UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CLEIDE RIBEIRO MOTA ARINOS

UM ESTUDO DE POTENCIALIDADES DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM DE ÁREAS DE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS POR ALUNOS DO QUINTO E SEXTO ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

CAMPO GRANDE – MS

2018

CLEIDE RIBEIRO MOTA ARINOS

UM ESTUDO DE POTENCIALIDADES DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM DE ÁREAS DE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS POR ALUNOS DO QUINTO E SEXTO ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

CAMPO GRANDE – MS

2018

CLEIDE RIBEIRO MOTA ARINOS

UM ESTUDO DA POTENCIALIDADE DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM DE ÁREAS DE TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS POR ALUNOS DO QUINTO E SEXTO ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Grande – MS, 16 de abril de 2018.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

____
Profª. Drª. Edilene Simões Costa dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

____
Prof. Dr. Antônio Sales
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS (Membro externo)

____
Prof. Dr. Luiz Carlos Pais
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS (Suplente)

“Bendito seja o Senhor, minha rocha, que adestra minhas mãos para a guerra, meus dedos para as batalhas!” (SALMOS 144:1).

Fonte: Página do dreamstime da internet[1].

[1] Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/foto-de-stock-mulher-adiciona-rocha-ao-monte-de-pedras-sob-o-c%C3%A9u-enchido-sol-image20498550 > Acesso em fev. de 2018.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer ao meu Deus que sempre foi muito bom e generoso para comigo, abrindo portas e caminhos para que eu pudesse trilhar. Alguns deles estreitos, com muitas pedras e entraves e, outros mais verdejantes e floridos. Em muitos desses dias, parafraseando Salmos (55: 6-8), desejei ter asas de pomba para poder voar para lugares tranquilos, talvez, pernoitar no deserto, apressando-me em fugir da fúria da tempestade e do vento da vida. Mas, este MESMO Deus foi me lapidando, ensinando-me a ter paciência, falar, calar, escutar, semear, colher, sorrir, chorar, espalhar, ajuntar, a estudar... Enfim, orientando-me de que para todas as coisas há um tempo (ECLESIASTES 3: 1-8). E a acreditar pela fé que “Os que semeiam em lágrimas segarão com alegria” (SALMOS 126: 5).

Ao meu esposo que sempre me apoiou e confiou em mim. Que soube ser paciente e amoroso, compreendendo as minhas ausências e limitações. Por ser minha âncora, mantendo-me firme aos meus objetivos, sendo minha torre forte, minha proteção e o meu lugar seguro, com seu ombro amigo, seu abraço forte, seu suspirar em meus ouvidos dizendo: *“Acalme-se, guarde seu coração, confie, vai dar tudo certo eu te amo minha flor”*.

As minhas amadas filhas, Isabel e Ester, que têm me ensinado o verdadeiro sentido da vida, de amar sem querer nada em troca, de confiar, de viver cada momento e de sentir o cuidado de Deus em cada detalhe. Ester fruto deste mestrado *(rsrsrs)*!

Ao meu orientador, pelas orientações, pelas leituras feitas nas madrugadas (recebi muitos e-mails neste horário), por acreditar em mim. Por me escolher!

À sua esposa, professora Iraci, por cuidar dele e compreender a sua ausência nestes momentos. E a Deus que os guardou nestes dias, concedendo-lhes saúde abundante.

Aos professores: Antônio Sales, Edilene Simões Costa dos Santos e Luiz Carlos Pais por contribuírem significativamente para a versão final deste trabalho.

Aos colegas de turma do mestrado, dentre eles, Tatiane e Jéssica, pelas contribuições.

Ao grupo DDMat pelo tempo dedicado ao meu trabalho, por meio de discussões e sugestões.

Aos meus pais! E ao meu sogro por cuidar da minha filha e ajudar na construção dos materiais usados na experimentação deste trabalho.

À escola e às professoras: Gizele, Keyla e Madalena, que colaboraram para que pudéssemos desenvolver este trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar aprendizagens por alunos do quinto e sexto ano do Ensino Fundamental diante de situações envolvendo representações semióticas diversas na abordagem de áreas de triângulos e quadriláteros. Este estudo direcionado para a pesquisa em Educação Matemática analisa a produção dos alunos numa sequência de atividades na qual se variou as representações e os registros para investigar o cálculo de áreas. Atividades estas aplicadas em oito sessões de aproximadamente duas horas cada no contra turno escolar a alunos do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental de uma escola privada de Campo Grande/MS. Nas atividades foram exploradas figuras geométricas por meio de tratamentos figurais, como a reconfiguração e a desconstrução dimensional, entre outros. Estas operações podem facilitar a elaboração de estratégias para os cálculos de áreas de figuras planas, bem como validá-las. Os principais registros mobilizados foram: figural, numérico e língua materna. Sobre as análises feitas nos protocolos, áudios e vídeos, percebe-se que o uso de diferentes representações e registros no cálculo de áreas de figuras planas pode favorecer o aparecimento de maneiras distintas de solucioná-las, contribuindo assim para a aprendizagem e autonomia em geometria, oportunizando ao aluno uma nova forma de pensar e raciocinar. A pesquisa fundamentou-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval e em dois elementos teóricos desse autor que tratam dos olhares e apreensões para a aprendizagem em geometria. No que concerne à metodologia**,** esta pesquisa foi conduzida pela Engenharia Didática proposta por Michele Artigue.

Palavras-chave: Tratamentos figurais. Áreas. Registros de Representação Semiótica. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The aim of this research is to investigate learning process by students of the fifth and sixth year of Elementary School in front of situations involving diverse semiotic representations in the approach of areas of triangles and quadrilaterals. This study directed to the research in Mathematical Education analyzes the production of the students in a sequence of activities in has varied the representations and the registers to investigate the calculation of areas. These activities were applied in eight sessions of approximately two hours each in the scholar counter shift to students of the 5th and 6th grade of Elementary School of a private school in Campo Grande/MS. In activities, geometric figures were explored by means of figurative treatments, such as reconfiguration and dimensional deconstruction, among others. These operations can facilitate the preparation of strategies for the calculations of areas of flat figures, as well as validate them. The main registers mobilized were: figural, numerical and mother tongue. About the analyzes made in the protocols, áudios na videos of different representations and registers in the calculation of areas of flat figures can favor the emergence of different ways of solving them, contributing to learning and autonomy in geometry, giving the student a new way of thinking. The research was based on Duval's Theory of Register of Semiotic Representations and on two theoretical elements of this author dealing with the looks and apprehensions for learning in geometry. Concerning to methodology, this research was conducted by Didactic Engineering proposed by Michele Artigue.

Keywords: Figurative treatments. Areas. Semiotics Representation of Records. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELA

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar aprendizagens de alunos diante de atividades envolvendo diferentes representações semióticas para explorar áreas de triângulos e quadriláteros, tema que tem sido estudado por diversos pesquisadores. Nesta pesquisa apresentamos alguns destes resultados, porém ainda há muitos aspectos a serem discutidos sobre a aprendizagem deste conceito geométrico. Por conta disso é que nos dedicamos, inicialmente, à leitura de pesquisas que versam sobre este tema, bem como o seu desenvolvimento no Ensino Fundamental e, considerações sobre o seu ensino, no que concerne às abordagens de livros didáticos e dificuldades que professores e/ou alunos têm enfrentado nos diferentes níveis de ensino. Com esse estudo visamos identificar possibilidades de superação de dificuldades para que ocorra a aprendizagem.

Com base nessas leituras, delineamos nossa investigação na tentativa de articular o conceito de área, que é abstrato, mas acreditamos que com as representações semióticas ele poderá se tornar acessível. Definimos então, como objeto deste trabalho *Possibilidades de contribuições das representações semióticas quando variamos os registros e as representações para a aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros.*

Para responder essa questão da pesquisa, elaboramos uma sequência de atividades nos moldes da Engenharia Didática, descrita por Artigue (1996), nos pautando na Teoria dos Registros de representação Semiótica (DUVAL, 2011, 2012) e nas apreensões e olhares em Geometria (DUVAL, 2005; 2011; 2012b). Essa sequência de atividades foi aplicada em uma escola privada de Campo Grande – MS, a um grupo constituído por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental no contraturno escolar. Foram realizadas 8 sessões, em um período de 3 meses, o que nos permitiu coletar os dados durante as atividades desenvolvidas visando superações de dificuldades e aprendizagens referente ao conceito de área. Participaram dessas sessões, 12 alunos em média, que foram divididos em duplas, das quais obtivemos dados provenientes de gravações em áudio e vídeo e também por meio da coleta de representações realizadas com material concreto de manipulação e suas produções escritas.

Nesse caminhar, dividimos o nosso trabalho em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos a contextualização do nosso objeto de pesquisa trazendo investigações que contribuíram para a sua escolha e definição dos nossos objetivos. No segundo capítulo, apresentamos alguns elementos da nossa fundamentação teórica, possibilidades de contribuições desta para a aprendizagem geométrica do conceito de área e como estamos articulando esses quadros teóricos para a aprendizagem e superação de dificuldades. No terceiro capítulo, trazemos algumas demonstrações de fórmulas para o cálculo de áreas, por ser uma representação importante em nossa pesquisa, pois permitem articular o abstrato com o concreto. Nele analisamos também, como as apostilas adotadas pela escola onde realizamos a experimentação abordam este conceito. No quarto capítulo apresentamos as nossas variáveis didáticas, detalhando nossas escolhas metodológicas e os elementos considerados importantes para a elaboração e desenvolvimento experimental das atividades. No quinto capítulo apresentamos a construção, aplicação e análise das atividades de cada sessão. Na parte final desta dissertação apresentamos as considerações e perspectivas, trazendo alguns resultados obtidos e sugestões para novas pesquisas.

CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZAÇÃO DO OBJETO DA PESQUISA

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos da trajetória escolar, acadêmica e profissional da pesquisadora deste trabalho, bem como suas aproximações e relações com o ensino e aprendizagem da geometria, principalmente, no Ensino Fundamental, bem como discussões referentes a aspectos da geometria e considerações sobre o seu ensino nesta etapa de escolaridade, abordando a sua pouca valorização e a importância do trabalho geométrico na sala de aula.

Na parte final do capítulo serão apresentados os objetivos desta pesquisa pautados nestas leituras e em pesquisas próximas ao nosso objeto de estudo.

1.1 Quando tudo começou

Inicio o texto com a frase do Nelson Mandela, “A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo”, pois acreditava, desde criança, que era somente por meio da educação que poderia mudar o meu mundo.

Nasci e cresci no meio rural. Fiz minha primeira série numa pequena sala multisseriada, distante 1 km de casa. Da segunda à oitava série (atualmente 3º ao 9º ano) pegava ônibus para ir à escola, distante 15 km de casa e assistia 60% das aulas devido ao horário do ônibus (9:40h e 15:30h). Em casa tinha inúmeras obrigações e assim que as terminava ia ler os livros didáticos, à noite lia à luz de vela e lampião. Para fazer o ensino médio tive que ir morar na cidade. Estudava diariamente, lia muito e também tomava emprestado alguns livros dos professores. Foi assim que li muitos clássicos da literatura.

Quando terminei os estudos fiz o vestibular para Matemática, minha disciplina favorita e, para minha surpresa, fui aprovada. Inicio com um relato de minha vida acadêmica, que apresento neste primeiro capítulo, contando um pouco da minha trajetória acadêmica e profissional. Busco mostrar também, como o contato com a universidade, com o projeto de extensão e com o grupo de pesquisa influenciaram as escolhas deste estudo. Posteriormente, esclareço como todo esse percurso contribuiu para elaborar os objetivos que potencializam este estudo.

1.2 Minha trajetória acadêmica e profissional

Ingressei na vida acadêmica no ano de 2001, no curso de Matemática– Licenciatura Plena da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, *campus* de Campo Grande/MS. E como estava acostumada a ter bons rendimentos achei que daria conta, mas, no primeiro dia de aula ouvi da professora de Cálculo I que seu curso se resumiria a três conteúdos: limite, derivada e integral. Fiquei assustadíssima, não sabia nada desses conteúdos e nunca tinha ouvido falar deles.

Estudei bastante para a primeira semana de prova e apesar disso consegui somente uma nota azul. Chorei, chorei muito, achei que não conseguiria. Foi então, que eu e mais três alunas resolvemos formar um grupo de estudos. Duas delas eram irmãs gêmeas e inseparáveis. Em um período assistíamos às aulas e no outro estudávamos, permanecendo o dia todo na universidade.

Logo no primeiro ano, começamos a participar de um projeto de extensão com alguns professores do INMA - Instituto de Matemática, entre eles: Heloisa Laura Queiroz Gonçalves da Costa, João Carlos da Mota Ferreira, José Luiz Magalhães de Freitas, Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli, Marilena Bittar e Maura Cristina Candolo Marques. Reuníamo-nos e montávamos oficinas para ministrar aos acadêmicos do curso de Pedagogia da própria instituição, assim como a professores e alunos da rede municipal e privada da cidade. O LEMA (Laboratório de Estudo de Matemática) era o lugar para estudar e confeccionar materiais para essas oficinas com temas variados como: área e perímetro, frações, trigonometria, ângulos, entre outros. Aproveitávamos esse local também para os nossos estudos diários do curso de graduação. No projeto realizamos viagens intermunicipais para ministrar oficinas em outras unidades da UFMS, entre elas a do *campus* de Aquidauana e de Dourados.

As dúvidas que tínhamos acerca das enormes listas de exercícios das disciplinas obrigatórias, eram sanadas quando subíamos juntas as escadas do INMA e pedíamos ajuda ao professor de cada disciplina. Às vezes, na ausência do professor, outros nos ajudavam. Éramos conhecidas. Essa rotina durou toda a graduação, íamos aprendendo o ofício de ser professora no projeto com o contato com os alunos e professores e na elaboração dos materiais para as oficinas.

Foi um tempo de aprendizado, dediquei-me totalmente aos estudos durante todo o período de 2001 a 2004. Quando terminei fui atuar como professora no Ensino Fundamental, pensando sempre em como trabalhar em sala de aula os conteúdos do currículo nos moldes das oficinas. Trabalhava com materiais manipuláveis, articulando o concreto ao abstrato, mostrando aos alunos diversas formas de resolver o mesmo problema. Ouvia de colegas "*onde você aprendeu isso?" "Eu não aprendi assim"*. Respondia que o projeto tinha contribuído muito com a minha prática na sala de aula.

Meu esposo sempre insistia, "*Por que você não vai fazer mestrado em Educação Matemática? Eu acho que tem tudo a ver com você".* Até que em 2015 resolvi fazer a prova pela primeira vez, não conhecia o programa e nenhum grupo de pesquisa. Pensei, se não for aprovada vou me matricular como aluna especial. Para meu espanto, fui aprovada e muito bem. A minha vivência com a sala de aula, a dedicação exclusiva ao curso de graduação e ao projeto e o hábito de ler e escrever contribuíram significativamente para isso.

Ao ingressar no mestrado comecei a fazer parte do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat[2]), liderado pela professora Marilena Bittar. O grupo tem como principal objetivo discutir teorias da Didática da Matemática (Didática Francesa) e desenvolver atividades de pesquisa e extensão. Nesse grupo, os principais modelos teóricos são: A Teoria das Situações Didática, os Registros de Representação Semiótica, a Teoria dos Campos Conceituais, a Engenharia Didática e a Teoria Antropológico do Didático.

No grupo, fui me aproximando de algumas das dissertações de mestrado produzidas (KRAKECKER, 2016; LIMA, 2015; QUEIROZ, 2010). Krakecker (2016) investigou ângulos de polígonos com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, Lima (2015) estudou problemas de combinatória com licenciandos de Matemática da própria instituição e Queiroz (2010) investigou funções com alunos do nono ano do Ensino Fundamental. Percebi que essas pesquisas tinham em comum, como foco principal, conteúdos matemáticos e experimentação com alunos.

Essas pesquisas e as teorias foram delineando o nosso[3] objeto de estudo: áreas de triângulos e quadriláteros. Resolvi pesquisar teoricamente muito do que eu fazia empiricamente na sala de aula como professora, utilizando muitos dos recursos que comecei a ter contato desde o projeto como: geoplano, tangram , malha quadriculada, material dourado, entre outros. No entanto, agora em busca de compreender melhor algumas dificuldades e entraves na aprendizagem desses conteúdos que vivenciava

---

[2] Cadastrado no Diretório de Grupos de Pesquisa do CNPq, certificado pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), *Site*: grupoddmat.pro.br
[3] Refere-se à mestranda e a seu orientador.

desde a graduação, sob o olhar de algumas pesquisas (FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; SANTANA, 2006; SILVA, 2016).

Ao realizar leituras relacionadas com esse objeto matemático, percebemos (meu orientador e eu) que alguns trabalhos indicavam dificuldades quanto à aprendizagem do conceito de área e isso nos direcionou ao desenvolvimento de uma pesquisa com alunos do quinto e sexto ano do Ensino Fundamental, por meio de diferentes representações, mudando os registros e explorando a produtividade heurística com figuras geométricas, principalmente as transformações $(2D \rightarrow 2D)$. Pesquisa esta inserida dentro de um contexto que trataremos a seguir.

1.3 A geometria no Ensino Fundamental

A geometria está presente na vida quotidiana das pessoas desde a tenra idade, quando começam a movimentarem-se e a ter contato com diversas formas geométricas. As competências geométricas como: localização, representação de objetos do mundo físico, identificação de deslocamentos e classificação de figuras geométricas, tendem a ficar mais elaboradas com o passar do tempo. A percepção das relações e propriedades entre essas formas permite compreender melhor o mundo em que vivemos e colabora, também, para o exercício de diversas profissões, onde o conhecimento geométrico é necessário, como nas áreas de engenharia, arquitetura, agrimensura, entre outras.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), documento que orienta o ensino escolar, os conteúdos matemáticos estão organizados em quatro blocos: números e operações, espaço e forma (no qual a geometria está inserida), grandezas e medidas (aborda, entre outros, as grandezas geométricas área e perímetro) e tratamento da informação. Nele é enfatizado o modo como à geometria vinha sendo tratada até o final da década de 1990, mostrando que ela tinha pouco destaque nas aulas de matemática, ocorrendo, muitas vezes, a confusão de seu ensino com o de grandezas. Esse documento justifica a importância de seu estudo, uma vez que a geometria permite desenvolver no aluno um pensamento característico, peculiar para que ele compreenda, represente e descreva, de modo organizado, o mundo no qual vive. Também pelo fato de que questões geométricas normalmente despertam o interesse dos alunos de forma espontânea e natural. Além de ser um campo propício para a elaboração de situações-problema que oportunizam a capacidade de desenvolver argumentos e a elaborar e estruturar demonstrações (BRASIL, 1998).

Na geometria, como nas outras áreas, um conceito sempre aparece vinculado a outros, e assim, os polígonos são definidos por meio de outros conceitos geométricos. Por exemplo: "o quadrado é o quadrilátero em que os quatro lados e os quatro ângulos são congruentes", "paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos", "trapézio é o quadrilátero que possui somente dois lados paralelos, as bases"; sendo, todas, definições de objetos abstratos, não pertencentes ao mundo físico. No entanto, podem ser feitas observações e medições quando representamos esses objetos em um material concreto (desenhado ou construído), sendo sempre por meio de medições aproximadas. Assim, olhar as grandezas geométricas geometricamente é mais abstrato do que quando elas são estudadas no campo específico das grandezas em geral (BRASIL, 1998).

As grandezas geométricas, entre elas a área de figuras planas, desde os primórdios estiveram relacionadas com o saber geométrico, razão pela qual elas são tratadas como parte do campo da geometria. No Brasil, as grandezas geométricas têm sido colocadas no campo das grandezas e medidas, seguindo recomendações curriculares nacionais e internacional, e não no campo da geometria (BRASIL, 1998). Para Bellemain e Lima (2010) um dos motivos para essa escolha "[...] reside na necessidade de maior atenção ao ensino do conceito de grandeza em geral, e não apenas das geométricas" (BELLEMAIN; LIMA, 2010, p. 138). Quando, por exemplo, se estuda área de figuras planas no campo das grandezas, sobressai o processo de medição, que envolve a escolha de unidades de medidas adequadas, a compreensão das relações entre elas e a utilização de instrumentos de medidas. Enquanto que num olhar exclusivamente geométrico esses processos não seriam considerados (BELLEMAIN e LIMA, 2010).

Nos PCN podemos verificar que o campo grandezas e medidas possibilita, também, que o aluno resolva situações-problema, "sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis" (BRASIL, 1998, p. 48).

E mais, permite que o aluno se comunique matematicamente, ou seja, que ele descreva, represente e apresente resultados precisos, com argumentos sobre suas conjecturas, por meio da linguagem oral e do estabelecimento de relações entre essa linguagem e de diversas representações matemáticas (BRASIL, 1998).

Contudo, para atingir o nível esperado de aprendizagem geométrica, é necessário, segundo diversos estudos (BRASIL, 1998, 2016; BELLEMAIN; LIMA, 2010), iniciar o ensino da geometria no Ensino Fundamental e Médio por meio de atividades específicas de acordo com o nível de escolaridade, as quais envolvam a manipulação de objetos concretos e, posteriormente, ir aprofundando os conceitos geométricos. Nesse processo estão envolvidos tanto aspectos práticos quanto teóricos, assim como questionamentos, experimentações, justificativas, verificações e provas.

Para Bellemain e Lima (2010), no estudo das grandezas geométricas é preciso valorizar as atividades de visualização e de manipulação dos objetos do mundo físico, como as representações de desenhos ou imagens. É por meio desses contatos que "os alunos podem descobrir e compreender melhor as propriedades dos objetos físicos e as relações que existem entre eles" (BELLEMAIN; LIMA, 2010, p. 173).

Recursos didáticos como malhas quadriculadas, livros, entre outros, têm um papel fundamental para compreender e utilizar noções matemáticas de acordo com a Base Nacional Curricular Comum[4] (BNCC), documento aprovado recentemente e sancionado. Porém, esses recursos precisam ser integrados a situações de modo que os alunos reflitam e sistematizem, iniciando, assim, um processo de formalização (BRASIL, 2016).

E nesse caminhar é imprescindível que os conceitos matemáticos relacionados aos objetos físicos e às representações sejam ensinados e aprendidos simultânea e progressivamente. Pois, estas nos propiciam modelos abstratos que são parte do conhecimento matemático sistematizado que deve ser adquirido no decorrer das várias fases de escolaridade (BELLEMAIN; LIMA 2010).

Outro ponto interessante é o de que as grandezas e medidas permitem conexões com os demais blocos de conteúdos matemáticos e com outras disciplinas escolares. Por tudo isso,

> O professor pode encontrar nas grandezas e medidas um campo fértil de aplicações da Matemática às práticas sociais e isso o ajudará a responder a inquietação legítima de nossos alunos quando nos questionam sobre o porquê desses conhecimentos matemáticos serem ensinados. Mas cabe à escola e ao docente resgatar e valorizar os conhecimentos que a criança traz de sua vivência extraescolar, enriquecê-los com outras experiências e conduzir o processo de sistematização progressiva desses conhecimentos (BELLEMAIN; LIMA, 2010, p. 172).

[4] A BNCC é um documento oficial do MEC, que é o referencial para a elaboração de propostas curriculares da Educação Básica (BRASIL, 2016).

Para Pais e Freitas (1999), não se deve reduzir a geometria no Ensino Fundamental, especificamente a geometria Euclidiana Plana, “a uma dimensão empírica e subjetiva, que induziria à ilusão da possibilidade de um ensino centrado somente no nível intuitivo e experimental” (PAIS; FREITAS, 1999, p. 8). Ou seja, quer no Ensino Fundamental ou Médio, o ensino da geometria, deve abranger o trabalho pedagógico e o processo de validação do conhecimento geométrico por parte dos alunos (PAIS; FREITAS, 1999).

Apesar dessas orientações, dentre elas as do Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), percebe-se uma negligência do conteúdo geométrico no currículo escolar no Ensino Fundamental, o que pode ser visto em Pavanello (1993, 2004), Pais e Freitas (1999) e Almouloud e Mello (2000). São vários os fatores que contribuem para que isso ocorra na sala de aula, como o despreparo dos professores para ensinar conteúdos geométricos e a sua abordagem nos livros didáticos, que muitas vezes ficam relegados aos últimos capítulos.

Percebemos que este cenário não mudou demasiadamente nos últimos anos. Para Pavanello (2004) muitos professores da educação básica não abordam geometria na sala de aula, porque não dominam o conteúdo nem o modo de desenvolvê-los com seus alunos. Muitos deles afirmaram em seus estudos que não ensinavam, nem parcialmente conteúdos geométricos na sala de aula, por falta de tempo, e muitos reservavam normalmente o último semestre para este conteúdo, o que mostra que “conscientemente ou não, a falta de tempo estava sendo usada como desculpa para a não realização do trabalho com geometria” (PAVANELLO, 2004, p. 2).

Diante disso, delinearemos na próxima seção algumas considerações sobre o ensino da geometria, especificamente, no campo Grandezas e Medidas[5]. Abordando alguns elemento/estudos que apontam o quadro da geometria no ensino brasileiro, entre eles: o desempenho dos alunos e como este conteúdo aparece nos livros didáticos.

1.4 Considerações sobre o ensino da geometria

Várias avaliações realizadas em nosso país mostram o desempenho insatisfatório dos alunos em questões relativas ao campo das grandezas geométricas. Fato esse que também é observado em outros países, apontando que ainda há um longo

[5] O conteúdo área de figuras planas está inserido neste campo no Ensino Fundamental (BRASIL, 1998).

caminho a ser percorrido até que consigamos compreender melhor os aspectos relacionados ao ensino desse campo no Ensino Fundamental (BELLEMAIN; LIMA, 2010).

Talvez, para Belemain e Lima (2010), o desempenho insatisfatório dos alunos no campo das grandezas e medidas, em diversos países, não esteja somente relacionado a algumas dificuldades quanto ao ensino e à aprendizagem, mas também devido à complexidade dos conceitos matemáticos envolvidos. Dentre eles, as grandezas geométricas que possuem um lugar de destaque no Ensino Fundamental.

Para Almouloud e Mello (2000) e Almouloud (2004), o baixo desempenho dos alunos em Matemática na educação básica, sobretudo em problemas de geometria, é uma das dificuldades que o ensino brasileiro enfrenta. E um dos fatores que contribuem com alguns alunos são os referentes aos conceitos e habilidades geométricas resultantes da prática e escolha didáticas que os professores fazem ao ensinarem a geometria (ALMOULOUD; MELLO, 2000).

Almouloud (2004) destaca que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) enfatizam a importância de resgatar o trabalho geométrico no Ensino Fundamental, porém “a maioria dos professores não sabe claramente o que fazer” (ALMOULOUD, 2004, p.1). Segundo esse autor grande parte dos professores que estão em exercício teve uma formação geométrica precária. E,

> [...] Além disso, os cursos de formação inicial de professores – tanto os cursos de magistério como os de licenciatura – continuam não dando conta de discutir suficientemente com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria. E, também as modalidades de formação continuada, posta em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido ainda, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria. (ALMOULOUD, 2004, p.1)

Isso também fica evidente no estudo de Pais e Freitas (1999), realizado com professores licenciados em Matemática ou em Ciências, no qual três fatores se destacaram: a tentativa de valorizar o ensino da geometria no Ensino Fundamental como conteúdo disciplinar importante para a formação intelectual do aluno, o reconhecimento de que seu ensino não tem sido desenvolvido de modo satisfatório e a percepção da relevância não é normalmente manifesta pelos professores na construção do conhecimento geométrico quanto aos procedimentos lógico-dedutivos.

Freitas (2011) ressalta os valores dos conhecimentos geométricos e a sua importância para os alunos, sobretudo no Ensino Fundamental, e lembra que o ensino da geometria ainda continua sendo muito problemático, mesmo após a divulgação dos PCN. Ainda “Percebe-se muita dúvida e ansiedade entre os professores sobre o que e como ensinar” (FREITAS, 2011, p. 2).

E com isso, normalmente a geometria é apresentada aos alunos de forma empírica, com pequenas abordagens teóricas, de maneira superficial e vaga, sem o aprofundamento devido e sem articulações com os outros conceitos. Sendo assim, a formação adquirida pelos alunos pode ser caracterizada como empirismo inoperante, o que ocasiona uma formação discente com dificuldades para pensar geometricamente, com dificuldades para perceber as relações, abstrair e justificar as propriedades geométricas (FREITAS, 2011).

Para Almouloud (2004), pesquisas mostram que praticamente todos os professores consideram a geometria importante e que ela merece um lugar de destaque tanto no Ensino Fundamental como no Médio, porém não há concordância quanto ao conteúdo ou à distribuição dele no currículo escolar. Isso significa que “os professores não podem esperar que seus alunos tenham acumulado previamente mais do que um conhecimento em Geometria fundado em experimentação” (ALMOULOUD, 2004, p. 2).

Para Lorenzato (1995), uma das causas da omissão geométrica na sala de aula “deve-se à exagerada importância que entre nós desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos” (p. 4).

E também ao fato de como esse conteúdo aparece no livro didático,

> Infelizmente em muitos deles a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Assim, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria Matemática, a Geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, tem recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula (LORENZATO, 1995, p. 4).

Estudos como o de Bellemain e Lima (2010), mostram que, após o abandono da geometria[6], os livros didáticos começaram a distribuir os conteúdos geométricos ao longo da obra, não os deixando apenas para os capítulos finais. Esses autores observam, por exemplo, que os conteúdos das grandezas e medidas “[...] estão mais articulados a outros conteúdos matemáticos e, quando tratados especificamente, isto é feito em capítulos distribuídos ao longo do livro didático, e não relegados a uma parte isolada de cada livro, em geral no fim.” (BELLEMAIN; LIMA, 2010, p. 169-170).

Contudo,

> Ainda há livros nos quais o estudo das grandezas e medidas aparece concentrado nos últimos capítulos da obra, e isso contribui muitas vezes, para que esses conteúdos não sejam estudados durante o ano letivo. Além do mais, vários livros apresentam exclusivamente as unidades padronizadas de medição de grandezas. Outros dedicam excessiva importância à conversão de unidades de medida. Em alguns casos, nos primeiros anos do Ensino Fundamental, é dada atenção precoce às fórmulas de cálculo de perímetro e de área de figuras planas (BELLEMAIN; LIMA, 2010, p. 170).

Pavanello (2004) lembra que recentemente a geometria tem tido mais atenção por parte de muitos professores e pesquisadores, porém ainda existem certas lacunas em seu ensino, como por exemplo a constatação de dificuldades em “utilizar qualquer tipo de representação geométrica para a visualização de conceitos matemáticos” em alunos de cursos superiores de matemática (PAVANELLO, 2004, p. 3).

E uma das razões para mudar esse quadro de ausência geométrica na sala de aula, deve-se ao fato de a Geometria exigir do aluno um modo específico de raciocínio e que,

> [..] sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensamento geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resoluções de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995, p. 5).

Por essa e outras razões que apontam para o resgate do trabalho geométrico na sala de aula é que na próxima seção delinearemos alguns procedimentos importantes para o ensino de áreas de figuras planas no Ensino Fundamental de acordo com pesquisas (FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; PESSOA, 2010; SANTANA, 2006;

---

[6] Retratada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

SILVA, 2016) e documentos oficiais (BRASIL, 1998, 2016; BELEMAIN; LIMA, 2010). Estudos e leitura indicam que pouca coisa mudou significativamente ao longo dos anos (LORENZATO, 1995; PAIS; FREITAS, 1999; PAVANELLO, 1993, 2004; ALMOULOUD; MELLO, 2000).

1.5 Áreas de figuras planas

No estudo de áreas de figuras planas alguns procedimentos devem ser trabalhados, por contribuírem com a aprendizagem geométrica, dentre eles: comparação e produção de superfícies, principalmente as sem medidas (BELLEMAIN; LIMA, 2010; FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; PESSOA, 2010; SILVA, 2016). Não indo diretamente às fórmulas algébricas de área, pois, de acordo com os PCN experiências têm mostrado que quando os alunos aprendem mecanicamente as fórmulas, eles as empregam, muitas vezes, de modo mecânico também, e, por conseguinte, obtêm resultados "[...] sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de as esquecerem rapidamente" (BRASIL, 1998, p. 131).

O trabalho com áreas deve ser pautado em procedimentos que oportunizem a compreensão das noções consideradas, por meio de processos de composição e decomposição de figuras que eles já saibam calcular as áreas (recortes e sobreposições de figuras), por contagem (ladrilhamento, papel quadriculado) ou por estimativas e aproximações (BRASIL, 1998).

Atividades que explorem composição e decomposição de figuras, com tangrans e ladrilhamentos, oportunizam ao aluno verificar que uma superfície pode ser recoberta por certas figuras, como triângulos, quadrados e retângulos. Assim como toda figura poligonal pode ser decomposta/composta em outras e em particular por triângulos, o que contribui para o cálculo de áreas (BRASIL, 1998).

Em nosso trabalho procuramos explorar o tangram nas seguintes situações: comparando as suas peças por sobreposição, decomposição, composição, reconfiguração[7] e ladrilhamento para identificar quais têm áreas equivalentes ou maior e/ou menor área; a partir da área da peça quadrada determinar a área das demais peças; determinar a área de cada peça sabendo a área do quadrado formado com todas elas; sabendo a área da peça quadrada formar figuras com determinadas áreas. Abordando

[7] A reconfiguração é um tipo de tratamento figural nas figuras geométricas. Esse procedimento consiste em decompor a figura de partida em subfiguras, reorganizá-las de modo a formar outra figura que seja possível calcular a sua área.

nesses procedimentos os registros: língua materna, figural e numérico, principalmente os tratamentos figurais nessas peças.

Esses procedimentos de composição, decomposição, ladrilhamento e reconfiguração de figuras planas foram abordados no estudo de áreas de figuras planas de Facco (2003). Essa pesquisadora constatou um avanço nos alunos quanto ao cálculo de áreas, porque a partir desses procedimentos não confundiram área com superfície de uma figura. Assim como compreenderam que a área de uma figura é equivalente à área das subfiguras em que ela foi decomposta. Para essa pesquisadora, esses procedimentos tanto facilitam o processo de aprendizagem do aluno quanto servem para subsidiar o professor em suas escolhas didáticas. Porém, deve-se “melhor capacitar o professor para trabalhar a reconfiguração de figuras por meio do processo de decomposição e composição de figuras, para garantir um bom aprendizado nos alunos” (FACCO, 2003, p. 144).

O ladrilhamento foi abordado no estudo de Pessoa (2010) com a malha quadriculada. Constatou-se que esse recurso favorece o procedimento de contar quadradinhos e o uso das fórmulas algébricas por meio da decomposição e composição formando uma figura cuja fórmula de área seja conhecida. Em algumas atividades esses procedimentos foram combinados e em outros o aluno empregou primeiramente a decomposição e/ou composição para depois utilizar as fórmulas algébricas ou contar os quadradinhos.

O ladrilhamento será abordado, neste estudo, na malha quadriculada e/ou milimetrada, no geoplano[8] e no material dourado. Na malha quadriculada, num primeiro momento, deve-se determinar a área das figuras partindo da área do quadradinho por procedimentos de composição, decomposição, reconfiguração e mergulhamento[9]. Num segundo momento, deve-se determinar a área das figuras de dois modos diferentes, sem usar a fórmula algébrica e a usando. No geoplano se tem que construir figuras com determinadas áreas, representando-as na malha quadriculada. Esse recurso também serve para representar as figuras desenhadas no papel que se quer saber a área ou em outros dispositivos, favorecendo tratamentos figurais nele e a validação dos cálculos em

[8] É uma prancha de madeira ou plástico normalmente quadrangular com pregos ou metais dispostos na sua superfície em quadrados que permite a construção de polígonos com elásticos do tipo daqueles de amarrar dinheiro e o aprofundamento de conceitos geométricos como o de áreas de figuras planas.

[9] O mergulhamento proposto por Duval é outro tipo de tratamento figural que consiste em enquadrar a figura inicial em outra que a contenha e que permita o cálculo de sua área. Neste caso se procede a retirada da(s) área(s) da(s) subfigura(s) que excede(m) a área da figura inicial (obtidas por procedimentos de decomposição). Restando a área da figura solicitada.

registros distintos. No material dourado a partir da superfície do cubo que representa a unidade (que tem $1\ cm^2$ de área) algumas figuras com determinadas áreas devem ser construídas. O decímetro quadrado também foi abordado por meio da placa que representa a centena (cuja superfície possui $1\ dm^2 = 100\ cm^2$ de área). Na malha milimetrada se tem que construir figuras com certas áreas ou usá-la para representar outras figuras que se quer saber para validá-las usando representações diferentes. Enfim, procuramos nas sessões variar os registros e as representações para o conceito de área especificamente para triângulos e quadriláteros.

Para Santana (2006), esses recursos didáticos, tangram e malhas, são pouco explorados nos livros didáticos investigados no estudo de área nos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano). As peças do tangram, ao serem exploradas, possibilitam compreender que o triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo possuem a mesma área. Assim como permitem a ordenação das peças com relação as suas áreas e a compreensão de que o triângulo pequeno tem a metade da área do triângulo médio/ do paralelogramo/ do quadrado e o triângulo grande tem o dobro dessas áreas ou o quádruplo da área do triângulo pequeno.

Para Bellemain e Lima (2010), comparar áreas de figuras planas, sem realizar medições, contribui para a aprendizagem geométrica desse conceito. Eles exemplificam com questões do tipo: recortar duas figuras planas em um papel cartão e, a seguir, sobrepor uma figura na outra. Se uma couber no interior da outra a sua área é a menor entre as duas. Se coincidirem por sobreposição elas têm a mesma área. Ou, recortar no papel cartão duas figuras (a e b), reconfigurar por meio de recorte e colagem a figura a numa figura c e comparar com a b por superposição.

Esses procedimentos de sobreposição no estudo de Ferreira (2010) devem ser mais enfatizados na sala de aula, por facilitarem a compreensão do conceito de área, bem como atividades de comparação de superfícies, preferencialmente as sem medida, para o aluno não confundir a área de uma superfície com um número.

Em nosso trabalho utilizaremos recortes de triângulos e quadriláteros para determinar quais figuras têm a mesma área, com as dimensões em centímetros, podendo usar vários procedimentos para solucionar a atividade tais como: recorte e colagem; decomposição, composição e reconfiguração; medindo-as com a régua e empregando as fórmulas algébricas; representando-as no geoplano, malha quadriculada, malha milimetrada ou aplicando a fórmula algébrica diretamente no desenho delas representado na folha.

Esses procedimentos de comparação e produção de superfícies com e sem medidas no estudo de áreas de figuras planas devem ser privilegiados no Ensino Fundamental, para que os alunos não fiquem apegados somente a valores numéricos no trabalho geométrico. Santana (2006) em seu levantamento bibliográfico constatou que os erros mais frequentes ao se calcular a área de figuras planas são: usar as unidades de áreas sem fazer correspondências com as áreas das figuras, usar indevidamente a fórmula da área do retângulo para outras figuras planas e confundir as unidades de áreas com as áreas ou com as superfícies de figuras planas.

Quando medimos a área de uma superfície atribuímos um número a uma grandeza. É um processo complexo, pois envolve a escolha de uma unidade de medida pertinente e o uso de procedimentos adequados, apoiados, muitas vezes, em instrumentos como réguas, trenas, etc. (BELLEMAIN; LIMA, 2010). Essas medidas, normalmente, são efetuadas usando o sistema métrico decimal. E todas elas são acompanhadas de erros inevitavelmente, "pois o que se mede não é o valor verdadeiro de uma grandeza, mas sim um valor mais aproximado do qual, na maioria das vezes, se conhece a margem de erro" (BRASIL, 1998, p. 130).

É importante, nesses procedimentos de medidas entre áreas, dar a oportunidade de o aluno realizar essas medições de modo intuitivo, com experiências como construir um quadrado medindo $1\,m^2$ de área e perguntar quantos deles cabem em determinada superfície (BRASIL, 1998). E, posteriormente, verificar, com o auxílio de uma trena, essa(s) estimativa(s) nessa(s) superfície(s). Desenvolvendo assim a ideia do "tamanho" do metro quadrado, pois, é comum se deparar com alunos que já estudaram essas medidas e não desenvolveram essa noção; quando indagados quantas pessoas podem ficar em pé num espaço de $1\,m^2$, surgem normalmente respostas do tipo: "50, 300, 1000, etc" (BRASIL, 1998, p. 131). E isso dificulta a compreensão de vários conceitos e também o desenvolvimento de estimativas (BRASIL, 1998).

Normalmente usamos uma unidade relacionada com o usual metro quadrado quando medimos a área de uma superfície, que é uma unidade padrão de medida no Sistema Métrico Decimal, correspondendo à área de uma região quadrada que possui um metro de lado e abrevia-se por m^2. No entanto, podem-se usar unidades de medida maiores ou menores que o metro quadrado, utilizando a unidade de medida adequada para o todo a ser medido. Por exemplo, se for medir a superfície de um terreno de uma cidade, é conveniente é usar o m^2, se for à superfície de um estado brasileiro o km^2, de uma folha de papel o cm^2.

Em nosso estudo construímos o metro quadrado, quadriculando-o em decímetros quadrados. Após trabalhamos a decomposição deste, mostrando que todas as figuras obtidas após a decomposição e reconfiguração tinham um metro quadrado de área. Verificamos que nesse metro quadrado "cabem" cem placas de um decímetro quadrado do material dourado ou dez mil cubinhos ($1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2$). Estimamos as medidas das dimensões da sala de aula, calculando aproximadamente a área no chão e das paredes laterais. Posteriormente, usamos a trena para calcular essas áreas.

Realizar essas medições de modo intuitivo no ensino, empregando unidades próximas do cotidiano do aluno é importante de acordo com Bellemain e Lima (2010). Esses autores afirmam que atividades assim contribuem para o aspecto arbitrário das unidades de medidas e também para desenvolver no aluno a sua capacidade de realizar a adequação da unidade área a ser medida (BELLEMAIN; LIMA, 2010).

Recentemente a BNCC orienta que "a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmula de cálculo de área [...]" e "nem a aplicações numéricas imediatas [...]" (BRASIL, 2016, p. 228). E considera, como exemplo, a equivalência de áreas, procedimento praticado a milhares de anos por mesopotâmios e gregos, sem utilizar fórmulas, que permite "transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura")" (BRASIL, 2016, p. 228).

Enfim, o objetivo ao trabalhar com esses procedimentos e recursos no Ensino Fundamental é a compreensão do conceito de área por parte do aluno, levando-o à construção das fórmulas algébricas por meio do cálculo de áreas de figuras usuais e não por um processo mecânico que dá ênfase à memorização.

Detalharemos a seguir que, apesar dessas orientações e avanços nas últimas décadas, vários estudos indicam que os alunos ainda possuem muitas dificuldades geométricas nos dias atuais (FACCO, 2003; PESSOA, 2010; SILVA, 2016).

1.6 Pesquisas

Estudos como os de (FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; PESSOA, 2010; SILVA, 2016) têm sido realizados utilizando diferentes recursos com a finalidade de aprimorar o ensino e a aprendizagem do conceito de área, bem como para diagnosticar as dificuldades e erros dos alunos nas diferentes etapas da educação básica. Outras pesquisas como a de Santana (2006) mostram o uso insuficiente de diversos recursos considerados importantes para o trabalho de área de figuras planas nos livros didáticos como o tangram e o poliminós.

Pessoa (2010) realizou um estudo diagnóstico utilizando a malha quadriculada com 100 alunos do Ensino Fundamental de cinco escolas diferentes. Com cinco variáveis didáticas: preenchimento da figura, contorno da figura, medida da área considerando o quadradinho da malha como medida de área, tipo de figura e posição dos polígonos na malha. As figuras *hachuradas*, na malha, ora permitiram a visualização na malha interna a ela ora não (nenhuma pesquisa citada por ela contemplava até então tal abordagem).

Pessoa (2010) lembra que ao comparar duas superfícies para indicar qual delas “no plano ocupa mais lugar”, duas ideias fundamentais sobressaem: primeiro a construção de uma função-área, que relaciona cada superfície a um número e o procedimento de comparar superfícies planas resumem-se a comparar números; e a segunda consiste em escolher uma superfície unitária arbitrária a partir da qual a área restringe-se a averiguar quantas vezes a superfície unitária cabe na figura.

A malha quadriculada contribui para a aprendizagem do conceito de área, pois esse recurso permite procedimentos como o de comparar as unidades (usualmente o quadradinho) com a superfície a ser medida, verificando quantas vezes a unidade cabe nessa superfície. Bem como, a decomposição do quadradinho em dois triângulos congruentes, compondo com esses um triângulo ou um paralelogramo com áreas equivalentes (figura 1).

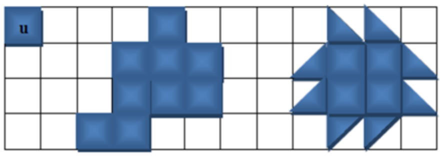
Figura 1- Figuras com áreas equivalentes

Fonte: Pessoa (2010, p. 25)

Esses tratamentos figurais são importantes em nosso trabalho por permitirem: a compreensão de equivalência de áreas entre figuras diferentes; o estabelecimento de estratégias para a resolução de situações-problema por meio da decomposição da figura em triângulos, ou em outras cujas áreas sejam conhecidas ou que possam ser calculadas e/ou a reconfiguração da figura em outra cuja área seja possível de calcular.

Para obter a área de uma figura, na malha quadriculada, considerando o quadradinho como unidade, nem sempre a contagem de quadradinhos basta. Quando ocorre a impossibilidade de ladrilhamento utilizando apenas quadradinhos, identificamos que esse procedimento não é suficiente. É necessário, então, decompor a unidade de medida (quadradinho **u)** em dois triângulos congruentes (figura 2 à direita).

Figura 2 - Procedimento de ladrilhamento e decomposição da unidade de medida



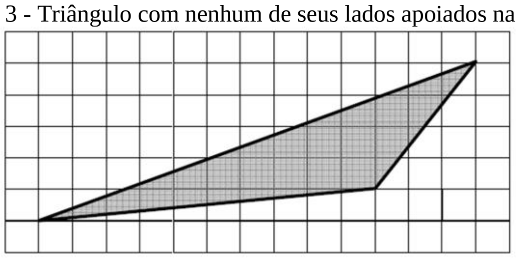
Fonte: Pessoa (2010, p. 25)

Para esse exemplo, Pessoa (2010) chama a atenção para a diferenciação entre o **quadradinho como unidade de área** e a **área do quadradinho**. Essa autora destaca que a percepção de que a área do quadradinho não depende de sua forma, e sim da região que ele ocupa, corrobora com a compreensão de que dois triângulos possuem a mesma área que um quadradinho. Em nosso trabalho, procuramos evidenciar essas equivalências de áreas por meio das operações figurais que se podem realizar em triângulos e quadriláteros, procedimentos esses centrados na apreensão operatória e no olhar inventor de que trataremos nas seções 2.2 e 2.3.

Esses procedimentos de decomposição estão em consonância com a BNCC, pois possibilitam habilidades como: "Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área" (BRASIL, 2016, p. 249).

Contudo, os procedimentos de contagem dos quadradinhos ou composição, decomposição, reconfiguração não são suficientes quando a figura não possui nenhum de seus lados apoiados na linha da malha (figura 3). Neste caso a aplicação de fórmulas algébricas é trabalhosa e de complexidade elevada.

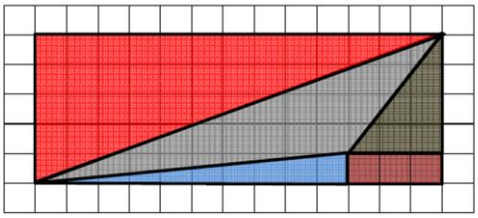
Figura 3 - Triângulo com nenhum de seus lados apoiados na malha



Fonte: Pessoa (2010, p. 33)

Um modo de se obter essa área é enquadrar o triângulo em um retângulo (figura 4), contendo-o totalmente.

Figura 4 - Enquadrar o triângulo em um retângulo



Fonte: Pessoa (2010, p. 33)

No interior desse retângulo, além do triângulo cinza-claro, podemos visualizar três triângulos e um retângulo que permitem calcular suas áreas, após, deve-se retirar suas áreas da figura que as contém, chegando com isso à solução. Assim, a área do triângulo é calculada por fora, retirando da área do retângulo (de dimensões treze e cinco) as áreas que não fazem parte deste triângulo.

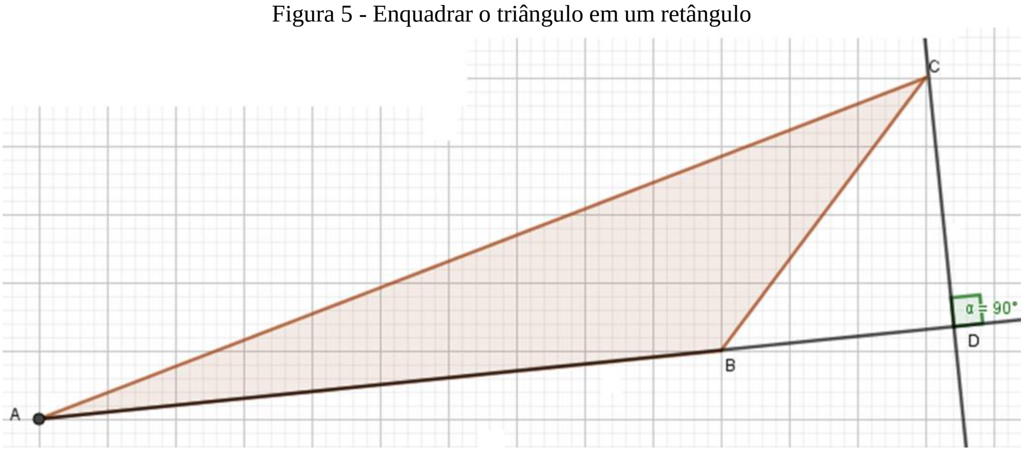
Esse procedimento é abordado neste trabalho, como apreensão operatória que se pode realizar nas figuras geométricas, denominado de mergulhamento (DUVAL, 2012b). Nesse caso, mergulhou-se o triângulo em um retângulo por meio de adição de traços na figura de partida. Após, pelo olhar inventor de Duval (2005), adicionam-se traços neste retângulo, decompondo-o em mais dois triângulos (o cinza escuro e o azul) e um retângulo (roxo). São essas operações, juntamente, com os registros e tratamentos em língua materna, figural e numérico que permitem solucionar a atividade que detalharemos no capítulo II em nossa fundamentação teórica.

Outra possibilidade em nosso trabalho é subtrair da área do retângulo as áreas das subfiguras que não fazem parte do triângulo inicial aplicando a fórmula algébrica nestas após o mergulhamento. Para tanto, é necessário desconstruir as figuras em segmentos unidimensionais ($2D \rightarrow 1D$). Levando a uma mudança de olhar, pois olham-se para as respectivas medidas para aplicá-las as fórmulas algébricas.

Acreditamos que esses tratamentos figurais e a abordagem de vários registros (língua materna, figural, numérico e algébrico) nesse tipo de triângulo são válidos, pois, no estudo de Pessoa (2010), triângulos desse tipo tiveram os percentuais mais baixos de acertos.

Outro procedimento para determinar a área desse triângulo (figura 5) por dentro é aplicando diretamente nele a fórmula algébrica, para tanto devem ser conhecidas as medidas da sua base (AB) e da sua altura (CD)[10].

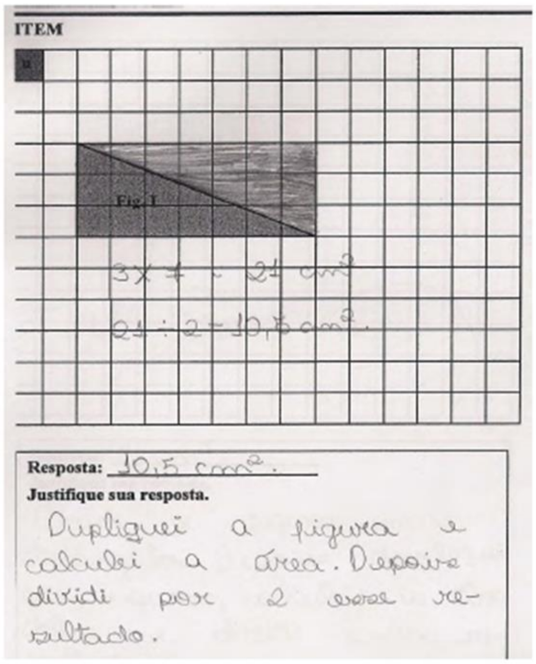
Figura 5 - Enquadrar o triângulo em um retângulo



Fonte: Da pesquisa a partir de Pessoa (2010, p. 33)

No estudo de Pessoa (2010), alguns alunos mobilizaram implicitamente as fórmulas algébricas para calcular a área do triângulo (figura 6) quando dois de seus lados estavam apoiados na malha.

Figura 6 - Cálculo da área usando implicitamente a fórmula algébrica



Fonte: Pessoa (2010, p. 98)

[10] Podem-se considerar como base também os segmentos BC e AC com as suas respectivas alturas.

Acredita-se que o aluno usou indiretamente a fórmula da área do triângulo (figura 6), pelo desconhecimento da mesma. Percebemos também que a malha favoreceu a compreensão de que, ao completar o retângulo, a parte "interior" e "exterior" da figura são iguais, contribuindo para o esclarecimento e a percepção da fórmula geométrica da área do triângulo.

Nesse protocolo, a malha contribui para a realização dos tratamentos figurais, pois o aluno mergulha o triângulo em um retângulo, após, mobiliza o registro numérico e seus tratamentos para encontrar a área, desconstruindo o retângulo em segmentos. Respondendo a atividade por meio do registro em língua materna. A adição dos traços no triângulo inicial permite encontrar a área, operações essas centradas na *apreensão operatória* e no *olhar inventor* propostos por Duval, conceitos estes que detalharemos no capítulo 2 deste trabalho.

Pessoa (2010, p 109-110, itálico da autora), destaca as seguintes contribuições da malha:

> - a possibilidade de aceitar que a medida da área pode ser um número fracionário. Isso significa ampliar o conjunto imagem da função-medida, dos naturais para os racionais positivos;
> - possibilita a compreensão da área enquanto grandeza através do procedimento de decomposição e composição, evidencia a invariância da área por equidecomponibilidade (*se duas superfícies podem ser decompostas em um número finito de partes, duas a duas congruentes, estas superfícies possuem a mesma área);*
> - a escolha de uma superfície unitária (área do quadradinho), a partir da qual a medição da área limita-se a verificar *quantas vezes* a superfície unitária cabe na figura; (ideia de *área unidimensional*, ou seja, a medida da área da superfície é obtida pela quantidade de quadradinhos que podem ser obtidos (formados) a partir da superfície da figura dada);
> - a contagem de quadradinhos ajuda na interpretação e ideia da dedução de fórmulas;
> - possibilita o cálculo de figuras sem necessidade de dados numéricos;
> - os procedimentos mais utilizados foram: a contagem seguida decomposição/recomposição e uso de fórmula.

Facco (2003), realizou um estudo diagnóstico com alunos da 5ª série do Ensino Fundamental (atual 6º ano)[11]. A sequência didática foi baseada em um teste piloto aplicado na mesma série pela pesquisadora Baltar (1996)[12] e também da análise de alguns livros didáticos. Facco (2003) verificou que a maioria dos livros analisados apresenta um número reduzido de atividades envolvendo o estudo de área de figuras

[11] Em nosso estudo realizamos oito sessões de ensino com alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental.

[12] Baltar (1996) fundamentou seu estudo na Teoria dos Campos Conceituas de Gérard Vergnaud.

planas e introduzem as fórmulas para o cálculo de área sem aprofundar os conhecimentos dos alunos sobre este conteúdo. Esta mesma abordagem nós constatamos na apostila[13] da escola onde realizamos as sessões de ensino.

A sequência didática de Facco (2003)[14] abordou composição, decomposição e reconfiguração[15] de figuras planas com o auxílio do ladrilhamento, tangram, régua (graduada em centímetros, polegadas e luas[16]), papel e lápis.

Facco (2003) fundamentou seu estudo na teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval (1993, 1994, 1995), focando nas apreensões (sequencial, perceptiva, discursiva e operatória), relacionando-as com as representações semióticas e na dialética ferramenta-objeto e mudança de quadros de Régine Douady (1986).

Em nosso estudo, abordamos diversas representações semióticas no estudo de áreas de triângulos e quadriláteros, com e sem o auxílio de recursos didáticos, permeadas por: registros, tratamentos, conversões, apreensões e olhares (DUVAL, 2005; 2011; 2012; 2012b). Daremos ênfase aos tratamentos figurais em 2D, explorando a produtividade heurística nas figuras geométricas e usando mais de uma representação/registro para determinar e/ou validar a área da figura determinada.

Para que os alunos compreendessem forma, superfície e área foi que Facco (2003) elaborou e aplicou a atividade abaixo (figura 7). Essa autora considera como ter a mesma forma a aparência física do objeto, no caso a figura visualizada pela linha poligonal.

Nesta atividade (figura 7), somente cinco entre os trinta e dois alunos responderam aos três itens corretamente. Facco (2003) destacou que a dificuldade se deu na compreensão da expressão “ter a mesma forma”, pois os alunos deram por terminada a atividade considerando apenas um grupo de figuras.

---

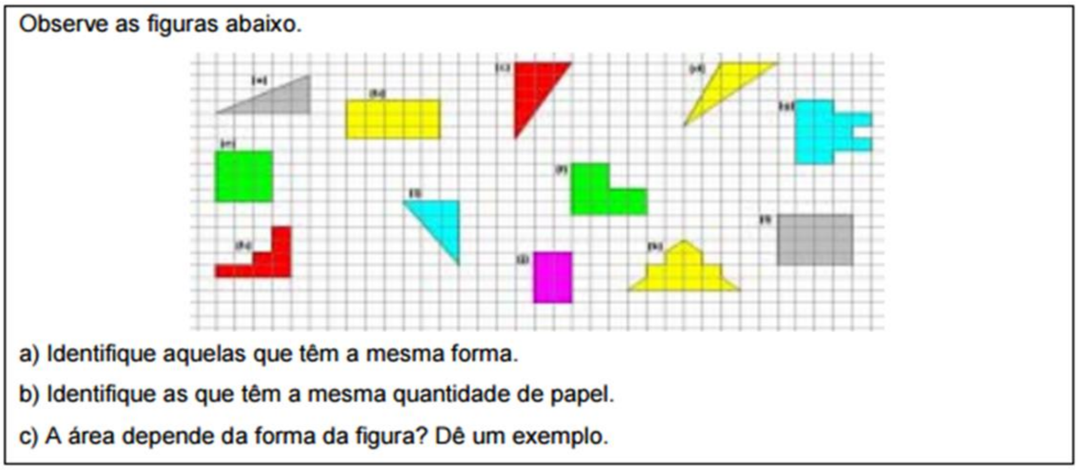
[13] Capítulo III, seção 3.2.

[14] Em nossa sequência abordamos diversas representações semióticas no estudo de área de triângulos e quadriláteros com os seguintes recursos didáticos: tangram, régua, material dourado (temos na superfície desse material a malha centimetrada), geoplano, papel e lápis e malha quadriculada e milimetrada.

[15] Abordamos, além disso, o mergulhamento (DUVAL, 2005).

[16] É uma unidade de medida de comprimento que mede $1,5\ cm$ cada lua (FACCO, 2003).

Figura 7 - Cálculo das áreas usando o procedimento de composição e decomposição



Fonte: Facco (2003, p. 61)

Em nosso estudo, disponibilizamos aos alunos vários recursos didáticos para representar as áreas de triângulos e quadriláteros para que eles pudessem resolvê-las de modos variados. Abordamos na sequência de atividades de nossa experimentação:

- Procedimentos de composição, decomposição e reconfiguração com as peças do tangram. Identificando que figuras diferentes têm áreas equivalentes, bem como a decomposição de cada peça em triângulos. Consideramos numa atividade que a peça quadrada do tangram tem duas unidades de área e solicitamos a determinação da área das outras peças e posteriormente a construção de figuras com áreas específicas. Noutra fornecemos a área do quadrado construído com todas as peças e pedimos que determinassem a área de cada peça.

- Na malha quadriculada em uma sequência de atividades, solicitamos que encontrassem a área das figuras por procedimentos de: contagem dos quadradinhos, composição, decomposição, reconfiguração e mergulhamento. Em outra, solicitamos o cálculo das áreas de dois modos diferentes, usando as fórmulas algébricas e sem usá-las.

- A construção de triângulos e quadriláteros diferentes com a mesma área, mobilizando várias representações em registros diferentes, para determiná-las e/ou validá-las.

- Uma variável didática explorada foi o tipo de figura: triângulos ou quadriláteros, ora aparecendo no enunciado da atividade, ora não.

- Além dessa, outra variável didática foi a representação das figuras na malha milimetrada e centimetrada e de outras unidades de medida de área, como: cm^2, dm^2 e o m^2.

Facco (2003) trabalhou a construção de figuras com o auxílio de instrumentos como régua e compasso (quadro 1).

Quadro 1 - Utilização do princípio multiplicativo no cálculo de áreas

1) a) Construa abaixo, com régua e esquadro, um retângulo com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.
b) Quadricule a região interna desse retângulo e determine a medida de sua área.
c) Que medida você encontrou para essa área?
d) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por um quintal retangular com 8 m de comprimento e 4 m de largura?
e) Qual seria a medida de área para a superfície determinada por uma reserva indígena com 8 Km de comprimento e 4 Km de largura?

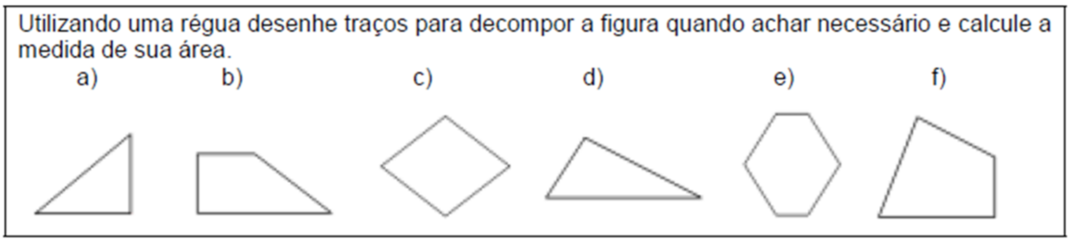
Fonte: Facco (2003, p. 74)

Nessa atividade somente vinte dos vinte e sete alunos construíram o retângulo de acordo com as medidas. Entretanto, tiveram dificuldades em manusear o esquadro e a régua. Daqueles, somente quinze acertaram o exercício.

Em nosso estudo, essa escolha didática possibilita os olhares em geometria[17]: botanista, agrimensor, construtor e inventor[18]. O botanista para identificar o retângulo; o agrimensor para converter as grandezas centímetro, metro e quilômetro e representá-las no papel, onde a construção requer a mobilização de propriedades geométricas com a finalidade de medi-lo; o construtor para construir o retângulo com régua e esquadro e o inventor para quadricular o retângulo.

Para evidenciar o processo de decomposição e compensação[19] de figuras planas, propiciando a compreensão de área, é que a atividade da figura 8 foi aplicada. Nela os alunos podiam medir os lados das figuras com a régua.

Figura 8 - Procedimentos de reconfiguração para realizar o cálculo das áreas



Fonte: Facco (2003, p. 117)

[17] (Duval, 2005).
[18] Facco (2003) não fundamentou seu estudo neste quadro teórico de Duval (2005). Pode ser visto no capítulo II, na seção 2.3.
[19] Compensação para Facco (2003) consiste em adicionar traços na figura de modo que ela se torne parte de outra figura. Em nosso trabalho, considerando nosso aporte teórico, esse procedimento é denominado de Mergulhamento (DUVAL, 2005).

Para a resolução, partindo da composição e decomposição, os alunos adicionaram traços internos e externos às figuras[20], construindo novas figuras que permitiram determinar suas áreas; podendo mudar sua posição por deslocamentos, por rotação, translação[21], entre outros procedimentos. Essas estratégias de resolução são baseadas em Duval (1994) que é identificada como apreensão operatória, que significa mudar a figura de partida, de modo mental ou material, permitindo aos alunos a decomposição da figura em partes e, posteriormente, a composição de subfiguras triangulares ou retangulares. Tendo como propósito o cálculo de área nessas subfiguras.

Os resultados obtidos nessa atividade, segundo Facco (2003), mostraram um avanço significativo dos alunos, sendo válida a proposta para contribuir com a didática do professor e também desafiar os alunos a raciocinarem, visando à resolução de problemas que contemplem áreas de figuras planas.

Em nosso estudo solicitamos a determinação de áreas de triângulos e quadriláteros diferentes com áreas equivalentes e distintas. O aluno pode, para solucionar a atividade, representá-los com os recursos disponibilizados, mobilizando: registros, representações, procedimentos de decomposição, composição, reconfiguração, mergulhamento e fórmulas algébricas.

A pesquisa de Silva (2016), realizada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, teve como objetivo investigar o tratamento dado às situações (comparação, medida, mudança de unidade, produção de superfície) que dão sentido ao conceito de área em três ambientes com características distintas: papel e lápis, materiais manipulativos (malhas quadriculadas, malhas pontilhadas, papel de decalque e a tesoura) e *Apprenti Géomètre 2* (software de geometria).

Silva (2016) constatou que os alunos mobilizaram teoremas em ação falsos nos diferentes ambientes como: se duas figuras têm a mesma quantidade de lados então elas têm a mesma área, se duas figuras têm a mesma forma então elas também têm a mesma área, se as figuras não coincidirem por sobreposição então elas não têm a mesma área e que o comprimento do lado da figura determina a sua área.

Silva (2016) verificou que nas situações de comparação a área estava relacionada para muitos com o formato da figura, ou ao fato de serem idênticas. Na situação de produção, notou-se que a forma da figura era mantida ao construir outra de

---

[20] Este procedimento é abordado em nosso estudo à luz de Duval (2005) que o identifica como mergulhamento. Pode ser visto no capítulo II, seção 2.3.
[21] Pode ser visto em Facco (2003, p. 118 e 134).

área maior, menor ou igual à de uma superfície dada. Na situação de medida, alguns alunos compreendiam que a área de uma figura estava associada a um número, não considerando o par número e unidade de medida e, ainda, comparavam números ao invés de comparar as áreas.

Silva (2016) observou diversas estratégias decorrentes da pluralidade de recursos utilizados, considerados importantes para a resolução das tarefas. Notou um avanço nos grupos de alunos nessas resoluções e nos teoremas em ação verdadeiros. Os alunos avançaram nas situações de comparação de área por meio dos procedimentos de inclusão, sobreposição, contagem e, composição e decomposição de figuras, pois conseguiram identificar que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Santana (2006) investigou o uso dos recursos didáticos (tangram, malhas e poliminós) em livros didáticos de Matemática da 5ª à 8ª série do Ensino Fundamental (atualmente 6º ao 9º ano). Os resultados desse estudo apontam que os recursos supracitados são pouco explorados nas seis coleções de livros didáticos estudados por essa autora. Os Poliminós só aparecem em uma coleção, enquanto que o tangram e as malhas aparecem em todas. Algumas atividades contribuem significativamente para a construção do conceito de área, mas, outras utilizam os recursos de modo superficial. Para Santana (2006), o conceito de área é tratado de modo rápido em todas as coleções e, na maioria das vezes, ocupa os últimos capítulos.

Para Santana (2006), a manipulação das peças do tangram e poliminós, tem um papel relevante, pois permite construir diferentes figuras planas e serve de suporte para a dissociação entre área e figura. Esse trabalho com as figuras é priorizado em nosso estudo por ser a base para os tratamentos figurais nas figuras geométricas como a composição, decomposição e reconfiguração, concedendo a elas o seu papel heurístico. Acreditamos que essas operações contribuem para a elaboração de estratégias para o cálculo de áreas e para validá-las.

Santana (2006) lembra que

> Não é a manipulação dos objetos nem a construção de figuras em malhas que podem garantir a aprendizagem, mas, essas representações, possivelmente, contribuem para facilitar a reflexão e a compreensão sobre os aspectos geométricos de área, ou seja, a construção de área como grandeza geométrica. (SANTANA, 2016, p. 61).

Isso reforça o objetivo do nosso estudo em usar diversas representações semióticas e registros no estudo do conceito de área de figuras planas.

Ferreira (2010) observou em seu estudo que as atividades do livro didático da 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental são mais voltadas às situações de medida em detrimento das situações de comparação e de produção, privilegiando o quadro numérico.

No quadro numérico, apresenta-se, muitas vezes, o centímetro quadrado como quadradinho cujo lado mede 1 cm o quê, segundo (SANTANA, 2006; PESSOA, 2010; FACCO, 2003, SILVA, 2016), não contribui para que o aluno compreenda que uma região de 1 cm^2 de área pode ter outras formas geométricas diferentes do quadrado, ou ainda, que figuras com formatos diferentes podem ter a mesma área.

Com o objetivo de o aluno compreender que figuras diferentes podem ter a mesma área é que, em nosso estudo, procuramos trabalhar as transformações figurais (tratamentos figurais) em triângulos e quadriláteros e a realização de diferentes cálculos de áreas para figuras diferentes com áreas equivalentes. Pois acreditamos que isto pode contribuir para a superação de compreensão citada.

Ferreira (2010) constatou nas duas coleções que as situações de produção e comparação são reduzidas, sendo as situações de medidas as preponderantes. Talvez por isso é que houve respostas numéricas mesmo não sendo dadas medidas ou números.

Na análise documental Ferreira (2010) verificou que as situações sem a presença de medida são raras, “o que reforça a necessidade de retardar a entrada do quadro numérico, com a oferta de situações de comparação que provoquem o surgimento dos procedimentos de decomposição, composição, inclusão e sobreposição”. (p.80).

Alguns alunos, no estudo de Ferreira (2010), apresentaram as respostas apenas com a parte numérica, não escrevendo a unidade de medida, fato também percebido por Facco (2003) e Silva (2016), revelando uma dificuldade dimensional. E quando a superfície utilizada para ladrilhar outra não tinha a mesma forma, alguns alunos disseram não ser possível o ladrilhamento por um número finito de peças, não vendo a possibilidade da decomposição, composição e equivalência de área.

Ferreira (2010) afirma que, por um lado, a malha quadriculada favorece as decomposições e composições das superfícies, permitindo a compreensão da invariância das áreas e, por outro lado, a bidimensionalidade de uma superfície não fica visível.

Diante de todas essas considerações acerca da Geometria no Brasil, dos entraves verificados em documentos oficiais, nos livros didáticos, em artigos e pesquisas é que definimos a nossa questão de pesquisa: *Quais possibilidades de* *contribuições podem ter uma abordagem de áreas de figuras planas centrada na utilização e articulação de diferentes registros para a aprendizagem desse conceito na representação de um mesmo objeto matemático?*

Diante disso, apresentamos a seguir os nossos objetivos, específicos e geral.

1.7 Objetivos da pesquisa

Apresentamos a seguir o objetivo geral e os objetivos específicos de nossa pesquisa.

1.7.1 Objetivo geral

Investigar aprendizagens por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental diante de situações envolvendo representações semióticas diversas nas abordagens de áreas de triângulos e quadriláteros.

1.7.2 Objetivos específicos

✓ Analisar as dificuldades apresentadas por alunos no cálculo de áreas de triângulos e quadriláteros diante de atividades propostas em diferentes registros.

✓ Analisar, na produção dos alunos, as transformações geométricas no plano (2D) envolvendo composição, decomposição e reconfiguração de figuras planas.

✓ Identificar e analisar estratégias mobilizadas e possíveis superações de dificuldades dos alunos diante das atividades realizadas.

No próximo capítulo abordaremos nosso aporte teórico: registro de representação semiótica (DUVAL 2012) e as apreensões e olhares em Geometria (DUVAL, 2005; 2011; 2012b), finalizando-o com as possíveis contribuições dessa escolha para a aprendizagem geométrica.

CAPÍTULO 2: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E CONTRIBUIÇÕES PARA A APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA

Considerando os nossos objetivos, sobretudo ao elaborar as atividades das sessões para o desenvolvimento da parte experimental de nossa pesquisa, apoiamo-nos em dois elementos teóricos de Duval (2005, 2011, 2012, 2012b), um que trata dos registros de representação semiótica (RRS) e o outro, das apreensões e olhares em geometria, os quais apresentamos neste capítulo.

2.1 Registro de Representação Semiótica

A teoria dos registros de representações semióticas, de cunho linguístico cognitivo, associada à prática matemática foi desenvolvida pelo professor, filósofo e psicólogo, Raymond Duval, que desde a década de 1970 se interessou por pesquisas em Educação Matemática. Atualmente, como professor emérito, está vinculado à Universidade du Litoral Côte d'Opale na França, trabalhou também, nesse país, de 1970 a 1995 no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, desenvolvendo pesquisas em Psicologia Cognitiva.

Duval (2012) destaca que na matemática, diferentemente das outras ciências, existe uma diversidade de representações: numéricas, notações simbólicas, escritas algébricas, gráficos, imagens, figuras geométricas, diagramas, esquemas, etc. A comunicação em Matemática ocorre com base nestas representações que são imprescindíveis para a mobilização de conhecimentos matemáticos pelos indivíduos.

Segundo Duval, na matemática a representação é crucial porque todos os seus objetos são abstratos e, sendo assim, nenhum deles é diretamente acessível à percepção, necessitando para a sua apreensão o emprego de representações. Além disso, o mesmo objeto matemático pode ser representado em diferentes registros de representações. Por exemplo, a área de um retângulo pode ser representada por meio de uma expressão algébrica (A=b.h, onde b é a base do retângulo e h a sua respectiva altura), que é a representação algébrica, um número e a sua grandeza (resultado do produto da medida do comprimento da base pela medida do comprimento da altura), que é a representação numérica, o desenho do retângulo numa folha de papel, que é a sua representação figural (2D/2D), que correspondem a três registros de representação diferentes para o mesmo objeto matemático, o conceito de área. Representar, para Duval (2012), é usar signos que evocam objetos, elementos ausentes e, transformar representações semióticas em outras representações é o cerne da atividade matemática.

Para Duval (2012), uma das dificuldades dos alunos para compreender matemática procede da diversidade de representações e da complexidade de suas transformações. E, confundir o objeto com a sua representação, em longo prazo, para Duval (2009, 2011, 2012), faz com que os conhecimentos adquiridos sejam transformados em representações estagnadas, não permitindo nenhum tratamento, tornando-se inutilizáveis fora do contexto de aprendizagem.

Diversas pesquisas constataram que os alunos, normalmente, encontram dificuldades em passar de uma representação a outra. Observou-se que eles conseguem, para um objeto matemático, fazer tratamentos em diferentes registros de representação, porém, não conseguem fazer as conversões essenciais para a apreensão desse objeto, quando o esperado, para a aquisição do conhecimento, é que eles consigam fazer tratamentos, de um mesmo objeto matemático em registros de representação distintos e “transitar” entre esses registros de um modo natural. Nosso trabalho vai nesse sentido, o de articular as representações semióticas, a visualização e a linguagem para possíveis superações de dificuldades de aprendizagem de áreas.

É um paradoxo não confundir o objeto matemático com a sua representação, uma vez que somente podemos ter acesso aos objetos por meio de suas representações. Temos então de um lado a apreensão conceitual e, de outro lado temos as representações semióticas que tornam possíveis as atividades sobre os objetos matemáticos. Existindo assim uma grande variedade de representações semióticas.

As representações mentais, de acordo com Duval (2012), são as conceitualizações que o indivíduo pode ter sobre um objeto, uma situação ou ao que lhe é associado, sendo pessoal e interno, tais conceitualizações submetem-se a interiorização das representações semióticas – daquilo que é percebido. As representações semióticas são as produções estabelecidas empregando signos que pertencem a um sistema de representação com regras específicas de funcionamento e significação[22], são externas e conscientes ao indivíduo. As representações mentais, normalmente, são exteriorizadas por meio das representações semióticas, bem como dependem da sua interiorização, posto que possui a finalidade de torná-las visíveis a outros. Essas representações permitem a realização de algumas operações cognitivas

[22] Ato humano de dar significado aos objetos.

substanciais como a de tratamento, as quais são necessárias para fins de comunicação e essenciais à atividade cognitiva do pensamento.

Uma fórmula algébrica, um gráfico, uma figura, um enunciado em língua materna são exemplos de representações semióticas que expõem diferentes sistemas semióticos que exercem uma função primordial na evolução das representações mentais, na efetivação de distintas funções cognitivas (objetivação, comunicação, tratamento) e na produção de conhecimentos, visto que permitem representações totalmente diferentes de um mesmo objeto.

Desse modo, o funcionamento cognitivo do pensamento humano é caracterizado pela indissociável existência de diversos registros[23] semióticos de representação. E nesse caminhar, Duval (2012) salienta que a semiose é indissociável da noesis, a primeira equivale a compreender ou a produzir uma representação semiótica, é aprender a dar significado aos objetos, é social, "é a apreensão ou produção de uma representação semiótica" (DUVAL, 2012, p. 270). Enquanto que a segunda é pessoal, ligada ao pensamento humano, são as ações pessoais restritas ao pensamento, visando compreender o conceito matemático de um objeto, conquanto "é a apreensão conceitual de um objeto" (DUVAL, 2012, p. 270).

