SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO

ESTUDO DE DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DA FATORAÇÃO NOS AMBIENTES: PAPEL E LÁPIS E NO *SOFTWARE APLUSIX.*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CAMPO GRANDE/MS
2007

Burigato, Sonia Maria Monteiro da Silva
Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes: Papel e Lápis e no S*oftware Aplusix*/ Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato – Campo Grande, MS: (154 f.), 2007.

Orientadora: Marilena Bittar.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Centro de Ciências Humanas e Sociais.
Área de Concentração: Educação

1. Álgebra 2. Teoremas em ação 3. Educação 4. Campos Conceituais.

SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO

ESTUDO DE DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DA FATORAÇÃO NOS AMBIENTES: PAPEL E LÁPIS E NO *SOFTWARE APLUSIX.*

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do sul sob a orientação da Profª. Drª. Marilena Bittar.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
CAMPO GRANDE/MS
2007

COMISSÃO JULGADORA:

Profª. Drª Marilena Bittar

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

AGRADECIMENTOS

A meus pais João e Eunice, e as minhas irmãs: Magna e Vera.

A Profª. Drª. Marilena Bittar, por sua orientação, paciência, apoio em todos os momentos, e pelo incentivo a fazer a seleção para o mestrado.

Ao Prof. Dr. José Luiz, por seu apoio, incentivo, indicações de leituras, e sugestões.

Ao Prof. Dr. Marcelo Câmara, que aceitou fazer parte da banca examinadora, pelas sugestões enriquecedoras dadas principalmente na qualificação.

A amiga Magda, pelo incentivo, apoio e auxílio durante o curso de Mestrado.

A Irene, amiga e professora da turma pesquisada, pelo apoio, auxílio e disponibilidade em participar desta pesquisa.

Aos alunos que participaram do estudo, tanto do teste diagnóstico como da experimentação.

Aos colegas do Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEMA) pelas discussões, em especial a Mônica que bondosamente se dispôs do seu tempo para leitura e sugestões na organização deste trabalho.

Aos meus colegas de Mestrado, pela amizade e companheirismo durante o curso, em especial Adriana, Andréa, Cynthia, Silvia e Tatiana.

A secretária do Mestrado Jacqueline, pela amizade, eficiência, disponibilidade e atenção permanente.

A grande amiga Danise, pelo carinho, apoio, incentivo e presença constante em todos os momentos.

Ao meu marido Josué e a minha filha Cássia, pelo incentivo e apoio em todas as horas e pela compreensão nos momentos ausentes.

Enfim, agradeço a todos que, de algum modo, contribuíram para realização deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho procuramos estudar dificuldades na aprendizagem da fatoração e, para isso identificamos teoremas em ação utilizados pelos alunos ao resolver as atividades. Para Vergnaud (1990) eles são os conhecimentos tidos como pertinentes pelos alunos para tratar a situação proposta. Entretanto, em algumas situações eles podem não ser adequados para resolver a atividade, fazendo com que o aluno venha a cometer um erro, e são essas escolhas inadequadas que procuramos analisar. Nosso estudo foi orientado na elaboração e aplicação de uma seqüência didática com situações de fatoração, em que buscamos identificar esses teoremas em ação, bem como verificar a estabilidade deles nas resoluções dos alunos. Realizamos a pesquisa com uma turma de alunos da oitava série do Ensino Fundamental de uma escola pública de Campo Grande/MS. Os dados foram coletados nas produções dos alunos ao resolverem as atividades da seqüência didática em papel e lápis e com o *software Aplusix*. Conseguimos identificar teoremas em ação que foram utilizados por grande parte dos alunos, e alguns de maneira persistente. As principais dificuldades levantadas nas análises desses teoremas dizem respeito aos conhecimentos envolvidos na formação do Campo Conceitual da fatoração. Dentre eles, destacamos: a divisão e a multiplicação de expressões algébricas, redução de termos semelhantes e raiz quadrada.

Palavras Chaves: Álgebra - Teoremas em ação – Educação - Campo Conceitual.

ABSTRACT

In this work we will study the difficulties in learning factoring, for this we identify theorems in action used by the students when solving activities. For Vergnaud (1990) the theorems are the knowledge had as pertinent for the students to treat the proposed situation. However, in some situations they can not be suitable to solve the activity, leading the students to make mistakes, and we will analyze these inadequate choices. Our study was guided in the elaboration and application of a didactic sequence with factoring situations, in that we search to identify these theorems in action, as well as verifying the stability of them in the resolutions of the students. We did the research with a group of students of the eighth grade of fundamental teaching of a public school in Campo Grande /MS. The data had been gotten in the work of the students when solving the activities of the didactics sequence in paper and pencil and with *Aplusix* software. We attained to identify theorems in action that had been used by great part of the students, and some of them in persistent way. The main difficulties raised in the analyses of these theorems are relative to the involved knowledge in the formation of the Conceptual Field of the factoring. Amongst them, we detach: the division and the multiplication of algebraic expressions, reduction of similar terms and square root.

Key-words: Algebra - Theorems in action – Education - Conceptual Field.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) a Álgebra tem sido um dos conteúdos da Matemática que os professores têm dado grande ênfase. Entretanto, isso não vem garantindo o sucesso dos alunos, como podemos observar nos resultados do Sistema de Avaliação do Ensino Básico (BRASIL, 2001), em que os alunos tiveram um rendimento muito baixo em Álgebra, e nas diversas pesquisas existentes sobre o tema.

