞ “ $x$  tende a por valores superiores [...] se  $x$  for suficientemente próximo de  $a$ ”;
  - ☞ “se pudermos fazer  $f(x)$  tão grande quanto quisermos”.

Vimos na seção 7.1.1 que a professora ao iniciar o estudo sobre limite de funções fez uma discussão sobre o significado dessas expressões.<sup>39</sup> Outro fato importante foi que essa discussão girava em torno das falas apresentadas pelos alunos, em como eles compreendiam

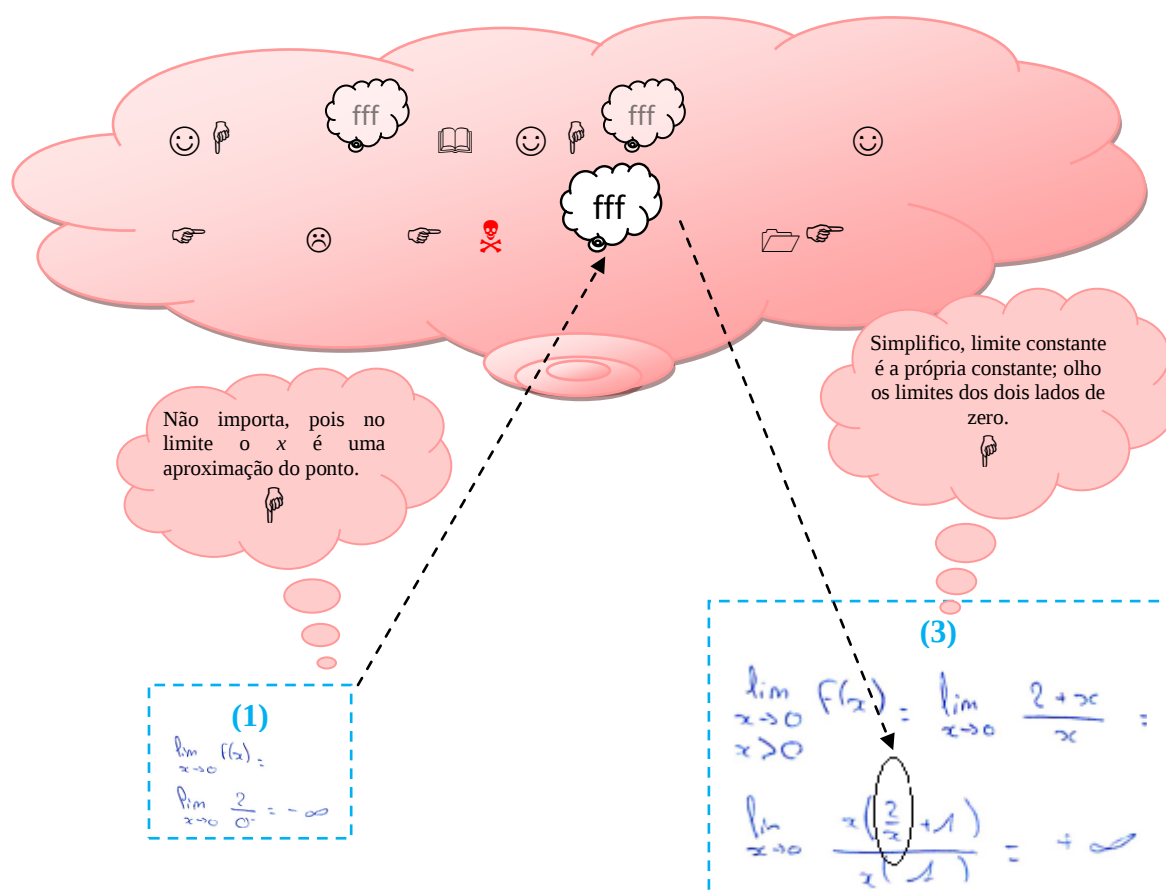
<sup>39</sup> Essa discussão ocorreu após apresentação da primeira definição de limite de funções, os limites infinitos, que em nosso texto aparece como (4º) caso de limite de funções. Ela havia iniciado por esse caso e relacionando esse limite ao que foi trabalhado com as sequências.

essas expressões ao apresentarem suas respostas. Utilizando as expressões na representação algébrica, linguagem natural escrita e oral e também pela representação gráfica.

A professora retomou essa discussão quando apresentou esse (2º) caso de limite que estamos tratando. Ela fez mais rapidamente ao iniciar a apresentação, como também após ter apresentado a definição, sendo que ela exemplificou utilizando a função de referência  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Esse fato provavelmente contribuiu para Baptiste fizesse as associações pertinentes às duas funções que trabalhamos com ele, que exemplificamos na figura 72.

Figura 72 – Associações realizadas por Baptiste



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

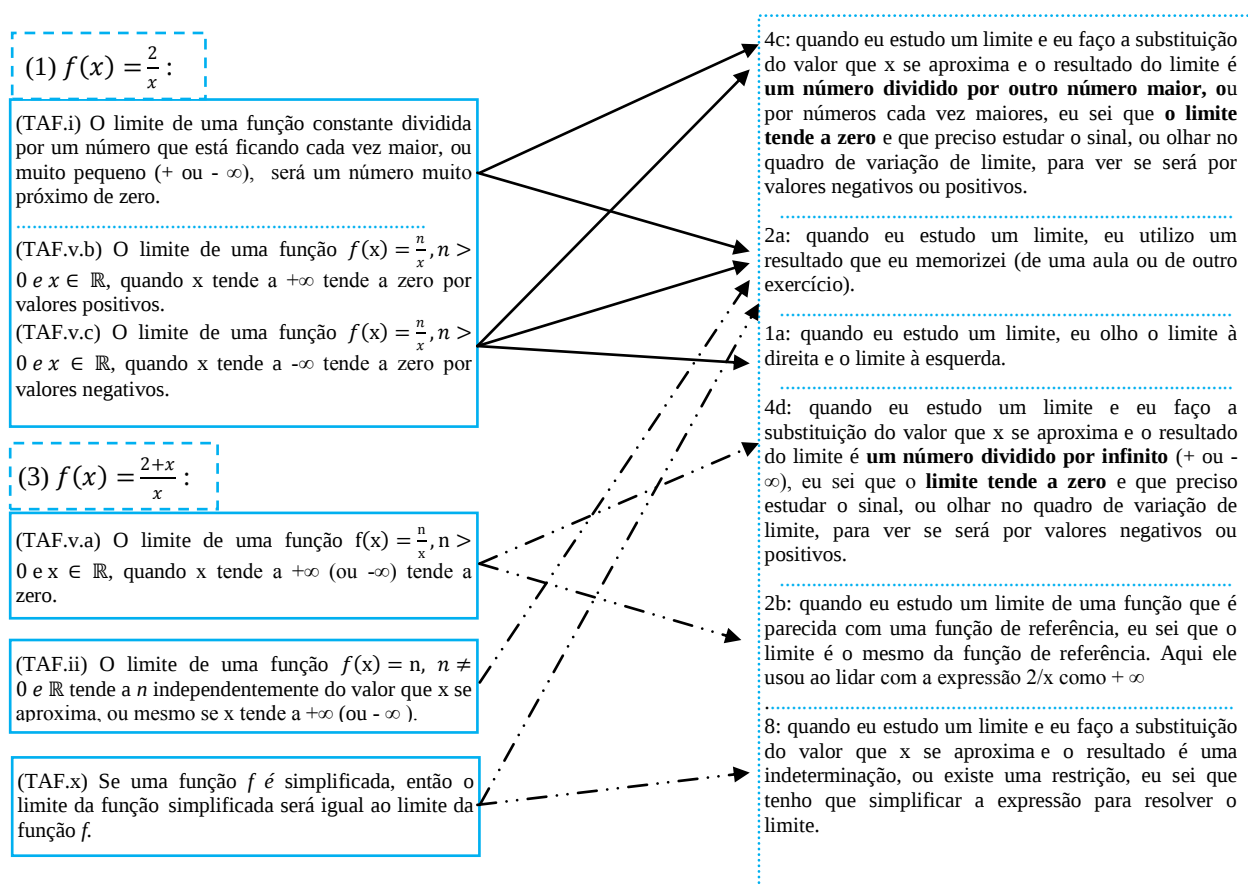
Conseguimos identificar com essas associações que Baptiste fez, diversas imagens do seu conceito imagem que estão se constituindo em seu conceito definição pessoal desse caso de limite. Especificamente a ideia de que é preciso verificar o que acontece próximo ao ponto de investigação, por valores maiores e menores, associada à ideia que podemos nos aproximar por valores cada vez mais próximos de um ponto, por se tratar de um ponto do conjunto dos números reais. Sendo que ao fazermos isso, obtemos valores que vão se tornando cada vez maiores, ou menores conforme o sinal da função.

Esse caso de limite de funções é trabalhado no ensino geralmente próximo ao nosso (3º) caso de limite, que discutimos em seguida. Provavelmente, isso ocorre pelo fato de envolver esses conhecimentos que citamos, além de ser possível fazer seu estudo utilizando a mesma função referência.

$$(3^\circ) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

Esse tipo de limite foi trabalhado nessas mesmas funções (1)  $f(x) = \frac{2}{x}$  e (3)  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ . Em seguida, na figura 73, apresentamos as relações que estabelecemos entre as regras em ação com os teoremas em ação mobilizados.

Figura 73 – Associações para o (3º) caso



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

As ações que orientaram o esquema mobilizado para esta função (1) foram pautadas: na memorização de situações anteriores, no estudo dos limites laterais e, em resultados memorizados de limites identificados após substituição. Como também, verificados por meio de cálculos, resultados conhecidos do comportamento da divisão dos números reais, ou pela memorização das tabelas de limite. Enquanto que na função (3), as ações que nortearam o esquema estavam relacionadas com a memorização de situações anteriores, na identificação

de uma restrição e na necessidade de fazer uma simplificação da função inicial e na identificação de limite conhecidos da função referência.

Os teoremas (TAF.v.b) e (TAF.v.c), da figura 43, utilizados no estudo do limite da função (1) foram, de certo modo, “trocados” no esquema do aluno por outro que modelizamos como o teorema em ação (TAF.v.a); evidenciando uma adaptação do esquema a uma atividade mais elaborada. A atividade (2), após simplificação recai na função (1) transladada, Baptiste amplia seu esquema inicial, antecipando que não precisará estudar os limites laterais, pois o resultado do limite dessa função (3) tende a 1 e, assim, não importará se  $f(x) = \frac{2}{x}$  tenderá a zero por valores positivos ou negativos, pois isso não irá modificar o resultado do limite; preocupação que ele teve ao trabalhar no caso anterior. Diante disso, desde a tomada de informação e tendo o controle sobre a ação, ele imediatamente busca se adaptar à situação atual e decide aplicar o resultado de limite da função referência identificada.

Baptiste tem esquema bem estável para lidar com os limites de funções do tipo  $f(x) = \frac{n}{x}$ ,  $n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , bem como com as funções  $f(x) = \frac{n}{x+a}$ ,  $n, a$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Essa é uma função muito trabalhada ao longo do *lycée* (equivalente ao ensino médio no Brasil) e quando o limite foi introduzido ela apareceu no quadro das operações, no livro didático e também nas aulas da professora, conforme explicitamos na seção 7.1.1. Ele também soube utilizar as operações sobre limites das funções conhecidas, no caso da função constante e da função identidade, além de ter reconhecido situações de indeterminação. Seus esquemas foram sendo adaptados, não somente de modo operatório, utilizando os quadros de variações e resultados memorizados de alguns limites, mas também agregando novos elementos do conceito de limite.

De fato, Baptiste demonstrou em alguns momentos que compreende os conhecimentos mobilizados nas atividades, como por exemplo, quando justificou o resultado do limite da função (1) ao obter a expressão  $\frac{2}{+\infty} = 0^+$ . Como também, ao fazer a representação gráfica da função (3) justificando o comportamento do gráfico quando  $x$  se aproximava de zero positivamente. As representações mobilizadas, na linguagem escrita e oral, foram condizentes com os elementos do conceito desse limite para as duas representações trabalhadas nessa função. No caso, tanto ao fazer a explicação do limite encontrado na forma algébrica da função, como também ao fazer sua representação gráfica, no caso da função (3), inclusive identificando o comportamento da curva com relação a sua assíntota horizontal em  $y=1$ .