O fato de existirem muitas representações para o mesmo objeto matemático parece ser a condição necessária para que ele não seja confundido com a sua representação e, ainda, para que ele possa ser identificado em cada uma delas. Estas duas condições permitem que a representação assuma realmente o seu papel de dar acesso ao objeto representado. Em resumo, quando um objeto matemático é representado em registros distintos e é reconhecido em cada uma de suas representações é que esta representação de fato exerce seu papel de representação, dando somente acesso ao objeto representado. Assim, a apreensão conceitual de um objeto implica a coordenação de vários registros de representação semiótica, que devem valorizar a ligação entre a noesis e a semiose. Essa organização é relevante porque quanto maior for a flexibilidade com registros de representações diferentes para o mesmo objeto matemático, maior será a chance de apreensão desse objeto (DUVAL, 2012).

Porém, nem todo sistema semiótico é um registro de representação, para que seja devem ocorrer três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose, a saber: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

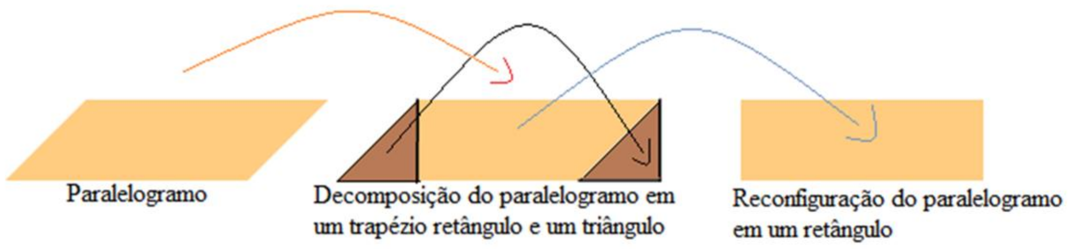
[23] Esse conceito será apresentado com mais detalhes nos próximos parágrafos.

A formação de uma representação identificável pode ser estabelecida na organização de um texto, na imagem de uma figura geométrica, por meio de um enunciado em língua materna compreensível, em um gráfico ou na escrita de uma expressão algébrica. A formação de uma representação pode ser comparada a uma tarefa de descrição. E nessa representação os professores podem identificar dificuldades mobilizadas pelos alunos, após os tratamentos e conversões, já que é um sistema semiótico particular, cujos símbolos são identificáveis e podem ser transformados com regras específicas de se operacionalizar dentro desse conjunto. Por exemplo, para compor um texto as regras gramaticais devem ser respeitadas, para construir figuras as restrições de construções devem ser consideradas, para multiplicar números naturais devem-se considerar o algoritmo da multiplicação, o sistema posicional e o sistema de numeração decimal.

Para que se tenha uma representação identificável é fundamental selecionar as relações e os dados do conteúdo a serem representados. Esta organização é feita considerando as regras de formação e as unidades específicas do registro cognitivo onde o produto é a representação. Estas regras têm a função de assegurar as condições de reconhecimento e identificação, bem como oportunizar o seu uso em tratamentos. Não são regras de produção efetiva por um indivíduo e sim regras de conformidade, que já estão estabelecidas na sociedade, ou seja, o sujeito apenas as usa para reconhecer as representações, não tem a competência de criá-las.

O tratamento de uma representação consiste em transformar a representação em outra representação no mesmo registro onde ela foi estabelecida, é uma transformação interna ao registro. Por exemplo, para as figuras a reconfiguração é um tipo próprio de tratamento, dando a elas o seu papel heurístico. Um exemplo disso é quando reconfiguramos um paralelogramo em um retângulo (figura 9).

Figura 9 - Reconfigurando um paralelogramo em um retângulo

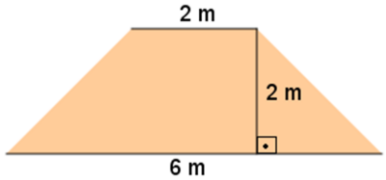


Fonte: Dados da pesquisa

Para as expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico,...) temos que o cálculo é uma forma particular de tratamento, neste caso no registro numérico ou no algébrico. Para cada registro existem regras próprias de tratamento, que estão ligadas ao objeto matemático e à sua forma e não ao seu conteúdo. Por exemplo, ao adicionar: 0,75+0,75=1,50=1,5 e $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, temos uma representação decimal incluindo um tratamento decimal para o primeiro e uma representação fracionária incluindo um tratamento fracionário para o segundo. Sendo dois registros com representações diferentes, com tratamentos radicalmente diferentes para o mesmo objeto matemático número racional e a operação de adição. São dois registros de representação com graus de dificuldades diferentes de se operacionalizar em cada um deles, observe que as regras de transformação interna para cada um dos dois registros não são as mesmas.

A conversão de uma representação ocorre em registros diferentes, pois consiste em transformar uma representação em outra, num outro registro, ou seja, é uma transformação externa ao registro de partida, conservando parte ou a totalidade do objeto matemático representado. Por exemplo, dada uma representação linguística, podemos fazer uma ilustração dela que é outra representação, a figural; um texto representado linguisticamente pode ser traduzido para outra língua por meio de outra representação linguística. Para calcular a área de um trapézio, (figura 10) usando a fórmula algébrica ($A=\frac{(B+b).h}{2}$), realiza-se primeiramente uma conversão do registro em língua materna (enunciado) para o figural (representação do trapézio) e, posteriormente, deste para o numérico, realizando tratamentos para obter a resposta. Empregando três registros diferentes: o figural, o algébrico e o numérico.

Figura 10 - Registros distintos para calcular a área do trapézio



$$A=\frac{(B+b).h}{2}=\frac{(6\ m+2\ m).2\ m}{2}=8\ m^2$$

Fonte: Dados da pesquisa

Ao substituir os valores na fórmula algébrica, realiza-se uma desconstrução dimensional no trapézio que é bidimensional (2D), olhando para as medidas dos segmentos (B, b e h) que são unidimensionais (1D), para obter a resposta que é bidimensional.

As dificuldades da matemática no ensino ocorrem porque, normalmente, consideram-se somente as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos pertinentes a cada representação. Porém, a apreensão do objeto matemático, que é a conceitualização, ocorre quando vários registros de representação são coordenados e não quando ocorre a representação de um mesmo objeto em várias representações ou na designação de representações. Por exemplo, não é suficiente para compreender o conceito de área resolver situações usando materiais concretos ou por meio de desenhos, se não se conseguem enxergar, coordenar esses procedimentos no tratamento algébrico (fórmula da respectiva área), um registro numérico (visualizando o unidimensional que são as medidas dos lados do polígono), o geométrico (considerando o registro figural), em uma representação linguística, no problema envolvendo essa operação ou num outro registro de representação qualquer.

Basicamente um único sentido de conversão é privilegiado no ensino, normalmente o que demanda mais facilidade para os alunos. Para o conceito de área, por exemplo, normalmente ocorre a conversão do registro algébrico para o registro numérico. Para Duval (2012) a primeira fonte de dificuldades para o entendimento em matemática é a conversão, sendo que ela por si só não é significativa para a compreensão do objeto matemático, por se resumir a mudar de registro, uma vez que o que importa são os tratamentos que poderão ser efetuados na nova representação obtida após a mudança de registro.

Realizar uma coordenação entre registros diferentes para o mesmo objeto matemático para Duval (2012) não é um processo natural para a maior parte dos sujeitos, percebem-se em todos os níveis de ensino, na maior parte dos alunos, um enclausuramento num único registro, o que faz com que eles não reconheçam o mesmo objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes. Essa falta de coordenação não impossibilita toda a compreensão, mas quando esta ocorre num contexto limitado de apenas um registro semiótico as transferências e aprendizagens posteriores ficam prejudicadas, deixando os conhecimentos adquiridos inertes, sem aplicação em situações posteriores.

A coordenação de registro de representação, no ensino, é considerada como se ocorresse espontaneamente e de modo rápido, quando na verdade tal procedimento não é simples. A ausência de coordenação implica, segundo DUVAL, a não conceitualização de um objeto matemático, que é a "condição fundamental para todas as aprendizagens de base" (DUVAL, 2012, p. 284).

A aprendizagem em geometria, segundo Duval (2005), está relacionada diretamente com a articulação de atividades cognitivas em registros de representação muito diferentes: a visualização e a linguagem. Segundo Duval, a visualização de uma figura em geometria está inserida numa atividade cognitiva mais complexa do que o simples ato de ver mostra, o modo de ver uma figura depende da atividade na qual ela é mobilizada. Uma vez que as figuras em Geometria, diferentemente de todas as outras, permitem tratamentos como a reconfiguração por exemplo.

Por conta disso, as figuras geométricas desempenham um papel de destaque, observado por Duval (2005, 2012b). Ele nos apresenta um modelo olhando para elas, com enfoque cognitivo para desenvolver a aprendizagem geométrica, segundo o papel que elas exercem frente às atividades matemáticas, abordando as apreensões: *perceptiva, discursiva, operatória* e *sequencial,* as quais trataremos a seguir.

2.2 As apreensões em Geometria

A *apreensão perceptiva* possui a posição central e a função de identificação. Ela pode "ter um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado" (DUVAL, 2012b, p. 136). Essa apreensão é caracterizada pela identificação feita por meio do contorno das figuras.

A *apreensão discursiva* é subordinada à *perceptiva*, pois para Duval (2012b, p. 133): "uma figura geométrica não mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito". As definições, teoremas, axiomas estabelecidos comandam o discurso geométrico. E desse modo, perceptivelmente, uma figura geométrica pode ser uma figura diferente se o enunciado das hipóteses for modificado. E, além disso, uma mesma figura pode ser usada para ilustrar situações geométricas distintas, onde as hipóteses iniciais não são as mesmas.

Para Duval (2012b), os tratamentos que se originam nos registros figurais e discursivos devem ser coordenados para que favoreça a aprendizagem em geometria. Visto que, as apreensões*: perceptiva, discursiva, sequencial* e *operatória* não aparecem isoladamente. E em um determinado problema uma pode ser mais requisitada que outra, porém todas aparecem em maior ou menor intensidade.

Em relação às apreensões *perceptiva* e *discursiva* Duval (2012b, p. 120) escreve que:

> Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais.

Normalmente, essas duas atitudes se encontram em conflito, pois, a figura revela objetos que não dependem do enunciado e os objetos identificados nos enunciados e nas hipóteses não são obrigatoriamente aqueles que surgem naturalmente. Essa diferenciação entre a ligação da apreensão perceptiva e a interpretação necessária regida pelas hipóteses é o problema nas figuras geométricas.

A *apreensão sequencial* é usada nas atividades de construção ou de descrição, cujo objetivo é reproduzir uma figura. Duval (2012b) ressalta que essas atividades receberam, nos últimos anos, certa importância por parte das orientações didáticas. Todavia, as outras apreensões, as mais importantes do ponto de vista cognitivo, deveriam também ser destacadas nesse trabalho didático.

Duval (2012b) enfatiza que nas atividades de construção de figuras, elas, de certo modo, independem do enunciado, que são ordens. Nessa atividade a apreensão perceptiva pode servir de controle para conferir a execução realizada, aceitando-a ou não. Nas atividades de construção de figuras "é o reconhecimento perceptivo da figura a ser reproduzida que serve de guia e de controle pela formulação das instruções, e não pelo que é sucessivamente obtido como traçado em função dos instrumentos utilizados" (DUVAL, 2012b, p. 135).

Moretti e Brandt (2015, p. 605, grifo do autor) lembram que "A **construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial – especialmente requisitadas em atividades dessa natureza, de construção geométrica, também requer a apreensão perceptiva".

A *apreensão operatória* é significativa em nosso trabalho, por ser "uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis dessas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis" (DUVAL, 2012b, p.125). Nesta apreensão nos interessam os processos de decomposições, composições e reconfigurações nas figuras geométricas, exercendo elas assim o seu papel heurístico que é o "resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva" nos apoiando em (MORETTI; BRANDT, 2015, p. 605). Sobre a subordinação entre as apreensões esses autores destacam que: "Podemos perceber a importância da apreensão perceptiva na aprendizagem da geometria: as apreensões operatória, discursiva e sequencial subordinam-se, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva" (p. 605).

É esse destaque da apreensão perceptiva que levou Duval (2005) a caracterizar os quatro tipos de olhares: *botanista, agrimensor, construtor* e *inventor,* que trataremos a seguir.

2.3 Os olhares em Geometria

Para Duval (2005) existe muita complexidade nas formas de "ver" em geometria, porque elas possuem um lugar de destaque para a aprendizagem da geometria. A visualização "é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória" (MORETTI; BRANDT, 2015, p. 605). Esses autores lembram também que a visualização não requer conhecimentos matemáticos, porém "ela pode comandar a apreensão operatória" (p.605).

Duval (2005) separou em duas categorias as figuras em geometria, como vemos: o **icônico** (botanista e agrimensor) e o **não icônico** (construtor e inventor). O icônico faz menção a objetos reais, onde suas formas e contornos permitem associá-los com objetos da realidade. Na visualização não icônica "existe uma sequência de operações que permitem reconhecer as propriedades geométricas, por impossibilidade de obter certas configurações, ou por invariância das configurações obtidas" (DUVAL, 2005, p.9).

Normalmente olhamos para as figuras segundo o modelo icônico, entretanto esse olhar não conduz a um bom trabalho geométrico; Duval esclarece esse fato com a seguinte observação:

> As figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de *que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclui a possibilidade de reconhecer outras*. Em outras palavras, para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem

> que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada (2011, p.86, itálico do autor).

Essa mudança de olhar nos remete a visualização **não icônica** ou a desconstrução das formas (DUVAL, 2005), ou seja, devemos transpor o olhar icônico.

Comentaremos a seguir, perpassando os modos de olhar icônico e não icônico, adentrando nas quatro formas de olhar em geometria, desenvolvidas por Duval (2005).

O olhar *botanista* é requerido para reconhecer e para nomear as formas elementares usadas na geometria plana, os "tipos de triângulos e de quadriláteros, as configurações obtidas por diferentes posições de duas retas, uma em comparação a outra, eventualmente as formas circulares e as formas ovais, etc" (DUVAL, 2005, p. 5, tradução nossa). Esse olhar permite observar as diferenças e semelhanças nas figuras (triângulo, quadrado, paralelogramo,...), sem estabelecer relações métricas ou quantificá-las. Mas, as especificidades exigidas nesse olhar preparam os alunos para os demais olhares.

O *agrimensor* é usado quando se realizam medidas em uma superfície ou em um terreno e se conseguem representar essas medidas no papel. Nessas atividades passa-se de uma escala de grandeza a outra; Duval (2005, p. 6) exemplifica com o procedimento mobilizado por Eratóstenes quando mediu o raio da terra, e afirma que "Neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são as mobilizadas para fins de medida".

O olhar *construtor* é requisitado quando se usa instrumentos como régua não graduada e compasso. Nele os alunos "podem realmente tomar consciência que as propriedades geométricas não são somente as características perceptivas" (DUVAL, 2005, p. 6, tradução nossa). Esses instrumentos podem ser substituídos, por exemplo, por software geométricos como o Cabri Géomètre e o GeoGebra.

E por último, o olhar *inventor***.** Neste olhar, para resolver um problema, adicionam-se traços na figura dada, na tentativa de descobrir um procedimento de resolução por meio de operações e modificações feitas sobre a figura. Duval (2005) exemplifica esse olhar com a atividade de dividir um triângulo em outros dois triângulos e com esses formar um paralelogramo. Essa forma de ver, para Duval (2005, p. 7), exige "uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptivas elementares que são necessárias à primeira vista" (tradução nossa, grifo do autor).

Vale lembrar que esses olhares se articulam com as apreensões supracitadas, Moretti e Brandt (2015, p. 606, itálico nosso) esclarecem que "Esses olhares caminham de um lado a outro lado conforme as apreensões em geometria são exigidas. No olhar do *botanista*, exige-se essencialmente a apreensão *perceptiva*. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do *inventor*".

No presente trabalho, os olhares de *inventor* e *construtor* são os mais requisitados frente aos procedimentos de composição, decomposição e reconfiguração numa figura geométrica e para representá-las no papel. Nesse caso entram em cena todas as apreensões, as *discursiva* e *operatória* sendo as mais enfatizadas.

Contextualizando o trabalho nesses modos de ver percebemos que o olhar icônico se impõe quando uma figura geométrica simples é visualizada e a reconhecemos, comparando-a com outros elementos figurais conhecidos, empregando para tanto o olhar *botanista*. Quando identificamos as figuras, por exemplo, em apenas: triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos, operamos iconicamente. Nesse caso predominam a apreensão *perceptiva* e o olhar *botanista*.

Entretanto, nem sempre o reconhecimento de uma figura basta para encontrar a sua área, às vezes é necessário operar sobre ela uma desconstrução dimensional como nos alerta Duval (2011, p. 87):

> Ver <<geometricamente>> uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.

Essa desconstrução é sempre possível realizar numa figura geométrica, gerando essas maneiras de "ver", destacadas por Duval (2005, 2011), que são essenciais para a aprendizagem da geometria.

A desconstrução dimensional é realizada considerando as dimensões das figuras e os elementos figurais, que são tridimensionais (3D) nos: cubos, pirâmides, cones,...; bidimensionais (2D) nos polígonos: quadrados, retângulos, ...; unidimensionais (1D), nas retas, segmentos e curvas; e adimensional (0D) nos pontos.

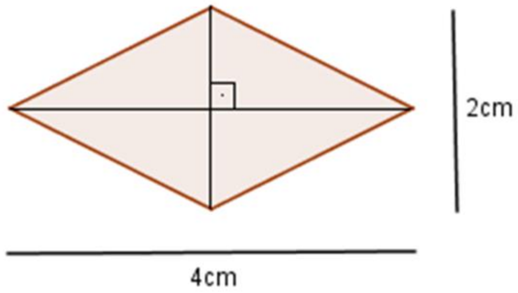
Porém, para Duval (2011, p. 86) essa desconstrução não é suficiente:

> É preciso também distinguir as representações físicas dessas unidades figurais, como as maquetes de cubo (3D/3D) ou os gabaritos (2D/3D) ou os fios estendidos ou um raio de laser (1D/3D) e as representações semióticas em perspectiva (3D/2D), ou o contorno fechado de superfícies (2D/2D) ou os traçados de curvas e retas (1D/2D).

Esses olhares e essas apreensões são possíveis numa figura geométrica, pois, para Duval (2012b, p. 121), uma figura geométrica é caracterizada como “uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo”. Esses elementos podem ser, segundo a sua dimensão, pontos, zonas ou traços. A caracterização dos pontos e traços é feita, respectivamente, por seu aspecto discreto e contínuo. E as zonas, por sua forma, seu contorno, ou seja, “um traço fechado ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo” (DUVAL, 2012b, p. 121). Moretti e Brandt (2015) lembram que, quanto à forma, uma figura pode ser organizada segundo as suas diversas dimensões: “ponto, linha, plano e volume” (p. 603).

Por exemplo, quando aplicamos a fórmula algébrica no losango (figura 11), temos que realizar a desconstrução dimensional (2D/1D), mudando o olhar, olhando para o unidimensional das medidas das diagonais ($4cm$ e $2cm$). Por conta disso, aplicar a fórmula algébrica: $A_{Losango} = \frac{D \times d}{2} = \frac{4\ cm \times 2\ cm}{2} = 4\ cm^2$, onde se obtém a medida de sua área, que é bidimensional. As formas 1D/2D presentes no losango são identificadas por meio do olhar inventor.

Figura 11 - Calcular a área do losango representado



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Duval (2005, 2011)

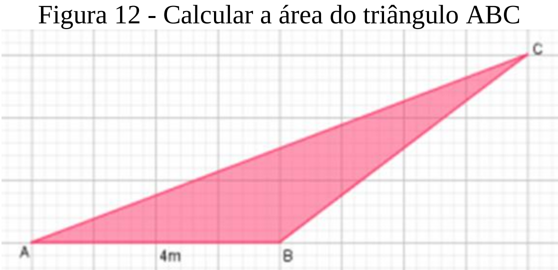
A visualização do losango se impõe mais facilmente ao nosso olhar, que é o olhar icônico do *botanista*. Porém, para visualizar os segmentos, exige-se o procedimento denominado por Duval (2005) de desconstrução dimensional, que requer o olhar não icônico de inventor sobre a figura, sendo essa “uma abordagem que vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas” (DUVAL, 2005, p. 16).

Esses procedimentos são importantes e devem ser considerados para a aprendizagem em geometria, pois o modo como vemos as figuras, segundo Duval (2005), depende da desconstrução dimensional que operamos sobre elas. Isso quer dizer:

> A maneira matemática de ver figuras consiste em decompô-las não importa qual a forma discriminada, quer dizer reconhecida como uma forma nD/2D, **em unidades figurais de um número de dimensões inferior à esta forma.** Assim a figura de um cubo ou de uma pirâmide (**3D**/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, de triângulos, etc. (unidades figurais **2D**/2D). E os polígonos são por sua vez decompostos em segmentos de retas (unidades figurais **1D**/2D). E as retas, ou os segmentos, podem ser decompostos em “pontos” (unidades **0D**/2D) (DUVAL, 2005, p. 13, tradução nossa, negrito do autor).

Podemos citar como exemplo os procedimentos feitos para encontrar a área do triângulo ABC (figura 12), considerando como base o segmento AB utilizando a fórmula algébrica.

Figura 12 - Calcular a área do triângulo ABC

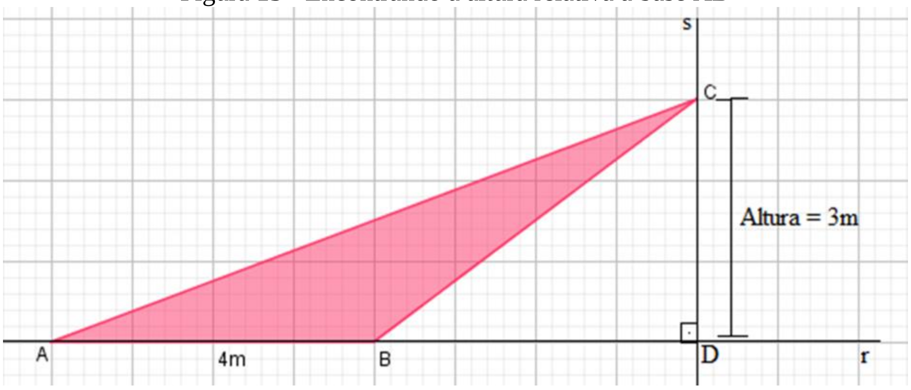


Fonte: Elaborada pela autora a partir de Duval (2005, 2011)

Observe que a altura relativa à base AB não é visível nem interna ao triângulo, sendo, por consequência, externa a ele.

Como a altura de um triângulo é “um segmento perpendicular, por um vértice do triângulo, à reta que contém o lado oposto” (MOISE; DOWNS, 1971, p. 191), deve-se traçar uma reta que contenha o segmento AB, a reta r. Traçando, a seguir, outra de modo que seja perpendicular a reta r e que passe pelo ponto C, a reta s. A intersecção dessas duas retas determina o ponto D (figura 13). O segmento CD é a altura relativa à base AB. Logo a área desse triângulo é: $A_{Triângulo\ ABC} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4\ m \times 3\ m}{2} = 6\ m^2$.

Figura 13 - Encontrando a altura relativa a base AB



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Duval (2005, 2011)

Para encontrar a altura realizamos uma desconstrução dimensional. Olhamos para o segmento AB do triângulo com o olhar inventor, o que nos leva a sair do triângulo representado (2D/2D) e ir para o 1D/2D. Isso é necessário para traçarmos a reta *r*. Enquanto que, para traçar a reta *s* mudamos o olhar para o 0D/2D, visualizando o ponto C, e traçando a reta *s* por meio de 1D/2D. Encontrando o ponto D indo do 1D/0D. Para, finalmente, encontrar a altura, trabalhando em 0D/1D.

Essa maneira matemática de ver as figuras em geometria, para Duval (2005, 2011), é diferente do modo como olhamos as outras, pois:

> Na maneira normal de ver, não levamos jamais em conta a dimensão das unidades figurais que reconhecemos e não temos preocupação de fazer variar essa dimensão para reconhecer outras unidades figurais que não vemos, mas que vão se tornar mais importantes que aquelas que vemos (DUVAL, 2011, p. 88).

Duval lembra que esse olhar “exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas” (p.88). E conclui que “É nessa maneira, violenta e irrealista que se fundamenta o enunciado das propriedades nas definições e nos teoremas” (p. 88).

Essa desconstrução dimensional que se coloca na aprendizagem da geometria deve ser superada, escolhendo atividades voltadas a essas explorações geométricas, pois muitas vezes os alunos nem se dão conta de sua existência. Sendo assim, nas atividades geométricas desenvolvidas neste trabalho, procuramos desenvolver esses olhares nos alunos, visto que, para Duval (2011, p. 94), “Para fazer o aluno entrar nessa maneira de ver é preciso elaborar tarefas e problemas específicos desde o ensino primário”.

Duval (2005, 2011), além da desconstrução dimensional, trata das operações de reconfiguração[24] que se pode operar nas figuras geométricas e o mergulhamento. Essa reconfiguração consiste em dividir uma figura "*em unidades figurais de mesma dimensão* $(2D \rightarrow 2D)$ e sua reconfiguração em outra figura cujo contorno global é ou não o mesmo" (DUVAL, 2011, p. 88, itálico do autor). Os tratamentos surgem dependendo da modificação realizada, "repartir uma figura em subfiguras permite, por exemplo, evidenciar a igualdade de áreas" (DUVAL, 2012b, p. 125).

A operação de reconfiguração é realizada a partir de uma decomposição na figura inicial. Podendo ser feita usando materiais manipuláveis, por exemplo: tangram, geoplano e malha quadriculada. Graficamente, essas modificações se traduzem pela adição de um traço ou mais na figura original, que podem ser realizadas por dobramentos ou recortes.

Para Duval (2005) essa decomposição pode ser de três tipos (figura 14):

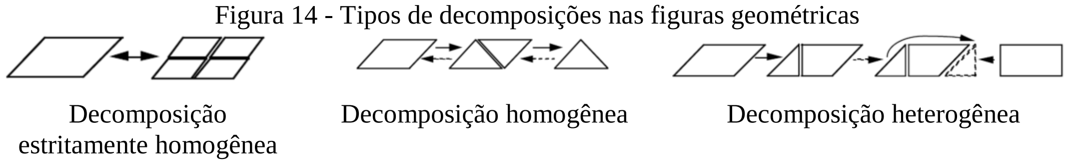
1) *Estritamente homogênea*: quando as unidades figurais das figuras obtidas na decomposição possuem a mesma forma da figura inicial.

2) *Homogêneas*: quando as unidades figurais das figuras obtidas na decomposição são diferentes da figura inicial, porém elas podem ser todas iguais entre si.

3) *Heterogêneas*: quando as figuras obtidas na decomposição são todas diferentes entre si.

Duval (2005) exemplifica essas três decomposiçoes com as seguintes figuras:

Figura 14 - Tipos de decomposições nas figuras geométricas



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Duval (2005, p.14)

Para Duval (2005, p. 14, tradução nossa, itálico do autor) "As *decomposições homogêneas* são as *transformações* que são *visualmente reversíveis* e que podem ser iniciadas espontaneamente somente de uma vista da figura. Em contraste, *as decomposições heterogêneas não são visualmente reversíveis".* Assim, é mais fácil obter a figura inicial a partir das decomposições homogêneas do que nas heterogêneas.

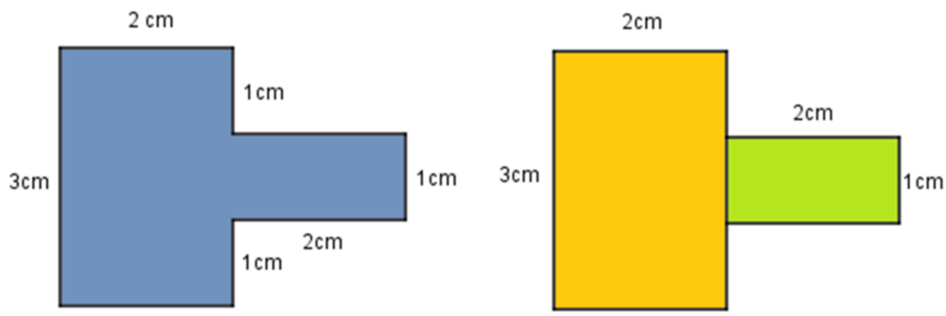
[24] É também denominada de divisão mereológica das formas (DUVAL, 2005, 2011).

Essas operações de reconfiguração servem, muitas vezes, para validar os cálculos e demonstrações que envolvem áreas de figuras planas, principalmente quando se usam materiais manipuláveis, com possibilidades de explorar heuristicamente uma figura. Transpondo assim a apreensão perceptiva, que muitas vezes, nos processos de aprendizagem, é a que os alunos se apegam, como relata Duval (2012b, p.124, grifo do autor): "**estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses**".

Por exemplo: Para calcular a área da figura octogonal azul (figura 15), dividimo-na em duas figuras: o retângulo amarelo e o retângulo verde, calculando essas áreas e as somando. Realizando assim a divisão mereológica homogênea.

A decomposição heurística obtida pela divisão mereológica nas figuras consiste em decompor a figura de partida em outras subfiguras de mesma dimensão. Em nosso estudo sobre representações semióticas e aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros, estamos interessados na decomposição das figuras bidimensionais $(2D/2D)$ em outras unidades figurais $(2D/2D)$. Esta divisão será feita para reconstruir, com as subfiguras obtidas nessa decomposição, outra figura, muitas vezes, diferente visualmente da figura de partida (caso da divisão mereológica no paralelogramo, reconstruindo com as peças obtidas na decomposição um retângulo (figura 16)), com a finalidade de formar figuras com áreas equivalentes.

Figura 15 - Decomposição da região octogonal em dois retângulos

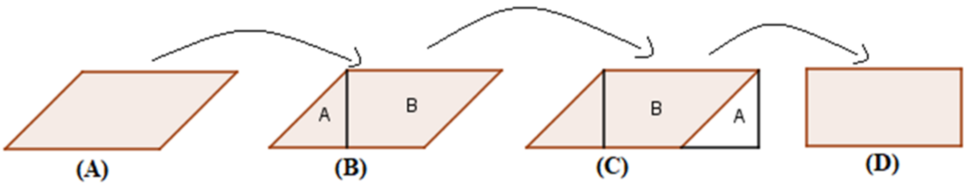


Fonte: Dados da pesquisa

Quer dizer, pode-se ainda reagrupar as partes obtidas no fracionamento, formando outras figuras, como observado por Duval (2012b, p.128, grifo do autor). "**De fato, as partes elementares obtidas por fracionamento, podem ser reagrupadas em**

várias subfiguras, todas pertencentes à figura inicial”. Semelhante ao caso da área do paralelogramo (figura 16), dividindo-o em duas figuras: o triângulo A e o trapézio retângulo B. Reagrupando essas figuras de modo a formar o retângulo. Por conta dessa modificação mereológica heterogênea é que a fórmula da área do paralelogramo é a mesma que a do retângulo: o produto de sua base por sua altura.

Figura 16 - Reconfigurando o paralelogramo em um retângulo



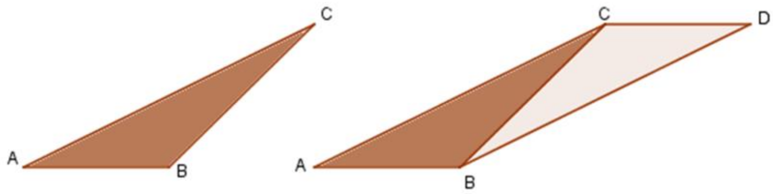
Fonte: Dados da pesquisa

Essa operação permite realizar tratamentos, compreendendo que a área do retângulo e a do paralelogramo são equivalentes. São essas operações intermediárias nas figuras que concedem a elas a produtividade heurística.

Nestas divisões mereológicas, estamos interessados nas operações de reconfigurações, que são várias, com as subfiguras obtidas nessa decomposição e assim formar uma nova figura com área conhecida ou que seja mais fácil de calculá-la. Articulando a visualização à heurística nas figuras geométricas, por meio de tratamentos figurais, relacionada à apreensão operatória com a finalidade de resolverem os problemas geométricos sobre áreas. Assim, são possíveis oportunizar, para a educação do aluno, novas formas de resolver uma mesma atividade matemática.

O mergulhamento é outra apreensão operatória ligada às modificações mereológicas. É quando, por exemplo, o triângulo se torna metade de um paralelogramo (figura 17). Razão essa que justifica a fórmula algébrica para a área do triângulo, porque ele é sempre a metade de um paralelogramo e, sendo assim, a sua área é a metade da área do paralelogramo, portanto sua área é: $\frac{b \times h}{2}$.

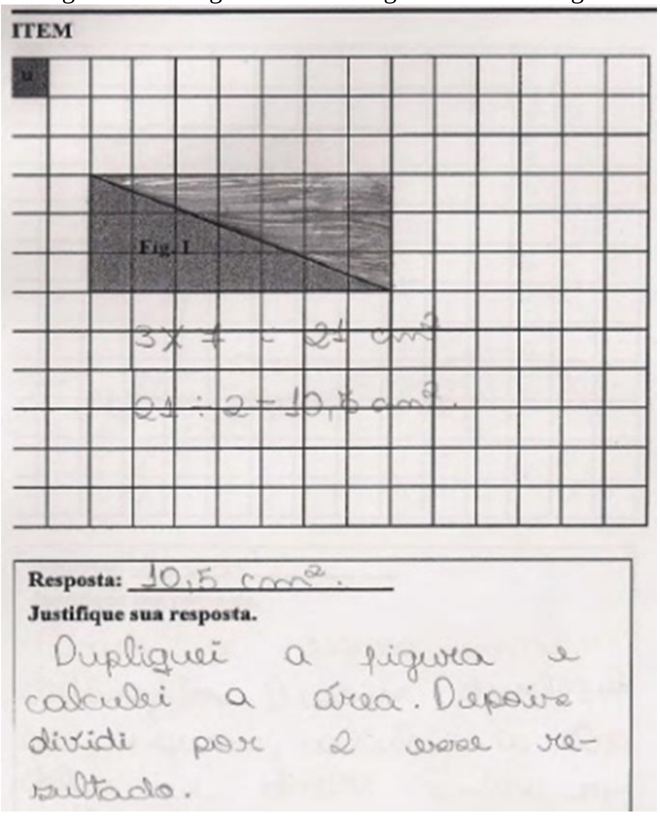
Figura 17 - Mergulhando o triângulo ABC em um paralelogramo ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

O estudo de Pessoa (2010), apresentado na (figura 18), para encontrar a área do triângulo considerando o quadradinho (*u)* como unidade de área, mostra um forte vínculo com as apreensões perceptiva e discursiva.

Figura 18 - Mergulhando o triângulo em um retângulo



Fonte: (PESSOA, 2010, p. 99)

A posição do triângulo, nesse problema, determina praticamente o tipo de tratamento a ser empregado. Os alunos são levados, pela apreensão perceptiva da figura e operatória “o mergulhamento”, a visualizarem o triângulo como a metade de um retângulo. Os registros realizados são influenciados por dois fatores: a posição do triângulo na malha, a qual sugere que o triângulo é retângulo e os valores das medidas dos lados do retângulo (três e sete), levando-os a multiplicá-los e dividi-lo por dois. Essa impressão inicial, a perceptiva, de quando se depara com uma figura, que é individual, que precisa ser considerada quando o objetivo é ensinar ou aprender geometria.

Essa atividade de construir o retângulo “ensina a ver”, que são os olhares desenvolvidos por Duval (2005). Realizando o que Duval (2012b) chama de **produtividade heurística**, fazendo aparecer o retângulo que o olho não vê à primeira vista. Os tratamentos feitos, constituídos da produtividade heurística nessa figura, combinam operações que não são puramente perceptiva e discursiva.

Assim, para a aprendizagem em matemática a operação de desconstrução ganha destaque, pois ela possibilita nas figuras tratamentos figurais, dando a elas o seu papel heurístico no cálculo de áreas de figuras planas, como nos coloca Flores e Moretti (2006, p. 12):

> Pensar o caso da reconfiguração de figuras geométricas planas no ensino de matemática como possibilidade heurística na resolução de problemas matemáticos, significa trazer para a educação do aluno novas formas de resolução para uma mesma atividade matemática. Isso quer dizer que, por exemplo, ao invés de o aluno resolver seus exercícios de cálculo de área usando somente o procedimento de fórmulas, ele terá outra alternativa de solução, ou seja, a busca heurística na própria figura. Isso significa também, possibilitar ao aluno uma desenvoltura tanto nas suas formas de pensar como na sua forma de olhar e, além de tudo, de raciocinar.

Flores e Moretti (2006) lembram o quão importante é a operação de reconfiguração numa figura em geometria, visto que os movimentos realizados nelas que permitem o desempenho de seu papel heurístico. Porém, essa operação nem sempre é evidente e muito menos simples para a maioria das figuras que são utilizadas no ensino. O uso dessa operação pode ser influenciado por diversos fatores, que a podem inibir ou até mesmo dificultá-la ao invés de auxiliar nos procedimentos efetuados. Entretanto, buscar caminhos heurísticos nas figuras para resolver problemas, permitem tratamentos figurais além da percepção, operando nelas a apreensão operatória.

Vale lembrar que:

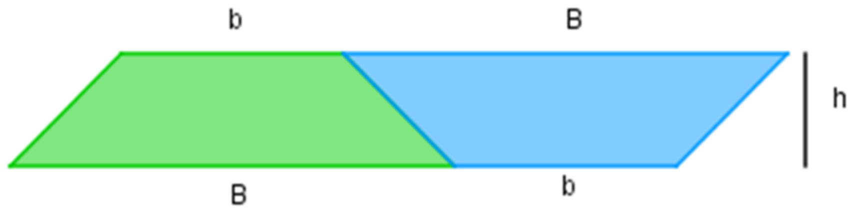
> A intuição heurística que traz uma figura pode levantar percepções distintas e envolver outros tantos fatores que possam auxiliar ou dificultar este papel heurístico. Isso significa que a utilização de figuras geométricas na resolução de problemas matemáticos requer de fato uma certa aprendizagem de leitura e interpretação destas. (FLORES; MORETTI, 2006, p. 12).

Esses processos de reconfigurações estão presentes nos cálculos de áreas de figuras planas, quer para compreendermos as razões das fórmulas algébricas, quer para a aprendizagem desse conceito. Exemplificaremos abaixo a fórmula algébrica da área do trapézio, juntamente com os olhares e as apreensões identificadas por Duval (2005, 2011, 2012b) em geometria.

2.3.1 As apreensões e os olhares nas áreas de figuras planas

Um dos modos para determinar a fórmula algébrica do trapézio é realizar a decomposição mereológica[25] homogênea[26] do paralelogramo (figura 19), de base $B + b$ e altura h, obtendo dois trapézios congruentes. Assim:

Figura 19 - Compreender a fórmula algébrica do trapézio



Fonte: Dados da pesquisa

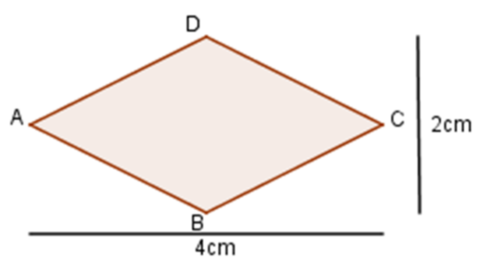
Como a área desse paralelogramo é o produto de sua base por sua altura temos que: $A = b \times h = (B + b) \times h$. Sendo assim, para se obter a área do trapézio verde basta dividir essa área por dois, porque ele corresponde à metade da área desse paralelogramo, quer dizer, sua área é: $\frac{(B+b)\times h}{2}$.

A divisão mereológica homogênea do paralelogramo foi fundamental para obter a área do trapézio. Juntamente com os registros algébrico e figural e tratamentos nestes.

A adição do traço, dividindo o paralelogramo ao meio para obter os trapézios, é comandada pela apreensão *perceptiva*. Sendo necessário para identificar essas figuras o olhar *botanista*. Exigindo para a resolução o olhar não icônico, o *inventor*.

Para a área do losango de diagonais 4 cm e 2 cm (figura 20):

Figura 20 - Determinar a área do losango ABCD



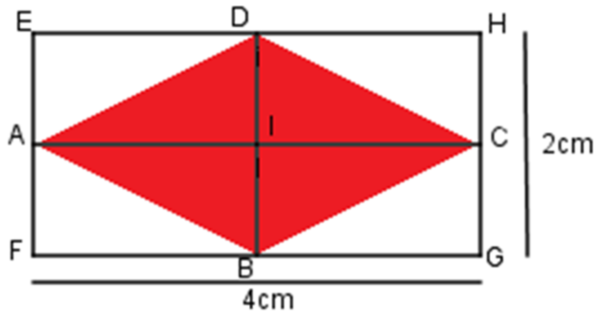
Fonte: Dados da pesquisa

[25] Para Duval (2005, 2011) este procedimento, nas figuras geométricas, consiste em dividir uma figura em subfiguras de mesma dimensão ($2D \to 2D$).

[26] A divisão mereológica é homogênea quando as subfiguras obtidas pelo procedimento de decomposição são iguais, mas diferentes da figura inicial.

Pode-se proceder, realizando tratamentos figurais nesta figura (figura 21). Contornando-o pelo retângulo (FGHE) e traçando as diagonais: AC e BD. Dividindo o retângulo em oito triângulos congruentes, os triângulos: AID, DEA, CID, DHC, AIB, BFA, CIB e BGC. Como os triângulos que estão fora do losango são iguais aos que estão dentro dele, tem-se que sua área é a metade da área do retângulo de lados: $D = 4\ cm$ e $d = 2\ cm$. Portanto a sua área é: $\frac{D \times d}{2} = \frac{4\ cm \times 2\ cm}{2} = 4\ cm^2$.

Figura 21 - Tratamentos figurais no losango para determinar a sua área



Fonte: Dados da pesquisa

Esses modos de ver uma figura geométrica e suas apreensões, expostos nesse texto juntamente com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, representam um papel relevante frente aos processos de aprendizagem do conceito de área de figuras planas, que precisam ser consideradas do ponto de vista cognitivo. Portanto, esses dois elementos da Teoria de Duval serão relacionados na pesquisa considerando esses modos de ver em geometria, bem como as conversões e os tratamentos nos registros: figural, numérico, algébrico e língua materna.

Apresentaremos no próximo capítulo as demonstrações de áreas consideradas importantes em nosso estudo e um olhar para a apostila onde realizamos as nossas sessões de ensino.

CAPÍTULO 3: CONCEITO DE ÁREA

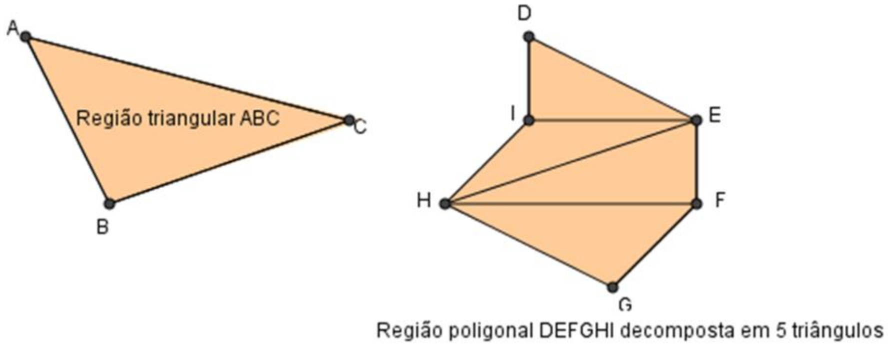
Neste capítulo demonstraremos as fórmulas algébricas das áreas das seguintes figuras: quadrado, retângulo, triângulo, trapézio, paralelogramo e losango; pautando-nos basicamente em (MOISE; DOWNS, 1971). As demonstrações envolvendo fórmulas para o cálculo de áreas são importantes em nosso trabalho, pois temos o intuito de tentar colocar em equilíbrio “[...] o intuitivo e o dedutivo, o concreto e o abstrato, o experimental e o lógico [...]” (LORENZATO, 1995, p. 4). Assim, por meio da abordagem de aspectos práticos e teóricos visamos que ocorra uma aprendizagem geométrica expressiva.

Na parte final do capítulo apresentamos o nosso olhar para a apostila adotada pela escola onde realizamos as sessões de ensino, com vistas à elaboração das atividades. Segundo recomendações curriculares[27], deve-se iniciar a geometria dedutiva considerando o contexto da escola e a formação do professor, apoiando-se em situações-problema bem adaptadas.

3.1 O conceito de área

Considerando que o presente estudo trata do conceito de área de figuras planas, definimos *região triangular* sendo a reunião de um triângulo com o seu interior. E *região poligonal* de uma figura plana a formação por justaposição de finitas regiões triangulares em um plano, de modo que, se ocorrer à interceptação entre essas regiões triangulares, será um segmento ou um ponto. No exemplo abaixo (figura 22 à direita), para a região poligonal, temos a confluência das regiões triangulares formando segmentos. Observe:

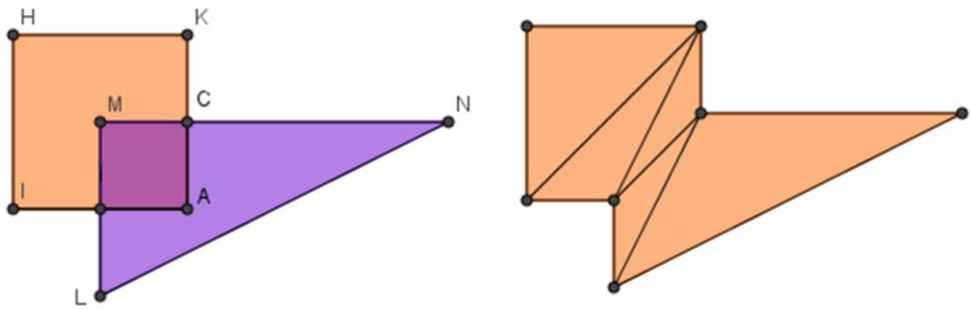
Figura 22 - Região triangular e região poligonal



Fonte: Dados da pesquisa

Nos casos em que a intersecção de duas regiões poligonais não é nem um ponto e nem um segmento, Moise e Downs (1971), observam que é sempre possível dividi-la em regiões triangulares (figura 23), onde a intersecção é um quadrilátero, mostrando que se trata também de uma região poligonal. Divisão esta que pode ser feita de diversas maneiras.

Figura 23 - Divisão da intersecção de duas regiões poligonais em regiões triangulares



Fonte: Dados da pesquisa

Por conveniência, daqui por diante, mesmo que a figura não esteja sombreada estaremos sempre considerando a região que está sendo descrita. Visto que, estamos estudando áreas de regiões poligonais.

Considerando o objetivo exposto acima, usaremos de acordo com Moise e Downs (1971) os quatro postulados:

Postulado 01: Postulado da área – Para cada região poligonal existe um único número real positivo correspondente a ela.

Por definição a área de uma região poligonal é o número positivo correspondente a ela, o qual depende somente de sua forma e tamanho, desconsiderando a região onde se localiza no espaço.

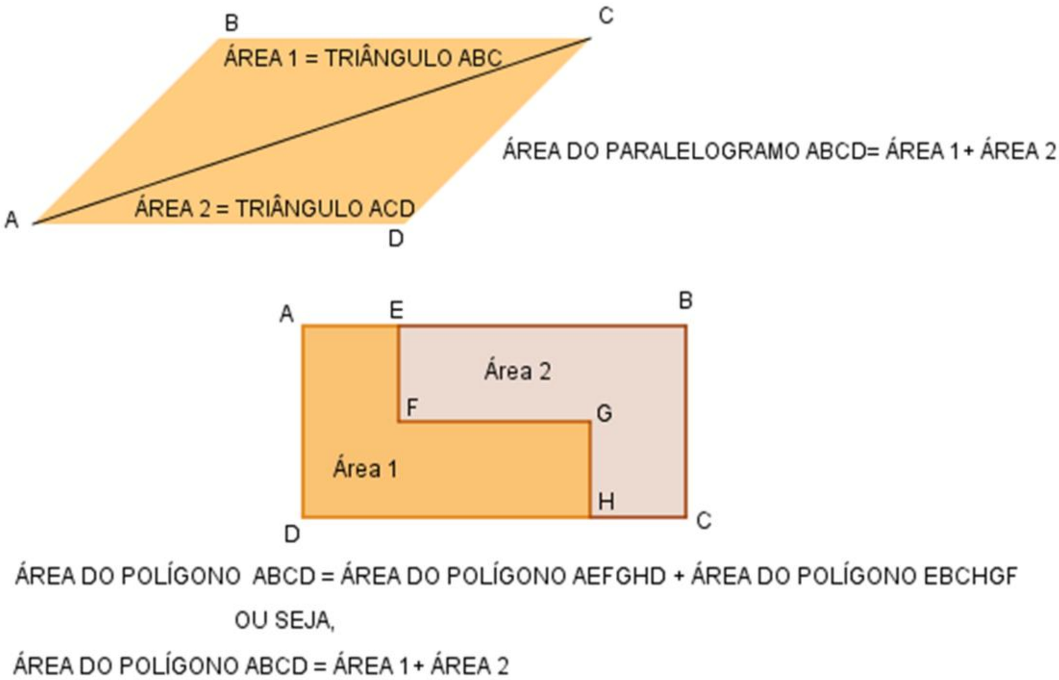
Por conveniência daqui por diante usaremos para *região poligonal* somente *região*.

Postulado 02: Postulado da congruência – Quando dois triângulos são congruentes as áreas de suas regiões triangulares também são as mesmas.

Postulado 03: Postulado de adição de áreas: Se uma região é a união de duas regiões que se interceptam, absolutamente, em um número limitado de segmentos e pontos, então a área dessa região é igual à soma das áreas dessas duas regiões.

Se uma região for dividida em duas partes então a soma das áreas dessas partes será a área da região. Sendo a intersecção, no máximo, um ponto ou um segmento. Nos casos que a intersecção for um polígono, procede-se dividindo a região obtendo um segmento ou um polígono (figura 23).

Figura 24 - Área da figura é a soma das áreas das partes em que ela foi dividida



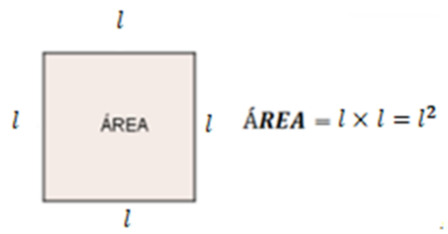
Fonte: Dados da pesquisa

Para tanto, assumiremos que a *área do quadrado* é o comprimento do seu lado elevado ao quadrado, considerando evidentemente a área da região quadrada (MOISE; DOWNS, 1971).

Posteriormente, demonstraremos as áreas das seguintes figuras: do retângulo, do triângulo, do trapézio, losango e do paralelogramo. Em cada caso, estaremos nos referindo à área da região correspondente.

Área do quadrado: A área de um quadrado de lado l é $l \times l = l^2$.

Figura 25 - Área do quadrado



Fonte: Dados da pesquisa

Demonstraremos agora a área do retângulo, considerando a área do quadrado acima.

Demonstração 01: Área do retângulo

A área de um retângulo de base b e altura h é o produto de sua base por sua altura $\left(Área_{Retângulo} = b \times h\right)$.

Figura 26 - Área do retângulo

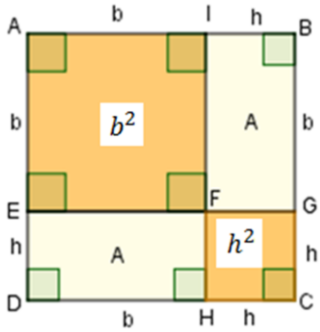
Fonte: Dados da pesquisa

Demonstração:

Considere a figura 27, o quadrado ABCD. Provaremos que a área do retângulo IBGF= área do retângulo EFHD= $b \times h$.

Como assumimos anteriormente que a área do quadrado é o quadrado do comprimento do seu lado, então as áreas dos quadrados AIFE e FGCH são respectivamente b^2 e h^2. Pelo mesma razão a área do quadrado ABCD de lado $b + h$ é $(b + h)^2$.

Figura 27 - Área dos retângulos IBGF e EFDH



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo postulado da adição das áreas, temos que á área do quadrado ABCD é igual à soma das áreas dos dois retângulos e dos dois quadrados, assim:

$$(b + h)^2 = b^2 + A + A + h^2$$

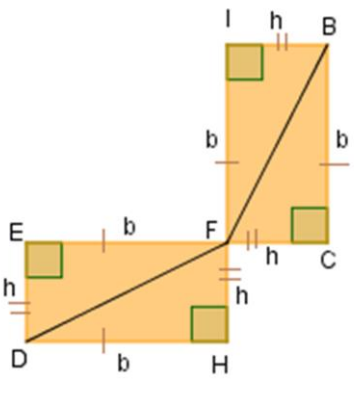
$$b^2 + 2bh + h^2 = b^2 + 2A + h^2$$

Logo, $2b \times h = 2A$

Portanto a área do retângulo (A) de base (b) e altura (h) é: $A = b \times h$

Observe que os dois retângulos (figura 27) têm a mesma área porque é possível dividi-los em quatro triângulos congruentes (figura 28), caso *LAL* (lado, ângulo, lado). Sendo a área de cada retângulo duas vezes a área de cada triângulo.

Figura 28 - Os retângulos IBGF e EFDH são congruentes



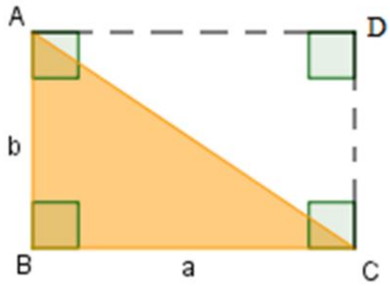
Fonte: Dados da pesquisa

Nessa demonstração podemos perceber que a visualização articulada ao raciocínio contribui para a demonstração da área do retângulo. Limitamo-nos a uma sequência de duas figuras, uma em estado inicial (o quadrado ABCD) e outra em estado final (a decomposição desse quadrado em dois retângulos e em dois quadrados, congruentes entre si). Trata-se de uma visualização truncada que não tem o poder de provar. É necessário para demonstrar essa área a conversão do registro figural para o algébrico e tratamentos neste. O registro figural serve para argumentar e explicitar o raciocínio, visualizando uma sequência de cinco figuras correspondentes a operações visuais efetuadas em unidades figurais $2D$.

Demonstração 02: Área do triângulo

A área de um triângulo é o semiproduto de sua base por sua altura correspondente, $\left(\boldsymbol{Área_{Triângulo}} = \frac{\boldsymbol{a \times b}}{\boldsymbol{2}}\right)$**.**

Figura 29 - Área do triângulo ABC



Fonte: Dados da pesquisa

Demonstração: Dado um triângulo retângulo ABC de catetos a e b, mostraremos que a sua área é $\frac{a \times b}{2}$.

Observe que o triângulo ABC pode ser inscrito num retângulo ABCD[28], de área conhecida, $área = a \times b$.

As áreas dos triângulos ABC e ADC são iguais, porque os triângulos são congruentes pelo caso LAL (lado, ângulo, lado). Indicaremos suas áreas por A. Logo pelo postulado da adição das áreas temos que:

$$área\ do\ retângulo\ ABCD = área\ do\ triângulo\ ABC + área\ do\ triângulo\ ADC$$

$$a \times b = A + A$$

Portanto, $A = \frac{a \times b}{2}\ que\ é\ o\ que\ pretendíamos\ demonstrar.$

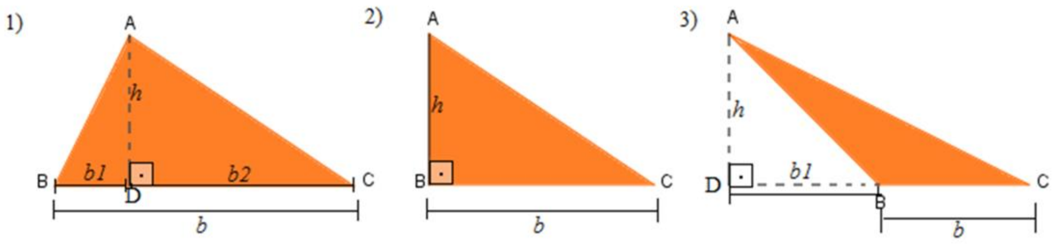
Observe que:

A altura de um triângulo é obtida traçando um segmento a partir de um de seus vértices, perpendicular a reta que contém o lado oposto. Nesse caso a altura

[28] Esse procedimento é denominado de mergulhamento (DUVAL, 2005).

correspondente à base *(b)* pode ser (figura 30): interna ao triângulo (1), um dos lados do triângulo (2) ou externa ao triângulo (3).

Figura 30 - Possibilidades para a altura do triângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Para o caso 1): Observe que a altura h dividiu o triângulo ABC em dois triângulos retângulos ADB e ADC e como já foi demonstrado suas áreas são $\frac{b_1 \times h}{2}$ e $\frac{b_2 \times h}{2}$, respectivamente.

Pelo postulado de adição das áreas temos que:

$$\acute{A}rea\ do\ triângulo\ ABC = área\ do\ triângulo\ ADB + área\ do\ triângulo\ ADC$$

$$= \frac{b_{1\times} h}{2} + \frac{b_2 \times h}{2} = \frac{b \times h}{2}$$

Nesse caso decompomos o triângulo inicial em outros dois triângulos com áreas conhecidas.

Para o caso 2): Neste caso o triângulo é retângulo e sua área é $\frac{b \times h}{2}$, A= $\frac{b \times h}{2}$. Conforme já foi demonstrado (corresponde à metade da área de um paralelogramo após o mergulhamento).

Para o caso 3): Neste caso a altura h relativa base a está fora do triângulo ABC. Entretanto, pelo postulado de adição de áreas temos que:

$$\acute{A}rea\ do\ triângulo\ ADB + área\ do\ triângulo\ ABC = área\ do\ triângulo\ ADC$$

Como a área do triângulo ADB= $\frac{b_{1\times} h}{2}$ e a área do triângulo ADC = $\frac{(b_1 + b) \times h}{2}$, então:

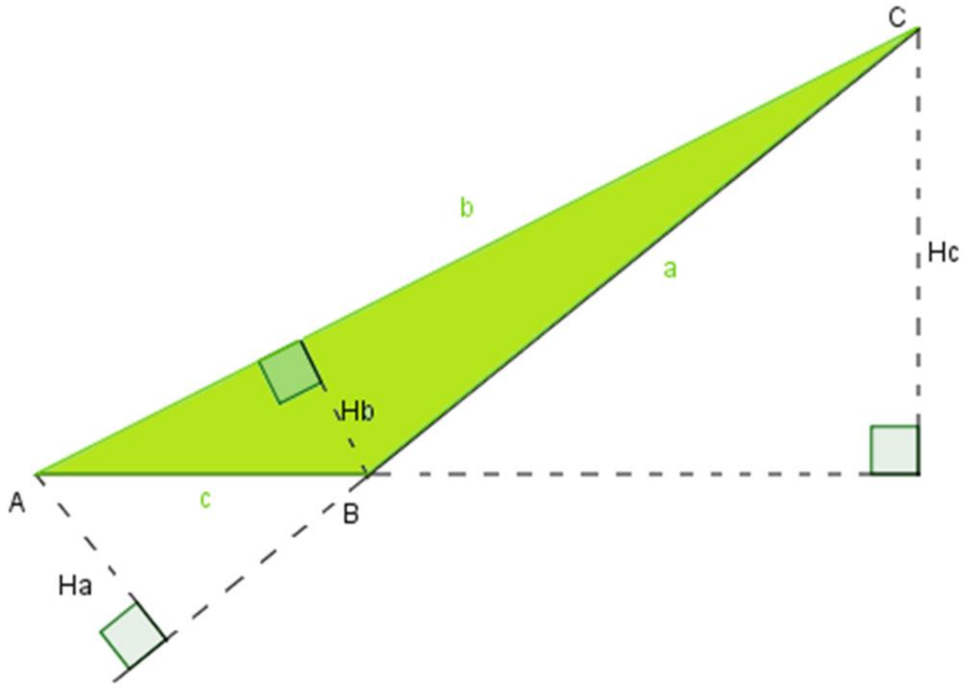
$$\frac{b_1 \times h}{2} + área\ do\ triângulo\ ABC = \frac{(b_1 + b) \times h}{2}$$

Logo, a $área\ do\ triângulo\ ABC = \frac{b \times h}{2}$

Solucionamos essa área por fora, retirando da área do triângulo ADC a área do triângulo ADB. Restando somente a área do triângulo ABC como queríamos mostrar. A adição dos traços, as decomposições na figural inicial, os registros figural, algébrico e tratamentos nesses foram determinantes.

Observe que, segundo a demonstração 2[29], podemos obter a área de um triângulo (figura 31) de três modos diferentes ($\frac{b\times h}{2}=\frac{a\times H_a}{2}=\frac{b\times H_b}{2}=\frac{c\times H_c}{2}$).

Figura 31 - Altura relativa a cada base do triângulo ABC



Fonte: Dados da pesquisa

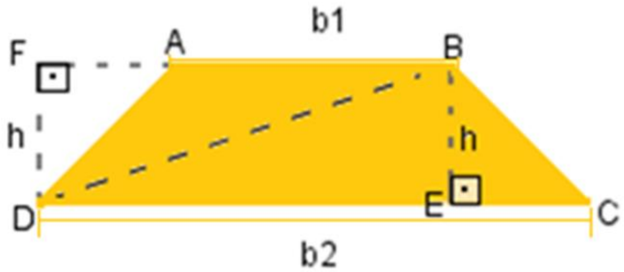
Como sabemos calcular a área do triângulo, para encontrar a área de uma região poligonal qualquer basta dividi-la em triângulos e somar as suas áreas, resultando na área da região poligonal. É esse procedimento que usaremos para a área do trapézio a seguir.

[29] A área do triângulo ($\frac{b\times h}{2}$).

Demonstração 03: Área do trapézio

A área do trapézio é o semiproduto da soma das bases por sua altura ($\boldsymbol{Área_{Trapézio} = \frac{(b_1+b_2)\times h}{2}}$).

Figura 32 - Área do trapézio ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

Observe que o quadrilátero FBED no trapézio ABCD é um retângulo. Logo FD=BE=h.

Adicionando um traço a esse trapézio (a diagonal DB), dividimo-lo em dois triângulos (o ABD e o BCD, com áreas $\frac{b_1 \times h}{2}$ e $\frac{b_2 \times h}{2}$, respectivamente).

Pelo postulado da adição das áreas temos que:

$$Área\ do\ trapézio\ ABCD = área\ do\ triângulo\ ABD + área\ do\ triângulo\ BCD$$

Ou seja,

$$Área\ do\ trapézio\ ABCD = \frac{b_1 \times h}{2} + \frac{b_{2\times} h}{2}$$

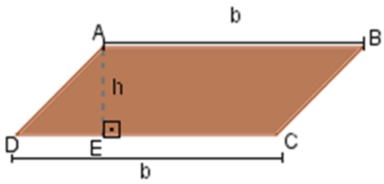
$$Área\ do\ trapézio\ ABCD = \frac{h \times (b_1 + b_2)}{2}.$$

Portanto a área do trapézio ABCD =$\frac{(b_1+b_2)\times h}{2}$.

Demonstração 04: Área do paralelogramo

A área do paralelogramo é o produto de sua base por sua altura correspondente ($\boldsymbol{Área_{Paralelogramo} = b \times h}$).

Figura 33 - Área do paralelogramo ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

Por meio da adição de um traço a essa figura, descompomo-la em dois triângulos congruentes (caso LLL).

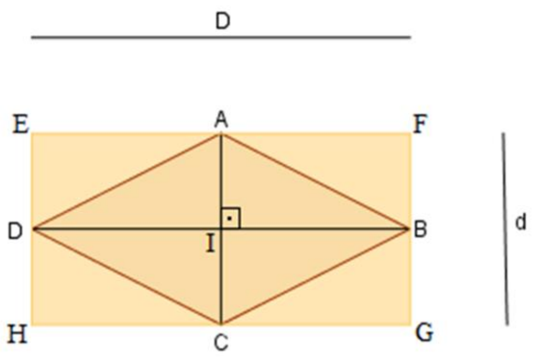
Logo a área desse paralelogramo é a soma das áreas desses triângulos. Assim, $Área_{Paralelogramo\ ABCD} = \frac{b \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} = b \times h$.

Portanto a área do paralelogramo é o produto de sua base por sua altura correspondente.

Demonstração 05: Área do losango

A área do losango é o semiproduto de suas diagonais ($Área_{Losango} = \frac{D \times d}{2}$).

Figura 34 - Área do losango ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

Mergulhando esse losango em um retângulo EFGH e o decompondo em oito triângulos congruentes (EDA, AID, FBA, AIB, DHC, ICD, BGC e ICB) pelo caso lado ângulo lado(LAL)[30], temos a mesma quantidade de triângulos dentro e fora do losango. Logo sua área é a metade da área do retângulo, assim, sua área é $\frac{D \times d}{2}$.

Portanto a área desse losango é $\frac{D \times d}{2}$.

Essas fórmulas algébricas normalmente são abordadas nos livros didáticos e apostilas escolares a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, interligando o campo das grandezas com o da álgebra e o de números e operações (BRASIL, 1998).

Por outro lado, segundo recomendações curriculares, deve-se iniciar a geometria dedutiva considerando o contexto da escola e a formação do professor, apoiando-se em situações-problema bem adaptadas (BRASIL, 1998). Pensando assim é

[30] Como por hipótese o quadrilátero ABCD é um losango então AB=BC=CD=DA e suas diagonais D e d se dividem ao meio e são perpendiculares entre si.

que no próximo tópico lançamos um olhar sobre a apostila adotada na escola onde realizamos a experimentação, com vistas à elaboração das atividades.

3.2 A abordagem de áreas nas apostilas da escola

Para escolher e elaborar as atividades da nossa sequência didática, olhamos para as apostilas adotadas pela escola, para o quinto[31] e o sexto[32] anos do Ensino Fundamental, com o intuito de verificar como é abordado o conteúdo de área de figuras planas nelas. Se as fórmulas algébricas são logo fornecidas, se aparecem situações de: produção e/ou comparação de superfícies; composição, decomposição, reconfiguração de figuras planas e recursos didáticos. Procedimentos esses importantes e que precisam ser considerados, visto que em estudos como Facco (2003), Ferreira (2010) e Silva (2016) as situações de comparação, produção de superfícies e procedimentos de composição e decomposição contribuem para a aprendizagem desse conceito. Assim como a utilização de recursos didáticos (SANTANA, 2006).

Ao olharmos para as apostilas procuramos identificar os seguintes procedimentos:

- As apostilas apresentam procedimentos como a decomposição, composição e reconfiguração de figuras planas no estudo de áreas de figuras planas? Se sim, como?
- Abordam situações de produção e comparação de áreas?
- Fornecem as fórmulas algébricas?
- Na resolução das atividades oportunizam ao aluno a resolução por meio de mais de uma estratégia?

A apostila do quinto ano é subdividida em quatro módulos, um por bimestre, totalizando 26 capítulos. O conteúdo áreas de figuras planas é apresentado em dois capítulos, um no segundo módulo, no 11º capítulo e o outro no terceiro módulo, no 20º capítulo. O capítulo onze têm 11 páginas (101 a 111) e dessas, sete são destinadas a área e perímetro de figuras planas.

---

[31] SIM – Sistema de Ensino. FTD Sistema de Ensino: SIM: português, matemática, ciências, história, geografia: 5º ano, módulos 2 e 3. – 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2014.
[32] SAS – Sistema Ari de Sá de Ensino. Silva Júnior, Francisco Ribeiro da. Atividades suplementares: 6º ano/ Francisco Ribeiro da Silva Júnior [et al]. – 2. Ed. – Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2015. (Coleção Fundamental). 94p. v. 4.

Inicia-se esse capítulo com a imagem de quatro figuras (um retângulo, duas figuras hexagonais e um decágono) para os alunos compararem suas áreas (maior e menor). Sem fornecer noções de área.

A seguir, trabalha-se a ideia de superfícies planas com algumas formas geométricas (quadrado, o triângulo e o retângulo). Um retângulo e um quadrado são quadriculados em quadrado de área 1 cm^2 com a finalidade de calculá-las por contagem dos quadradinhos. Os procedimentos de composição, decomposição e comparação de áreas não são trabalhados nas atividades propostas aos alunos. No entanto, nas atividades com a malha centimetrada se pede para calcular a área de algumas figuras onde há os triângulos que correspondem à metade do quadradinho da malha. E também atividades apresentando apenas o contorno das figuras para determinar sua área em cm^2 onde os alunos precisam quadricular a região poligonal em quadrados com 1 cm^2 de área, aparecendo após esse procedimento triângulos também.

Implicitamente o professor e/ou aluno(s) são levados nesses procedimentos a contarem os quadradinhos e duas metades de triângulos como mais um quadradinho. A professora dos alunos do quinto ano, após algumas sessões de ensino, relatou que nos triângulos quadriculados em quadradinhos com 1 cm^2 de área não pensava em adicionar traços neste para visualizá-lo como a metade de quadrados e/ou retângulos, afirmando que esse procedimento é bem mais fácil e que os levaria a compreender a fórmula da área do triângulo (razão pela qual se divide por dois).

Percebemos em uma atividade a tentativa de relacionar área e perímetro. Quatro retângulos são fornecidos em uma atividade para calcular a área e o perímetro e compará-los. Os alunos são levados novamente a usar a régua para medir os lados e quadricular a região poligonal. Não identificamos orientações didáticas ao professor para essa atividade. Analisando algumas produções dos alunos nesse material percebemos que alguns mediram os segmentos com a régua e calcularam sua área (multiplicando as dimensões) e seu perímetro e outros quadricularam toda a região (calculando a área por contagem dos quadradinhos). Percebemos que algumas dessas respostas apresentavam o cm tanto para o perímetro quanto para a área. Eles tiveram essa mesma dificuldade em algumas atividades durante as sessões de ensino, para encontrar a área do retângulo, alguns afirmavam que bastava somente multiplicar os seus lados (sem saber, muitas vezes, se usavam cm ou cm^2 apresentando uma dificuldade dimensional).

Identificamos uma situação de produção de uma superfície medindo uma unidade de área, onde os alunos são orientados a construírem um quadrado com jornal de $1\ m^2$ de área para descobrirem por recobrimento e contagem a área de algumas superfícies. A seguir, estratégias de resolução para o cálculo de áreas são discutidas com o objetivo de o aluno compreender que para calcular a área de retângulos e/ou quadrados basta multiplicar a medida de seus lados sem precisar realizar a contagem dos quadrados usados para recobrir a superfície. Porém, sem decompor o quadrado com $1\ m^2$ de área e compor com ele outras figuras com áreas equivalentes.

No vigésimo capítulo[33] se retomam os estudos de áreas de figuras planas após apresentar aos alunos alguns polígonos como: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo, trapézio, pentágono, entre outros. Apresentando aos alunos a imagem do recurso didático geoplano na apostila e a construção nele, com lápis, de algumas figuras sem solicitar o cálculo da área. A seguir, pede-se a produção de duas superfícies (um retângulo e um quadrado) com o mesmo perímetro.

Percebemos que esse recurso poderia ser mais explorado, assim como identificado em Santana (2006), construindo figuras diferentes com áreas equivalentes e explorando o cálculo de áreas em outras figuras por meio dos procedimentos de decomposição, composição e reconfiguração. Bem como, conduzindo os alunos à compreensão das fórmulas algébricas empregadas para o cálculo de áreas, muitas vezes mecanicamente.

Identificamos que essa apostila não trabalha procedimentos de comparação de áreas e outras unidades de medidas além do centímetro quadrado e do metro quadrado, apresentando somente o quadrado com essas áreas. Essa limitação não contribui para a percepção e raciocínio de que outras figuras podem ter essas áreas, ou seja, que existem outras figuras geométricas que possuem $1\ cm^2$ ou $1\ m^2$ de área. Na apostila também não identificamos atividades envolvendo equivalência de área com outras unidades de medida ou com situações de comparação de área por superposição ou recorte e colagem (desconsiderando nesse caso o quadro numérico).

Percebemos também que o conteúdo de área de figuras planas não é articulado a outros conceitos matemáticos além do perímetro. Não encontramos em nenhuma atividade situações mais cotidianas como calcular a área de um terreno. Enfim, não encontramos em nenhum dos módulos o procedimento de comparar áreas por recorte,

[33] Trata-se do último capítulo desse módulo, para o terceiro bimestre.

colagem ou superposição, nem o trabalho com as fórmulas algébricas para o cálculo de área.

No entanto, a professora dessa turma relatou numa conversa informal que no REP[34] procurou colocar atividades onde os alunos tinham que calcular a área de algumas figuras planas[35] mobilizando as fórmulas algébricas. Ela explicou essas fórmulas em sala de aula, visto que, achou pouco o conteúdo abordado na apostila nos dois módulos. Nessas atividades, basicamente, bastava identificar as figuras planas e aplicar as fórmulas. A professora ressaltou ainda que não utilizou nenhum recurso didático nessas aulas, nem os procedimentos de composição, decomposição e reconfiguração de figuras planas.

A apostila não explora atividades para possibilitar que o aluno calcule a área das figuras por meio de procedimentos diversificados como: contagem, sobreposição, decomposição, composição, reconfiguração e cálculos numéricos para uma mesma situação-problema.

A apostila do sexto ano[36] também possui quatro módulos, trabalhados um por bimestre, totalizando 16 capítulos; cinco para o primeiro bimestre, cinco para o segundo, três para o terceiro e três para o quarto. Para cada um desses módulos há um caderno com atividades suplementares.

O conteúdo de área de figuras planas é abordado nessa apostila no antepenúltimo capítulo do quarto bimestre, ou seja, no 15º. Nele são abordadas as áreas das seguintes figuras: quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramo, trapézio, losango e círculo.

No livro do professor, para o 15º capítulo, há sugestões de trabalho de atividades e expectativas de aprendizagem para esse conteúdo, como:

> - Transformar medidas de área de uma unidade para outra.
> - Identificar e relacionar medidas[37] que utilizam unidades agrárias.
> - Transformar medidas agrárias de uma unidade para outra.
> - Calcular áreas de figuras planas, utilizando suas respectivas fórmulas.
> - Resolver situações-problema que envolvam cálculo de áreas de figuras planas. (SAS, Livro do professor – 6º ano, 2017, v.4, p. 7).

[34] REP: Roteiro de estudo Pessoal, um bloco de atividades que cada aluno recebe no início da semana e tem que entregar resolvido na outra semana, quando o troca por outro.
[35] Quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramo, trapézio e losango.
[36] SAS: Sistema Ari de Sá de Ensino, 4. ed. Fortaleza, 2017.
[37] Neste caso são as medidas de área.

Percebemos que as atividades envolvem mais as unidades de medida de área e suas transformações do que os procedimentos de comparação e produção de superfície com determinada área, bem como os processos de decomposição, decomposição, reconfiguração e ladrilhamento.

A orientação didática para o professor é de iniciar este capítulo com o cubo mágico, levando-o para a sala de aula para que os alunos o manuseiem, atraindo a atenção, estimulando o raciocínio lógico, a criatividade e o desenvolvimento de estratégias. Porém, sem sugestões e orientações de calcular a área de cada face desse poliedro regular.

Os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado são apresentados aos alunos por uma tabela, explicando as transformações dessas unidades de medida por meio de textos e exercícios resolvidos.

Para que os alunos possam compreender que $1\,m^2$ corresponde à medida da área da superfície de um quadrado de lado $1\,m$, é sugerido o trabalho com material concreto; construindo esse quadrado com régua, jornal/revista e fita crepe ou cola. Respondendo atividades voltadas para os múltiplos e submúltiplos dessa unidade de medida de área, sem explorar no quadrado construído as possíveis decomposições e composições de outras figuras com a mesma área. Entendemos que essa escolha metodológica na apostila pode induzir os alunos a concluírem de que somente esse quadrado tem essa área.

Para que os alunos possam compreender os múltiplos e submúltiplos do metro quadrado a sugestão nas orientações didáticas[38] é de o professor organizar diversos modelos reais, para que os alunos tenham noção do “tamanho” deles. O papel quadriculado também é sugerido, como recurso didático, para explorar outras atividades com áreas de figuras planas, porém sem fornecer nenhum exemplo prático para orientar essa escolha metodológica do professor. Além disso, sem explicitar os procedimentos (composição, decomposição e reconfiguração) possíveis de se explorar nesses modelos para a aprendizagem de área, principalmente com o quadrado de $1\,m^2$ de área.

Na apostila além dessas medidas, têm-se as unidades de medidas agrárias como: o hectare (ha), o Are (a) e o centiare (ca), sem fornecer ideias ou explicações de onde elas são empregadas. O que há são indicações de que essas medidas são usadas

[38] Essa orientação didática pode ser vista em: Paoliello Júnior, Lilio. Livro do Professor: Matemática-6º ano/Lilio Paoliello Júnior.-4. ed.-Fortaleza: Sistema Ari de Sá de Ensino, 2017. (Coleção Fundamental). 13p: v.4. na oitava página.

para medir normalmente áreas rurais como fazendas, sítios e plantações. Que a unidade padrão, nesse caso, é a are, indicada pela letra a e definida “[...] como a superfície plana ocupada por um quadrado cujo lado tem medida igual a 10 metros.” (SAS: 6º ano, módulo 4, 2017, p. 28).

Nas atividades da apostila não identificamos as medidas de áreas mais cotidianas como o cm^2, dm^2 e o mm^2 em situações de comparação e/ou produção e/ou cálculo de área, bem como os procedimentos de decomposição, composição e reconfiguração, usando essas medidas de área. Não percebemos o trabalho em relação ao tamanho e as formas que as superfícies com essas áreas podem ter.