Um dos aspectos mais priorizados no ensino da Álgebra têm sido a manipulação algébrica (BRASIL, 1998). Entretanto, mesmo em questões que exigem somente este tipo de conhecimento os alunos apresentam muita dificuldade, persistindo diversos tipos de erros, como: $4+11y=44y$ e $(a+b)^2=a^2+b^2$ (RIBEIRO, 2001; NOTARI, 2002).

Na Álgebra um dos conceitos em que se utiliza a manipulação de expressões algébricas são os casos de fatoração. Precisamos saber trabalhar com a soma, a subtração, a divisão e a multiplicação de monômios e binômios, dentre outros, para poder fatorar.

A fatoração é apresentada, em geral, na sétima série do Ensino Fundamental e é indicada nos PCN (BRASIL, 1998) na simplificação de expressões algébricas e para resolver equações. Ela pode ser utilizada, também, no Ensino Médio no estudo da função do segundo grau, nas inequações e na equação da circunferência, etc. Contudo, apesar da sua aplicação poder ser feita ainda nesse nível de ensino, a fatoração é pouco explorada nos livros didáticos do Ensino Médio (LIMA, 2001).

No Ensino Superior a fatoração também pode ser aplicada em algumas disciplinas como, por exemplo, nos cursos de cálculo. Seu estudo no Ensino Fundamental se justifica pelas várias possibilidades de aplicação ao longo da formação dos estudantes. Entretanto, a fatoração, como vimos, utiliza-se da manipulação algébrica, e este é um dos conhecimentos que os alunos vêm tendo dificuldades em aprender como comprovam algumas pesquisas (RIBEIRO, 2001; NOTARI, 2002). Observamos que persistem diversos erros com relação a fatoração, como $a^2+b^2=(a+b)^2$ e $ax+b=x(a+b)$ (BITTAR et al., 2004 e MARQUIS, 1995).

Além disso, as pesquisas mostram que erros e dificuldades apresentados por alunos na aprendizagem da fatoração no Ensino Fundamental persistem no Ensino

Médio (NOTARI, 2002), como também no Ensino Superior (CURY, 2003).

Sendo assim, diante dos problemas existentes e das recomendações de alguns pesquisadores que atuam na área da Educação Matemática (NOTARI, 2002; RIBEIRO, 2001) consideramos necessário desenvolver uma pesquisa com a finalidade de estudar dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas. Cabe esclarecer que optamos por esta delimitação em razão de dois conjuntos de motivos principais, um de natureza teórica e outro de natureza prática.

Em relação ao conjunto de natureza teórica, pesquisadores do assunto (NOTARI, 2002; RIBEIRO, 2001) indicam que é importante desenvolver estudos neste campo. Uma maneira de se entender essas dificuldades dos alunos na aprendizagem de um conceito é identificar e analisar os erros cometidos por eles (BOOTH, 1995).

O conjunto de natureza prática refere-se ao início da minha atuação como professora substituta de Matemática no Ensino Superior. Na ocasião, percebi que os alunos apresentavam dificuldades ao trabalhar com a fatoração de polinômios no curso de Cálculo e isso gerou em mim uma inquietação, por esse conteúdo ser abordado no Ensino Fundamental eles já deveriam dominá-lo. Essas dificuldades também foram identificadas por Cury (2003) em um estudo sobre erros em Cálculo diferencial e integral. Em função dessa inquietação elaborei o projeto que deu origem a esta pesquisa, que por sua vez está relacionada ao projeto CAPES/COFECUB que tem como objetivo principal a modelagem de concepções de alunos em Álgebra e está sendo realizado por um grupo de pesquisadores franceses e brasileiros[1].

Assim sendo, propusemos um estudo mais detalhado sobre a fatoração no ensino da Álgebra, e uma investigação sobre os possíveis teoremas em ação (VERGNAUD, 1990) utilizados por alunos que cursam a 8ª série do Ensino Fundamental. Esses teoremas em ação são os conhecimentos que os alunos consideram pertinentes para tratar uma situação proposta, contudo, em alguns casos, eles podem não ser adequados fazendo com que os alunos venham a cometer erros (Ibid.).

Com este enfoque propusemos aos sujeitos, em estudo, uma seqüência didática composta por algumas atividades de fatoração buscando identificar os teoremas em ação por eles construídos. Para elaborar a seqüência e analisar os dados

---

[1] Um dos pesquisadores responsáveis por esse Projeto no Brasil é a Profª. Drª Marilena Bittar da UFMS.

que dela emergiram fizemos estudos tanto de algumas pesquisas existentes sobre o assunto como de trabalhos que abordam concepções, erros e dificuldades na aprendizagem da Álgebra (USISKIM, 1995; BOOTH, 1995; NOTARI, 2002; RIBEIRO, 2001).

Os alunos participantes da pesquisa resolveram as atividades propostas em dois ambientes: papel e lápis e no *software Aplusix*[2]. De início, tínhamos a intenção de aplicar a sequencia didática somente com *Aplusix*, pelo fato dele gravar automaticamente tudo que o aluno faz ao resolver uma atividade, o que nos permitiu observar todas as resoluções dos alunos, mesmo que tenham sido apagadas. Entretanto, tínhamos um número limitado de computadores disponíveis e como gostaríamos de trabalhar com uma turma de alunos no seu horário normal de aulas, decidimos, então, trabalhar com esses dois ambientes. As atividades foram as mesmas e aplicadas ao mesmo tempo na sala de aula e no laboratório de informática.

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos. No primeiro, apresentamos uma breve descrição acerca da Álgebra como campo do conhecimento matemático, em que procuramos discutir, com base em pesquisas já desenvolvidas, algumas concepções relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra, e alguns estudos sobre erros e dificuldades na aprendizagem da mesma.