Com relação à apresentação desse conceito pela professora, vejamos no quadro 25 como ela fez e também as imagens que Baptiste associou nessas atividades para esse caso de limite.

Quadro 25 – Conceito imagem e a definição para o (3º) caso

| Definição apresentada pela professora para $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Memorizar:</b><br/>Seja <math>f</math> uma função definida no intervalo <math>]a; +\infty[</math> (*Poderia ser um número real ou <math>-\infty</math>).<br/>Dizemos que <math>f</math> tem por limite o número real <math>l</math> quando <math>x</math> tende a infinito se as imagens da <math>f(x)</math> são também próximas de <math>l</math>, se <math>x</math> for suficientemente grande.</p> <p><b>Relembrando a definição vista no estudo com as sequências podemos escrever esse limite mais formalmente como:</b><br/>A função <math>f</math> admite por limite <math>l</math> se todo intervalo aberto <math>]l-\varepsilon; l+\varepsilon[</math> contém todos os valores de <math>f(x)</math> desde que <math>x</math> seja suficientemente grande.<br/>Notação: <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l</math></p> <p>A <b>reta</b> de equação <math>y=l</math> é então a assíntota da curva em <math>+\infty</math>.</p> <p>Analogamente para:<br/><math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l</math></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu olho o limite à direita e o limite à esquerda.</li> <li>✓ Utilizo resultados de limites das funções de referências.</li> <li>✓ Se após a substituição do limite o resultado é um <b>número dividido por outro que está ficando cada vez maior, o limite será zero</b>, eu estudo o sinal para ver se será positivamente ou negativamente.</li> <li>✓ Quando eu estudo um limite de uma função que é parecida com uma função de referência, eu sei que o limite é o mesmo da função de referência.</li> <li>✓ Quando a função tem restrição, ou recai em um caso de indeterminação, eu faço uma fatoração e simplifico a expressão algébrica para encontrar o limite.</li> <li>✓ Eu sei que o limite de uma função constante é a própria constante.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}</math>, <math>n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math>, tende a zero positivamente.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}</math>, <math>n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a <math>-\infty</math>, tende a zero negativamente.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = \frac{n}{x}</math>, <math>n &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math>, quando <math>x</math> tende a <math>\infty</math>, tende a zero.</li> <li>✓ O limite de uma função permanece o mesmo se ela for simplificada.</li> <li>✓ No limite o <math>x</math> pode assumir valores cada vez maiores infinitamente.</li> <li>✓ No limite o <math>x</math> é uma aproximação do ponto.</li> <li>✓ As imagens da função podem se aproximar infinitamente de um número.</li> <li>✓ Se <math>f</math> tende a um número quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math> (ou <math>-\infty</math>), esse número é a assíntota horizontal da representação gráfica.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Como dissemos anteriormente, esse caso de limite e o (2º) são geralmente trabalhados próximos e utilizando a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , que eles já conhecem o comportamento. Nesse caso de limite, Baptiste também não teve dificuldades e fez associações orientadas pelas imagens associadas ao comportamento dessa função de referência.

Na definição intuitiva apresentada pela professora também apareceu algumas expressões que são problemáticas para os alunos, como: “ $x$  tende a infinito se as imagens da  $f(x)$  são também próximas de  $l$ ” e “se  $x$  for suficientemente grande”. Como no (2ª) caso de limite, vimos que Baptiste não fez associação de imagens que pudessem ocasionar conflitos entre si. Com relação a essa primeira expressão, as associações que ele fez com a representação na forma escrita algebricamente foram justificadas oralmente quando ele explicou o que havia escrito na folha de atividade. Do mesmo modo, a segunda expressão também foi relacionada com imagens da primeira expressão e com as representações



partes constituintes dos conceitos matemáticos que serão adquiridos. (CORNU, 2002, p.162, tradução nossa).

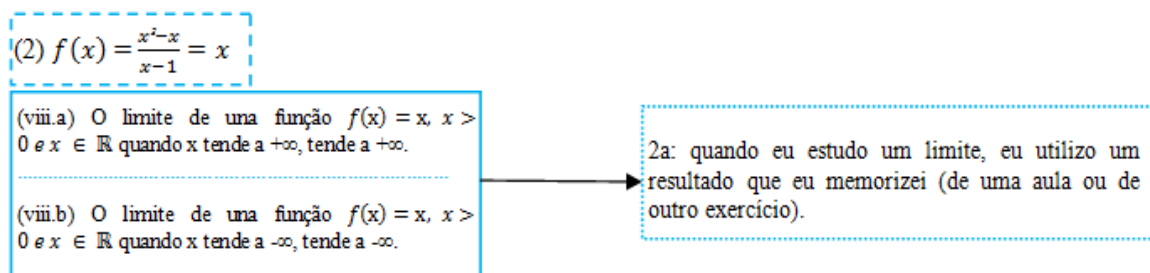
Nesse sentido, as imagens que Baptiste relacionou com as situações quando precisou lidar com os (2º) e (3º) casos de limite de funções indicam que ele vinha fazendo associações pertinentes as definições intuitivas apresentadas pelas professoras. E, nesses casos, podemos dizer que algumas delas estavam se constituindo como conceito definição pessoal desses limites.

Discutiremos em seguida o último caso de limite de funções que apareceu em nossas atividades.

**(4º)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$**

Esse limite foi trabalhado na função (2)  $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ , e, apesar do equívoco inicial, de Baptiste ao lidar com essa função, vimos que não teve nenhuma dificuldade em lidar com os casos de limite dessa função, bem como em mobilizar suas representações. De fato, ao fazer a simplificação para encontrar pontos da função e representá-la no plano cartesiano, ele percebeu que esta função tinha o mesmo comportamento na função identidade, com exceção do ponto  $x = 1$  que na função (2) não estava definido. Em seguida, fazemos a relação da regra em ação relacionando com os teoremas em ação mobilizados.

Figura 75 – As regra em ação e os teoremas em ação



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa

Esse caso de limite só foi trabalhado nessa função, que depois de resolvido o problema de indeterminação recai em um resultado de limite da função referência que Baptiste soube resolver e justificar facilmente. Um aspecto interessante nessa produção, foi verificar como a representação gráfica foi importante para que ele percebesse o erro cometido. Caso, a atividade fosse somente para encontrar o limite, ele provavelmente teria deixado a resposta inicial. Ele mobilizou a memorização do quadro de operações de limite, não estava correto, mas ele ainda não tinha meios para verificar, como fez no 2º caso do limite, em que ele fazia alguns cálculos. A mudança na forma de representação da função fez com que ele visse que não poderia ser zero o resultado do limite. Percebemos também que nas outras atividades ele

buscou outros meios para justificar os limites, provavelmente por perceber que o quadro com as operações sobre limites não havia sido bem memorizado.

Em seguida, apresentamos as imagens que associamos ao conceito imagem de Baptiste para esse caso de limite.

Quadro 26 – Conceito imagem e a definição para o (4º) caso

| Definição apresentada pela professora para $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Elementos do conceito imagem                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1. Limites em <math>\infty</math> (+ ou -)</b> Da intuição à definição</p> <p>- Identificar os limites na representação gráfica e relacionar com sua representação algébrica;</p> <p><b>1.1 Limites infinitos</b> - Conjecturar um limite particular <math>f(x) = \sqrt{x}</math>;</p> <p>- Inspirados na definição rigorosa de limite infinito de sequência e mostrar que a função tende a <math>+\infty</math> quando <math>x</math> toma valores grandes.</p> <p><b>Para memorizar:</b><br/>Seja <math>f</math> uma função definida no intervalo <math>] *; +\infty[</math> (* Poderia ser um número real ou <math>-\infty</math>).</p> <p>Dizemos que <math>f</math> tem por limite <math>+\infty</math> em <math>+\infty</math>, se as imagens de <math>x</math> pela função <math>f</math> tomam valores maiores que qualquer real dado quando <math>x</math> é suficientemente grande.</p> <p><b>Mais formalmente:</b><br/>A função <math>f</math> admite por limite <math>+\infty</math> em <math>+\infty</math>, se todo intervalo aberto <math>]A; +\infty[</math> contém todos os valores de <math>f(x)</math> quando <math>x</math> é suficientemente grande. <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Eu olho o limite à direita e o limite à esquerda.</li> <li>✓ Eu relembro resultados de limites das funções de referências.</li> <li>✓ O limite de uma função <math>f(x) = x</math>, <math>x &gt; 0</math> e <math>x \in \mathbb{R}</math> quando <math>x</math> tende a <math>+\infty</math>, tende a <math>+\infty</math>; ou <math>-\infty</math>, se <math>x</math> tender a <math>-\infty</math>.</li> <li>✓ Eu escolho pontos próximos do valor que <math>x</math> tende para procurar o limite.</li> <li>✓ Quando a função não tem nenhuma restrição, eu faço a substituição do valor que <math>x</math> se aproxima para encontrar o limite.</li> <li>✓ Quando a função tem restrição eu faço uma fatoração e simplifico a expressão algébrica para encontrar o limite.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Baptiste tem esquema bem adaptado para esse tipo de situação, uma função de primeiro grau, com comportamento bem conhecido pelo aluno. Suas ações são pautadas na memorização do estudo do comportamento dessas funções, como crescimento e decrescimento e também no uso das representações algébricas, gráficas e na linguagem natural de modo oral e escrito.

Como essa função, após simplificação, foi tratada por Baptiste sem evidenciar elementos envolvidos especificamente no conceito de limite de função, decidimos não aprofundarmos nesse caso de limite por considerarmos que não temos elementos suficientes para uma análise.

Em seguida, sintetizamos alguns pontos que consideramos importantes evidenciados em nossas análises do processo vivenciado por Baptiste.

#### 7.2.1.4 Sintetizando os caminhos percorridos por Baptiste

Os esquemas de Baptiste foram sendo adaptados de situações vivenciadas no estudo de funções, principalmente as do tipo  $f(x) = \frac{n}{x}, n > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$ , e  $f(x) = \frac{a+x}{x}$ ,  $a$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Como discutimos ao longo desse texto, a primeira função é muito trabalhada ao longo do *lycée* e sendo retomada no estudo dos limites, evidenciando toda preocupação no detalhamento realizado nos anos anteriores.