Apresenta-se, além dessas medidas de superfície, ainda o alqueire[39] que embora não seja uma unidade padrão de medida agrária “é utilizado para indicar a área de fazendas ou superfícies de terra.” (SAS: 6º ano, módulo 4, 2017, p. 30). Nas atividades percebemos as transformações dessas unidades de medida de área (inclusive o km^2) e o cálculo de área de algumas figuras em que se exigem suas transformações para a resolução. Algumas atividades requerem também o conhecimento de medidas de capacidade como “Quantas toneladas de cana-de-açúcar são produzidas em $6{,}2\ km^2$ de terra se, em 1 hectare, a produção é de 75 toneladas?” SAS: 6º ano, módulo 4, 2017, p. 30).

Em algumas atividades há a representação de paralelepípedos com as suas dimensões em centímetros, solicitando que os alunos determinem a área total da superfície de cada um deles. Nesse caso o aluno calcula a área das figuras planas que o compõem e as soma. Entretanto, os procedimentos que devem ser usados para a resolução não ficam claros, até então nenhuma fórmula algébrica foi abordada, nem os procedimentos possíveis que podem ser mobilizados em atividades desse tipo. Assim, subentende que o professor as resolva por meio das fórmulas, visto que nem a malha quadriculada foi usada na explicação e/ou resolução das atividades.

Existem atividades com e sem a presença de figuras. Em algumas se dá a área da superfície e a medida de uma das dimensões, solicitando a medida da outra dimensão. Em outras aparece área, cálculo de área, transformação de unidades de medida de área e valor monetário como em “Uma casa contém 5 janelas, cada uma com 6 vidros retangulares de $30\ cm$ de largura por $45\ cm$ de comprimento. Qual valor será

[39] Alqueire paulista $=24200m^2$, alqueire nortista $=27225m^2$e alqueire mineiro $=48400m^2$.

gasto para colocar vidro em todas as janelas, sabendo que o m^2 do vidro custa $R\$120{,}00$?” (SAS: 6º ano, módulo 4, 2017, p. 27).

Após todo esse enfoque é que são abordadas as fórmulas algébricas para: o retângulo, o quadrado, o paralelogramo, o triângulo, o trapézio, o losango e o círculo. Para cada fórmula algébrica, fornece-se um exemplo com exercícios resolvidos. A seguir, algumas dessas figuras planas são representadas e pede-se para determinar a sua área, normalmente em cm^2. Existem outras atividades sem a presença de figuras para calcular a área verificando as medidas e as aplicando diretamente nas fórmulas algébricas.

Percebemos uma distância entre o tratamento dado para as atividades propostas aos alunos e as orientações didáticas para o professor. Pois essas são para o professor procurar “[...] demonstrar aos alunos como obter as fórmulas para calcular as áreas das figuras, de maneira que eles compreendam o raciocínio empregado para se determinar a área de uma figura e não apenas memorizem as fórmulas.” (SAS: 6º ano, Livro do Professor, módulo 4, 2017, p. 9).

Contudo, parece que as atividades propostas não colaboram com essa orientação. Percebemos que as atividades não exploram a construção das fórmulas algébricas de área ou a sua compreensão.

O decímetro quadrado é trabalhado em uma atividade, assim “Qual é a área de um trapézio, em decímetros quadrados, se a base menor mede $5\ m$, a base maior tem $300\ cm$ a mais que a base menor e a altura é a metade da base maior?” (SAS: 6º ano, módulo 4, 2017, p. 37, negrito nosso). Porém, percebemos novamente a ênfase maior para as transformações dessas medidas do que para o tamanho de uma superfície de $1\ dm^2$. Não sendo explorados outros possíveis tratamentos figurais em superfícies com essa área.

Identificamos também atividades para os alunos determinarem a área da região hachurada, normalmente envolvendo duas regiões poligonais (um círculo inscrito em um triângulo ou em um retângulo, um círculo no interior de outro círculo). Essas atividades são resolvidas empregando as fórmulas algébricas de áreas, subtraindo uma área de outra. É um processo voltado mais ao emprego direto de dados numéricos nas fórmulas, não requerendo elaboração de estratégias e raciocínios específicos de resolução.

Em uma atividade se pede para calcular quantos quadrados de $0{,}25\ cm^2$ de área serão necessários para recobrir as faces de um cubo de $2\ m$ de aresta. Percebemos que os procedimentos de decomposição e composição se fossem trabalhados no quadrado de $1\ cm^2$ de área contribuiriam para a resolução dessa atividade. Pois, compreenderiam que quatro desses quadradinhos formariam um quadrado de $1\ cm^2$ de área. Esse procedimento é abordado em nosso estudo com a malha milimetrada.

Enfim, percebemos que a apostila dá bastante ênfase para as medidas de superfície, inclusive as agrárias e para as conversões dessas unidades de medidas. Porém, não há contextualizações sobre onde e quando elas normalmente são usadas, bem como não há a utilização de nenhum outro recurso didático nas atividades propostas aos alunos, além do que está contido na própria apostila. Não encontramos situações de comparação e/ou produção de superfícies com determinada(s) área(s). Observamos que se privilegiam muito os tratamentos numéricos nas atividades, principalmente as conversões entre as unidades de medidas de áreas; não aparecendo atividades onde não exista a presença de números, como por exemplo as de comparação de áreas.

Na abordagem do conteúdo de áreas de figuras planas de triângulos e quadriláteros quer no quinto ano do Ensino Fundamental ou no sexto ano não percebemos, nas atividades propostas, representações diferentes para o conceito de áreas, o que é fundamental, pois "[...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação." (DUVAL, 2009, p. 14). É essencial não confundir áreas com números, figuras, unidades de medidas, etc, quer dizer, com as representações que realizamos, visto que este conceito "[...] pode ser dado através de representações muito diferentes." (DUVAL, 2009, p. 14).

Não identificamos os tratamentos figurais como decomposição, composição e reconfiguração nessas apostilas ao abordarem áreas de triângulos e quadriláteros. Notamos que os registros numéricos e tratamentos nestes são mais trabalhados do que os figurais. Posto que, não percebemos a operação mereológica e a desconstrução dimensional (2D/1D)[40] nas atividades, procedimentos esses que contribuem para a heurística nas figuras e para vê-las matematicamente, favorecendo a aprendizagem geométrica.

[40] "É onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação às figuras em geometria" (DUVAL, 2011, p. 90).

Percebemos que a apreensão perceptiva e os olhares botanista e agrimensor são os mais requisitados para resolver as atividades propostas, assim, a organização das atividades não exige as outras apreensões e olhares geométricos. Privilegia-se a visualização icônica que nem sempre é suficiente para a aprendizagem geométrica, pelo fato de que, às vezes, para resolver determinada atividade se faz necessário “[...] recorrer a uma enunciação implícita ou explícita.” (DUVAL, 2005, p. 8, tradução nossa).

Também não identificamos nas atividades desses anos escolares a apreensão operatória, não icônica, importante por permitir:

> Toda utilização heurística das figuras na resolução de problemas, toda explicação de uma propriedade geométrica com a ajuda de figuras ou mesmo, para algumas, com a manipulação de um material, toda articulação do enunciado de propriedades com uma figura para justificar ou demonstrar uma conjectura dependem inteira e exclusivamente dessas duas operações figurais[41]. (DUVAL, 2011, p. 90).

Para Duval (2011) sem a real consciência dessas operações figurais, alunos e adultos podem ficar sem saber o que fazer diante de algumas representações geométricas e esperar que alguém lhe diga o que deve ser feito.

As atividades, nesses dois anos escolares, não exigem a apreensão operatória. Esta apreensão bem como os seus tratamentos dependem do que é solicitado no problema (FLORES; MORETTI, 2006). Assim, não encontramos atividades onde os alunos tenham que adicionar traços para encontrar um procedimento de resolução, decompondo-as e calculando as áreas das subfiguras por ladrilhamento, mergulhamento e/ou aplicando nestas as fórmulas algébricas.

Percebemos que as apostilas, dos dois anos escolares, não exploram heuristicamente as figuras geométricas para a aprendizagem do conceito de áreas de figuras planas. Nós acreditamos que esses procedimentos são importantes, concordando com Flores e Moretti (2006) os quais afirmam que a preferência por métodos escolares didáticos que favoreçam a visualização e a heurística na resolução de problemas matemáticos, deve-se ao fato de acreditarmos que essas habilidades possam suprir de algum modo a deficiência do ensino geométrico convencional e ao mesmo tempo complementar o quadro de um aprendizado incompleto.

[41] A divisão mereológica (decomposições e reconfigurações que permanecem em 2D) e a desconstrução dimensional das formas ($nD \rightarrow (n-1)D$). (DUVAL, 2009).

Essas explorações heurísticas sobre uma figura geométrica requer além da habilidade visual, outras competências como a de concluir corretamente um determinado exercício, incluindo a visão geral de uma figura e seu enunciado e o domínio de conhecimentos matemáticos. Aspectos estes que conduzem o aluno “a uma desenvoltura frente à aprendizagem matemática” (FLORES; MORETTI, 2006, p. 12).

Vale lembrar que os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, quando aplicamos as sessões de ensino, ainda não tinham visto o conteúdo de área tratado nessa seção. Esse material chegou até eles após os nossos encontros. Os alunos também não tinham estudado esse conteúdo durante esse ano letivo, o que lembravam era do que tinham visto no ano anterior.

No próximo capítulo escrevemos sobre a metodologia adotada em nosso estudo, bem como os procedimentos, as variáveis didáticas e os participantes da pesquisa.

CAPÍTULO 4: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos os encaminhamentos metodológicos pautados na Engenharia Didática descrita por Artigue (1996) e seus pressupostos, bem como os procedimentos adotados em nosso trabalho e os participantes desta pesquisa. Além disso, ao elaborar as atividades que desenvolvemos com os alunos, também foram feitas escolhas, por exemplo, das variáveis didáticas.

4.1 As variáveis didáticas

As variáveis didáticas acompanham a elaboração das atividades. Elas fazem parte da segunda fase da Engenharia Didática, concepção e análise a *priori*. Para Bittar (2017) as variáveis didáticas são "elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos". Sendo assim, cabe ao pesquisador/orientador a decisão de agir sobre certas variáveis pertinentes ao objetivo do estudo de modo a provocar mudanças nos processos de aprendizagem.

Segundo Artigue (1996), as variáveis didáticas se distinguem em: variáveis macro didáticas ou globais e variáveis micro didáticas ou locais. As macro didáticas se referem à organização global da Engenharia Didática e as micro didáticas se referem à organização local da Engenharia Didática, quer dizer, à organização de uma fase ou de uma sessão. Essas variáveis podem ser de ordem geral ou específica, dependendo do conteúdo matemático a ser ensinado. É nas variáveis didáticas que o pesquisador pode exercer certo tipo de controle sobre o objeto matemático, no nosso caso áreas de figuras planas, que é o foco da pesquisa.

São exemplos de variáveis didáticas em nosso estudo:

- **O trabalho em duplas** para elaborar/discutir diversos registros e representações nas sequências de ensino, em cada sessão.
- **A presença ou não de figuras no enunciado** das atividades da sequência. Visando contribuir com o estudo dos registros, apreensões e olhares em Geometria, visto que, elas possuem um papel facilitador e/ou inibidor das respostas dos alunos. De acordo com Duval (2005), os alunos, normalmente, quando resolvem problemas geométricos se baseiam somente na percepção sobre as figuras quando deveriam explorá-las por meio de estratégias diversificadas como a desconstrução dimensional na resolução desses problemas.

- **Questões do tipo aberta ou fechadas** nas sequências de ensino. As questões do tipo fechadas permitem direcionamentos nas respostas e resoluções. As do tipo abertas, por sua vez, permitem que os alunos tracem suas próprias estratégias na resolução das atividades, buscando regularidades e padrões.

No decorrer das sessões, as variáveis micro didáticas que podem influenciar os alunos na mobilização de estratégias e conhecimentos são basicamente:

- **O tipo das figuras (2D)** que permitem os tratamentos figurais para a aprendizagem de áreas de figuras planas. Por exemplo, a posição das figuras na malha, com os lados apoiados sobre ela ou não, determina o tipo de tratamento figural a ser mobilizados sobre elas.

4.2 Procedimentos metodológicos

Como nosso objetivo é investigar a aprendizagem de áreas de figuras planas por alunos do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, propusemos realizar uma sequência de atividades com um grupo de alunos desses anos escolares, no contra turno de suas aulas.

A aplicação dessas atividades foram feitas pela professora/pesquisadora e contou com a colaboração/participação de duas professoras, uma da alfabetização e outra do quinto ano do Ensino Fundamental, ambas da própria escola. Elas resolveram participar das sessões por livre e espontânea vontade com o intuito de aprenderem o conteúdo abordado, argumentaram não o terem aprendido na faculdade e por esse motivo não tinham segurança em ensiná-los aos seus alunos. Também, queriam aprender a usar, dentro desta abordagem, os recursos didáticos utilizados nas sessões.

Essas professoras ficaram sentadas no canto da sala durante as sessões, resolvendo as atividades, questionando a pesquisadora em particular e, em alguns momentos, contribuíram com as filmagens e fotos das sessões.

Para tanto escolhemos uma metodologia de pesquisa que considerasse essas realizações didáticas em sala de aula[42] e que permitisse prever dificuldades e/ou possíveis estratégias inseridas em atividades de modo a superar alguns entraves relativos à área de figuras planas verificados em estudos anteriores.

Sendo assim, para atingir os nossos objetivos nos propusemos a realizar uma sequência didática centrada nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), com

---

[42] Estamos nos referindo ao grupo constituído por alunos do 5º e 6º ano do ensino fundamental.

o intuito de investigar nossa proposta de articular os registros semióticos: algébrico, língua materna e formal, numérico e figural para a aprendizagem do conceito de área.

Acreditamos que esta metodologia pode nos auxiliar, visto que ela, "caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino" (ARTIGUE, 1996, p. 196).

A Engenharia Didática é composta por quatro fases: **análises preliminares**, **concepção e análise a *priori*** das atividades de nossa experimentação e **análise a *posteriori*** e **validação**. Embora distintas, essas fases se relacionam e não necessariamente se seguem uma após a outra.

Esta primeira fase se apoia em um quadro teórico didático e em conhecimentos didáticos efetuados nos estudos realizados anteriormente. E, também, diante de algumas análises preliminares que são, em sua maioria, constituídas por análises: epistemológica do conteúdo em si, proposto pelo ensino, do ensino atual e de seus efeitos, das concepções dos alunos acerca desse conteúdo, bem como as dificuldades e obstáculos que marcam sua evolução, do local onde ocorrerá a realização da sequência didática e, consequentemente, considerando os objetivos específicos do nosso estudo (ARTIGUE, 1996).

Em nossa pesquisa essa fase foi constituída diante da análise de artigos, dissertações, teses, livros e documentos oficiais que tratam do conteúdo área. Esses textos estão no capítulo I desta dissertação e contribuíram para a constituição do quadro teórico de nosso estudo que está no capítulo II. Nessa análise procuramos:

- Identificar possíveis dificuldades relacionadas à compreensão do conceito, bem como compreender as estratégias de ensino que outros autores já utilizaram na tentativa de superá-las.

- Analisar a proposta atual de abordagem da geometria em documentos oficiais e pesquisas, bem como os efeitos do abandono da geometria (BRASIL, 1998; LORENZATO, 1995). Onde buscamos compreender como tem sido ensinado o conceito de área e quais sugestões trazem as novas abordagens de ensino relacionadas a esse objeto matemático, dentre elas a Base Nacional Comum Curricular[43] e o Plano Nacional do Livro Didático[44].

---

[43] (BRASIL, 2016).
[44] (IDEM, 2016).

Nessas análises prévias, situamos a nossa realização didática, considerando os nossos objetivos. Visto que, tais leituras mostraram um desequilíbrio da geometria com relação aos outros campos da matemática, no funcionamento didático. Talvez, esta seja uma das razões para o baixo desempenho geométrico dos alunos no Ensino Fundamental.

Os entraves encontrados pelos alunos serviram para elaborar as nossas atividades, onde tentamos equilibrar alguns aspectos geométricos. Como por exemplo,

- Focar mais em situações de comparação de áreas por meio de processos de decomposição, composição e reconfiguração $(2D \rightarrow 2D)$. Investigar se as figuras desempenham papel heurístico de modo a contribuir com a compreensão do conceito de área.
- Utilizar/articular diversos registros: numérico, algébrico, figural, língua materna e formal, para representar o mesmo objeto matemático.

A segunda fase, **concepção e análise a priori** da sequência didática, apoia-se nos estudos realizados na fase anterior. É onde o pesquisador decide agir sobre certas variáveis do sistema de ensino. Essas variáveis são escolhidas com a finalidade de permitir alterar as estratégias de resolução das atividades, que têm como objetivo investigar elementos do processo de construção de conhecimentos. Portanto, para elaborar as atividades, deve-se considerar durante esta análise a parte descritiva e a parte preditiva que esta fase comporta. Desse modo, segundo Artigue (1996), nesta fase considerando o que se pretende constituir e desenvolver com os alunos, deve-se:

1) descrever as escolhas locais realizadas;

2) analisar o peso que estas escolhas podem ter para o aluno, sobretudo, pelas possibilidades de agir, decidir, escolher, de controlar e validar as hipóteses que ele dispõe, fruto de um funcionamento onde o professor praticamente não atua;

3) prever os possíveis comportamentos dos alunos, procurando mostrar como as escolhas efetuadas nas atividades podem controlar esses campos e como os comportamentos esperados pelos alunos podem intervir de modo a resultar em conhecimentos visados pela aprendizagem.

Por conta disso, considerando as possíveis dificuldades enfrentadas e as estratégias traçadas pelos alunos, sujeitos de nosso estudo, em cada atividade, bem como as superações dessas diante dos diversos registros e representações é que elaboramos uma sequência didática composta por oito sessões de atividades.

Artigue (1996) salienta que a análise a *priori* mesmo sendo feita antes da **experimentação**, terceira fase, pode ser retomada em qualquer momento da pesquisa, conforme vemos também em Bittar (2017), ao afirmar que esta fase "não é uma "receita" a ser seguida e, sim, um exercício de reflexão e preparo para a atuação do pesquisador no momento da realização das atividades com os alunos". Sendo assim, quaisquer mudanças que se façam necessárias nas atividades para contribuir com a aprendizagem dos alunos são pertinentes, desde que estejam em consonância com os estudos feitos.

A terceira fase desta metodologia é a **experimentação**, é quando o pesquisador aplica com os sujeitos da pesquisa a sequência didática construída na fase anterior. Ela se inicia a partir do momento em que ocorre o contato do pesquisador com esse grupo de alunos. Na experimentação realizamos:

- a explicitação dos objetivos da pesquisa aos alunos e observadores;
- alguns combinados, dentre eles o tempo de duração de cada sessão, a resolução que deve ser da melhor maneira possível explorando os recursos disponíveis e a constituição das duplas com a finalidade de elaborar diversas estratégias para a resolução das atividades;
- a aplicação das atividades de cada sessão;
- o registro das observações realizadas por meio de gravação em vídeo, fotos, papel e lápis, entre outros.

A quarta fase, **a análise a *posteriori* e validação** é feita confrontando as análises a *priori* com a *posteriori*, é onde as hipóteses feitas no início da Engenharia Didática são validadas ou refutadas. Esse confronto deve ser feito ao término de cada sessão com a finalidade de realizar algumas alterações nas sessões posteriores. O que possibilita ao pesquisador, se necessário, alterar uma atividade já planejada ou mudá-la (BITTAR, 2017). Essa reorientação pode ser feita considerando as concepções errôneas dos alunos e/ou as suas dificuldades apresentadas em estudos anteriores.

E para finalizar, percebemos que esse confronto das análises a *priori* e a *posteriori* realizado em cada sessão, e não apenas ao final do processo, permite correções e novos direcionamentos, considerando a aprendizagem de novos conhecimentos.

4.3 Caracterização dos sujeitos da pesquisa

Pensamos inicialmente, lendo outros estudos (FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; SILVA, 2016) em realizar a pesquisa com um grupo de alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, no contraturno de suas aulas, assumindo nós neste momento o papel de professor desta turma.

Em uma visita informal a uma escola privada do município de Campo Grande – MS, no início do ano letivo de 2017, conversando com a diretora da escola, constatamos que alguns alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental que estudavam no período matutino ficavam também no período vespertino na escola, onde realizavam as tarefas do dia e estudavam para as provas.

Os pais desses alunos já tinham questionado a diretora quanto a possibilidade de eles realizarem alguma produção nesse período, para construírem algum conhecimento. De pronto a diretora demonstrou interesse, orientando-nos quanto à formação de um grupo de alunos constituído com alunos desses dois anos escolares. Esse grupo possuía 12 alunos, sendo 6 de cada ano.

No dia 31 de maio de 2017 tivemos o primeiro contato com este grupo, as duas professoras que participaram da pesquisa me orientaram quanto à sala que deveríamos ocupar e na organização dos alunos. Os alunos estavam ansiosos, alguns deles prontamente falaram que gostavam de matemática e outros que não, alguns desses estavam ali para ver se aprendiam a gostar e outros por que os pais quiseram que eles participassem. Nessa conversa apresentamos os nossos objetivos e o que pretendíamos realizar, explicando que as atividades deveriam ser feitas em duplas, não delimitamos que essas duplas deveriam ser mantidas, deixando a cargo deles essa escolha. Esclarecemos também que os dados coletados durante a experimentação seriam feitos por meio de gravação de vídeo, fotos e dos registros feito por eles na folha impressa e nos diversos recursos didáticos. Ao final dessa conversa orientamos os alunos que nosso próximo encontro seria no dia 07 de junho de 2017 e que estaria contando com a participação de todos.

Todas as sessões ocorreram das 13:30 às 15:30 h, porém na maioria delas os alunos ficaram na sala até às 16h, dialogando com as professoras participantes da pesquisa, com os colegas e também para terminar as atividades da sessão, visto que em todas as sessões a maioria deles se mostrou muito competitivo.

A seguir apresentamos a participação dos alunos no quadro 2. Escrevemos os nomes dos alunos participantes da pesquisa na tabela, em ordem alfabética, e, após designamos por aluno (a) do 01 ao 12. Denominação está que será usada nas análises a *posteriori* de nosso estudo.

Quadro 2 - Participação dos alunos nas sessões

ALUNOS/ SESSÃO	IDADE	ANO	01	02	03	04	05	06	07	08
Aluno 01	10	5º	X	X	X	X	X	X	X	X
Aluna 02	9	5º		X	X	X	X		X	X
Aluno 03	10	5º	X	X	X	X	X	X		X
Aluna 04	11	6º	X	X	X	X	X	X	X	X
Aluna 05	11	6º	X	X	X	X	X	X	X	X
Aluna 06	10	6º	X		X	X	X	X	X	X
Aluna 07	10	6º	X	X	X	X	X	X		X
Aluna 08	10	6º	X							
Aluna 09	11	6º		X	X			X	X	X
Aluno 10	10	5º	X	X	X	X	X	X	X	
Aluno 11	9	5º	X	X	X	X	X	X	X	
Aluno 12	10	5º	X	X	X	X	X			

Fonte: Dados da pesquisa.

A aluna 08 participou somente da primeira sessão porque passou a estudar no período vespertino na própria escola, nesse encontro ela participou ativamente, resolvendo atentamente as atividades. Os alunos 03 e 10 são irmãos gêmeos e em muitas das sessões permaneceram juntos. O aluno 12 por motivos pessoais não quis participar das últimas três sessões, conversando com a professora dele, participante da pesquisa, descobrimos que ele estava passando por alguns ajustes familiares. Salientamos, que ele enquanto participou dos estudos colaborou intensamente.

No próximo capítulo detalharemos a análise *a priori*, experimentação e análise a *posteriori* das atividades que foram aplicadas aos alunos em oito sessões.

CAPÍTULO V: ANÁLISE A PRIORI, EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI

Neste capítulo, realizamos as análises das produções dos alunos durante o desenvolvimento das sessões da sequência didática[45]. Na análise a *priori* em cada sessão, apresentamos as atividades com seus respectivos objetivos, as possíveis estratégias de resolução, juntamente com as possíveis dificuldades, questionamentos e comportamentos tanto dos alunos quanto do pesquisador. Apresentamos também como aconteceu à *experimentação*, relatando o que ocorreu em cada dia, quantos alunos participaram e como ficaram formadas as duplas.

Na análise a *posteriori* ressaltamos os aspectos ocorridos, confrontando-os com a análise a *priori*. Nesta dinâmica, colocamos alguns diálogos e protocolos dos alunos. A análise foi focada nos diversos registros e representações mobilizados pelos alunos para validar o cálculo das áreas das figuras por meio de estratégias diversificadas de resolução. E para finalizar, apresentamos as *considerações* específicas de cada sessão.

5.1 Sessão 1

Esta sessão foi composta por duas atividades, uma para determinar a área de cada peça do tangram [46], sabendo a área da peça quadrada. E outra, para construir o quadrado com todas as peças do tangram; mobilizando procedimentos de decomposição para responder a todos os itens.

5.1.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* da primeira atividade

A primeira atividade da sessão foi:

Sabendo que a peça quadrada tem 2 unidades de área ($2\,ua$)*, determine as áreas das outras peças do tangram. Desenhe a solução ou as decomposições feitas em cada figura no espaço abaixo.*

---

[45] A metodologia da Engenharia Didática consiste numa forma de organizar e conduzir a pesquisa, por meio da elaboração e aplicação com alunos de uma sequência didática que visa desvelar o objeto de investigação. Nesse sentido, uma sequência didática é caracterizada como um conjunto de atividades planejadas e analisadas previamente, com a finalidade de observar situações de aprendizagem envolvendo os conceitos previstos na pesquisa. A Engenharia Didática é composta de quatro fases que apresentamos no capítulo anterior.

[46] O tangram é um jogo chinês, composto por sete peças: dois triângulos grandes (2TG), dois triângulos pequenos (2TP), um triângulo médio (1TM), um quadrado (1Q) e um paralelogramo (1P).

O objetivo desta atividade é calcular a área das demais peças do tangram a partir da peça quadrada que tem 2 unidades de área ($2\ ua$), sem requerer conhecimentos escolares relativos ao conceito de área. A escolha das duas unidades de área para a peça quadrada do tangram é para não aparecer medidas fracionárias nas respostas. Uma variável didática para esta atividade é o tipo de figura, todas fechadas e convexas, de duas dimensões (2D). Enquanto que a outra variável é o valor de área dado ($2\ ua$).

Iniciamos por este material didático por ele permitir procedimentos (2D/2D) de reconfigurações, decomposições e composições com as suas peças com o "**mesmo número de dimensões que a figura de partida**" (DUVAL, 2005, p. 14, tradução nossa, negrito do autor). Oportunizando o olhar inventor por meio de questões "Como dividir, de uma única maneira, um triângulo de modo a poder montar com duas peças um paralelogramo?" (DUVAL, 2005, p. 6, tradução nossa). Quer dizer, o triângulo médio desse jogo (2D) pode ser dividido em dois triângulos pequenos (2D) e com estes formar um paralelogramo (2D), bem como o quadrado. Essa divisão justifica a equivalência de áreas entre essas figuras.

Utilizando este recurso didático heuristicamente, como se suas peças fossem peças de um quebra-cabeça, decompondo essas peças mereologicamente[47] materialmente, excluindo as medidas nesta atividade, pois segundo Duval (2011, p. 92), "Para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos".

Segundo Duval (2012b), independentemente da figura desenhada num contexto matemático, sempre é possível a apreensão perceptiva das formas, no nosso caso, das figuras construídas com as peças do tangram, e a apreensão discursiva, sequencial e operatória nas figuras, que permitem os cálculos das áreas e a identificação da unidade de medida. A apreensão perceptiva é imediata e automática enquanto que as outras dependem de um processo de aprendizagem.

Para responder a atividade cada dupla de alunos recebeu um jogo contendo as sete peças do tangram. Os alunos foram orientados a designarem as peças por: TG para o triângulo grande, TM para o triângulo médio, TP para o triângulo pequeno, P para o paralelogramo e Q para o quadrado.

---

[47] A divisão mereológica consiste em dividir uma figura em unidades figurais de mesma dimensão ($2D \rightarrow 2D$), onde a sua reconfiguração é outra figura, cujo contorno pode ser ou não igual a figura de partida. (DUVAL, 2011).

Como nenhuma das outras peças é parecida com o quadrado de $2\,ua$, acreditávamos que essa escolha favorecesse o estabelecimento de estratégias na tentativa de encontrar a solução. Era esperado que os alunos colocassem questões e formulações do tipo “como vou fazer? Nenhuma peça se parece com o quadrado?”, “o triângulo grande tem mais de $2\,ua$ porque é maior que o quadrado”. Acreditávamos que alguns tentariam, com o auxílio da régua, medir os lados do quadrado para tentar estabelecer alguma relação.

Supomos que as principais dificuldades serão: encontrar dentre as figuras que possuem áreas conhecidas aquelas que recobrem a figura cuja área se quer saber, e, posteriormente identificar a sua área. Acreditamos que os procedimentos usados serão o de recobrir as peças ou de formar outra idêntica com as peças cujas áreas sejam conhecidas.

Era esperado que os alunos não mobilizassem fórmulas algébricas para o cálculo de áreas para resolver as questões desta sessão. Pois, para mobilizá-las teriam que descobrir as medidas dos lados das figuras. A medida do lado do quadrado de área $2\,ua$ é $\sqrt{2}$ unidade de comprimento (uc)- um número irracional. E o Teorema de Pitágoras e o conjunto dos números irracionais, normalmente, são estudados a partir dos dois anos finais do Ensino Fundamental II, ou seja, nos anos posteriores.

Detalhamos no próximo parágrafo como foi à experimentação desta atividade. Esta fase da Engenharia Didática de Artigue (1996) é caracterizada pela aplicação das atividades aos alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental, sujeitos da pesquisa.

Experimentação

Essa sessão ocorreu no dia 07 de junho de 2017, das 13h30 às 16:00h e contou com a presença de dez alunos, sendo cinco deles do quinto ano e cinco do sexto ano, que se dividiram em cinco duplas. As duplas ficaram formadas assim: duas duplas com alunos do quinto ano, duas com alunos do sexto ano e uma com um aluno de cada ano. Esses grupos foram formados com a finalidade de discutir e elaborar as estratégias para resolver as atividades da sessão.

Cada dupla recebeu um jogo do tangram, contendo sete peças (2TG, 2TP, 1Q, 1P e 1TM). Após receberem começaram imediatamente a formar figuras variadas, como árvore de natal, pássaros, barcos, entre outros. Uma dupla visualizou o quadrado formado com as sete peças do tangram na caixa deste jogo e por conta própria começaram a tentar formá-lo, enquanto isso a pesquisadora organizava a sala. Conseguiram e passaram este desafio aos colegas. A pesquisadora percebendo isso guardou a caixa.

Esse desafio motivou os demais. Sendo assim, foi dado um tempo para encontrar a solução. A dupla que conseguiu inicialmente ajudou alguns colegas que também conseguiram. Essa atividade ficou como desafio para os demais. Após isso, o tangram foi apresentado à turma, designando as peças de acordo com a análise *a priori*, por: TG, TM, TP, P e Q. Como somente uma aluna dentre os dez desta sessão de ensino conhecia esse recurso didático propomos a atividade abaixo.

1) Construa com 2 peças do tangram um:

a) Quadrado. b) Paralelogramo. c) Triângulo.

2) Construa com 3 peças do tangram um:

a) Retângulo. b) Quadrado. c) Paralelogramo. d) Trapézio.

3) Com todas as peças do tangram construa um:

a) Retângulo. b) Paralelogramo. c) Trapézio.

Algumas duplas tiveram dificuldades no item 3, não conseguindo construir todas as figuras. O que ficou como desafio para as próximas sessões, pois o tangram sempre ficava disponível a eles na sala durante os encontros.

Em seguida foi entregue a folha contendo as duas atividades desta sessão de ensino, realizando a sua leitura e orientações para que refletissem e pensassem na resposta com seu par, escrevendo-a com letra legível. Alguns, imediatamente, começaram a elaborar estratégias de resolução, realizando conjecturas. No final, os alunos expuseram as estratégias usadas para resolver as duas atividades.

Para resolver a primeira atividade desta sessão de ensino, determinar a área das outras peças do tangram sabendo que a peça quadrada desse jogo tem $2\ ua$, os alunos mobilizaram as estratégias descritas abaixo, mobilizando os registros numéricos e figurais e tratamentos nestes. As estratégias foram:

- Decompor a peça quadrada do tangram em dois triângulos pequenos;
- Decompor o paralelogramo e o triângulo médio em dois triângulos pequenos;
- Decompor o triângulo grande em um quadrado e dois triângulos pequenos.

Estas serão explanadas após a análise a priori designadas por $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ em cada item e após, explanaremos os diálogos e protocolos dos alunos para facilitar a leitura.

Para o triângulo pequeno (TP):

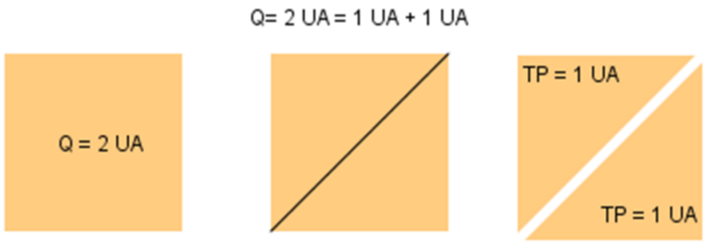
E_1: *A área do TP é a metade da área do Q*

Como o TP é a metade do Q então sua área é a metade da área do quadrado, ou seja, $\frac{2\,ua}{2} = 1\,ua$.

E_2: *A área do quadrado (Q) é equivalente à área de dois triângulos pequenos (2TP)*

Como dois TP formam um Q, a sua área é $1\,ua + 1\,ua = 2\,ua$. Portanto a área do TP é $1\,ua$. Assim:

Figura 35 - Decomposição do quadrado em dois triângulos pequenos



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

A dupla (04,07)[48] encontrou primeiramente a área do triângulo pequeno. Compondo um quadrado com dois triângulos pequenos, mobilizando procedimentos de comparação, sem sobreposição. Como mostra o excerto a seguir:

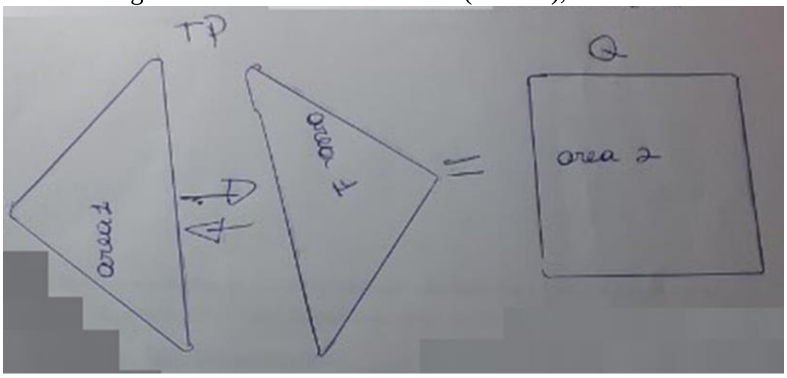
> Pesquisadora: Como vocês encontraram a área do triângulo pequeno?
> Aluna 07: Porqueeee... Aqui tem dois... No...
> Aluna 04: ... No tangram...
> Aluna 07: No tangram tem dois triângulos pequenos e dá para fazer um quadrado com essas duas peças.
> Aluna 04: Porque tem dois triângulos pequenos e dá para fazer com esses dois triângulos, dá para fazer um quadrado.
> Aluna 04: Daí, cada um vale um (a área da cada triângulo pequeno).

[48] Designaremos as duplas daqui por diante por par ordenado (04, 07) corresponde aos alunos 04 e 07.

Esses tratamentos figurais efetuados materialmente sobre as unidades figurais (2D), quadrado e triângulos pequenos, permitiram determinar a área do triângulo pequeno. Podemos ver no registro figural e numérico (figura 36) a decomposição do quadrado em dois triângulos pequenos e o sinal de igualdade para indicar a equivalência destas áreas.

Percebemos que as duplas discutiam e tentavam encontrar a solução das atividades juntas, porém elegiam para redigir a resposta na folha àquele que acreditavam ter a letra mais bonita.

Figura 36 - Protocolo dos alunos (04 e 07), Sessão 01

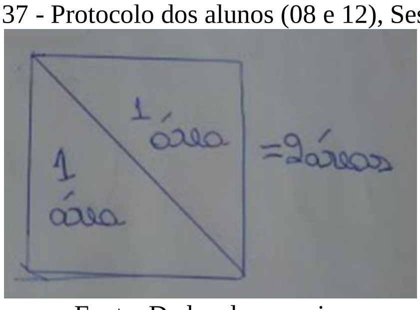


Fonte: Dados da pesquisa

Na figura 36 os alunos parecem ter compreendido que a área do quadrado vai além do seu espaço interno, é duas vezes a área do triângulo pequeno que a preenche (FACCO, 2003).

A dupla (08, 12) realizou essa reconfiguração por sobreposição. Registrando, provavelmente, os triângulos pequenos visualizados em cima do quadrado o que justifica o sinal de igualdade e após ele o registro numérico "2 ua" obtido por meio do tratamento numérico “1 $área + 1$ $área$". Assim:

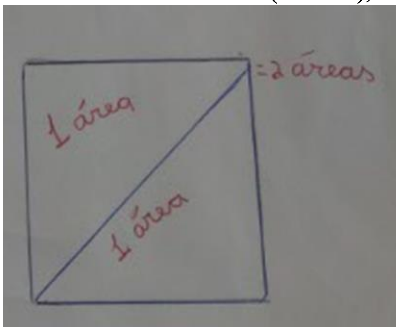
Figura 37 - Protocolo dos alunos (08 e 12), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos (03, 10) reconfiguraram os triângulos pequenos num quadrado, por sobreposição também. Respondendo na folha assim como a dupla (08, 12) (figura 38), ambas registraram “1 área” para o triângulos pequenos e após o sinal de igualdade “2 áreas”, que é a área do quadrado que está embaixo dessa reconfiguração. Assim:

Figura 38 - Protocolo dos alunos (03 e 10), Sessão 01

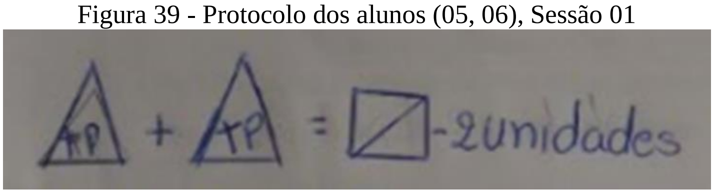


Fonte: Dados da pesquisa

Nessas três figuras (37, 38 e 39), pode-se verificar a existência do sinal de igualdade indicando que os dois triângulos pequenos têm a mesma área do quadrado. O que para nós já é um resultado importante, pois esses alunos compreenderam que se pode compor com as figuras que se quer saber a área, outra figura cuja área seja conhecida, e, assim chegar à solução da atividade.

A dupla (05, 06) realizou os mesmos tratamentos figurais com as peças do tangram, por sobreposição. Contudo a resposta foi diferente das outras duplas, o que não tínhamos previstos na análise a *priori*, conforme a figura 39.

Figura 39 - Protocolo dos alunos (05, 06), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que esses alunos interiorizaram as operações figurais realizadas e, depois redigiram a resposta. Esse processo é uma condição necessária para, por exemplo, aplicar as fórmulas de cálculo de área (DUVAL, 2011). Nesse caso, observamos que essa dupla não necessitou do recurso material, as peças do tangram para redigir a resposta, ou seja, essa representação foi realizada sem sua representação no material concreto.

Para o triângulo médio (TM):

E_1: *Decompondo-o em dois triângulos pequenos (2TP)*

Como o TM pode ser decomposto em 2TP de 1 ua cada um, tem-se que sua área é 2 ua.

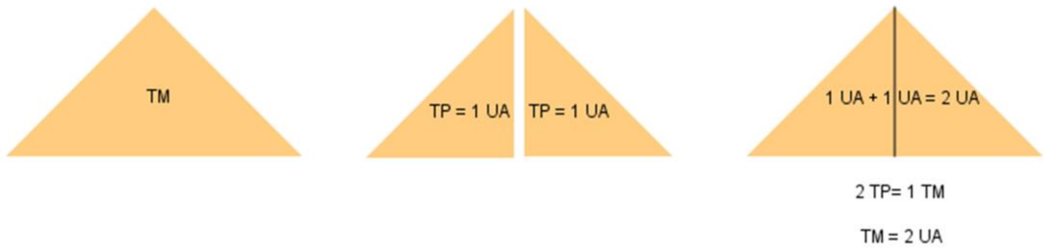
E_2: *Percebendo que a área do triângulo pequeno (TP) é metade da área do triângulo médio (TM)*

Por sobreposição o TP é metade do TM. Sendo assim, a área do TM é o dobro da área do TP. Portanto, o TM tem 2 ua.

E_3: *Formando um triângulo médio (1TM) com dois triângulos pequenos (2TP)*

Como dois triângulos pequenos formam um triângulo médio, a sua área é a soma dessas áreas. Portanto, a área do triângulo médio é 2 ua. Assim:

Figura 40 - Decomposição do triângulo médio em dois triângulos pequenos



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Para o triângulo médio, as reconfigurações não eram tão evidentes como para o triângulo pequeno. O que ocasionou certa dificuldade, visto que a apreensão perceptiva e o olhar botanista estavam comandando esta atividade. Duval (2011, p.92) esclarece que essas “operações mereológicas de reconfiguração se apoiam sobre a percepção. O simples reconhecimento perceptivo das figuras pode ser uma ajuda ou, ao contrário, um obstáculo para resolver um problema.” Nesse caso, podemos perceber o entrave que os alunos tiveram com essa primeira impressão sobre o triângulo médio.

Para transformar os triângulos pequenos num triângulo médio, deve-se desconstruir essa forma visual de base (o triângulo médio) de modo a obter outras formas visuais de base (os triângulos pequenos), podem-se sobrepor os triângulos pequenos no médio ou adicionar um traço no triângulo médio. Esse traço deve ser feito, dividindo o triângulo médio em dois triângulos pequenos. Para Duval (2005, p.11, tradução nossa) esses traços são reorganizadores, ou seja, são “[...] todos os traços que permitem reorganizar uma figura dada para fazer aparecer às formas não reconhecidas nestas figuras dadas. A utilização heurística de uma figura depende evidentemente da capacidade de “ver” os traços reorganizadores possíveis.”

Para tanto, deve-se neste procedimento “Passar da visualização icônica, que é comum a todos os domínios do conhecimento, à visualização não icônica, que é específica para a matemática [...]” (DUVAL, 2005, p. 12, tradução nossa), o que nem sempre é fácil, Duval (2005) lembra que certas pesquisas lamentam o fato de os alunos ficarem presos à percepção na figura para resolver problemas de Geometria. Ele reforça que uma aprendizagem que torne os alunos capazes de “ver” esses traços reorganizadores que devem ser adicionados para solucionar um problema, não deve ser feito a partir da identificação dos objetos representados, mas sim ao nível do reconhecimento das formas.

Percebemos que a apreensão perceptiva inibiu os tratamentos figurais nessas peças, pois os triângulos pequenos não impõem perceptivelmente os tratamentos figurais que podem ser realizados com eles para determinar a área do triângulo médio. Quanto a isso Duval (2012, p. 287) nos lembra que:

> Os tratamentos que constituem a produtividade heurística das figuras geométricas combinam operações que não se mostram ser nem do tipo de apreensão puramente perceptiva, nem do tipo conceitual. Em certos casos, os fatores próprios à apreensão perceptiva podem favorecer estas operações e, em outros casos, ao contrário, inibi-las.

Nesse caso a percepção por si só não resolve o problema. É necessário explorar as peças do tangram por meio de movimentos de rotação, formando com os triângulos pequenos o triângulo médio. É o que podemos perceber no diálogo em língua materna a seguir.

> Aluna 07: Professora! Vem aqui
> Pesquisadora: Oi, o que foi? Qual a dúvida?

> Aluna 07: Ó... A gente montou com esses dois triângulos um quadrado. E não estamos conseguindo montar nem esse e nem esse (o triângulo médio e o paralelogramo).
> Pesquisadora: Vocês acham que dá para montar com os dois triângulos pequenos o paralelogramo e o triângulo médio?
> Aluna 04: Sim.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluna 04: Porque...
> Aluna 07: Porque deu para montar com eles o quadrado.
> Aluna 04: E a gente acha que dá para montar também o paralelogramo e o triângulo médio.
> Pesquisadora: Então tentem.
> Aluna 07: Já tentamos bastante.
> Aluna 04: E não conseguimos... Dá uma dica prof...
> Pesquisadora: Tentem ir girando essas peças (temos aqui o movimento de rotação).

Percebe-se que essa dupla tenta encontrar a área do triângulo médio e a do paralelogramo. Após algumas tentativas conseguem determinar essas áreas e também perceber que possuem áreas equivalentes, por cada peça, poder ser composta por dois triângulos pequenos. Veja:

> Aluna 04: Conseguimos prof.
> Aluna 04: A área desse outro triângulo é 2 (área do triângulo médio).
> Aluna 07: E a do parale...logramo é 2 também.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluna 04: Porque cada um desses triângulos vale um... (a área do triângulo pequeno).
> Aluna 07: E com esses dois dá para fazer esse triângulo e esse... (Reconfiguraram com os triângulos pequenos o triângulo médio).
> Aluna 04: Esse paralelogramo. (Reconfiguraram com os triângulos pequenos o paralelogramo).
> Pesquisadora: Então o triângulo médio e o paralelogramo têm a mesma área?
> Aluna 04 e 07: Sim!
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluna 07: Porque nós montamos os dois com esses dois triângulos. (Com os triângulos pequenos).

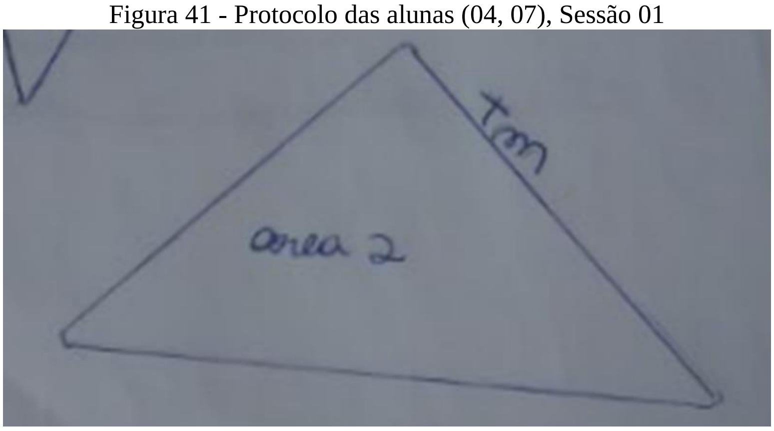
Essa dupla fez essa reconfiguração sem sobreposição, talvez, por conta dessa escolha eles demoraram para conseguir montar com os triângulos pequenos o triângulo médio e o paralelogramo.

Percebemos que a possibilidade de usar o material concreto tangram contribuiu para encontrar a solução. Conseguimos identificar a dúvida dessa dupla diante das representações distintas mobilizadas por eles, em língua materna e formal, no registro figural e numérico, nas apreensões discursiva (presente no diálogo acima) e operatória manuseando os triângulos pequenos e, no olhar de inventor, quando rotacionaram os triângulos pequenos até formar o triângulo médio e o paralelogramo. Constatamos também que o recurso material foi se suma importância para determinar essa área.

Essa resolução exigiu que eles perpassassem a apreensão perceptiva, explorando heuristicamente essas peças por meio da apreensão operatória e do olhar inventor (DUVAL, 2005; 2012b). O registro da língua materna e a apreensão discursiva foram significativos para a elaboração das estratégias.

Para escreverem a área deste triângulo (figura 41) foi necessário anteriormente uma articulação entre linguagem, visualização geométrica, discurso e tratamentos figurais (reconfiguração). Acreditamos que essa dupla não escreveu as decomposições feitas que justificam a área do triângulo médio, porque a comparação dos triângulos pequenos reconfigurados no triângulo médio com o triângulo médio, visualmente, já deu a eles a convicção da resposta. Percebemos que essa conclusão se deu devido às representações distintas do triângulo médio, representando-o na folha e o compondo com dois triângulos pequenos. O triângulo médio foi contornado na folha e em seguida escreveram a sua área. Assim:

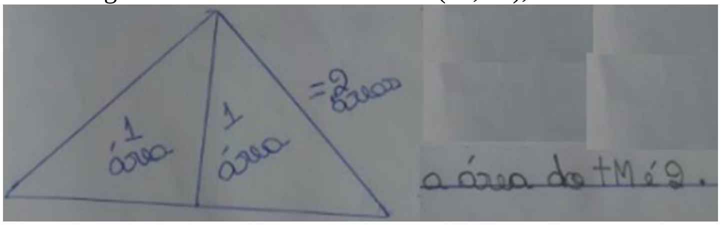
Figura 41 - Protocolo das alunas (04, 07), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla (08, 12) reconfigurou os triângulos pequenos no triângulo médio por sobreposição, representando na folha os triângulos pequenos sobrepostos ao triângulo médio.

Figura 42 - Protocolo dos alunos (08, 12), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Conjecturamos que o sinal de igualdade foi usado para designar que o triângulo médio, que está embaixo, tem “2 áreas”. Percebem-se a resposta em língua formal[49] e os tratamentos figurais e numéricos realizados para obter a resposta.

A dupla (01, 11) encontrou a área do triângulo médio e a do paralelogramo sobrepondo neles os triângulos pequenos. Acompanhe o registro em língua materna.

> Aluno 11: O triângulo pequeno vale uma unidade, e aí... Somando os dois fica duas unidades. E o paralelogramo vale duas unidades (sobrepuseram os triângulos pequenos no paralelogramo).
> Aluno 01: É, com os dois triângulos pequenos a gente conseguiu fazer essas duas peças aqui, ó (o triângulo médio e o paralelogramo).
> Pesquisadora: Ok.
> Aluno 11: E aqui, para o triângulo médio é a mesma coisa. Dá duas unidades.

Essa dupla, por meio da apreensão operatória, do olhar inventor, dos registros numéricos e em língua materna (DUVAL, 2005, 2012, 2012b), conseguiu compreender que o paralelogramo e o triângulo médio tinham “duas unidades” de área.

Podemos perceber que a reconfiguração do triângulo médio com os triângulos pequenos “[...] exige que haja uma ordem nas instruções para efetuar as operações [...]” (DUVAL, 2005, p. 11, tradução nossa). E o estabelecimento dessa ordem foi um elemento dificultador nesse procedimento de decomposição heurística estritamente homogênea do triângulo médio. Pode-se perceber também no diálogo acima o papel da linguagem que “não é ‘colocar’ em palavras o que já seria claramente pensamento ou experiência, mas de colocar em proposições para construir o pensamento dos objetos do conhecimento” (DUVAL, 2005, p. 24, aspas do autor). Contribuindo assim para a aprendizagem geométrica de área de figuras planas.

---

[49] “Língua formal é a escrita simbólica por meio de letras que cumpre funções proposicionais, de quantificadores, de variáveis e de operadores” (DUVAL, 1999, apud MORAN, 2015, p. 41).

Para o paralelogramo (P):

E_1: *Formando com os triângulos pequenos um paralelogramo*

Como os dois triângulos pequenos formam um paralelogramo, então, a sua área é a soma dessas áreas. Portanto, a área do paralelogramo é 2 ua.

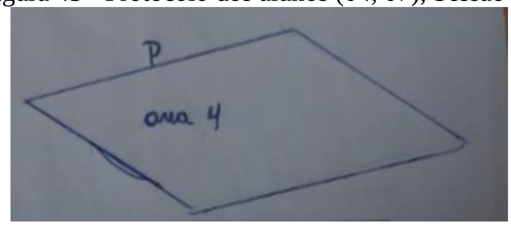
Análise a posteriori

A dupla (04, 07) compôs com os triângulos pequenos o paralelogramo sem sobrepô-los nesta peça. Procedimento diferente da dupla (01, 11) que recobriu o paralelogramo com os triângulos pequenos. Acompanhe no excerto abaixo o diálogo da dupla (04, 07) em língua materna.

> Aluna 04: Conseguimos prof.
> Aluna 04: A área desse outro triângulo é 2 (área do triângulo médio).
> Aluna 07: E a do parale...logramo é 2 também.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluna 04: Porque cada um desses triângulos vale um... (a área do triângulo pequeno).
> Aluna 07: E com esses dois dá para fazer esse triângulo e esse... (Reconfiguraram com os triângulos pequenos o triângulo médio).
> Aluna 04: Esse paralelogramo. (Reconfiguraram com os triângulos pequenos o paralelogramo).
> Pesquisadora: Então o triângulo médio e o paralelogramo têm a mesma área?
> Aluna 04 e 07: Sim!
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluna 07: Porque nós montamos os dois com esses dois triângulos. (Com os triângulos pequenos).

Porém, registram no protocolo "$área$ 4" para o paralelogramo ao invés de "$área$ 2". Talvez, porque escreveram a resposta contornando a peça do paralelogramo e no momento de redigir a área, por algum equívoco, tenham colocado o quatro. Mas sabemos que esse registro não compromete a aprendizagem dos mesmos, pois raciocinaram corretamente, o que pode ser notado nas representações realizadas no material concreto e em língua materna, junto com os tratamentos figurais e numéricos.

Figura 43 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

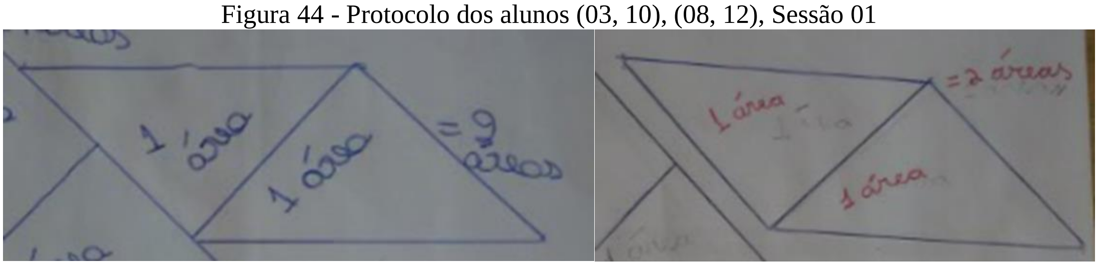
A dupla (01, 11) sobrepondo os triângulos pequenos ao paralelogramo determinou a sua área. Assim:

> Aluno 11: O triângulo pequeno vale uma unidade, e aí... Somando os dois fica duas unidades. E o paralelogramo vale duas unidades (sobrepuseram os triângulos pequenos ao paralelogramo).
> Aluno 01: É, com os dois triângulos pequenos a gente conseguiu fazer essas duas peças aqui, ó (o triângulo médio e o paralelogramo).
> Pesquisadora: Ok.

Nesses diálogos percebemos que esses alunos conseguiram identificar a equivalência das áreas do triângulo médio e do paralelogramo, apesar de serem figuras diferentes. Temos aqui dois resultados importantes em nossa pesquisa, o primeiro é que conseguiram decompor tanto o paralelogramo quanto o triângulo médio em dois triângulos pequenos cada um e o segundo é distinguir que figuras diferentes podem ter a mesma área. A possibilidade de representação das áreas dessas figuras em registros diferentes (figural, numérico, língua materna) permitiu e os convenceu desse raciocínio importantíssimo para a aprendizagem geométrica.

As duplas (03, 10) e (08, 12) realizaram os mesmos tratamentos figurais e numéricos, sobrepuseram os triângulos pequenos ao paralelogramo. Além disso, apresentaram protocolos idênticos. Assim:

Figura 44 - Protocolo dos alunos (03, 10), (08, 12), Sessão 01

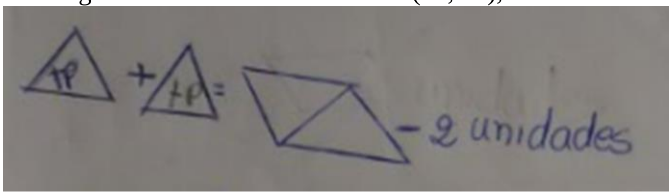


Fonte: Dados da pesquisa

Usando os mesmos termos “1 área” para os triângulo pequenos e “2 áreas” para o paralelogramo ($1\,área + 1\,área = 2\ áreas$). Talvez, os tratamentos figurais tenham influenciado na escrita da resposta, novamente desenham o que se vê sobre o paralelogramo (os triângulos pequenos) e após o sinal de igualdade, o que está embaixo (o paralelogramo).

A dupla (05, 06) encontrou a área do paralelogramo sobrepondo nele os triângulos pequenos. Todavia, escreveram a resposta diferente dos demais. Assim:

Figura 45 - Protocolo dos alunos (05, 06), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Eles representam com o sinal de adição que os triângulos pequenos juntos podem ser reconfigurados num paralelogramo, sem contornar essas peças. Eles realizaram os tratamentos numéricos mentalmente e registraram somente a soma “2 unidades” para a área do paralelogramo, não ficando presos perceptivelmente as peças nessa representação.

E_2: *O triângulo pequeno é a metade do paralelogramo*

Por sobreposição, o triângulo pequeno é a metade do paralelogramo. Sendo assim, a área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo. Portanto a área do paralelogramo é $2 \times 1\ ua = 2\ ua$.

Para o triângulo grande (TG):

E_1: *Decompondo-o em um quadrado e dois triângulos pequenos*

Como o quadrado tem $2\ ua$ e cada triângulo pequeno $1\ ua$, a área do triângulo médio é a soma dessas áreas. Portanto, o triângulo grande tem $4\ ua$.

Análise a posteriori

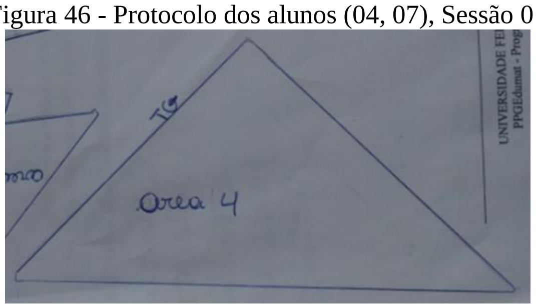
A dupla (04, 07) manteve a mesma linha de raciocínio, tentou construir outro triângulo idêntico ao triângulo grande com as peças do tangram, por comparação, demorando um pouco. Com um sorriso de satisfação a aluna 07 afirmou: “a área do triângulo grande é 4”, conforme o excerto a seguir:

> Pesquisadora: Por que é quatro?
> Aluna 04: Porqueeee...
> Aluna 07: A gente pegou o quadrado, o quadrado vale...
> Aluna 04: Ó... Se eu pegar o quadrado e partir em duas partes é dois (Decomposição do quadrado em dois triângulos pequenos). E o triângulo pequeno vale um. E aí se eu montar o três... Vira quatro (A adição dos triângulos pequenos do quadrado com os outros dois, totalizando quatro triângulos pequenos).

> Aluna 07: Porque o quadrado vale dois. E se a gente cortar o quadrado no meio vai ficar dois triângulos; E com esses dois aqui vai ficar quatro (Decomposição do triângulo grande em quatro triângulos pequenos).
> Aluna 04: É vai dar quatro triângulos pequenos.

Essa dupla decompôs o triângulo grande em um quadrado e dois triângulos pequenos e após, o quadrado em dois triângulos pequenos. Justificando com esses tratamentos figurais a área do triângulo grande. Eles desenharam o triângulo grande na folha e representaram a sua área sem as decomposições, conforme a figura 46.

Figura 46 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 01



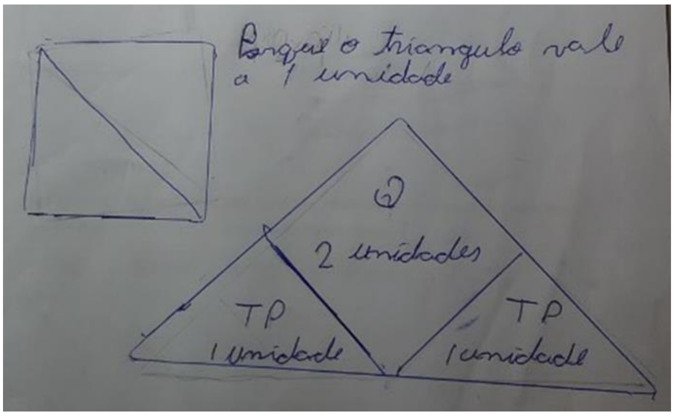
Fonte: Dados da pesquisa

A dupla (01, 11) reconfigurou, com o quadrado e os triângulos pequenos, o triângulo grande, por sobreposição. Conforme o excerto a seguir:

> Aluno 01: Ele tem dois triângulos pequenos e um quadrado (A reconfiguração do triângulo grande com essas peças por sobreposição).
> Aluno 11: Massss... (enquanto pega o triângulo grande, o quadrado e os dois triângulos pequenos).
> Auxiliar da pesquisadora: Explica como que você descobriu.
> Aluno 11: Esse (pegando o triângulo grande).
> Auxiliar da pesquisadora: Como que é?
> Aluno 11: Esse aqui tem quatro unidades (O triângulo grande rsrsrsrsrs).
> Auxiliar da pesquisadora: Como você descobriu que tem quatro unidades?
> Aluno 11: A gente cobriu. Colocou um quadrado e mais dois triângulos pequenos (falou, cobrindo o triângulo grande com o quadrado e dois triângulos pequenos).
> Aluno 01: E somamos.
> Aluno 11: Porque a gente viu que esse daqui (o quadrado) equivale a dois, e, esses dois juntos (os dois triângulos pequenos) vale dois. Então a gente somou dois mais dois que deu quatro unidades.

Essa dupla desenha a reconfiguração sobre o triângulo grande, com a área de cada peça, justificando ao lado a área do triângulo pequeno. Assim:

Figura 47 - Protocolo dos alunos (01, 11), Sessão 01

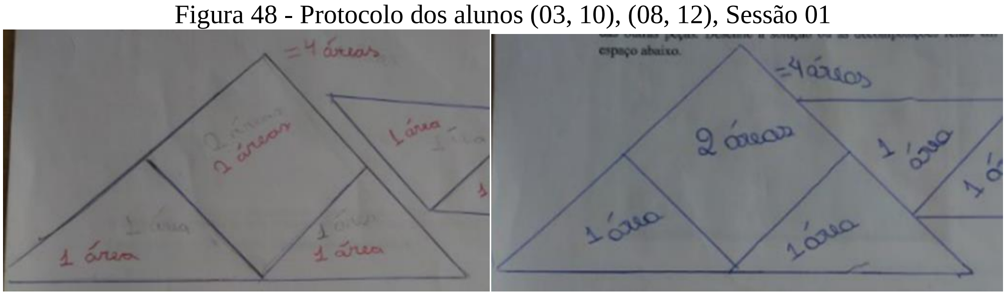


Fonte: Dados da pesquisa

Podem-se perceber as apreensões e os olhares de Duval (2005, 2012b) na explicitação do raciocínio do aluno 11 acima, juntamente com os registros: língua materna, numérico e figural, observe: “A área do triângulo grande é quatro, porque somando dois, mais um, mais um, dá quatro” (Aluno 11, sessão 01).

As duplas (03, 10) e (08, 12) realizaram os mesmos tratamentos figurais, por sobreposição, configuraram o quadrado e os triângulos pequenos no triângulo grande. Acompanhe:

Figura 48 - Protocolo dos alunos (03, 10), (08, 12), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

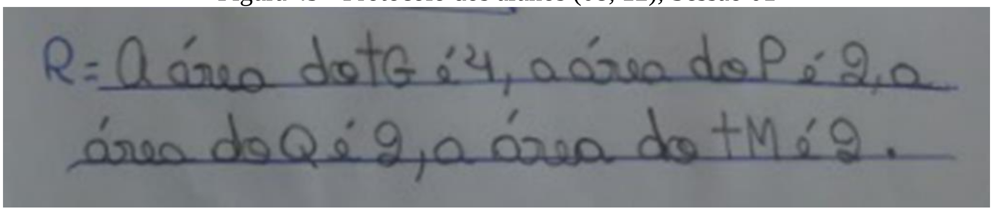
Eles desenharam as peças visualizadas após a sobreposição e o sinal de igualdade com “4 áreas” para indicar que o triângulo grande que está embaixo tem essa área. As representações são idênticas para as quatro peças. O aluno 08 explica no excerto abaixo a sequência que seguiu para representá-los na folha, assim:

> Aluna 08: Eu pego o triângulo grande e coloco ele aqui e contorno ele depois. Daí, eu pego o quadrado, ponho ele aqui... E daí, eu contorno. Daí fica aqui... Ó... O quadrado e os triângulos pequenos. E aí eu conto o total de área.

Pode-se constatar nessa explicação a apreensão perceptiva, controlando a apreensão sequencial e o olhar inventor (DUVAL, 2005, 2012b). Observa-se também o uso dos registros da língua materna, figural e numérico.

A dupla (08, 12) foi a única dupla que escreveu a resposta, neste item, em língua formal, assim:

Figura 49 - Protocolo dos alunos (08, 12), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos nesses protocolos que a determinação da área do triângulo grande foi possível, em todos os casos, diante da mudança dos registros. Primeiro da conversão do registro em língua formal para o figural e numérico. Realizando tratamentos nestes até encontrarem a resposta.

As duas próximas estratégias de resolução para determinar a área do triângulo grande não foram mobilizadas por nenhuma das duplas.

E_2: *Decompondo-o em um paralelogramo e dois triângulos pequenos*

A área do triângulo grande é a soma dessas áreas, 4 ua.

E_3: *Decompondo-o em dois triângulos pequenos e um triângulo médio*

O triângulo grande tem área $4\ ua = 2\ ua + 1\ ua + 1\ ua$.

A próxima atividade tem como objetivo decompor o quadrado formado pelas 7 peças do tangram em triângulos pequenos para calcular a sua área. Esta atividade se diferencia da anterior por sua resposta requerer a composição de todas as peças do tangram formando um quadrado que deve ser decomposto em triângulos pequenos.

5.1.2 Análise a priori e a posteriori da segunda atividade

A segunda atividade desta sessão é:

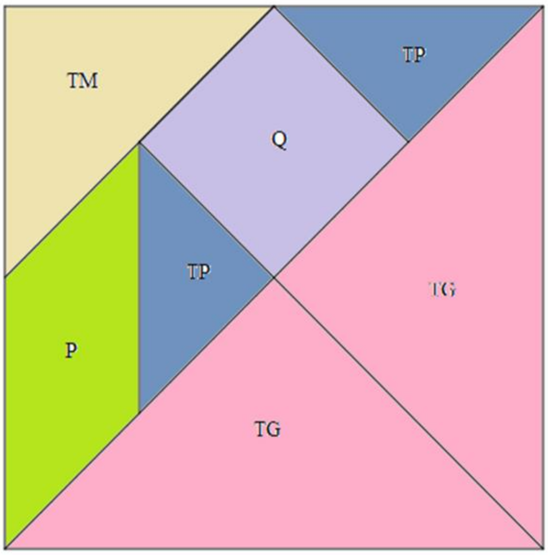
Construa um quadrado com todas as peças do tangram.

a) Quantos TP cabem nesse quadrado? E quantos quadrados? Responda no espaço abaixo.

b) Determine a medida da área desse quadrado, admitindo que o triângulo pequeno tem 1 unidade de área ($TP = 1\,ua$). Responda no espaço abaixo.

Para responder aos itens a e b, deve-se primeiramente construir o quadrado com todas as peças do tangram. Assim:

Figura 50 - Composição do quadrado com todas as peças do tangram



Fonte: Dados da pesquisa

Possíveis estratégias para o primeiro item da atividade:

E_1: *Decompor cada peça do tangram em triângulos pequenos*

O triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo podem ser decompostos em dois triângulos pequenos cada um e, o triângulo grande em quatro triângulos pequenos. Totalizando 16 triângulos pequenos e oito quadrados, porque podemos formar um quadrado com dois triângulos pequenos.

Análise a posteriori

A dupla (08, 12) construiu o quadrado com todas as peças, percebendo que nele cabiam 16 TP por meio de tratamentos figurais, numéricos e da língua materna. É possível observar isso na explicação do aluno 08:

> Aluno 08: Ó aqui cabem quatro triângulos pequenos (no triângulo grande).
> Pesquisadora: Por quê?

Aluno 08: Porque se eu pegar esse triângulo pequeno e ficar colocando no triângulo grande vai dar quatro (por sobreposição). E aqui cabem mais quatro (no outro triângulo grande), vai dar oito. E aqui tem dois triângulos (no triângulo médio). E vai dar dez. Aqui tem um (o triângulo pequeno), vai dar onze. E aqui tem dois (no quadrado), vai dar treze. E aqui (outro triângulo pequeno), vai dar quatorze. E aqui (no paralelogramo) tem dois, vai dar quinze, dezesseis. Dezesseis triângulos pequenos.
Pesquisadora: E quantos quadrados?
Aluno 08: Oito. Oito quadrados porque divide por dois.
Pesquisadora: Por que divide por dois?
Aluno 08: Porque no quadrado tem dois triângulos pequenos.

Contornando cada peça do tangram a aluna 08 desenhou esses tratamentos figurais na folha, escrevendo a resposta em língua formal, como podemos observar na figura 51.

Figura 51 - Protocolo dos alunos (08, 12), Sessão 01

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno 08 explicou a resposta escrita na folha em língua formal por meio da língua materna assim:

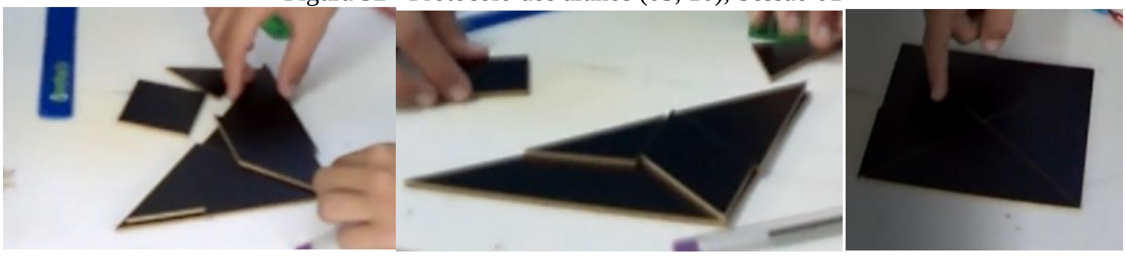
Aluno 08: Oito. Aqui (mostrando a resposta em língua formal da figura 51) a gente descobriu quantos quadrados tem porque o quadrado vale por dois e o triângulo vale por um. Então tinha dezesseis triângulos pequenos e foi só dividir dezesseis por dois que deu oito.

Nesse discurso é possível identificar o registro numérico e tratamentos que os levaram a resposta ($16TP \div 2 = 8Q,\ porque\ 2TP = 1Q$). Os alunos chegaram a esse raciocínio devido aos tratamentos figurais realizados com as peças do tangram. Identificamos que essa representação utilizando o material concreto favoreceu esse raciocínio.

Essa dupla continuou explorando o recurso didático e acabou mobilizando também a segunda estratégia de resolução prevista em nossa análise *a priori*, que é a nossa próxima estratégia denominada por E_2. Que detalharemos a seguir.

Para construir o quadrado com todas as peças do tangram a dupla (03, 10) construiu inicialmente um triângulo com os dois triângulos grandes e o recobriu com as outras cinco peças. Assim:

Figura 52 - Protocolo dos alunos (03, 10), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Quando questionados pela pesquisadora, um deles respondeu:

> Aluno 10: Essa aqui é a metade do quadrado (os dois triângulos grandes reconfigurados em outro triângulo, que está embaixo no protocolo 52)
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluno 10: Porque se a gente fizer essa outra metade aqui ó... (Montar com os triângulos pequenos, o triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo, outro triângulo por sobreposição). Aí eu vou ter as duas metades do quadrado e quando virar vai dar o quadrado inteiro.

Eles dividiram o quadrado em dois triângulos congruentes, um triângulo formado com os dois triângulos grandes e o outro com as peças restantes do tangram. Por meio dos tratamentos figurais e do diálogo acima formaram o quadrado com todas as peças do tangram (terceira imagem à direita da figura 52).

Respondendo, após isso, a quantidade de triângulos pequenos que cabem nesse quadrado. Assim:

> Aluna 03: Aqui cabe quatro (no triângulo grande) e aqui cabe mais quatro (outro triângulo grande). E aqui cabe dois (no triângulo médio), oito mais dois, dez. E aqui dá dois (quadrado), doze. Mais dois (triângulos pequenos), quatorze. E aqui (paralelogramo), quinze, dezesseis. Dezesseis triângulos pequenos.

Para finalmente escreverem a resposta na folha.

Figura 53 - Protocolo dos alunos (03, 10), Sessão 01

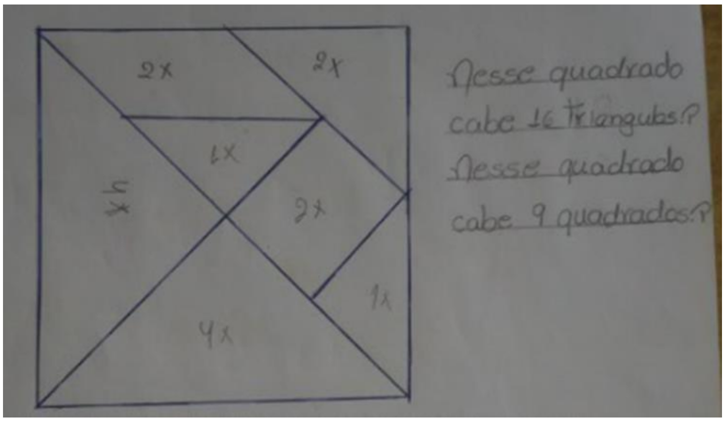
Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se nesse protocolo o registro numérico para as áreas de cada peça e o registro em língua formal na resposta. Os alunos perceberam que cabiam oito quadrados por meio dos tratamentos figurais e numéricos.

Percebemos que o uso desse recurso material com possibilidade heurística em suas peças favoreceu a compreensão de que a diagonal do quadrado o divide em dois triângulos congruentes. Esse raciocínio pôde ser visto nos tratamentos figurais mobilizados por eles para formar o quadrado com todas as peças do tangram. Isso contribui para a aprendizagem de área, por permitir um novo modo de pensar, o de decompor um quadrado em dois triângulos congruentes, calculando as suas áreas e somando-as depois. Determinando a área do quadrado formado pela composição desses dois triângulos congruentes.

A dupla (05, 06) representou na folha o quadrado com quantas vezes os triângulos pequenos cabem em cada peça, com a resposta ao lado. Assim:

Figura 54 - Protocolo dos alunos (05, 06), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos, no discurso da aluna 05, os tratamentos figurais que as levaram à resposta.

> Aluna 05: Primeiro a gente pegou o triângulo pequeno e viu que ele forma todas as formas geométricas (todas as peças podem ser decompostas em triângulos pequenos). E daí a gente foi descobrindo as áreas, que daí deu o resultado de dezesseis triângulos pequenos. E daí tava perguntando quantos quadrados cabem, quantos quadrados inteiros. A gente pegou esse quadrado e fez um, dois e três e um dois e três (Colocou três vezes o quadrado em cada lado do quadrado (figura 55)). E três vezes três é nove, aí deu nove quadrados no total.

Neste tratamento figural a aluna 05 mobilizou implicitamente a fórmula da área do quadrado "três vezes três dá nove", embasando-se mais na percepção para responder, que a levou a errar a quantidade de quadrados. Essa representação numérica embora correta, $3 \times 3 = 9$, conduziu-as a uma resposta incorreta que foi possível constatar diante das representações diferentes nesta atividade, no registro figural e numérico.

Figura 55 - Protocolo dos alunos (05, 06), Sessão 01

Fonte: Dados da pesquisa

A dupla (08, 12) foi a única que mobilizou a estratégia E_2 descrita a seguir.

E_2: *Identificar quantos triângulos pequenos cabem na metade do quadrado formado com todas as peças do tangram*

Como cabem oito triângulos pequenos na metade do quadrado (quadrado, triângulo médio, paralelogramo e dois triângulos pequenos) temos que cabem dezesseis triângulos pequenos no quadrado todo. E oito quadrados, porque nessa metade cabem quatro quadrados.

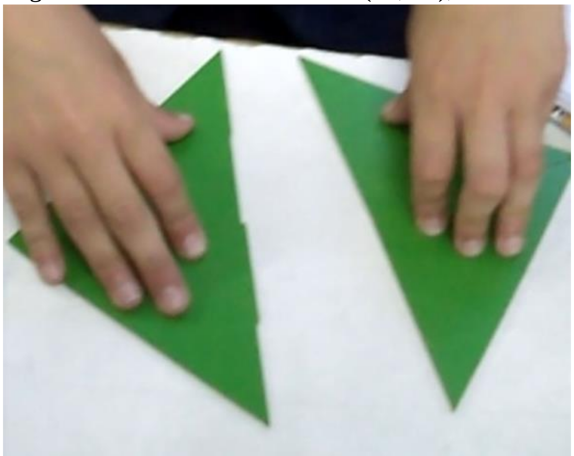
Análise a posteriori

A dupla (08, 12) continuou realizando tratamentos figurais após terminar as atividades da sessão. Chamando a pesquisadora para explicar o que tinham acabado de perceber.