No segundo capítulo é apresentado o quadro teórico escolhido como referência para esse estudo, que é a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990). A partir dessa escolha, são definidos os procedimentos metodológicos julgados adequados para responder as questões de pesquisa.

No terceiro capítulo são discutidos alguns casos de fatoração propostos no ensino atual e algumas possíveis aplicações da mesma. Em seguida, são feitas análises detalhadas de três coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental visando um estudo mais pontual do campo conceitual da fatoração no Ensino Fundamental.

No quarto capítulo é apresentado inicialmente um teste diagnóstico que serviu para afinar o estudo dos teoremas em ação possíveis de ser utilizados pelos alunos, bem como, para balizar a elaboração da seqüência didática a ser aplicada. Em seguida é definida a seqüência didática e feita sua análise teórica (HENRY, 2006).

---

[2]. *Aplusix* é desenvolvido pelos pesquisadores: J.F. Nicaud, D. Bouhineau e S. Mezerette do Laboratório Leibniz, em Grenoble França.

Finalmente, no capítulo cinco, são apresentadas a aplicação da seqüência didática e a análise dos dados coletados com o desenvolvimento de cada atividade.

Terminamos esse texto com nossas considerações finais e algumas perspectivas.

CAPÍTULO I

APRESENTAÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO

A Álgebra é um campo matemático em que o insucesso é bastante significativo "Nos resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país" (BRASIL, 1998, p. 116). Um dos motivos para este resultado pode ser o fato de que, normalmente, o ensino deste campo vem priorizando a memorização mecânica de regras, sem a compreensão da estrutura lógica da Matemática, além de ser trabalhado sem correspondência com situações práticas. Isto gera em muitos alunos a sensação de que a Álgebra é difícil e abstrata comprometendo a compreensão dos conceitos que a constituem e o uso inadequado dos mesmos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) chamam atenção para esse fato, e trazem como orientação aos professores no ensino da Álgebra, a importância de se trabalhar com situações variadas e ricas de significados para os alunos, integrando a Álgebra com os outros ramos da Matemática. Além disso, sugerem trabalhar as estruturas e as propriedades relativas a um determinado conceito e, sempre que possível, estabelecer relações entre esses e situações práticas do cotidiano, visando entre outras coisas, à aquisição de sentido.

No entanto, diversas pesquisas têm mostrado (DA ROCHA FALCÃO, 2003; LINS E GIMENEZ, 1997) que os alunos sentem dificuldades em utilizar a linguagem algébrica, e não conseguem relacioná-la com outros conteúdos matemáticos ou situações práticas. Em função disso, muitos estudos têm sido feitos com o objetivo de identificar possíveis falhas existentes no currículo escolar, nas práticas pedagógicas e na apresentação da Álgebra nos livros didáticos.

Segundo Lins e Gimenez (1997), há uma tendência "letrista"[3] na maioria dos

[3] Seria o cálculo com letras, que para os autores é o ensino que vem sendo priorizado no Brasil.

livros didáticos disponíveis no Brasil, baseada em uma tradição que vem sendo repetida sem nenhuma análise ou reflexão no ensino. Alguns autores dessa tendência estão apresentando os conceitos algébricos com abordagens que Lins e Gimenez (1997) denominam de facilitadoras, como: o uso de áreas no ensino dos produtos notáveis ou a balança de dois pratos para o ensino de resolução de equações. Para esses pesquisadores, tal prática representa a substituição de uma prática letrista por uma abordagem que pode ser considerada mais agradável pelo aluno; o que para esses autores pode não ser suficiente para garantir êxito na aprendizagem da Álgebra.

Lins e Gimenez (1997) citam uma pesquisa realizada sobre resolução de equações com o uso da balança em atividades formais (HART e SINKINSON *apud* LINS e GIMENEZ, 1997) os pesquisadores envolvidos, nessa pesquisa, observaram que ao final da atividade as crianças não conseguiram ver relação entre as atividades realizadas com este recurso e as atividades formais. Eles concluíram que faltava algum material que preenchesse o vazio que existe entre essas duas formas de apresentar o conteúdo. Contudo, para Lins e Gimenez (1997), talvez não haja mesmo relação entre essas duas atividades, "[...] talvez sejam, simplesmente, duas atividades distintas, com seus resultados localizados" (p.108).

Outra abordagem discutida por esses autores é o modelo sugerido por Vergnaud (1990) que, ao invés de considerar a Álgebra de maneira isolada, sugere um estudo dos elementos que a constituem como um campo conceitual. Na opinião de Lins e Gimenez (1997)

> O que um modelo como o de Vergnaud traz – e que acreditamos devesse ser melhor explorado em propostas baseadas nele – é a complexidade do fenômeno, tornando inseparáveis aspectos como a notação e os conceitos, e enfatizando, por exemplo, que são problemas que permitem que se produza significado para aqueles, e vice-versa. (p.111).

Um dos pesquisadores que compartilha das idéias propostas por Vergnaud (1990) é Da Rocha Falcão (2003). Este pesquisador faz uso dessa abordagem e traz alguns elementos do campo conceitual da Álgebra, como referência para a pesquisa e o ensino desse conteúdo:

● a Álgebra como ferramenta representacional, constituída por números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuições de símbolos, os vários sentidos empregados ao sinal de igual;

● a Álgebra como uma ferramenta de resolução de problemas, com operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimentos em ação vinculados à experiência extra-escolar de compensação e equilíbrio, etc.