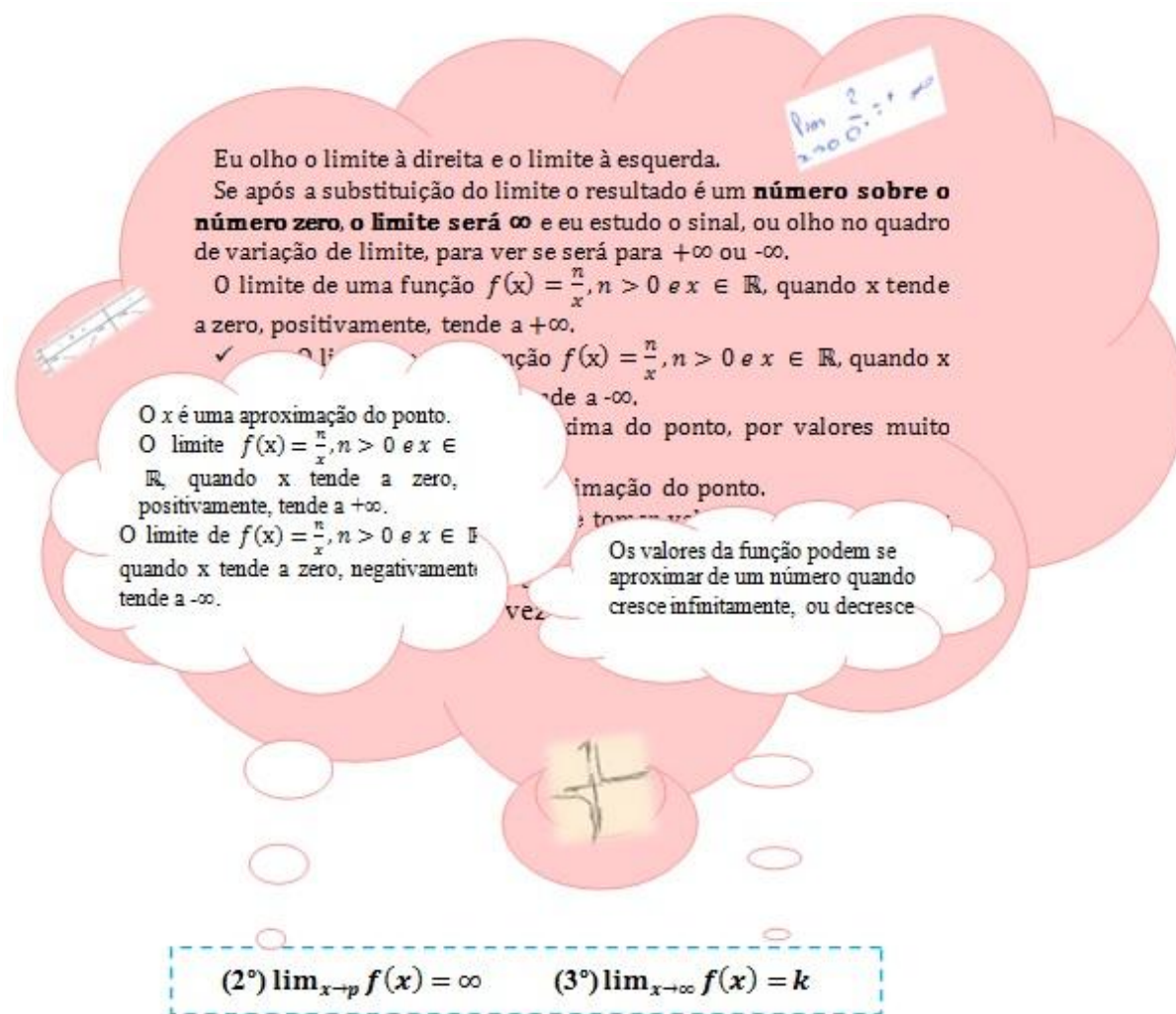
Baptiste, ao mesmo tempo em que vai adaptando seus esquemas, nos deu indícios de como vai inserindo os novos elementos que fazem parte da construção do conceito de limite de funções. Ele soube tanto operar utilizando os quadros de operações com os limites de funções conhecidas, como também mobilizar as quatro representações indicadas para aprendizagem do conceito de limite (STEWART, 2003). Nesses momentos conseguimos observar que ele, não somente tem memorizado alguns resultados de limites, mas também consegue explicar esses resultados, seja utilizando conhecimentos relativos ao estudo das funções, como também relacionados ao conjunto dos números reais.

Identificamos uma dificuldade somente no momento em que ele precisou identificar alguns limites de função por meio da representação gráfica. Todavia, vimos que a professora retoma atividades desse tipo em vários momentos do ensino e que, provavelmente, continuou fazendo. E, uma vez que nossa entrevista aconteceu antes das avaliações do final do ano, inferimos que Baptiste conseguiu fazer filiações pertinentes para esse caso, pois esse é um momento em que são retomados os conceitos preparando para as provas. No caso, seriam revistos os casos de limite e de continuidade de funções. Oportunidade de romper com ações que o levaram a relacionar a ideia de que é preciso o ponto pertencer ao domínio da função, ser “visto” na representação gráfica, para que exista o limite; ou seja, de organizar seus esquemas para lidar com essas situações que envolvem tanto o conceito de limite de funções, como o de continuidade.

De fato, Baptiste conseguiu ter um bom desempenho ao final daquele ano letivo, segundo a professora da turma. Ela nos informou que todos os alunos souberam determinar limites de funções, utilizando as operações usuais, e que ela acredita que somente dois deles que não compreenderam realmente a noção de limite em si, mas que não é o caso de Baptiste.

Com relação às imagens que Baptiste vinha relacionando ao conceito de limite de funções, algumas delas estavam se constituindo como um conceito definição pessoal<sup>40</sup> principalmente para os (2º) e (3º) casos de limites, vejamos na figura 76 uma representação dessa configuração.

Figura 76 – Imagens do conceito definição pessoal de Baptiste



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

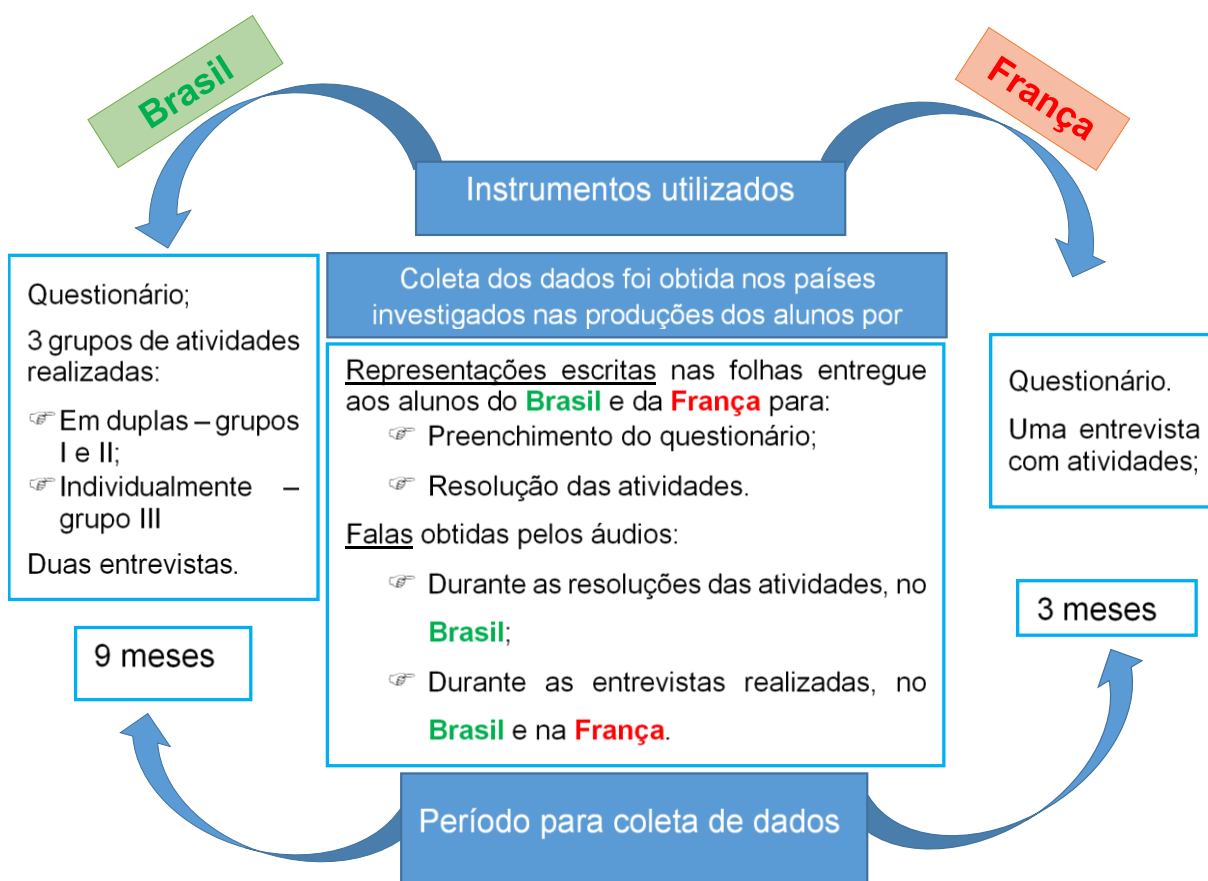
Um ponto importante no conceito imagem de Baptiste, com esses casos de limite de funções é o fato de não termos encontrado nenhuma imagem que pudesse conflitar com as definições apresentadas pela professora, nem com a definição por épsilon e delta que ele precisaria lidar posteriormente.

<sup>40</sup>Relembrando ao leitor o que dissemos na seção (3.1) o conceito definição pessoal é compreendido por Tall e Vinner (1981) como sendo uma reconstrução do conceito pelo aluno, um modo pessoal de explanação desse conceito que vai sendo adquirido com a rotina de estudo. São imagens que podem estar relacionadas em maior ou menor grau de aproximação com o conceito, ou com a variedade de aspectos envolvidos em um conceito. Elas são mobilizadas conforme a representação que o aluno precisa lidar, ou seja, elas vão variar em função das situações que ele estiver precisando resolver em dado momento.

## 8. OS PROCESSOS INVESTIGADOS NO BRASIL E NA FRANÇA

Investigar o processo de aprendizagem de um conceito matemático envolve considerar as situações utilizadas, bem como os conceitos e representações mobilizadas nessas situações (TALL e VINNER, 1981; VERGNAUD, 1990). Em nosso estudo, buscamos compreender esse processo na introdução do conceito de limite de funções vivenciado por alunos do Brasil e da França. Vimos na seção 4 que a introdução desse conceito é realizada de modo diferenciado nesses países, tanto com relação ao nível de ensino, que no Brasil é introduzido na universidade enquanto que na França ele é trabalhado no ensino médio (*Lycée*). Como também, encontramos diferenças nas situações que são apresentadas para sua introdução nesses dois países. Além disso, em nossa investigação a coleta dos dados no Brasil foi diferente da realizada na França, conforme podemos observar na figura 77.

Figura 77 – Diferenças na coleta de dados obtidos no Brasil e na França



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

A metodologia de análise que utilizamos permitiu modelar algumas ações dos alunos desses países como elementos, tanto de esquemas, como do conceito imagem relacionados às situações. O que nos permitiu fazer uma discussão sobre o processo vivenciado por esses alunos, buscando identificar aproximações nessas produções. Logicamente, considerando que

esses estudantes estavam em nível de estudo diferentes e também que o conceito de limite de funções estava inserido em programas de ensino cujos objetivos e metodologias são distintos. Além do fato de que a coleta para produção de dados foi diferente, conforme vimos na figura 77.

Apresentamos, assim, alguns pontos de aproximação que identificamos nas resoluções desses estudantes. Iniciamos com (1º) caso de limite  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = K$ . Como, no Brasil, trabalhamos com mais atividades do que na França, escolhemos para nossa discussão uma função mais próxima da que foi trabalhada na França e, no quadro 27, apresentamos as funções e os elementos comuns identificados nas produções dos alunos para esse caso de limite.

Quadro 27 – Produções de Mateus e de Baptiste

| Mateus                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Baptiste                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Representação algébrica dada: <math>f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}</math></p> <p>Ideia de pegar pontos próximos aos pontos de investigação.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ (RB.4) Quando preciso encontrar o limite de uma função racional, eu sei que posso simplificar a expressão algébrica da função para trabalhar com uma expressão mais simples, para facilitar os cálculos.</li> <li>✓ (RB.6) quando estou resolvendo uma atividade sobre limite e preciso lidar com elementos do domínio, eu sei que preciso trabalhar com valores próximos ao ponto que estamos lidando com o limite.</li> <li>➤ (TAB.v.ii) Se uma função <math>f</math> é simplificada, então o limite da função <math>f</math> simplificada será igual ao limite da função <math>f</math>.</li> <li>➤ (TAB.i.a) Se os valores da função se aproximam de um valor <math>L</math> quando <math>x</math> se torna próximo de um dado ponto <math>p</math>, então o limite da função é <math>L</math> quando <math>x</math> tende a <math>p</math>.</li> </ul> | <p>Representação algébrica dada: <math>f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}</math></p> <p>Ideia de pegar pontos próximos aos pontos de investigação.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ (RF.8) Quando eu estudo um limite e eu faço a substituição do valor que <math>x</math> se aproxima e o resultado é uma indeterminação, ou existe uma restrição, eu sei que tenho que simplificar a expressão para resolver o limite.</li> <li>➤ (TAF.x) Se uma função <math>f</math> é simplificada, então o limite da função simplificada será igual ao limite da função <math>f</math>.</li> <li>➤ (TAF.iv) O limite de uma função que não tem restrição é encontrado substituindo o valor do <math>x</math> da função pelo valor que se está investigando o limite.</li> </ul> |

Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Essas funções são trabalhadas geralmente para se discutir a ideia de que o ponto não precisa estar definido na função para que exista o limite da função naquele ponto. Esses alunos mobilizaram esquemas que foram efetivos para o estudo com essas funções, já fazendo adaptações e inserindo aspectos do conceito desse limite. Podemos observar esse fato nos teoremas em ação mobilizados tanto por Mateus, como por Baptiste relacionados a esse limite de funções:

- Se uma função  $f$  é simplificada, então o limite da função  $f$  simplificada será igual ao limite da função  $f$ .