> Aluno 08: Professora eu percebi um negócio!
> Pesquisadora: O que você percebeu?
> Aluno 08: Esses dois aqui ó... Aqui tem quatro triângulos pequenos e aqui mais quatro, vai dar oito (separou os dois triângulos grandes, metade do quadrado). E aqui forma outro triângulo que vai dar oito também (a outra metade). Juntando os dois vai dar o quadrado que vai dar dezesseis. Dezesseis triângulos pequenos.

Identificamos que o aluno 08 chegou a essa conclusão por meio da apreensão operatória, do olhar inventor e dos registros: figural, numérico e o da língua materna. O diálogo acima é justificado pelos tratamentos figurais, assim:

Figura 56 - Protocolo dos alunos (08, 12), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Assim com em Facco (2003, p.123), nessa dupla, “Notamos que, para eles, a decomposição já se tornou uma ferramenta de fácil manipulação”, facilitando os cálculos de área. Isso é um resultado importante em nossa pesquisa, pois essa exploração heurística nas figuras geométricas permite aos alunos novas formas de pensar e raciocinar além de possibilitar o cálculo de área.

A estratégia E_3 descrita a seguir foi mobilizada apenas pela dupla (01, 11).

E_3: *Identificar quantos triângulos pequenos cabem no triângulo grande*

Como cabem quatro triângulos pequenos no triângulo grande e, o triângulo grande corresponde à quarta parte do quadrado temos que cabem dezesseis triângulos pequenos no quadrado. E oito quadrados, porque cabem dois quadrados nessa quarta parte.

Análise a posteriori

Percebemos, no discurso da dupla (01, 11), os tratamentos figurais e numéricos realizados mobilizando a estratégia E_3.

> Aluna 11: Cabem dezesseis triângulos pequenos nesse quadrado porque quatro vezes quatro é dezesseis.
> Pesquisadora: Por que você fez quatro vezes quatro?
> Aluno 11: Porque cada um vale quatro.
> Pesquisadora: Como assim?
> Aluno 11: Porque esse dá quatro, quatro (a metade do quadrado formada pelas cinco peças menores do Tangram, decomposta em dois triângulos grandes), quatro, quatro (os dois triângulos grandes). Quatro vezes quatro dá dezesseis

Identificamos nesse diálogo a apreensão discursiva, o olhar inventor e a apreensão operatória atuando para a determinação da solução; juntamente com os registros numérico e figural e tratamentos nestes. E o quanto a possibilidade de representar de modo distinto esse item da atividade permitiu compreender a linha de raciocínio mobilizada por eles, validando-o corretamente e nos dando uma convicção maior da aprendizagem geométrica desses alunos.

As estratégias E_4 e E_5 não foram mobilizadas por nenhuma dupla.

E_4: *Identificar quantos quadrados cabem no triângulo grande*

O triângulo grande pode ser decomposto em um quadrado e dois triângulos pequenos. Como os triângulos pequenos formam um quadrado temos que, o triângulo grande pode ser decomposto em dois quadrados. Sendo assim, cabem oito quadrados no quadrado formado com todas as peças do tangram. Cabendo, consequentemente, dezesseis triângulos pequenos.

E_5: *Representar por meio de desenho 2D/1D o quadrado formado com todas as peças do tangram na folha e preenchê-lo com os triângulos pequenos, contornando-os.*

Pode-se desenhar o quadrado formado com todas as peças do tangram na folha e com o(s) triângulo(s) pequeno(s), contornando-o(s), desenhar dezesseis deles no interior desse quadrado. Ou, contornar oito peças quadradas do tangram e após dividi-la ao meio. Identificando que cabem dezesseis peças do triângulo pequeno ou oito peças quadradas do tangram no quadrado formado com todas as peças desse jogo.

Detalharemos agora as possíveis estratégias para o segundo item desta atividade que é determinar a área do quadrado formado com todas as peças do tangram sabendo que o triângulo pequeno têm 1 ua.

E_1: *Identificar as áreas de cada uma das sete peças do tangram e somá-las*

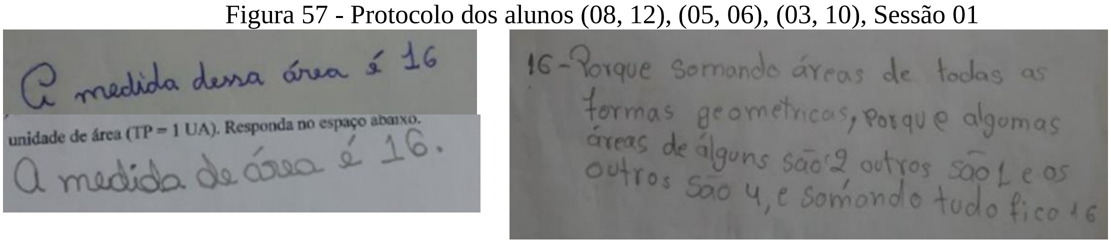
$$Área_{\ Quadrado} = 2 \times Área_{Triângulo\ Grande} + 2 \times Área_{Triângulo\ Pequeno} + Área_{Paralelogramo} + Área_{Quadrado} + Área_{Triângulo\ Médio}$$

$$Área_{\ Quadrado} = 2 \times 4\ ua + 2 \times 1\ ua + 2\ ua + 2\ ua + 2\ ua = 16\ ua$$

Análise a posteriori

As duplas que identificaram que cabiam dezesseis triângulos pequenos no quadrado, não tiveram dificuldades para responder ao segundo item. Respondendo corretamente em língua formal, assim:

Figura 57 - Protocolo dos alunos (08, 12), (05, 06), (03, 10), Sessão 01



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que essas três duplas registraram apenas o 16 sem a grandeza "ua", porém isso não compromete a aprendizagem geométrica de área de figuras planas. Podemos observar isto diante das representações diferentes (língua materna, numérica, figural) mobilizadas por eles.

A segunda estratégia descrita a seguir foi mobilizada pela dupla (01, 11).

E_2: *Calcular a área do triângulo grande*

A área do triângulo grande é $4\ ua$. Sendo assim, a área do quadrado é: $4 \times 4\ ua = 16\ ua$.

Análise a posteriori

A dupla (01, 11) mobilizou essa estratégia, é o que se pode perceber na apreensão discursiva e no registro figural e numérico do excerto abaixo.

> Aluna 11: Cabem dezesseis triângulos pequenos nesse quadrado porque quatro vezes quatro é dezesseis.
> Pesquisadora: Por que você fez quatro vezes quatro?
> Aluno 11: Porque cada um vale quatro.
> Pesquisadora: Como assim?
> Aluno 11: Porque esse dá quatro, quatro (a metade do quadrado formada pelas cinco peças menores do tangram, decomposta em dois triângulos grandes), quatro, quatro (os dois triângulos grandes). Quatro vezes quatro dá dezesseis.

Essa dupla compreendeu que “cabiam” quatro vezes quatro triângulos pequenos no quadrado formado com todas as peças do tangram, totalizando dezesseis triângulos pequenos de 1 ua cada. Concluindo, assim, que esse quadrado tem 16 ua.

A estratégia E_3 foi mobilizada pela dupla (08, 12).

E_3: *Calcular a área de cada uma das cinco peças (triângulo médio, triângulos pequenos, quadrado e paralelogramo) e multiplicar por dois*

Como a área dessas cinco peças é $8\,ua$, tem-se que a área do quadrado é: $2 \times 8\,ua = 16\,ua$.

Análise a posteriori

A dupla (08, 12) mobilizou essa estratégia explorando heuristicamente as peças do tangram após responder a todos os itens dessa sessão de ensino. Percebemos que o recurso material contribui para continuarem explorando essas peças geométricas, oportunizando outros modos de pensar e raciocinar. Assim:

> Aluno 08: Professora eu percebi um negócio!
> Pesquisadora: O que você percebeu?
> Aluno 08: Esses dois aqui ó... Aqui tem quatro triângulos pequenos e aqui mais quatro, vai dar oito (separou os dois triângulos grandes, metade do quadrado). E aqui forma outro triângulo que vai dar oito também (a outra metade). Juntando os dois vai dar o quadrado que vai dar dezesseis. Dezesseis triângulos pequenos.

A possibilidade de determinar a área do quadrado formado com todas as peças do tangram com o recurso concreto permitiu que chegassem a essa segunda solução, dando a eles a convicção da resposta, pois a encontraram de dois modos diferentes.

As duas próximas estratégias não foram mobilizadas por nenhuma dupla.

E_4: *Identificar o número de triângulos pequenos que cabem no quadrado que forma o tangram*

Como cabem dezesseis triângulos pequenos nesse quadrado, a sua área é: $16 \times 1\ ua = 16\ ua$.

E_5: *Identificar o número de peças quadradas que cabem no quadrado formado com todas as peças do tangram*

A área do quadrado formado com todas as peças do Tangram é oito vezes a área do quadrado, ou seja, $8 \times 2\ ua = 16\ ua$.

Era esperado que a dificuldade nessa segunda atividade fosse decompor cada peça do tangram em triângulos pequenos, desenhar o quadrado formado com todas as peças do tangram no papel e redigir em língua formal as respostas.

Para encerrar essa 1ª sessão, apresentamos na lousa as respostas dos alunos e os procedimentos mobilizados para obter as respostas. Discutimos, juntamente com os alunos, as questões:

Quais figuras do tangram possuem a mesma área? Justifique.

O que precisamos fazer para calcular a área de uma figura?

É sempre possível decompor qualquer figura em triângulos?

5.1.3 Considerações sobre a primeira sessão

Apenas uma aluna, dentre os dez, conhecia o tangram e havia usado em sala de aula no estudo de outro conteúdo matemático. Talvez, não o tenham usado pelo fato de que alguns livros não aprofundem o estudo de áreas utilizando recursos didáticos (SANTANA, 2006).[50]

Quanto a esses aprofundamentos, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), podem-se verificar as orientações didático-metodológicas que norteiam para a organização desse conteúdo. Elas trazem como sugestões:

> Atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans e poliminós, fazem com que os alunos verifiquem

[50] Reforçamos a constatação de Santana (2006), porém na escola onde realizamos a experimentação se usa somente apostila. Embora, os professores se apoiem em alguns livros didáticos para elaborar atividades que são feitas extraclasse.

> que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal poder ser composta/decomposta por outra e em particular por triângulos, o que facilita o cálculo de área... (BRASIL, 1997, p. 123).

De fato, as decomposições, composições e reconfigurações possibilitaram encontrar as áreas das outras peças. Além disso, os alunos puderam constatar, assim como em Facco (2003), que figuras diferentes podem ter a mesma área.

Estranhamente, as respostas das duplas (03, 10), (08, 12) estão praticamente idênticas nos protocolos. Concluímos que alguém possa ter olhado as representações do colega, visto que estavam sentados próximos. Porém, percebemos que os diálogos deles que justificam os tratamentos figurais são diferentes, a dupla (08, 12), por exemplo, formou o quadrado com todas as peças do tangram de modo completamente diferente da dupla (03, 10).

Concordamos com Facco (2003) que este tipo de atividade com o tangram é apropriado para reconhecer os procedimentos de reconfigurações nas figuras planas e para elaborar novos conceitos. Em nossa análise, por exemplo, percebemos que os alunos compreenderam que a área de uma figura pode ser obtida pela soma das áreas das figuras que a compõem (as peças do tangram).

Mesmo que alguns alunos tenham encontrado dificuldades, essa estratégia de reconfiguração fez com que descobrissem novas ideias e conceitos, como por exemplo, perceberam por meio dos tratamentos figurais com as peças do tangram que:

Aparentemente, parece ser sempre possível, neste recurso didático, decompor qualquer figura em triângulos porque todas as peças do tangram puderam ser decompostas em triângulos pequenos. E ainda, que figuras diferentes podem ter a mesma área (o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo).

Todos chegaram a essa conclusão por meio dos tratamentos figurais realizados nas peças do tangram durante essa sessão de ensino. Identificamos que esse recurso material contribuiu para esse raciocínio e também o de que a área de uma figura é a soma das áreas das subfiguras em que ela foi decomposta. O que é um resultado importante em nosso estudo por permitir olhar para a área de uma figura que se quer saber de modo diferente, decompondo-a em subfiguras que se possa calcular a sua área e após somá-las para encontrar a resposta.

Percebemos que atribuir $2\,ua$ a peça quadrada do tangram e solicitar a determinação da área das outras peças desafiou os alunos, encorajando-os. Os registros em língua materna, figural e numérico contribuíram significativamente para este resultado. Principalmente para perceber a equivalência das áreas das peças do tangram (quadrado, triângulo médio e paralelogramo), com 2 ua cada.

Na primeira atividade somente a dupla (04, 07) não representou os traços, nos protocolos, nas figuras que justificam a sua área. Isso também pode ser observado em Facco (2003), quando "[...] dos 29 alunos, somente um deles não fez decomposição por meio de traços na figura de partida [...]".

Ao observarmos os resultados obtidos e as estratégias mobilizadas nos procedimentos de reconfigurações para determinar as áreas, constatamos uma compreensão significativa dos alunos. Atingindo o nosso objetivo, que procurou evidenciar os procedimentos de reconfigurações por meio de decomposição e composição com as peças do tangram, para possibilitar a compreensão de área de figuras planas. Nesses processos os alunos perceberam que "a área é o espaço ocupado por uma superfície" (FERREIRA, 2010, p. 90).

Assim como colocado em Santana (2006), percebemos que essa atividade contribuiu para que os alunos construíssem a ideia de equivalência de áreas; o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo são figuras diferentes que possuem a mesma área. Eles observaram também que o triângulo grande tem o dobro dessas áreas, a dupla (01, 11), por exemplo, decompôs o triângulo grande em um quadrado e dois triângulos por sobreposição. Em seguida tirou essas peças de cima do triângulo grande e formou um quadrado com os dois triângulos pequenos, resultando em dois quadrados. Concluindo assim que o triângulo grande era duas vezes o quadrado, ou seja, sua área era o dobro da área do quadrado.

Todos os alunos ao decomporem as peças do tangram realizaram uma desconstrução dimensional $(2D \rightarrow 2D)$. Esse procedimento consiste para Duval (2011, p. 87) em "[...] operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista [...]" e que colabora para resolver atividades que envolvem áreas de figuras planas.

Os alunos mobilizaram tratamentos figurais e numéricos[51] corretamente para a área de cada peça do tangram, entretanto escreveram a unidade de medida de modo inadequado, como tínhamos previstos na análise à *priori*, ou seja, muitos escreveram a área sem a unidade de medida "ua". Fato este percebido em outras pesquisas, como as

[51] O tratamento numérico foi somar as áreas das subfiguras obtidas na decomposição das peças do Tangram.

de (PESSOA, 2010, SILVA, 2016). Isso também não prejudica o nosso trabalho por acreditarmos, concordando com Duval, que o conhecimento é mobilizado por meio de atividades de representação e nessa sessão, em diferentes registros, o que possibilitou uma compreensão que pode ser observada nos diálogos e protocolos produzidos.

Apresentamos a seguir as análises da segunda sessão de ensino.

5.2 Sessão 02

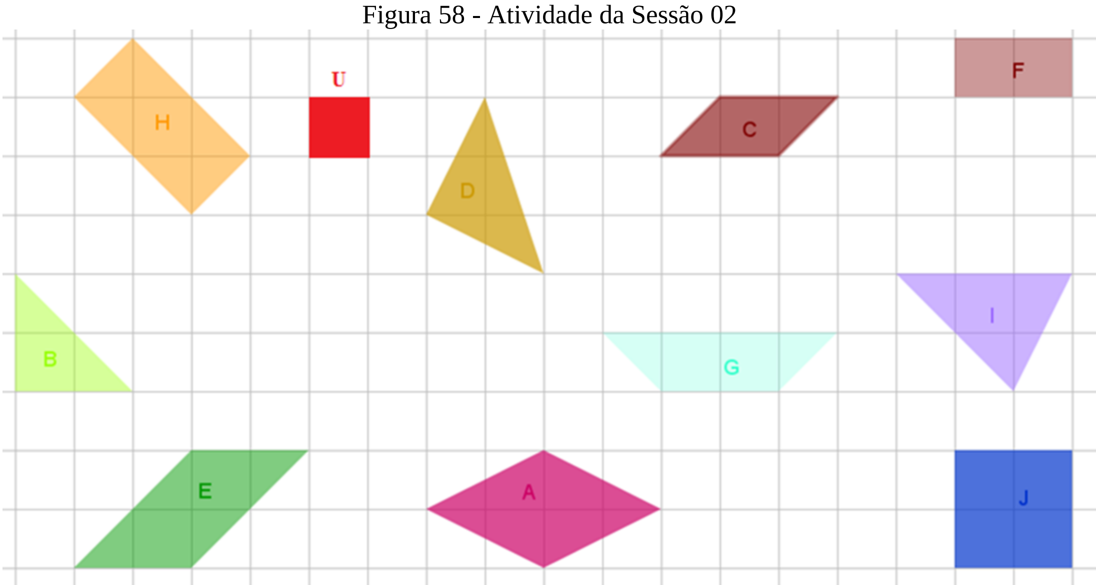
Essa sessão é composta por um item, em que se deve determinar a área de dez figuras: um quadrado, dois retângulos, três triângulos, dois paralelogramos, um losango e um trapézio.

5.2.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori desta atividade*

O enunciado da atividade desta sessão foi o seguinte:

Sabendo que o quadrado vermelho U tem 1 unidade de área ($1\ ua$*), calcule a área das figuras abaixo.*

Figura 58 - Atividade da Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

Esta atividade tem como objetivo calcular a área das figuras tomando como unidade a área do quadrado vermelho (U) que tem $1\ ua$. A área das figuras pode ser calculada realizando a contagem dos quadradinhos que cabem no seu interior, empregando as fórmulas algébricas ou contornando-a por um retângulo e subtraindo dele as áreas que não fazem parte da figura.

Uma variável didática é a posição das figuras na malha, com os seus lados apoiados ou não sobre ela e a outra variável é o tipo das figuras escolhidas, no caso triângulos, paralelogramos e trapézios. As figuras que possuem todos os seus lados apoiados na malha são: o retângulo F e o quadrado J. As que possuem exatamente dois lados apoiados na malha são: o triângulo B, o paralelogramo E, o paralelogramo C e o trapézio G. O triângulo I possui exatamente um lado apoiado na malha e as que não possuem nenhum de seus lados apoiados na malha são: o losango A, o triângulo D e o retângulo G.

A seguir apresentamos como foi a realização desta sessão da engenharia e qual foi a população de alunos participantes.

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 14/07/2017 das 13h30 às 16:00h e contou com a participação de dez alunos, sendo seis do quinto ano e quatro do sexto ano do Ensino Fundamental. As duplas ficaram assim formadas:

Quadro 3 - Participação dos alunos na Sessão 02

Duplas	Ano	Idade
(03, 10)	5º ano	10 anos
(01, 02)	5º ano	10 e 9 anos
(11, 12)	5º ano	11 e 10 anos
(04, 07)	6º ano	11 e 10 anos
(05, 09)	6º ano	11 e 10 anos

Fonte: Dados da pesquisa.

Iniciamos a sessão retomando algumas questões com o tangram, como: *“Por que o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio possuem a mesma área? O que é área?”* Alguns alunos conjecturaram: “Há... eu acho que área tem a ver com o tamanho da figura”, “tem a mesma área porque neles cabem os dois triângulos pequenos”, “os dois triângulos grandes tem a mesma área porque eles são iguais”, “o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo não são iguais, mas têm a mesma área porque cabem neles os dois triângulos pequenos". Indaguei-os novamente: *"O que vocês entendem por área?"* Alguns responderam: "Há... sei lá, acho que tem a ver com o tamanho delas".

Para iniciar a atividade com a malha, representei cinco figuras na malha na lousa e questionei qual a área de cada uma delas sabendo que o "quadradinho" vale 1 ua. Nesse momento houve uma indagação.

> Aluna 02: Professora eu não estou entendendo. Por que unidade de área? Não tem metro, centímetro? Foi assim que eu aprendi com a professora na sala de aula. Eu não vi essa *unidade de área*, o que é isso?
> Pesquisadora: Calma. Nós vamos chegar no metro e no centímetro. Mas, aqui estamos considerando que o quadradinho vale *uma unidade de área*, ele vale um. Lembra que consideramos no tangram que o quadrado valia *duas unidades de área?*
> Alunos: Sim.
> Pesquisadora: E se o quadrado do tangram tivesse 3, 4, 5, ou qualquer outra unidade de área, podendo ser inclusive essas medidas, as áreas delas mudariam?
> Alunos: Não.
> Pesquisadora: Por que não?
> Alunos: Porque elas não mudam de tamanho, continuam do mesmo jeito.
> Pesquisadora: Entendi.
> Aluna 02: Professora eu aprendi com a professora calculando com as fórmulas, assim ó: base vezes a altura (referia-se a área do quadrado e a do retângulo).
> Aluna 02: A área é base vezes altura, aí a gente calcula a base e multiplica pela altura que é o resultado, que é a área.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluna 02: É por isso que eles são iguais (as áreas das peças do tangram: quadrado, triângulo médio e paralelogramo). Dá a mesma área. Dá o mesmo resultado se eu multiplicar a base pela altura deles, por isso que elas são iguais (têm a mesma área).
> Pesquisadora: Nós só conseguimos calcular a área de uma figura plana usando essas fórmulas? (Todos disseram sim, exceto o aluno11).
> Pesquisadora: Pode calcular como (perguntou para o aluno 11)?
> Aluno 11: Tem outro jeito.
> Pesquisadora: Sem a fórmula?
> Aluno 11: É.
> Pesquisadora: Você consegue dar um exemplo?
> Aluno 11: Não.
> Pesquisadora: Mas você acha isso?
> Aluno 11: Sim!
> Aluna 02: Ó! O triângulo é base vezes a altura dividido por dois, por causa que é duas metades.
> Pesquisadora: Duas metades do quê?
> Aluna 02: De triângulos.
> Aluno 01: Quando aparecia na nossa tarefa para fazer isso (calcular a área do triângulo), aí era dividido bem no meio (a altura do triângulo).
> Aluna 02: Ó, um exemplo, tava lá o triângulo e no meio dele tava lá um risco e tava lá o 20 e embaixo tava 18. Daí tinha que fazer conta de vezes, 18 vezes vinte. Depois no final tinha que dividir por dois.
> Pesquisadora: E o que é esse risco?
> Aluna 02: É a metade. A metade do triângulo.
> Pesquisadora: Com o tangram vocês usaram as fórmulas?
> Alunos: Não.
> Pesquisadora: E agora? Será que só conseguimos calcular a área de uma figura plana usando essas fórmulas?

> Aluno 11: Há... Não sei agora... Acho que dá para calcular sem fórmulas (com cara de dúvida).
> Pesquisadora: Vamos ver então...

Percebe-se nesse diálogo que os alunos, principalmente os do 5º ano do Ensino Fundamental, que tinham acabado que ver áreas de figuras planas na sala de aula, tinham dúvidas em relação à área das figuras planas. Eles compreendiam implicitamente que área tem a ver com o tamanho da figura, mas ficavam em dúvida quanto à grandeza utilizada para calculá-la. A aluna 02 lembrou-se das fórmulas algébricas para a área do quadrado, do retângulo e do triângulo, entretanto percebemos que esse procedimento para ela é mecânico (multiplica 18 por 20 e divide o resultado por 2), observa-se em seu discurso que ela confunde altura do triângulo com "metade do triângulo".

Além disso, observamos que nesta sessão os alunos se encontravam muito presos às fórmulas algébricas para o cálculo de área de figuras planas e que o cálculo de área com as peças do tangram da sessão 01 provocou neles indagações, estranhamentos e reflexões.

Percebemos que eles estavam mais reflexivos e questionadores. Porém, tinham dificuldades em perceber que calcular a área de uma superfície plana é compará-la com grandezas de uma mesma natureza, visto que no encontro passado comparamos a peça quadrada do tangram com as demais. E neste encontro estávamos comparando o "quadradinho" de 1 ua com os triângulos e quadriláteros.

Após alguns questionamentos iniciamos a resolução das atividades deste protocolo. Os alunos as calcularam com empenho e dedicação, mobilizando estratégias com seu par.

No término desta sessão foi realizada uma retomada das respostas das áreas de cada figura oralmente. Na lousa representamos os triângulos D e o I e o losango A, perguntando qual era a área de cada um deles e como fizeram para encontrar. Não tinham certeza da resposta da área do triângulo D porque encontraram resultados diferentes, quatro duplas encontraram 3 ua e uma dupla 2 ua por tratamentos figurais e numéricos diferentes. A dupla (04, 07) completou os quadrados por dentro concluindo que cabem nesse triângulo três desses quadrados. A dupla (05, 09) o enquadrou num retângulo e por procedimentos de decomposição e reconfiguração concluiu que ele tinha 3 ua também. E por decomposição e reconfiguração, sem enquadrá-lo num retângulo, a dupla (01, 02) chegou à conclusão de que sua área era 3 ua. A dupla (03, 10) mobilizou procedimentos de decomposição e reconfiguração concluindo que sua área era 2 ua, porém perceberam que a reconfiguração não formava um quadrado de 1 ua, razão essa que não os convenceu. Entretanto não conseguiram mobilizar outros raciocínios.

No final, discutimos, entre outras, as questões a seguir:

1) Existem fórmulas algébricas do cálculo de áreas para qualquer figura?

2) Como podemos proceder para calcular a área de uma figura qualquer?

As estratégias, bem como possíveis respostas, fazendo ou não o uso de fórmulas para calcular a área de cada figura[52], separadas em triângulos e quadriláteros serão descritas a seguir.

Para os triângulos:

- ***O triângulo B***

E_1: *Por contagem dos quadradinhos*

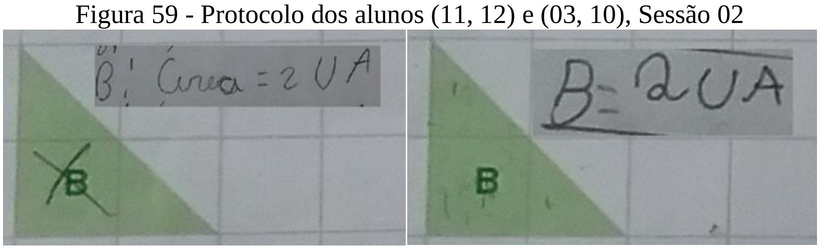
Esse triângulo pode ser decomposto em um quadrado U e mais duas metade dele, que juntos formam outro quadrado U. Como cabem dois desses quadrados nele a sua área é 2 ua.

Esta estratégia foi mobilizada por três duplas [(11, 12), (04, 07) e (03, 10)]. Veja na análise *a posteriori* a seguir.

Análise a posteriori

Esses alunos sabiam que os dois triângulos visualizados na decomposição formavam um quadrado de 1 ua. Sendo assim, realizaram a contagem desses quadrados escrevendo a resposta. Assim:

Figura 59 - Protocolo dos alunos (11, 12) e (03, 10), Sessão 02



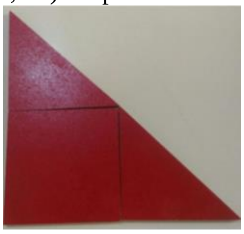
Fonte: Dados da pesquisa

[52] Os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental já tinham mobilizado as fórmulas algébricas para o cálculo de áreas em sala de aula com a professora que voluntariamente participou de todas as sessões de ensino deste estudo.

A dupla [(03, 10) – protocolo acima] também representou este triângulo com as peças do tangram (figura 60), o que não tínhamos previstos, eles consideraram nesta representação que a peça quadrada deste jogo tinha 1 ua.

Percebemos que esses alunos ainda precisavam do material concreto. E também que a possibilidade de representar essa área de outro modo contribuiu para resolver a atividade, bem como começaram a perceber que calcular área de uma figura plana é comparar grandezas de uma mesma natureza graças às representações distintas do triângulo B realizadas. O que pode ser visto no diálogo em língua materna abaixo.

Figura 60 - Protocolo dos alunos (03, 10) - representando o triângulo B no tangram, Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

> Aluno 10: A área do triângulo B é dois porque o quadrado vale um e com dois triângulos pequenos dá dois, esse aqui (o triângulo B de sua folha).
> Aluno 03: Esse mais esse dá um inteiro (os triângulos) porque é a metade. E esse já é um inteiro (o quadrado). Então a gente somou: metade mais metade mais um inteiro que deu dois.

As decomposições com as peças do tangram, no encontro passado, contribuíram com este raciocínio, o de comparar elementos de uma mesma natureza e o de decompor, compor e reconfigurar figuras. Olhar este que eles não tinham sobre as figuras.

A maioria desses alunos determinou as áreas discutindo as estratégias com seu par, havia certo clima de competição entre as duplas. Sendo assim, eles calcularam estas áreas de modo mais autônomo. Em muitos casos, a pesquisadora foi chamada somente para eles explanarem como tinham encontrado a área daquela figura.

No diálogo acima, percebe-se que os dois alunos explicam como determinaram a área do triângulo B. Nessa representação, em língua materna, eles mobilizam o registro numérico e os tratamentos figurais efetuados mentalmente sobre a figura representada na malha.

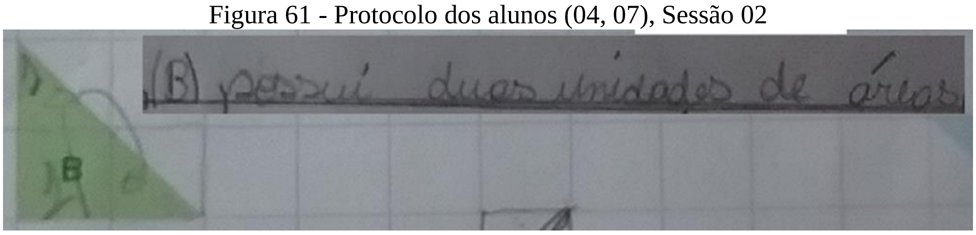
Esses tratamentos figurais e numéricos não estavam evidentes para a dupla (04, 07). Acompanhe:

> Aluna 07: Ó essa parte aqui mais essa parte vai dar um quadrado (os dois triângulos no triângulo B).
> Aluna 04: Mas a gente conta se tiver dois assim? Aí esse aqui vale um e meio e esse aqui vale um e meio?
> Aluna 07: Não. Aí a gente pega... Que nem eu te expliquei desse daqui ó...Aqui assim ó... Tem um quadrado. Aí você pega e dividi ele no meio. Quantos vai ficar aqui pra cada lado?
> Aluna 04: Dois. Ou! Um!
> Aluna 07: Meio. Aí você pega e junta eles de novo. Vai dá um quadrado. Não vai? Aí você pega e olha aqui ó... Tem meio dos dois lados (os triângulos). Aí você pega e junta esses dois (os triângulos da decomposição do triângulo B) o que vai dar?
> Aluna 04: Um quadrado.
> Aluna 07: Então...
> Aluna 04: DOIS, dois quadrados.
> Aluna 07: Então você pega esse quadrado e junta com esse e dá dois.

A aluna 07, para convencer a colega de que os triângulos obtidos na decomposição do triângulo formavam outro quadrado “U”, pegou os triângulos pequenos do tangram e formou com eles a peça quadrada deste jogo, montando duas peças quadradas, determinando a área do triângulo. Identificamos que o trabalho em dupla e os tratamentos figurais com as peças do tangram foram significativos para a obtenção da resposta, que não requereu a intervenção da pesquisadora.

Em alguns protocolos percebemos os tratamentos figurais e numéricos realizados sobre as figuras e em outros que as duplas realizaram estes mentalmente, escrevendo somente a resposta. No protocolo (figura 61), por exemplo, há o registro numérico, a seta que indica como exploraram heuristicamente esta figura, reconfigurando-a em um retângulo (E_3 detalhada mais a frente), e a resposta em língua formal. Assim, esta dupla mobilizou duas estratégias na resolução (E_1 e E_3).

Figura 61 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 02



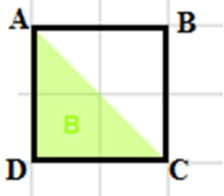
Fonte: Dados da pesquisa

A próxima estratégia não foi mobilizada por nenhuma dupla.

E_2: *Enquadrar num quadrado*

Esse triângulo B pode ser enquadrado em um quadrado de área $4\,ua$ (figura 62). Logo a sua área é $2\,ua$ porque ele corresponde à metade do quadrado. Assim:

Figura 62 - Decomposição do quadrado em dois triângulos congruentes



Fonte: Dados da pesquisa

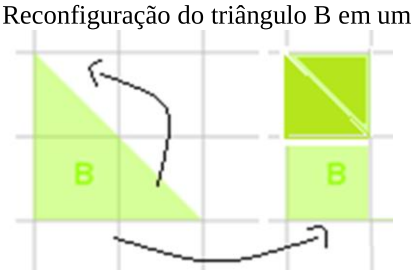
Conjecturamos que os alunos iriam tentar calcular a área olhando internamente para o triângulo B, decompondo-o e não externamente, englobando-o num quadrado.

A estratégia E_3 a seguir foi mobilizada pelas duplas (04, 07), (05, 09) e (01, 02).

E_3: *Reconfigurar num retângulo*

Os triângulos obtidos na decomposição do triângulo B podem ser reconfigurados, formando um retângulo de 2 ua. Assim:

Figura 63 - Reconfiguração do triângulo B em um retângulo

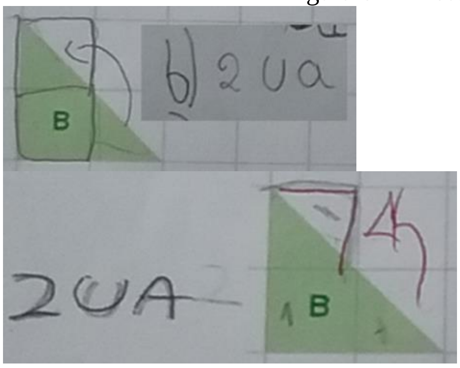


Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

A dupla (05, 09) para justificar a área deste triângulo atribuiu o valor numérico “100” ao quadrado U, o que não tínhamos previsto. Assim:

Figura 64 - Protocolo dos alunos (01, 02), (05, 09), Sessão 02



> Aluna 05: Esse aqui vale cem (o quadrado). E esse aqui vale cinquenta (o triângulo). Esse outro aqui vale cinquenta também (o outro triângulo). Aí esse aqui vem pra cá e dá cem (configurando um quadrado com os dois triângulos). Dá duzentos (reconfiguração do triângulo em um retângulo). A área desse triângulo é 2.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que para a dupla (01, 02) as reconfigurações mereológicas intermediárias estão mais fáceis, assim:

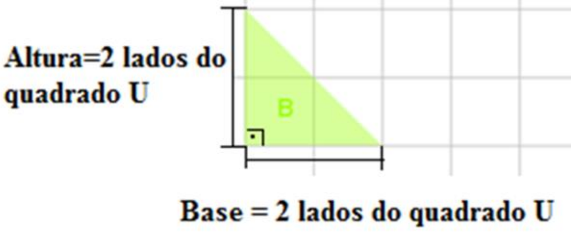
> Aluna 02: O B foi pra mim o mais fácil.
> Aluno 01: É só transferir esse daqui para cá, daí fica um e com esse aqui fica dois (reconfigurou o triângulo em um retângulo).

O registro algébrico não foi mobilizado em nenhum protocolo. Por isso, todas as estratégicas com as fórmulas não tem análise *a posteriori*.

E_4: *Usando a fórmula algébrica*

Para aplicar a fórmula é necessário verificar as medidas da base e da altura, assim:

Figura 65 - Identificando a medida da base e da altura



Fonte: Dados da pesquisa

Área do triângulo B = $\frac{base \times altura}{2} = \frac{2\,uc \times 2\ uc}{2} = 2\ ua.$

A estratégia descrita a seguir foi mobilizada por uma dupla.

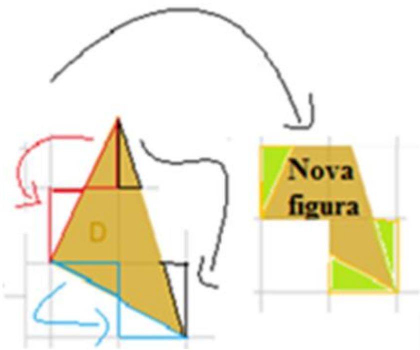
- ***O triângulo D***

E_1: *Por contagem dos quadradinhos*

Esse triângulo não tem nenhum dos lados apoiados na malha e sendo assim os procedimentos de decomposição adotados para o triângulo B não resolvem o problema. Nenhum dos triângulos obtidos na decomposição do triângulo D são metades do quadrado U.

Os alunos poderiam adicionar traços ao triângulo, decompondo-o e formando uma "nova figura" (figura 66), conjecturando corretamente "acho que o triângulo D 'tem cerca' de 2,5 ua porque cabem cerca de dois quadrados e meio Us em seu interior."

Figura 66 - Decomposição e reconfiguração do triângulo D

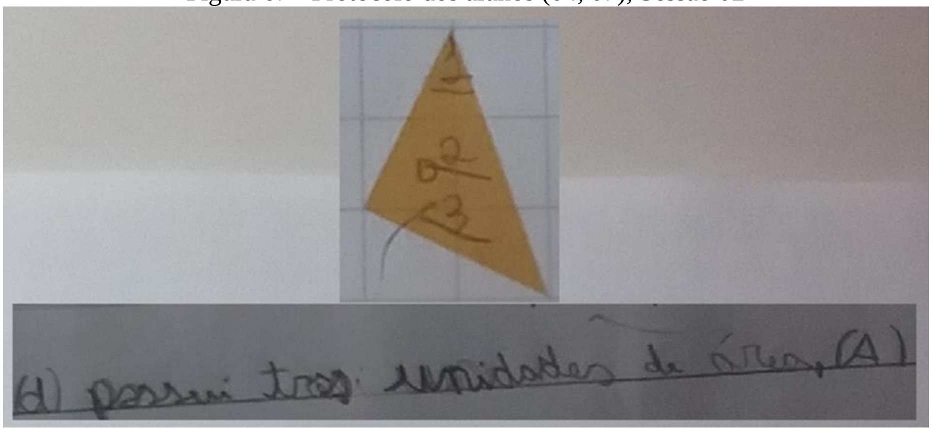


Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Todos os alunos perceberam que não dava para compor com os triângulos obtidos na decomposição um quadrado de 1 ua. A dupla (04, 07) conjecturou que havia três quadradinhos "Us" no interior deste triângulo, contando-os. Assim:

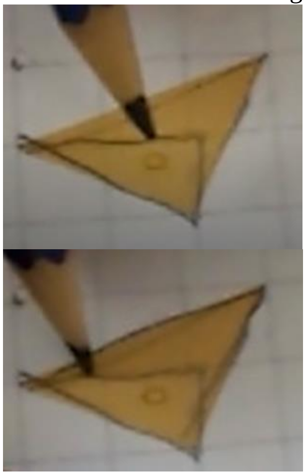
Figura 67 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

Porém, a dupla (03, 10) achava que era 2 ua. Assim:

Figura 68 - Protocolo dos alunos (03 e 10), Sessão 02



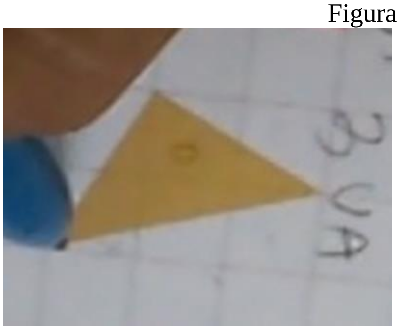
Aluno 03: A D a gente teve um pouco mais de dificuldade. A gente somou esse mais esse e deu um quadrado inteiro. Então a gente somou esse e esse e deu outro quadrado inteiro pelas nossas contas, porque senão ia ficar sobrando esse (um pedacinho do quadrado). Daí sua área é dois.

Fonte: Dados da pesquisa

Esses alunos adicionaram traços ao triângulo, decompondo-o em mais três triângulos. No discurso eles justificam que esses triângulos podem ser decompostos em mais dois triângulos que podem ser reconfigurados em quadrados de 1 ua. Porém, a posição do triângulo na malha não os convence dessas heurísticas sobre esta figura. Os alunos começam a perceber que nem sempre os procedimentos de contar os quadradinhos, bem como, o de decompor, compor e reconfigurar uma figura geométrica são suficientes para calcular sua área. O que é um resultado importante em nosso estudo, porque, neste caso, outras representações como o mergulhamento e o registro algébrico podem ser usados para determinar e/ou validar essa área.

Isso pode ser visto no diálogo da dupla (01, 02). Acompanhe:

Figura 69 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02

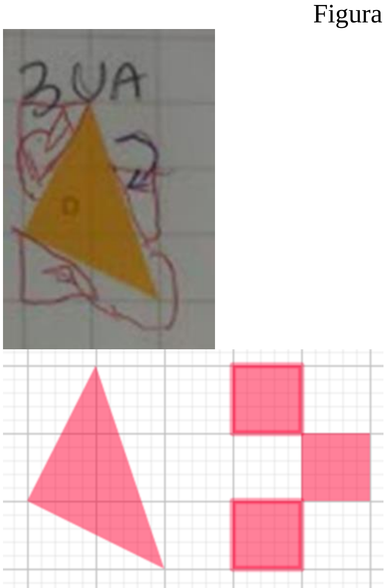


Aluno 01: Uma coisa que eu fiquei encabulado é por causa que tem lugar no triângulo que no lugar do meio é menor (nenhum triângulo é metade do quadrado).
Aluna 02: É que aqui é torto. Então a gente fez de um jeito, a gente virou e fez como normal assim (a aluna visualizou o triângulo conforme a figura ao lado). E aqui fica bem arrumadinho, assim ó.

Fonte: Dados da pesquisa

No discurso dos alunos (01, 02), percebe-se que o mecanismo icônico (que se impõe de modo autônomo numa primeira vista sobre as figuras) não foi suficiente para solucionar esta atividade. Tentaram reconfigurar o triângulo numa figura de $3\,ua$, porém discursivamente esses tratamentos e registros não as convenceram. Assim:

Figura 70 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02



Aluna 02: a gente virou a folha porque viu que ele era torto. Daí a gente tirou aqui e colocou aqui, deu um. Aí tirou aqui e colocou aqui deu dois. Tirou aqui e colocou aqui e deu três (reconfiguraram o triângulo D em três quadrados).

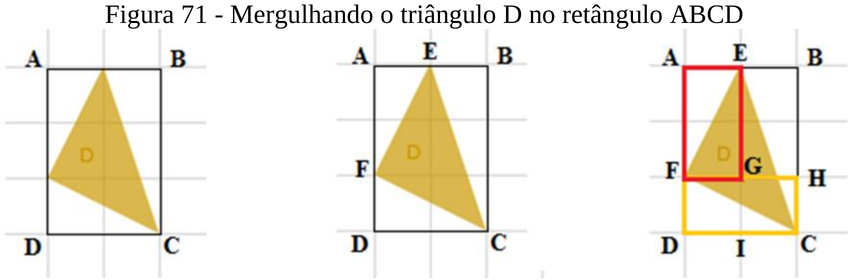
Fonte: Dados da pesquisa

Neste triângulo, tentamos explicar aos alunos a estratégia descrita a seguir (E_2). Porém, eles relutaram e não a desenvolveram. E, com isso concordamos com Duval (2005) que as figuras geométricas se diferenciam de todas as outras por permitirem tratamentos figurais e que aprender a olhar para elas exige um longo treinamento.

E_2: *Enquadrar num retângulo*

O procedimento esperado era que eles calculassem a área do triângulo D o enquadrando em um retângulo (retângulo ABDC, figura 71). Retirando desse retângulo as áreas dos triângulos AEF, EBC e CDF, sobrando somente a área do triângulo ECF que é o triângulo D.

Figura 71 - Mergulhando o triângulo D no retângulo ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

Sendo assim:

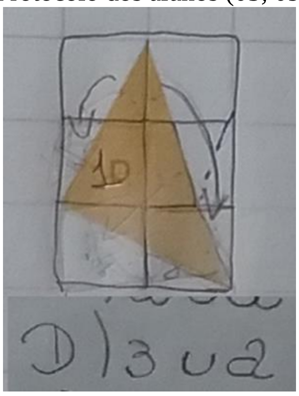
$A_{Triângulo\ D} = A_{Retângulo\ ABCD} - (A_{Triângulo\ AEF} + A_{Triângulo\ EBC} + A_{Triângulo\ CDF})$, onde A é a $Área$.

Logo: $A_{Triângulo\ D} = 6\ ua - (1\ ua + 1{,}5\ ua + 1\ ua) = 6\ ua - 3{,}5\ ua = 2{,}5\ ua$.

Análise a posteriori

A dupla (05, 09) com as intervenções e sugestões da pesquisadora, mergulhou o triângulo no retângulo, mas ficou presa aos procedimentos de decomposição e reconfiguração. Outros questionamentos foram feitos a ela, que não conseguiram visualizar esta estratégia de resolução (E_2). Querendo terminar a atividade deram por solucionada esta área, mesmo não se convencendo do resultado obtido.

Figura 72 - Protocolo dos alunos (05, 09), Sessão 02



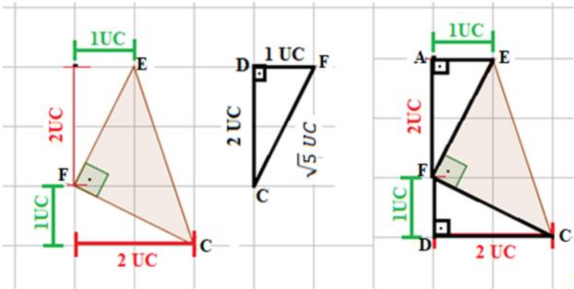
Fonte: dados da pesquisa

E_3: *Usar a fórmula algébrica*

Como o triângulo D não possui nenhum de seus lados apoiados na malha não se tem a medida de nenhuma base e de nenhuma altura correspondente. Assim, torna-se necessário para aplicar a fórmula algébrica ter a medida de uma de suas bases e a medida de sua altura correspondente.

Essas medidas podem ser obtidas, observando que o segmento CF é a hipotenusa do triângulo retângulo CDF (figura 73, triângulo à direita), com catetos medindo $2\ uc$ e $1\ uc$. Sendo assim, pelo teorema de Pitágoras a medida do segmento CF é $\sqrt{5}\ uc$, de modo análogo o segmento EF tem a mesma medida, $\sqrt{5}\ uc$. E como o triângulo CFE (triângulo D), é retângulo em F[53], pode-se tomar como sendo a base o segmento CF e a altura o segmento FE ou vice-versa.

Figura 73 - A base do triângulo D é o segmento CF e a altura o segmento EF



Fonte: Dados da pesquisa

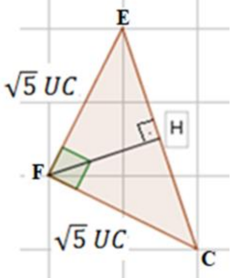
Aplicando a fórmula algébrica temos:

Área do triângulo = $\frac{base \times altura}{2} = \frac{\sqrt{5}\,uc \times \sqrt{5}\,uc}{2} = \frac{\sqrt{25}\,ua}{2} = \frac{5\,ua}{2} = 2{,}5\,ua$

Uma dificuldade para aplicar a fórmula é identificar a medida da base e de sua altura correspondente, uma vez que nos cálculos aparecem números irracionais, raiz quadrada, representação fracionária e decimal, sobretudo a aplicação do teorema de Pitágoras para encontrar as medidas dos lados do triângulo.

Independentemente da medida da base, e de sua altura correspondente, a área do triângulo D é a mesma. Desse modo cálculos diferentes podem ser realizados para obtenção do valor da área. Sendo assim, explicitaremos a seguir o cálculo da área se a base for CE, mesmo considerando que ele não será considerado como base porque a sua altura correspondente é mais difícil de ser visualizada, ela é interna ao triângulo, é o segmento FH (figura 74).

Figura 74 - Medida da base CE do triângulo D



Fonte: Dados da pesquisa

[53] O triângulo DAC é congruente ao triângulo ECB pelo caso lado ângulo lado (LAL). E sendo assim $D\hat{A}C = E\hat{C}B = b$, $D\hat{C}A = E\hat{B}C = a$. Observe ainda que: $D\hat{C}A + A\hat{C}B + B\hat{C}E = 180^0$, ou seja, $a + A\hat{C}B + b = 180^0$, e como $a + b = 90^0$, temos que: $A\hat{C}B = 90^0$.

A medida da base CE pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras[54], porque ela é a hipotenusa do triângulo isósceles CFE, $\overline{CF} = \overline{FE} = \sqrt{5}\,uc$.

Sendo assim pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$(hipotenusa\ CE)^2 = (cateto\ CF)^2 + (cateto\ FE)^2$

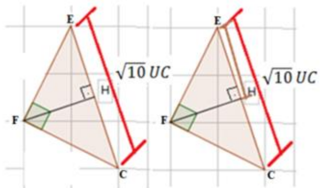
$(\overline{CE})^2 = (\sqrt{5})^2\,uc + (\sqrt{5})^2\,uc$, denotaremos por $\overline{EC}$ a medida do segmento EC.

$(\overline{CE})^2 = 5\,uc + 5\,uc$

Logo, $\overline{CE} = \sqrt{10}\,uc$

Para descobrir a altura desse triângulo é necessário perceber que o triângulo D é isósceles porque $\overline{CF} = \overline{FE} = \sqrt{5}\,uc$. Sendo assim a sua altura FH também é mediana de CE (figura 75), logo $\overline{CH} = \overline{HE} = \frac{\sqrt{10}}{2}\,uc$.

Figura 75 - Medida da altura FH relativa à base CE



Fonte: Dados da pesquisa

Aplicando o teorema de Pitágoras do triângulo CFH, temos que:

$(\overline{CF})^2 = (\overline{FH})^2 + (\overline{HC})^2$

$(\sqrt{5}\,)^2 uc = (FH)^2 UC + (\frac{\sqrt{10}}{2} uc)^2$

Sendo assim, $\overline{FH} = \frac{\sqrt{10}}{2}\,uc$

Portanto a altura desse triângulo é $\frac{\sqrt{10}}{2}\,uc$.

Aplicando a fórmula algébrica de área nesse triângulo, temos que:

Área do triângulo = $\frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{CE} \times \overline{FH}}{2} = \frac{\sqrt{10}\,uc \times \frac{\sqrt{10}}{2} uc}{2} = \frac{\frac{\sqrt{100}}{2}\,ua}{2} = \frac{\frac{10}{2}\,ua}{2} = \frac{5\,ua}{2} = 2{,}5\,ua.$

Era esperado que os alunos não utilizassem esse procedimento por exigir conceitos mais complexos de cálculos envolvendo números irracionais e a utilização do teorema de Pitágoras, os quais eles não estudaram ainda. De fato, esses conteúdos fazem parte do currículo do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

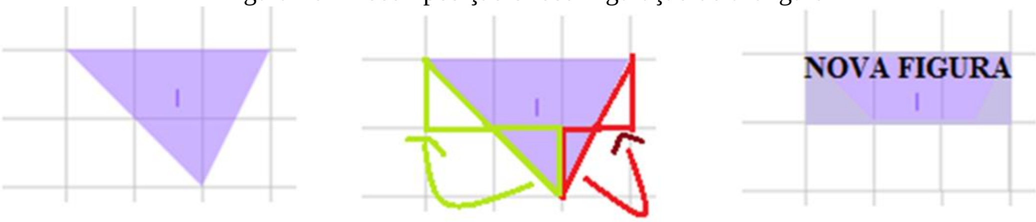
[54] Os alunos deste estudo não estudaram ainda esse Teorema.

- ***O triângulo I***

E_1: *Reconfigurar num retângulo*

É possível reconfigurar esse triângulo em um retângulo (figura 76). Como esse retângulo tem 3 ua, conclui-se a área do triângulo I.

Figura 76 - Decomposição e reconfiguração do triângulo I



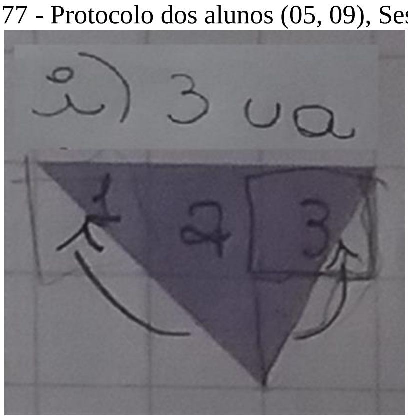
Fonte: Dados da pesquisa

A estratégia descrita a seguir foi mobilizada por uma dupla.

Análise a posteriori

Neste protocolo, percebe-se o registro numérico (1, 2 e 3) obtidos após a decomposição do triângulo e a reconfiguração deste em um retângulo com 3 ua. Observa-se o olhar inventor, por meio dos traços adicionados ao triângulo D transformando-o em outra figura com área conhecida.

Figura 77 - Protocolo dos alunos (05, 09), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

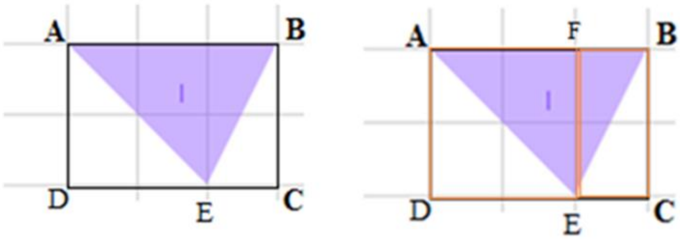
Esses alunos desconstruíram o triângulo I, perceptível numa primeira vista, obtendo o retângulo com área equivalente, por reconfiguração, explorando a heurística nesta figura geométrica por meio desses traços adicionados a ele. Descobrindo, juntamente com o registro numérico, um procedimento de solução.

Percebemos, neste protocolo, a passagem do olhar botânico (constatação perceptiva) para o inventor (decomposição do triângulo e reconfiguração deste em um retângulo) e isso para Duval (2005, p. 7, tradução nossa), “[...] constitui uma mudança profunda de olhar que muitas vezes é ignorada no ensino.” Nesta reconfiguração os alunos começaram a perceber que a área dessas figuras não se altera, o que é um resultado importante em nossa pesquisa.

E_2: *Enquadrar num retângulo*

Neste procedimento a área é obtida enquadrando o triângulo I em um retângulo (figura 78). Subtraindo da área do retângulo as áreas que não fazem parte do triângulo I, as áreas dos triângulos: ADE, BCE.

Figura 78 - Mergulhando o triângulo I no retângulo ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

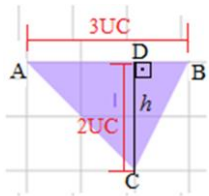
Sendo assim:

$A_{Triângulo\ I} = A_{Retângulo_{ABCD}} - (A_{Triângulo\ ADE} + A_{Triângulo\ BCE}) = 6\ ua - (2\ ua\ + 1\ ua) = 6\ ua - 3\ ua = 3\ ua$.

E_3: *Usar a fórmula algébrica*

Esse triângulo tem um de seus lados apoiados na malha e por tratamentos figurais é possível notar que se tem a medida da base AB e a sua altura relativa DC (figura 79). Assim:

Figura 79 - Identificando a base e à altura no triângulo I



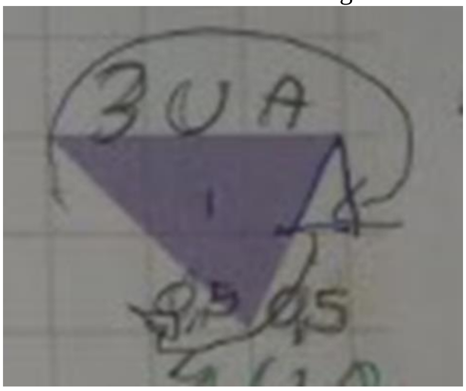
Fonte: Dados da pesquisa

Logo a área é: $A = \frac{b \times h}{2} = \frac{3\,uc \times 2\,uc}{2} = \frac{6\,ua}{2} = 3\,ua$.

As estratégias mobilizadas pelas duplas (01, 02), (03, 10) e (04, 07), detalhadas a seguir, não foram previstas em nossa análise *a priori*.

A dupla (01, 02) encontrou a área deste triângulo decompondo-o e reconfigurando em uma nova figura de área conhecida. Assim:

Figura 80 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02



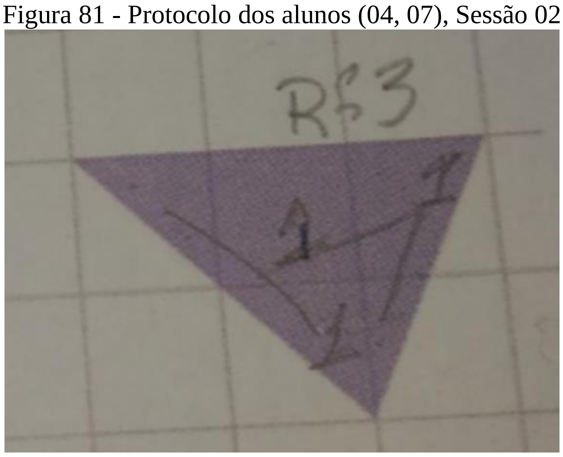
Pesquisadora: E o triângulo I? Vocês viraram a folha? (Para o triângulo D essa dupla virou a folha).
Aluno 01: Não.
Aluna 02: Não, a gente fez assim porque... Tira daqui e coloca aqui e fica um quadrado inteiro. E tiramos daqui e colocamos aqui e ficou outro inteiro. E daí pegamos esse aqui que já é um inteiro, e daí ficou três.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste protocolo, tem-se o registro numérico (0,5) que justifica a composição de dois triângulos em um quadrado de $1\,ua$. Totalizando por meio desses tratamentos numéricos $3\,ua = 1\,ua + 1\,ua + 0{,}5\,ua + 0{,}5\,ua$. Justificados pelos tratamentos figurais realizados, indicados pelas setas.

Para encontrar a área do triângulo I a dupla (04, 07) indicou com um traço os triângulos que juntos possuíam uma unidade de área, que adicionados com a área do quadrado totalizou três unidades de área. Essa dupla realizou a contagem dos quadrados do interior do triângulo, visualizados por meio da apreensão operatória e do olhar inventor (DUVAL, 2005).

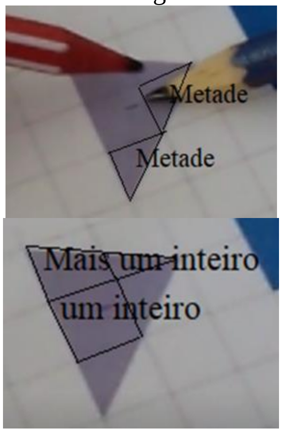
Figura 81 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla (03, 10) contou mentalmente os quadrados do interior do triângulo, realizando os tratamentos figurais e numéricos (figura 82).

Figura 82 - Protocolo dos alunos (03, 10), Sessão 02



Aluno 03: Deu três, ó... porque metade mais metade dá um (um quadrado, figura abaixo a esquerda). Metade mais metade mais um (mais um inteiro, figura na figura 91). E mais um inteiro (o quadrado da figura 86). Dá três inteiros.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos nestes protocolos diferentes reconfigurações obtidas pela decomposição mereológica neste triângulo. Todas com áreas equivalentes, concedendo a esta figura geométrica o seu papel heurístico. Gerando novos modos de pensar e raciocinar com esta representação.

A próxima estratégia foi mobilizada por todos os alunos desta sessão.

Para os quadriláteros:

- ***Quadrado J***

E_1:*Contar dos quadradinhos*

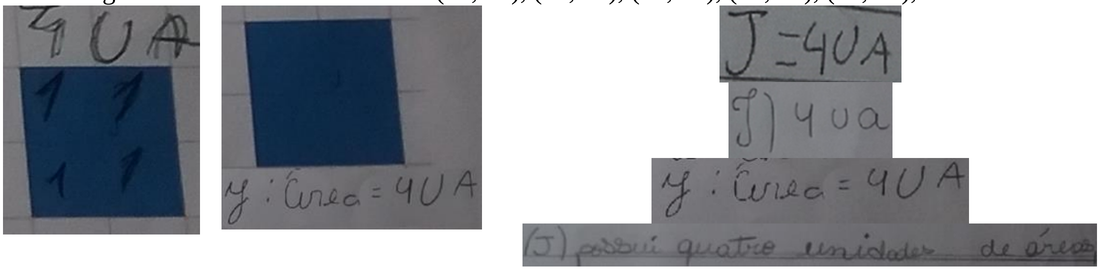
Como cabem quatro quadradinhos Us em seu interior a sua área é $4\ ua$.

Todos os grupos começaram o cálculo das áreas das figuras por este quadrado ou pelo retângulo F. Acompanhe a resolução na análise *a posteriori* a seguir.

Análise a posteriori

A dupla (01, 02) escreveu sobre a figura a quantidade de quadrados "Us" de $1\ ua$ visualizados em sua decomposição, com quatro numerais "1" que indicam $4\ ua$. Redigindo logo acima a resposta. Os demais contaram mentalmente esses quadrados e após escreveram a resposta.

Figura 83 - Protocolo dos alunos (03, 10), (11, 12), (05, 09), (04, 07), (01, 02), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo em língua materna o aluno 03 explica os procedimentos realizados para calcular esta área. Assim:

> Aluno 03: Já tava completo, inteiros. Então é só contar: um, dois, três e quatro. Deu quatro.

E_2: *Usar a fórmula algébrica*

Para aplicar a fórmula algébrica é necessário descobrir as medidas de seus lados e realizar os cálculos abaixo:

$A_{Quadrado} = l \times l = 2\,uc \times 2\,uc = 4\,ua$

Assim como para o quadrado, as duplas calcularam a área deste retângulo por contagem dos quadradinhos “Us” do seu interior, conforme a estratégia descrita a seguir.

- ***Retângulo F***

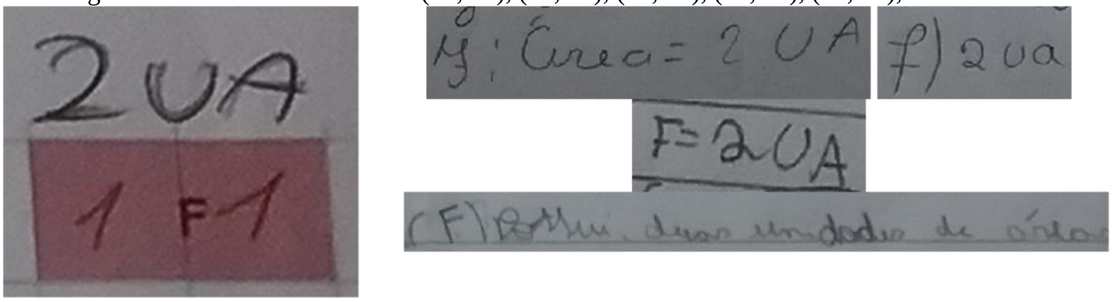
E_1: *Contar os quadradinhos*

Como esse retângulo possui dois quadradinhos Us em seu interior a sua área é $2\,ua$.

Análise a posteriori

No protocolo dos alunos (01, 02), assim como para o quadrado J, há a representação de dois numerais "1" sobre o retângulo F para indicar que ele tem "$2\,ua$". Assim:

Figura 84 - Protocolo dos alunos (03, 10), (11, 12), (05, 09), (04, 07), (01, 02), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

E_2: *Usar a fórmula algébrica*

Aplicando a fórmula temos que:

$A_{Triângulo} = b \times h = 2\,uc \times 1\,uc = 2\,ua.$

Para o retângulo H todos os alunos mobilizaram a estratégia E_1, descrita a seguir.

- ***Retângulo H***

E_1: *Contar os quadradinhos*

Este retângulo tem em seu interior seis metades do quadrado U e um quadrado U. Como dois desses triângulos formam um quadrado U, têm-se no total quatro quadrados Us nesse retângulo, portanto a sua área é $4\,ua = 6 \times \frac{1}{2}\,ua + 1\,ua = 3\,ua + 1\,ua.$

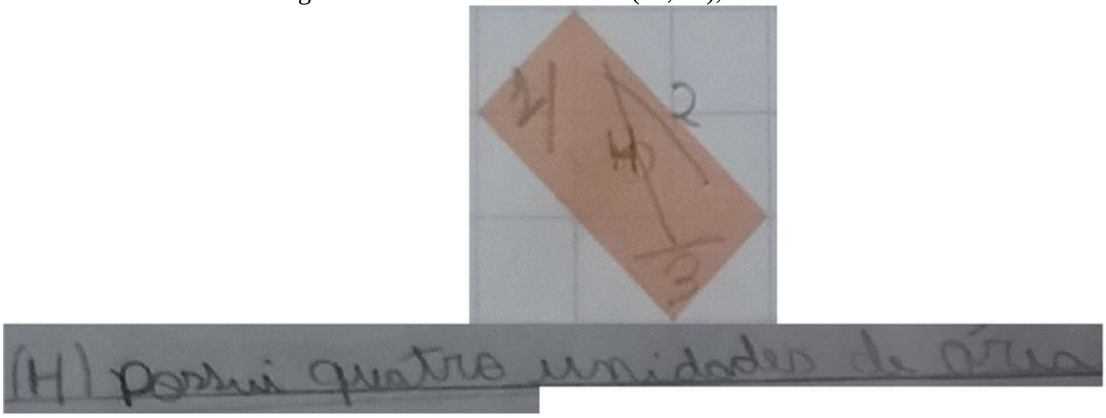
Análise a posteriori

Nestes protocolos e diálogos, percebemos que os procedimentos de decomposição já estão mais familiares para os alunos. Todos compreenderam que o quadrado U de $1\,ua$ pode ser decomposto em dois triângulos congruentes de $0{,}5\,ua$ cada, ou seja, que a cada dois desses triângulos se têm um quadrado de $1\,ua$. Isso pode ser visto no discurso do aluno 03. Acompanhe:

> Aluno 03: A gente somou esse mais esse, daí esse mais esse e esse mais esse (os triângulos pequenos). Esse daqui deu um, esse daqui deu dois, esse daqui deu três (os triângulos reconfigurados num quadrado) e esse daqui deu quatro (contando com o quadrado do meio).

A dupla (04, 07) contou a quantidade de quadrados “Us” do interior dessa figura. Representando sobre ela os numerais de 1 a 4, obtidos pela contagem destes. O traço no retângulo é para indicar que estes triângulos juntos possuem $1ua$. Assim:

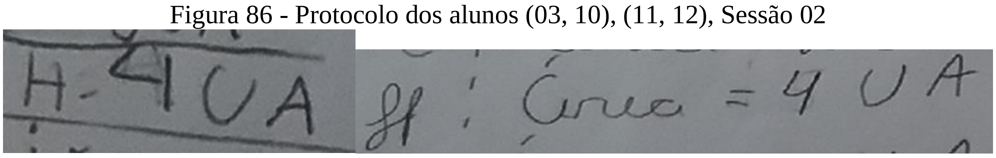
Figura 85 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos (03, 10) e (11, 12) contaram os quadrados “Us” sem realizar nenhum tratamento figural sobre a figura. Eles realizaram esses procedimentos mentalmente e após escreveram a resposta na folha. Assim:

Figura 86 - Protocolo dos alunos (03, 10), (11, 12), Sessão 02

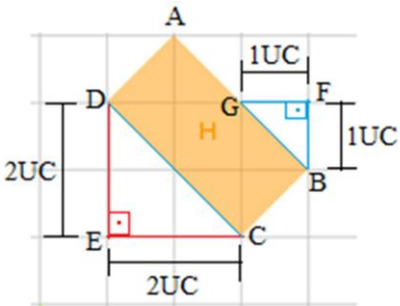


Fonte: Dados da pesquisa

E_2:*Usar a fórmula algébrica*

Para usar a fórmula algébrica é necessário descobrir as medidas de seus lados e aplicar o teorema de Pitágoras nos triângulos DEC e GFB (figura 87).

Figura 87 - Identificando a base e à altura no retângulo H



Fonte: Dados da pesquisa

Como $\overline{DE} = 2\,uc,\ \overline{EC} = 2\,uc,\ \overline{GF} = 1\,uc\ e\ \overline{BF} = 1\,uc,$ pelo teorema de Pitágoras temos que:

$\overline{(DC)}^2 = (\overline{DE})^2 + (\overline{EC})^2$

$\overline{(DC)}^2 = (2\,uc)^2 + (2\,uc)^2 = 4\,uc^2 + 4\,uc^2 = 8\,uc^2$

Sendo assim, $\overline{DC} = 2\sqrt{2}\,uc.$

De modo análogo: $\overline{BG} = \sqrt{2}\,uc$

Logo a medida da base desse retângulo é $\overline{DC} = 2\sqrt{2}\,uc$ e a da altura $\overline{BC} = \overline{BG} = \sqrt{2}\,uc.$

Aplicando a fórmula algébrica:

$A_{Retângulo} = b \times h = 2\sqrt{2}\,uc \times \sqrt{2}\,uc = 4\,ua$

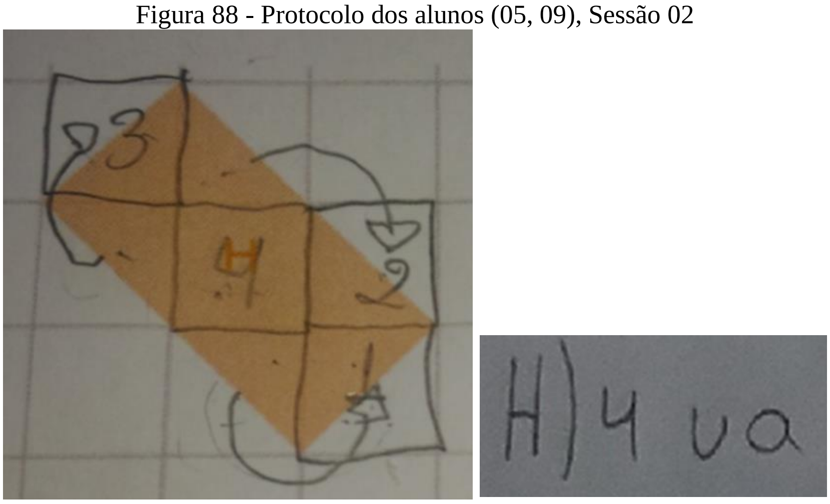
Talvez eles escolham outros segmentos para aplicar o teorema de Pitágoras e descobrir as medidas de seus lados. Era esperado que eles não seguissem esse caminho por não terem conhecimento desse teorema.

As duas estratégias de resolução descritas a seguir não foram previstas em nossa análise a *priori*.

Análise a posteriori

Os alunos (05, 09) reconfiguraram o retângulo H em uma figura de $4\,ua$, que não tínhamos previstos na análise a *priori*. Assim:

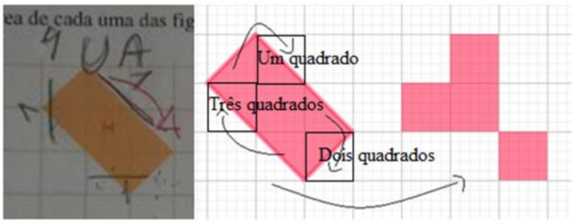
Figura 88 - Protocolo dos alunos (05, 09), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos (01, 02) realizaram procedimentos de decomposição neste retângulo, reconfigurando-o numa figura com área equivalente. No discurso percebemos que para eles a exploração heurística nesta figura se tornou fácil. Veja:

Figura 89 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02



Pesquisadora: E o retângulo H?
Aluna 02: O H também foi fácil, a gente pegou esse aqui e colocou aqui, um. Pegou esse aqui e colocou aqui, dois. Pegou esse daqui e colocou aqui, três (reconfigurou com os seis triângulos três quadrados). E mais esse aqui do meio, quatro.

Fonte: Dados da pesquisa

- ***Paralelogramo C***

E_1: *Contar os quadradinhos*

Esse paralelogramo possui um quadradinho U e dois triângulos que formam outro quadrado U, logo ele possui dois desses quadrados em seu interior e sua área é $2\,ua = 1\,ua + 2 \times \frac{1}{2}\,ua = 1\,ua + 1\,ua$.

Quatro duplas encontraram a área usando esta estratégia.

Análise a posteriori

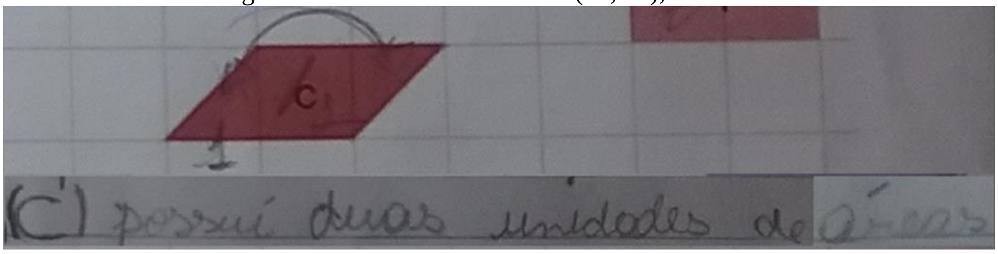
O aluno 03 justificou oralmente como encontrou esta área por meio do registro em língua materna, assim:

> Aluno 03: Essa metade mais essa metade dá um inteiro e um inteiro mais um inteiro dá dois também (o paralelogramo C e o triângulo B têm a mesma área).

Esse aluno percebeu, nessas representações (língua materna, figural e numérica), que o triângulo B e o paralelogramo C possuem áreas equivalentes. Isso constitui um fato importante em nossa pesquisa, pois mostra que eles compreenderem que figuras diferentes podem ter a mesma área. Acreditamos que eles chegaram a essa conclusão devido aos tratamentos figurais realizados e aos registros numéricos (tinham escrito $2\,ua$ para essas figuras).

No protocolo dos alunos (04, 07) a seta indica que esses dois triângulos possuem juntos $1\,ua$, o que é indicado com o numeral “1”. Assim:

Figura 90 - Protocolo dos alunos (04, 07), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

E_2: *Usar a fórmula algébrica*

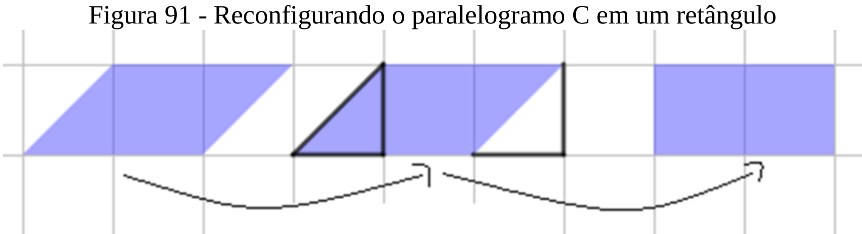
Como esse paralelogramo tem $2\,uc$ de base e $1\,uc$ de altura, aplicando a fórmula tem-se:

$A_{Paralelogramo} = b \times h = 2\,uc \times 1\,uc = 2\,ua.$

E_3: *Reconfigurar num retângulo*

Esse paralelogramo pode ser reconfigurado em um retângulo de $2\,ua$, decompondo-o em um triângulo e em um trapézio retângulo e mudando esse triângulo de lugar, assim:

Figura 91 - Reconfigurando o paralelogramo C em um retângulo

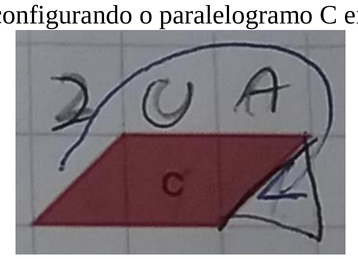


Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

A dupla (01, 02) usou esta estratégia e escreveu a resposta logo acima da figura. Assim:

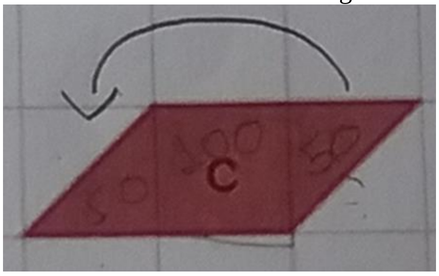
Figura 92 - Reconfigurando o paralelogramo C em um retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla (05, 09) atribuiu o valor numérico de 100 ao quadrado U e 50 aos triângulos que correspondem à metade desse quadrado. Como obtiveram 200 com os tratamentos numéricos concluíram que o paralelogramo têm 2 ua, porque a cada 100 se tem 1 ua. Assim:

Figura 93 - Protocolo dos alunos (05, 09), Sessão 02



Aluna 09: A gente pegou esse e transferiu ele prá cá (configurou o paralelogramo num retângulo (estratégia E_3). Aqui vale cem e aqui cada um vale cinquenta. Aí a gente somou cinquenta mais cinquenta que deu cem, porque os dois triângulos dão um quadrado. Aí tem dois (dois quadrados). Daí ele vale dois.

Fonte: Dados da pesquisa

- ***Paralelogramo E***

E_1: *Contar os quadradinhos*

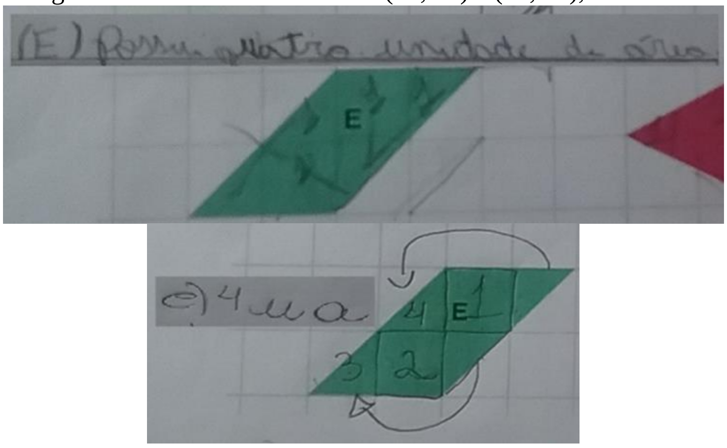
Esse paralelogramo tem dois quadrados Us e quatro metades desses quadrados em seu interior que são triângulos. Esses triângulos formam dois quadrados Us, que adicionados aos outros resultam em quatro quadrados Us. Logo a área desse paralelogramo é: $4\ ua = 2\ ua + 4 \times \frac{1}{2}\ ua = 2\ ua + 2\ ua$.