Para Da Rocha Falcão (2003), o fazer algébrico é um processo complexo com muitas dificuldades, algumas delas poderiam estar relacionadas à utilização da linguagem algébrica. Como ilustração o pesquisador destaca que alguns alunos não conseguem diferenciar variável de parâmetro ou transformar uma situação problema de linguagem natural para a simbólica, além de apresentarem, também, dificuldades em manipular expressões algébricas. Alíás, o estudo das dificuldades em utilizar determinado conhecimento, bem como a análise dos erros cometidos pelos alunos é de fundamental importância para o ensino e a aprendizagem. D`Ambrosio (1993), por exemplo, chama a atenção para a importância de se analisar esse aspecto, pois, na sua opinião:

> Respostas incorretas constituem a riqueza do processo de aprendizagem e devem ser explorados e utilizados de maneira a gerar novo conhecimento, novas questões, novas investigações ou um refinamento das idéias existentes (p. 37).

Em nossa pesquisa buscamos estudar dificuldades de aprendizagem de um conceito, em particular, pertencente à Álgebra: a fatoração. Ela utiliza a manipulação algébrica, e é apresentada no Ensino Fundamental, mas pode ser aplicada não só neste nível de ensino como no Ensino Médio e também no Ensino Superior. Detalhamos a apresentação da fatoração e a suas aplicações no capítulo III.

Tendo apresentado, neste início do trabalho, um panorama geral acerca de alguns dos problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem da Álgebra, apontado algumas recomendações dos pesquisadores que estudam este tema, justificado a relevância deste estudo, passamos, agora, à apresentação de algumas idéias propostas pelos pesquisadores que estudam o assunto acerca das concepções que existem em relação à Álgebra e às dificuldades e erros relativos à sua aprendizagem.

1.1 Concepções da Álgebra

Para Usiskin (1995), as diferentes concepções da Álgebra estão relacionadas aos diversos usos que são feitos das letras, denominadas geralmente de variáveis[4]. A seguir apresentaremos algumas dessas concepções e esboçaremos um breve comentário a respeito do mesmo assunto.

A Álgebra como aritmética generalizada

Muitas vezes a Álgebra é vista como aritmética generalizada, nesse caso, as variáveis são vistas como generalizadoras de modelos. Segundo Usiskin (1995) as instruções-chave no uso da variável para o aluno são traduzir e generalizar. Por exemplo, a expressão 3+5.7=5.7+3, pode ser generalizada em a+b=b+a.

São técnicas importantes tanto para Álgebra, como para Aritmética; para o autor é impossível estudar Aritmética adequadamente, sem lidar com a Álgebra, implicitamente ou explicitamente. Na sua opinião, a linguagem algébrica é superior à linguagem natural na descrição de relações numéricas, pois, a descrição algébrica é semelhante à descrição numérica.

A Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos problemas

Quando fazemos uma generalização de um modelo, não temos incógnitas, só a preocupação em modelar as relações conhecidas entre os números. Depois de obtida a expressão, por exemplo, 5x+3=40 devemos utilizar os procedimentos necessários para resolvê-la. Assim, podemos somar (-3) a ambos os membros, obtendo uma equação equivalente a essa, 5x=37, resolvemos de alguma maneira obtendo: x=7,4. Para verificar se o resultado está correto basta substituir esse valor na incógnita da equação.

Nesta concepção, as variáveis são incógnitas (valores desconhecidos). Para Usiskin (1995), as instruções-chave para o aluno são simplificar e resolver. E, segundo ele, em alguns casos essas duas instruções são semelhantes, pois, ao tentarmos resolver uma equação, fazemos simplificações na tentativa de encontrar uma equação equivalente, com a mesma solução.

A Álgebra como estudo de relações entre grandezas

A fórmula A=b.h, da área de um retângulo, mostra a relação entre três grandezas, nesse caso, não estamos lidando com incógnitas, pois não estamos

---

4 Esse autor sempre utiliza a denominação de variável para especificar a utilização de letras na Álgebra.

resolvendo nada.

A diferença entre esta concepção e a anterior, é que, nesse caso as variáveis variam. Por exemplo, quando perguntamos a um aluno o que acontece com o valor de $\frac{1}{x}$, quando x se torna cada vez maior, não estamos querendo descobrir o valor de uma incógnita, e sim generalizar um modelo, essencialmente algébrico, que não se parece em nada a um aritmético.

Nesta concepção as variáveis (ou letras) podem ser: um argumento (valores do domínio de uma função), ou parâmetro (um número do qual dependem os outros números). Por exemplo, no estudo da função $f(x)=x+a$ temos a variável x que representa um argumento, isto é valores do domínio desta função, e a variável a que representa um parâmetro, ou seja, um número do qual dependem os outros números. Assim, analisando um caso particular desta função temos $f(x)=x+4$, em que agora o parâmetro a é igual a 4, e muitos alunos têm dificuldades em diferenciar a variável como sendo um parâmetro ou um argumento.

A Álgebra como estudo das estruturas

Nos cursos superiores o estudo da Álgebra envolve estruturas, como corpos, anéis, espaços vetoriais, etc. No ensino da Álgebra elementar, podemos reconhecer o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações, com os números reais e polinômios.