- Se os valores da função se aproximam de um valor  $L$  quando  $x$  se torna próximo de um dado ponto  $p$ , então o limite da função é  $L$  quando  $x$  tende a  $p$ .
- O limite de uma função que não tem restrição é encontrado substituindo o valor do  $x$  da função pelo valor que se está investigando o limite.

A diferença encontrada nesses dois últimos teoremas é relativa, principalmente, a forma de apresentação do conceito vivenciada por esses alunos. No Brasil, a introdução desse conceito foi realizada com a ideia de se aproximar do ponto de investigação tomando valores, maiores e menores, cada vez mais próximos do ponto, com funções polinomiais e irracionais. Utilizando uma tabela com esses valores, fez-se manipulação da representação algébrica quando necessário e, algumas vezes, discutiu esses resultados com a representação gráfica. Enquanto que na França, inicialmente foi proposto à identificação dos limites na representação gráfica, para, em seguida, relacionar a sua representação na notação de limite. Bem como, a identificação de alguns limites das funções de referência. Sendo o caso dessa função após a simplificação.

Desse modo, após simplificação das funções: o estudante brasileiro faz o estudo dos pontos próximos e vê que os valores se aproximam de um número que é o limite; e o estudante francês reconhece a função e sabe que o limite será o valor que a função simplificada assume no ponto.

O conceito de função é um ponto central na apresentação do conceito de limite, o que faz com que ele seja tanto um ponto de apoio, para as filiações necessárias aos esquemas, como também pode ser um ponto de desequilíbrio. “Porque não somente são pontos de apoio, mas também são maneiras de ver as coisas estruturadas e contra as quais temos de lutar para poder admitir coisas novas” (VERGNAUD, 2015, p. 19). Ao longo do ensino do conceito de função os alunos são levados a se preocupar em identificar pontos que são considerados problemáticos para a função, no estudo do domínio, por exemplo. Uma situação para estudar pontos em que a função não está definida, como no caso dessas funções, não teria sentido, muito menos substituir um ponto na função e encontrar a expressão  $\frac{0}{0}$ ; afinal o denominador nunca pode ser zero. São aspectos que foram trabalhados durante muitos anos com os alunos e que estão fortemente imbricados nas ações que eles mobilizam ao lidarem com essas funções. Esse fato é importante se estamos interessados na aprendizagem de um novo conceito como o de limite, sendo importante saber dessas filiações e da necessidade de proporcionar situações para que os alunos consigam lidar com esses conflitos.

Como foi o caso desses dois alunos que apresentamos nesta tese, eles tiveram problemas ao resolverem esse limite com essas funções. Na elaboração das atividades

buscamos inserir momentos de discussão para que os estudantes pudessem refletir sobre esses aspectos problemáticos. Todavia, isso só foi possível, por que eles tinham meios de inferência e controle durante suas ações. Por exemplo, o aluno francês ao se confrontar com a expressão  $\frac{0}{0}$  e mobilizar um conhecimento memorizado das tabelas com operações de limite, encontrou um resultado que era incorreto para a atividade. Inicialmente ele não percebeu e, ao justificar o resultado encontrado, Baptiste nos disse que não saberia explicar porque o limite tinha dado aquele resultado, argumentou que no caso anterior foi possível, pois era um valor mais certo e que neste caso seria uma aproximação. Ele se referia ao limite anterior em que ele fez a substituição direta do ponto na função dada. Somente ao precisar fazer a representação gráfica desta função, Baptiste se deu conta do erro e, refez toda a atividade, corrigindo e justificando o resultado encontrado.

A memorização é importante e auxilia o aluno, tanto dos resultados das funções de referência, como dos quadros com as operações sobre os limites. Porém é necessário que ele compreenda o que está envolvido nessas representações. O trabalho com outra representação se apresenta interessante como é o caso da representação gráfica, fato que levou Baptiste a conseguir lidar com aspectos conflituosos. É importante destacar que cada representação comporta invariantes operatórios que podem ser diferentes, e que permitem inferir e gerar regras de busca de informação e controle dos resultados na ação. Não foi a construção da representação gráfica em si, que teve esse papel, mas as regras em ação mobilizadas para sua construção e os invariantes operatórios associados.

Com relação ao conceito imagem desses alunos para esse caso de limite de funções, vemos que eles fizeram associações de imagens próximas das definições intuitivas que foram trabalhadas pelas professoras. Encontramos somente duas associações que poderiam causar conflitos considerando as definições utilizadas para esse caso de limite, no caso quando:

☞ Mateus associava o estudo com as funções como problemas a serem resolvidos em termos dos elementos de  $f(x)$ ;

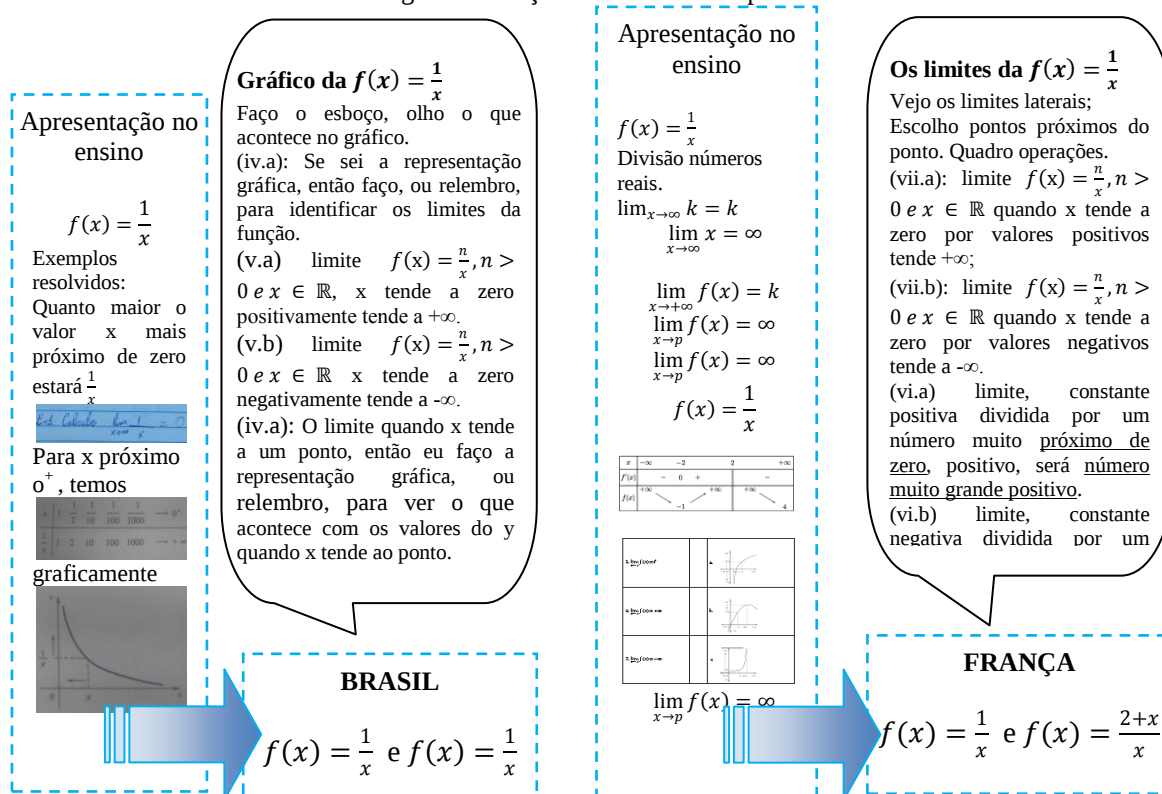
☞ Baptiste associava a existência do limite em um ponto ao valor da função no ponto, quando lidava com a representação gráfica.

No caso de Mateus, um dos problemas com essa imagem seria quando precisasse lidar com situações envolvendo a definição formal, com épsilon e delta, tanto nesse caso de limite como nos outros. Em que é preciso manipular as inequações e os módulos, buscando relacionar elementos do domínio com elementos da imagem. A imagem associada por Baptiste conflitava com imagens relacionadas a elementos do próprio conceito de limite de

função em um ponto, relacionados tanto com a definição intuitiva como também com a formal. Segundo Tall e Vinner (1981), esses são fatores de conflitos que podem se tornar muito sérios, quando encontramos imagens que estão em desacordo com a definição formal do conceito. Em nossa pesquisa consideramos tanto a definição apresentada intuitivamente, quanto a que utiliza os quantificadores épsilon e delta.

Os outros casos de limites, (2º) e (3º), que foram trabalhados com as funções:  $f(x) = \frac{1}{x}$  e  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , no Brasil; e  $f(x) = \frac{2}{x}$  e  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , na França, também encontramos pontos para nossa discussão, conforme apresentamos na figura 78, a seguir.

Figura 78 – Ações de Mateus e Baptiste



Fonte: Elaborado pela autora da pesquisa.

Nessas atividades os esquemas desses dois alunos foram orientados pela memorização de uma função conhecida, no caso a função  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Enquanto Mateus mobiliza a representação gráfica dessa função, sempre que precisa lidar com algum dos tópicos das atividades, Baptiste mobiliza conceitos relativos à divisão dos números reais, que foram trabalhados no estudo de função, com essa função. Vemos que, particularmente, a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  é considerada importante para introdução desses casos de limites de função, nesses dois países, e que ela acaba se tornando uma referência para esses alunos lidarem com esses casos de limites. Sendo que na França, essa função é assim considerada, e trabalhada, ao

longo do ensino médio (*lycée*), e, no Brasil, ela apareceu apenas na disciplina de Introdução ao Cálculo e foi retomada no início da disciplina de Cálculo I.

As adaptações dos esquemas desses alunos foram orientadas inicialmente pelo reconhecimento das expressões algébricas dadas nas atividades, como uma função conhecida. Todavia, as filiações e rupturas foram em função das situações vivenciadas ao longo do estudo com essas funções. Mateus tinha memorizado a forma da representação gráfica dessa função e, mesmo não compreendendo como ela era construída, conseguiu fazer filiações com situações de estudo de construção de representações gráficas por meio de escolhas de pontos. Ele conseguiu adaptar seu esquema, inicialmente mobilizado no estudo com funções, para esses casos de limites e, assim, agregou novos elementos envolvidos na construção desse conceito como vimos na figura 78.

Enquanto que Baptiste tinha memorizado tanto a representação gráfica dessa função, como também o quadro de variação dessa função. Elas foram memorizadas de situações em que se discutiam a construção dessas representações, buscando compreender o que acontecia com os valores da função quando os valores de  $x$  se aproximavam de zero, ou quando eles cresciam, ou decresciam; não como um limite, mas relacionando os valores da função com o comportamento da curva.

Esses dois estudantes conseguiram mobilizar esquemas efetivos para as situações que trabalhamos em nossa experimentação, já agregando elementos envolvidos na construção desses conceitos. Um momento interessante para discussão é quando eles tiveram de resolver a atividade com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ , após terem trabalhado com a função que citamos como de referência, para encontrarem os mesmos limites com essa função. Vimos que Mateus levou um pouco mais de tempo que Baptiste para fazer essas adaptações, principalmente por não ter vivenciado tantas situações envolvendo aspectos importantes dessa construção como Baptiste. Todavia, ele conseguiu fazer filiações importantes com as que ele havia lidado, mesmo com algumas dificuldades na manipulação com os números reais e também com operações algébricas, em especial a fatoração.

Com relação às imagens associadas a esses casos de limites, tanto Mateus como Baptiste estavam fazendo associações importantes para constituição de um conceito definição pessoal desses casos de limites. Somente encontramos no conceito imagem de Mateus uma associação que poderia trazer problemas, particularmente com a definição formal, utilizando épsilon e delta, foi quando ele precisou relacionar conjunto de elementos da imagem com elementos do domínio.

Todos esses pontos que apresentamos nessa seção não foram com objetivo de identificar, e discutir, aspectos do que seja mais pertinente, ou não, na introdução do conceito de limite de funções. Investigamos duas instituições<sup>41</sup> diferentes o que tornam qualquer discussão nesse sentido inadequada diante da complexidade envolvida nessas duas instituições. No caso, esses estudantes eram: um de uma turma da disciplina de Cálculo I, do primeiro ano de um Curso de Matemática – Licenciatura de uma universidade pública de uma cidade brasileira; e outro de uma classe do último ano do ensino médio (classe do *terminale* do *lycée* opção *Scientifique*) de uma cidade francesa. Todavia, pudemos encontrar elementos, em termos de esquemas e de conceito imagens relacionadas às situações que trabalhamos que nos permitiram compreender o processo vivenciado por esses estudantes com atividades para introdução do conceito de limites de funções.