Quatro duplas mobilizaram esta estratégia.

Análise a posteriori

Duas dessas duplas realizaram a contagem dos quadradinhos mentalmente, sem adicionar traços à figura, registrando a resposta na folha. Duas duplas colocaram numerais sobre este paralelogramo que justifica sua área, juntamente com os tratamentos figurais feitos, indicados pelas setas e pelos traços. Assim:

Figura 94 - Protocolo dos alunos (05, 09) e (04, 07), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

A aluna 07 explicou os tratamentos figurais e numéricos realizados sobre o paralelogramo E assim:

> Aluna 07: A gente encontrou a área do E assim ó...Tem duas metades aqui ó. Porque se cortar um quadrado no meio vai ficar dois triângulos. Aí a gente pegou essa metade aqui ó, e somou com essa metade e vai dar um quadrado. Aqui é um quadrado inteiro, dois (dois quadrados) e mais esses dois triângulos aqui ó, dá três. Aí a gente pegou mais esse aqui, deu quatro.

O aluno 12 faz uso da língua materna para explicar os tratamentos figurais realizados, assim: “É quatro porque metade mais metade dá um, um quadrado (dois triângulos formam um quadrado). E metade mais metade dá dois, dois quadrados. Aqui três (apontando o quadrado) e aqui quatro (apontando o outro quadrado).” Em seu protocolo não há nenhum traço sobre esta figura, eles realizaram esses procedimentos mentalmente.

Essa mesma estratégia foi utilizada pela dupla (03, 10). Isso pode ser observado no discurso da aluna 03: “Deu quatro porque essa metade mais essa metade dá um inteiro e essa metade mais essa metade dá um inteiro. Então deu dois quadrados (a reconfiguração dos quatro triângulos) e mais dois quadrados que já estavam inteiros... Deu quatro.”

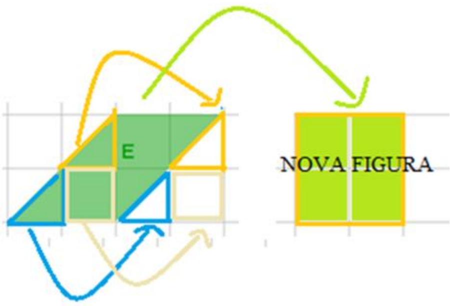
O aluno 02 explicou essa área assim:

> A gente fez a mesma coisa que a figura A, a gente pegou esse triângulo e colocou aqui. Aí deu um. Aí a gente pegou esse triângulo e colocou aqui e deu dois (dois quadrados de $1ua$ cada). Aí aqui já tem um inteiro, aí dá três. E aqui também já tem um inteiro também, dá quatro.

E_2: *Reconfigurar o paralelogramo em um quadrado*

Pode-se decompor esse paralelogramo, compondo um quadrado (figura 95), visualizando que sua área é $4\ ua$. Assim:

Figura 95 - Decomposição e reconfiguração do paralelogramo E



Fonte: Dados da pesquisa

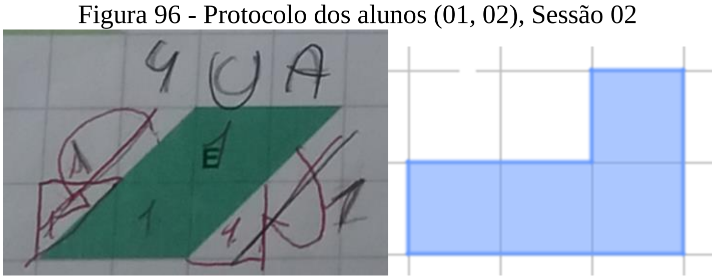
E_3: *Usar a fórmula algébrica*

Este paralelogramo tem $2\,uc$ de base e $2\,uc$ de altura, logo, aplicando a fórmula, temos:

$A_{Paralelogramo\ E} = b \times h = 2\ uc \times 2\ uc = 4\ ua.$

A dupla (01, 02) encontrou a área deste paralelogramo mobilizando uma estratégia que não havíamos previstos. Eles o reconfiguraram numa figura de seis lados (figura 96 à direita) com área equivalente. Assim:

Figura 96 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02



Fonte: Dados da pesquisa

- ***Trapézio G***

E_1: *Contar os quadradinhos*

Esse trapézio possui dois quadrados Us e dois triângulos que formam outro quadrado U. Sendo assim, ele possui três quadrados Us e sua área é $3\ ua = 2\ ua + 2 \times \frac{1}{2}\ ua = 2\ ua + 1\ ua.$

Análise a posteriori

O aluno 03[55] e o aluno 04[56] explicam como encontraram esta área oralmente, escrevendo somente a resposta no protocolo, sem registrar na figura os tratamentos figurais e numéricos realizados.

> Aluno 03: Essa metade mais essa metade dá um inteiro (os triângulos), e essa metade mais essa metade já deu um inteiro (um dos quadrados do interior). Daí metade mais metade um, dois e três.
> Aluna 04: Um quadrado vale uma unidade de área. A metade do quadrado vale meia unidade de área. Aí se eu pegar os dois quadrados inteiros vai ficar dois. E com meio e meio vai ficar três. A resposta vai ser três.

E_2: *Usar a fórmula algébrica*

Como a base maior desse trapézio tem $4\ uc$, a base menor tem $2\ uc$ e a altura $1\ uc$, então aplicando a fórmula temos que:

$$A_{Trapézio} = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(4\ uc+2\ uc)\times 1\ uc}{2} = \frac{6\ ua}{2} = 3\ ua.$$

E_3: *Reconfigurar num retângulo*

Esse trapézio pode ser decomposto em um triângulo e em um trapézio retângulo. Reconfigurando-o num retângulo de $3\ ua$ (figura 97).

Figura 97 - Reconfiguração do trapézio G em um retângulo

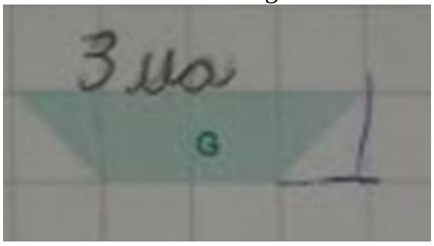
Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Acompanhe na figura 98 a explicação da aluna 02 para determinar esta área.

[55] Dupla (03, 10).
[56] Dupla (04, 07).

Figura 98 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02



Aluna 02: A gente pegou aqui e colocou aqui (reconfigurou o trapézio em um retângulo, mudando o triângulo da decomposição do trapézio da esquerda para a direita). Daí ficou uma, duas, três. Aqui iria ter um triângulo (o desenho feito à caneta).

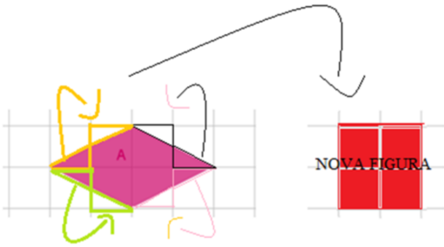
Fonte: Dados da pesquisa

- ***Losango A***

E_1: Reconfigurar num quadrado

Pode-se decompor esse losango formando um quadrado com $4\ ua$, cuja área é equivalente a do losango (figura 99). Assim:

Figura 99 - Decomposição e reconfiguração do losango A



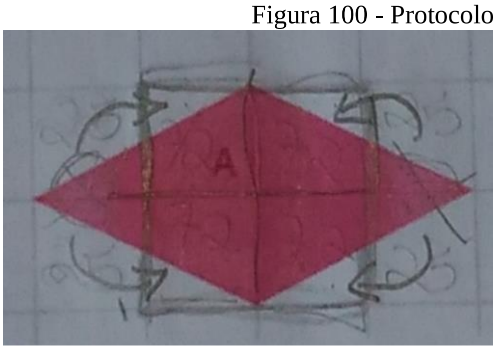
Fonte: Dados da pesquisa

Portanto a área do losango é $4\ ua$.

Análise a posteriori

A dupla (05, 09) mobilizou esta estratégia. Assim:

Figura 100 - Protocolo dos alunos (05, 09), Sessão 02



Aluna 09: A gente pegou o quadradinho daqui... Esse daqui e colocamos aqui. Já deu um aqui (um quadrado, figura ao lado). Esse daqui colocamos aqui, já deu mais um aqui (outro quadrado). Aí pegamos esse dá ponta e colocamos aqui. Esse da ponta aqui e colocamos aqui. E daí deu quatro (um quadrado com quatro quadrados).

Fonte: Dados da pesquisa

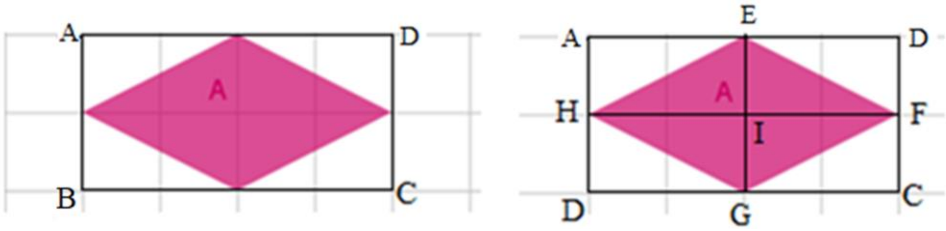
No protocolo dos alunos (03, 10) há somente a resposta. Eles explicam como chegaram a esta área assim:

> Alunos 03: A gente somou esse mais esse e deu um inteiro. Aí a gente somou esse mais esse e deu outro inteiro. E esse mais esse deu outro inteiro. E esse e esse mais outro inteiro. Então deu quatro inteiros (Decompôs o losango em quatro triângulos congruentes). Que deu 4 unidades de área que a gente colocou aqui (a resposta).

E_2: *Enquadrar num retângulo, calculando a área por fora*

Este losango pode ser enquadrado em um retângulo de área $8\,ua$ (figura 101). Retirando desta área as que não fazem parte do losango A, que são as áreas dos triângulos EDF, FCG, GDH e HAE, obtém-se a área desejada.

Figura 101 - Mergulhamento do losango A no retângulo ABCD



Fonte: Dados da pesquisa

Assim:

$$A_{Losango\ A} = A_{Retângulo\ ABCD} - (A_{Triângulo\ EDH} + A_{Triângulo\ FCG} + A_{Triângulo\ GDH}$$
$$+A_{Triângulo\ HAE})$$

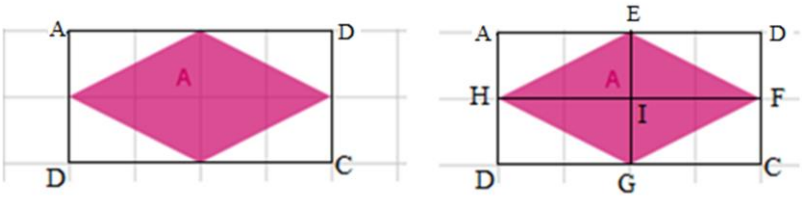
$$A_{Losango\ A} = 8\,ua - (1\,ua + 1\,ua + 1\,ua + 1\,ua) = 8\,ua - 4\,ua = 4\,ua$$

E_3: *Calcular a área por dentro, decompondo-o*

O losango A pode ser decomposto nos triângulos EIH, EIF, IGF e IGH. Observe que eles são metades dos retângulos AEIH, EBFI, FCGI e IGDH, respectivamente (figura 102).

Cada um desses triângulo tem $1\,ua$ porque são metades de retângulos de $2\,ua$ (figura 102), portanto a área do losango é $4\,ua$. Assim, a área do losango é $4 \times 1\,ua = 4\,ua$ porque esses triângulos são congruentes.

Figura 102 - Decomposição do losango em triângulos



Fonte: Dados da pesquisa

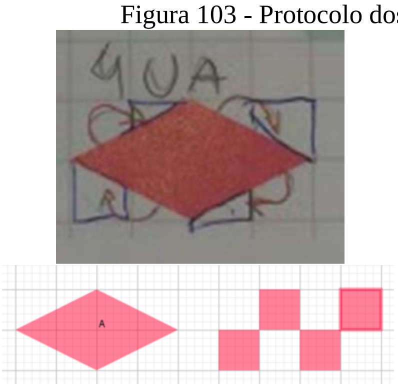
E_4: Usar a fórmula algébrica

Como a diagonal maior desse losango é 4 uc e a menor é 2 uc então:

$$A = \frac{D \times d}{2} = \frac{4\,uc \times 2\,uc}{2} = \frac{8\,ua}{2} = 4\,ua$$

A dupla (01, 02) encontrou a área desse losango com uma estratégia que não havíamos previstos. Assim:

Figura 103 - Protocolo dos alunos (01, 02), Sessão 02



Aluna 02: A área da figura A é quatro.
Pesquisadora: Por que quatro?
Aluno 01: Por que ela fez assim ó... É como se pegasse esse aqui e colocasse aqui, daí ficava um. Aí pegava esse aqui e colocava aqui, ficava dois. E aqui fazia a mesma coisa ficava três e aqui quatro (Os alunos reconfiguraram o losango em outra figura de área $4ua$ (figura 106 à direita), usando as setas para indicar essa reconfiguração).

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse protocolo, bem como nas produções dos alunos, não previstas por nós, percebemos que eles operaram o olhar não icônico sobre as figuras, ou seja, não buscaram a solução na figura visualizada e conhecida por eles (losango, paralelogramo). No entanto, relacionaram essas figuras geométricas com suas hipóteses, que comandaram o olhar sobre elas. Nesse caso, identificamos que a produção discursiva elaborada por eles serviu para justificar e explicar os tratamentos figurais norteados pela visualização. Para Duval, essa articulação entre visualização e linguagem são condições cognitivas para “[...] aprender a aprender em geometria.” (DUVAL, 2005, p. 3, tradução nossa).

5.2.2 Considerações sobre a segunda sessão

Nenhum grupo conseguiu encontrar a área do triângulo D. Acreditávamos que eles teriam dificuldades para determinar essa área porque esse triângulo não possui nenhum de seus lados apoiados sobre a malha, uma das variáveis didáticas. Porém acreditávamos que os alunos por procedimentos de decomposição, reconfiguração ou talvez por mergulhamento (enquadrando-o num retângulo e subtraindo dele as áreas que não fazem parte do triângulo D) a determinassem corretamente. O que não foi realizado por nenhuma dupla.

Todas as respostas, exceto para a figura D, estão corretas nos protocolos. Percebemos que, uma das razões, que levaram os alunos a errarem esse item foi o fato de que esse tipo de figura normalmente não é abordado no ensino, nem os procedimentos de decomposição heurística. Para Duval, o corpo das figuras geométricas nos programas escolares é muito restrito e "[...] correspondem às formas que são perceptivelmente notáveis e culturalmente familiares" (DUVAL, 2005, p. 2, tradução nossa). Para esse autor a fonte profunda das dificuldades geométricas que o ensino enfrenta, deve-se a abordagem das atividades geométricas que se baseiam na percepção, não articulando os dois registros de representação (visualização e linguagem) necessários neste domínio do conhecimento. Concordamos com ele e acreditamos ser viável explorar mais o cálculo de áreas em triângulos que não sejam retângulos, por exemplo. Quer dizer, triângulos que favoreçam a exploração heurística de modo a fazer aparecer outras formas que o olho não vê a primeira vista, como o mergulhamento dela em um retângulo, para solucionar sua área ou validá-la em outra representação.

Salientamos que essas especificidades de olhar para as figuras geométricas depende da atividade na qual ela é mobilizada, de modo a articular a visualização e o discurso geométrico, que permitem organizar a aprendizagem, concordando com Duval (2005). Por esta razão acreditamos ser imprescindível pensar na tarefa que é solicitada aos alunos, visto que "[...] não são as mesmas maneiras de ver que são solicitadas de um a outro tipo de atividade." (DUVAL, 2005, p. 4, tradução nossa).

A apreensão operatória foi requisitada nesta sessão com fins heurísticos, descobrindo soluções para os cálculos de áreas, modificando geometricamente as figuras de maneiras distintas (com áreas equivalentes). O principal tipo de modificação figural foi a mereológica (decomposição da figura em subfiguras) por meio da operação de reconfiguração intermediária formando, na maior parte das vezes, figuras convexas e calculando nestas as suas áreas.

Percebemos que as operações de divisão mereológicas, a reconfiguração, estão mais fáceis para os alunos, pois, eles calcularam a área do losango e do paralelogramo E com esses procedimentos, que não esperávamos em nossa análise a *priori*, surpreendendo-nos com as representações e tratamentos figurais mobilizados.

Os alunos ao terminarem as atividades desse encontro escreveram uma frase em sua folha relatando o que acharam da atividade. Percebemos que eles não tiveram dificuldades para escrever as respostas como ocorreu na sessão 01 com o tangram.

A turma evoluiu porque começaram a realizar tratamentos figurais de modo mais autônomo, alguns pensaram nas fórmulas algébricas e nas medidas e outros se apresentaram desprendidos desses registros. Porém, nenhum grupo mobilizou as fórmulas para encontrar as áreas das figuras. Eles escreveram as respostas utilizando o número e a grandeza "ua", o que não ocorreu na sessão 01. Percebe-se que houve um avanço nesses registros.

5.3 Sessão 03

Esta sessão é composta por uma atividade, em que se devem construir triângulos e quadriláteros com $4\,ua$ no geoplano e após, representá-los na malha quadriculada.

5.3.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

O enunciado desta atividade foi:

Construa no geoplano triângulos e quadriláteros com quatro unidades de área ($4\,ua$), sabendo que cada quadradinho tem uma unidade de área ($1\,ua$). Depois, represente-os no papel quadriculado.

O objetivo desta atividade é construir triângulos e quadriláteros com áreas equivalentes, $4\,ua$. Para Duval (2005), o foco nas atividades de construção de figuras é reconstruir as unidades figurais $2D$ a partir das unidades figurais $1D$. A variável didática é o tipo de figura que é possível construir e que, neste caso, não está presente no enunciado ou no recurso didático como nas sessões anteriores e a posição destas no geoplano e na malha.

Acreditávamos que os alunos não iriam identificar e classificar os triângulos obtidos de acordo com os seus lados e ângulos, porque supomos que eles ainda não viram tais classificações. Os triângulos obtidos podem ser classificados de acordo com os seus lados em: isósceles ou escaleno[57], e segundo os seus ângulos em: triângulo retângulo, triângulo obtusângulo ou triângulo acutângulo. Ressaltamos que esse reconhecimento não limita a resolução da atividade, mas contribui significativamente.

Supomos também que se optassem por aplicar a fórmula para identificar as áreas dos triângulos teriam dificuldades em verificar a altura relativa à base, que pode ser interna ou externa ao triângulo, e, que, muitas vezes, é um número irracional.

Presumimos que os triângulos e quadriláteros mais representados seriam os que possuíssem o quadradinho inteiro ou exatamente a metade do quadradinho no seu interior, facilitando o processo de contagem.

Os alunos podiam fazer uso da fórmula ou não para construírem as figuras solicitadas, acreditávamos que a contagem dos quadradinhos seria o mecanismo mais utilizado, fornecendo subsídios para a generalização das fórmulas algébricas.

No término desta sessão abordamos as respostas dos alunos e os procedimentos corretos mobilizados para a resolução da atividade, explicitando outras possibilidades de construir triângulos e quadriláteros com esta área. Discorrendo sobre a questão:

Como se pode calcular a área de triângulos, de quadrados e de retângulos que não são quadrados? Era esperado que eles percebessem que para os quadrados e retângulos outro modo é multiplicar as medidas de seus lados e, para os triângulos, mergulhá-los em um paralelogramo onde ele será metade deste quadrilátero, bastando calcular assim a área do paralelogramo e dividi-la por dois.

Procedimentos considerados corretos

Os procedimentos de contar os quadradinhos no interior da figura, composição e decomposição, enquadramento da figura em um retângulo e subtraindo da área deste todas as áreas que não fazem parte da figura e uso da fórmula algébrica, poderiam ser utilizados para construir as figuras solicitadas e/ou calcular sua área. Porém, para cada tipo de figura há um procedimento menos trabalhoso. Independente do procedimento adotado, a resposta será considerada correta se o triângulo ou quadrilátero construído tiver 4 ua.

[57] O triângulo equilátero (um triângulo com todos os lados congruentes) não pode ser construído no geoplano porque há impossibilidade de construir, nesse recurso didático, um triângulo equiângulo (um triângulo com todos os ângulos congruentes a $60°$).

Alguns procedimentos incorretos:

Alguns procedimentos que supomos que os alunos iriam mobilizar erroneamente seriam:

1) Assumir que a medida da diagonal do quadradinho é a mesma medida do seu lado e tentar aplicar a fórmula algébrica.

2) Para as figuras construídas com partes dos quadradinhos no seu interior (podem ser metade ou uma fração do quadradinho), supomos que, alguns alunos, pudessem realizar aproximações incorretas ou desconsiderar as medidas fracionárias para o cálculo das áreas.

3) Alguns alunos poderiam ladrilhar a figura para calcular sua área, contando apenas os quadradinhos inteiros, e se na figura eles não o forem assim errar a atividade.

4) Qualquer triângulo e quadrilátero construído no geoplano que não tivessem $4\ ua$ seria considerado incorreto, bem como as figuras com esta área que não fossem triângulos ou quadriláteros.

Era esperado também que os alunos elaborassem estratégias e conjecturas. O papel do pesquisador seria o de encaminhá-los, propondo questões, indagando-os de modo que os conhecimentos relativos ao conceito de área ficassem mais elaborados no fim desta sessão.

A seguir, detalhamos como ocorreu a terceira fase de nossa engenharia.

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 14/07/2017, com a participação de onze alunos, seis do quinto ano e cinco do sexto ano do Ensino Fundamental, que formaram quatro duplas e um trio. Iniciamo-la apresentando o geoplano aos alunos, nenhum deles o conhecia, nem as professoras participantes dos encontros. Os alunos, curiosos, representaram algumas figuras neste recurso assim que o receberam. Neste momento, a pesquisadora indagava-os acerca das áreas dessas figuras, considerando que o quadradinho tinha $1\ ua$. Pelo procedimento de contagem, composição e decomposição respondiam, na maioria das vezes corretamente. Até mesmo porque começaram construindo figuras que conseguiam calcular a sua área. Percebemos que a malha da sessão 02 contribuiu para representar as figuras no geoplano e calcular sua área.

Após, a pesquisadora começou a representar triângulos retângulos no geoplano de cada dupla, questionando-os acerca de suas áreas. Neste momento tiveram dúvidas porque alguns quadradinhos na decomposição do triângulo não eram exatamente metade do quadrado de $1\,ua$. O papel da pesquisadora foi indagá-los sobre como proceder nestes casos. *"Será que dá para calcular a área de triângulos assim?" "Como proceder?" "Alguém tem alguma ideia?"*. Eles tentavam contar os quadradinhos, sem mobilizar as fórmulas algébricas.

As professoras, no fundo da sala, em dupla, tentavam pensar num modo de resolução. Os alunos não tinham certeza da área porque começaram a perceber, que para os casos propostos, a contagem dos quadradinhos do interior do triângulo não era suficiente. A pesquisadora, depois de um tempo e para que não desanimassem, indagou-os novamente, *"E... Se a gente contornar por um retângulo assim, qual é a área desse retângulo? Vocês conseguem me dizer?"* Todos responderam, alguns pela contagem dos quadradinhos e outros, multiplicando as medidas de seus lados. *"E agora? Vocês conseguem me dizer qual é a área do triângulo?* Uma dupla, com os olhos brilhando respondeu, "*agora é fácil! É só fazer a metade!".* Indaguei-os, *"Metade do quê?"* "*Metade do retângulo, é só olhar que dá para ver que o triângulo é metade do retângulo, daí é só dividir por dois que descobre a área do triângulo. Assim!"*

Após isso, questionei-os acerca dos quadriláteros que podíamos formar no geoplano. Eles falaram de quadrados e retângulos que não são quadrados, tiveram dificuldades para os paralelogramos que não são quadrados nem retângulos, losangos, trapézios (quadriláteros que possuem apenas dois pares de lados paralelos).

A atividade da sessão teve início após discutir e explanar essas dúvidas.

Explicitaremos a seguir possibilidades de construir triângulos e quadriláteros diferentes com $4\,ua$, com as análises *a priori* e *a posteriori*.

Triângulos:

Existem diversos triângulos com $4\,ua$ que podem ser formados. De acordo com a fórmula algébrica da área temos que: $A = \frac{b \times h}{2} = 4\,ua$, ou seja, $b \times h = 8\,ua$. Sendo assim, existem as possibilidades:

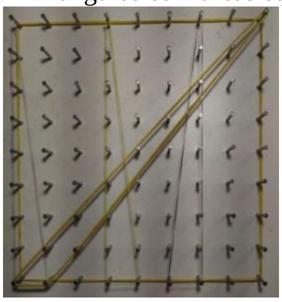
Tabela 1 - Possibilidades de construir triângulos com áreas equivalentes

Possibilidades	Base (b)	Altura (h)	Área: $A = \frac{b \times h}{2}$
1)	1	8	$A = \frac{8\,ua}{2} = 4\,ua$
2)	2	4	
3)	4	2	
4)	5	$\frac{8}{5}$[1]	
5)	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	

Fonte: Dados da pesquisa.

Repare que para a possibilidade (1) existem diversos triângulos que podem ser formados. Representamos abaixo alguns deles (figura 104), contornando-os por um retângulo para facilitar a visualização. Todos estes têm áreas equivalentes porque possuem a mesma medida para a base e para a altura correspondente. O mesmo ocorre com as outras possibilidades.

Figura 104 - Triângulos com áreas equivalentes



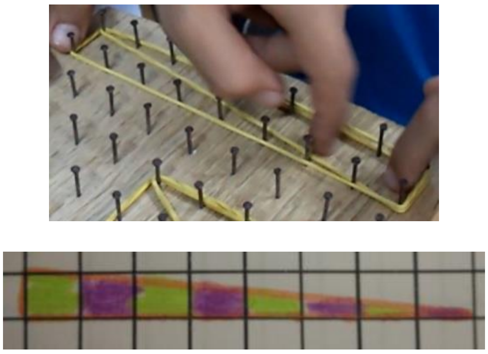
Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Para os triângulos os alunos produziram os seguintes protocolos e diálogos:

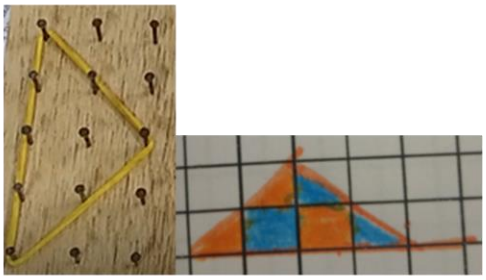
Figura 105 - Protocolo dos alunos (03, 10), (05, 06), (01, 12) e (04, 07, 09), Sessão 03

Para a possibilidade (1)

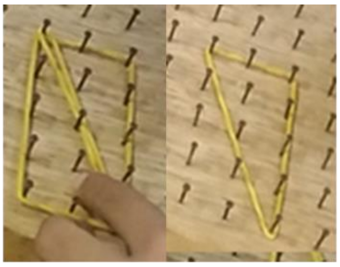


Pesquisadora: Como vocês encontraram esta área?
Aluno 03: Cada quadradinho aqui tem 1 ua.
Aluno 10: É! E esse daqui já deu oito (o retângulo).
Aluno 03: Esse daqui tem oito.
Aluno 10: E se a gente cortar no meio vai dar quatro.
Aluno 03: É! Quatro unidades de área! Porque esse risco do retângulo cortou o triângulo bem no meio.

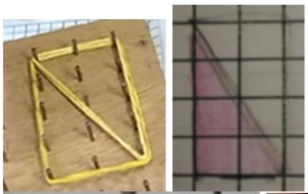
Para a possibilidade (3)



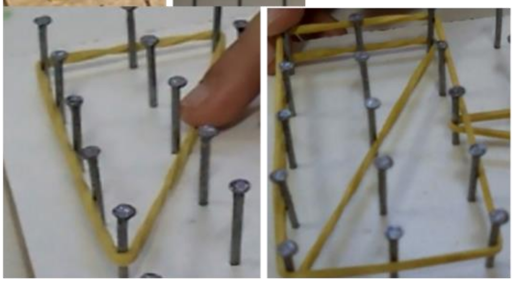
Pesquisadora: E este triângulo?
Aluno 10: Este daqui a gente contou. Ó! Tem dois aqui já (os dois quadrados do interior do triângulo), três (os dois triângulos que formam um quadrado de 1 ua) e aqui, dá quatro (dois triângulos que compõem um quadrado de 1 ua).

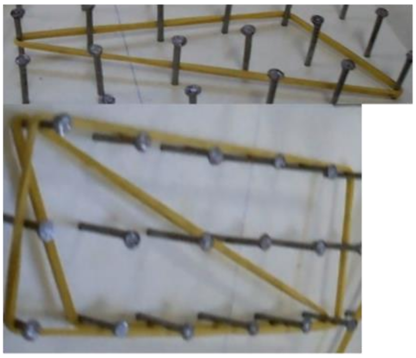


Aluno 03: A gente pegou e fez a outra metade do triângulo.
Aluno 10: Ou a gente fez isso aqui...
Aluno 03: É! Ou a gente preencheu ele inteiro. E aí a gente percebeu que deu um retângulo. E que esse retângulo tinha quatro de cada lado, o retângulo. E quatro pra cada lado foi oito. Aí a gente tirou um triângulo que ficou quatro. Porque a outra metade desse é oito... porque quatro mais quatro formou oito.

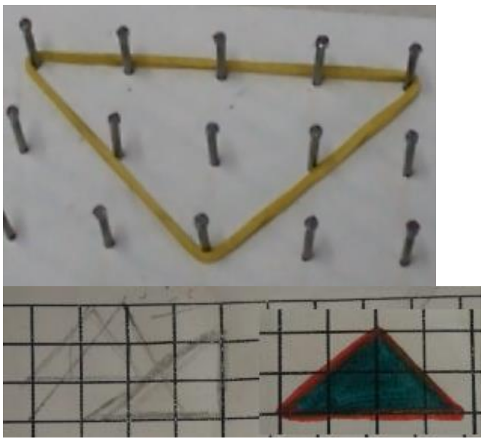


Aluna 05: Eu peguei e coloquei um retângulo aqui que deu oito unidades de área e reparti ao meio que virou esta forma aqui (o triângulo). E pequei a metade e ele ficou com quatro unidades de área.





Pesquisadora: Explica pra mim qual a área deste triângulo.
Aluno 12: É quatro.
Pesquisadora: Por que é quatro?
Aluno 12: É quatro porque se eu pegar e colocar um retângulo aqui ó... Aí a gente contou, ó, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete e oito. E como tá aqui na metade oito dividido por dois dá quatro. Daí, quando você tira (tira o retângulo) tem quatro unidades de área (resta o triângulo com essa área).
Pesquisadora: E o outro? Por que vocês estão afirmando que tem $4ua$? (Triângulo escaleno de base 4 uc e altura 2 uc, representado à esquerda).
Aluno 12: A gente fez a mesma coisa. A gente pegou...
Aluno 01: Esse daqui foi até dez (o retângulo). A gente fez metade de dez, faltava cinco e daí aqui também ia sair e daí ficava quatro (Retirou a área dos dois triângulos obtidos na decomposição após mergulhar esse triângulo num retângulo).
Pesquisadora: Como assim? Metade de dez...
Aluno 01: É cinco, daí tira mais esse pedacinho que vale um, daí fica quatro.



Pesquisadora: Por que vocês não estão conseguindo representar este triângulo na malha (o triângulo isósceles à esquerda)?
Aluna 07: Como a gente vai representar ele aqui? vai pegar essa metade aqui?
Pesquisadora: E aí grupo como vocês acham que é?
Aluna 09: Eu acho... que ela pode contar esses quatro quadradinhos aqui, e contar esses quadradinhos aqui de dentro e colocar aqui pra poder montar o triângulo.
Pesquisadora: E você (aluna 04)?
Aluna 04: Eu... Eu não sei...
Pesquisadora: Então pensem mais um pouco.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste último protocolo, das alunas (04, 07, 09), percebe-se que elas representaram o triângulo isósceles no geoplano, mas, tiveram dificuldades em representá-lo na malha. Esta representação na malha exige, segundo Duval (2005), olhar para este triângulo de uma maneira não icônica. Desconstruindo-o dimensionalmente, não olhando para o bidimensional e sim para o unidimensional, as medidas dos seus lados. Essa "desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica" (DUVAL, 2005, p. 1, tradução nossa).

Essa atividade de construir esse triângulo exige desconstruí-lo em traços $1D/2D$ e $0D/2D$. Sendo que, esta desconstrução para reconstruí-lo na malha exige que se estabeleça uma ordem nas instruções para efetuarem os traços com o lápis na folha.

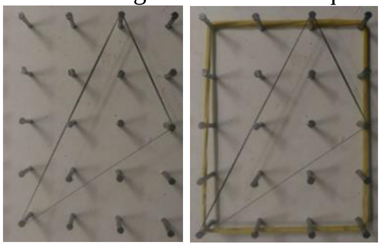
A articulação entre visualização e linguagem sobre este triângulo e os registros mobilizados (figural, discursivo), juntamente com as representações distintas (no geoplano, em língua materna, na malha quadriculada) contribuíram para que identificássemos as estratégias utilizadas desse grupo e suas dúvidas, podendo auxiliá-los frente à superação dessa dificuldade geométrica.

A representação do triângulo isósceles na malha [protocolo das alunas (04, 07, 09)] requer a neutralização do mecanismo icônico (olhar botânico e agrimensor) e a atuação dos olhares não icônicos (construtor e inventor), os quais exigem que se estabeleça uma sequência nas operações figurais que devem ser realizadas, olhar para as medidas dos lados, e, após, realizar esses traços na malha. Essa passagem é assegurada pelas contribuições discursivas sobre o triângulo e pela identificação visual desta figura.

Nos protocolos acima, os alunos determinaram a área dos triângulos por dentro, contando os quadradinhos, calculando a área de retângulos e a dividindo por dois e, por fora, retirando do retângulo as áreas que não fazem parte do triângulo. Percebemos que esses modos diferentes de determinar a área contribuem para a aprendizagem de áreas e superações de dificuldades possíveis diante das diferentes representações, nas quais identificamos ser possível valorizar o raciocínio dos alunos, sua compreensão e aprendizagem geométrica.

Para a possibilidade 4: Têm-se os triângulos (figura 106) com nenhum de seus lados apoiados na malha do geoplano. Assim:

Figura 106 - Triângulos com áreas equivalentes



Fonte: Dados da pesquisa

Quadriláteros:

Para o quadrado: Pela fórmula algébrica da área do quadrado temos que: $A = l \times l$, ou seja, l^2 =4 ua e, sendo assim l =2 uc, existindo uma única possibilidade.

Análise a posteriori

Todos os alunos representaram este quadrado no geoplano e na malha sem dificuldades. Visto que esta representação exige praticamente o olhar botanista e a apreensão perceptiva.

Para os retângulos que não são quadrados: Há duas possibilidades. Assim:

Tabela 2 - Possibilidades de construir retângulos com áreas equivalentes

Base (b)	Altura (h)	Área
$4\,uc$	$1\,uc$	$4\,ua$
$\sqrt{2}\,uc$	$2\sqrt{2}\,uc$	

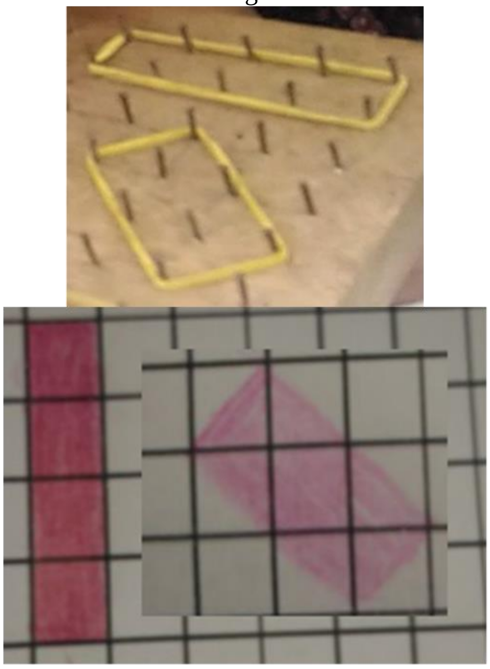
Fonte: Dados da pesquisa.

Análise a posteriori

Todos os alunos representaram o retângulo de dimensões ($4\,uc$ e $1\,uc$) no geoplano e na malha sem dificuldades.

A dupla (05, 06) representou os dois retângulos com áreas equivalentes. Assim:

Figura 107 - Protocolo das alunas (05, 06), Sessão 03



Professora do quinto ano: Como vocês fizeram esses quadriláteros?
Aluna 05: A gente conseguiu fazer o retângulo com quatro, porque ele tem quatro quadradinhos.
Aluna 06: Porque tem quatro quadradinhos.
Aluna 05: É, cada um vale um e a gente usou quatro quadradinhos pra fazer o retângulo, daí o retângulo tem quatro unidades de área.

Para o outro retângulo...

Aluna 05: Esse daqui foi o retângulo de quatro áreas, só que de forma diferente.
Aluna 06: Por causa que é na diagonal.
Aluna 05: Aí a gente conta pela metade né!
Aluna 06: É! Esses dois aqui vai ficar um quadradinho. Ó, um quadradinho...
Aluna 05: Dois, ...
Aluna 06: Esses dois aqui ... três. E esses dois aqui ... quatro.
Aluna 05: ´É! Deu quatro quadradinhos! Então esse tem quatro e esse tem quatro (os retângulos tem áreas equivalentes).

Fonte: Dados da pesquisa

Para representar o quadrado e o retângulo na malha, em sua posição prototípica, os alunos não tiveram dificuldades porque operaram iconicamente sobre estes quadriláteros, reconhecendo-os e os associando a uma forma típica.

As alunas (05, 06), que formaram o retângulo de dois modos diferentes, consideraram o seu contorno. Observe que em um retângulo o lado é o lado do quadradinho da malha e noutro, as suas diagonais. Para Duval (2005) esta representação é “[...] menos facilmente mobilizada quando no enunciado do problema não é mencionado explicitamente” (p. 9, tradução nossa). Porém, percebemos que na sessão 02 este retângulo estava representado na malha e, talvez, isto tenha contribuído.

Para os losangos que não são quadrados: Calculando a área desse polígono por sua fórmula algébrica, tem-se que: $A = \frac{D \times d}{2} = 4\,ua$, ou seja, $D \times d = 8\,ua$, existindo assim uma única possibilidade de construção no geoplano, ($D = 4\,uc$ e $d = 2\,uc$).

Para os paralelogramos que não são losangos nem retângulos: Por sua fórmula algébrica temos que: $A = base \times altura = 4\,ua$, existindo as possibilidades do quadro 5:

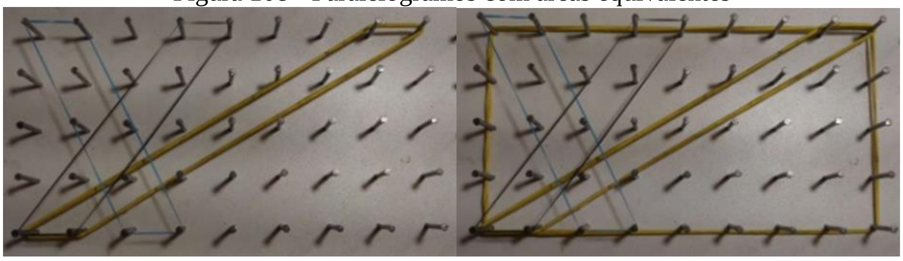
Tabela 3 - Possibilidades de construir paralelogramos com áreas equivalentes

Possibilidades	Base (b)	Altura (h)	Área: $A = b \times h$
1)	$1\,uc$	$4\,uc$	$4\,ua$
2)	$4\,uc$	$1\,uc$	
3)	$2\,uc$	$2\,uc$	
4)	$2\sqrt{2}\,uc$	$\sqrt{2}\,uc$	

Fonte: Dados da pesquisa.

Qualquer paralelogramo com essas bases e essas alturas possuem $4\,ua$. Na representação da figura 108, por exemplo, os três paralelogramos possuem áreas equivalentes, pois todos têm a mesma base $(1\,uc)$ e a mesma altura $(4\,uc)$ correspondente. Existindo assim vários paralelogramos diferentes com essa área. O mesmo ocorre com os demais casos.

Figura 108 - Paralelogramos com áreas equivalentes



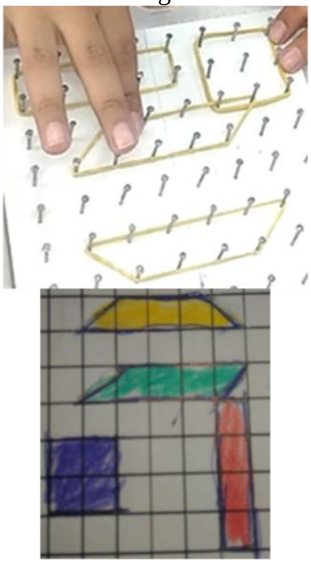
Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Para a possibilidade (2)

Todas as duplas representaram, primeiramente, no geoplano vários quadriláteros com esta área e, após, os representaram na malha. Por essa razão, nos protocolos, há a representação de quadriláteros com áreas equivalentes. Assim:

Figura 109 - Protocolo dos alunos (01, 12), (03, 10), Sessão 03



Professora do quinto ano: Que figuras são essas?
Aluno 01: É um trapézio, um paralelogramo, um quadrado e um retângulo. Todos com quatro unidades.

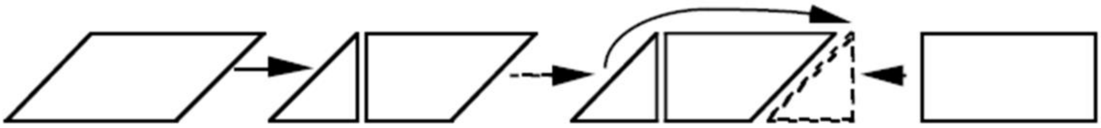
Pesquisadora: Como vocês fizeram?
Aluno 03: Esse daqui (o paralelogramo de base quatro e altura um) a gente fez um retângulo com quatro unidades de área e tirou essa metadinha aqui e passou pra cá (reconfiguraram o retângulo em um paralelogramo por meio da divisão mereológica)

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo dos alunos (03, 10) é possível perceber a divisão mereológica heterogênea feita no retângulo. Construíram o retângulo no geoplano e após, o decompuseram em um triângulo e em um trapézio retângulo (decomposição heterogênea). Reconfigurando com essas peças o paralelogramo.

Esses alunos realizaram a operação figural descrita por Duval (2005, p. 14) partindo do retângulo (figural final) e chegando ao paralelogramo (figura inicial). Assim:

Figura 110 - Decomposição mereológica heterogênea no paralelogramo



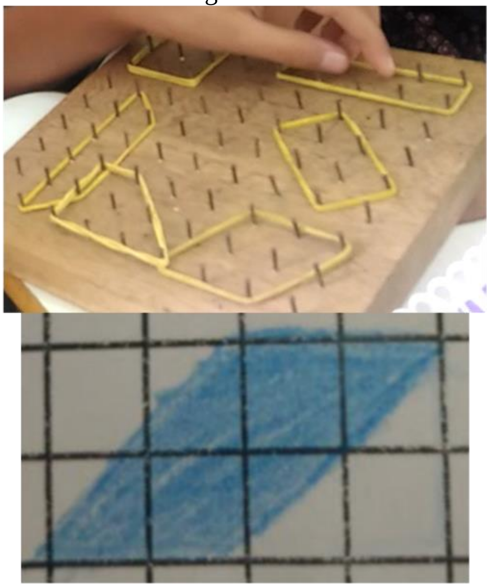
Fonte: Duval (2005, p. 14)

Esse raciocínio e tratamentos figurais justificam a equivalência de área entre esses dois quadriláteros, bem como contribuem na compreensão da fórmula algébrica dos dois que é $b \times h$. O que é um resultado importante em nossa pesquisa.

Para a possibilidade (3)

Percebemos que para este paralelogramo, a maior parte dos alunos desconstruiu o quadrado de área $4\,ua$ para formar o paralelogramo. Acompanhe o diálogo das alunas (05, 06).

Figura 111 - Protocolo dos alunos (05, 06), (03, 10), Sessão 03



Aluna 06: Para o paralelogramo a gente pensou primeiro no quadrado. Daí a gente pegou esse lado tirou ele daqui e passou ele pra cá (Construíram o quadrado e o transformaram num paralelogramo com área equivalente).
Aluna 05: É tipo assim ó... Tava aqui o quadrado, daí a gente puxou aqui, tirou esse e esse daí ficou assim, o paralelogramo. Que dá um, dois, três, quatro.

Aluno 03: Esse daqui a gente teve um pouco mais de dificuldade. Mas daí a gente fez uma área dentro dele assim ó (mergulharam o paralelogramo em um retângulo de base quatro e altura dois), e daí tirou metade (perceberam que o paralelogramo é metade desse retângulo). Daí deu quatro.

Fonte: Dados da pesquisa

Para os trapézios, quadriláteros que possuem <u>apenas</u>[58] dois lados paralelos: De acordo com sua fórmula algébrica de área temos que: $A = \frac{(B+b)\times h}{2} = 4\,ua$, logo, $(B+b)\times h = 8\,ua$. Sendo assim, temos as seguintes possibilidades:

Tabela 4 - Possibilidades de construir trapézios com áreas equivalentes

Possibilidades	Altura (h)	Base maior (B)	Base menor (b)	Área:
1)	$1\,uc$	$7\,uc$	$1\,uc$	$4\,ua$
		$6\,uc$	$2\,uc$	
		$5\,uc$	$3\,uc$	
		$4\,uc$	$4\,uc$	
2)	$2\,uc$	$3\,uc$	$1\,uc$	
		$2\,uc$	$2\,uc$	
3)	$4\,uc$	$1\,uc$	$1\,uc$	
4)	$\sqrt{2}\,uc$	$3\sqrt{2}\,uc$	$\sqrt{2}\,uc$	

Fonte: Dados da pesquisa.

Observe que para cada possibilidade acima existem vários trapézios diferentes.

[58] Estamos considerando esta definição.

Análise a posteriori

Para a possibilidade (1):

Figura 112 - Protocolo dos alunos (05, 06), (03, 10), Sessão 03

Aluna 06: Pra fazer o trapézio isósceles, primeiro a gente fez esse daqui (o retângulo de base 5 uc e altura 1 uc), daí é só tirar essas pontas aqui (Transformaram o retângulo de 5 ua em um trapézio retirando dois triângulos de 0,5 ua cada).
Aluna 05: É! Porque metade mais metade dá um, dois, três e quatro.

Aluno 10: Esse trapézio aqui primeiro a gente fez esse retângulo assim ó (retângulo de base 5 uc e altura 1 uc) e daí é só diminuir aqui (tirar dois triângulos de 0,5 ua cada nas pontas). Daí fica esse trapézio de quatro unidades de área.

Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo e tratamentos figurais acima, a área do trapézio foi obtida por meio dos tratamentos figurais e numéricos realizados, contando os quadradinhos do interior do retângulo e, em seguida, realizando tratamentos no registro numérico ($5\,ua - 0{,}5\,ua - 0{,}5\,ua = 4\,ua$). Observamos que os alunos realizaram primeiramente os tratamentos figurais e depois uma conversão para o registro numérico e tratamentos neste que justificam a área do trapézio. Após, novamente uma conversão para o figural para representar essa resposta na malha. Percebemos que a percepção serviu de controle para desenhar, juntamente com a apreensão operatória e o olhar inventor (sobre o retângulo e o trapézio).

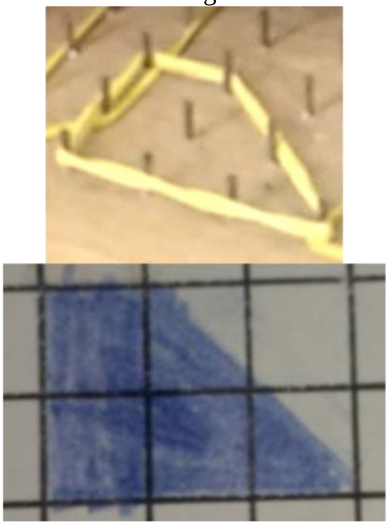
Análise a posteriori

Para a possibilidade (2)

Para os paralelogramos e trapézios, os alunos tiveram dificuldades em nomeá-los. No início da sessão questionamos quais os triângulos e quadriláteros que poderiam ser formados. Eles falaram triângulos (sem especificá-los), quadrado e retângulos. Mas, durante a resolução da atividade, questionaram os nomes dos polígonos que estavam representando no geoplano (paralelogramos e trapézios).

Assim que nomeavam os chamavam sempre pela nomenclatura, algumas vezes paravam pensavam e, com a ajuda do colega, se lembravam. Identificamos que não somente o geoplano, mas também a possibilidade de representar essas figuras, neste material didático, chamando-as pelo nome, despertou interesse nos alunos. No diálogo da aluna 05 (figura 113), percebe-se que ela sabe que a figura é um trapézio, porém é um trapézio específico. Então ela pausa sua fala para se lembrar da nomenclatura e a sua colega a lembra. Acompanhe:

Figura 113 - Protocolo dos alunos (05, 06), Sessão 03



Aluna 05: E esse trapézio aqui ó...
Aluna 06: Esse trapézio retângulo é só contar os quadradinhos. Assim ó...
Aluna 05: Um, dois, três e quatro.
Aluna 06: É! É quatro também!
Aluna 05: É! Ele tem quatro unidades de área também.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se nessa apreensão discursiva acima a decomposição mereológica heterogênea do trapézio retângulo, puramente visual, em três quadrados e dois triângulos e o registro numérico e tratamentos neste para justificar a área do trapézio. Essa operação figural $(2D \rightarrow 2D)$ pode ser materializada, permanecendo na maior parte do tempo na maneira de ver do botanista e nas apreensões perceptiva e operatória, o que não ocorre com a desconstrução dimensional 1D/2D e/ou a 0D/2D, a qual “[...] é inteiramente subordinada a um discurso axiomático[...]” (DUVAL, 2005, p. 17, tradução nossa).

Essa desconstrução, quando exigida, para representar os triângulos e quadriláteros na folha foi um processo difícil para os alunos quando as figuras não tinham seus lados apoiados na malha. Isto pode ser notado nos protocolos figurais, principalmente quando se exigia o olhar não icônico (construtor e/ou inventor). Para Duval (2005), nas representações icônicas as figuras tendem a ser representações estáveis ou não modificáveis (quadrado de $4\,ua$, por exemplo), já nas não icônicas as figuras, na geometria plana, são configurações transformáveis em outras, destacando-se, muitas vezes, por exemplo, por suas propriedades (DUVAL, 2005).

5.3.2 Considerações sobre a terceira sessão

Durante a resolução dessa atividade os alunos representaram no geoplano primeiramente todos os triângulos diferentes com áreas equivalentes e após os representaram na malha. Procedendo de modo análogo para os quadriláteros. Alguns alunos tiveram dificuldades em representar as figuras na malha quadriculada (04, 07, 09). Observou-se que a maioria representou a figura sem o auxílio da régua, não ficando assim os lados na forma de segmentos de reta. Entretanto, isto não compromete nossa pesquisa.

Nenhum grupo de alunos representou o losango com $4\,ua$ no geoplano. Ao término da sessão discutimos as soluções encontradas por eles. Mostramos que para o retângulo dois grupos o representaram de mais de um modo: um na posição prototípica e outro numa posição não prototípica, mostrando outras possíveis respostas para as demais figuras, as quais não houve muito interesse do grupo em representá-las no geoplano. Parece que o fato de ser uma questão aberta com diversas respostas possíveis, permitiu ao grupo um envolvimento menor. Tivemos a impressão de que eles gostam de encontrar *"a resposta"* e não *"uma das respostas possíveis"*. Quando indagados, *"será que existem outros triângulos, retângulos, paralelogramos e trapézios com esta área?"*, eles não mostravam interesse em verificar que sim ou que não. Salientamos que no decorrer dessa sessão tentamos conduzir os alunos a encontrar mais triângulos e quadriláteros com esta área, porém assim que encontraram algumas figuras e a representaram na malha deram por acabada a atividade.

Diante de uma gama de respostas possíveis previstas na análise a *priori* as respostas obtidas foram mínimas e muitas delas não foram obtidas. Os alunos também tiveram muita dificuldade em calcular as áreas das figuras que representavam no geoplano, principalmente com aquelas que não possuíam seus lados apoiados na malha, pois o tipo de figura que podia ser representado nesse recurso foi uma variável didática já explorada. Por conta disso, durante a sessão, procuramos indagá-los perguntando se alguém conseguia formar um triângulo ou quadrilátero. Também falávamos para os demais, *"Olha o grupo tal conseguiu viu!" "E vocês? Já fizeram o quê"* Diante disso, por serem competitivos, engajavam-se na busca por soluções. Em alguns momentos o desânimo foi tal, que chegamos a pensar que iríamos receber as folhas com quase nada de registro.

No registro numérico encontraram dificuldades em operar com números decimais, quando enquadravam a figura num retângulo e subtraiam dele as áreas que não faziam parte, o fato de ter que operar com números decimais fez com que alguns grupos não conseguissem concluir qual era a área da figura, encontrando também dificuldade em visualizar as áreas que deveriam ser subtraídas.

Na tentativa de construir triângulos com $4\,ua$ uma aluna, em especial, foi à lousa e mediu com a régua as medidas de um triângulo representado nela, não compreendendo que se tratava apenas de uma representação, não importando as medidas reais. Outros alunos tentaram alguns mecanismos de solução com as peças do tangram, sobrepondo o paralelogramo do tangram no geoplano na tentativa de construir um paralelogramo com $4\,ua$.

Para explicar aos alunos o que é um paralelogramo, sua definição e nomenclatura, percebemos que a representação na peça do tangram contribuiu por ser um material concreto manipulável.

Nesta sessão, percebemos que os conhecimentos sobre áreas de figuras planas foram ficando mais refinados, apesar das dificuldades. Para os retângulos e quadrados, com os lados apoiados na malha, os alunos começaram a perceber que para calcular sua área não era preciso contar os quadradinhos do interior, bastava multiplicar as medidas de seus lados. Acreditamos que este resultado se deu por conta das atividades desenvolvidas, considerando todas as sessões realizadas, que solicitaram o gesto, a linguagem e o olhar do(s) aluno(s) e exigiram deles uma atividade cognitiva mais complexa, onde eles tiveram que construir as figuras e identificar a razão que justifica sua área.

Para representarem as figuras na malha os alunos tiveram que olhar para elas e desconstruí-las $(2D \rightarrow 1D)$, abordando-as sob o aspecto de suas dimensões e da mudança de seus números, bidimensional e unidimensional. Essa mudança dimensional, nas figuras geométricas, constitui o centro do olhar geométrico (DUVAL, 2005). Para isso os alunos tiveram que desenvolver e coordenar a visualização e os enunciados produzidos sobre as figuras, os quais requerem funcionamentos cognitivos diferentes. Segundo Duval (2005), que “[...] devem ser considerados como dois objetivos do ensino também essenciais nos conteúdos matemáticos” (DUVAL, 2005, p. 3, tradução nossa).

Representar as figuras no geoplano (material concreto), e, após, na malha, reproduzindo-as ou as descrevendo para o colega as construir, fez variar a mesma figura geométrica de modo que as maneiras de vê-las fossem diferentes nessas representações. Por um lado, o olhar perceptivo sobre elas foi o botânico para nomeá-las e por outro o construtor para construí-las com elástico no geoplano ou com lápis na malha. E, em alguns momentos, o inventor para descobrir as áreas das figuras formadas, decompondo-as em subfiguras e as reconfigurando em outras ou calculando as áreas nestas e as somando.

No olhar botanista a constatação é perceptiva e na outra ponta, no olhar inventor, exige-se que se desconstrua a figura. Entendemos, concordando com Duval (2005), que isso é uma questão crucial para a aprendizagem geométrica de áreas de figuras planas e que precisa ser considerada por meio de atividades que favoreçam esses olhares, visto que "O conhecimento não é o mesmo conforme o olhar que um estudante encontrou ser capaz ou incapaz, de mobilizar, na presença de uma mesma figura" (DUVAL, 2005, p.7, tradução nossa).

5.4 Sessão 04

Esta sessão é composta por três atividades. A primeira é para determinar a medida de um lado do retângulo sabendo sua área e a medida do outro lado. A segunda é para construir, com régua e esquadro, figuras com áreas específicas e a terceira, para construir quadriláteros de $2\,ua$ com as peças do tangram, considerando que a peça quadrada tem $1\,ua$.

5.4.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

O enunciado desta atividade foi:

1) Um retângulo tem área $2\,m^2$ *e um dos lados mede* $50\ cm$*. Quanto mede o outro lado?*

2) Utilizando régua e esquadro, construa:

a) Dois retângulos diferentes de área $4\,cm^2$.

b) Dois triângulos diferentes (um escaleno e um isósceles) de área $3\,cm^2$.

3) Construa com as peças do tangram: um quadrado, um retângulo, um paralelogramo e um trapézio com duas unidades de área ($2\,ua$*), sabendo que a peça quadrada tem uma unidade de área (*$1\,ua$*).*

O objetivo desta sessão é construir os polígonos com as áreas explicitadas. A variável didática é a ausência de figuras poligonais no enunciado, pois, quando presentes, podem intervir nas respostas dos alunos. Em alguns casos eles se baseiam meramente nas imagens para responder, enquanto que as figuras podem influenciar as suas produções, e às vezes servem como justificativa para a solução do problema.

Com essa dinâmica, pretendemos que os alunos elaborem estratégias mais genéricas na resolução, construindo as figuras de mais de um modo nos itens (2) e (3), podendo utilizar as fórmulas algébricas para o cálculo de áreas para obter as respostas.

As apostilas do quinto e do sexto anos do ensino fundamental, adotadas pela escola, ao trabalhar o conteúdo “Áreas de figuras planas” seguem outra via, fornecem as fórmulas algébricas e pedem para calcular a área de alguns polígonos representados, ou são dadas as dimensões e solicita a área, não existindo atividades de construção de polígonos com determinada área. Talvez, por esta razão os alunos encontrem dificuldades na mobilização de estratégias e no uso da régua e esquadro.

Para iniciar, mostramos aos alunos um quadrado medindo um metro de lado, representado em papel pardo, quadriculado em dm^2, para que identificassem que sua superfície possui $1\, m^2$ de área, e, bem como, algumas possíveis decomposições e reconfigurações que podem ser feitas neste, com invariância de área. Pode-se, por exemplo, dividi-lo ao meio e reconfigurá-lo em um retângulo, ou, em dois triângulos congruentes de modo a formar outro triângulo ou um paralelogramo[59], existindo outras possibilidades de se obterem outras figuras com a mesma área.

Em seguida, representamos na lousa um quadrado de lado $1\, dm$ e questionaremos a área desse quadrado. Era esperado que os alunos identificassem e respondessem que ele possuia $1\, dm^2$ de área. Após, os levamos a perceber como está representado $1\, dm$ na régua, objetivando que eles visualizassem que $1\, dm$ tem $10\, cm$. Neste caso, que o quadrado representado na lousa possuia também $100\, cm^2$ de área, pois $10\, cm$ é a medida do seu lado e nele cabem 100 quadradinhos de $1\, cm$ de lado, mostrando que, independente da unidade de medida utilizada, a área desse quadrado não muda. Na sequência eles deveriam identificar as possíveis decomposições e reconfigurações que podem ser feitas neste quadrado de $1\, dm^2$ de área, obtendo outras figuras com a mesma área. E, também, que 1 dm equivale a 100 mm, logo a área deste quadrado também equivale a 10000 mm^2.

Os alunos podiam usar o papel milimetrado para construírem as figuras, pois disponibilizamos: régua, esquadro, papel milimetrado, geoplano e tangram.

Contudo, antes de iniciar a atividade, fizemos uma retomada sobre como construir algumas figuras usando régua e esquadro e a classificação dos triângulos quanto aos seus lados.

---

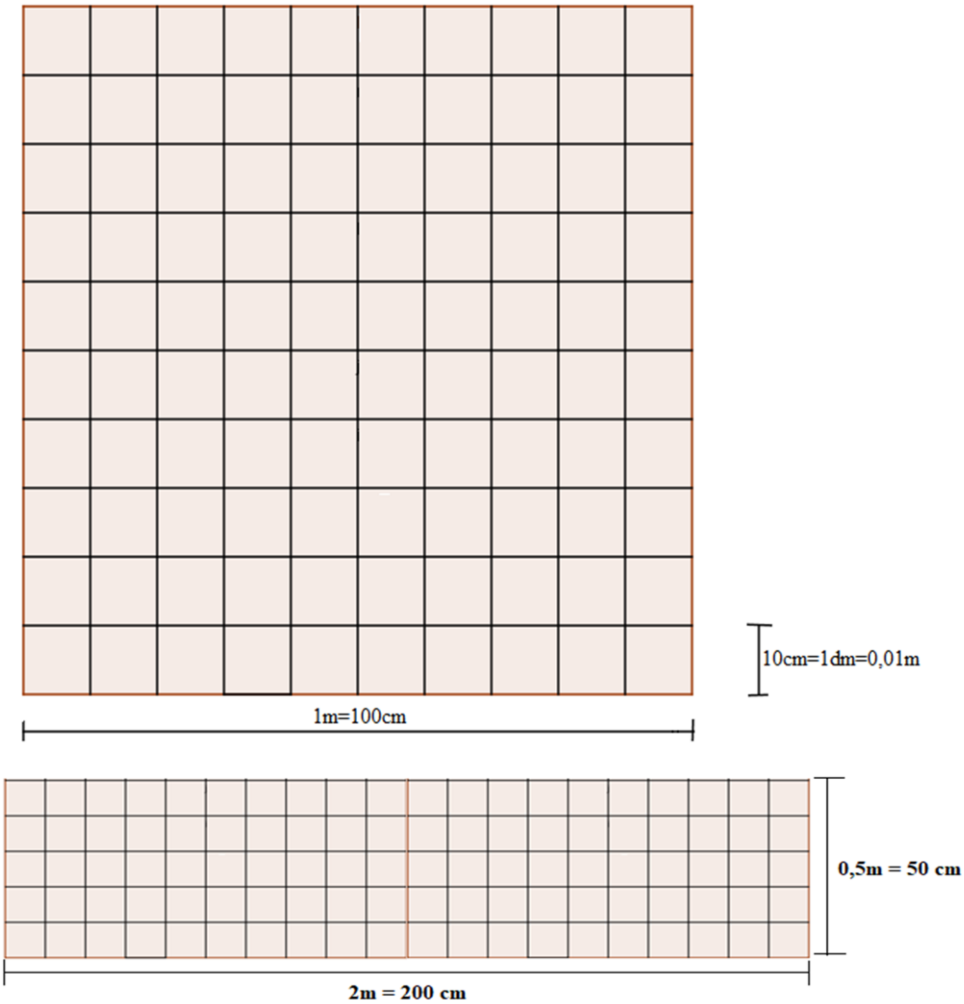
59 Semelhante à decomposição da peça quadrada do tangram em dois triângulos pequenos e a reconfiguração destas peças no paralelogramo e no triângulo médio deste jogo.

A seguir relatamos como ocorreu a terceira fase desta engenharia didática.

Experimentação

Este encontro ocorreu no dia 28/06/2017 e contou com a participação de dez alunos, seis do quinto ano e quatro do sexto ano do Ensino Fundamental. Iniciamos mostrando um quadrado de $1\,m^2$ de área e um retângulo obtido pela decomposição e reconfiguração deste quadrado. Assim:

Figura 114 - Quadrado e retângulo com áreas equivalentes



Fonte: Dados da pesquisa

Questionamos: "*O retângulo e o quadrado têm a mesma área?*". Alguns ficaram quietos em dúvida, pensando, outros disseram: *"Não! O retângulo é maior que o quadrado"*. Indagamos: *"O quadrado tem quantos quadrados de $1\,dm^2$?"* Eles responderam: *"Cem, porque é dez por dez"*. E o retângulo? *"Também tem cem porque* *são os mesmos quadrados de* $1\ dm^2$*”*. E então perguntamos: *“o que podemos dizer das suas áreas?”* Responderam um pouco pensativos: *“Os dois têm a mesma área, porque cabem 100 quadrados de* $1\ dm^2$ *nos dois”.*

Questionamos novamente, *“Se o quadrado for decomposto em dez tiras de* $10\ dm^2$*cada uma, formando com elas um retângulo de* $10\ m$ *por* $10\ cm$ $(1\ dm = 0{,}1\ m)$*, qual será a sua área?”*. Disseram: *“Terá também* $1\ m^2$*, porque são os mesmos quadradinhos do quadrado de* $1\ m^2$ *de área.” “E se decompusermos o quadrado de* $1\ m^2$ *de área na diagonal, dividindo-o em dois triângulos, formando com eles um triângulo. Qual é a área deste triângulo?”* Disseram: *“Também* $1\ m^2$*, porque são os mesmos quadrados de* $1\ dm^2$ *que cabem nele, não tirou nenhum”.*

Após estas reconfigurações, com invariância de área, retomamos os processos de calcular área no geoplano por dentro e por fora e a classificação dos triângulos e quadriláteros, quanto aos seus lados. Apresentamos a eles a malha milimetrada que também pode ser usada para calcular áreas, neste caso em cm^2, dm^2 e mm^2.

A seguir, apresentamos algumas estratégias que os alunos poderiam mobilizar nestas atividades e as que de fato mobilizaram, por meio das análises *a priori* e *a posteriori*.

Para o item (01)

1) Um retângulo tem área $2\ m^2$ *e um dos lados mede* $50\ cm$*. Quanto mede o outro lado?*

Como este retângulo tem área $2\ m^2$ e um dos lados mede $50\ cm$ a resposta é única. Supomos que uma dificuldade será lidar com as unidades de medida de comprimento que precisam ser transformadas em centímetros ou em metros. Era esperado que os alunos tentassem representar $50\ cm$ no papel, ficando presos à percepção de como deve ser este retângulo e não no valor da medida do outro lado, que é o que se quer saber.

A representação material da figura do quadrado de $1\ m^2$ de área, construída com o papel pardo, deve contribuir com a resolução deste item. Era esperado que os alunos percebessem visualmente que esse quadrado pode ser decomposto ao meio, formando dois retângulos que, justapostos, possuem a mesma área, por meio de decomposição heurística dessa forma conhecida (o quadrado). Conforme Duval (2005), essa decomposição é a homogênea, porque o quadrado deve ser decomposto em dois retângulos idênticos, que é uma unidade figural diferente da figura de partida. Se os alunos seguissem este raciocínio conseguiriam construir o retângulo, percebendo que dois destes quadrados podem ser decompostos em quatro retângulos idênticos que justapostos possuem a área solicitada, com um dos lados medindo $50\ cm$, descobrindo que o outro lado mede $4\ m$, quando visualizado o seu contorno, no caso o retângulo. Era esperado que tivessem dificuldades em lidar com a mudança de unidades de medidas, uma vez que a área é dada em m^2 e a medida do outro lado em cm e só se pode efetuar os cálculos com grandezas de uma mesma natureza.

As fórmulas algébricas também podiam ser mobilizadas para encontrar a medida do outro lado do retângulo, assim:

$$A = b \times h$$

$$2\ m^2 = b.\frac{1}{2}\ m$$

Portanto, $b = 4\ m$.

Sendo assim, o outro lado mede $4\ m$ ou $400\ cm$ se utilizarem $20.000\ cm^2$ao invés de $2m^2$. Este procedimento requer a visualização do espaço 2D e 1D, olhando para o retângulo e para as medidas de seus lados. Envolvendo os registros figural e o numérico, convertendo as medidas, realizando tratamentos no Sistema Métrico Decimal.

Outra possibilidade esperada era de os alunos mobilizarem erroneamente as fórmulas algébricas para tentar descobrir a medida do outro lado, multiplicando os dois números enunciados “dois” e “cinquenta” encontrando “cem” e respondendo que o outro lado do retângulo é $100\ cm$, porque o outro lado está nesta unidade de medida.

Se utilizassem o papel milimetrado era esperado que tentassem representar neste recurso um retângulo de área $2\ m^2$ com dos lados medindo $50\ cm$, por estabelecimento de alguma escala de medida.

No término deste item era esperado que os alunos percebessem o que é $1\ m^2$ de área, visualizando que se pode adicionar traços no quadrado de $1\ m^2$ de área, decompondo-o e o reconfigurando de diversos modos, obtendo outras figuras com a mesma área. Dissociando “metro quadrado” da figura de um quadrado, associando que área corresponde ao espaço físico que a figura pode ocupar no espaço e que diferentes figuras podem ter esta área.

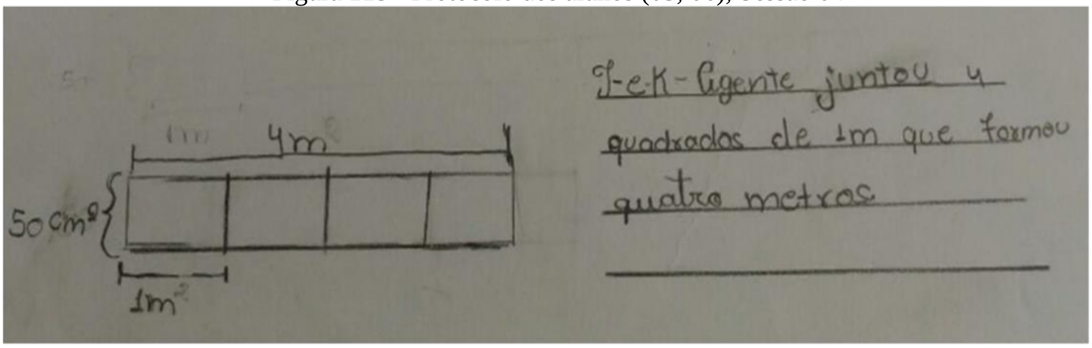
Análise a posteriori

Os alunos encontraram bastante dificuldade para descobrir a medida do outro lado desse retângulo. A dupla (01, 02), na tentativa de elaborar estratégias de resolução, mediu com a régua os lados do retângulo construído com o papel pardo (conforme figura 114) que estava no chão da sala de aula. Acompanhe o diálogo deles:

> Professora do quinto ano: O que vocês estão fazendo?
> Aluna 02: Estamos medindo com essas duas réguas o lado desse retângulo (duas réguas de 30 cm cada).
> Professora do quinto ano: Mas por que vocês estão medindo? O que vocês pensaram em fazer?
> Aluna 02: Há... Pra medi esse daqui para ver quantos centímetros tem, por causa se a gente saber o resultado de quantos um metro tem desse lado, a gente vai somar esse centímetro mais esse centímetro e vai dar o resultado. ... (Pausa) Só que a gente não tá encontrando...
> Aluno 01: Daí a gente faz base vezes a altura e tem que multiplicar por dois porque é 2 m^2 de área.
> Professora do quinto ano: Hã... O dobro...
> Aluna 02: Vamos continuar tentando (disse medindo o lado maior do retângulo com as réguas).
> Aluna 02: Professora deu 158 cm (o lado maior do retângulo, disse após alguns instantes).
> Pesquisadora: Por que deu 158 cm?
> Aluna 02: Porque a gente mediu com a régua.
> Pesquisadora: Mostra pra mim.
> Aluna 02: Assim ó! Aqui deu trinta e a gente somou mais trinta...
> Pesquisadora: Ó! Olha aqui! Tem que começar aqui certinho ó! (A posição da régua).
> Pesquisadora: Olha aqui! Daqui até aqui tem dez centímetros, daqui até aqui mais dez, daqui até aqui mais dez,...
> Aluna 02: Háaaa... A gente teve tanto trabalho... E podia contar de dez em dez.
> Pesquisadora: Então quanto tem?
> Aluna 02: Então! Dez, vinte,..., cem...
> Pesquisadora: Cem centímetros que é a mesma coisa que...
> Aluna 02: Um metrooooo!
> Pesquisadora: E o outro?
> Aluna 02: Mais um metro. Hã..., cem centímetros mais cem centímetros dá duzentos centímetros que é dois metrooooooooossssss!

Contudo esta dupla não conseguiu responder a atividade. A dupla (05, 06) visualizando esta representação no chão percebeu que um quadrado de 1 m^2 de área pode ser decomposto e reconfigurado em um retângulo de área equivalente de dimensões 50 cm e 1 m. Na apreensão discursiva percebemos o raciocínio correto dessa dupla, mas tiveram dificuldades em escrever a resposta, escreveram quadrados e não retângulos. Assim:

Figura 115 - Protocolo dos alunos (05, 06), Sessão 04



Pesquisadora: Como vocês fizeram?
Aluna 06: Aqui tá falando dois metros quadrados (no enunciado) então tem que dobrar eles (o dobro de 1 m^2). E daí vai ficar quatro (quatro retângulos de dimensões $50\ cm$ e $1\ m$). Aí a gente pegou quatro desses retângulos e desenhou eles aqui daí ficou 4 m^2.
Aluna 05: É quatro metros nesse lado e, a largura vai ficar cinquenta centímetros. Que vai dar dois metros quadrados de área.

Fonte: Dados da pesquisa

Para o item 02. a)

2) Utilizando régua e esquadro, construa:

a) Dois retângulos diferentes de área $4\ cm^2$.

Para este item era esperado que os alunos percebessem que o quadrado de lado $1\ cm$[60] tem área $1\ cm^2$ e que cada um destes retângulos devem ter quatro desses quadrados na sua superfície, não importando as decomposições que podem ser feitas. Neste item, diferentemente do anterior, podem-se representar estas medidas no papel, o que facilita a resolução.

Esses retângulos podem ser construídos no papel milimetrado, sendo necessário visualizar o seu contorno, por meio do olhar botanista, para representá-lo na folha. Era Esperado que os retângulos construídos por eles tivessem as seguintes dimensões: $4\ cm\ e\ 1\ cm$, $2\ cm$ e $2\ cm$. Ou, $8\ cm = 80\ mm$ e $0{,}5\ cm = 5\ mm$. Também, que percebessem que o quadrado de $1\ cm^2$de área tem lado $1\ cm$ = 10 mm, ou seja, área $100\ mm^2$=$1\ cm^2$, notando que o quadrado de $1\ cm$ de lado pode ser decomposto de modo estritamente homogêneo, segundo Duval (2005), em quatro

---

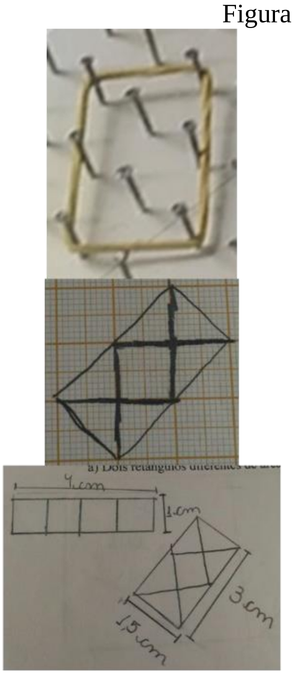
60 Malha milimetrada.

quadrados de lado $0{,}5\ cm = 5\ mm$, que justapostos possuem $1\ cm^2$ de área, sendo necessários dezesseis desses para formar o retângulo de área $4\ cm^2$, exigindo aqui olhar para o contorno dessa figura para visualizar a resposta, transitando entre o 1D e 2D.

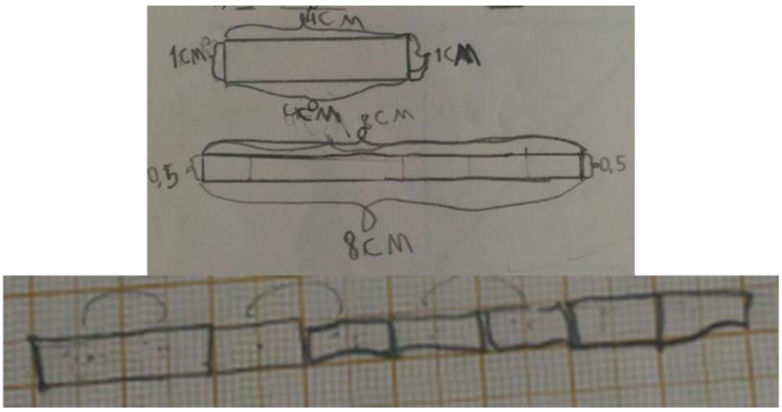
Se os alunos mobilizassem a fórmula algébrica para construir estes retângulos iriam pensar possivelmente nos números que multiplicados resultam em $4\ cm^2$, supomos que pensariam somente em: $4\ cm$ e $1\ cm$ e $2\ cm$ e $2\ cm$. As medidas $8\ cm$ e $0{,}5\ cm$ supomos que não seriam mobilizadas por eles, bem como a unidade de medida milímetros.