Para Usiskin (1995), quando pedimos para o aluno fatorar o polinômio $3x^2+4ax-132a^2$, desejamos que ele consiga operar com as variáveis seguindo as regras próprias dessa estrutura algébrica, de modo a encontrar a expressão $(3x+22a)(x-6a)$. Nesse caso, a concepção de variável é diferente de todas as citadas anteriormente, não se trata de nenhuma relação, ou função, e não se tem equação alguma a resolver, ou algum modelo em Aritmética para generalizar. A variável se tornou um símbolo arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Compartilhamos das idéias propostas por Usiskin (1995) a respeito do que se espera em relação aos procedimentos que os alunos precisam dar conta de adotar. Ou seja, é necessário que eles consigam operar com as variáveis, seguindo as regras próprias da estrutura que se está trabalhando, e que quando preciso saibam voltar aos referenciais, em geral números reais.

Para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico no aluno, segundo os PCN, os professores devem oferecer atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra. Entretanto, os professores, em geral, não trabalham com todos esses aspectos privilegiando “[...] fundamentalmente o estudo do cálculo algébrico e das equações [...]” (BRASIL, 1998, p.117); somente duas das quatro concepções citadas anteriormente: procedimentos para resolver certos problemas e o estudo das estruturas. E, apesar desses aspectos priorizados pelos professores serem necessários, eles não são suficientes para a aprendizagem da Álgebra.

Dentre as concepções da Álgebra abordadas neste capítulo o nosso trabalho se insere no estudo das estruturas. Ao analisarmos as dificuldades dos alunos na fatoração, buscamos identificar os erros no que diz respeito à manipulação algébrica, seguindo regras próprias dessa estrutura, em que a variável nesse caso é um símbolo arbitrário.

1.2 Alguns Estudos Sobre Erros E Dificuldades Na Aprendizagem Da Álgebra.

Apresentamos em seguida algumas pesquisas que abordam erros e dificuldades dos alunos com relação a aprendizagem da Álgebra. Escolhemos esses autores, pois suas pesquisas trazem algumas indicações de dificuldades principalmente com relação à manipulação algébrica que interessa diretamente ao nosso trabalho com a fatoração.

1.2.1 Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra – Lesley R. Booth (1995)

Para Booth (1995) ao estudar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra, devemos identificar os erros cometidos por eles, e investigar os motivos desses erros. Ela cita um projeto de pesquisa que adotou esta abordagem, “Strategies and Errors in Secondary Mathematics” (SESM), realizada no Reino Unido entre 1980 e 1983, com alunos de treze a dezesseis anos da oitava à décima série. Os erros verificados foram semelhantes em todas as séries.

Em entrevista realizada com os alunos que cometeram esses erros, observou-se que a maioria dos erros poderia estar relacionada às idéias que os alunos têm em determinados aspectos, como:

● o foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas". Na Aritmética, o foco é encontrar uma resposta numérica. Na Álgebra é diferente, o foco é estabelecer relações e procedimentos e expressá-los numa forma simplificada e geral. Na maioria das vezes, o aluno rejeita este tipo de resposta, e tenta conseguir uma resposta numérica; ou em alguns casos, simplifica uma expressão, como, por exemplo, $14+7x$ em $21x$, tentando obter uma resposta com um único termo.

● o uso da notação e da convenção em Álgebra. Estas dificuldades dizem respeito à interpretações dos símbolos operatórios. Em Aritmética, os símbolos + e = são interpretados como as ações que devem ser realizadas, em que + significa realizar a operação, e = fornecer a resposta.

Kieran (1981), citado por Booth (1995), mostrou que crianças, no contexto do estudo de equações consideram o sinal de = como um símbolo com uma só direção, que precederia uma resposta numérica. A idéia de que esse símbolo poderia indicar, também, uma relação de equivalência pode não ser percebida de imediato pelos alunos, apesar das duas noções serem necessárias à compreensão da álgebra. Muitos alunos ao simplificar expressões algébricas e encontrar, como resultado, por exemplo, $2a+5b$, acabam juntando os termos em $7ab$. Nesse caso a ação relacionada ao símbolo + é a de juntar.

● o significado das letras e das variáveis. A Álgebra se diferencia da Aritmética no uso de letras para representar valores numéricos. Na Aritmética as letras aparecem de modo diferente, por exemplo, a letra m pode ser utilizada para representar a unidade de medida metros, em expressões como, por exemplo, $3m$ lê-se 3 metros, mas em Álgebra a letra m representaria a quantidade de metros, ou outra coisa, pois m é uma variável. A idéia de variável, talvez seja um dos aspectos mais importantes da Álgebra, entretanto, os alunos mesmo ao interpretar as letras como representação de números, têm dificuldades em considerá-las como valores genéricos ou variáveis. Booth (1995) cita como exemplo $x+y=y+x$, em que os alunos tendem a considerar esses valores como únicos, específicos, como no caso de $x+3=8$, em que ao final chega-se a um valor único $x=5$, não entendendo que x e y nesses casos podem variar.

● os tipos de relações e métodos usados em Aritmética. Em alguns aspectos, a Álgebra é considerada a "Aritmética generalizada", e concepções erradas dentro do contexto aritmético, podem afetar o desempenho dos alunos na Álgebra. Além disso, alguns métodos que os alunos utilizam em Aritmética podem fazer com que tenham dificuldades em estabelecer relações gerais em Álgebra. Booth (1995) fornece o seguinte exemplo:

> [...] se um aluno geralmente não determina o número total de elementos de dois conjuntos de, digamos, 35 e 19 elementos, utilizando a noção de adição, como 35+19, mas resolve o problema, utilizando o processo de contagem, então é pouco provável que o número total de elementos de dois conjuntos de x e y elementos seja prontamente representado por x+y. Neste caso, a dificuldade não está tanto em generalizar a partir do exemplo aritmético, mas de ter um procedimento adequado, e uma representação desse procedimento em aritmética, para a partir dele fazer uma generalização inicial.(BOOTH, 1995, p.35).