Em seguida, tecemos nossas considerações finais desta pesquisa.

---

<sup>41</sup> Referimo-nos a instituição no sentido dado por Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

## 9. FINALIZANDO A TESE

A nossa pesquisa sobre – **Compreender processos mobilizados por estudantes do Brasil e da França na introdução do conceito de limite de função** – foi organizada em objetivos específicos. Primeiramente, tratamos de caracterizar alguns conceitos de base para delimitar o campo conceitual para as atividades de introdução do conceito de limite de funções, aspectos relacionados ao nosso objeto de estudo.

Os resultados desse trabalho se deram principalmente nas seções: 2, 4, 6.1, 7.1 e 7.1.1. Sendo que, no quadro 5, apresentamos uma síntese da delimitação do campo conceitual escolhido para as situações. Os pontos que nortearam as escolhas foram sendo constituídos em nosso estudo sobre alguns aspectos envolvidos na construção do conceito de limite de função. Nas pesquisas que versam sobre nosso tema, nos documentos oficiais dos programas para o ensino desse conceito e também em livros didáticos do Brasil e da França.

Nossa escolha teórica foi baseada na teoria dos campos conceituais e nas noções de conceito imagem e conceito definição. Elas se constituíram como pontos importantes na elaboração das situações trabalhadas com os alunos, como também na constituição da nossa metodologia de análise. A teoria dos campos conceituais nos permitiu elaborar situações considerando as diferenças na apresentação do conceito de limite de função do Brasil e da França. As atividades foram constituídas por conceitos que são imbricados, tanto na construção do conceito de limite de função, como também selecionamos outros que fazem parte e que são comuns nas atividades introdutórias dos dois países. Como por exemplo, a fatoração do tipo fator comum em evidência e a simplificação de polinômios.

Assim, investigamos nas situações propostas ao aluno: seus esquemas de raciocínio e as imagens, relacionados à noção limite de função. Isso foi possível, primeiramente, pela escolha dos instrumentos para coleta e produção dos dados. Utilizamos o questionário, conjuntos de atividades e fizemos entrevistas. Conduzimos nosso experimento proporcionando momentos em que o aluno resolvesse a atividade, utilizando várias representações, como: linguagem natural escrita, representações gráficas, algébricas, desenhos, etc. Além disso, eles apresentaram suas resoluções e justificações oralmente.

Outro ponto importante foi nossa metodologia de análise, em que modelizamos as ações dos alunos em termos de regras em ação e teoremas em ação e de imagens associadas ao conceito imagem da noção de limite de função. Além de se mostrar pertinente para o estudo do processo de aprendizagem do conceito de limite de função, ela foi importante para discutirmos sobre a produção de alunos dos países investigados. São programas, e nível de

ensino, diferentes, além disso, as atividades e instrumentos utilizados não eram todos os mesmos e nem foram aplicados do mesmo modo. Desse modo, a modelização foi fundamental para que pudéssemos identificar elementos comuns nas produções dos estudantes brasileiros e franceses e, assim, conseguimos discutir algumas aproximações nas produções desses alunos.

Encontramos teoremas em ação comum mobilizado por esses estudantes, mas que foram orientados por regras em ação diferentes. O que permitiu discutirmos diferenças no processo de filiação, e adaptação dos esquemas desses alunos, logicamente considerando as situações que eles vivenciaram ao longo do ensino. Bem como, as diferenças já citadas no sistema brasileiro e francês.

Nas situações aplicadas identificamos momentos em que os alunos tiveram dificuldades em conceitos que são imbricados na construção do conceito de limite de função. Repetindo os problemas apontados nas pesquisas, e confirmando a ideia de que alguns deles ainda são obstáculos a aprendizagem do limite de funções. O que por um lado explicaria a permanência de alguns teoremas em ação incorretos nos esquemas mobilizados pelos estudantes. Também encontramos dificuldades dos alunos em lidar com os conceitos de função e de números reais, com a manipulação das expressões algébricas que definem as funções e com as operações numéricas.

Nesse aspecto, verificamos que o aluno consegue fazer filiações mais pertinentes conforme os meios de tomada de informação e de controle que ele tem disponíveis. Esses elementos fazem parte das ações dos estudantes que modelizamos em termos de regras em ação e teoremas em ação, e são fundamentais no processo de adaptação dos esquemas. As regras em ação são responsáveis por gerar o esquema e também pelo desenvolvimento temporal das ações do sujeito, enquanto que o teorema em ação é relativo à parte conceitual, e por organizar esse desenvolvimento. Eles vão interferir diretamente nas inferências necessárias para que o esquema seja efetivo para a situação tratada. Nesse sentido, não encontramos dificuldades que não pudessem ser enfrentadas quando o aluno tem esquemas mais estáveis para os conceitos envolvidos na construção do conceito de limite de funções. Esse fato é fundamental, pois são esses esquemas que serão mobilizados inicialmente, pelo reconhecimento de semelhança com situações tratadas anteriormente. Por exemplo, quando trabalhamos com atividades buscando fazer uma aproximação entre a definição intuitiva e a definição formal com o estudante brasileiro, vimos que seu principal problema estava no fato delas envolverem aspectos desconhecidos de conceitos estudados anteriormente. Esse aluno havia feito a disciplina de Introdução ao Cálculo e tinha tido um ótimo desempenho, ou seja, seria “esperado” que soubesse lidar com as funções da atividade e com as inequações e os

módulos. Apesar disso, em vários momentos da experimentação ele argumentou que não entendia o que estava sendo solicitado na atividade e não tinha ideia de como lidar com aqueles elementos na maneira que estavam sendo apresentados nas atividades.

Nesse caso, a retomada dos conceitos tanto de função como de números reais não foi suficiente para que o aluno desenvolvesse esquemas que pudessem ser mobilizados, e adaptados; bem como imagens para lidar com as situações de introdução do conceito de limite de funções. É preciso trabalhar com aspectos envolvidos na construção do conceito de função e de números reais já relacionando com a noção de limite de função. Isso é possível tanto em disciplinas, como Introdução ao Cálculo I, como também no estudo com funções, conteúdo que antecede a apresentação do conceito de limite de função na disciplina de Cálculo I que investigamos. Por exemplo, com situações como a que propomos no Brasil inicialmente com funções. Como também, quando fizemos o estudo dos limites infinitos. Iniciamos na atividade (1) sem falar em limite e poderíamos ter feito isso até o final, simplesmente estudando o comportamento das funções com as ideias do limite.

Podemos trabalhar com essas noções tanto no estudo do conjunto dos números, como no estudo com as funções, sem nos referirmos diretamente ao conceito de limite, mas utilizando as noções de limite. Poderia ser realizado, por exemplo, na disciplina de Introdução ao Cálculo, mas também desde o ensino médio no decorrer do estudo do conjunto dos números reais e com as funções. Os alunos teriam oportunidade de organizar esquemas mais próximos das adaptações que são necessárias para lidar com alguns casos de limite de funções. Como também, de fazerem associações de imagens mais pertinentes para se constituírem no conceito imagem de limite.

O estudo por meio das imagens do conceito imagem da noção de limite de função permitiu que pudéssemos investigar como o aluno estava conseguindo lidar com as situações propostas. Por um lado, identificamos imagens que estavam se constituindo em um conceito definição pessoal e, assim, analisar tanto o processo de aprendizagem do conceito de limite de função e também verificar como o estudante estava compreendendo as definições propostas pelo ensino para esse conceito. Esse aspecto é importante quando consideramos que o conceito de limite de função, envolve definições com aspectos tão distintos, como as que foram discutidas na tese, no caso a definição intuitiva e a formal.

Além disso, identificamos imagens que poderiam trazer problemas em aprendizagem futuras, seja por estarem em conflito entre as imagens do conjunto do conceito imagem, ou com a definição de limite de função. Nesse ponto, o outro referencial foi importante, enquanto que com as imagens temos uma visão mais geral das produções do aluno, identificando

imagens que podem ser problemáticas, por exemplo. Com as análises das filiações, e rupturas, dos esquemas conseguimos de certo modo, fazer uma análise mais fina dessas produções e verificar que muitas imagens trazem aspectos que “merecem” ser investigados melhor, ou não. Referimo-nos, por exemplo, ao caso em que identificamos que o aluno fez associações de imagens que entravam em conflito, tanto com a definição apresentada pelo ensino, como com outras do conceito imagem da noção de limite de função. Todavia, ao analisarmos seus esquemas vimos que ele estava adaptando seus esquemas e fazia filiações algumas vezes não pertinentes, mas que ele dispunha de meios de inferência e de controle que fizeram com que ele conseguisse adaptar o esquema mobilizado inicialmente.

Nesse aspecto as representações se mostraram muito importante. Nas análises verificamos como elas foram fundamentais, tanto na organização dos esquemas como também nas associações das imagens. Vimos que a representação utilizada nas atividades era o que orientava o aluno a mobilizar um esquema vinculado às situações anteriores. Esse reconhecimento de familiaridade, com a nova situação, ocorria por meio das representações, tais como: pela linguagem oral e/ou escrita, por um gráfico, uma expressão algébrica, ou mesmo gestos. As imagens mobilizadas para a situação nova seguem caminho semelhante de reconhecimento. Se o aluno associou certa imagem à situação e obteve êxito, ela pode se tornar uma imagem do seu conceito imagem e se constituir como parte de seu conceito definição pessoal. Analogamente ao esquema, se ele for efetivo para a situação, poderá ser evocado em outras similares até se estabilizar e se tornar disponível para lidar com as próximas situações que forem semelhantes. Desse modo, cada representação possibilita novas filiações, e/ou rupturas, o que é fundamental no processo de construção de um conceito.

As representações também foi um aspecto importante na discussão que fizemos das aproximações identificadas nas produções do estudante brasileiro e do francês. São propostas diferentes para apresentação do conceito de limite de funções, mas vimos como as representações foram importantes nas ações dos alunos para lidarem com as situações. Elas influenciaram tanto as adaptações dos esquemas mobilizados para resolver as atividades, como também às associações de imagens mais próximas das definições apresentadas pelo ensino.

Outro ponto evidenciado em nossas análises, é que as filiações, e/ou rupturas, acontecem o tempo todo e nem sempre elas são pertinentes, no processo de construção do conceito de limite de função. Os momentos de conflitos vão acontecer ao longo desse processo. Não temos como evitar, mas precisamos saber que eles existem. O fato de o aluno ter mobilizado um esquema efetivo para algumas atividades, não significa que ele estará

estável, e disponível, para uma atividade similar dois meses depois, por exemplo. Vimos isso nas análises que fizemos das produções do aluno francês. Ele precisou lidar com outras situações e algumas traziam novos elementos, é importante compreender que nesse processo as filiações acontecem o tempo todo e algumas podem influenciar um esquema que havia sido adaptado e se mostrava efetivo para uma dada situação. Assim, o professor precisa saber que o fato do aluno ter conseguido resolver satisfatoriamente atividades sobre determinado conceito apresentado em sala de aula, seja em tarefas ou nas avaliações, não significa que ele não terá problemas ao lidar com situação semelhante em outros momentos. É comum os professores dizerem que os alunos fazem as atividades e depois esquecem tudo, argumentando que parece que eles não aprenderam realmente nada do que foi ensinado. No entanto, são etapas do processo de conceitualização, assim, tanto os esquemas estão sendo adaptados, e ou modificados, como também as imagens que eles estão associando, a cada situação que o aluno precisa lidar.

É importante saber que elas existem, e que irão acontecer ao longo do processo. Estar atento e refletir em como oportunizar momentos, por exemplo, para observar os alunos em ação. Apresentando e discutindo as atividades, explicitando e justificando suas resoluções, e também as representações que mobilizam. Trazemos isso ao identificarmos a preocupação dos alunos em apresentarem uma resposta final correta do ponto de vista matemático. Observamos esse fato, tanto em nossa experimentação com os alunos do Brasil, como também com os da França. Inclusive quando o estudante não compreendia a resposta encontrada, ou pior ainda quando a resposta contrariava o que ele estava pensando. Por mais que argumentássemos que havia respostas que eram só deles e, que não nos importava se eram certas ou erradas, para eles era importante. Esse aspecto merece ser considerado no trabalho com os alunos, a necessidade de compreender e justificar sua resolução, e não somente encontrar a resposta correta, ou esperada pelo ensino, para uma dada situação. No caso nos referimos à importância em o aluno compreender, do ponto de vista da sua aprendizagem, que os conhecimentos que ele mobiliza podem ter aspectos que não estão bem compreendidos; e que ele pode mobilizar outras representações como meio para buscar mais informações e conseguir gerir, e controlar, suas ações o tempo todo.