Análise a posteriori

Figura 116 - Protocolo dos alunos (05, 06), (04, 07), Sessão 04



Professora do quinto ano: Como vocês fizeram para construir este retângulo?
Aluna 05: A gente fez esse retângulo aqui de quatro unidades de área (no geoplano). A gente fez esse aqui porque aqui é meia unidade de área, aqui é meia unidade de área,... Aqui é meia unidade de área, e, aqui é um quadrado que vale um. Daí, a gente junto meia mais meia que dá um, meia mais meia que dá um, meia mais meia que dá um, e, juntando com mais esse quadrado que dá um, vai dar quatro unidades de área. E daí, daqui, a gente foi para esse papel quadriculado aqui. E, depois pra cá (representar na folha, conforme figura à esquerda).
Professora do quinto ano: Daí ele ficou com quanto (as dimensões do retângulo)?
Aluna 06: Ele ficou (medindo com a régua) com três centímetros de altura.
Aluna 05: Ele ficou com três centímetros de base. E com quantos de altura?
Aluna 06: Ele ficou com um centímetro...
Aluna 05: Não! É um centímetro e meio de altura.
Professora do quinto ano: E o que mais vocês fizeram?
Aluna 05: A gente fez também esse retângulo com quatro centímetros de base e um centímetro de altura.



Fonte: Dados da pesquisa

As alunas (04, 07) construíram os retângulos no papel milimetrado primeiro e, após, os representaram na folha (figura 116, os retângulos de dimensões 4 cm por 1 cm e, 8 cm por 0,5 cm)). Os arcos feitos nos retângulos da folha milimetrada indicam que eles juntos possuem 1 cm^2 de área. As medidas dos lados foram feitas após a construção, ou seja, identificou-se primeiro a medida de sua área e após, as dimensões $(2D \rightarrow 1D)$.

A representação do retângulo no geoplano, das alunas (05, 06), contribuiu para representá-lo na malha corretamente. Porém, como essas dimensões são irracionais ($\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$) acabaram por representar 3 cm e 1,5 cm que resulta em um retângulo de área 4,5 cm^2. Contudo, o retângulo representado na folha milimetrada tem 4 cm^2 de área.

Nestas construções atuaram os olhares construtor e inventor e as apreensões sequencial e perceptiva, esta servindo de controle para representar as figuras com o olhar botanista. Esta construção com régua e esquadro, conferiu a estes retângulos confiabilidade e objetividade, que possibilitaram efetuar verificações, medições, contagem e observações. Isso exigiu dos alunos “ver geometricamente” esses retângulos antecipando as produções mobilizadas por eles via discurso, utilizando de modo eficaz essas representações e esses instrumentos (régua e esquadro).

Para o item (02). (b)

2) Utilizando régua e esquadro, construa:

b) Dois triângulos diferentes (um escaleno e um isósceles) de área 3 cm^2.

Eles poderiam construir no papel milímetrado um retângulo de área 6 cm^2, cuja base mede 6 cm e altura 1 cm e traçar a sua diagonal, dividindo-o em dois triângulos congruentes de área 3 cm^2 e representar um destes no papel, que seria um triângulo escaleno. Para obter o triângulo isósceles neste retângulo bastaria considerar essa base de 6 cm, cuja altura de 1 cm é a mediatriz desse segmento. Triângulos diferentes com a mesma área poderiam ser obtidos considerando retângulos de dimensões: 4 cm e 1,5 cm; 3 cm e 2 cm.

Quaisquer triângulos que possuem respectivamente base e altura de: 6 cm e 1 cm; 2 cm e 3 cm; 4 cm e 1,5 cm possuem esta área, existindo diversas respostas possíveis. Para ele ser isósceles basta considerar como altura a mediatriz da base. Observe que para cada possibilidade de construção ele pode ser: retângulo, obtusângulo ou acutângulo.

Se os alunos mobilizassem as fórmulas algébricas teriam que pensar em dois números que multiplicados resultam em $6\,cm^2$, poderiam construir triângulos retângulos de base 2 cm e altura 3 cm ou de base 6 cm e altura 1 cm, e vice-versa.

Era esperado que, no término deste item, os alunos tivessem a noção do que significa uma superfície possuir $1cm^2$ de área, não ficando presos à percepção de que somente um quadrado de 1 cm de lado possui esta área, que se pode decompor este quadrado, formando outras figuras com invariância de área. E também que tivessem a noção do que é $2\ cm^2$, $10\ cm^2$, etc., associando ao tamanho que essa superfície pode ter, percebendo que em 1 m^2 de área se tem $10.000\ cm^2$.

Análise a posteriori

A dupla (04, 07) para construir esse triângulo, construiu primeiro um retângulo de 6 ua no geoplano e, após, o triângulo retângulo cuja hipotenusa é a diagonal desse retângulo. Depois disso operou os mesmos procedimentos na malha, identificando as medidas dos lados $(1D)$, para, finalmente representá-la na folha, com estes mesmos tratamentos figurais, pintando um dos triângulos com o lápis. Neste caso, este triângulo deu lugar à visualização geométrica, pois, emergiu desses traços $(2D/1D)$, que foi originado do enunciado da atividade, sendo um triângulo específico que foi destacado pela decomposição do retângulo em dois destes, que justificou sua área.

A linguagem e a visualização contribuíram para esta construção geométrica para desconstruírem o retângulo de 6 ua, em segmentos 6 uc e 1 uc, que precederam os tratamentos numéricos e figurais para determinar a área do triângulo. Esses alunos mobilizaram explicitamente pelo menos três registros: língua materna, figural e numérico. Também, uma coordenação entre estes registros, os quais funcionaram em sinergia diante das conversões mobilizadas, da relação entre os pensamentos, produções discursivas e das transformações das representações semióticas efetuadas. Esta conversão, para Duval (2011), constitui o primeiro limiar para a compreensão em matemática.

O foco na construção desse triângulo foi reconstruir as unidades figurais $(2D)$ a partir das unidades figurais $(1D)$ produzidas por representações distintas, geoplano e régua e esquadro, realizando a passagem $(2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D)$. Essa desconstrução, segundo Duval (2005, p. 16, tradução nossa), “vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas”. Visto que esta desconstrução dimensional não pode ser materializada. É como o caso da decomposição mereológica efetuada nas peças do tangram $(2D \rightarrow 2D)$, próximo item, que pode ser efetuada materialmente.

Para o item (03)

3) Construa com as peças do tangram: um quadrado, um retângulo, um paralelogramo e um trapézio com duas unidades de área ($2\,ua$*), sabendo que a peça quadrada tem uma unidade de área (*$1\,ua$*).*

Este item se diferencia dos demais por não ter as medidas $(cm^2$ e $cm)$. Os alunos poderiam realizar tratamentos figurais nas peças do tangram, onde teriam que identificar a área de cada peça e somá-las.

O objetivo desta atividade é construir estes quadriláteros com áreas equivalentes. E, ainda, perceber que para calcular a área de figuras se pode decompô-la em subfiguras, calculando nestas as suas áreas, para depois, somá-las.

Apresentaremos a seguir as possíveis estratégias de construir estes quadriláteros.

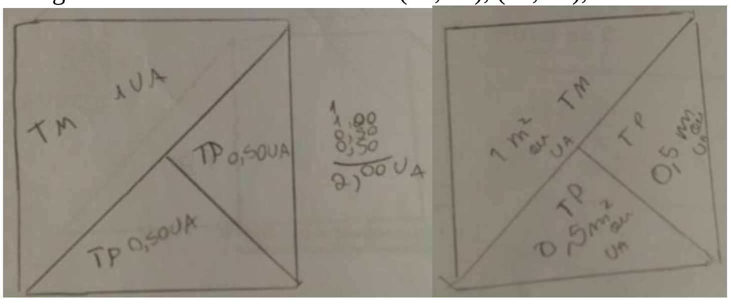
Para o quadrado:

O quadrado de $2\,ua$ que se pode construir com as peças do tangram é formado pelo triângulo médio e pelos triângulos pequenos. A solução é única.

Análise a posteriori

Em todos os protocolos os alunos escreveram a sigla das peças e a sua área. No protocolo dos alunos (10, 12) tem os tratamentos numéricos que justificam a área do quadrado e no protocolo dos alunos (01, 02) duas representações para as peças, em m^2 e em ua. Este procedimento foi feito em todas as peças construídas. Esta representação é significativa em nosso estudo, que trata das contribuições semióticas para a aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros, pois a partir destas os alunos podem tomar consciência de que $1\,m^2$ de área pode ser representado por dois triângulos congruentes com áreas equivalentes a $0{,}5\,m^2$.

Figura 117 - Protocolo dos alunos (01, 02), (10, 12), Sessão 04



Fonte: Dados da pesquisa

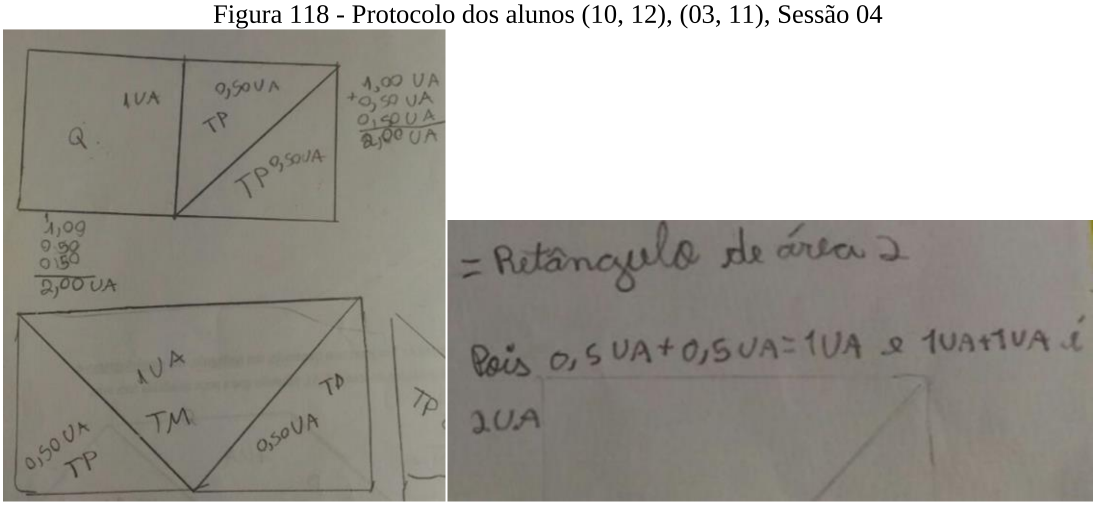
Para o retângulo:

Para o retângulo com $2\,ua$ existem três possibilidades: uma com o quadrado e dois triângulos pequenos; uma com um paralelogramo e dois triângulos pequenos e outra com o triângulo médio e os dois triângulos pequenos.

Análise a posteriori

A dupla de alunos (10, 12) construiu estes dois retângulos. Percebem-se neste protocolo o registro numérico e tratamentos que justificam a área do retângulo. E também a mudança de registro figural e numérico e, os tratamentos realizados após essa conversão, que são importantes em nosso estudo, bem como a coordenação desses registros de representações para concluir a área.

Figura 118 - Protocolo dos alunos (10, 12), (03, 11), Sessão 04



Fonte: Dados da pesquisa

Para o paralelogramo:

Existem cinco possibilidades de construção (excluindo os quadriláteros que são retângulos e que são quadrados). Esses paralelogramos podem ser formados com: 2TP e 1P (duas possibilidades), 2TP e 1TM(duas possibilidades) e com 1Q e 2TP.

Análise a posteriori

Os alunos construíram somente um paralelogramo, com uma peça quadrada e dois triângulos pequenos do tangram.

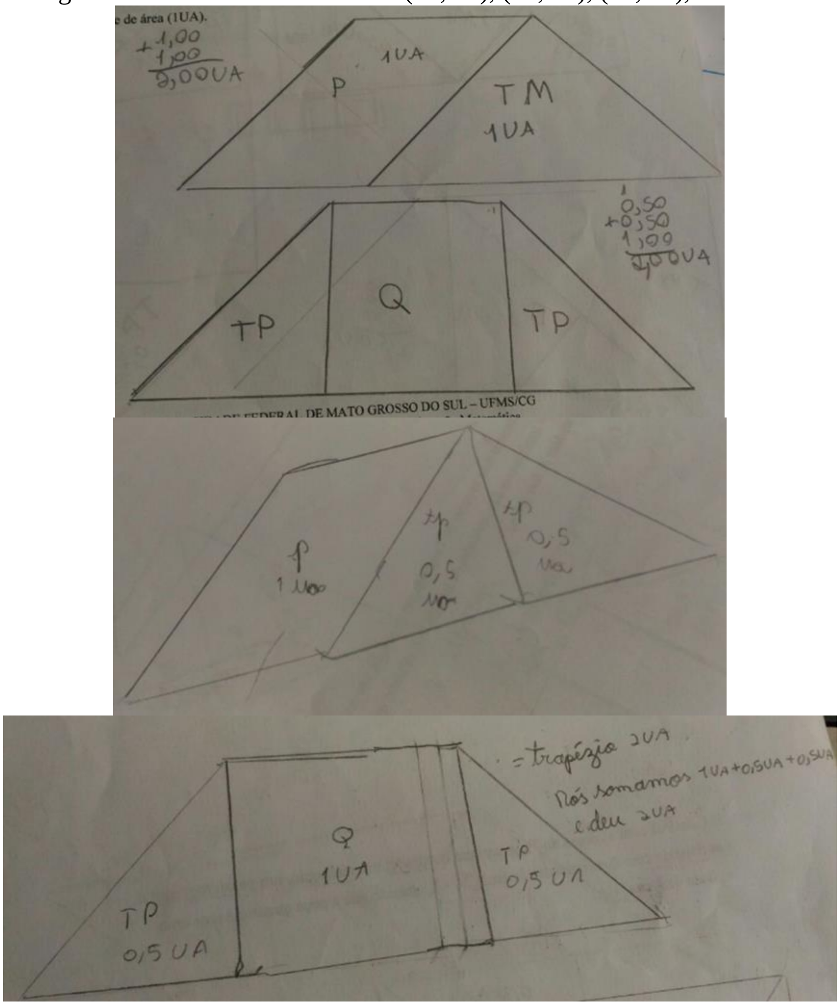
Para o trapézio:

Existem quatro possibilidades de construir o trapézio, com: 2TP e 1Q, 1P e 1TM, 2TP e 1TM e com 2TP e 1P.

Análise a posteriori

A dupla de alunos (01, 02) construiu três trapézios diferentes, com 1Q e 2TP, 1P e 1TM e com 1P e 2TP. Assim:

Figura 119 - Protocolo dos alunos (01, 02), (10, 12), (03, 11), Sessão 04



Fonte: Dados da pesquisa

As articulações entre visualização, tratamentos figurais e numéricos, discurso e o olhar de inventor, por meio da operação visual de composição e decomposição com as peças do tangram, contribuíram para que encontrassem mais de uma solução para este trapézio, pois, estes recursos possibilitaram explorar diferentes composições do trapézio com áreas equivalentes. Percebemos que o registro em língua materna permitiu que esses alunos tomassem consciência dessas soluções, justificando-as e procurando respostas diferentes por meio das composições com as peças do tangram, as quais serviram de apoio para os raciocínios e tratamentos numéricos.

5.4.2 Considerações sobre a quarta sessão

Os alunos tiveram dificuldades em construir as figuras nas duas primeiras atividades. Na segunda atividade a malha milimetrada e o geoplano contribuíram para construir as figuras e representá-las na folha. Porém, mostraram dificuldades em manusear a régua e o esquadro, bem como em identificar as medidas na régua. Percebemos novamente que, por ser uma questão aberta, acabaram ficando desanimados, produzindo poucas respostas. O que para nós foi desafiador por que tivemos que animá-los no decorrer da atividade. Se algum colega conseguia falávamos *"fulano já conseguiu!"* Com isso se engajavam na busca por *"uma solução"*. No término, tentamos mostrar a eles outras soluções para esses itens, mas só observavam, sem representar as figuras na malha, tangram ou no geoplano.

Na segunda atividade, a estratégia mais mobilizada foi construir primeiro as figuras no geoplano e após na malha milimetrada, para medir as suas dimensões com a régua e representá-las na folha. Percebemos aqui que estas transformações nas representações semióticas oportunizaram a resolução desta atividade, as quais deram acesso ao objeto matemático representado, as áreas dos triângulos (DUVAL, 2009, 2011, 2012). Segundo Duval (2011, p.73), "são essas transformações semióticas que produzem novos conhecimentos"

A segunda atividade, construir os triângulos e retângulos, privilegiou a representação dessas figuras no registro figurativo, onde a apreensão perceptiva não se subordinou às unidades figurais $(1D)$, mas foi a apreensão botânica sobre a figura, que acarretou dificuldades no momento das desconstruções dimensionais requeridas para a construção $(2D \rightarrow 1D)$ e de lidar com os instrumentos de construção. Neste caso, os tratamentos oriundos da apreensão operatória sobre as figuras nessas representações foram reveladores e importantes, por serem decisivos para a utilização heurística da figura. De fato, foram eles que permitiram organizar perceptivelmente as figuras, por meio da apreensão sequencial, a fim de construí-las na folha.

Os alunos não tiveram dificuldades na terceira atividade. Como a peça quadrada do tangram tem $1\,ua$ perceberam que o triângulo pequeno tem $0{,}5\,ua$ e que o triângulo médio e o paralelogramo possuem também $1\,ua$. A partir disso, construíram as figuras contornando-as para representá-las na folha.

Como os alunos tiveram dificuldades nas duas primeiras atividades, pularam-nas e resolveram primeiro a atividade com o tangram. Isso os encorajou a voltar para as primeiras.

No discurso do aluno 01, da dupla (01, 02), é possível perceber que eles compreenderam que as figuras construídas na terceira atividade possuem áreas equivalentes. Acompanhe:

> Professora do quinto ano: Como vocês fizeram?
> Aluno 01: A gente pensou em como fazia o trapézio de duas unidades de área. Daí ela pensou assim (mostrou o trapézio construído com uma peça quadrada e dois triângulos pequenos do tangram na folha, com um paralelogramo e um triângulo médio e com um paralelogramo e dois triângulos pequenos). E daí a gente viu que todos têm duas unidades de área.
> Professora do quinto ano: Todos têm duas unidades de área?
> Aluno 01: Sim! (apontando para o retângulo na folha). Porque meio mais meio dá um inteiro e, com mais um inteiro dá dois inteiros. Meio mais meio dá um inteiro e, com mais um inteiro dá dois inteiros (o quadrado). E, aqui é a mesma coisa (apontando para os outros dois trapézios construídos), só que aqui foi diferente porque ficou um inteiro mais um inteiro (o trapézio construído com um paralelogramo e um triângulo médio). Aí todos têm a mesma área, tudo o que a gente fez.

A articulação dos registros de representação, tratamentos e conversões oriundos destes, com a visualização e a linguagem contribuíram para perceber a equivalência dessas áreas. Percebe-se neste discurso o olhar botânico para nomear as figuras, o inventor para decompor o trapézio e o retângulo e a apreensão operatória para formar esses quadriláteros. O registro numérico e os tratamentos (numéricos e figurais) serviram também para validar a equivalências destas áreas. Resultado esse proveniente da visualização não icônica sobre esses quadriláteros representados pelas peças do tangram[61] $(2D \rightarrow 2D)$.

5.5 Sessão 05

Esta sessão é composta por três atividades. A primeira é para determinar a área de polígonos. A segunda para determinar a quantidade de azulejos necessários para revestir uma piscina. A terceira para encontrar a área do contorno de uma piscina.

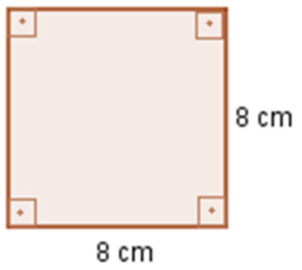
5.5.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

Esta atividade teve como enunciado:

1) Determine a área dos polígonos abaixo.

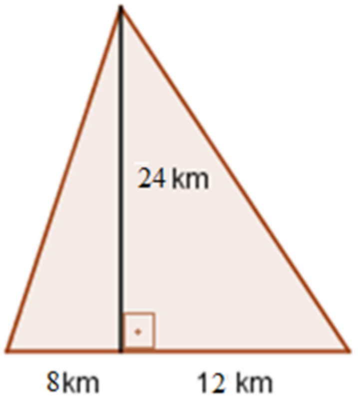
[61] Olhar inventor (DUVAL, 2005).

a)

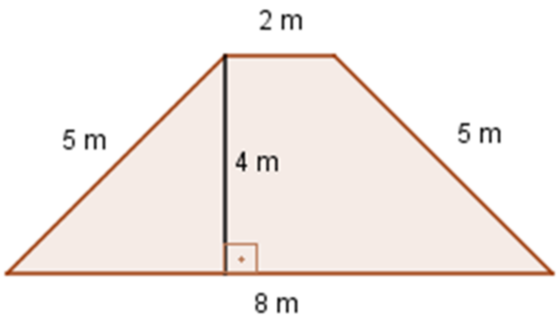


b)

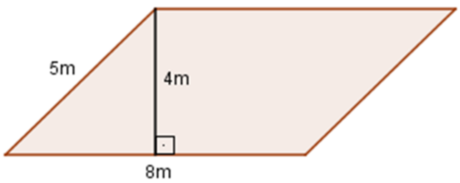
c)



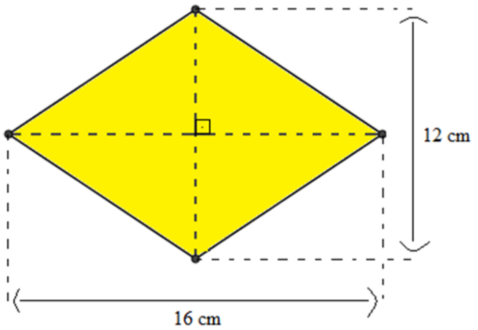
d)



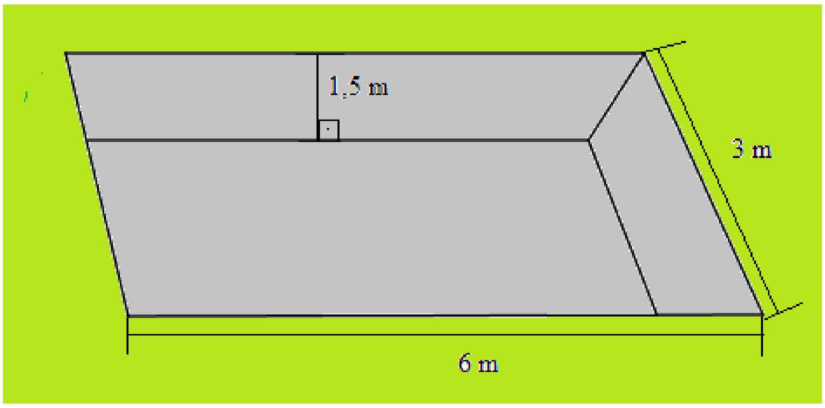
e)



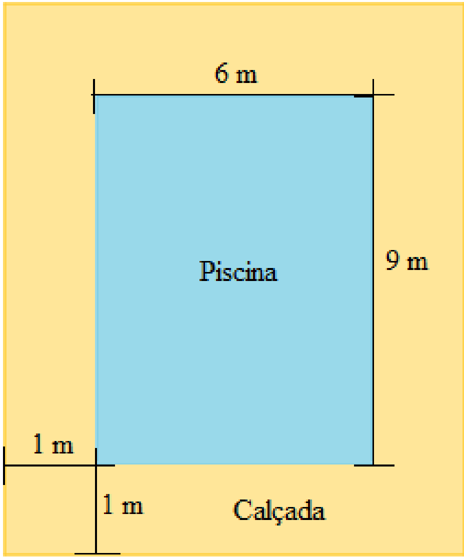
f)



2) Carlos está construindo uma piscina na sua casa. Ela tem $6\ m$ *de comprimento ,* $3\ m$ *de largura e* $1{,}5\ m$ *de profundidade. A piscina está em fase de acabamento, falta somente assentar os azulejos. Carlos irá comprar caixas de azulejos que cobre* $2\ m^2$ *de área cada uma, quantas caixas de azulejos terá de comprar, no mínimo, para cobrir o fundo e as paredes laterais da piscina?*



3) Uma piscina retangular é contornada por uma calçada de 1 *m de largura, como mostra a figura abaixo. Encontre a área dessa calçada.*



Nestas atividades, temos como objetivo compreender quais as estratégias e procedimentos mobilizados pelos alunos para calcular as áreas solicitadas, tais como: o emprego de fórmulas algébricas, a mobilização de recursos materiais (tangram, geoplano, a malha milimetrada), a adição de traços nos polígonos e o ladrilhamento. Procuram-se validar os cálculos com outras representações? E como lidam com essas representações semióticas? Será que compreendem que as medidas em metros e quilômetros representadas no papel não correspondem à medida real? Será que percebem que as figuras são usadas para favorecer a observação e intuição geométrica?

Os recursos: tangram, malha milimetrada e o geoplano, utilizados nas sessões anteriores, ficaram à disposição dos alunos.

A variável didática é o tipo de figura presente nos itens: quadrado, retângulo, triângulo, losango e paralelogramo, juntamente com suas medidas. Elaboramos o segundo e terceiro itens de questões cotidianas, pretendendo que eles atribuam mais significado a este conceito matemático.

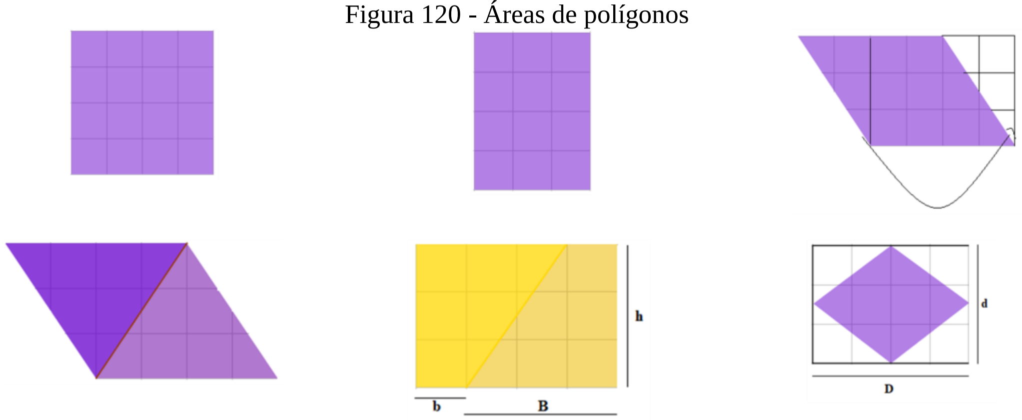
Era esperado que os alunos encontrassem dificuldades nas medidas representadas em metros e quilômetros nas figuras, pois elas não correspondem às medidas reais, sendo necessário, para um melhor entendimento, fazer uso de escala para representá-las na malha, na folha ou no geoplano.

Apresentaremos a seguir como ocorreu a experimentação desta sessão.

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 05/07/2017 e contou com a participação de dez alunos, seis do quinto ano e quatro do sexto ano do Ensino Fundamental. Antes de iniciarem as atividades, apresentamos aos alunos: um quadrado, um retângulo, um paralelogramo, um triângulo, um trapézio e um losango, construídos no papel pardo, quadriculados em quadrados de 1 dm^2 de área, semelhantes às representadas na figura 120. Em seguida questionamos qual a área de cada uma delas. E, como poderíamos calculá-las, se precisávamos contar todos os quadradinhos internos ou tinha outro modo.

Figura 120 - Áreas de polígonos



Fonte: Dados da pesquisa

Para o quadrado e o retângulo, perceberam que bastava multiplicar a quantidade de quadradinhos de sua base e de sua altura. Para o paralelogramo, decompuseram-no em um triângulo e um trapézio e o reconfiguraram em um retângulo com a mesma área, calculando-a neste, ao multiplicar as suas dimensões. Para o triângulo, perceberam que é metade do paralelogramo, logo sua área é metade desta área. E que o trapézio é metade do retângulo, logo sua área também é metade dessa área, ou seja, sua área é o produto da base (B+b) pela altura (h), dividido por dois. Que o losango é a metade do retângulo que o contorna, portanto, a sua área é a metade da área desse retângulo, cuja base é a diagonal maior do losango (D) e a altura é a diagonal menor (d).

Após, representamos algumas figuras na malha milimetrada os questionando como poderiam obter as suas áreas com e sem a fórmula algébrica. Solicitamos também que, no geoplano, representassem alguns triângulos e quadriláteros, dentre eles: um quadrado de $9\,ua$, um retângulo de $10\,ua$, um triângulo, um retângulo e um trapézio com a mesma área ($6\,ua$) e um losango de $8\,ua$.

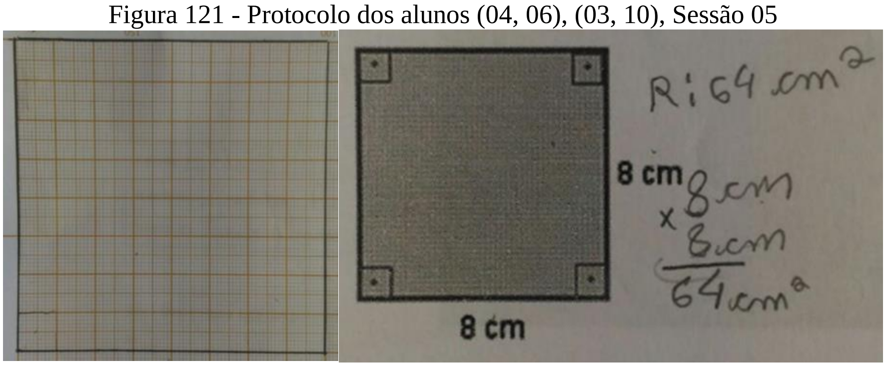
A seguir, apresentamos algumas estratégias que os alunos poderiam mobilizar nestas atividades, com as análises *a priori* e *a posteriori*.

Para a atividade (1)

Item (a)

O quadrado

Figura 121 - Protocolo dos alunos (04, 06), (03, 10), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1*: Utilizando a fórmula algébrica*

Pode-se calcular a área aplicando a fórmula algébrica. Assim: $A = l \times l = 8\ cm \times 8\ cm = 64\ cm^2$.

E_2*: Na malha milimetrada*

Esse quadrado pode ser construído na malha quadriculada com seus lados medindo oito lados de quadradinhos. Neste caso, o cálculo de sua área se resume na contagem de quantos quadradinhos cabem no seu interior.

E_3: No geoplano

Os alunos podem construir no geoplano um quadrado com oito quadradinhos de lado, visualizando que no seu interior existem 64 quadradinhos, concluindo que a área desse quadrado é 64 unidades de área e, como os lados estão em centímetros, a sua área é $64\ cm^2$.

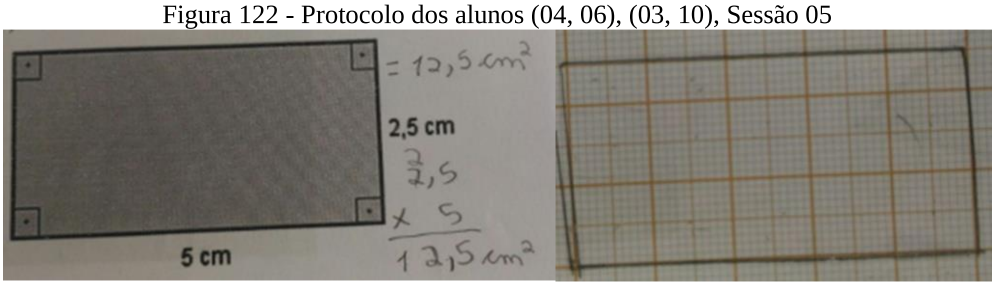
Análise a posteriori

Os alunos não representaram este quadrado no geoplano (E_3), representaram-no na malha milimetrada e calcularam a sua área pela contagem dos quadradinhos do interior e, alguns, pela multiplicação direta na figura de $8\ cm \times 8\ cm = 64\ cm^2$ (E_2). Sem mobilizar o registro algébrico (E_1).

Item (b)

O retângulo

Figura 122 - Protocolo dos alunos (04, 06), (03, 10), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: Utilizando a fórmula algébrica

Aplicando a fórmula algébrica a área é: $A = b \times h = 5\ cm \times 2{,}5\ cm = 12{,}5\ cm^2$.

E_2: Na malha milimetrada

Essas dimensões podem ser representadas na malha quadriculada. A medida envolvendo décimos, assumida como uma das variáveis didáticas, talvez induza os alunos a procedimentos errados de solução, porque neste caso é necessário desconstruir esse quadrado de $1\,cm^2$ de área em dois retângulos de dimensões $1\,cm$ e $0{,}5\,cm$, percebendo que dois deles juntos possuem $1\,cm^2$, visualizando que ao quadriculá-lo de $1\,cm$ em $1\,cm$ ficarão, em seu interior, dez quadradinhos de $1\,cm^2$ de área e mais cinco que possuem $0{,}5\,cm^2$, porque correspondem à metade desse quadrado. E que ao adicioná-los se tem $10\times\,1\,cm^2+5\,\times 0{,}5\,cm^2=10\,cm^2+\,2{,}5\,cm^2=12{,}5\,cm^2$. Portanto, a área deste retângulo é $12{,}5\,cm^2$.

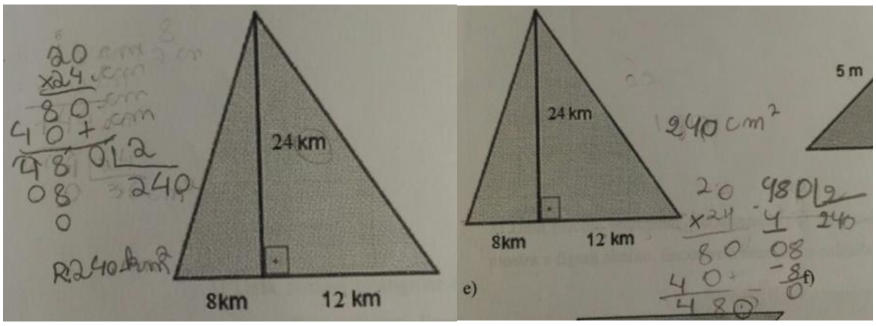
Análise a posteriori

Os alunos neste encontro sabiam implicitamente que para calcular a área de quadrados e retângulos, principalmente pelas representações feitas no geoplano, bastava multiplicar as medidas de seus lados ($5\,cm\times 2{,}5\,cm=12{,}5\,cm^2$) e, muitos, fizeram este tratamento numérico ao lado deste retângulo. Outros, o representaram também na malha milimetrada. Neste caso mobilizando duas estratégias diferentes de resolução. Em muitos protocolos, para todas as figuras, colocaram a dimensão “ao quadrado” $(2D)$ somente na resposta, não representando ao lado da medida do segmento $(1D)$, ou seja, não escrevendo o número e a grandeza utilizada (figura 122). Porém, percebemos pelos tratamentos figurais e numéricos mobilizados e, principalmente, pela apreensão discursiva sobre a figura geométrica que seus raciocínios estavam corretos.

Item (c)

O triângulo

Figura 123 - Protocolo dos alunos (04, 06), (03, 10), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: Aplicando a fórmula algébrica no triângulo de base $20\,km$

Pela fórmula algébrica temos que sua área é: $A = \frac{b \times h}{2} = \frac{20\ km \times 24\ km}{2} = \frac{480\ km^2}{2} = 240\ km^2$.

E_2: Aplicando a fórmula algébrica visualizando os dois triângulos no interior do triângulo maior

A área do triângulo pode ser obtida aplicando a fórmula algébrica dos dois triângulos de base 8 km e base 12 km, com altura de 24 km, adicionando estas áreas.

Assim:

$$A_1 = \frac{b \times h}{2} = \frac{8\ km\ \times 24\ km}{2} = \frac{192\ km^2}{2} = 96\ km^2.$$
$$A_2 = \frac{b \times h}{2} = \frac{12\ km\ \times 24\ km}{2} = \frac{288\ km^2}{2} = 144\ km^2.$$
$$A_{total} = A_1 + A_2 = 96\ km^2 + 144\ km^2 = 240\ km^2.$$

E_3: Visualizando os triângulos como metade de retângulos

Podem-se adicionar traços nos dois triângulos de base $8\ km$ e base $12\ km$, tornando-os metade de retângulos de dimensões $8\ km$ e $24\ km$ e, $12\ km$ e $24\ km$, respectivamente, cujas áreas podem ser calculadas multiplicando essas medidas e dividindo-as por dois, somando-as ao final para chegar a resposta. Realizando os seguintes cálculos:

$A_{retângulo\ 1} = b \times h = 8\ km\ \times 24\ km = \ 192\ km^2$, que dividido por dois dá $96\ km^2$.

$A_{retângulo\ 2} = b \times h = 12\ km\ \times 24\ km = \ 288\ km^2$, que dividido por dois dá $144\ km^2$.

Adicionando essas áreas, tem-se: $96\ km^2 + \ 144\ km^2 = 240\ km^2$.

E_4: Na malha milimetrada

Para representar esse triângulo na malha, deve-se usar uma escala conveniente. Usamos a de 1 cm para cada 2 km, sendo assim 12 km corresponde a 6 cm e 8 km a 4 cm, traçando essas medidas na malha, se a escala for essa.

Visualizando os triângulos de base 6 cm e 4 cm, com altura de 12 cm como a metade de retângulos que possuem 72 cm^2 e 48 cm^2. Portanto a área de cada triângulo é: $\frac{72\ cm^2}{2} = 36\ cm^2$ e $\frac{48\ cm^2}{2} = 24\ cm^2$. Somando essas duas áreas, temos: $36\ cm^2 +$

$24\ cm^2 = 60\ cm^2$. De acordo com a escala, temos que cada $1\ cm^2$ corresponde a $4\ km^2$, sendo assim a área é $4 \times 60\ km^2 = 240\ km^2$.

Outro procedimento que pode ser feito na malha é enquadrar esse triângulo em um retângulo de dimensões $10\ cm$ por $12\ cm$, com área $120\ cm^2$, subtraindo dele as áreas dos dois triângulos que não fazem parte do triângulo cuja área se quer saber. Assim:

$$A_{Triângulo} = 120\ cm^2 - (A_{Triângulo\ 1} + A_{Triângulo\ 2})$$

$$A_{Triângulo} = 120\ cm^2 - (36\ cm^2 + 24\ cm^2) = 60\ cm^2$$

De acordo com a escala utilizada a área é $4 \times 60\ km^2 = 240\ km^2$.

Colocamos essa escala por ser a mais pertinente, os alunos podem fazer uso de outras. A dificuldade neste procedimento é identificar a área correspondente em km^2 para a escala utilizada em cm^2.

Queremos, nesse item, também perceber como os alunos lidam com essa variável didática, as medidas do triângulo em km. No caso, se compreendem que estas medidas são apenas uma representação, sendo impossível representá-las no papel e, também, como as representam, fazendo uso de escala. Bem como, se têm a noção de que $1\ km = 1000\ m$ e a percepção do que é $1\ km^2$, que se trata da medida de uma superfície de um quadrado de $1\ km$ de lado, que pode ser decomposta em outras figuras mantendo a área.

Análise a posteriori

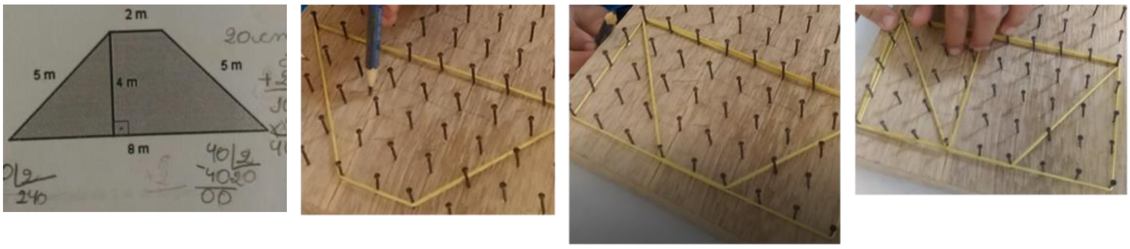
Os alunos mobilizaram a estratégia (E_1). E fizeram este cálculo mais mecanicamente, sabiam, pelos estudos realizados, quais medidas deveriam multiplicar e após, dividi-la por dois para chegar à solução. Não conseguiram representar estas medidas na folha milimetrada. Por essa razão acreditamos ser viável trabalhar inicialmente com medidas que possam ser representadas nestes recursos para que possam representá-las para realizar os tratamentos figurais nas figuras, explorando-as heuristicamente, para descobrir novas estratégias de determinar sua área, bem como compreender a razão de ser da fórmula algébrica.

Item (d)

O trapézio

Neste trapézio colocamos as medidas de todos os lados, que é uma das variáveis didáticas, com o objetivo de compreender como os alunos lidam com esses dados, se identificam quais deles são necessários para aplicar a fórmula algébrica, por exemplo.

Figura 124 - Protocolo dos alunos (04, 06), (03, 10), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: Utilizando a fórmula algébrica

A área do trapézio é: $A = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(8\,m+2\,m)\times 4m}{2} = \frac{10\,m\times 4\,m}{2} = \frac{40\,m^2}{2} = 20\,m^2$

E_2: adicionando traços

É possível adicionar traços neste trapézio, decompondo-o em um retângulo e dois triângulos retângulos congruentes, para calcular a área de cada um e adicioná-las, obtendo a área do trapézio. Assim:

$$A_{trapézio} = A_{retângulo} + 2 \times A_{triângulo} = 8\,m^2 + 2 \times\ 6\,m^2 = 20\,m^2.$$

E_3: Quadriculando as suas dimensões

Na malha milimetrada os alunos podem representar este trapézio usando a escala de $1\,cm$ para cada $1\,m$. Após, adicionar traços neste polígono para contar os quadrados de $1\,cm^2$ de área do seu interior pelo procedimento de decomposição.

E_4: Usando o geoplano

Este trapézio pode ser representado no geoplano ($B = 8\,uc, b = 2\,uc\ e\ h = 4\,uc$) e por contagem dos quadradinhos, quer por decomposição, reconfigurando-o em um retângulo ou determinar a sua área pelo mergulhamento[62]. Neste procedimento o aluno deve ter a percepção que cada unidade de área corresponde a $1\ m^2$ de área.

Análise a posteriori

Os alunos (03, 10) representaram este trapézio no geoplano (E_4). Acompanhe o discurso deles.

> Pesquisadora: Este trapézio é igual ao trapézio da folha (representado no geoplano, figura 124)?
> Aluno 03: Sim!
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluno 03: Porque aqui tem oito metros e cada metro é um quadradinho desse. Daí a gente colocou o elástico aqui ó! E, subiu mais um tanto.
> Pesquisadora: Qual é a área então desse trapézio?
> Aluno 10: Dezoito.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluno 03: Porque a gente contou ó... Hum, dois, três,..., quatorze, e, agora esse aqui é a metade e mais uma metade dá um inteiro. Daí fica quinze, dezesseis, dezessete e dezoito.
> Pesquisadora: É! E usando a fórmula como ficaria? Como você tem certeza que é dezoito? O que você vai fazer agora? (Eles estavam mergulhando o trapézio em um retângulo, figura 124).
> Aluno 03: Eu estou tentando pensar aqui como é que eu vou fazer.
> Pesquisadora: Qual a área desse retângulo?
> Aluno 10: Hum, dois, três, quatro. Hum, dois,..., oito. Quatro vezes oito é trinta e dois (multiplicou as medidas dos lados).
> Pesquisadora: E qual é a área desse pedaço aqui? (O triângulo, figura 124).
> Aluno 03: Hum, dois, três,..., quatro e meio.
> Pesquisadora: Por quê?
> Aluno 03: Porque tem quatro inteiro e mais metade.
> Pesquisadora: Não tem outro jeito de você pensar?
> Aluno 03: Háaaa éé! (Disse mergulhando este triângulo em um retângulo).
> Pesquisadora: Muito bem! Qual é a área desse retângulo?
> Aluno 03: Hum, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito. Hã! Peraí! Tem um jeito mais rápido. Hum, dois, três, quatro. Hum, dois, três. (Contou os quadradinhos dos lados).
> Aluno 10: Doze.
> Pesquisadora: Então, qual é a área desse triângulo?
> Aluno 10: Seis.
> Pesquisadora: E a área desse?
> Aluno 10: Seis.
> Pesquisadora: Quanto é todo ele (o retângulo)?
> Aluno 10: Trinta e dois.
> Pesquisadora: E a área do trapézio?
> Aluno 03: Peraí! Trinta e dois tira seis tira seis...
> Aluno 10: Dá dezoito.
> Pesquisadora: Dezoito? Faz a conta.
> Aluno 03: Peraí! Trinta e dois tira doze... (Fizeram o cálculo). Hã! Peraí! Vai dar vinte.
> Pesquisadora: Então qual é a área do trapézio?
> Aluno 10: Vai dar vinte.

---

[62] Pode-se mergulhar este trapézio em um paralelogramo, sendo ele metade deste quadrilátero. Neste caso, calcula-se a área do paralelogramo a dividindo por dois para obter a área do trapézio.

Neste protocolo é possível perceber por que esses alunos estavam concluindo que a área do trapézio era dezoito, graças às representações distintas mobilizadas (numérica e figural) e que conseguiram calcular corretamente sua área diante dos tratamentos efetuados sobre o trapézio representado no geoplano (mergulhamento, tratamento numérico e figural).

Esses alunos conseguiram determinar a área do trapézio articulando a visualização, o raciocínio, a língua materna e os tratamentos figurais e numéricos sobre as figuras construídas no geoplano. Eles realizaram operações visuais em $2D$, que na maior parte do tempo excluiu as unidades figurais $1D$. Essa foi utilizada para construir o trapézio e os retângulos. Para determinar as áreas esses alunos operaram em $(2D \rightarrow 2D)$. Operações essas que se apoiam na percepção.

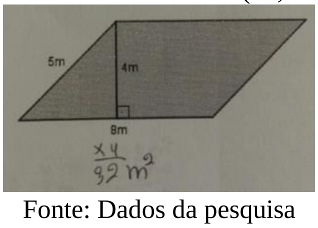
Percebemos neste protocolo que esses alunos foram da apreensão perceptiva e do olhar do botanista a um olhar mais elaborado, o olhar do inventor. Para Duval (2005) isto consiste em aprender a olhar em geometria, pois eles estão neste caminhar aprendendo a realizar os olhares deste percurso para a aprendizagem de áreas por meio do olhar icônico e, principalmente, do não icônico. Esses alunos procuraram no trapézio caminhos para determinar sua área, mergulhando-o em um retângulo, explorando assim a função heurística desse polígono, ou seja, olharam-no de outro modo, possível de aplicar os tratamentos figurais. Essas habilidades heurísticas efetuadas sobre o trapézio, juntamente com as competências numéricas permitiram determinar a área, levando-os assim à aprendizagem deste conteúdo geométrico.

Item (e)

O paralelogramo

A medida $5\ m$ foi colocada neste paralelogramo para verificar como os alunos lidam com esses dados, se compreendem que para calcular a área essa medida não é necessária. E se, ao aplicarem a fórmula algébrica, conseguem identificar a base e a altura do paralelogramo.

Figura 125 - Protocolo dos alunos (05, 07), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: Utilizando a fórmula algébrica

A sua área é: $A = b \times h = 8\,m \times 4\,m = 32\,m^2$.

E_2: Na malha milimetrada

Este paralelogramo pode ser representado na malha milimetrada com as dimensões $8\,cm$ e $4\,cm$. Para, após, por procedimentos de decomposição (um retângulo e dois triângulos congruentes), reconfigurando-o em um retângulo ou mergulhando-o em um retângulo, determinar a sua área.

E_3: No geoplano

O procedimento é semelhante ao da malha milimetrada.

Análise a posteriori

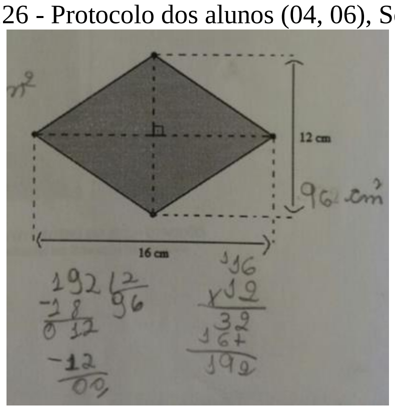
Somente uma dupla determinou esta área corretamente, mobilizando a estratégia (E_1). Os demais multiplicaram $5\,m$ e $8\,m$.

Item (f)

O losango

Os alunos devem identificar as medidas das diagonais do losango que foram colocadas fora da figura.

Figura 126 - Protocolo dos alunos (04, 06), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: Utilizando a fórmula algébrica

A área é: $A = \frac{D \times d}{2} = \frac{16\,cm \times 12\,cm}{2} = \frac{192\,cm^2}{2} = 96\,cm^2$.

E_2: Na malha milimetrada

Para representar esse losango com essas medidas na malha, deve-se olhar para as medidas de suas diagonais. Percebendo que as diagonais, de $16\ cm$ e $12\ cm$, são perpendiculares entre si e que se cruzam em seus pontos médios.

Iniciando a construção desse polígono por suas diagonais, representando essas medidas na malha do seguinte modo: construindo uma diagonal e a outra sendo a mediatriz desse segmento. Para, após, ligar com o auxílio da régua as extremidades destes segmentos, formando o losango.

Nesse losango supomos que os alunos visualizariam quatro triângulos retângulos de base $8\ cm$ e altura $6\ cm$ podendo aplicar a fórmula algébrica da área do triângulo em um deles e multiplicar por quatro obtendo o resultado final, assim: $A_{Losango} = 4 \times A_{Triângulo} = 4 \times \frac{b \times h}{2} = 4 \times \frac{8\ cm \times 6\ cm}{2} = 4 \times \frac{48\ cm^2}{2} = 2 \times 48\ cm^2 = 96\ cm^2$.

Ou, visualizando cada um desses triângulos como sendo a metade de um retângulo de dimensões $8\ cm$ e $6\ cm.$ E, sendo assim, a área de cada triângulo é $24\ cm^2$. Portanto, a área do losango é $4 \times 24\ cm^2 = 96\ cm^2$.

Outro procedimento é decompor heuristicamente esse losango nesses quatro triângulos, compondo um retângulo de dimensões $8\ cm$ e $12\ cm$, ou um retângulo de dimensões $16\ cm$ e $6\ cm$, que possuem $96\ cm^2$ de área.

E_3: No geoplano

Nesse recurso didático os alunos devem proceder de modo análogo ao da malha milimetrada, fazendo uso de uma escala.

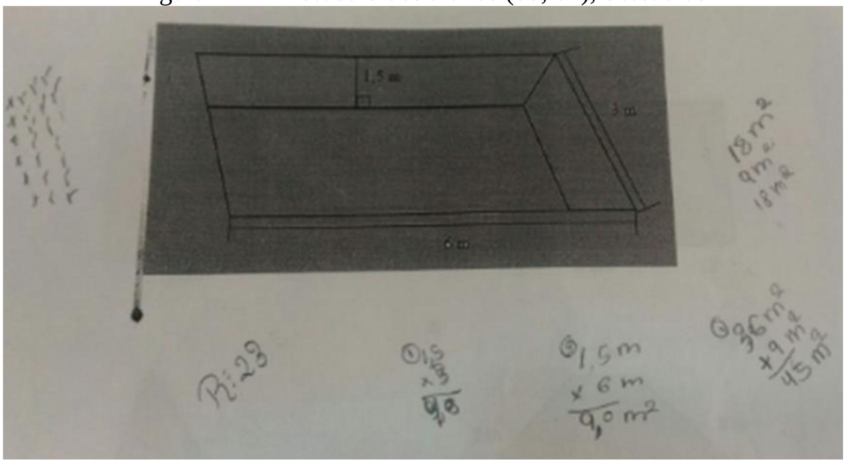
Análise a posteriori

Os alunos mobilizaram a fórmula algébrica (E_1), porém sem o registro algébrico (conforme a figura 126).

Para a atividade (2)

Carlos está construindo uma piscina na sua casa. Ela tem $6\ m$ de comprimento, $3\ m$ de largura e $1{,}5\ m$ de profundidade. A piscina está em fase de acabamento, falta somente assentar os azulejos. Carlos irá comprar caixas de azulejos *que cobre* $2\,m^2$ *de área cada uma, quantas caixas de azulejos terá de comprar, no mínimo, para cobrir o fundo e as paredes laterais da piscina?*

Figura 127 - Protocolo dos alunos (05, 07), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

Para resolvê-la é necessário desconstruir esta piscina, tridimensional, em superfícies planas, bidimensionais, no caso cinco retângulos, dois de dimensões $6\,m$ e $1{,}5\,m$, dois de dimensões $3\,m$ e $1{,}5\,m$ e um com as dimensões $6\,m$ e $3\,m$. Visualizando também o unidimensional, que são as medidas dos lados desses retângulos. Calculando a área de cada retângulo e adicionando-as, obtendo a área que deve ser azulejada. Que deve ser dividida por dois porque cada caixa de azulejo cobre $2m^2$ de área, chegando à resposta do problema.

Pretendemos com este item verificar quais e como os conhecimentos são mobilizados pelos alunos. Se conseguem ter a percepção de que neste exercício é necessário desconstruir a superfície interna dessa piscina em cinco retângulos.

E_1*: Utilizando a fórmula algébrica*

O retângulo de dimensões $6\,m$ e $1{,}5\,m$ tem área: $A = b \times h = 6\,m \times 1{,}5\,m = 9\,m^2$.

O retângulo de dimensões $3\,m$ e $1{,}5\,m$ tem área: $A = b \times h = 3\,m \times 1{,}5\,m = 4{,}5\,m^2$.

O retângulo de dimensões $6\,m$ e $3\,m$ tem área: $A = b \times h = 6\,m \times 3\,m = 18\,m^2$.

Como são dois retângulos do primeiro, dois do segundo e um do terceiro, a área que deve ser azulejada é: $A_{Azulejada} = 2 \times 9\ m^2 + 2 \times 4{,}5\ m^2 + 18\ m^2 = 18\ m^2 + 9\ m^2 + 18\ m^2 = 45\ m^2$.

Como cada caixa de azulejo cobre $2\ m^2$ temos que: $\frac{45\ m^2}{2\ m^2} = 22{,}5$, ou seja, devem ser compradas, no mínimo, 23 caixas de azulejos.

E_2*: Na malha milimetrada*

As medidas desses cinco retângulos não podem ser representadas na malha, com isso, deve-se usar uma escala, a mais conveniente é fazer corresponder a cada 1 cm no papel a $1\ m$ do real. Calculam-se assim as respectivas áreas e as adicionam. Em seguida, divide-as por dois.

Análise a posteriori

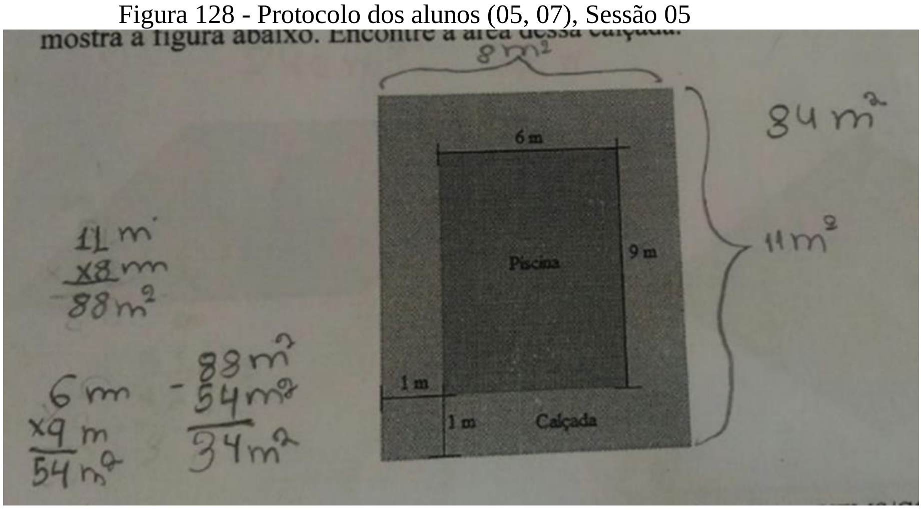
Nesta atividade, os alunos tiveram dificuldades em visualizar a representação bidimensional da piscina, que é tridimensional, e em seguida mudar o olhar para as figuras retangulares bidimensionais com as respectivas medidas de seus lados. Esse procedimento exigiu dos alunos os olhares ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D$).

A estratégia mobilizada foi usar a fórmula algébrica (E_1), multiplicando as medidas dos lados dos retângulos, sem o registro algébrico. No protocolo da figura 127 os alunos fazem uso dos “risquinhos” ou “pauzinhos” para identificar quantas caixas de azulejos serão necessárias comprar.

Para a atividade (3)

Uma piscina retangular é contornada por uma calçada de $1\ m$ *de largura, como mostra a figura abaixo. Encontre a área dessa calçada.*

Figura 128 - Protocolo dos alunos (05, 07), Sessão 05



Fonte: Dados da pesquisa

E_1*: Utilizando a fórmula algébrica*

Pode-se obter a área desta calçada calculando a área do retângulo de dimensões $8m$ e $11\ m$ (A_1), subtraindo dele a área da piscina, o retângulo de dimensões $6\ m$ e $9\ m$ (A_2). Assim:

$A_{Calçada} = A_1 - A_2 = 88\ m^2 - 54\ m^2 = 34\ m^2$

E_2*: Na malha milimetrada*

A piscina pode ser representada na malha com as dimensões $9\ cm$ e $6\ cm$, fazendo corresponder $1\ cm$ para cada $1\ m$, contornando-a com a calçada, com quadrados de $1\ cm^2$, que pode ser visualizado como um retângulo de $8\ cm$ por $11\ cm$. Em seguida, visualizar nesta calçada 34 quadradinhos de $1\ cm^2$ de área cada um. E, deste modo, concluir que a área da calçada $34\ m^2$.

E_3*: No geoplano*

Procede-se de modo análogo ao da malha. Fazendo corresponder a cada quadradinho do geoplano a $1\ m^2$ de área.

Análise a posteriori

A estratégia mobilizada foi a (E_1), conforme a figura 128.

5.5.2 Considerações sobre a quinta sessão

O emprego adequado das fórmulas algébricas, estratégia mais mobilizada nesta sessão, requereu dos alunos o olhar botânico sobre os polígonos $(2D)$ para identificá-los a fim de utilizar a fórmula algébrica apropriada. Em seguida, eles devem usar a apreensão perceptiva para identificar as dimensões $(1D)$.

Essa desconstrução dimensional $(2D \rightarrow 1D)$ é, para Duval (2005), uma revolução cognitiva, pois requer passar da visualização icônica, comum a todos os domínios do conhecimento, à visualização não icônica, específica da matemática. Esse processo "é uma abordagem que vai contra todos os processos de organização e de reconhecimento perceptivo das formas" (DUVAL, 2005, p. 16, tradução nossa).

Essa desconstrução para aplicar as fórmulas algébricas de áreas foi difícil para os alunos, porque a primeira impressão que se tem sobre os polígonos, a apreensão perceptiva sobre as unidades figurais $2D$ é imediata, quer dizer, primeiramente se vê o polígono e depois o aluno deve olhar para as unidades figurais $1D$, segmentos que não são destacáveis num primeiro reconhecimento visual, pois a dimensão superior $2D$ sempre se impõe sobre as $1D$. Neste caso, é preciso olhar elementos em $1D$ nos polígonos e permanecer em $2D$ para determinar sua área.

No paralelogramo da atividade 1) alguns alunos aplicaram a fórmula adequada, porém multiplicaram as medidas dos lados ($5\,m$ e $8\,m$) e não o produto da base pela altura ($8\,m$ e $4\,m$). Por esta razão acreditamos ser viável trabalhar mais com questões deste tipo, fornecendo todas as medidas, contudo, medidas menores, que podem ser representadas facilmente no geoplano e na malha para que possam nestas representações verificar a área. Percebemos que as medidas em metros os desestimularam, pois, sabiam que não podiam representá-las nestes recursos. Identificamos também que o uso de escala não contribuiu, nesta etapa de escolaridade, para a aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros.

Os alunos também tiveram muitas dúvidas nas representações m e m^2, cm e cm^2 e km e km^2. Diante dessas diferentes unidades de medida eles não sabiam quais deveriam utilizar. Na maioria das vezes eles fizeram os cálculos corretamente, porém, em muitas respostas não colocaram o expoente "dois" sobre a unidade de medida que estavam considerando. Mesmo explicando a diferença entre o unidimensional $(1D)$ e o bidimensional $(2D)$ em figuras representadas nestes recursos (geoplano, malha, papel pardo) eles permaneceram com dúvidas.

5.6 Sessão 06

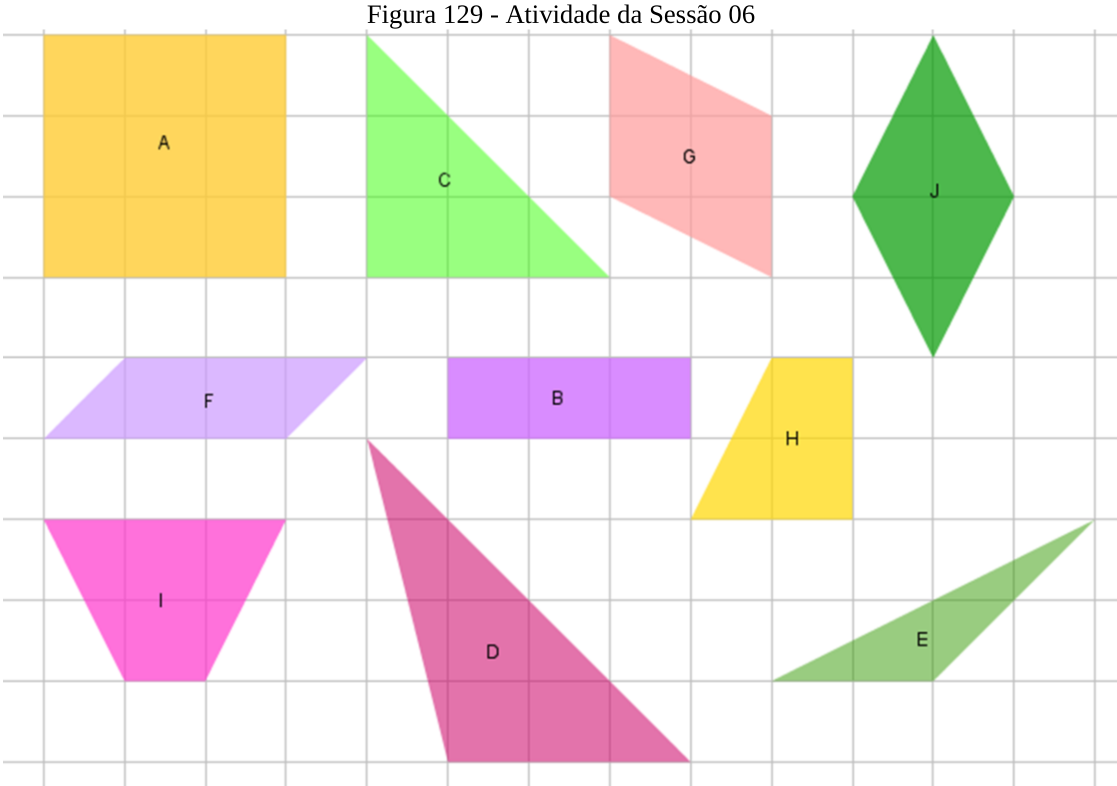
Esta sessão é composta por uma atividade, em que se deve calcular a área dos triângulos e quadriláteros de dois modos diferentes, com e sem as fórmulas algébricas.

5.6.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

O enunciado desta atividade foi:

Calcule a área dos triângulos e quadriláteros abaixo de duas maneiras diferentes, uma fazendo uso de fórmulas e outra sem utilizá-las.

Figura 129 - Atividade da Sessão 06



Fonte: Dados da pesquisa

A variável didática desta atividade é o tipo das figuras (diferentes tipos de triângulos e quadriláteros) que permitem calcular as suas áreas com e sem o uso da fórmula algébrica. O objetivo é utilizar mais de um registro para validar a resposta, encontrando a área de modos diferentes, podendo usar também o geoplano e a malha quadriculada. Temos como objetivo também explorar mais as noções abordadas anteriormente.

Detalharemos a seguir como foi a experimentação desta sessão.

Experimentação

Este encontro ocorreu no dia 02/08/2017 e contou com a participação de nove alunos, quatro do quinto ano e cinco do sexto ano do Ensino Fundamental que formaram três duplas e um trio. Iniciamos os lembrando da finalidade de nossos encontros e relembrando os procedimentos efetuados, por eles, para calcular áreas de: triângulos, quadrados, retângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.

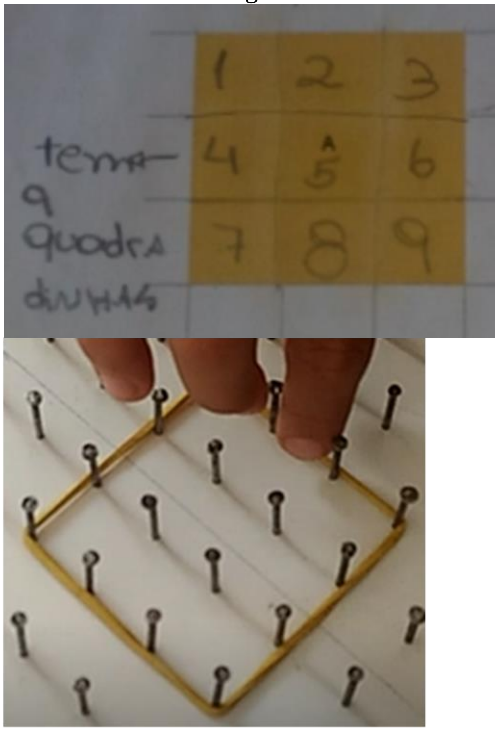
Questionamos os alunos do quinto ano do Ensino Fundamental quanto às fórmulas algébricas para o cálculo de áreas e eles as lembraram porque tinham acabado de estudar este conteúdo em sala de aula. Apesar de a apostila não trazer as fórmulas, a professora havia proposto atividades para que eles determinassem a área de figuras planas por meio das fórmulas. Estes alunos ajudaram os do sexto ano, relembrando com eles as respectivas fórmulas.

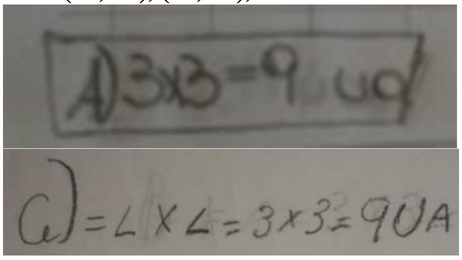
Após esta breve revisão, iniciamos as atividades. Os alunos, com exceção de um grupo constituído por três alunas, terminaram em uma hora e meia, o que não havia acontecido nos encontros anteriores. Percebemos que os alunos tiveram mais dificuldades em calcular a área usando a fórmula algébrica e que todos os grupos representaram as figuras no geoplano, calculando nesse recurso a sua área por fora e por dentro, mobilizando procedimentos de decomposição e reconfiguração.

Apresentaremos a seguir as possíveis estratégias juntamente com a análise *a priori* e *a posteriori*.

O quadrado A

Figura 130 - Protocolo das alunas (07, 09), (05, 06), Sessão 06





Pesquisadora: Como vocês fizeram para a área deste quadrado?
Aluna 06: Eu olhei quantos quadradinhos tinha aqui (folha) e daí eu fiz ele aqui (no geoplano). Eu coloquei três quadradinhos de cada lado. Daí contei, deu nove, e, três vezes três é nove. Aí, eu coloquei aqui (na folha) lado vezes lado porque eu tive que fazer três vezes três que deu nove, nove unidades de área.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por contagem*

Esse quadrado possui nove quadrados no seu interior, logo a sua área é 9 ua.

Análise a posteriori

Todos os alunos determinaram primeiramente a área deste quadrado com essa estratégia. Em seguida, com a fórmula algébrica (figura 130). Observa-se na apreensão discursiva da aluna 06 a mobilização implícita da fórmula algébrica para a área do quadrado. Esse grupo, e outros, perceberam que se pode determinar a área deste quadrado pela contagem dos quadradinhos do seu interior ou efetuando a multiplicação "três vezes três".

Para representar este quadrado no geoplano, por seu lado ter 3 uc, os alunos construíram um quadrado com três preguinhos na lateral, resultando em um quadrado de 4 ua. Como sabiam que o quadrado precisava ter nove quadrados em seu interior o construíram por tentativa, percebendo que o lado desse polígono é constituído por quatro pregos, deixando-os um pouco confusos essa construção.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

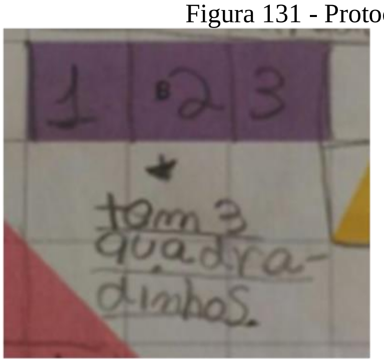
Como o lado desse quadrado tem $3\,uc$, a sua área é: $A_{Quadrado\ A} = l \times l = 3\,uc \times 3\,uc = 9\,ua$ (figura 130).

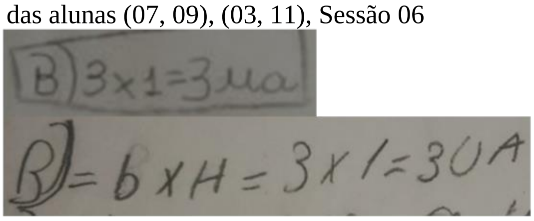
Análise a posteriori

Somente dois grupos mobilizaram o registro algébrico para o cálculo desta área (figura 130).

O retângulo B

Figura 131 - Protocolo das alunas (07, 09), (03, 11), Sessão 06





Pesquisadora: Como vocês determinaram essas áreas? Explica.
Aluna 10: Aí a B (retângulo B) a gente nem precisou fazer nada! Não precisou fazer nenhuma conta. A gente só viu que tinha três. Aí, na fórmula a gente só fez base, que é três, vezes a altura que é um, que deu três.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por contagem*

Como o retângulo possui três quadrados a sua área é $3\,ua$.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

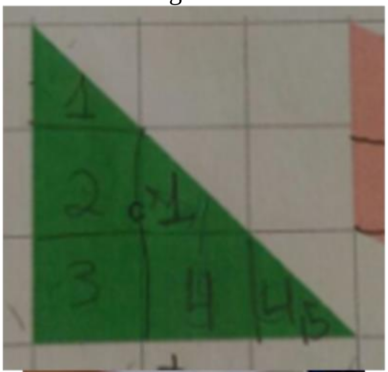
A base deste retângulo possui $3\,uc$ e a altura $1\,uc$, então a sua área é: $A_{Retângulo\ B} = b \times h = 3\,uc \times 1\,uc = 3\,ua$.

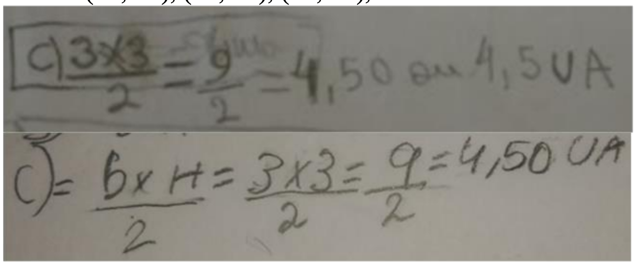
Análise a posteriori do triângulo B

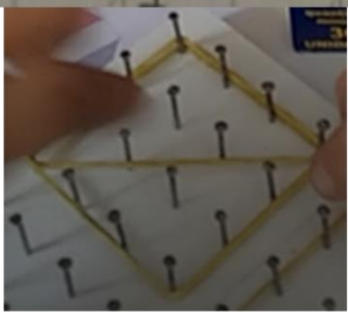
O quadrado A e o retângulo B foram as figuras que os alunos calcularam a área primeiro. No protocolo da figura 131, do aluno 10, percebemos que a apreensão perceptiva comandou os tratamentos numéricos para a determinação desta área. Não sendo necessárias outras representações deste retângulo. Outro grupo, por contagem, foi enumerando a quantidade de quadradinhos sobre a figura e registrando com numerais.

O triângulo C

Figura 132 - Protocolo das alunas (05, 06), (07, 09), (03, 11), Sessão 06







Pesquisadora: Como vocês fizeram para encontrar a área deste triângulo?
Aluna 10: A gente usou o geoplano também! Colocou um quadrado em volta dele (Quadrado A, no geoplano à esquerda). E daí, contou quantos de área ele tinha, um dois, três,... Que deu nove. Então a gente dividiu nove por dois que deu nove vírgula cinquenta.

Aluno 01: A gente fez o quadrado inteiro e cortou ele no meio que deu quatro vírgula cinquenta!

Pesquisadora: E vocês fizeram como?
Aluna 06: A gente aproveitou o quadrado que tinha (quadrado A). Se aqui tem nove (no geoplano), a metade de nove é quatro e meio, daí, a área do triângulo é quatro e meio. Daí aqui (fórmula algébrica na folha) eu fiz três vezes três dividido por dois que deu nove, dividido por dois, que deu quatro e meio unidades de área.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por contagem*

Esse triângulo possui três quadradinhos e três metades desses quadradinhos que juntos formam quatro quadradinhos e meio. Logo a sua área é $4{,}5\ ua$.

Análise a posteriori

A dupla (07, 09) contou os quadradinhos do interior deste triângulo, registrando com os numerais de 1 a 4,5.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

A base e a altura desse triângulo possuem a medida de $3\,uc$, aplicando a fórmula algébrica temos que: $A_{Triângulo\ C} = \frac{b\times h}{2} = \frac{3\ uc\times 3\ uc}{2} = \frac{9\ ua}{2} = 4{,}5\ ua$.

Análise a posteriori

Nos protocolos aparecem $4{,}50 = 4{,}5$ porque os alunos estavam com dificuldades em dividir nove por dois, daí, começaram a pensar em dinheiro, nove reais para duas pessoas que dá R$4,50 para cada uma, ou seja, a área do triângulo é $4{,}5\ ua$.

E_3: *Contornando-o por um quadrado*

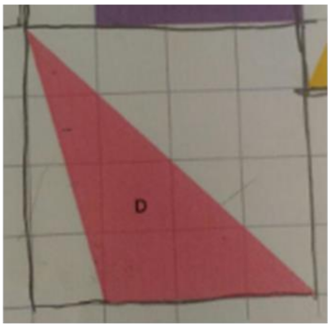
Esse triângulo é a metade do quadrado A, logo a sua área é a metade da área desse quadrado de 9 ua. Portanto sua área é $4{,}5\ ua$.

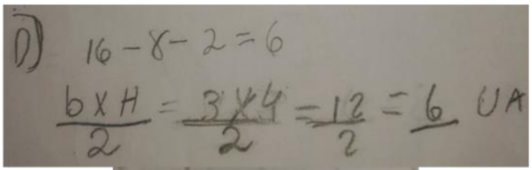
Análise a posteriori

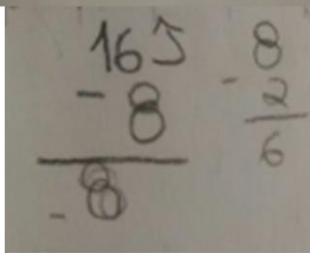
Alguns grupos mobilizaram esta estratégia, perceberam que este triângulo é a metade do quadrado A, logo sua área é a metade de nove. No entanto, chegaram a esta conclusão diante da representação deste triângulo no geoplano, contornando-o por um quadrado e visualizando que dentro deste cabem dois triângulos C. Percebemos que esta representação favoreceu os tratamentos numéricos efetuados entre eles, assim como o porquê se divide por dois. Veja:

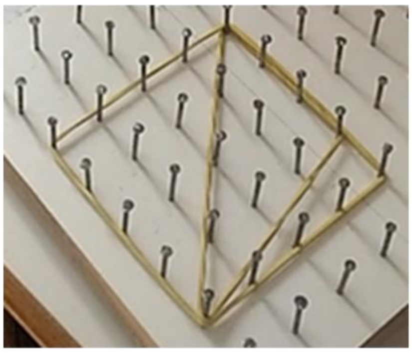
O triângulo D

Figura 133 - Protocolo das alunas (05, 06), (03, 11), (07, 09), Sessão 06









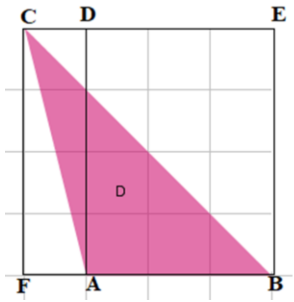
Pesquisadora: Como vocês fizeram para encontrar a área deste?
Aluna 10: O triângulo D foi assim: a gente pegou três que é de base e quatro que é de altura e dividiu por dois, que deu seis.

Professora do quinto ano: E vocês fizeram como aqui?
Aluna 03: A gente montou ele aqui (no geoplano) e fez um quadrado em volta dele. Então a gente pegou esse triângulo e viu quanto ele valia. Ele é a metade (metade do quadrado de área dezesseis), então ele vale oito. Esse daqui (o outro triângulo de base quatro e altura um) a gente somou e ele deu dois. Daí ele deu seis (triângulo D) porque de dezesseis a gente tirou oito e tirou dois que deu seis. Então a área desse daqui é seis unidade de área (triângulo D).
Professora do quinto ano: E para a fórmula vocês fizeram como?
Aluno 11: A gente olhou aqui que esse quadrado inteiro que deu dezesseis, daí a gente tirou essa metade que ficou oito, daí a gente tirou mais dois que deu seis. Daí a gente montou base vezes a altura que deu três vezes quatro dividido por dois que dá doze dividido por dois que dá seis unidades de área.

E_1: *Contornando-o por um quadrado*

O triângulo D (ΔABC) pode ser contornado pelo quadrado BECF conforme a figura 134.