Para a mesma autora, essa lista de dificuldades não é exaustiva, no entanto, poderá mostrar aos professores algumas das dificuldades que poderão surgir no ensino da Álgebra, bem como, "[...] lembrar que algumas idéias aparentemente simples nem sempre são tão simples como podem parecer aos adultos" (BOOTH, 1995, p.35).

1.2.2 Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas – Alexandre M. Notari (2002)

Notari em 2002 desenvolveu uma pesquisa sobre simplificação de frações algébricas e aritméticas, em que buscou fazer um diagnóstico dos principais erros e dificuldades manifestados por alunos do Ensino Fundamental e Médio. O teste utilizado para essa pesquisa era composto por 8 questões divididas em duas partes, sendo uma delas constituída por 5 questões organizadas em 12 itens sobre frações aritméticas, e outra com 3 questões, sendo 12 itens sobre frações algébricas. Foram pesquisadas duas turmas, uma da 8ª série do Ensino Fundamental e outra da 1ª série do Ensino Médio.

As principais conclusões apontadas por Notari (2002) mostram um elevado número de erros que revelam uma incompreensão das regras formais que regulamentam a simplificação de frações algébricas. Dentre tais erros destaca-se a generalização de regras de uma situação para outra, sem uma análise das condições que validam essa generalização. Como ilustração, citamos a resolução de um aluno:

$$\frac{4x+11xy}{x}=\frac{15x^2y}{x}=15xy$$

Na entrevista, quando perguntado por que fez assim, ele disse que aplicou o mesmo procedimento utilizado no exercício anterior, no caso:

$$\frac{4x.11xy}{x}=\frac{44x^2y}{x}=44xy.$$

Alguns alunos transformaram as expressões em equações procurando determinar o valor de uma suposta incógnita, ou trataram uma soma de termos como uma multiplicação, por exemplo, $4+11y=44y$. Além disso, Notari (2002) observou que alguns alunos têm dificuldade em identificar um número natural como produto de dois ou mais fatores.

No caso de frações que não admitiam simplificação como $\frac{8xy-3z}{z}$, alguns alunos apresentaram como resposta $8xy-3$. As justificativas que apresentaram ao serem entrevistados foram: porque eu fatorei, ou dividi numerador e denominador pelo mesmo número, ou cortei o z de cima com o z de baixo.

Para Notari (2002) talvez uma das justificativas para os erros cometidos pelos alunos, seria a maneira com que o ensino da Álgebra vem priorizando a sua dimensão sintática. A manipulação algébrica estaria recorrendo somente na utilização das regras, sem se preocupar com as condições que permitem que elas sejam aplicadas. Ele traz algumas indicações como proposta para melhoria no ensino da álgebra, dentre elas:

- ✓ Um trabalho em sala de aula que enfatize, na representação de um número na forma fatorada, as propriedades da multiplicação, estabelecendo relação entre as operações de multiplicação com as da divisão, o que pode evidenciar o significado de expressões como o "cancelamento de fatores", usuais no ensino de simplificação dessas frações, e contribuir na agilidade dos alunos em cálculos aritméticos e, especificamente, nos exigidos na simplificação dessas frações;
- ✓ Proposta de atividades que determinem as condições específicas que envolvem a aplicação de uma determinada regra, em especial, a reescrita de uma fração que utilize a propriedade de fatoração pela evidência do termo comum, isto é, $\frac{ax+bx}{c}=\frac{x(a+b)}{c}$ não é aplicável a $\frac{axbx}{c}$, prevenindo erros decorrentes de uma aplicação indevida de uma regra;

1.2.3 Analisando o Desempenho de Alunos do Ensino Fundamental em Álgebra - Alessandro Jacques Ribeiro (2001).

Ribeiro (2001) fez uma pesquisa sobre o desempenho dos alunos em Álgebra tendo como base os dados do Sistema de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 1997), elaborado pela Secretaria de Educação. Mediante a realização dessa pesquisa, o pesquisador teve a finalidade de levantar e identificar procedimentos e estratégias que os alunos da 8ª série utilizam para resolver questões de Álgebra.

Em sua pesquisa aplicou as mesmas questões de Álgebra propostas pelo SARESP. Primeiro ele aplicou essas questões em uma amostra composta por 20 alunos, em que os mesmos deveriam assinalar a resposta correta e justificar de que forma chegaram a ela. Após análise do desempenho, nessa primeira etapa, ele selecionou as atividades que tiveram os mais baixos índices de acertos, como também, as que tiveram um índice mais elevado de aproveitamento, o que segundo Ribeiro (2001) permitiria colher mais dados para análise. Ele aplicou essas atividades, sem as alternativas de resposta, em 18 dos 20 alunos da primeira etapa. Nessa parte os alunos foram divididos em duplas ou trios para discussão e resolução, e tiveram a participação do professor como encorajador e mediador na resolução das questões.

Em seu estudo Ribeiro (2001) utilizou a noção de aspecto processual e estrutural da Álgebra, de Kieran. Esclarece o pesquisador que estamos trabalhando o aspecto processual da álgebra quando temos uma expressão algébrica, por exemplo, $5x-2y$ e substituímos x por 3 e y por 5, o resultado será 5; ou ao resolvermos a equação $3x+2=8$ substituindo vários valores para x até encontrar o correto. Apesar de estarmos lidando com expressões algébricas, trabalhamos na verdade com suas instâncias numéricas, operamos com esses números com objetivo de encontrar um resultado também numérico.