Nessa pesquisa vimos à importância de se trabalhar com uma variedade de situações, considerando os conceitos e suas representações que estão imbricados, tanto na adaptação dos esquemas dos alunos, como também na associação das imagens do seu conceito imagem. E avança, ao evidenciar que as rupturas e filiações, como também associações com fatores de conflitos, podem acontecer o tempo todo, o ensino não tem controle sobre esse processo,

porque ele é do aluno. Não se trata de evitar, pelo contrário, o estudo por meio de uma diversidade de situações é necessário e consideramos a “fonte” para conceitualização. Todavia, é preciso estar atento, porque elas também terão elementos que serão mal compreendidos pelos alunos, principalmente para conceitos como o de limite de funções que demandam de muitos anos de estudo para sua compreensão.

Nossa tese nos proporcionou diversos questionamentos e possibilidades de novos estudos. Com relação à modelagem que fizemos, vimos que ela se mostrou pertinente para o estudo de alunos com dificuldade. Tanto em conceitos de matemática básica, como: fatoração, multiplicação e redução de polinômios, como também com os conceitos envolvidos na construção do conceito de limite de funções, no caso: infinito, função e conjunto dos números reais. Por exemplo, temos as análises de uma aluna que não tinha dificuldades em conceitos de matemática básica, mas que teve muita dificuldade nas situações que trabalhamos em nossa pesquisa. Em nosso estudo conseguimos identificar quais representações foram sendo mais problemáticas e quais fizeram com que ela conseguisse fazer filiações mais pertinentes para lidar com as atividades. Apresentamos uma parte desses dados em um evento e o texto foi publicado em 2018. Além disso, estamos organizados as análises detalhadas dessa aluna para um artigo. Assim, essa modelagem pode ser utilizada também para investigar alunos com dificuldade como no caso de nosso objeto de pesquisa, o conceito de limite de função, mas também para outros conceitos de matemática.

Pretendemos também fazer um acompanhamento dos alunos da disciplina de Cálculo I da nossa universidade utilizando a abordagem que citamos anteriormente. Na ementa dessa disciplina o primeiro conceito a ser trabalhado é o de função de uma variável real. Assim, temos interesse em iniciar esse estudo sobre funções explorando as noções que causam problemas aos alunos, considerando as situações, conceitos e suas representações. O objetivo é trabalhar tanto com as noções sobre os números reais, como de funções, mas relacionando aspectos que os alunos, em geral, vivenciam somente com a introdução do conceito de limite, como os citados nesse texto, mas sem falar em limite. Utilizando também a ideia de aproximação do trabalho com as funções com a apresentação do limite de função, buscando, com isso, relacionar aspectos da definição intuitiva com a definição formal. No caso, nos referimos ao trabalho com as funções como fizemos nas atividades aplicadas no Brasil, antes das situações com o limite de funções.

Outro ponto que nos interessamos é investigar situações semelhantes a essas com o uso de software. Nesse sentido já temos alguns estudos sobre seu uso evidenciando pontos importantes, como, por exemplo, favorece uma maior autonomia ao aluno sobre suas

produções, em função das retroações que alguns softwares oferecem, a possibilidade de fazer conjecturas sobre as construções realizadas, entre outras.

Outra perspectiva suscitada em nosso trabalho é a elaboração de sequência didática para se trabalhar com alunos visando à aprendizagem do conceito de limite de função. Como também sequências para cursos de formação para professores.

Ao fim da escrita dessa tese, mas não do nosso trabalho de investigação sobre o tema, continuamos nosso caminho de estudo sobre esse conceito, agora, com mais elementos, dos resultados que obtivemos e que suscitaram as perspectivas apresentadas.

## 10. REFERÊNCIAS

- ALVARENGA, K. B.; SAMPAIO, M. M. Obstáculos Referentes às Relações de Representação Aritmética e Algébrica de Grandezas. In: FONSECA, L. S. (Org.). **Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016, p. 131-144.
- APMEP - Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. **Documents d'accompagnement des programmes de Seconde, Première et Terminale S et ES**. Paris, [201-]. Disponível em: [https://www.apmep.fr/IMG/pdf/doc\\_application\\_ES-S.pdf](https://www.apmep.fr/IMG/pdf/doc_application_ES-S.pdf). Acesso em: agosto de 2018.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GÓMEZ, P. (ed.). **Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá, 1995, p. 97-140.
- BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, SP.
- BERKELEY, G. O Analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel. Tradução A. Calazans e E. S. de O. Barra. **Scientiae studia**: revista latino-americana de filosofia e história da ciência, v. 8, n. 4, p.633-676, 2010.
- BITTAR, M.; OLIVEIRA, A. B.; SANTOS, R. M.; BURIGATO, S. M. M. S. A Evasão em um Curso de Matemática em 30 Anos. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 3, n. 1, 2012.
- BRASIL, Ministério da Educação Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf> Acesso em setembro de 2018.
- BRASIL, Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília - volume 2, 2006.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.
- BURIGATO, S. M. M. S.; FREITAS, J. L. M. Um Estudo da Introdução ao Ensino de Limite com Alunos de um Curso de Licenciatura. In: 4º SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Anais, 2015.
- BURIGATO, S. M. M. S.; FREITAS, J. L. M. . A Construção da Noção de Limite e os Alunos da Licenciatura em Matemática. In: XII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais**, São Paulo, 2016.

BURIGATO, S. M. M. S.; FREITAS, J. L. M. Sur l'Introduction du Concept de Limite de Fonction a l'université au Brésil. Comparaison avec la France. In: 19<sup>e</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques organisée par ARDM. **Anais**, Paris, 2017 v. 1.

BURIGATO, S. M. M. S. ; FREITAS, J.L.; OUVRIER-BUFFET, C. Percurso de Estudantes ao Lidarem com a Introdução do Conceito de Limite. In: II LADIMA - Simpósio Latino-Americana de Didática da Matemática. **Anais**, Jarinu, 2018.

BULLETIN OFFICIEL (B. O.). **Programmes des Mathématiques. Classe de Terminale**. Paris, BO Spécial n° 8 du 13 octobre 2011. Disponível em: <https://www.education.gouv.fr..> Acesso em: março de 2016.

BULLETIN OFFICIEL (B. O.). **Programmes des Mathématiques. Classe de Première**. Paris, BO Spécial n° 9 du 30 septembre 2010. Disponível em: <https://www.education.gouv.fr..> Acesso em: março de 2016.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 5<sup>a</sup> edição 2003.

CARVALHO, J. P. O Cálculo na escola secundária – Algumas considerações históricas. **Cadernos CEDES 40: História e Educação Matemática**, p.62-80, 1996.

CAVASSOTO, M. **Dificuldades na aprendizagem de Cálculo: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles**. 1983. Tese (Doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures) – Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble.

CURY, H. N. **Análise de Erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N.; CASSOL, M. **Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças**. ACTAS CIENTIAE, Canoas, v.6, 2004, p.27-36.

DUROUX, A. La Valeur Absolue: Difficultés Majeures Pour Une Notion Mineure. **Reveu Petitx**, Grenoble, n.3, p.43-67, 1983.

FERNANDES, J. A. N. **Ecologia do Saber: O Ensino de Limite em um Curso de Engenharia**. 2015. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) Universidade Federal do Pará, Belém.

FREITAS, J. L. M.; BITTAR, M. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental**. Campo Grande, UFMS, 2004.

GRANDE, A. L.; PIRES, R. F. Obstáculos Referentes às Relações entre Representação Numérica sob três Enfoques: Aritmético, Algébrico e Geométrico. In: FONSECA, L. S. (Org.). **Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016, p. 122-130.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo: volume 1**. Editora LTC, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2013.

IGLIORI, S. B. C. A Noção de “Obstáculo Epistemológico” e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. S. (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. Editora da PUC - SP, 2008, p. 113-142.

JUNQUEIRA, A. L. N.; CAMPOS, M. L. T. Mobilizações Didáticas das Relações de Representação Aritmética e Algébrica de Grandezas. In: FONSECA, L. S. (Org.). **Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016, p. 209-226.

LECORRE T. **Des conditions de conception d’une ingénierie relative à la définition de la notion de limite**. 2016. These (Doctorat de Mathématiques, sciences et technologies de l’information, Informatique) – Université de Grenoble.

LIMA, E. L. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MALAVAL, J. (Direc). **Hyperbole Mathématiques 1<sup>re</sup> S** – France, ed. Nathan, 2012.

MALAVAL, J. (Direc). **Hyperbole Mathématiques T<sup>erm</sup> S** – France, ed. Nathan, 2012.

MAZINI, E. J.; TOLOI, G. Etapas da Estruturação de um Roteiro de Entrevista e Considerações Encontradas Durante a Coleta dos Dados. In: VIII Encontro da Associação Brasileira de Pesquisadores em Educação Especial. **Anais**, Londrina, 2013.

MAZUCATO, T. (Org.). **Metodologia da pesquisa e do trabalho científico**. Penápolis: FUNEPE, 2018.

MIGUEL A.; BRITO, A. J. A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. **Cadernos CEDES 40: História e Educação Matemática**, p.47-61, 1996.

MUSTAPHA, R. **Limites de funções de uma variável real com valores reais e generalização**. PPGEducMat/UFMS, 2018. 7f. [Notas de aula].

NASSER, L. Educação Matemática no Ensino Superior. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). **Anais**, Pernambuco, 2004.

NASSER L., SOUZA, G. A.; TORRACA, M. A. A. Mobilizações Didáticas para Aprendizagem de Conceito de Função. In: FONSECA, L. S. (Org.). **Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016, p.183-196.

OUVRIER-BUFFET, C. A Mathematical Experience Involving Defining Processes: in-action Definitions and Zero-Definitions. **Educational Studies in Mathematics**, n.76 (2), p. 165-182, 2011.

PIAGET, J. **Biologia e Conhecimento**. 2ª Ed. Vozes: Petrópolis, 1996.

REIS, F. S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de Professores- Pesquisadores e autores de Livros Didáticos**. 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

REZENDE, W. **O ensino de Cálculo: dificuldades de Natureza Epistemológicas**. 2003. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

ROONEY, A. **A História da Matemática – Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo – Editora: M. Books do Brasil, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, M. B. S. **Um Olhar para o Conceito de Limite: Constituição, Apresentação e Percepção de Professores e Alunos sobre o seu ensino e Aprendizado**. 2013. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SEGADAS-VIANNA, C. Obstáculos Referentes ao Desenvolvimento do Conceito de Função. In: FONSECA, L. S. (Org.). **Didática do Cálculo: Epistemologia, Ensino e Aprendizagem**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016, p. 112-121.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 6, n.1, p. 5-67, 1985.

SILVA, C. O. **Um Estudo Sobre a Noção de Limite de Progressões Geométricas Infinitas com Alunos de Ensino Médio**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

SINKIEWICZ G.I. On History of Epsilontics. **Antiquitates Mathematicae**, v. 10, n. 1, p. 183–204, 2016.

STEWART, J. **Cálculo Vol. 1**. São Paulo. Pioneira Thompson Learning, 2003.

SWINYARD, C. Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. **The Journal of Mathematical Behavior**. France, v.30, n. 2, p. 93-114, 2011.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**, ed. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 03-24.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, v.19, n.3, p. 353-373, 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS). **Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Matemática – Licenciatura**. Instituto de Matemática (INMA), Campo Grande, 2014.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS). **Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Matemática – Licenciatura**. Instituto de Matemática (INMA), Campo Grande, 2018.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v.1(v), p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. La théorie de Champs Conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, v.10, n.2.3, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Piaget Visité par la Didactique. **Intellectica**, n.33, p. 107-123, 2002.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. **Journals Human Development**, S. Karger AG, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. **Educar em Revista**, p. 15-27, 2011. Número especial.