Figura 134 - Mergulhar o triângulo em um quadrado



Fonte: Dados da pesquisa

A área do triângulo D nesse procedimento é obtida subtraindo da área do quadrado as áreas dos triângulos AFC e BEC, assim:

$$A_{Triângulo\ D} = A_{Quadrado\ BECF} - \left(A_{Triângulo\ AFC} + A_{Triângulo\ BEC}\right)$$
$$= 16\ ua - (2\ ua + 8\ ua) = 6\ ua$$

Observe que: O triângulo AFC foi visualizado como a metade de um retângulo de 4 ua. E o triângulo BEC foi visualizado como a metade da área de um quadrado de 16 ua.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

Considerando como base o segmento AB temos como altura o segmento CF (que é externa ao triângulo D), aplicando a fórmula temos:

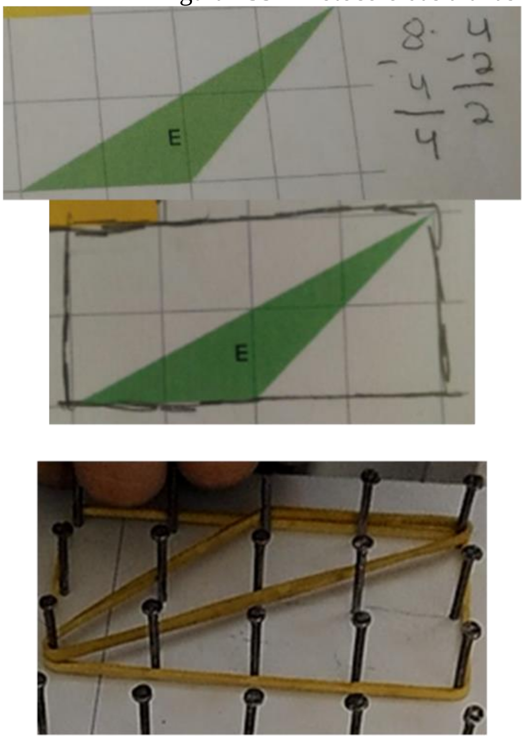
$$A_{Triângulo\ D} = \frac{b \times h}{2} = \frac{3\ uc \times 4\ uc}{2} = \frac{12\ ua}{2} = 6\ ua.$$

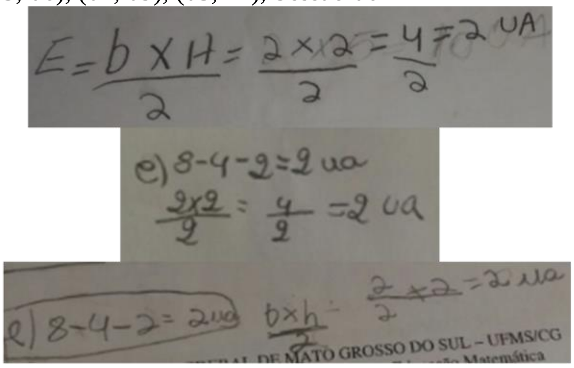
Análise a posteriori

Os alunos representaram primeiramente este triângulo no geoplano e em seguida começaram a realizar os tratamentos figurais nesta representação. Percebendo que a contagem dos quadradinhos por dentro não era suficiente, por isso, o mergulharam num quadrado (figura 133) retirando deste as áreas que não fazem parte do triângulo D. Em seguida, mobilizaram as fórmulas, sabendo que o resultado deste cálculo tinha que ser seis. A representação no geoplano contribuiu para que identificassem a base e a altura deste triângulo, pois sabiam que a altura relativa à base 3 uc é 4 uc, porque sobem quatro quadradinhos. Esta altura é externa ao triângulo.

O triângulo E

Figura 135 - Protocolo das alunas (05, 06), (07, 09), (03, 11), Sessão 06





Pesquisadora: Como vocês encontraram esta área?
Aluna 06: Pra gente poder fazer ele a gente pegou um quadrado...
Aluna 05: Um retângulo.
Aluna 06: É um retângulo, com duas unidades e aqui quatro (as medidas dos lados do retângulo, representado no geoplano à esquerda). Daí a gente pegou e dividiu ele no meio. Aqui tem oito quadrados (no retângulo) e daí oito dividido por dois dá quatro. Aí como aqui sobrou esse pedacinho aqui a gente fez menos dois porque ele vale dois, porque ele tem um quadrado e mais esses dois. Que deu dois. Daí ele tem duas unidades de área (área do triângulo E).
Pesquisadora: E usando a fórmula? Como vocês fizeram?
Aluna 06: Há... Usando a fórmula a gente fez dois vezes dois dividido por dois que ficou igual a quatro, dividido por dois, que deu igual a duas unidades de área.

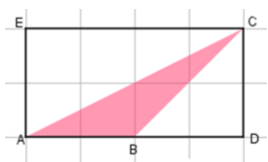
Aluno03: É oito menos quatro, menos dois, que deu dois.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Contornando-o por um retângulo*

O triângulo E pode ser contornado por um retângulo. Assim:

Figura 136 - Mergulhar o triângulo em um retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Obtém-se a sua área subtraindo da área do retângulo as áreas dos triângulos AEC e BDC. Assim:

$$A_{Triângulo\ E} = A_{Retângulo\ ADCE} - (A_{Triângulo\ AEC} + A_{Triângulo\ BDC})$$

$$A_{Triângulo\ E} = 8\ ua - (4\ ua + 2\ ua) = 8\ ua - 6\ ua = 2\ ua.$$

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

Considerando como base o segmento AB, sua altura relativa é externa ao triângulo, é o segmento CD, logo, aplicando a fórmula temos:

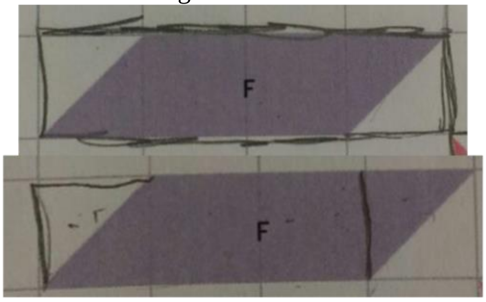
$$A_{Triângulo\ E} = \frac{b \times h}{2} = \frac{2\ uc \times 2\ uc}{2} = \frac{4\ ua}{2} = 2\ ua.$$

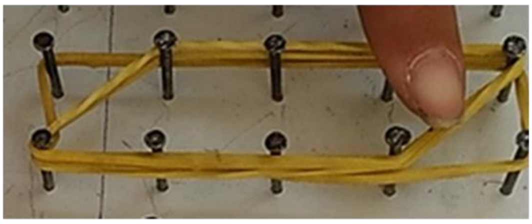
Análise a posteriori

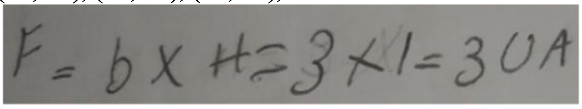
Primeiro os alunos determinaram esta área contornando o triângulo por um retângulo e retirando deste as áreas que não fazem parte do triângulo E, o que pode ser visto nos tratamentos figurais e numéricos realizados sobre a figura (figura 135). Em seguida mobilizaram a estratégia com a fórmula algébrica. Neste protocolo, na apreensão discursiva das alunas (05, 06) realizada sobre os tratamentos figurais e numéricos sobre o triângulo E constatamos uma preocupação em nomear corretamente a figura, é um retângulo e não um quadrado, olhar botânico. Percebemos que não somente elas, mas todos estavam mais cautelosos e preocupados em nomear corretamente as figuras. Quando não sabiam os nomes, principalmente dos trapézios, chamavam uma das professoras presentes e questionavam: “Como é o nome dessa figura”. Acreditamos que a possibilidade de construir figuras no geoplano despertou esse interesse.

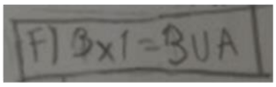
O paralelogramo F

Figura 137 - Protocolo das alunas (03, 11), (05, 06), (07, 09), Sessão 06









Pesquisadora: Como vocês fizeram aqui?
Aluna 10: A gente tirou essa parte e percebeu que essa parte é metade dessa. Aí, pegou essa parte e colocou aqui e ficou com três, e daí, fez base vezes a altura, (3×1), que deu três (reconfiguraram o paralelogramo em um retângulo, figura acima à esquerda e aplicaram a fórmula algébrica neste retângulo)

Pesquisadora: E o paralelogramo F (pergunta para a dupla (05, 06))?
Aluna 05: Aqui a gente pegou e fez um retângulo (representado no geoplano à esquerda, mergulhou o paralelogramo em um retângulo). Aí dentro dessa forma (o paralelogramo F) têm três unidades de área e o retângulo inteiro tem quatro. Aí a gente pegou esse que tá aqui dentro que têm três, porque quatro menos um dá três (a área do retângulo menos a área dos dois triângulos resulta na área do paralelogramo).
Pesquisadora: E usando a fórmula?
Aluna 05: A gente pegou três vezes um que dá três!

Aluno 03: Aqui é muito fácil é só contar, um dois e três. Ele tem três unidades de área.
Pesquisadora: E usando a fórmula?
Aluno 03: É só fazer três vezes um que dá três! Três unidades de área.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por contagem*

Esse Paralelogramo possui dois quadradinhos e duas metades dele em seu interior, totalizando três quadradinhos. Portanto a sua área é 3 ua.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

Como a base é 3 uc e a altura é 1 uc temos que: $A_{Paralelogramo\ F} = b \times h = 3\ uc \times 1\ uc = 3\ ua$.

E_3: *Por decomposição*

Esse paralelogramo pode ser decomposto em um trapézio e um triângulo, formando um retângulo com área equivalente.

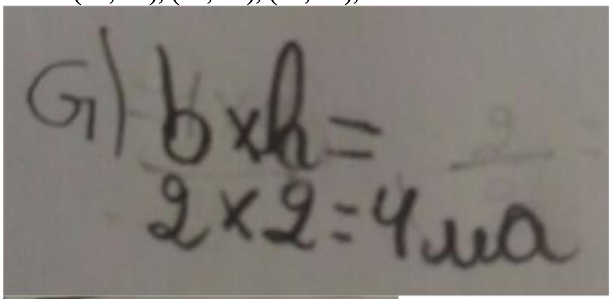
Sendo assim a área do paralelogramo é $3\,ua$ porque é equivalente a do retângulo.

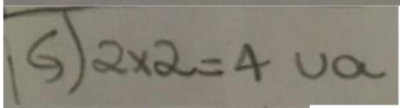
Análise a posteriori

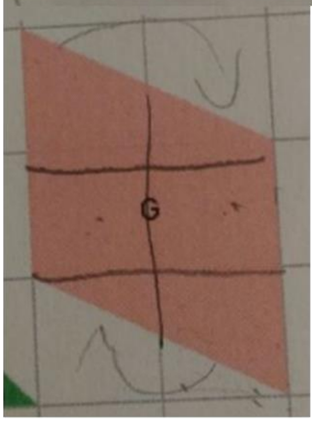
Os alunos sabiam que este paralelogramo tinha $3\,ua$ (E_1). Entretanto, alguns adicionaram traços a ele, um grupo o reconfigurou em um retângulo de área equivalente (E_3) e outro o contornou por um retângulo de área $4\,ua$ retirando as áreas que não faziam parte dele $(0{,}5\,ua + 0{,}5\,ua = 1\,ua)$, o que pode ser visto na figura 137. A dupla (05, 06) determinou esta área por dentro e por fora e ainda, mobilizando a fórmula algébrica, o quê contribui para a aprendizagem geométrica de área de figuras planas e com o objetivo de nossa pesquisa que é investigar aprendizagem de áreas numa perspectiva das representações semióticas.

O paralelogramo G

Figura 138 - Protocolo das alunas (05, 06), (01, 10), (07, 09), Sessão 06







Pesquisadora: Como vocês fizeram esse paralelogramo?
Aluna 10: Eu olhei quantos quadradinhos tinha aqui (folha) e daí ... A gente fez a mesma coisa (que o paralelogramo F, reconfigurou-o num quadrado-(primeira figura acima à esquerda). A gente tirou essa parte e colocou ela aqui. Aí a gente contou os quadrados e multiplicou eles, dois vezes dois quatro! (Aplicaram a fórmula algébrica no quadrado).

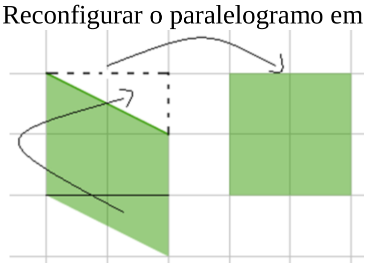
Aluna 06: Para o paralelogramo G a gente fez um quadrado... A gente fez um retângulo com seis unidades de área (paralelogramo representado no geoplano à esquerda). Daí seis menos dois, dá quatro.
Pesquisadora: E usando a fórmula?
Aluna 06: Daí a gente fez base vezes a altura, a base é dois e a altura também é dois, que ficou igual a quatro unidades de área.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Decompondo-o num trapézio e num triângulo*

Esse paralelogramo pode ser decomposto em um triângulo e um trapézio, compondo um quadrado como na figura a seguir.

Figura 139 - Reconfigurar o paralelogramo em um quadrado



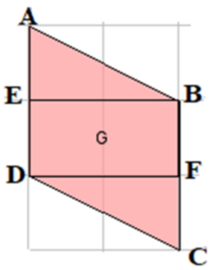
Fonte: Dados da pesquisa

Logo área do paralelogramo é 4 ua porque é equivalente a do quadrado.

E_2: *Decompondo-o em um retângulo e dois triângulos*

A decomposição do paralelogramo G fica assim:

Figura 140 - Decomposição do paralelogramo



Fonte: Dados da pesquisa

A área do paralelogramo G é a soma dessas áreas. Repare que os triângulos ABE e CDF são congruentes e metades de retângulos de $2\,ua$, logo, possuem $1\,ua$. Portanto, a área do paralelogramo G é:

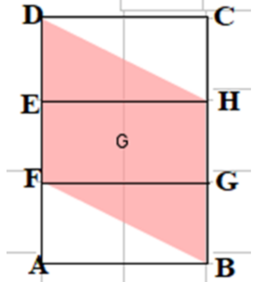
$$A_{Paralelogramo\ G} = A_{Retângulo\ DEBF} + A_{Triângulo\ ABE} + A_{Triângulo\ CDF}$$

$$A_{Paralelogramo\ G} = 2\,ua + 1\,ua + 1\,ua = 4\,ua.$$

E_3: *Envolver o paralelogramo G por um retângulo*

Nesse procedimento envolve o paralelogramo G por um retângulo como na figura abaixo.

Figura 141 - Mergulhar o paralelogramo em um retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

A área do paralelogramo G é obtida retirando do retângulo as áreas dos triângulos que não fazem parte do paralelogramo. Assim;

$$A_{Paralelogramo\ G} = A_{Retângulo\ ABCD} - (A_{triângulo\ ABF} + A_{Triângulo\ CDH})$$

$$A_{Paralelogramo\ G} = 6\ ua - (1\ ua + 1\ ua) = 4\ ua.$$

Os triângulos possuem 1 ua porque são metades de retângulos de 2 ua.

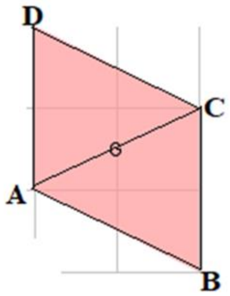
E_4: *Usando a fórmula algébrica*

Como a base e a altura desse paralelogramo possuem a mesma medida de 2 uc então aplicando a fórmula temos que: $A_{Paralelogramo} = b \times h = 2\ uc \times 2\ uc = 4\ ua$.

E_5: *Decompondo-o em dois triângulos*

Decompondo o paralelogramo G em dois triângulos congruentes, os triângulos ABC e o DCA, como na figura 142.

Figura 142 - Decomposição do paralelogramo



Fonte: Dados da pesquisa

A área do paralelogramo G é obtida somando as áreas desses dois triângulos, assim:

$$A_{Paralelogramo\ G} = A_{Triângulo\ ABC} + A_{Triângulo\ DCA} = 2\ ua + 2\ ua = 4\ ua.$$

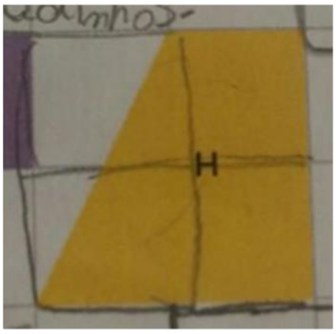
Pode-se obter a área desses triângulos aplicando a fórmula algébrica, visto que eles possuem 2 uc de base e 2 uc de altura. Ou, percebendo que cada um deles pode ser dividido ao meio formando dois outros triângulos que possuem 1 ua cada, concluindo que cada triângulo possui 2 ua.

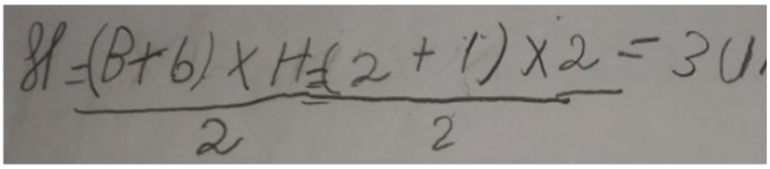
Análise a posteriori

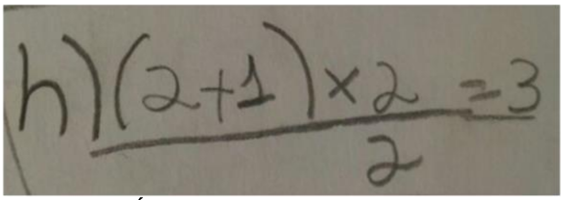
Nas representações (figura 138) os alunos reconfiguraram o paralelogramo G em um quadrado e aplicaram a fórmula algébrica neste. Outros o mergulharam em um retângulo no geoplano.

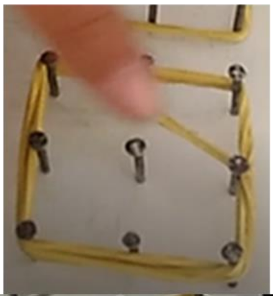
O trapézio H

Figura 143 - Protocolo das alunas (03, 11), (07, 09), (05, 06), Sessão 06









Aluna 06: Ó aqui é quatro (a área do quadrado representado no geoplano à esquerda). Daí, quatro menos um é três. E usando a fórmula a gente pegou as bases e somou que é três, vezes a lateral que é a altura, dois, que dá seis, que dividido por dois dá três.

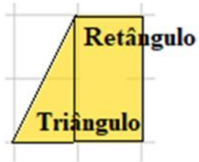
Aluna 03: A H foi meio difícil...
Pesquisadora: Quantos quadradinhos têm no H?
Aluno 03: Hã... Tem três.
Pesquisadora: Por que três?
Aluno 03: Porque esse daqui é metade desse (representação à esquerda no geoplano, decompuseram o trapézio em dois quadrados e um triângulo que corresponde à metade da área de um retângulo de $2ua$). E daí, dois mais um dá três.
Pesquisadora: E usando a fórmula algébrica?
Aluno 03: A gente fez a base maior, mais a base menor, vezes a altura, e, dividiu por dois. A altura é dois, daí a gente fez dois mais um que deu três, três vezes a altura que é dois dá seis, seis dividido por dois dá três unidades de área.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por decomposição*

Esse trapézio pode ser decomposto em um retângulo de 2 ua e um triângulo de 1 ua (figura 144). Logo a sua área é a soma dessas áreas, totalizando 3 ua.

Figura 144 - Decomposição do trapézio



Fonte: Dados da pesquisa

O triângulo obtido nessa decomposição possui 1 ua porque é a metade de um retângulo de 2 ua.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

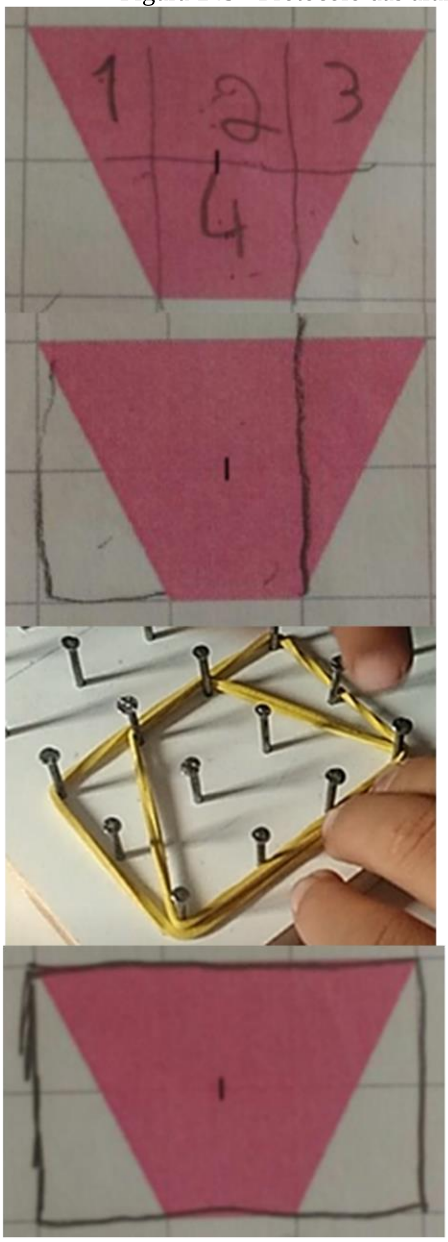
Como $B = 2\,uc, b = 1\,uc$ e $h = 2\,uc$ temos que: $A_{Trapézio\ H} = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(2\,uc+1\,uc)\times 2uc}{c} = \frac{6\,ua}{2} = 3\,ua.$

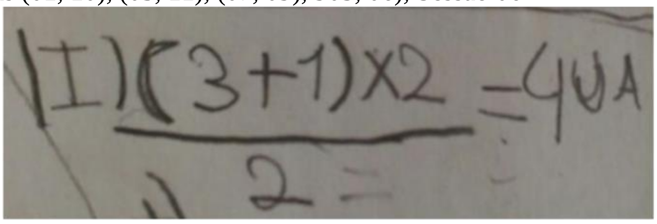
Análise a posteriori

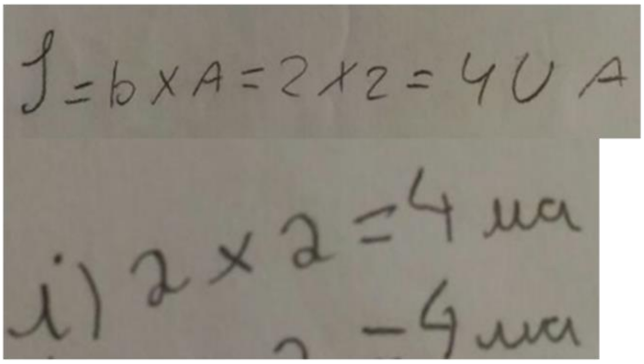
As duplas (07, 09), (01, 10) e (05, 06) contornaram este trapézio com um quadrado, retirando dele a área do triângulo que não faz parte do *trapézio H*, o que não previmos. E outros, determinaram a área por dentro. Assim:

O trapézio I

Figura 145 - Protocolo das alunas (01, 10), (03, 11), (07, 09), 905, 06), Sessão 06







Aluna 06: Aqui a gente fez a base maior, mais a base menor, que no caso é três na base maior e um na base menor, que dá quatro. Vezes a altura que é dois dá oito. E oito dividido por dois, dá quatro unidades de área. E sem a fórmula a gente fez seis menos dois que deu quatro também (a área do retângulo menos a área dos triângulos representado no geoplano à esquerda).

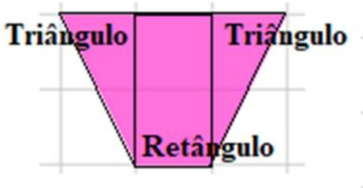
Aluna 03: O trapézio I foi muito fácil! A gente só pegou essa parte e colocou ela aqui (reconfigurou o trapézio em um quadrado). Então deu: um, dois, três, quatro!

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por decomposição*

O trapézio I pode ser decomposto em um retângulo de 2 ua e dois triângulos congruentes de 1 ua cada um. Assim:

Figura 146 - Decomposição do trapézio



Fonte: Dados da pesquisa

A sua área é a soma dessas áreas, totalizando 4 ua.

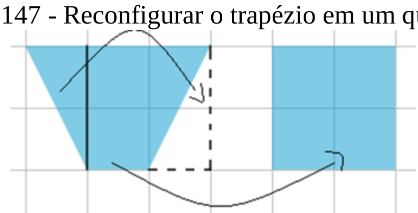
E_2: *Usando a fórmula algébrica*

A área do trapézio aplicando a fórmula é: $A_{Trapézio\ I} = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(3\ uc+1\ uc)\times 2\ uc}{2} = \frac{8\ ua}{2} = 4\ ua.$

E_3: *Por decomposição e composição*

Pode-se decompor esse trapézio em um trapézio e um triângulo retângulo como na imagem abaixo, de modo a formar um quadrado com área equivalente. Logo a área do trapézio é 4 ua.

Figura 147 - Reconfigurar o trapézio em um quadrado

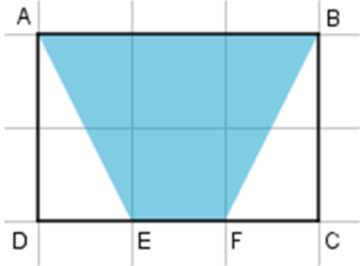


Fonte: Dados da pesquisa

E_4: *Enquadrando-o num retângulo*

Enquadrando o trapézio num retângulo a sua área é obtida subtraindo da área do retângulo as áreas dos triângulos que não fazem parte dele. Assim:

Figura 148 - Mergulhar o trapézio em um retângulo



Fonte: Dados da pesquisa

$A_{Trapézio\ I} = A_{Retângulo\ ABCD} - \left(A_{TriânguloADE} + A_{Triângulo\ BCF}\right) = 6\ ua - (1\ ua + 1\ ua) = 6\ ua - 2\ ua = 4\ ua.$

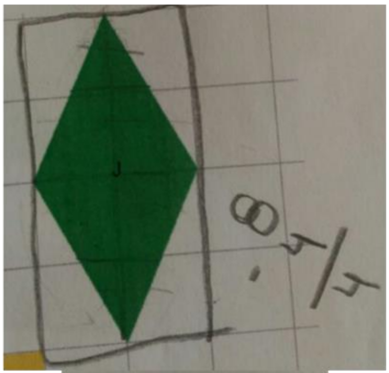
Análise a posteriori

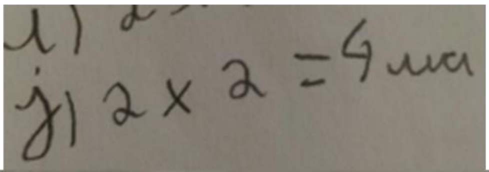
Os alunos (05, 06) contornaram este trapézio com um retângulo (E_4). A dupla (07, 09) mobilizou a estratégia (E_1), registrando a quantidade de quadrados sobre a figura. As duplas (01, 10) e (03, 11) o reconfiguraram num quadrado de área equivalente, aplicando a fórmula algébrica do quadrado e a do retângulo (figura 145).

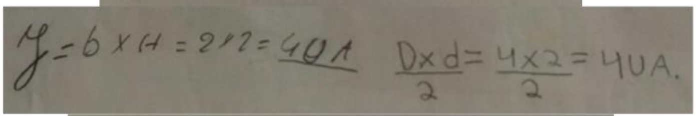
Esta figura, por exemplo, é fechada, convexa e de dimensão ($2D$). Neste protocolo, para calcular a sua área os alunos o reconfiguraram num quadrado, o mergulharam em um retângulo, contaram os quadradinhos do seu interior e aplicaram a fórmula algébrica. Por meio dos tratamentos figurais ocorreu a transformação deste trapézio, permanecendo em $2D$. No entanto, para aplicar a fórmula algébrica, mudam-se os olhares: para o ponto ($0D$) e, para identificar os lados em ($1D$). Para Duval, uma das causas dos entraves em problemas geométricos é olhar para estas dimensões inferiores, pois à primeira vista a dimensão superior é a que prevalece. Para mobilizar a fórmula algébrica é necessário olhar os elementos $0D$ e $1D$ representados em $2D$ e, permanecer em $2D$. Sendo que, a dimensão superior é a que se impõe perceptivelmente com o olhar botanista.

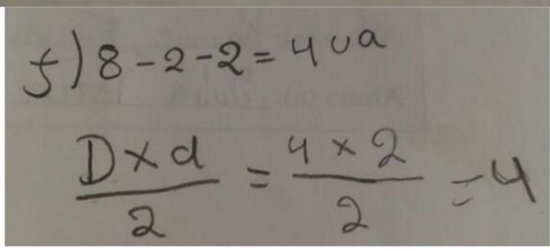
O losango J

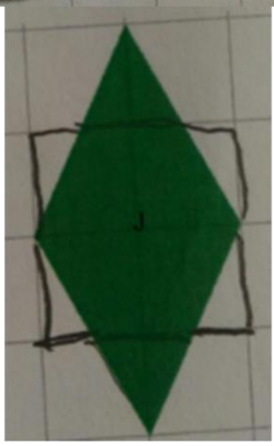
Figura 149 - Protocolo das alunas (07, 09), (03, 11), (01, 10), (05, 06), Sessão 06



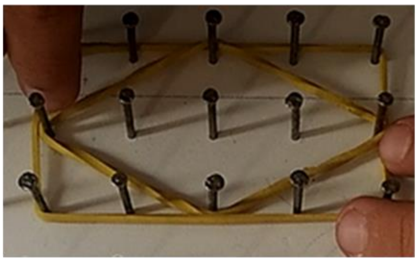




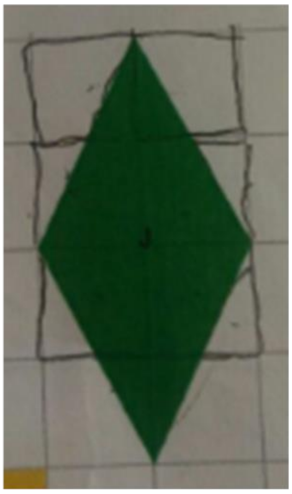




Aluna 05: Aqui a gente pegou o oito que dá tudo aqui (a área do retângulo representado no geoplano à esquerda), menos dois porque esses dois formam um retângulo e menos dois, que dá igual a quatro unidades de área. Aí tem outro jeito também, que se cortar esse aqui ao meio (considerar a diagonal maior do losango) e assim (a diagonal menor) esse lado aqui cabe aqui que fica um quadrado de uma, duas, três, quatro unidades de área (reconfiguraram o losango em um quadrado com a mesma área). Aí a gente pegou aqui também (mostrando na folha) fez diagonal maior vezes a diagonal menor dividido por dois, a diagonal maior é igual a quatro, a diagonal menor é igual a dois, dividido por dois que é igual a quatro unidades de área.



Pesquisadora: O que você fez aqui?
Aluno 03: Foi muito fácil! É só tirar essa parte e formar um quadrado aqui (reconfigurar o losango em um quadrado).
Pesquisadora: Como assim?
Aluno 03: Tira essa parte e coloca ela aqui. Tira essa parte e coloca ela aqui (Representação na folha à esquerda).
Pesquisadora: Você acha que cabe?



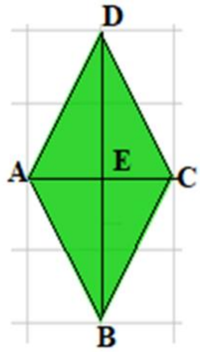
Aluno 03: Eu acho (disse adicionando traços no losango da folha). Tirei essa parte e coloquei ela aqui. Daí, tirei essa e coloquei ela aqui, ó... E aqui é a mesma coisa (representação à esquerda). Daí ele têm área quatro.
Pesquisadora: E usando a fórmula algébrica?
Aluno 03: Usando a fórmula algébrica... É só fazer dois vezes dois que dá quatro unidades de área (aplicaram a fórmula no quadrado).
Pesquisadora: Vocês aplicaram a fórmula no quadrado?
Aluno 03: Sim!
Pesquisadora: E aplicando a fórmula do losango no losango dá a mesma coisa?
Aluno 03: Sim!
Pesquisadora: Explica pra mim.
Aluno 03: Quatro vezes dois dá oito e oito dividido por dois dá quatro.

Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por decomposição*

O losango J pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes ($\Delta AED \cong \Delta CED \cong \Delta AEB \cong CEB$), com 1 ua cada (figura 150). Assim, a sua área é a soma dessas áreas, ou seja, $4 \times 1\ ua = 4\ ua$.

Figura 150 - Decomposição do losango em quatro triângulos congruentes



Fonte: Dados da pesquisa

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

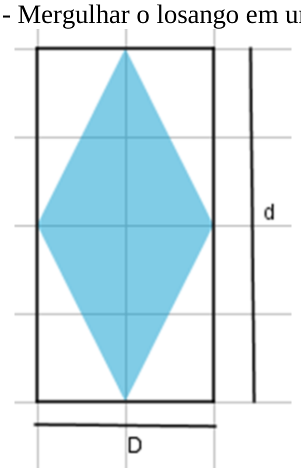
Como a diagonal maior desse losango possui 4 uc e a menor 2 uc temos que:

$$A_{Losango\ J} = \frac{D \times d}{2} = \frac{4\ uc \times 2\ uc}{2} = \frac{8\ ua}{2} = 4\ ua.$$

E_3: *Contornando-o por um retângulo*

Esse losango pode ser contornado por um retângulo, cuja base e altura possuem as medidas das diagonais. Assim:

Figura 151 - Mergulhar o losango em um retângulo



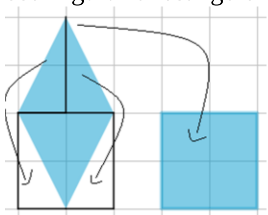
Fonte: Dados da pesquisa

A área do losango é 4 ua, porque é a metade da área do retângulo (8 ua).

E_4: *Por decomposição e composição*

O losango J pode ser decomposto em quatro triângulos, formando um quadrado com área equivalente. Assim:

Figura 152 - Reconfigurar o losango em um quadrado

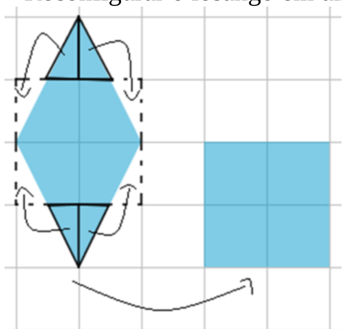


Fonte: Dados da pesquisa

Portanto a área do Losango I é 4 ua.

Ou desse outro modo:

Figura 153 - Reconfigurar o losango em um quadrado



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

A dupla (07, 09) contornou o losango por um retângulo (E_3), registrando os tratamentos numéricos que os levaram a resposta (figura 149). A dupla (03, 11) o reconfigurou num quadrado de área equivalente (E_4), aplicando a fórmula algébrica do quadrado e do losango. A dupla (01, 10) fez este procedimento também, porém mobilizou a fórmula de área do quadrado somente. A dupla (05, 06) o contornou por um retângulo (E_3), representando na folha os tratamentos figurais que os levaram à solução ($8\ ua - 2\ ua - 2\ ua = 4\ ua$) e a fórmula algébrica.

5.6.2 Considerações sobre a sexta sessão

Nesta sessão, diferentemente da sessão 03, os alunos visualizaram a figura na malha e não tiveram tanta dificuldade em representá-las no geoplano. Para encontrar as áreas os alunos realizaram uma conversão do registro em língua materna (enunciado) para o figural. Muitos a representaram, primeiramente, no geoplano, identificando neste o tratamento figural que os levariam a conclusão da área. Diante disso, percebemos que as apreensões e os olhares propostos por Duval (2012b, 2005) colaboraram na elaboração de estratégias e nas representações mobilizadas por eles.

Foram poucas as fórmulas algébricas representadas na folha, sabiam quais números deveriam multiplicar e/ou dividir. Porém, percebemos, pelo ano escolar, que não tinham muita familiaridade com o registro algébrico.

Primeiro os alunos calcularam a área das figuras sem mobilizar as fórmulas algébricas e após, mobilizando-as. Mas, encontraram dificuldade neste procedimento. Identificamos, que, em alguns casos, somente representavam as figuras no geoplano para validar a sua área de outro modo.

Percebemos que o discurso serviu para justificar os tratamentos figurais efetuados sobre a figura. Quando explicam as dimensões da figura, em língua materna, ocorre uma mudança de olhar $(2D \rightarrow 1D)$, ou seja, uma desconstrução dimensional, que é uma especificidade que o ato de ver em geometria exige. É possível perceber diante destas diversas representações semióticas mobilizadas pelos alunos nesta pesquisa, observando os protocolos por eles produzidos, que essa desconstrução foi significativa para a aprendizagem deste conteúdo.

Percebemos que esta atividade exigiu dos alunos, nos tratamentos figurais principalmente, a operação mereológica de reconfiguração, que se apoia na percepção por permitir modificar ou decompor a figura em outras de mesma dimensão $(2D)$, reconfigurando-as em outra figura para calcular a área e as desconstruções dimensionais $(2D \rightarrow 1D)$ para aplicar as fórmulas algébricas, sendo estes dois modos incompatíveis de visualização. Esses modos envolveram a apreensão operatória e o olhar construtor em geometria, que possibilitaram uma melhor compreensão da razão de ser das fórmulas algébricas, dentre elas, do porquê das fórmulas algébricas do paralelogramo e do retângulo serem o produto de sua base por sua altura.

Nesta sessão, percebemos que os alunos exploraram mais as figuras geométricas, achando caminhos que os levariam as suas respectivas áreas por meio dos tratamentos figurais efetuados sobre elas, fazendo-as realmente desempenhar sua função heurística.

Neste caso, a apreensão operatória foi bastante requerida por meio da operação de reconfiguração que é uma importante modificação com invariância de área nas figuras geométricas e bastante requerida na resolução de problemas de áreas de figuras planas. O uso da reconfiguração tornou os cálculos mais simples, além de contribuir com a visualização, comandada pela apreensão perceptiva e o olhar botânico.

Neste estudo, ao encontrar a área de pelo menos dois modos diferentes, principalmente pela exploração heurística nas figuras, os alunos obtiveram alternativas para solucionar a atividade proposta, ao invés de usarem somente os procedimentos com fórmulas, o que possibilitou uma desenvoltura maior dos alunos em seus modos de pensar, raciocinar e de olhar para uma figura geométrica. Além disso, na representação das figuras no geoplano, eles puderam visualizá-las em posições diferentes, o que contribui também para a operação de reconfiguração por ser uma prática dos movimentos efetuados em uma figura. No grupo de alunos, esta visualização da figura, representada no geoplano em posições diferentes previu alguns tratamentos figurais e possibilitou outras informações visuais, como o mergulhamento.

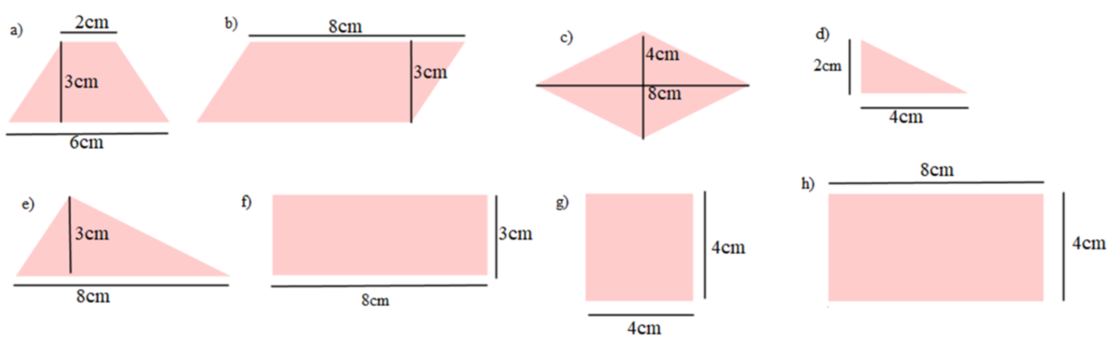
5.7 Sessão 07

Esta sessão é composta por duas atividades. A primeira é para justificar quais figuras possuem áreas equivalentes e a segunda para determinar a área de cada peça do tangram sabendo que o quadrado formado com as sete peças desse jogo tem $32\ cm^2$.

5.7.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

Esta atividade teve como enunciado:

1) Dentre as figuras abaixo quais delas possuem a mesma área? Justifique.



2) O quadrado formado com todas as peças do tangram tem $32\ cm^2$ *de área. Determine a área de cada peça do tangram.*

O objetivo na primeira atividade é identificar as figuras que possuem a mesma área, mediante processos de: comparação, superposição, recorte, dobradura, medição com régua e aplicação da fórmula algébrica, representando-as na malha milimetrada para que possam contar os quadradinhos, ou verificando quantos quadradinhos do material dourado, cuja superfície possui $1\ cm^2$ de área, são necessários para recobrir a figura.

O objetivo na segunda atividade é descobrir a área de cada peça do tangram a partir da área do quadrado formado com as sete peças desse recurso material. A variável didática nessas duas atividades é o tipo das figuras que possibilitam tratamentos figurais.

As figuras planas representadas na primeira atividade foram construídas em papel cartão e cada dupla de alunos recebeu um conjunto desses. Para a segunda atividade, cada dupla inicialmente construiu o quadrado com todas as peças do tangram e partindo desse quadrado que tem $32\ cm^2$ de área descobriu a área de cada peça.

Os recursos disponibilizados para as duplas foram: uma folha com os enunciados escritos, um kit com as sete figuras da atividade 1), papel milimetrado, geoplano, tangram, régua, material dourado, folha sulfite, lápis, caneta, borracha, tesoura e cola.

Experimentação

Essa sessão ocorreu no dia 09/08/2017 e contou com a participação de nove alunos, cinco alunos do quinto ano e quatro alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, que formaram três duplas e um trio. Eles estavam esperando ansiosos para iniciar as atividades, alguns, lamentando da desistência do aluno 12.

Um aluno pediu para tentar convencê-lo a voltar a participar dos encontros[63]. Saiu por alguns instantes da sala, dialogou com esse aluno, mas não conseguiu convencê-lo. A professora dessa turma disse que ele estava passando por alguns problemas pessoais.

[63] O aluno 12 ficava em período integral na escola e estava no pátio.

Iniciamos a sessão retomando algumas questões dos encontros anteriores, como as estratégias usadas por eles para encontrar as áreas de triângulos e quadriláteros. Os alunos estavam ansiosos e queriam saber se a sessão continha muitas atividades, *"são quantas folhas professora?"*

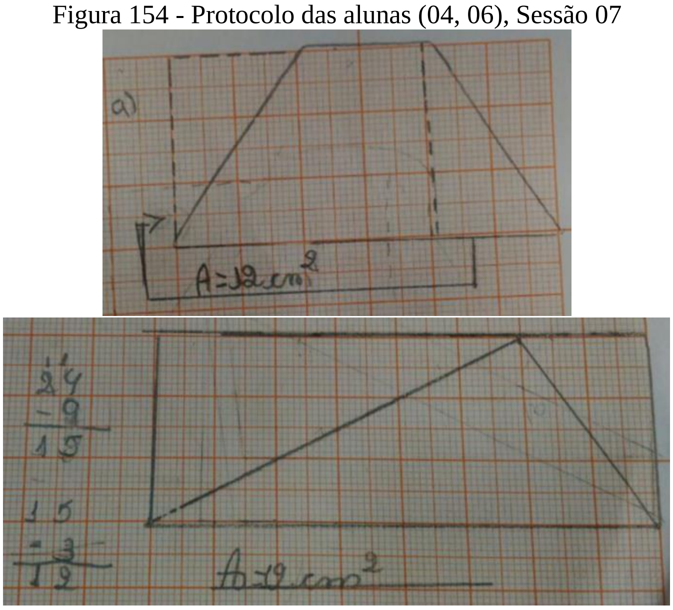
Em seguida, eles receberam a folha contendo as atividades. Todos quiseram a malha milimetrada e alguns também o geoplano para representar as figuras dos recortes.

A seguir apresentamos algumas estratégias que os alunos poderiam mobilizar nessas atividades, com as análises *a priori* e *a posteriori*.

Para a atividade (1)

Para o trapézio (a) e o triângulo (e)

Figura 154 - Protocolo das alunas (04, 06), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por superposição*

Como o trapézio (a) e o triângulo (e) possuem a metade da área do paralelogramo (b), conclui-se que eles possuem a mesma área.

E_2: *Aplicando a fórmula algébrica*

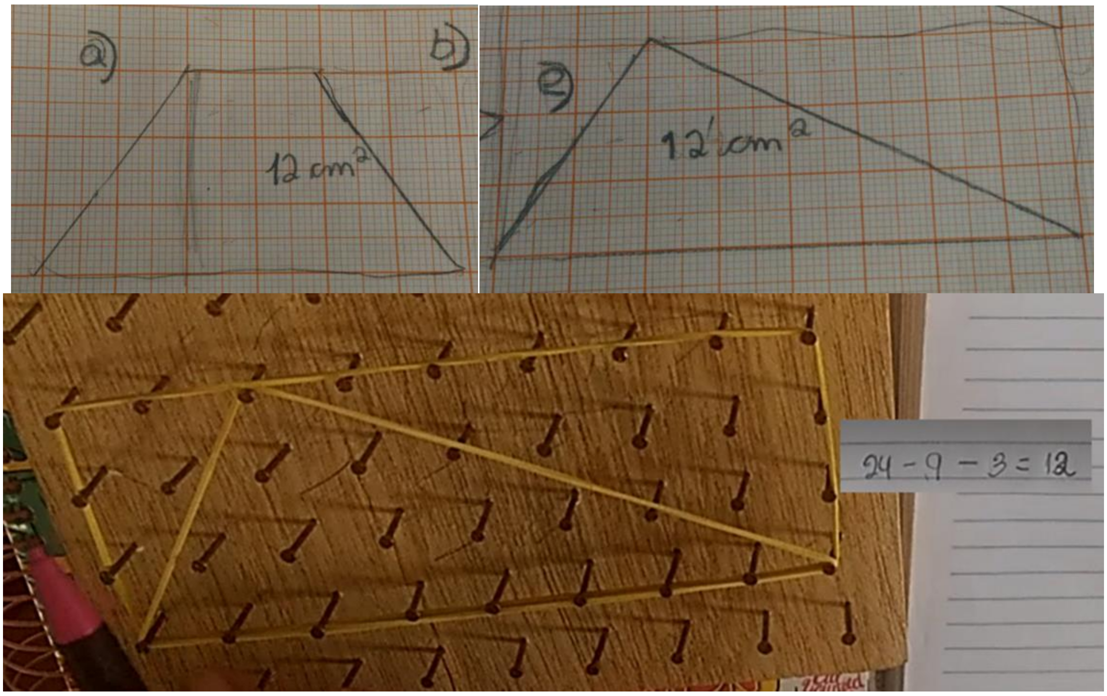
A área do trapézio (a) é: $A_{trapézio} = \frac{(B+b)\times h}{2} = \frac{(6\ cm+2\ cm)\times 3cm}{2} = 12\ cm^2$.

A área do triângulo (e) é: $A_{triângulo} = \frac{B\times h}{2} = \frac{8\ cm\times 3\ cm}{2} = \frac{24\ cm^2}{2} = 12\ cm^2$.

E_3: *Representando na malha milimetrada*

O triângulo (e) e o trapézio (a) podem ser representados na malha milimetrada. Nesta representação, eles realizaram o cálculo de suas áreas por meio da contagem dos quadradinhos de $1cm^2$ que cabem em cada um dos dois polígonos ou por procedimentos de decomposição, reconfiguração e mergulhamento. Assim:

Figura 155 - Protocolo das alunas (02, 10), (01, 05, 09), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

As duplas (04, 06), (02, 10) conforme (figuras 154 e 155) representaram o trapézio (a) e o triângulo (e) na malha milimetrada e em seguida mobilizaram também a estratégia (E_4), por meio de tratamentos figurais reconfiguraram o trapézio em um retângulo com a mesma área. Para o triângulo (e) o mergulharam em um retângulo e retiraram dele a área dos dois triângulos que não faziam parte da sua área. Para isso efetuaram tratamentos no registro numérico.

A dupla (02, 10) não tinha certeza da área do triângulo (e), isso pode ser visto na apreensão discursiva do aluno 10, no registro em língua materna abaixo. Acompanhe:

Pesquisadora: Como você fez para encontrar essa área?

> Aluno 10: Esse triângulo eu não tenho certeza da área. Eu só completei essa parte aqui que formou três vezes seis que formou dezoito (Mergulhou o triângulo em um retângulo e calculou a área do triângulo maior após esse procedimento para retirar esta área da área do retângulo). Daí eu completei essa outra parte que formou: um, dois, três,..., seis. Aí deu vinte e quatro (A área do retângulo que contornou o triângulo e)). Metade de dezoito dá nove e metade de seis dá três, daí formou doze (as áreas dos dois triângulos que devem ser retiradas da área do retângulo). Daí dá doze (vinte e quatro menos doze). Daí formou doze. A área desse triângulo é doze.
> Aluna 05: Toda essa parte aqui dá vinte e quatro (a área do retângulo). Daí eu peguei essa parte aqui, a metade dele que dá nove. Aí eu tirei essa parte aqui que dá seis e a metade dele é três. Aí eu peguei vinte e quatro menos nove menos três que dá doze, doze centímetros quadrados (registro numérico na figura 154).

A dupla (02, 10) explicou os tratamentos figurais e numéricos realizados no triângulo (e) representado na malha, enquanto que o trio (01, 05, 09) explicou olhando para a representação figural efetuada no geoplano. No triângulo (e) representado na malha (figura 154) podem-se perceber os traços que os alunos (02, 10) adicionaram a esse triângulo para determinar sua área.

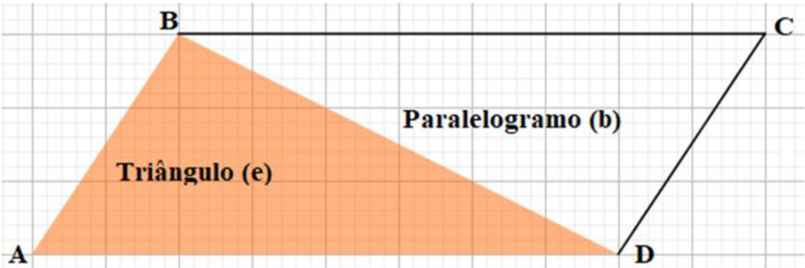
Para determinar a área do trapézio se realizou a visualização não icônica por meio da decomposição heurística dessa forma geométrica conhecida por eles, reconfigurando-o em um retângulo. A visualização e a linguagem estabelecida com os colegas do grupo contribuíram para identificar e efetuar os tratamentos numéricos e figurais nessa figura.

E_4: *Decompondo o trapézio e reconfigurando-o num retângulo, visualizando o triângulo (e) como a metade do paralelogramo*

Outro procedimento que pode ser realizado é representar o trapézio na malha milimetrada e reconfigurá-lo em um retângulo com a mesma área, conforme o protocolo das alunas (04, 06), (figura 154).

O triângulo (e) pode ser visualizado como a metade do paralelogramo (b). Assim:

Figura 156 - Mergulhando o triângulo em um paralelogramo



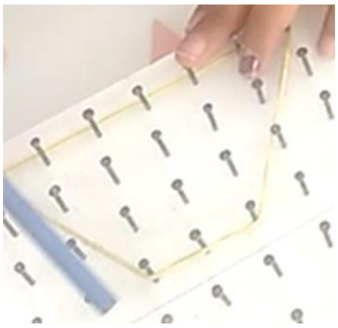
Fonte: Dados da pesquisa

O paralelogramo (e) também pode ser reconfigurado no retângulo (f). Como a área do retângulo (f) é $24\ cm^2$, então a área do paralelogramo também é $24\ cm^2$, sendo portanto a área do triângulo (e) $12\ cm^2$.

O procedimento mais usado para o trapézio foi reconfigurá-lo em um retângulo. Assim:

Análise a posteriori

Figura 157 - Protocolo das alunas (04, 06), Sessão 07



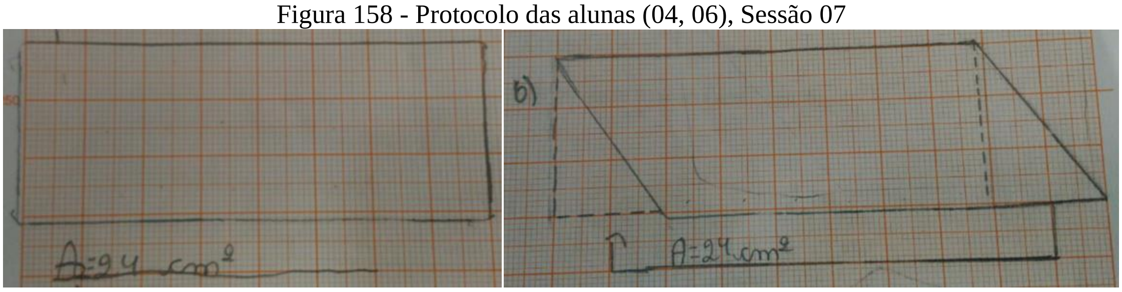
Aluna 06: Pra encontrar a área do trapézio eu fiz a forma dele aqui (no geoplano). Daí eu tirei essa parte aqui e coloquei aqui (reconfigurou o trapézio em um retângulo). Daí eu fiz o desenho na folha pra ficar mais fácil e também tirei essa parte aqui e coloquei aqui. Daí eu contei: quatro vezes três deu doze. Daí o trapézio tem de área doze centímetros quadrados.

Fonte: Dados da pesquisa

A aluna 06 nesse protocolo calcula a área do retângulo para responder a área do trapézio. Quando o trapézio foi representado no geoplano essas alunas olharam para os tratamentos figurais realizados e não para as medidas que esse trapézio deveria possuir em cm representados na folha. Para Duval (2005), isso é fundamental para ver em geometria, é aprender a olhar para as formas geométricas discriminadas que independem das medidas de possuem a fim de explorá-las heuristicamente para determinar sua área. Dando a elas realmente o seu papel de representação.

Para o paralelogramo (b) e o retângulo (f)

Figura 158 - Protocolo das alunas (04, 06), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por recorte e colagem*

Esse paralelogramo pode ser, por recorte e colagem, reconfigurado em um retângulo.

E_2: *Aplicando a fórmula algébrica*

A área do paralelogramo (b) é: $A_{paralelogramo} = b \times h = 8\ cm \times 3\ cm = 24\ cm^2$.

E a área do retângulo (f) é: $A_{retângulo} = b \times h = 8\ cm \times 3\ cm = 24\ cm^2$.

E_3: *Por superposição*

Sobrepondo o paralelogramo (b) ao retângulo (f) é possível perceber que o triângulo que está fora dessa sobreposição é igual ao que está faltando do outro lado. Logo essas figuras possuem a mesma área.

E_4: *Representando-os na malha*

Podem-se determinar suas áreas as representando na malha milimetrada (conforme a figura 158).

E_5: *Representando-os na malha e reconfigurando o paralelogramo no retângulo*

Esse procedimento foi realizado no paralelogramo (figura 158). Acompanhe o diálogo do aluno 10, após representar essas figuras na malha quadriculada.

> Pesquisadora: Como vocês fizeram para descobrir a área do paralelogramo?
> Aluno 10: Para o paralelogramo a gente fez a mesma coisa que fez para o trapézio. Tirou essa parte aqui e colocou aqui (reconfigurou o paralelogramo em um retângulo). Aí fizemos as contas e deu vinte e quatro.
> Pesquisadora: E o retângulo?
> Aluno 10: Aqui eu só usei a multiplicação três vezes oito que deu vinte e quatro. Daí esse paralelogramo e esse triângulo têm a mesma área.

O trio (01, 05, 09) fez essas representações na folha milimetrada, porém a aluna 05 explicou os procedimentos realizados olhando para a figura representada na folha que foi entregue as eles assim:

> Aluno 05: Esse retângulo aqui tem vinte e quatro centímetros quadrados, porque eu multipliquei o oito vezes o três que é a mesma coisa que vinte e quatro.

Na apreensão discursiva dessa aluna percebemos que ela mobiliza a fórmula algébrica da área do retângulo. Esse raciocínio foi favorecido diante das representações mobilizadas. Eles perceberam que podiam calcular a quantidade de quadradinhos do interior da figura multiplicando a quantidade deles em cada lado ao invés de contá-los um por um.

E_6: *Visualizando a área do paralelogramo como o dobro da área do trapézio (a) ou do triângulo (e)*

Outro procedimento que pode ser feito é multiplicar a área do trapézio (a) por dois porque ele é a metade do paralelogramo (b). Assim:

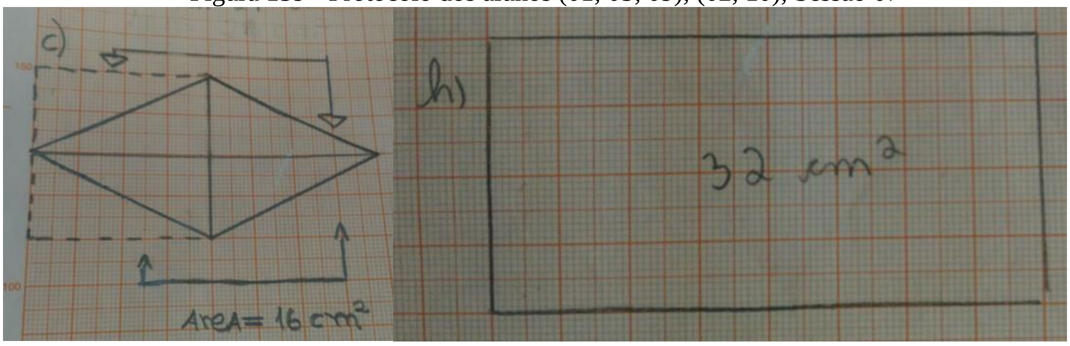
$$A_{paralelogramo\ (b)} = 2 \times A_{trapézio\ (a)} = 2 \times 12\ \ cm^2 = 24\ cm^2.$$

Ou, multiplicar a área do triângulo (e) por dois, assim:

$$A_{paralelogramo\ (b)} = 2 \times A_{triângulo\ (e)} = 2 \times 12\ cm^2 = 24\ cm^2.$$

Para o losango (c) e o retângulo (h)

Figura 159 - Protocolo dos alunos (01, 05, 09), (02, 10), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por superposição*

Superpondo o losango (c) ao retângulo (h) e os decompondo em triângulos com as dimensões de (d), tem-se que a quantidade desses triângulos que estão fora do losango é a mesma que está dentro do losango, ou seja, a área do retângulo é o dobro da área do losango.

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

A área do losango é: $A_{losango} = \frac{D \times d}{2} = \frac{8\ cm \times 4\ cm}{2} = \frac{32\ cm^2}{2} = 16\ cm^2$.

A área do quadrado é: $A_{retângulo} = b \times h = 8\ cm \times 4\ cm = 32\ cm^2$.

Portanto a área do losango é o dobro da área do retângulo.

E_3: *Por decomposição e composição*

O retângulo pode ser decomposto em oito triângulos congruentes ao triângulo (d) e o losango em quatro triângulos congruentes ao triângulo (d). Sendo assim a área do losango é a metade da área do retângulo.

E_4: *Representando-os na malha milimetrada e calculando a área do losango*

Decompondo-o em quatro triângulos congruentes, cada um com 4 cm^2 de área. Sendo assim a área do losango é: $4 \times 4\ cm^2 = 16\ cm^2$.

E_5: *Visualizando o triângulo (d)*

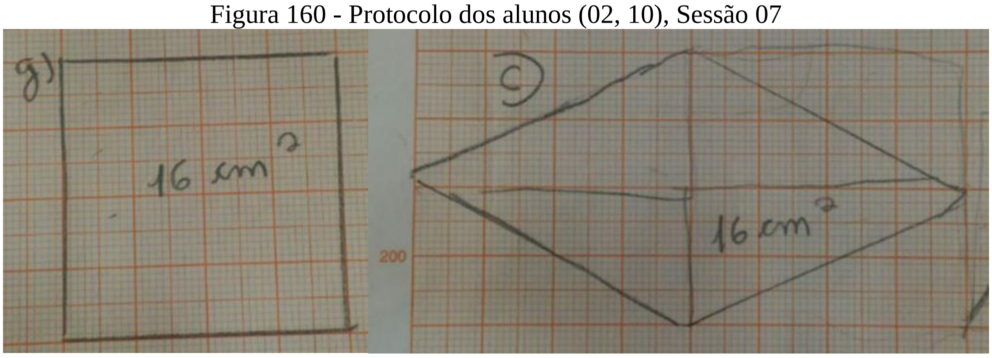
Como o losango pode ser decomposto em quatro triângulos (d) então sua área é quatro vezes a área desse triângulo, ou seja, sua área é $4 \times 4\ cm^2 = 16\ cm^2$. E o retângulo é oito vezes a área do triângulo (d) ($8 \times 4\ cm^2 = 32\ cm^2$).

Análise a posteriori

Nenhum grupo calculou a área do losango (c) comparando com o retângulo (h). Portanto, nenhuma dessas estratégias foi mobilizada por eles.

Para o losango (c) e o quadrado (g)

Figura 160 - Protocolo dos alunos (02, 10), Sessão 07

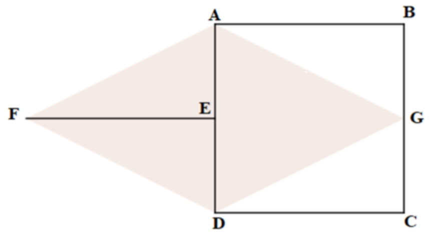


Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por superposição*

Sobrepondo o losango ao quadrado é possível perceber que a metade do losango que fica fora pode ser decomposta em dois triângulos congruentes ao triângulo (d), observe:

Figura 161 - Calculando a área do losango por comparação ao quadrado



Fonte: Dados da pesquisa

Esses dois triângulos permitem reconfigurar o losango (c) no quadrado (g), mudando os triângulos AEF e DEF de lugar, colocando-os no lugar dos triângulos GBA e GCD.

Pode-se usar o triângulo (d) como base para o raciocínio, porque ele corresponde à quarta parte do quadrado (g) e do losango (c).

E_2: *Usando a fórmula algébrica*

A área do losango é: $A_{losango} = \frac{D \times d}{2} = \frac{8\ cm \times 4\ cm}{2} = \frac{32\ cm^2}{2} = 16\ cm^2$.

A área do quadrado é: $A_{quadrado} = l^2 = (4\ cm)^2 = 16\ cm^2$.

E_3: *Mergulhando o losango em um retângulo*

O losango pode ser mergulhado em um retângulo. E, assim se pode determinar a sua área subtraindo da área desse retângulo as áreas dos triângulos que não fazem parte do losango.

E_4: *Por decomposição e composição*

O losango e o quadrado podem ser decompostos em quatro triângulos congruentes ao triângulo (d). Sendo assim eles possuem a mesma área.

E_5: *Representando-os na malha milimetrada e calculando a área do losango por dentro, decompondo-o em triângulos*

Pode-se representar esse losango na malha e decompô-lo em quatro triângulos congruentes, calculando nestes a sua área.

E_6: *Visualizando o triângulo (d)*

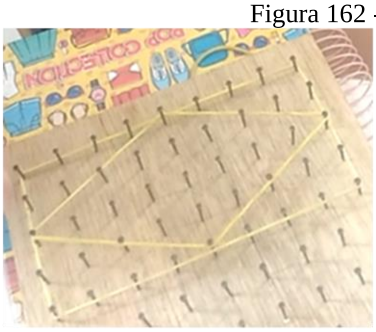
Se a área do triângulo (d) é conhecida, outra possibilidade é multiplicar por quatro essa área para encontrar a área do losango e do quadrado.

Análise a posteriori

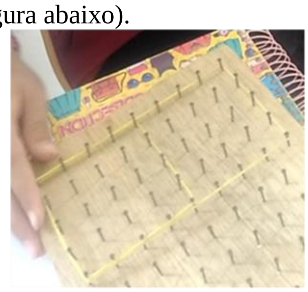
Os alunos mobilizaram a estratégia (E_3), mergulharam o losango em um retângulo, porém após esse procedimento o reconfiguraram em um quadrado, o que não tínhamos previstos. E assim concluíram que o losango e o quadrado possuem a mesma área.

O trio (01, 05, 09) os representaram também no geoplano articulando a visualização com os tratamentos figurais, numéricos e o discurso. Assim:

Figura 162 - Protocolo dos alunos (01, 05, 09), Sessão 07



Pesquisadora: O que vocês estão fazendo?
Aluna 05: A gente fez aqui o losango (no geoplano). Aí eu fiz assim: peguei essa parte aqui e coloquei ela aqui. Daí ficou assim (figura abaixo).



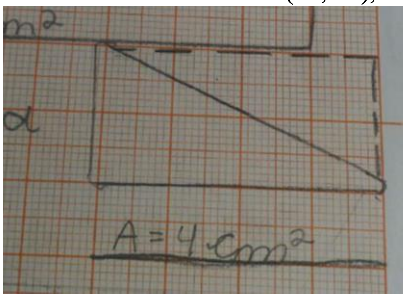
Fonte: Dados da pesquisa

Nessa representação esses alunos reconfiguraram o losango em um quadrado que é a metade da área do retângulo (h). O geoplano contribuiu para elaborar essa estratégia, pois após isso representaram na malha esse losango com esses mesmos tratamentos.

O geoplano contribuiu para que esses alunos realizassem no losango o seu henriquecimento heurístico, fazendo aparecer o retângulo e o quadrado que corresponde à metade desse retângulo que os olhos não enxergam (DUVAL, 2005). Eles saíram aqui da apreensão perceptiva para a operatória, controlada pelos olhares construtor e inventor.

Para o triângulo (d)

Figura 163 - Protocolo dos alunos (04, 06), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

E_1: *Por superposição*

A área desse triângulo é a quarta parte da área do losango e a quarta parte da área do quadrado. Logo a sua área é $\frac{16\ cm^2}{4} = 4\ cm^2$.

E_2: *Aplicando a fórmula algébrica*

A área do triângulo é: $A_{triângulo} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4\ cm \times 2\ cm}{2} = \frac{8\ cm^2}{2} = 4\ cm^2$.

E_3: *Representando-o na malha milimetrada*

Esse triângulo pode ser representado na malha e por mergulhamento em um retângulo concluir que sua área é $4\ cm^2$.

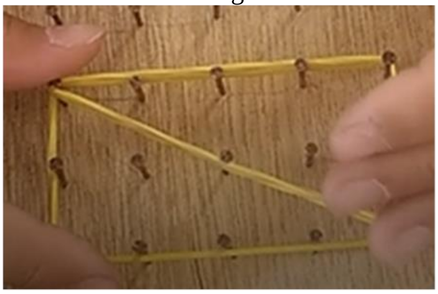
Análise a posteriori

Essa foi a estratégia mobilizada pelos grupos, representaram esse triângulo na malha e em seguida o mergulharam em um retângulo de $8\ cm^2$, para concluírem que sua área é $4\ cm^2$. A aluna 04 explicou os procedimentos realizados na apreensão discursiva elaborada diante dos tratamentos figurais e numéricos assim:

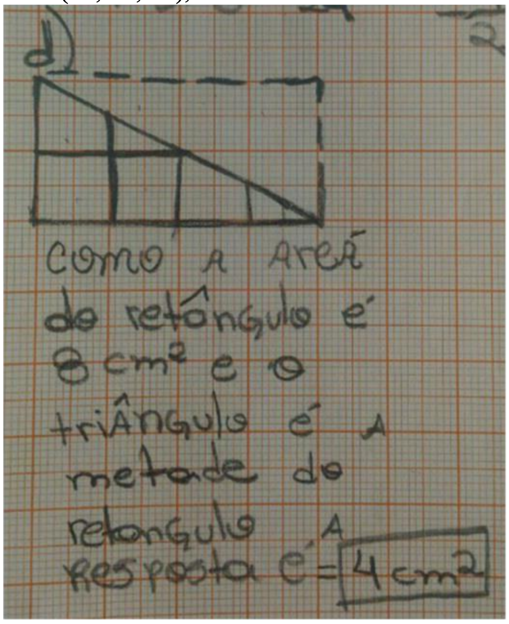
> Aluna 04: A gente pegou e colocou essa parte aqui (mergulhou o triângulo em um retângulo). Aí contou quantos que tinha e deu oito e daí dividimos por dois que deu quatro centímetros quadrados.

O trio (01, 05, 09) também o representou no geoplano assim:

Figura 164 - Protocolo dos alunos (01, 05, 09), Sessão 07



Aluna 05: Eu peguei essa forma e coloquei ela aqui no retângulo (no geoplano) e vi que ela é metade. Ele inteiro é oito (a área do retângulo). Então a metade dele é quatro, ou seja, a área do triângulo é quatro.
Pesquisadora: Quatro o quê?
Aluna 05: Quatro unidades de área,... é quatro centímetros quadrados.



Fonte: Dados da pesquisa

A dupla (03, 11) não fez nenhuma representação para esse triângulo. O aluno 03 explicou assim:

> Aluno 03: Ah! Aqui é fácil! E só fazer quatro vezes dois e dividir por dois que vai dar quatro centímetros quadrados.

Percebemos que as representações nos encontros anteriores contribuíram com a aprendizagem geométrica de área desse aluno. Esses alunos[64] determinaram a área dessas oito figuras aplicando diretamente nelas as suas respectivas fórmulas algébricas[65]. Em algumas figuras percebem-se traços na tentativa de as quadricularem para contagem dos quadradinhos. E isso pode ser percebido na apreensão discursiva do aluno 03. Assim:

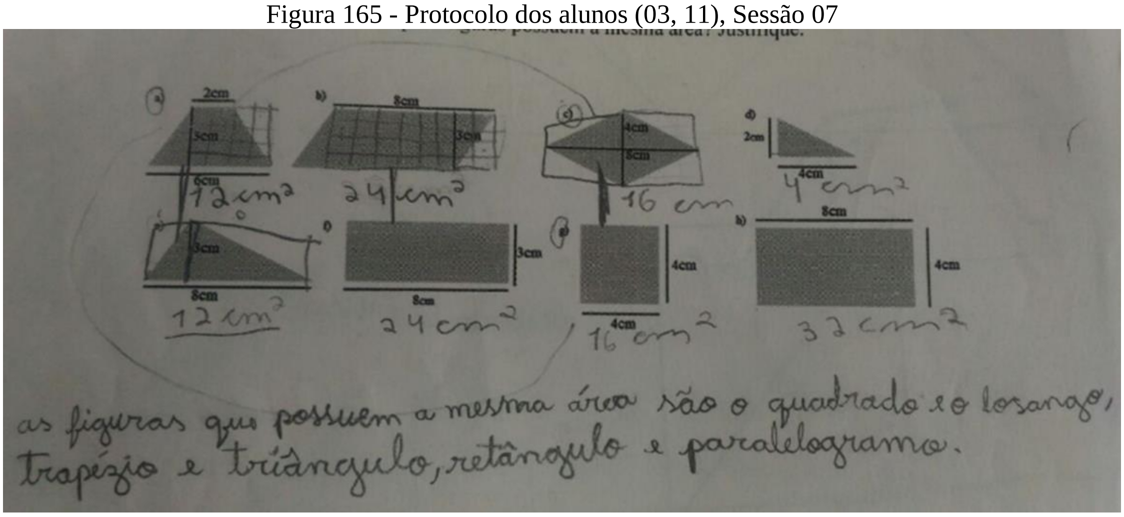
> Pesquisadora: Como vocês fizeram para encontrar essas área?
> Aluno 03: A (a) foi mais difícil. Daí a gente desenhou ela aqui (na malha) e tirou essa parte aqui e colocou ela aqui (reconfigurou o trapézio em um retângulo). Daí só contou os quadradinhos. Daí, para o paralelogramo (b) primeiro eu tentei fazer os quadradinhos aqui, mas saiu bem errado (quadricular o paralelogramo da folha do protocolo). Daí eu fiz ele aqui também (na malha). E daí deu vinte e quatro centímetros quadrados (reconfigurou na malha o paralelogramo em um retângulo). Aí o losango foi fácil! Eu só tirei essa parte aqui e coloquei ela aqui e deu dezesseis

[64] Esse aluno formou dupla com o aluno 11.
[65] Os dois são alunos do quinto ano do Ensino Fundamental.

> (reconfigurou na própria folha do protocolo o losango em um quadrado). O triângulo (d) também foi fácil! Foi só fazer dois vezes quatro e dividir por dois que deu quatro. Esse daqui foi só fazer oito vezes quatro (retângulo (h)). Esse aqui era só fazer quatro vezes quatro (quadrado (g)). E esse aqui três vezes oito (retângulo (f)). E esse aqui era só fazer... eu fiz ele aqui (na malha) e essa parte deu três e essa deu nove (decompôs esse triângulo em dois triângulos) e daí eu só somei três mais nove que deu doze.

Essa dupla terminou primeiro as atividades dessa sessão. Após esse discurso, representaram em língua formal a resposta na folha. Assim:

Figura 165 - Protocolo dos alunos (03, 11), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

As áreas de todas as figuras estão escritas corretamente e além da resposta eles indicam com um traço nas figuras, ligando-as àquelas que possuem a mesma área.

O mergulhamento do triângulo em um retângulo ajudou os alunos a compreenderem porque multiplicam *"base vezes a altura e dividem esse resultado por dois"*.

Para a atividade (2)

O quadrado formado com todas as peças do tangram tem $32\ cm^2$ *de área. Determine a área de cada peça*[66] *do tangram.*

As possíveis estratégias foram:

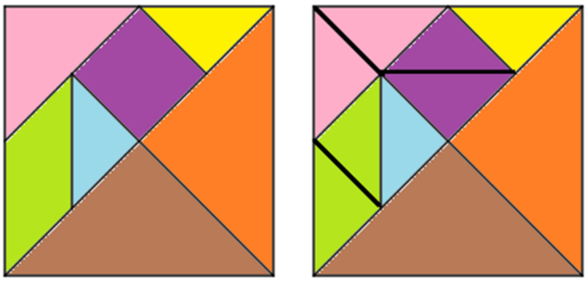
E_1: *Decompor esse quadrado em triângulos pequenos*

---

[66] Esse item foi retirado e adaptado de (BITTAR; FREITAS, 2005).

Esse quadrado pode ser decomposto em dezesseis triângulos pequenos, oito triângulos pequenos em cada metade do quadrado. Assim:

Figura 166 - Decomposição do quadrado em triângulos pequenos



Fonte: Dados da pesquisa

Como a área total desses dezesseis triângulos é $32\ cm^2$, então cada triângulo pequeno tem possui $2\ cm^2 = \frac{32\ cm^2}{16}$ de área. Logo, a área de cada uma das peças do tangram são as seguintes: triângulo pequeno ($2\ cm^2$), paralelogramo ($4\ cm^2$), quadrado ($4\ cm^2$), triângulo médio ($4\ cm^2$) e triângulo grande ($8\ cm^2$).

Pode-se confirmar se a resposta está correta somando essas áreas, assim: $A_{quadrado} = 2 \times A_{TG} + 2 \times A_{TP} + A_{TM} + A_P + A_Q$

$$A_{quadrado} = 2 \times 8\ cm^2 + 2 \times 2\ cm^2 + 4\ cm^2 + 4\ cm^2 + 4\ cm^2 = 32\ cm^2.$$

E_2: *Identificar que os triângulos grandes correspondem à metade do quadrado*

Como os dois triângulos grandes correspondem à metade do quadrado, então a área deles é $\frac{32\ cm^2}{2} = 16\ cm^2$; Ou seja, a área de cada um é $8\ cm^2 = \frac{16\ cm^2}{2}$.

A outra metade também tem $16\ cm^2$ de área. Sendo assim a metade do triângulo médio, o quadrado e o triangulo pequeno juntos possuem $8\ cm^2$ de área; E como eles podem ser decompostos em quatro triângulos pequenos, temos que: a área do triângulo pequeno é $2\ cm^2$, a área do quadrado é $4\ cm^2$ e a área do triângulo médio é $4\ cm^2$ porque a metade de sua área é $2\ cm^2$. A outra metade, formada pela metade do triângulo médio, o paralelogramo e o triângulo pequeno também tem $8\ cm^2$. E como já se sabe que a área de cada triângulo pequeno é $2cm^2$, tem-se que a área do paralelogramo é $4\ cm^2$.

E_3: *Identificar que o triângulo grande corresponde à quarta parte do quadrado*

O triângulo grande corresponde à quarta parte do quadrado, ou seja, a sua área é: $\frac{32\ cm^2}{4} = 8\ cm^2$. E como esse triângulo pode ser decomposto em: um quadrado e dois triângulos pequenos[67], temos que essas figuras possuem juntas 8 cm^2 de área, ou seja, o quadrado possui 4 cm^2 de área e cada triângulo pequeno 2 cm^2 de área.

Portanto, o paralelogramo e o triângulo médio têm 4 cm^2 de área.

E_4: *Identificar que o triângulo médio, o paralelogramo, o quadrado e os triângulos pequenos correspondem à metade do quadrado*

Como essas cinco peças correspondem a metade do quadrado, elas juntas possuem $16\ cm^2 = \frac{32\ cm^2}{2}$ de área. Como o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio podem ser decompostos em dois triângulos pequenos; temos oito triângulos pequenos nessa metade, cada um com $2\ cm^2 = \frac{16\ cm^2}{8}$ de área. Sendo assim a área dos quadriláteros que faltam é 4 cm^2 cada.