E estamos trabalhando com o aspecto estrutural da Álgebra quando efetuamos as operações não sobre os números, valores específicos para x ou y, mas sobre as expressões algébricas. Por exemplo, $3x^2-21x$ pode ser fatorada em $3x(x-7)$, ou a expressão $7z+4w-z$ pode ser simplificada para $6z+4w$. Nesses exemplos os objetos trabalhados foram as expressões algébricas, e não números, além disso, o resultado obtido continua sendo expressões algébricas.

Para Kieran (*apud* Ribeiro, 2001)

> [...] o desenvolvimento da álgebra é feito como um ciclo processual-estrutural; quando nos referirmos a álgebra que deve ser ensinada na escola, podemos interpretá-la como sendo uma série de ajustes processual-estruturais que os alunos devem fazer para entender o aspecto estrutural da álgebra (p.42).

Ribeiro (2001) afirma que esses ajustes são fundamentais para que o aluno consiga perceber que os objetos trabalhados no aspecto estrutural são expressões (ou equações) algébricas e não números. Diz ainda que as operações indicadas para trabalhar com essas expressões são: simplificar, fatorar, racionalizar denominadores e etc.

O pesquisador procurou em seu estudo verificar se o aluno é capaz de:

- tratar as representações simbólicas como objetos matemáticos;
- operar sobre as estruturas algébricas;
- modelar situações-problema em estruturas algébricas.

Nas análises das atividades, ele observou que os alunos tiveram desempenho um pouco melhor do que o apresentado pelo SARESP (1997), mas não muito significativo. Vejamos, por exemplo, na 1ª questão:

> Nas igualdades abaixo, em que a e b representam números reais, a única verdadeira é:
> a) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
> b) $(a+b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
> c) $a(a+b) = a^2 + ab$
> d) $\dfrac{a+b}{a} = b$
> (RIBEIRO, 2001, p. 25)

Como podemos observar, essa questão trata do aspecto estrutural da Álgebra e, de acordo com os dados obtidos a partir da pesquisa em questão, 30% dos alunos envolvidos acertaram a resposta. Já no resultado do SARESP o índice de acerto foi de 22%, sendo que, 50% dos alunos marcaram a opção (a) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, isto é, utilizaram como válida a distribuição da potenciação em relação à soma de dois números. No grupo pesquisado esse erro foi cometido por 30% dos alunos. Entretanto, na pesquisa de Ribeiro (2001) apesar do índice de acerto, nessa questão, ser maior, somente uma parte dos alunos (15%) utilizou uma estratégia matematicamente correta. Quer dizer, fizeram a distribuição dos produtos corretamente. Contudo, houve alunos que, apesar de acertarem a questão, fizeram a distribuição de maneira incorreta.

Para Ribeiro (2001) isso pode ter ocorrido em decorrência do ensino da Álgebra priorizar o treino de habilidades, a mecanização de algoritmos e a simples memorização de técnicas e regras. Tal priorização pode explicar o fato de os alunos não terem um rendimento satisfatório, mesmo nas atividades propostas que utilizam somente esse tipo de conhecimento, como ocorreu no exemplo citado.

Nas suas análises Ribeiro (2001) enfatiza a necessidade de se trabalhar os aspectos processual e estrutural da Álgebra. "Isso se faz, essencialmente, no sentido de desenvolver nos alunos a capacidade de reconhecer diferentes operações possíveis com as estruturas algébricas [...]" (2001, p.111). Além disso, o ensino deve se preocupar com a construção do conhecimento e com a compreensão de significados, pelos alunos, caso contrário ele acaba por tornar-se ineficaz e os alunos tendem a esquecer rapidamente.

1.2.4 Síntese da Leitura das Pesquisas

Como já dissemos anteriomente a fatoração de expressões algébricas se insere no estudo das estruturas e, segundo os PCN (BRASIL, 1998), esta é uma das concepções priorizadas pelos professores no ensino da Álgebra. Entretanto, esta ênfase não parece estar garantindo o sucesso dos alunos em atividades que exigem este conhecimento.

De fato, vimos nas pesquisas de Notari (2002) e Ribeiro (2001), que os alunos também não estão tendo um bom desempenho em atividade de manipulação algébrica, persistindo diversos tipos de erros. Observamos que os alunos têm dificuldades em trabalhar com as expressões algébricas, seguindo regras que são próprias desta estrutura. E muitos dos erros observados nestas pesquisas brasileiras também já haviam sido observados em outros países como, por exemplo, em Booth (1995).

Os estudos mostraram que os alunos expressam várias dificuldades, dentre elas, dificuldades relativas à aplicação da fatoração na simplificação de frações algébricas (NOTARI, 2002), sendo que esta é geralmente uma das primeiras aplicações da fatoração após a sua apresentação no Ensino fundamental. Entretanto, Notari observou que não só os alunos desse nível de ensino tiveram dificuldades, mas também os do Ensino Médio.

A partir desse estudo podemos identificar as seguintes dificuldades, que consideramos, relacionadas à fatoração:

- dificuldade em trabalhar com um número na forma fatorada;
- dificuldade em multiplicar e dividir expressões algébricas;
- aplicação da fatoração em uma situação inadequada, na tentativa de simplificar uma expressão;
- dificuldade em trabalhar com expressões algébricas seguindo regras próprias dessa estrutura para expressá-las numa forma equivalente, causando erros como $4x+11xy=15x^2y$, em que ao invés de fatorar a expressão o aluno tenta simplificá-la tentando obter uma resposta.