VERGNAUD, G. Entrevista com Gérard Vergnaud. [Entrevista cedida a] Candy Marques Laurendon. **Revista do GEEMPA: 45 anos de Pesquisa Formação e Ação**, n. 11, p. 15-23, 2015.

VERGNAUD, G. Quais questões a teoria dos campos conceituais busca responder? In: LADIMA - I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. **Anais**. Bonito - Mato Grosso do Sul, 2016.

VERGNAUD, G.; PLAISANCE, E. **As Ciências da Educação**. São Paulo, ed. Loyola, 2003.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**, ed. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 65-81.

VOGADO, G. E. R.; JUCÁ, R. S.; MOTA, T. de B. Limite e Derivada: Uma análise da Produção dos Alunos. **Revista WEB-MAT**, vol. 1, n. 1, p. 61-75, 2014.

ZUCHI, I. **A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente papel e lápis ao ambiente computacional**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

## ANEXOS

**Anexo A – Questionário aplicado no Brasil**  
**Questionário**

Nome: \_\_\_\_\_

Documento de identificação: \_\_\_\_\_

1. Você entrou para o Curso de Matemática – Licenciatura pensando em:

( ) ser professor de Matemática; ( ) fazer concursos; ( ) ainda não sei;

( ) Outro, diga o

que: \_\_\_\_\_

2. Qual a sua idade? \_\_\_\_\_ Está em que semestre do curso? \_\_\_\_\_

3. Atualmente você está trabalhando?

( ) não ( ) sim, em

que? \_\_\_\_\_

4. Você gostaria de participar desta pesquisa que estamos desenvolvendo?

( ) Sim ( ) Não

5. Você está cursando a disciplina de Cálculo I (CI) pela primeira vez?

( ) sim ( ) não, já cursei \_\_\_\_\_ vezes.

6. Pensando nos conjuntos numéricos que você já estudou, responda:

i. Qual(is) você tem, ou teve, mais dificuldades em compreender e em trabalhar?

\_\_\_\_\_

ii. Cite operações com números reais em que você tem alguma dificuldade, como, por exemplo, em  $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

\_\_\_\_\_

iii. No conjunto dos números reais cite 3 números que estão no intervalo:

a)  $] -1, 20 ]$

b)  $] 0, 1 ]$

c)  $[ -2, 0 ]$

d)  $[ 0, \frac{2}{3} [$

e)  $[ -\frac{7}{8}, 0 ]$

f)  $] -\infty, 0 [$

7. Fale como está sendo para você fazer o Curso de Matemática – Licenciatura (suas expectativas, motivações, ou não, etc.).

---

---

---

---

---

8. Fique à vontade caso deseje fazer algum comentário.

---

---

---

---

---

## ANEXO B – Questionário aplicado na França

### Informations

*Compte tenu de la nécessité d'une collecte de données pour l'élaboration du projet de recherche au doctorat, sous la responsabilité de Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato doctorant du programme d'études supérieures dans l'enseignement des mathématiques au Brésil. En France sur la direction de la professeur Dr<sup>a</sup> Cécile Ouvrie-Buffet co-directrice de l'IREM de Reims (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et membre du laboratoire de recherche du CEREPE (EA 4692). Nous sollicitons que vous veuillez répondre à ce questionnaire. Nous vous remercions beaucoup.*

Nom de famille et prénom \_\_\_\_\_

### Questionnaire

1. Quel âge avez-vous ? \_\_\_\_\_

2. Outre l'étude, je :

( ) m'occupe de mes frères;

( ) travaille aussi ;

( ) reste avec ma famille ;

( ) pratique de le sport. Lequel ? \_\_\_\_\_

( ) fais d'autres choses \_\_\_\_\_

3. Après vos études dans le lycée, qu'allez-vous faire ? Et pourquoi ?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

4. Pensez à la compréhension de la notion de limite que vous avez étudié et en tant qu'étudiant, vous pensez :

( ) C'est facile pour moi, car :

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

( ) C'est difficile pour moi, car :

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

5. Lorsque vous avez des difficultés avec une notion mathématique, par exemple, la notion de limite, que faites-vous pour mieux comprendre ?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

6. Ecrivez ce que vous avez compris en ce qui concerne la notion intuitive de la limite d'une fonction.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

8. Ecrivez ce que vous avez compris en ce qui concerne la définition formelle de la limite d'une fonction.

---



---



---



---

9. Présentez des concepts que vous connaissez déjà et que sont utilisés dans l'apprentissage du concept de limite.

---



---

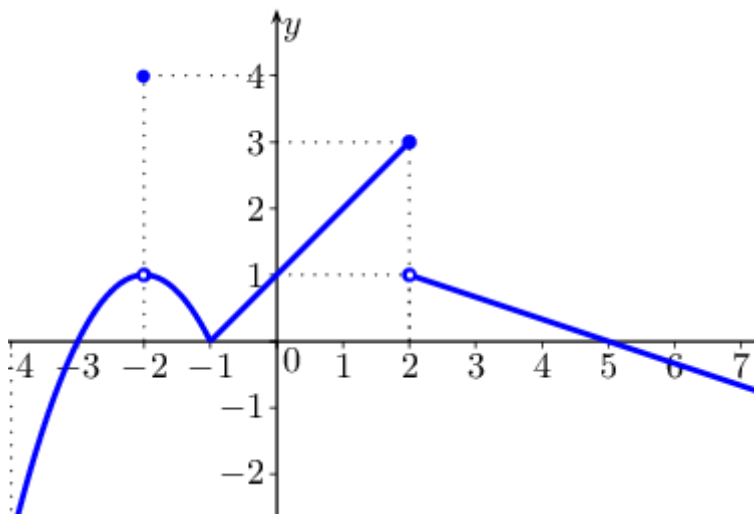


---



---

10. Regardez le graphique et déterminer les limites. Ensuite justifier chaque résultat trouvé.



a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

---



---



---

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

---



---



---

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

---



---



---

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

---



---



---

### Anexo C – Grade de análise

| GRILLE D'ANALYSE POUR ALLER CHEZ MARTHE OBSERVER<br>L'INTRODUCTION DE LIMITE DE FONCTION EN TERMINALE (dernière année du lycée)              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ____/____/2017 de ____ : ____ à ____ : ____                                                                                                  |
| <b>Différents moments de travail chez Marthe</b>                                                                                             |
| <b>1° Rappels</b>                                                                                                                            |
| De quand (séance précédente, l'année précédente) ?                                                                                           |
| Sur quoi (quels concepts) ?                                                                                                                  |
| Comment (dessin, interrogation orale, représentations (géométrique, algébrique, graphique, fonctionnelle), définitions, Propriétés) ?        |
| Matériel utilisé (calculatrice, ordinateur ...) ?                                                                                            |
| Quels types de problèmes ? (modélisation à faire ou pas)                                                                                     |
| Quels concepts connexes (nombres réels, autres concepts imbriqués du champ conceptuel) ? et comment sont-ils représentés et évoqués ?        |
| <b>2° Activité d'introduction</b>                                                                                                            |
| Caractéristiques ? Enoncés ?                                                                                                                 |
| Sur quoi (quels concepts) ?                                                                                                                  |
| Matériel utilisé (calculatrice, ordinateur,...) ?                                                                                            |
| Comment (dessin, interrogation orale, représentations (géométrique, algébrique, graphique, fonctionnelle), définitions, propriétés) ?        |
| Quels types de problèmes ?                                                                                                                   |
| Quels concepts connexes (nombres réels, <u>autres concepts imbriqués</u> du champ conceptuel) ? et comment sont-ils représentés et évoqués ? |
| <b>3° Quelles institutionnalisations</b>                                                                                                     |
| Dessin ? représentations ?                                                                                                                   |
| Définition ? propriété ?                                                                                                                     |
| Procédure ?                                                                                                                                  |
| <b>4° Réinvestissement</b>                                                                                                                   |

## ANEXO D – Atividades aplicadas no Brasil

### SEQUÊNCIA DIDÁTICA

#### Atividades sobre funções

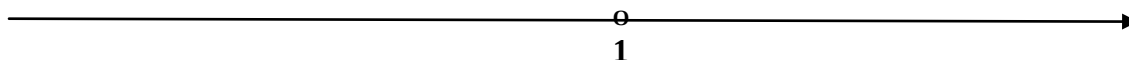
1<sub>1</sub>) Encontre valores para a função  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$  quando  $x$  assume valores próximos de 1 e preencha as tabelas a seguir.

| $x < 1$ | $f(x)$ |
|---------|--------|
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |

| $x > 1$ | $f(x)$ |
|---------|--------|
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |

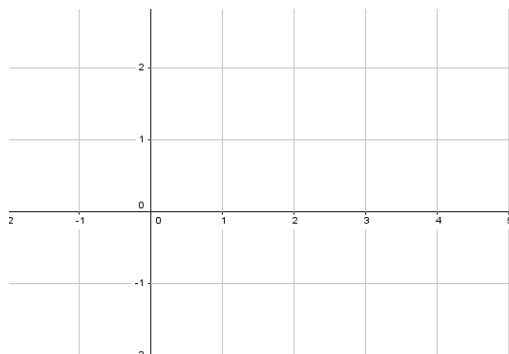
Após escolha dos números para preenchimento da tabela e considerando a função que estamos trabalhando, responda as questões:

- a) Represente na reta numérica todos os números que você escolheu, em seguida, escreva este conjunto na forma de intervalo.



- b) Tem outros números entre:
- (i) Os dois maiores números que você escolheu para valores de  $x < 1$ ? Caso sim apresente três números, no caso de não existir apresente uma justificativa.
  - (ii) Os dois menores números que você escolheu para valores de  $x > 1$ ? Caso sim apresente três números, no caso de não existir apresente uma justificativa.
- c) Quantos números você acha que tem entre esses dois números, pensando no item (i)? Escreva o que isso quer dizer para você.
- d) Qual é o número que você escolheria mais próximo de 1, diferente do que está na sua tabela, sendo ele maior do que 1?
- e) Você consegue listar facilmente 10 valores entre o número 1 e o valor que você escolheu na tabela mais próximo de 1, sendo ele menor do que 1? Justifique sua resposta e, caso ela tenha sido sim, encontre 3 números. Em seguida, discuta com seu colega a sua resposta e veja se vocês obtiveram respostas semelhantes ou não.
- f) Analise os valores da tabela e diga o que acontece com os valores da função  $f(x)$  quando tomamos valores bem próximos de 1, seja por valores maiores do que 1 ou menores do que 1.

- g) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ . O que seria possível observar no gráfico, nos valores que a função assume, quando os valores de  $x$  ficam próximos do ponto 1?



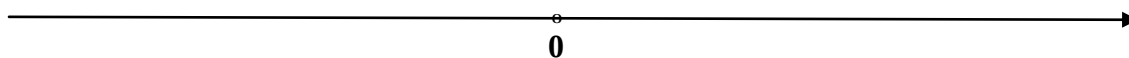
- 1<sub>2</sub>) Encontre valores para a função  $f(x) = (x + 1)$  quando  $x$  assume valores próximos de 0 e preencha as tabelas a seguir.

| $x < 0$ | $f(x)$ |
|---------|--------|
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |

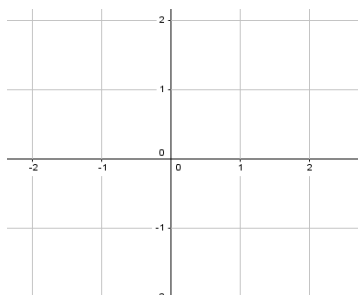
| $x > 0$ | $f(x)$ |
|---------|--------|
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |
|         |        |

Após escolha dos números para preenchimento da tabela e considerando a função que estamos trabalhando, responda as questões:

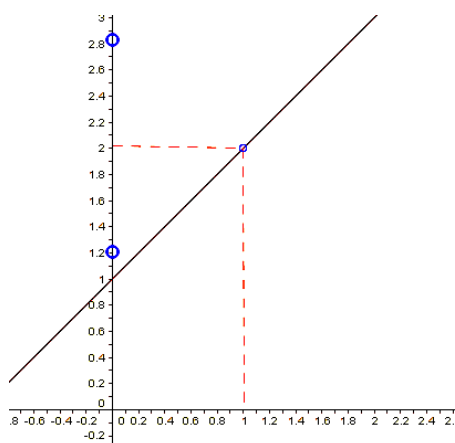
- Represente na reta numérica todos os números que você escolheu, em seguida, escreva este conjunto na forma de intervalo.
- intervalo.