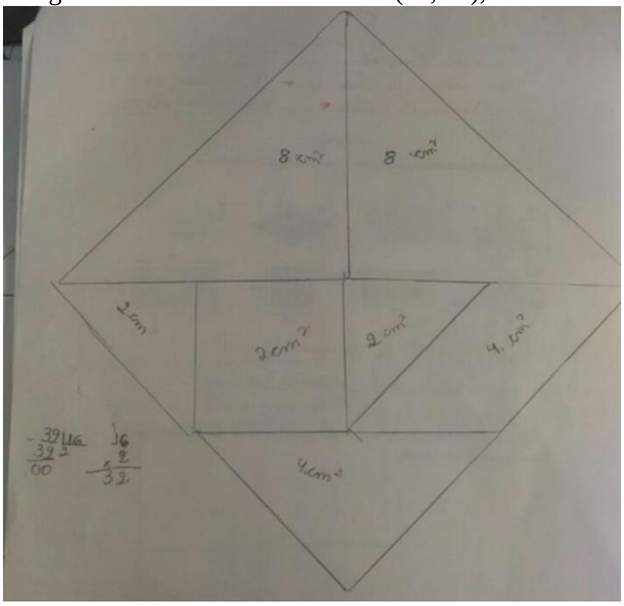
E a área de cada triângulo grande é $8\ cm^2$ porque os dois juntos possuem 16 cm^2 de área.

Análise a posteriori

A estratégia mobilizada pelos alunos foi a (E_1). Eles sabiam, pelos encontros anteriores, principalmente pela sessão 01, que cabiam dezesseis triângulos pequenos nesse quadrado. Sendo assim a área de cada triângulo pequeno era 2 cm^2. Assim:

[67] Pode-se decompor tanto o triângulo médio quanto o paralelogramo em dois triângulos pequenos, com raciocínio análogo.

Figura 167 - Protocolo dos alunos (04, 06), Sessão 07

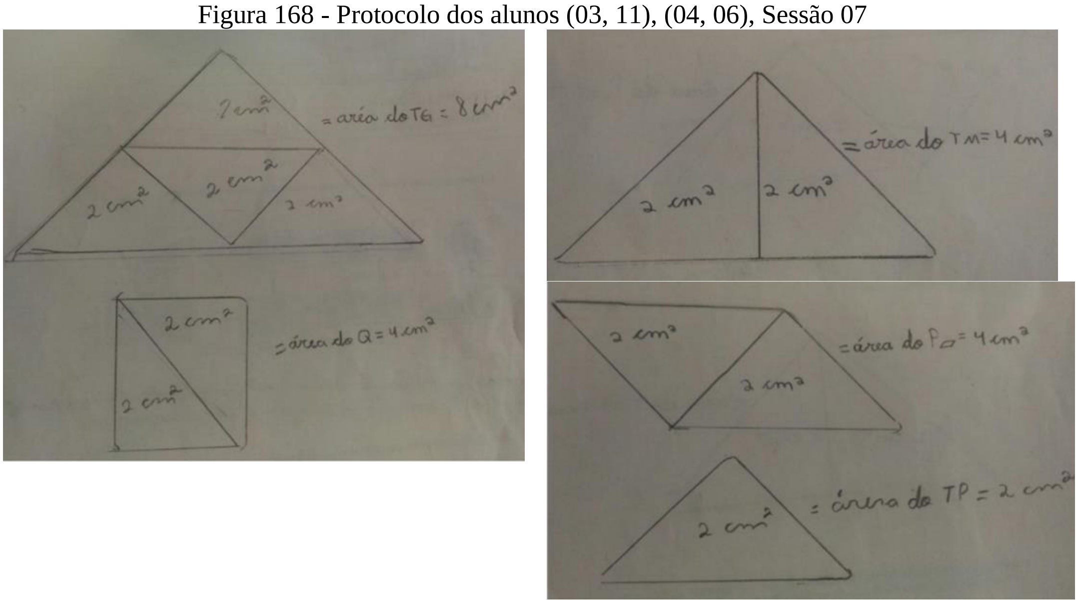


Fonte: Dados da pesquisa

Repare que a área do triângulo pequeno foi encontrada por meio do registro numérico neste protocolo. A partir dessa área determinaram a área das outras peças do tangram.

Alguns alunos contornaram as cinco peças do tangram (triângulo pequeno, triângulo médio, triângulo grande, paralelogramo e quadrado) e escreveram a sua respectiva área, outros, decompuseram cada peça em triângulos pequenos para somar essas áreas e determinar a área da peça. Assim:

Figura 168 - Protocolo dos alunos (03, 11), (04, 06), Sessão 07



Fonte: Dados da pesquisa

Todos os alunos escreveram corretamente as áreas, o número e a grandeza cm^2 ao lado. Percebemos que eles evoluíram nessa representação diante de suas transformações semióticas por meio dos tratamentos e conversões mobilizados nos encontros, que contribuíram para este modo correto de pensar, raciocinar e visualizar essas figuras geométricas.

5.7.2 Considerações sobre a sétima sessão

A dupla (03, 11) respondeu rapidamente as áreas das figuras usando as fórmulas algébricas; outros a representaram na malha e mobilizaram procedimentos de: contagem dos quadradinhos, decomposição, reconfiguração e mergulhamento. No geoplano mobilizaram procedimentos análogos, tanto para calcular as áreas como para validar com os cálculos da malha. Para representar as figuras no geoplano, olhavam para as medidas que elas possuíam na folha e não as mediam com a régua.

Percebemos nesse encontro que os alunos realizaram os tratamentos figurais e numéricos de modo mais autônomo. Todos avançaram em representar as figuras na malha e no geoplano. Eles sabiam a posição que as figuras deveriam ficar na malha para que pudessem calcular mais facilmente suas áreas.

Talvez, a escolha de entregarmos a folha com as atividades junto com a malha milimetrada contribuiu para que as representassem nesse recurso, sem mobilizar os procedimentos de recorte e colagem ou sobreposição. Mesmo os indagando acerca dessa possibilidade optaram por realizar os procedimentos na malha e no geoplano.

No término desta sessão tentamos comparar as figuras dos recortes para que suas áreas pudessem ser validadas usando essa estratégia também, porém não tiveram grande interesse.

Percebemos que o geoplano foi mais utilizado quando não tinham certeza dos cálculos e dos tratamentos figurais que poderiam ser efetuados, ou quando não sabiam quais tratamentos figurais e numéricos poderiam mobilizar. Nesse caso, a possibilidade de representar as figuras nesse recurso material contribuiu para a elaboração de estratégias.

A representação das figuras na malha e no geoplano favoreceu a sua utilização heurística, porque os tratamentos figurais e numéricos tinham significado para os alunos diante da visualização e do discurso para elaborar as estratégias ou para validar as áreas de outro modo.

A segunda atividade, com o tangram, foi significativa para os alunos. Percebemos que este recurso material contribuiu realmente para esta representação dar acesso ao objeto matemático, o conceito de área. Os alunos puderam transformar as representações semióticas em outras, por meio dos tratamentos figurais e numéricos mobilizados. Esse procedimento, para Duval (2005, 2011), é essencial para a compreensão em matemática, pois as representações somente dão acesso ao objeto matemático representado. Sendo assim, acreditamos ser válido explorar mais atividades desse tipo com o tangram para que a produtividade heurística dessas figuras seja trabalhada favorecendo a compreensão do conceito de área de triângulos e quadriláteros.

5.8 Sessão 08

Esta sessão é composta por duas atividades. A primeira é para construir figuras no geoplano e após representá-las na malha milimetrada, colando-as na folha. A segunda é para determinar a medida do lado de um quadrado sabendo a sua área.

5.8.1 Análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*

Esta atividade teve como enunciado:

1) Represente as figuras abaixo no geoplano, supondo que os lados de cada quadrado medem $1\,cm$*. Depois, transcreva as respostas para a malha milimetrada, colando-as nesta folha.*

a) Dois retângulos diferentes com $6\ cm^2$ *de área.*

b) Dois paralelogramos diferentes com $8\ cm^2$ *de área.*

c) Dois triângulos diferentes com $4\ cm^2$ *de área.*

d) Dois trapézios diferentes com $5\ cm^2$ *de área.*

e) Um quadrado que possua um decímetro quadrado (dm^2) $de\ área$*. Quantos* cm^2 *cabem num* dm^2*? E em um* m^2 *cabem quantos* dm^2*?*

2) A área de um quadrado é $16\ cm^2$*. Quanto mede o seu lado?*

O objetivo dessas atividades é identificar as figuras que possuem as áreas solicitadas. A variável didática é a ausência das figuras no enunciado e as diferentes figuras que podem ser formadas na primeira atividade com a mesma área.

Os recursos materiais disponíveis foram: folha com as atividades impressas, geoplano com borrachas, malha milimetrada, régua, material dourado, tesoura e cola.

Na malha milimetrada os alunos podiam visualizar: as medidas dos lados, os quadrados cujas áreas medem 1 mm^2 e 1 cm^2 para cada uma das figuras construídas.

Nesta sessão, retomamos o conteúdo da sessão 03, aprofundando-o, colocando as medidas dos lados em cm e as medidas das áreas em: cm^2, dm^2 e m^2. E também deixando as questões fechadas, permitindo duas possibilidades de construção para os quatros primeiros itens da primeira atividade e uma possibilidade para os demais. Fizemos essa escolha porque os alunos tiveram dificuldades nas questões abertas da sessão 03.

Era esperado que os alunos não tivessem dificuldades em representar a mesma figura no geoplano, na malha e no material dourado como ocorreu na sessão 06 (onde eles tiveram dificuldades em representar as figuras construídas no geoplano e na malha quadriculada). Esperávamos também que os alunos verificassem, por meio do uso de mais de um recurso, a veracidade dos raciocínios.

No geoplano os alunos podiam verificar as áreas das figuras construídas: contando os quadradinhos de 1 cm^2 de área, mergulhando-as em um retângulo, decompondo-as, reconfigurando-as em outra cuja área seja mais fácil de calcular ou mobilizando as fórmulas algébricas como fizeram na sessão 06.

Os alunos podiam usar o material dourado para construírem retângulos e quadrados, pois a superfície de cada cubinho corresponde à unidade e mede 1 cm^2 de área. Não é possível representar nesse recurso: os paralelogramos que não são retângulos, os trapézios e os triângulos[68].

Apresentaremos a seguir como ocorreu a experimentação desta sessão.

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 16/08/2017 e contou com a participação de dez alunos, cinco alunos do quinto ano e cinco alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, que formaram duas duplas e dois trios. E com a participação do professor José Luiz Magalhães de Freitas, orientador dessa pesquisa.

Este encontro seria o último e no próximo teríamos somente uma confraternização, com um lanche coletivo que foi proposto por eles e pelas professoras

[68] O material dourado permite representar somente figuras com ângulos retos.
[68] O quadrado de $1m^2$ de área construído no papel pardo.

participantes dos encontros. Porém como eles não terminaram as atividades deixamos para terminá-las no próximo encontro.

O professor José Luiz questionou qual era a área do chão da sala considerando como unidade o azulejo usado para revesti-lo. Após esse cálculo, o professor conjecturou com os alunos as medidas das dimensões do chão da sala em metros e calcularam aproximadamente sua área em metros quadrados, explicando que para recobrir o chão caberiam, então, aproximadamente aquela quantidade de quadrados de $1\,m^2$ de área[69]. Em seguida conjecturaram as medidas das paredes laterais da sala e calcularam sua área aproximada em metros quadrados. O professor explicou que esses cálculos são feitos para, por exemplo, comprar pisos e tintas. Para assim saber qual quantidade de material comprar e evitar o desperdício ou calcular o custo da mão de obra.

Os alunos ficaram felizes com a participação do professor. Percebemos que eles se sentiram valorizados, alguns falavam: *“Olha ele é professor da universidade e veio aqui dar aula pra gente!”*. No momento da experimentação pediam explicações a ele que os indagava para que encontrassem a solução. Alguns comentaram com o professor que não gostavam de matemática, mas que estavam gostando do seu jeito de explicar, que estavam compreendendo e que assim era mais fácil. Nesse caminhar falamos também do hectare, comparando com uma quadra da cidade em formato de quadrado com cem metros de lado.

No próximo encontro para terminar essas atividades uma aluna levou uma trena e mediu as dimensões do chão da sala com a ajuda dos colegas e determinou a medida dessa área em metros quadrados. Também calcularam com esse instrumento de medida da área das paredes laterais e da janela.

Trabalhamos a representação do decímetro quadrado e que um decímetro corresponde a dez centímetros. Eles visualizaram essas medidas na régua graduada. No material dourado solicitamos que construíssem retângulos diferentes com a mesma área, em centímetros quadrados.

Apresentaremos a seguir algumas possíveis soluções e estratégias para estas atividades.

Para a primeira atividade

Item (a)

Dois retângulos diferentes com $6\ cm^2$ *de área.*

E_1: $Usando\ a\ fórmula\ algébrica$

Como a área do retângulo deve ser $6\ cm^2$ temos por sua fórmula algébrica que: $A = b \times h = 6\ cm^2$. Assim, o produto da base pela altura é $6\ cm^2$. Sendo assim temos três possibilidades:

1) O retângulo de base $1\ cm$ e altura $6\ cm$.

2) O retângulo de base $2\ cm$ e altura $3\ cm$.

3) O retângulo de base $\sqrt{2}\ cm$ e altura $3\sqrt{2}\ cm$.

E_2: $No\ geoplano$

Só é possível construir os três retângulos, com as dimensões explicitadas na estratégia anterior.

E_3: $No\ material\ dourado$

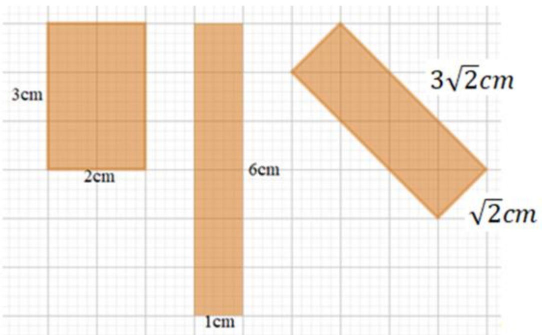
É possível construir o retângulo de base $1\ cm$ e altura $6\ cm$, sendo o retângulo formado por uma coluna com seis cubos justapostos cuja superfície tem $6\ cm^2$ de área.

E também o retângulo formado por duas colunas com três cubos cada, com a superfície medindo $6\ cm^2$ de área.

E_4: $Na\ malha$

Esses retângulos podem ser representados na malha milimetrada assim:

Figura 169 - Retângulos diferentes com a mesma área



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Todos os alunos construíram os dois primeiros retângulos (figura 169). O trio (06, 07, 09) representou primeiro esses retângulos no geoplano.

O aluno 10 explicou os procedimentos realizados em língua materna assim:

> Professora do quinto ano: Que critérios você utilizou para construir esses retângulos na malha?
> Aluno 10: Eu fiz dois vezes três e, um vezes seis e desenhei eles aqui (na malha).
> Professora do quinto ano: E como fica a área desses retângulos?
> Aluno 10: Fica seis centímetros quadrados e seis centímetros quadrados.
> Professora do quinto ano: E qual as dimensões de cada um?
> Aluno 10: Esse tem dois e três e, esse tem seis e um.

Para representar esses retângulos na malha esses alunos olharam para as medidas dos seus lados, operando a desconstrução heurística dimensional nessas figuras $(2D \to 1D \to 2D)$.

Para o item (b)

Dois paralelogramos diferentes com $8\ cm^2$ *de área.*

$E_1: Usando\ a\ fórmula\ algébrica$

Como os paralelogramos devem ter $8\ cm^2$de área, então pela sua fórmula algébrica temos que: $A = b \times h = 8\ cm^2$. Logo as possíveis possibilidades são: base $1\ cm$ e altura $8\ cm$ e, base $2\ cm$ e altura $4\ cm$.

Observe que vários paralelogramos podem ser construídos com essas medidas, existindo diversas possibilidades.

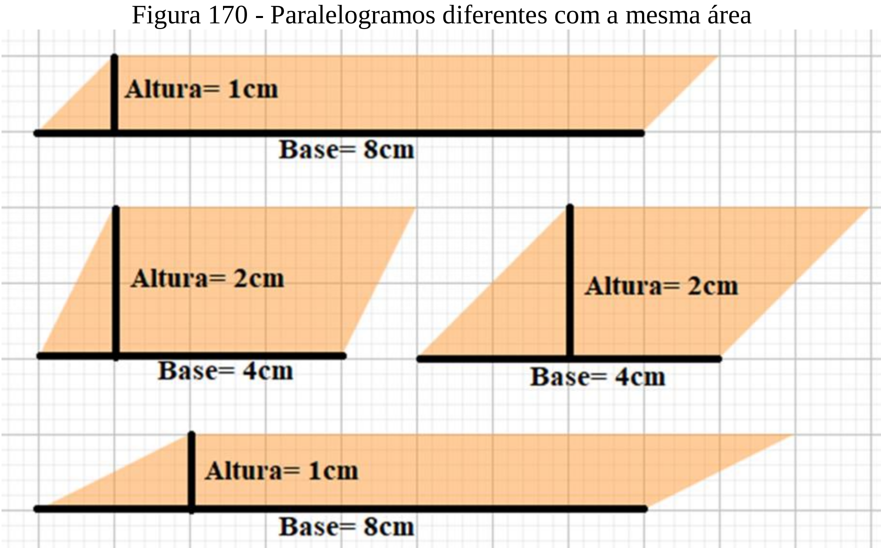
$E_2: No\ geoplano$

Qualquer paralelogramo com as medidas explicitadas na estratégia anterior terá $8\ cm^2$ de área.

$E_3: Na\ malha$

Apresentaremos, na figura 170, quatro dentre as várias possibilidades de construção.

Figura 170 - Paralelogramos diferentes com a mesma área



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Os alunos construíram paralelogramos com: base $4\ cm$ e altura $2\ cm$, base $8\ cm$ e altura $1\ cm$ e, base $2\ cm$ e altura $4\ cm$.

A aluna 02 explicou os procedimentos realizados no geoplano para construir o paralelogramo de base $4\ cm$ e altura $2\ cm$ assim:

> Pesquisadora: Como você fez para pensar com o geoplano?
> Aluno 02: A gente tinha feito assim (mostrou um paralelogramo). Daí a gente viu com o professor (José Luiz) que não dava (falou mergulhando o paralelogramo em um retângulo). Aí a gente aumentou aqui e foi ver (mergulhando este novo paralelogramo em um retângulo) que dava. A gente tirou essa parte e colocou ela aqui (reconfigurou o paralelogramo em um retângulo). Daí viu que dá oito.

No discurso da aluna 06, a seguir, percebemos os tratamentos figurais e numéricos no qual ela explica como construiu o paralelogramo de base $2\ cm$ e altura $4\ cm$. Assim:

> Aluno 06: Pra gente fazer esse paralelogramo aqui (o paralelogramo de base 2 e altura 4 no geoplano) a gente fez assim: Ele tinha que dar oito! Daí a gente fez dois vezes quatro que deu oito.

Essas alunas mobilizaram nesse discurso a fórmula algébrica da área do paralelogramo. Elas construíram também o paralelogramo de base 4 cm e altura 2 cm no geoplano, porém nessa representação calcularam a sua área contando os quadradinhos do seu interior.

Para o item (c)

Dois triângulos diferentes com 4 cm^2 *de área.*

$E_1: Usando\ a\ fórmula\ algébrica$

Os triângulos com 4 cm^2 de área de acordo com a fórmula algébrica devem ter o produto da base pela altura 8 cm^2, assim: $A_{triângulo} = \frac{b\times h}{2} = 4\ cm^2$, logo, $b \times h = 8\ cm^2$.

Existem assim as seguintes possibilidades:

- Base 1 cm e altura 8 cm. Ou vice-versa.
- Base 2 cm e altura 4 cm. Ou, base 4 cm e altura 2 cm.

Note que diferentes triângulos podem ser construídos com essas medidas, existindo, portanto, vários triângulos diferentes com a mesma área.

$E_2: No\ geoplano$

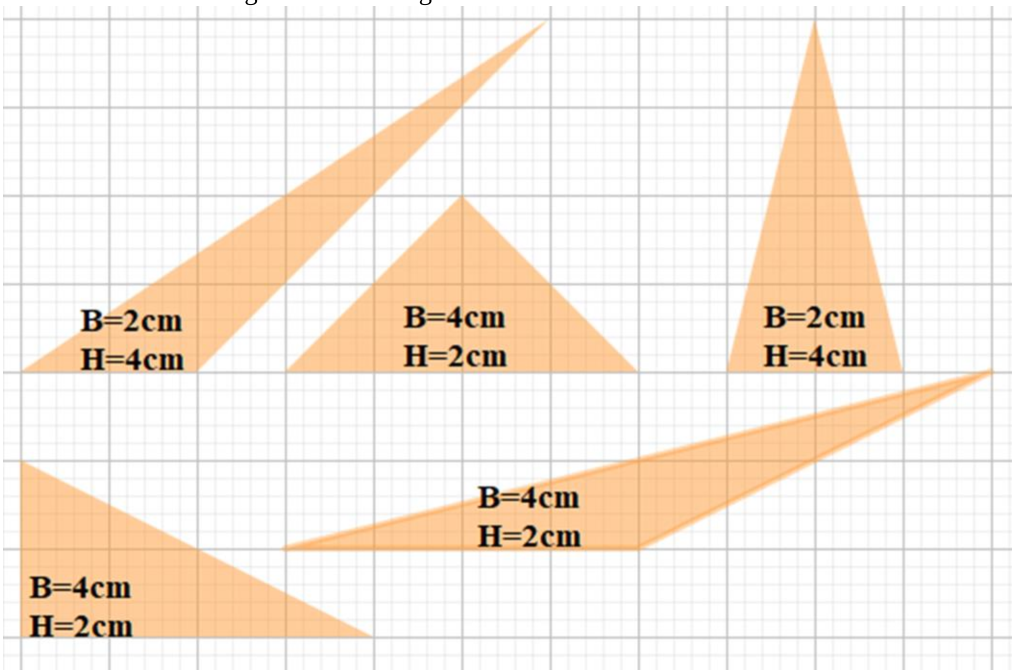
Quaisquer triângulos que possuam base 1 cm e altura 8 cm ou base 2 cm e altura 4 cm terão 8 cm^2 de área.

Os alunos também podem construir paralelogramos com 8 cm^2 de área, dividindo-os em dois triângulos congruentes de 4 cm^2 de área e representando um deles na malha.

E_3: $Na\ malha$

Colocamos (figura 171) cinco possiblidades de construir triângulos com $8\ cm^2$ de área, conforme as possibilidades descritas na estratégia (E_1).

Figura 171 - Triângulos diferentes com a mesma área



Fonte: Dados da pesquisa

Análise a posteriori

Os alunos construíram triângulos com: $b = 4\ cm$ e $h = 2\ cm$ (retângulo e isósceles) e, $b = 8\ cm$ e $h = 1\ cm$ (retângulo e isósceles). Os triângulos retângulos foram obtidos por meio da construção de retângulos de área $8cm^2$ no geoplano e após isso, dividiram em dois triângulos congruentes. Os isósceles foram obtidos por tentativas, construíam-nos no geoplano e os mergulhavam em um retângulo para verificar sua área. Alguns alunos verificaram a área do triângulo isósceles de base $b = 4\ cm$ contando os quadradinhos de dentro ou o reconfigurando em um quadrado. Depois de ter a certeza dessas áreas nesse recurso o representavam na malha. Para os triângulos isósceles tiveram dificuldades em representá-los na folha, pois olhavam para o bidimensional e não conseguiam visualizar as medidas de sua base e de sua altura correspondente.

Para o item (d)

Dois trapézios diferentes com $5\ cm^2$ *de área.*

$E_1: Usando\ a\ fórmula\ algébrica$

Substituindo a área de $5\,cm^2$ na fórmula algébrica do trapézio temos: $\frac{(B+b)\times h}{2} = 5\ cm^2$, logo $(B+b)\times h = 10\ cm^2$.

Existem estas possibilidades de construção:

Tabela 5 - Trapézios diferentes com a mesma área

Base Maior (B)	Base menor (b)	Altura (h)	Área do trapézio
$B = 9\ cm$ e $b = 1\ cm$		$1\ cm$	$5\ cm^2$
$B = 8\ cm$ e $b = 2c\ m$			
$B = 7\ cm$ e $b = 3\ cm$			
$B = 6\ cm$ e $b = 4\ cm$			
$B = 4\ cm$ e $b = 1\ cm$		$2\ cm$	
$B = 3\ cm$ e $b = 2\ cm$			

Fonte: Dados da pesquisa

$E_2: No\ geoplano$

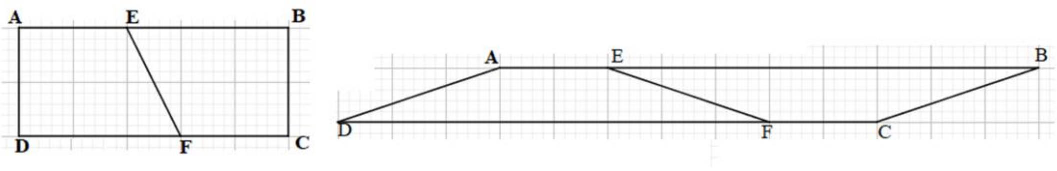
Podem-se construir paralelogramos de $10\,cm^2$ de área, dividindo-o em dois trapézios, cada um com $5\ cm^2$ de área. Representando um deles na malha.

Outra possibilidade é construir dois trapézios dentre todas as possibilidades de construção citadas na estratégia anterior.

$E_3: Na\ malha$

Explicitaremos duas possibilidades, construindo paralelogramos com $10\,cm^2$ de área, dividindo-os em dois trapézios congruentes de áreas $5\ cm^2$. Assim:

Figura 172 - Decomposição heurística por divisão mereológica homogênea



Fonte: Dados da pesquisa

O retângulo ABCD pode ser decomposto em dois trapézios retângulos com $5\ cm^2$ de área cada um, os trapézios AEFD e o EBCF.

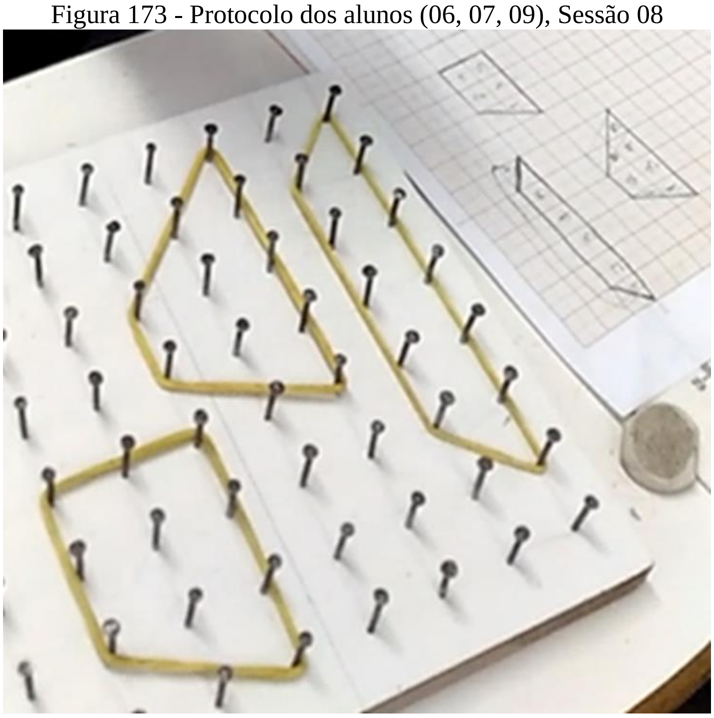
O paralelogramo ABCD também pode ser decomposto em dois trapézios isósceles com 5 cm^2 de área cada, os trapézios AEFD e o EBCF.

Pode-se ainda construir dois dos trapézios citados na primeira estratégia.

Análise a posteriori

Os alunos verificaram a área dos trapézios construídos primeiramente no geoplano com os procedimentos: contando os quadradinhos de dentro, mergulhando-o em retângulos ou por meio da decomposição heurística por divisão mereológica. Neste procedimento contavam os quadradinhos inteiros e as metades dos quadradinhos, os demais o mergulhavam em retângulos para descobrir sua área. Desse modo obtinham a área do trapézio somando as áreas das figuras dessa decomposição. Veja:

Figura 173 - Protocolo dos alunos (06, 07, 09), Sessão 08



Fonte: Dados da pesquisa

Para o item (e)

Um quadrado que possua um decímetro quadrado (dm^2) *de área. Quantos* cm^2*cabem num* dm^2*? E em um* m^2 *cabem quantos* dm^2*?*

E_1: $Usando\ a\ fórmula\ algébrica$

Um decímetro quadrado ($1\ dm^2$) corresponde a um quadrado de um decímetro de lado ($l = 1\ dm$). Usando a fórmula algébrica: $A = l \times l = 1\ dm^2$, logo: $1\ dm \times$

$1\ dm = 1\ dm^2$. Como $1\ dm$ corresponde a $10\ cm$ temos que:$1\ dm^2 = 1\ dm \times 1\ dm = 10\ cm \times 10\ cm = 100\ cm^2$.

E analogamente, $1\ m^2 = 1\ m \times 1\ m = 10\ dm \times 10\ dm = 100\ dm^2$, ou, $1\ m^2 = 1\ m \times 1\ m = 100\ cm \times 100\ cm = 10.000\ cm^2$.

Portanto $1\ dm^2$=$100 cm^2$ e $1\ m^2 = 100\ dm^2$=$10.000\ cm^2$.

Era esperado que os alunos não tivessem dificuldades em realizar essas conversões porque na sessão 04 apresentamos o quadrado de $1\ m$ de lado construído no papel pardo, quadriculado em quadrados de $1\ dm^2$ de área. Nessa representação mostramos que os cem quadrados de 10 cm de lado possuíam cada um $100\ cm^2$ de área ou $1dm^2$. Bem como, colamos em um dos quadrados de $1dm^2$ de área 100 quadrados de $1\ cm$ de lado para eles visualizarem que em um decímetro quadrado cabem 100 centímetros quadrados. Sendo assim, cabem num metro quadrado cem decímetros quadrados e dez mil centímetros quadrados.

E_2: $No\ geoplano$

Para construírem um quadrado de área $1\ dm^2$ teriam que identificar que se trata de um quadrado de $10\ cm$ de lado ($1\ dm = 10\ cm$), construindo o quadrado 10 cm de lado, visualizando que cabem nele 100 quadrados de $1\ cm^2$ de área. Assim, $1\ dm^2 = 100\ cm^2$.

Os alunos deveriam ter a percepção que em um metro quadrado são necessários dez desses quadrados no comprimento e dez desses na altura, totalizando 100. Quer dizer: $1\ m^2 = 100 \times 1\ dm^2 = 100 \times 100\ cm^2 = \ 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2$.

Portanto cabem $100\ cm^2$ num dm^2 e $100\ dm^2 = 10.000\ cm^2$ num m^2.

E_3: $No\ material\ dourado$

Primeiramente o aluno deve saber que $1\ dm = 10\ cm$ para depois construir o decímetro quadrado com 100 cubos, os que representam as unidades. Ou considerar a placa que representa as centenas. Nesse procedimento se deve olhar para a superfície desse quadrado.

Como um metro quadrado corresponde a um quadrado de um metro de lado, temos que cabem nele cem superfícies dessas placas, ou seja, $100\ dm^2$.

E_4: $Na\ malha$

Basta representar o quadrado com $10\,cm$ de lado. Nessa representação visualizar que cabem $100\ cm^2$ em $1\ dm^2$. E, após responder que cabem $100\ dm^2$ em $1\ m^2$.

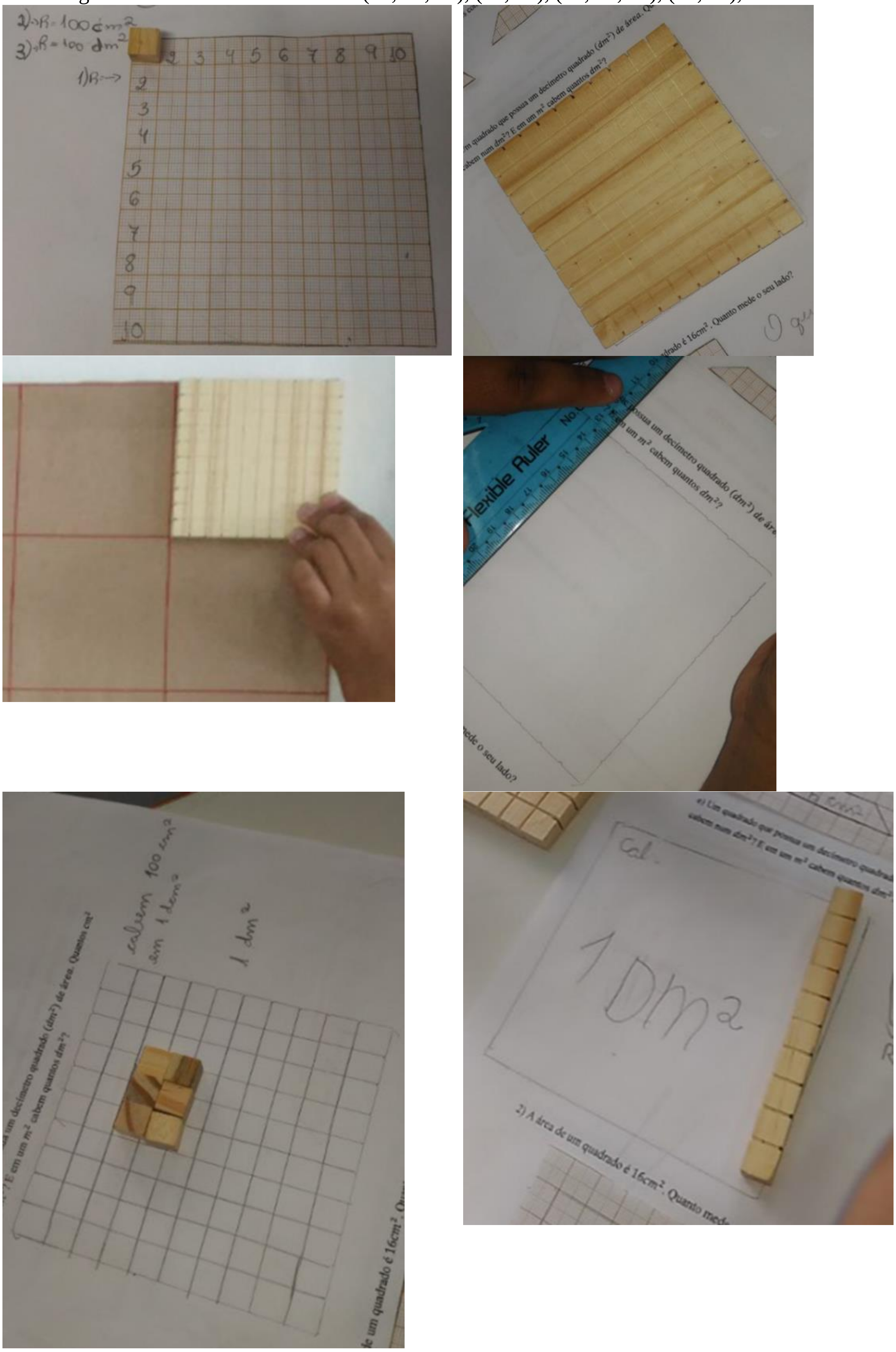
Observação: Não tem como representar, nessa atividade, o quadrado de $1\ m^2$ de área. Para responder quantos decímetros quadrados cabem em um metro quadrado os alunos teriam que usar a percepção. Eles podiam usar a malha ou o geoplano usando uma escala de 1 cm para cada 1 dm.

Análise a posteriori

Os alunos deixaram esse item para o último encontro, o da confraternização. Eles chegaram e começaram inicialmente a brincar com o material dourado. Nesse clima solicitamos que construíssem com esse recurso algumas figuras com áreas em cm^2. Em seguida, eles responderam essa atividade por meio da visualização do quadrado de $1dm^2$ de área do material dourado. Alguns deles pegaram a placa das centenas e sobrepuseram no quadrado de $1dm^2$ de área representado no papel pardo para ter certeza de sua área e confirmar que cabem cem dessas placas em $1\ m^2$.

Para representar esse quadrado alguns alunos usaram a placa das centenas do material dourado (figura 174), contornando-a. Outros desenharam o quadrado diretamente na malha e após isso recobriram esse quadrado com 100 cubinhos (os da unidade) ou com 10 barrinhas (os da dezena). Nesse caminhar, aproveitamos e explicamos que a placa das centenas do material dourado é uma malha centimetrada.

Figura 174 - Protocolo dos alunos (03, 10, 11), (04, 05), (06, 07, 09), (01, 02), Sessão 08



Fonte: Dados da pesquisa

Para a atividade (2)

A área de um quadrado é $16cm^2$. *Quanto mede o seu lado?*

E_1: $Usando\ a\ fórmula\ algébrica$

Como este quadrado tem $16\ cm^2$ de área temos por sua fórmula algébrica que:

$$A = l \times l = 16\ cm^2$$

$$l^2 = 16\ cm^2$$

Logo: $l = 4\ cm$.

E_2: $No\ geoplano$

Construir um quadrado com $16\ ua$ de área e após isso verificar que a medida do seu lado é 4 uc, que corresponde a 4 cm.

E_3: $No\ material\ dourado$

Construir um quadrado com dezesseis cubinhos e verificar que cabem quatro deles em cada lado, logo esse quadrado tem 4 cm de lado.

E_4: $Na\ malha$

Construir um quadrado com 4 cm de lado.

Análise a posteriori

Alguns alunos construíram primeiramente esse quadrado no geoplano e em seguida o representaram na malha. Outros o construíram com os cubinhos do material dourado. Percebemos que alguns deles sabiam que seu lado deveria ter $4\ cm$ porque $4 \times 4 = 16$. Porém tiveram ainda dificuldades em diferenciar cm e cm^2. Eles confundiam o unidimensional com o bidimensional.

5.8.2 Considerações sobre a oitava sessão

Percebemos que os alunos tiveram dificuldades em representar os triângulos isósceles de $4\ cm^2$ de área na malha milimetrada. Eles o construíram no geoplano, porém não sabiam como representá-los na folha milimetrada. Desenhavam-no com o auxílio da régua e verificavam que a área não estava correta, apagando-os. Alguns chegaram a pedir outra folha.

Representar as figuras na malha exigiu dos alunos o olhar de construtor sobre elas e a heurística, pois tiveram que realizar a decomposição ou o mergulhamento para justificar sua área. Esses procedimentos fizeram parte da visualização matemática, do olhar inventor e das apreensões perceptivas e discursiva.

Essas dificuldades ocorreram, pois exigiu que os alunos a desconstruíssem dimensionalmente $(0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D)$. Este procedimento requer a visualização não icônica articulada com a apreensão discursiva sobre essas figuras geométricas que é uma especificidade para a aprendizagem geométrica. Eles tiveram que desconstruir a figura $(2D)$ representada no geoplano para reconstruí-la na malha e isso exigiu que estabelecessem uma ordem nas operações efetuadas por meio da apreensão sequencial controlada pela perceptiva e discursiva, que eles não estão habituados.

A representação das figuras na malha exigiu deles a visualização não icônica (olhar construtor e inventor), onde a régua e o lápis comandaram a decomposição visual dessas figuras geométricas. Nesse caso, percebemos que as representações delas no geoplano permitiram a passagem da visualização icônica (botânico e agrimensor) para a não icônica (construtor e inventor), estabelecendo uma ponte entre o concreto e o formal, entre o material e o mental, entre o prático e o teórico (DUVAL, 2005).

Percebemos que para representar os triângulos retângulos na malha construíram retângulos com o dobro da área e traçaram sua diagonal. Para esse procedimento adicionaram traços que não pertencem ao triângulo retângulo construído, mergulhando-o em um retângulo. Esses traços são, para Duval (2005), "*traços intermediários*" ou "*traços suportes*" que permitem a exploração heurística nas figuras a fim de descobrir nesses procedimentos sua área. Duval (2005) observa que normalmente os alunos possuem o hábito desastroso de apagar esses traços assim que a figura é obtida. Isso pode ser observado na construção dessas figuras na malha, porém a representação delas no geoplano serviu de suporte para os raciocínios elaborados e de controle para justificar sua área por meio dos tratamentos figurais e numéricos realizados.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Nas análises feitas percebemos que o uso de diferentes representações em diversos registros, juntamente com as apreensões e os olhares em geometria, oportunizaram a aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros. Observamos que as atividades organizadas para a exploração heurística sobre as figuras geométricas contribuíram para a aprendizagem de áreas e a superação de dificuldades, pois durante as sessões percebemos a evolução dos raciocínios dos alunos evidenciada pela apreensão discursiva do grupo e pelos tratamentos figurais realizados nas figuras. Nas últimas sessões quase todos os alunos realizavam o procedimento de reconfiguração nas figuras geométricas calculando suas áreas de modo mais autônomo, exploravam-nas heuristicamente para determinar sua área ou para validar o cálculo em outro registro.

Nos protocolos produzidos pelos alunos ao longo das sessões, observamos os procedimentos utilizados para determinar a área de uma mesma figura geométrica por meio de reconfiguração, mergulhamento, desconstrução dimensional, decomposição, registros numéricos e figural, bem como os tratamentos e conversões mobilizados. Esses procedimentos, sobretudo a exploração heurística das figuras para determinar suas áreas, permitiram que os alunos criassem novas formas de resolver uma mesma atividade, explorando as diversas representações semióticas que possibilitaram o acesso ao objeto matemático representado *"áreas de figuras planas"*.

Antes dessa nossa experimentação, esses alunos já tinham visto áreas de figuras planas por meio das fórmulas. Nas atividades geométricas propostas para que alcançássemos nossos objetivos, com variação de representações e de registros, percebemos que eles conseguiram produzir diversas estratégias para determinar a área das figuras, buscando-as heuristicamente explorando diversas figuras, procedimentos que não tinham aprendido antes a utilizar em sala de aula. Isso possibilitou que tivessem um maior desenvolvimento em seus modos de pensar, olhar para as figuras geométricas e raciocinar.

A construção de figuras no geoplano com áreas específicas e a sua representação na malha permitiram as operações de: reconfiguração, mergulhamento, composição e decomposição. Esses movimentos sobre a figura contribuíram para o seu papel heurístico e, além disso, os alunos puderam desenvolver a habilidade de visualizar a figura em diferentes posições. Assim, realizaram tratamentos figurais e numéricos que podiam ser mobilizados nessas figuras geométricas que possibilitaram produzir diferentes soluções e validá-las por meio da comparação dos resultados.

Para alcançar nossos objetivos tivemos que pensar nas figuras que podíamos explorar, variável didática na maioria das atividades da nossa sequência didática, pois a operação de reconfiguração que consideramos importante para a aprendizagem de áreas, não aparece de forma evidente em figuras usadas no ensino. Sendo assim, procuramos elaborar atividades que favorecessem essa operação e possibilitassem explorar as diversas representações em recursos materiais. Nesse caminhar, buscamos explorar procedimentos heurísticos de modo que os alunos saíssem da apreensão preceptiva, que é automática, e passassem para a apreensão operatória.

Com isso percebemos que algumas dificuldades puderam ser identificadas por meio das apreensões discursivas elaboradas junto às distintas representações semióticas mobilizadas pelos alunos durante as sessões e assim sermos mais pontuais nos encaminhamentos visando à aprendizagem desse conceito.

Percebemos que as atividades que exigiam o emprego das fórmulas algébricas foram mais difíceis para os alunos do que as desconstruções dimensionais mobilizadas, pois a maioria dos alunos as usava mecanicamente. Sendo assim, quando tinham que usá-las, eles primeiramente exploravam heuristicamente as figuras determinando sua área e, em seguida, aplicavam as fórmulas como uma forma de validá-las em outro registro. Alguns alunos não aplicaram a fórmula na figura original e sim na obtida após a reconfiguração, por exemplo, fizeram isso tanto no losango quanto no paralelogramo quando os reconfiguraram em um retângulo. Vários alunos, no decorrer dos encontros, começaram a mobilizar as fórmulas algébricas do quadrado, do retângulo e do paralelogramo automaticamente para determinar sua área. Porém não apareceu em nenhum protocolo o registro algébrico**,** provavelmente por não usarem esse registro ainda em seus cálculos.

Os alunos tiveram dúvidas quanto ao aspecto dimensional das figuras, confundiam $\boldsymbol{cm}$ com $\boldsymbol{cm^2}$, $\boldsymbol{m}$ com $\boldsymbol{m^2}$ e com outras unidades de medida. Eles não sabiam diferenciar as unidades de medida de comprimento e de área. Porém, este pequeno desvio não afetou os objetivos de nossa pesquisa, pois pudemos perceber que houve aprendizagem diante de todos os registros, apreensões, olhares e representações mobilizadas por eles.

Variar as representações e os registros contribuiu para atingir nossos objetivos, pois no estudo de áreas de figuras planas quando se tem simultaneamente números e medidas temos representações semióticas mistas (DUVAL, 2011). Elas resultam da fusão de três tipos de representações: a figural, a numérica e as medidas. Distinguir e transformar estas representações é essencial para a aprendizagem de áreas e superação de dificuldades, pois são condições necessárias para a produção de novos conhecimentos, para enfim tornar os objetos matemáticos acessíveis aos alunos. As produções dos alunos ocorrem por meio de representações semióticas.

Durante as sessões percebemos que os alunos por meio do registro da língua materna, que "[...] constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento", Duval (2011, p. 83), e da apreensão discursiva sobre as figuras geométricas e dos tratamentos figurais, puderam tomar consciência da exploração heurística que as figuras geométricas permitem, respondendo, muitas vezes, uma mesma atividade de modos diferentes.

Com a articulação da linguagem, visualização, representações e registros mobilizados pelos alunos, pudemos compreender os raciocínios e dúvidas elaborados por eles, e assim propor outras atividades e questionamentos que contribuíram para superação de dificuldades, visando a utilização de diferentes estratégias para determinar áreas de triângulos e quadriláteros. Além disso, foi possível a valorização de seus conhecimentos geométricos, pois, para Duval (2009, p. 29), "[...] não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação."

As diferentes representações semióticas abordadas neste estudo propiciaram um ambiente agradável e desafiador, as quais oportunizaram a aprendizagem por meio dessas transformações de representações. Para Duval (2011), esses conhecimentos não consistem em um processo de construção, mas de interpretações. De fato, interpretamos as representações semióticas somente para transformá-las em outras, "É por isso que, em Matemática, uma representação semiótica só é interessante à medida que ela pode ser transformada em outra representação e não em função do objeto que ela representa" (DUVAL, 2011, p. 52).

Por essas razões e resultados obtidos nesta pesquisa acreditamos ser viável valorizar as representações semióticas na aprendizagem de áreas de figuras planas, por meio da elaboração de figuras geométricas, quer sejam feitas à mão livre ou com o auxílio de malhas, tangram, geoplano, pois permitem tratamentos e a mobilização de registros de representação semiótica diversos, que revelam processos cognitivos específicos nessas atividades geométricas, como a apreensão perceptiva, operatória e os olhares botânico e inventor sobre as figuras que contribuem para a aprendizagem (DUVAL, 2005, 2011, 2012, 2012b).

A análise cognitiva dessas representações e transformações semióticas, dos tratamentos e conversões realizados pelos alunos, diante dos registros inerentes às atividades propostas, contribuiu para que pudéssemos compreender como o aluno articula seus conhecimentos geométricos possibilitando a aprendizagem e superação de dificuldades em geometria. Para Duval, os problemas de aprendizagem em geometria ocorrem devido às dificuldades em coordenar os tratamentos oriundos dos registros figurais e discursivos e, também, nos tratamentos espontâneos que surgem nos registros discursivo e figural.

A pesquisa desenvolvida nos faz crer que os procedimentos de divisão mereológica nas figuras devem ser mais explorados no estudo de áreas de figuras planas por permitirem formar novas figuras com invariância de área.

Essas reconfigurações, neste estudo, permitiram a compreensão do conceito de área, pois os alunos tiveram a oportunidade de encontrar a solução das atividades, buscando-as heuristicamente nas figuras por meio dos tratamentos figurais que se tornou uma ferramenta de fácil manipulação para eles, possibilitando o cálculo de área, o que pode ter contribuído para uma mudança nas formas de pensar, raciocinar e olhar para as figuras geométricas.

Para futuras investigações, sugerimos um estudo, no qual, professores do quinto e sexto ano do Ensino Fundamental pudessem pensar em atividades para propor aos alunos de modo a explorar essa produtividade heurística sobre as figuras geométricas, a desconstrução dimensional que elas permitem, juntamente com os registros e as representações, valorizando as apreensões e os olhares. De fato, a presença das professoras no desenvolvimento das sessões, bem como seus depoimentos (anexo I) apontam para a necessidade de estudos, preparação de atividades semelhantes às realizadas nesta pesquisa, experimentações em sala de aula e troca de experiência entre eles.

Outra perspectiva seria acompanhar alunos por um tempo maior, talvez um ano, investigando suas aprendizagens e superações de dificuldades, propostos por estes quadros teóricos de Duval.

Analisando as produções dos alunos no estudo de áreas, concluímos que é possível realizar um trabalho com as figuras geométricas visando a aprendizagem desse conceito, com encaminhamentos para superação de possíveis dificuldades, para o progresso e autonomia dos alunos por meio de atividades de explorações heurísticas, que os conduzam a superar possíveis fracassos ou bloqueios e assim a gostar de aprender geometria.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**, 2004, p. 94-108. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf. Acesso em Julho de 2015.

____________, S. A. **A geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje?** In ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. São Paulo: VII EPEM, 2004.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. **Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos.** Disponível em <http://ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf> 23areunião anual da anped. 2000. Acesso em 20 de novembro de 2017.

ANDRADE, J. B. de; MANRIQUE, A. L. **Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do ensino médio.** São Paulo: PUC-SP, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia didática.In Brun, Jean (Org). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Coleção Explorando o Ensino de Matemática. **Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação básica**, 2010.

BITTAR, M.. **Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática**. In: Rosinalda Aurora de Melo Teles; Rute Elisabete de Souza Rosa Borba; Carlos Eduardo Ferreira Monteiro. (Org.). Investigações em didática da matemática. 1ed.Recife: UFPE, 2017, v. 1, p. 101-132.

BITTAR, M; Freitas, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2ª ed. Campo Grande, MS. UFMS, 2005.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf > Acesso em 20 de setembro de 2017.

BRANDT, C. F; MORETTI, M. T. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil** – São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597 – 616, 2015.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, 5ª a 8ª Séries. Brasília, 1998.

______, Parâmetros Curriculares Nacionais: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______, MEC-SEB. **Guia de livros didáticos: PNLD 2016** – matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia. Dias. Alcântara. (Org). **Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3 ed, revisada, 3 reimpr. São Paulo: EDUC., 2015, p. 167-188.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives**, nº10 p.5 a 53, 2005.

________. **Semiose e pensamento humano:** registro de representação semiótica e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I). Tradução: Lênio F. Ley e Marisa R. A. da Silveira. Editora da Física, São Paulo, SP, 2009.

________. **Ver e ensinar matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. Editora PROEM, 1ª Ed. São Paulo, 2011.

________. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. REVEMAT, V.07, n.2, p. 266-297. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012.

________. **Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência**. REVEMAT. V. 07. n.1, p. 118 – 138. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012b.

________. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática.** (Entrevista realizada por José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Resende) V.2, n.3 jul-dez. Campo Mourão, PR, 2013.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do Ensino Fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FLORES, C. R. & MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em Geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **REVEMAT – Revista eletrônica de Educação Matemática.** V.1 p. 5 – 13, UFSC, 2006.

FREITAS, J. L. M; MONGELLI, M. G. J. G. ***Linguagem Matemática e Resolução de Problemas*** – EaD, Campo Grande: Editora da UFMS, 2008.

________, J. L. M. Espaço e forma: Módulo II, Campo Grande, 2011. **Apostila Formação Continuadas de Professores da Rede Estadual de Ensino Fundamental de 5ª a 8ª série** – DMT – UFMS.

________, J. L. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2015. p. 77-111.

FTD **Sistema de Ensino**: SIM: português, matemática, ciências, história, geografia: 5º ano, módulos 2 e 3. – 1. Ed. – São Paulo: FTD, 2014.

KRAKECKER, L. **Produção de conjecturas e provas de propriedades de ângulos de polígonos: um estudo com alunos do oitavo ano do ensino fundamental.** 2016. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UFMS, Campo Grande, 2016.

LIMA, R. G. A. de. **Problemas de combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática.** 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, UFMS, Campo Grande, 2015.

LORENZATO A. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista,** ano III, n.4. Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.

MACHADO, S. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução.3. ed. Revisada. 3 reimpr. São Paulo: EDUC, 2015. p. 233-247.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Guia de livros didáticos: 6º ao 9º** ano – PNLD 2017. Brasília, 2016.

MOISE, DOWNS. **Geometria Moderna,** Editora Edgard Blücher Ltda. Tradução da Editora Universidade de Brasília, Brasília: 1971.

MORAN, M. **As apreensões em geometria:** um estudo com professores da educação básica acerca de registros figurais. 2015. 248 f. Tese (Doutorado em Centro de Ciências Exatas)- Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2015.

MORETTI, M. T; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras – Construction of a methodological Picture of semiotic and cognitive analysis concerning geometry problems involving figures. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo v. 17, n. 3, p. 597 – 616, 2015.

PAIS, L. C.; FREITAS, J. L. M. **Um Estudo dos Processos de Provas no Ensino e na Aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental.** Bolema (Rio Claro), Rio Claro – SP, v. 13, p. 62 – 70, 1999.

PAVANELLO, M. R. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** In: Revista Zetetiké, ano 1, nº 1, pp. 07 – 17. UNICAMP, Faculdade de Educação, 1993.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender Geometria?** In VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. Disponível em: <https://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5&q=Por+que+Ensinar%2Faprender+Geometria%3F+&btnG=em> Acesso em jan. de 2017.

PAOLIELLO JUNIOR, L. Livro do professor. 4 ed. Fortaleza: **Sistema Ari de Sá de Ensino**, 2017. (Coleção Fundamental). 13p.: v.4.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada**: influência de algumas variáveis. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica)- Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológia, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

QUEIROZ, P. C. **Uma proposta para o ensino de função articulando as linguagens algébrica e geométrica**. 2014. 158 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande/MS, 2010.

SANTANA, W. M. G. de **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área:** uma análise em livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SILVA, A. D. P. R. da. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica:** um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6ºano do ensino fundamental. 2016. 315 f. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA J., F. R. da. Atividades suplementares: 6º ano/ Francisco Ribeiro da Silva Júnior [et al]. – 2. Ed. – Fortaleza: **Sistema Ari de Sá de Ensino**, 2015. (Coleção Fundamental). 94p.: il. v. 4.

SILVA, L. R. da. Livro integrado – 6º ano/Laryssa Rodrigues da Silva/ Georgia Fabiana Mendes Marinho (Org). – 6 ed. – Fortaleza: **Sistema Ari de Sá de Ensino**, 2017. (Coleção Fundamental). 328p. v.3.

TREVISAN, E. P. **Um estudo sobre a articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de geometria com professores da rede pública.** 2016. 260 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática)- Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGECEM da Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – REAMEC, Universidade Federal de Mato Grosso, 2016.

VIANA, O. A; BOIAGO, C. E. P. Registros de representação semiótica em atividades de desenho geométrico no GeoGebra. **REVEMAT**. V.10. n.1, p. 162 – 182, 2015.

ANEXO 1 – UMA BREVE CONVERSA COM AS PROFESSORAS QUE PARTICIPARAM DAS SESSÕES

Entrevista com a professora do quinto ano[70] do Ensino Fundamental e com a professora da educação infantil[71].

1) O que as levou a participar voluntariamente de todas as sessões da pesquisa?

Professora da educação infantil: *Na verdade eu coloquei a minha filha por que ela não tinha interesse com a matemática, não gostava. Ela colocou na cabeça que não gostava de matemática. E eu a levei pra ela despertar isso, só que eu fiquei muito mais curiosa que ela (rsrsrs). Percebi que seria uma oportunidade pra eu estar mudando minha metodologia dentro de sala de aula. E daí, a cada aula era uma descoberta, eu via algo acontecendo que eu poderia levar pra minha sala de aula. Isso foi despertando muito interesse, muita vontade em aprender, porque eu não sabia também muita coisa.*

Professora do quinto ano: *Por ser formada em matemática, para mim seria algo novo, que eu nunca tinha participado. Quando você veio, eu já tinha dado o conteúdo de área fundamentado em fórmulas, então olhei e pensei, puxa foi um fracasso, onde errei? Porque os livros também vêm com fórmulas e fórmulas e, mesmo que tenham uma parte com métodos diferentes, temos uma tendência em permanecer com alguns conceitos e vícios para ensinar este conteúdo. Na sala de aula temos alguns questionamentos dos alunos como: "Professora por quê isso?" "Mas, por quê aquilo?" "De onde vem isso?". Eu sabia explicar, mas não parava para fundamentar a representação da fórmula e isso mexeu comigo. Pensei: "Eu sei fazer isso! Mas, não demonstrei pra eles". No decorrer dos encontros refleti: "Puxa vida! A gente não aprende isso lá atrás. Porque eu acho que essa é uma falha que tem principalmente no curso de matemática. Não tem esse trabalho com o geoplano, com o tangram. E são conceitos que são dados lá atrás e que são levados... Se algo dá errado, lá na frente a criança vai ser prejudicada. E isto é um cuidado que eu tenho. De estar acertando esses conceitos na minha prática pedagógica.*

2) Esta experiência contribuiu de algum modo em sua prática pedagógica? Em quê?

---

[70] Possui formação em: Ciências Exatas com ênfase em informática, habilitado em Matemática.
[71] Possui formação em: Pedagogia – Educação infantil e séries iniciais do Ensino Fundamental 1.

Professora da educação infantil: *Sim, contribuiu. Eu deixava a geometria de lado..., me preocupava mais com a sequência numérica e agora estou mais preocupada em trabalhar o concreto. Eu trouxe mais para a sala de aula o concreto, explanando mais pra eles entenderem e não só ficar decorando. Este ano eu comecei minhas aulas com atividades onde eles têm que relacionar quantidade com número. O ano passado eu consegui trazer a questão da geometria, mostrando a eles as formas planas. Antes eu só desenhava pra eles e fazia o básico. Hoje não. O ano passado já fiz isso. Nas formas planas já mostrei pra eles qual a forma do retângulo, do triângulo. E eles conseguiram sentir o que era, tocar. E esse ano eu também consegui fazer isso. Fazê-los entender o que é a forma geométrica.*

Eu deixava a geometria de lado por conta dos compromissos, das metas, eu achava que não seria interessante. Eu percebi que o básico da geometria no primeiro ano vai influenciar muito nas outras séries.

Pesquisadora: E deu tempo de você retomar alguma coisa no ano passado após os encontros?[72]

Professora da educação infantil: *Deu. Deu porque a geometria é no quarto bimestre. Os sólidos geométricos era no terceiro bimestre e no quarto bimestre vinha a geometria plana. Daí eu trabalhei as formas planas no papel, dividi o papel pra mostrar a eles. Trabalhei o Tangram com o papel. Para mim foi interessante. Foi muito válido como mãe, como aluna e como professora. Aprendi também muita coisa (rsrsrsrs), porque quando eu estudei meu ensino fundamental a gente ficava muito preso às fórmulas e eu consegui perceber na prática o significado dessas fórmulas. Eu tive outro olhar, despertou... Eu entendi na verdade o que eram essas fórmulas. Ficar só decorando, decorando... você não aprende. Quando você trouxe aquelas tábuas lá (o geoplano) eu consegui entender o porquê a fórmula era daquela maneira. Ficou bem mais claro.*

Professora do quinto ano: *Sim contribuiu com a questão da geometria e das fórmulas. Vou sair um pouco do contexto, vejo, por exemplo, como a compreensão das unidades, dezenas e centenas para efetuar uma conta de adição, na qual vêm os questionamentos como: "Por quê vai para a dezena?", "Por que um número fica e o outro sobe e soma com o outro?", e, voltamos e explicamos essas razões. Muitas vezes,*

[72] Esta pergunta foi feita como continuação da questão 2 para a professora da educação infantil.

vemos falhas nestes conceitos básicos em nós mesmas. Por mais que explique com o ábaco, material dourado, quando vejo falhas eu volto e retomo o conteúdo.

Após esta experiência com você, passei a refinar mais as diferentes maneiras de resolver uma mesma atividade. De retomar as explicações de modos diferentes, até mesmo por que têm crianças que não entendem sem a representação, elas têm que ver para crer, elas são muito visuais.

Às vezes, pensamos: "Quinto ano", mas eles estão muito imaturos ainda e é o que a gente sempre conversou a questão da... é isso que ela descobriu (a professora da educação infantil), a fundamentação. Por quê os conteúdos estão assim em cada ano escolar (as razões dos conteúdos em cada ano escolar)?. Onde iniciou o que estou ensinando aqui e será usado como? Sempre procurei ser observadora neste sentido, gosto de conversar com outros professores e ver com eles os conteúdos desde as séries iniciais para que os alunos cheguem fundamentados no quinto ano. Com o objetivo de saber o que devo ensiná-los neste ano escolar, onde devo fundamentar mais. Procuro o professor de matemática do sexto ano para saber até onde devo conduzi-los, para que saibam o que vai ensiná-los. Eu tenho esta preocupação, de entregar os alunos para o professor do sexto ano fundamentados para ele seguir com os conteúdos. Na minha visão, os conteúdos, principalmente, os de português e matemática têm que estar bem fundamentados para não gerar nos alunos prejuízos de aprendizagem nas séries finais.

A participação nos encontros da pesquisa contribuiu nessa prática de representar para eles, de mostrar de onde vieram às fórmulas. A refletir se realmente tenho que trabalhar com a fórmula... Existe a fórmula? Existe! Facilita? Facilita. Mas, como tirar isso? Então, eu consegui no final do ano, ainda no quarto bimestre, voltar e demonstrar pra eles através do Tangram a área de algumas figuras, usando este recurso. Percebi que os alunos conseguiram compreender com mais facilidade, principalmente, os que participaram dos encontros. Eles puderam perceber que esse aprendizado não foi só nos encontros da pesquisa, mas, na sala de aula, no dia a dia. Observei também uma satisfação nesses alunos quando puderam ensinar aos seus colegas esse conteúdo, eles viram que não foi um tempo perdido.

Para mim, foi muito válido! Não tive isso no curso de matemática. Por ouvir falar que a geometria dá medo quando vamos para a sala de aula, por ouvir reclamações do tipo: "Aí meu Deus Geometria! Figuras! Áreas!" "Pra que eu vou precisar disso?" Enfim, eu sempre procurei trabalhar com questões cotidianas em sala de aula, como por exemplo, "Por quê temos que aprender a calcular a área?" "Bom, *se o pai de vocês vai colocar piso na casa, qual é a área que deve ser azulejada?" "Quantos metros quadrados de piso vão ser necessários comprar?" "E, se vai pintar uma parede, qual a quantidade de tinta que terá que comprar?" Porém, depois dos encontros, com certeza, procurarei fundamentar mais o conceito de área, usando materiais concretos e representando de modos diferentes para eles compreenderem melhor. Posso dizer que isto foi uma mudança grande para mim, que ajudou e ajudará bastante. Obrigada.*

ANEXO 2 – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Sessão 01

1) Sabendo que a peça quadrada do tangram tem 2 unidades de área, determine as áreas das outras peças. Desenhe a solução ou as decomposições feitas em cada figura no espaço abaixo.

2) Construa um quadrado com todas as peças do tangram.

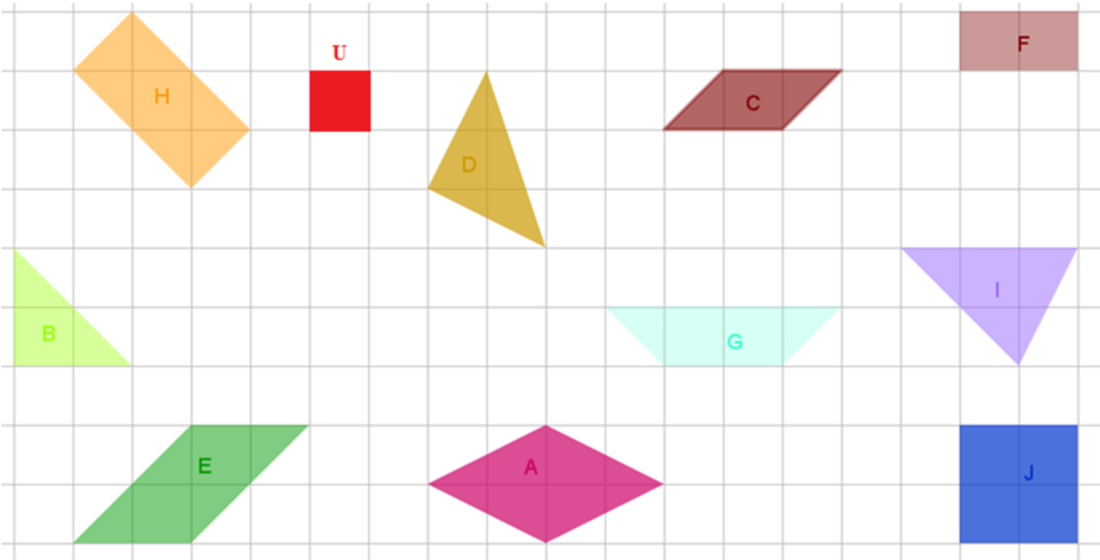
a) Quantos TP cabem nesse quadrado? E quantos quadrados? Responda no espaço abaixo.

b) Determine a medida da área desse quadrado, admitindo que o triângulo pequeno tem 1 unidade de área ($TP = 1\ ua$). Responda no espaço abaixo.

Sessão 02

1) Sabendo que o quadrado vermelho U (

) tem 1 unidade de área (1 ua), calcule a área de cada uma das figuras abaixo.



Sessão 03

1) Construa no geoplano triângulos e quadriláteros com quatro unidades de área ($4\,ua$), sabendo que cada quadradinho tem uma unidade de área ($1\,ua$). Depois, represente-os no papel quadriculado abaixo.

Sessão 04

1) Um retângulo tem área $2\,m^2$ e um dos lados mede $50\,cm$. Quanto mede o outro lado?

2) Utilizando régua e esquadro, construa:

a) Dois retângulos diferentes de área $4\,cm^2$.

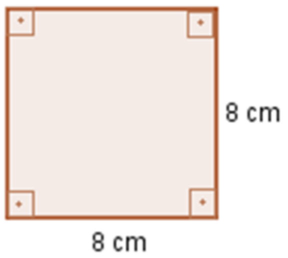
b) Dois triângulos diferentes (um escaleno e um isósceles) de área $3\,cm^2$.

3) Construa com as peças do tangram: um quadrado, um retângulo, um paralelogramo e um trapézio com duas unidades de área ($2\,ua$), sabendo que a peça quadrada tem uma unidade de área ($1\,ua$).

Sessão 05

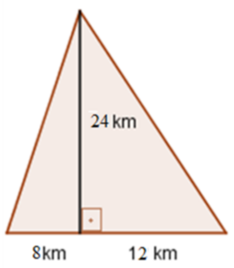
1) Determine a área dos polígonos abaixo.

a)

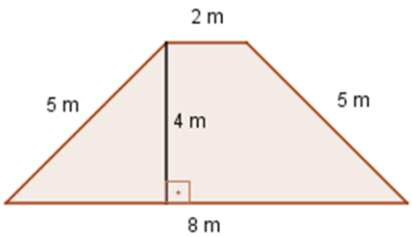


b)

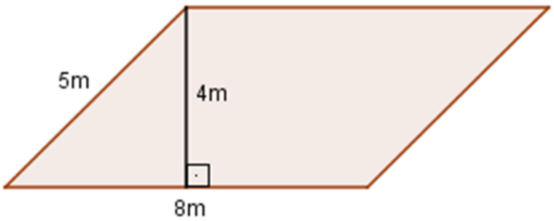
c)



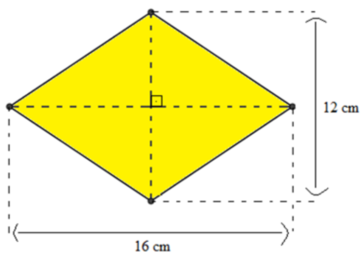
d)



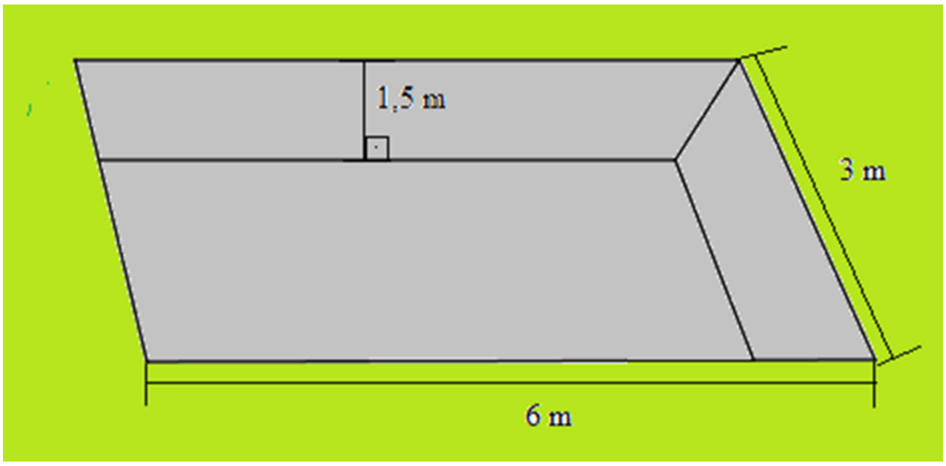
e)



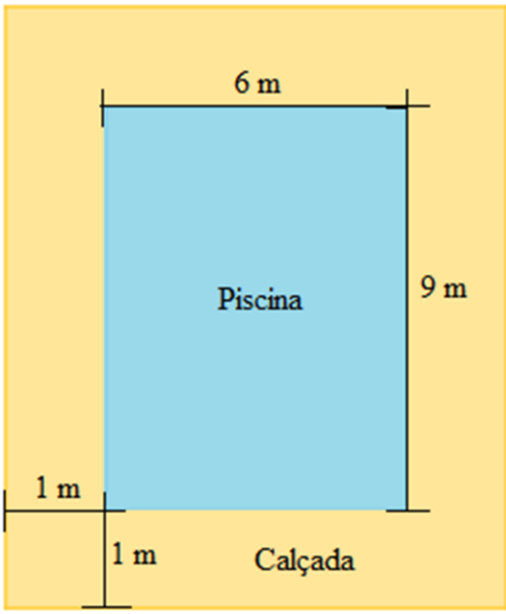
f)



2) Carlos está construindo uma piscina na sua casa. Ela tem $6\,m$ de comprimento , $3\,m$ de largura e $1{,}5\,m$ de profundidade. A piscina está em fase de acabamento, falta somente assentar os azulejos. Carlos irá comprar caixas de azulejos que cobre $2\,m^2$ de área cada uma, quantas caixas de azulejos terá de comprar, no mínimo, para cobrir o fundo e as paredes laterais da piscina?

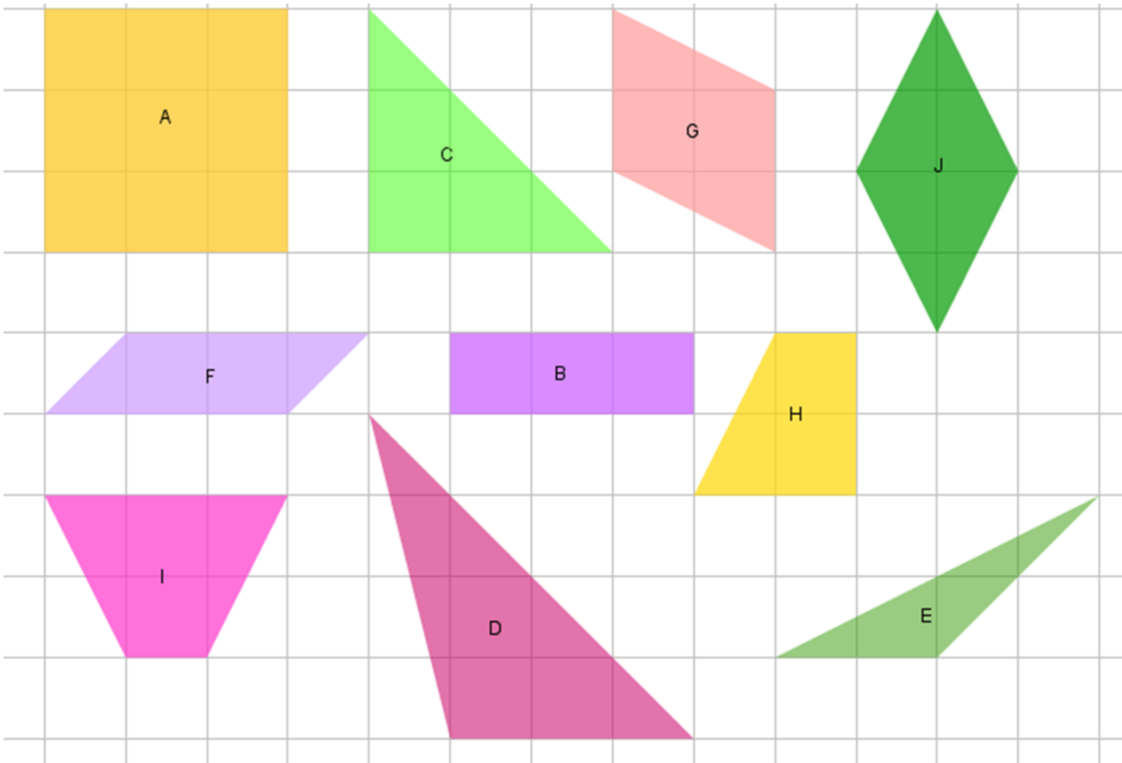


3) Uma piscina retangular é contornada por uma calçada de $1\,m$ de largura, como mostra a figura abaixo. Encontre a área dessa calçada.



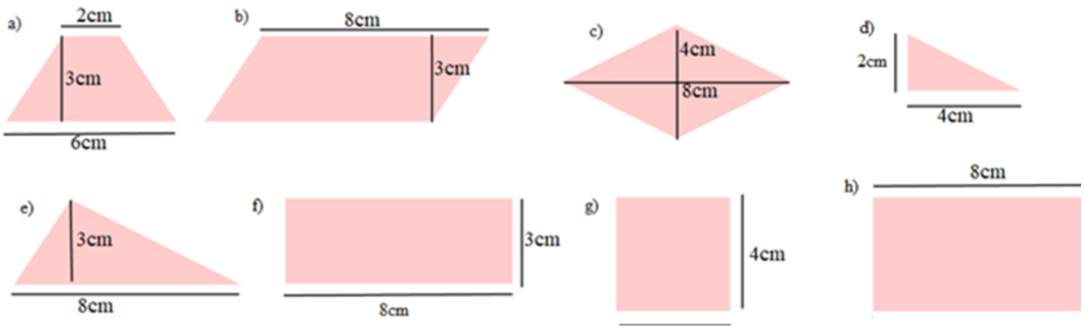
Sessão 06

1) Calcule a área dos triângulos e quadriláteros abaixo de duas maneiras diferentes, uma fazendo uso de fórmulas e outra sem utilizá-las.



Sessão 07

1) Dentre as figuras abaixo quais delas possuem a mesma área[73]? Justifique.



2) O quadrado formado com todas as peças do tangram tem $32\ cm^2$ de área. Determine a área de cada peça do tangram.

[73] Um conjunto formado pelo recorte dessas oito figuras, em papel cartão, foi entregue a cada grupo.

<u>Sessão 08</u>

1) Represente as figuras abaixo no geoplano, supondo que os lados de cada quadrado medem $1cm$. Depois, transcreva as respostas para a malha milimetrada, colando-as nessa folha.

a) Dois retângulos diferentes com 6 cm^2 de área.

b) Dois paralelogramos diferentes com 8 cm^2 de área.

c) Dois triângulos diferentes com 4 cm^2 de área.

d) Dois trapézios diferentes com 5 cm^2 de área.

e) Um quadrado que possua um decímetro quadrado (dm^2) de área. Quantos cm^2 cabem num dm^2? E em um m^2 cabem quantos dm^2?

2) A área de um quadrado é $16\ cm^2$. Quanto mede o seu lado?

ANEXO 3 - TERMO DE COMPROMISSO

TERMO DE COMPROMISSO

Ministério da Educação
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Instituto de Matemática – INMA
Mestrado em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

O presente termo tem o objetivo de esclarecer como serão utilizados os dados coletados durante a experimentação da pesquisa de mestrado em Educação Matemática, sobre área de triângulos e quadriláteros no sexto ano do Ensino Fundamental, realizada pela acadêmica Cleide Ribeiro Mota Arinos.

Durante as atividades com os alunos serão produzidos e coletados dados por meio de atividades impressas, gravações em áudio e vídeo, fotos e recursos didáticos, os quais serão utilizados como base para as análises da pesquisa, que tem como objetivo investigar aprendizagem e superação de dificuldades de alunos diante de situações envolvendo áreas de triângulos e quadriláteros.

Ressaltamos que os registros e transcrições obtidos não terão a identificação do aluno em nenhuma publicação científica de nossa autoria.

Campo Grande, ___ de _________ de 2017.

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Orientador

____
Cleide Ribeiro Mota Arinos
Mestranda

____
Responsável pelo aluno