- Olhando para a representação geométrica, escolha um intervalo mais próximo de zero, tanto para valores  $x < 0$  como também  $x > 0$  que satisfaça a função dada.
- Esboce o gráfico da  $f(x) = (x + 1)$  e encontre no eixo dos  $y$  o intervalo que corresponde ao conjunto dos números do(s) intervalo(s) encontrado(s) no item (b) e responda:
  - Qual valor que a função assume próximo de  $x = 0$ , tanto por valores  $x > 0$  como também  $x < 0$ .
  - Esse é um bom método para se descobrir o valor que uma função tem próximo de um ponto? Justifique sua resposta.



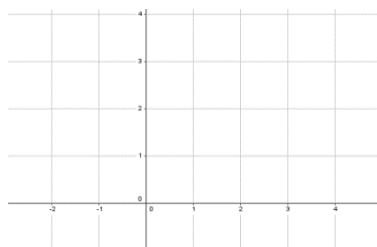
13) Observe, em seguida, a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ , podemos verificar que quando  $x$  se aproxima de 1, tanto por valores maiores do que 1 como por valores menores, a função  $f(x)$  se torna próxima de 2. Se tomarmos valores próximos de 2, no caso considerando valores da função nos conjuntos  $]1,2; 2[ \cup ]2; 2,8[$ , ou seja  $1,2 < f(x) < 2,8$ , teremos a situação representada no eixo  $y$ , conforme em seguida.



- Cite alguns valores de  $x$  em que a função fica no conjunto  $]1,2; 2[ \cup ]2; 2,8[$ . Descreva como você encontrou estes valores.
- Podemos tomar  $x = 1$ ? Justifique sua resposta.
- Escolha alguns valores para  $x$  compreendidos entre dois números que você encontrou no item (a).
- Escreva o conjunto de valores de  $x$  para que os valores da função  $f(x)$  fiquem compreendidos no intervalo  $1,2 < f(x) < 2,8$ . Em seguida, faça a representação geométrica deste conjunto.
- Descreva com suas palavras como encontrou o conjunto no item (d).

**1ª Situação: limite de uma função em um ponto**

2<sub>1</sub>) Esboce a representação gráfica da função  $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \neq 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ , em seguida responda as questões:



- Encontre o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e explique como fez para determinar este valor.
  - Calcular o valor  $f(x)$  para  $x=1$ .
  - Observando os itens (a) e (b) o que você diria sobre o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  e justifique sua resposta.
  - Considere os conjuntos de valores para  $x$  em  $[0; 1[ \cup ]1; 2]$  e determine o conjunto correspondente no eixo  $y$  para os valores de  $f(x)$ .
- 2<sub>2</sub>) Considere o  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$  e suponha que encontramos o valor deste limite investigando os intervalos do eixo dos  $y$  próximos de 2, mas agora escolhemos o “tamanho” desta proximidade, no caso com amplitude 0,5 que vamos chamar de épsilon ( $\varepsilon$ ), ou seja,  $\varepsilon = 0,5$ . Assim, estamos olhando os valores da função no eixo  $y$  em que  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ , ou de outro modo  $1,5 < f(x) < 2,5$

- Encontre valores no eixo  $x$  que correspondam exatamente aos valores da função dada acima com a amplitude  $\varepsilon = 0,5$  e explique como você fez para encontrá-los.
- Escreva a resposta encontrada no item (a) na forma de desigualdade e veja se consegue determinar uma amplitude para o intervalo encontrado e denomine de  $\delta$  (delta).
- Pensando agora que estamos interessados em escolher valores para  $x$ , tal que todo  $f(x)$  correspondente fique entre  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ , considerado o  $\varepsilon$  dado, poderíamos ter outros valores para  $\delta$ ? Justifique sua resposta.
- Somando -2 em todos os membros das desigualdades  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$  obtemos  $-\varepsilon < f(x) - 2 < \varepsilon$  e escrevendo na forma de módulo, temos  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ . Escreva na forma de módulo a desigualdade encontrada no item (b).
- Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  destacando os intervalos das desigualdades encontradas no item (b) e também  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$ .

2<sub>3</sub>) Vamos retomar a questão da primeira sessão em que trabalhamos com a  $f(x) = x + 1$ , mas agora discutindo o  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$ .

- Encontre o limite de maneira intuitiva.

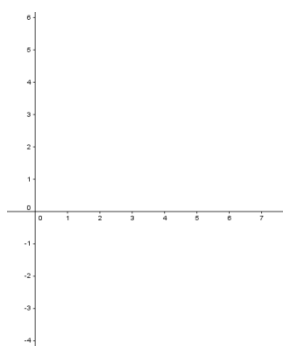
- b) Dado um  $\varepsilon = 0,3$ , encontre um  $\delta > 0$  tal que toda vez que  $2 - \varepsilon < f(x) < 2 + \varepsilon$  teremos também que  $1 - \delta < f(x) < 1 + \delta$ .
- c) Explique com suas palavras como fez para encontrar o  $\delta$  e se ele é único.

3<sub>1</sub>) Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$  pela noção intuitiva, confira se o valor encontrado para o limite pode ser verificado pela definição formal e responda os itens em seguida.

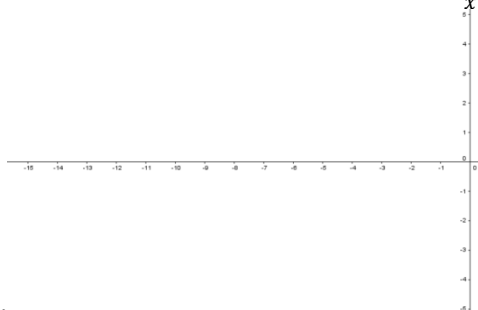
- a) Relacione as desigualdades encontradas, ou os módulos, da definição por épsilon e delta com a definição intuitiva de limite e justifique como fez estas relações.
- b) Faça a representação gráfica da função dada com os intervalos encontrados.
- c) Explique o limite da função com suas palavras, levando em consideração os itens (a) e (b), utilizando tanto a definição formal, como a intuitiva.

## 2ª Situação: limites infinitos e no infinito intuitivamente

- 1) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  assume valores próximos de zero. Em seguida responda os itens abaixo:
- a) Explique o que acontece com os valores da função quando  $x$  assume valores próximos de zero:
- para valores de  $x > 0$ ?
  - para valores de  $x < 0$ ?
- b) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $]0, 2]$ .



- c) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  para os pontos do domínio no



intervalo  $[-2, 0[$ .

- d) O que você pode dizer sobre o limite da função quando  $x$  tende a zero

- 2) Investigue os limites da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  nos casos:

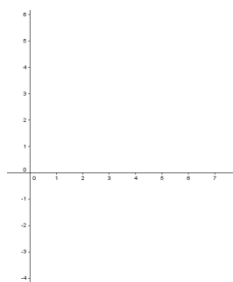
a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

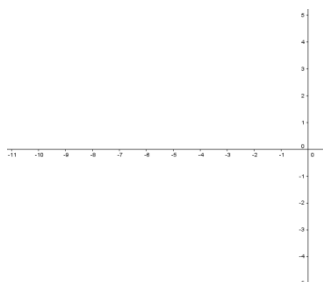
- 3) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  assume valores positivos cada vez maiores, ou seja, quando  $x$  cresce sem limite. O que acontece com os valores da função? Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $[1, +\infty[$ .



- a. Explique o que acontece com os valores da função quando  $x$  assume valores próximos de zero:
- para valores de  $x > 0$ ?
  - para valores de  $x < 0$ ?
- b. Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $]0, 2]$ .



- c. Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  para os pontos do domínio no intervalo  $[-2, 0[$ .



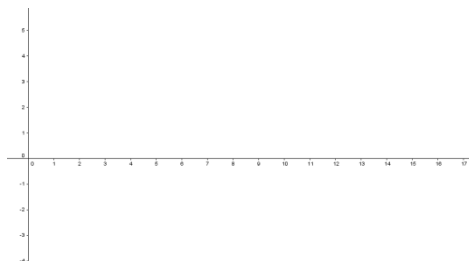
- 9) O que podemos concluir sobre os limites da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  nos casos:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2+x}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{x}$

- 10) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  assume valores positivos cada vez maiores, ou seja, quando  $x$  cresce para  $+\infty$ . Complete o quadro e diga o que acontece com os valores da função. Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $[1, +\infty[$ .

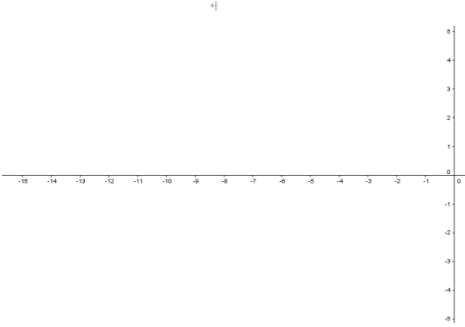
| X               | 1 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|-----------------|---|----|-----|------|-------|--------|---------|
| $\frac{2+x}{x}$ |   |    |     |      |       |        |         |



- 11) Investigue o que acontece com a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  quando  $x$  assume valores negativos cada vez menores, ou seja, quando  $x$  cresce para  $-\infty$ . Complete o quadro e

diga o que acontece com os valores da função. Em seguida, faça a representação gráfica da função para o intervalo do domínio em  $]-\infty, -1]$ .

|                 |          |         |        |       |      |     |    |
|-----------------|----------|---------|--------|-------|------|-----|----|
| X               | -1000000 | -100000 | -10000 | -1000 | -100 | -10 | -1 |
| $\frac{2+x}{x}$ |          |         |        |       |      |     |    |



12) O que podemos concluir sobre o limite da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  nos casos:

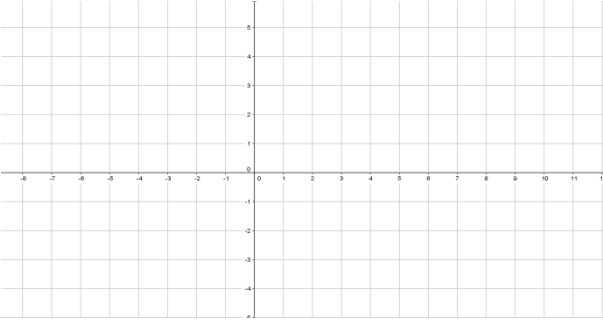
a.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+x}{x}$

b)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+x}{x}$

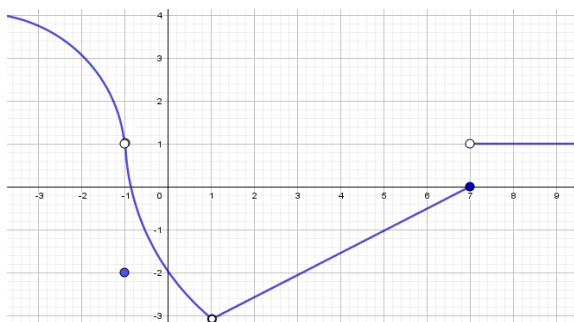
13) Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$  utilizando e destacando, no gráfico, os limites encontrados nas atividades (08) e (10).



## ANEXO E – Roteiro da entrevista realizada na França

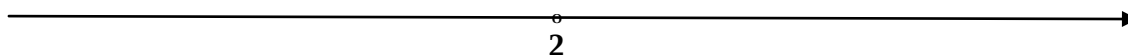
### Questões

1. Encontre o limite  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x}$  ?
  - Para o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  dessa mesma função  $f(x) = \frac{2}{x}$ , você faz do mesmo modo?
  - Agora encontre o limite  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x}$ .
  - Para o limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}$ , você faz do mesmo modo?
2. Encontre o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$ .
  - Faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ .
3. Determine o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  para a função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ .
  - Agora faça a representação gráfica da função  $f(x) = \frac{2+x}{x}$ .
4. Encontre os limites de função na representação gráfica, conforme solicitado abaixo. Em seguida, explique como você identificou.



- |                                          |                                     |
|------------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ | d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$       | e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$  |
| c) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) =$       |                                     |

5. Selecione dois pontos sobre o segmento de reta representado abaixo, sendo eles bem próximos do ponto 2, um  $x_1 < 2$  e outro  $x_2 > 2$  ( $x_1$  inferior a 2 e  $x_2$  superior a 2).



6. O que é o limite de uma função?