Assim, desenvolvemos este estudo com a intenção de melhor compreender dificuldades relativas à aprendizagem da fatoração, para isso buscamos identificar teoremas em ação[5] utilizados pelos alunos ao fatorar uma expressão algébrica.

No próximo capítulo apresentamos o referencial teórico e metodológico utilizado em nosso estudo.

[5] Teorema em ação é uma proposição suscetível de ser verdadeira ou falsa, entretanto, o aluno a utiliza como sendo verdadeira. (VERGNAUD, 1990).

CAPÍTULO II

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

Neste capítulo, apresentamos o quadro teórico metodológico que compõe nosso trabalho. Assim tecemos alguns comentários a respeito da Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1990), e descrevemos a metodologia que adotamos na realização desta pesquisa.

2.1 Teoria Dos Campos Conceituais

A aprendizagem de um conceito desenvolve-se de maneira gradativa, em diferentes níveis, e segundo os PCN (BRASIL, 1998), supõe o estabelecimento de relações com conhecimentos prévios dos alunos. Desse modo, o estudo dos erros cometidos pelos alunos na fatoração de maneira isolada nos pareceu inadequado, o que nos fez refletir sobre como analisar essas dificuldades.

Nesse sentido, a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990), nos parece apropriada para responder nossos questionamentos. Para Vergnaud:

> Um conceito não pode ser reduzido a sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem e no seu ensino. É através de situações e de problemas que um conceito adquire sentido para o aluno (VERGNAUD, 1990, p.135).

O pesquisador citado esclarece que cada situação envolve a utilização de diversos conceitos, e não é possível explorar todos os aspectos envolvidos na aprendizagem de um conceito em uma só situação. Desse modo, a aprendizagem de um conceito é feita de maneira gradual e ao longo do tempo.

Esta teoria toma como referência o próprio conteúdo do conhecimento, a análise dos conceitos envolvidos nesse conhecimento e os processos cognitivos do sujeito envolvido. Inspirada na teoria de Piaget oferece subsídios para compreender como ocorre a aprendizagem de conceitos matemáticos. Em síntese,

> [...] é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas. Por fornecer uma estrutura à aprendizagem ela envolve a didática, embora não seja, em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimento, em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimento", tanto as habilidades quanto as informações expressas (VERGNAUD, 1990, p.135).

Ela nos possibilita analisar como o sujeito aprende, isto é, como se dão a formação e o funcionamento dos conhecimentos nos indivíduos. Segundo Vergnaud (1990), o conhecimento se forma a partir das situações que o aluno precisa resolver e um conceito só se torna funcional quando o sujeito consegue aplicá-lo em situações variadas. Nesta ótica, é a partir das situações que o conceito adquire sentido para o aluno, sendo que o sentido de um conceito não está na situação em si, mas na relação do aluno com a situação e com os conhecimentos que ele tem disponíveis para lidar com ela. É a conceitualização do real, que representa a essência do desenvolvimento cognitivo.

De acordo com Vergnaud é importante analisar todos os aspectos conceituais envolvidos nos esquemas utilizados pelos alunos ao lidarem com as situações propostas e identificar as situações mais pertinentes à construção desses esquemas. Mas o que seriam esses esquemas?

> Os esquemas organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dada, mas também organizam, ao mesmo tempo, sua ação e a atividade de representação simbólica, sobretudo lingüística, que acompanha essa ação. (VERGNAUD, 1990, p.168).

Um esquema comporta objetivos e antecipações, regras de ação do tipo "se...então", invariantes operatórios "teoremas em ação" e "conceitos em ação", e a possibilidade de inferência, ou raciocínio.

Vergnaud (1990) esclarece que podemos distinguir duas classes de situações, de análise dos esquemas:

> 1) classes de situações em que o sujeito dispõe no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2) classes de situação em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.
> (VERGNAUD, 1990, p.136)

Na primeira classe de situações o aluno já dispõe de um esquema eficiente para o tratamento da situação. No segundo caso, ele pode mobilizar vários esquemas para tentar lidar com a situação. Esses esquemas podem competir entre si, e talvez precisem ser combinados e recombinados para que se obtenha êxito.

Assim, ao tentar resolver uma situação o aluno mobilizará esquemas já utilizados anteriormente, em outras situações, que de algum modo lhe possa parecer semelhante a esta. Esses esquemas orientarão toda a busca de resolução da situação, podendo levá-lo ao acerto do problema proposto, ou não, sendo então necessárias algumas modificações para que esses possam resolver essa nova situação (VERGNAUD, 1990). Podemos inferir que essa teoria leva em consideração os conhecimentos prévios dos sujeitos, pois é a partir deles que os alunos tentam solucionar novas situações.

Queremos destacar que o conceito de situação abordado por Vergnaud (1990) tem o sentido de tarefa. Assim sendo, uma situação complexa pode ser analisada, segundo ele, como uma combinação de tarefas "[...] cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas" (1990, p. 146). Cada tarefa é composta por subtarefas, em que a dificuldade em resolvê-la não está na soma, nem no produto das dificuldades das diferentes subtarefas. Entretanto, se o aluno fracassa em uma subtarefa, o fracasso será total.

Vejamos um exemplo na fatoração, em que a tarefa consiste em fatorar a expressão algébrica $9x^2-15x$. Podemos identificar algumas subtarefas envolvidas nessa atividade:

1) o aluno precisa identificar o fator comum na expressão, e nesse caso o fator não está explícito. Ele precisa saber que $9x^2-15x$ é equivalente a $3x.3x-5.3x$.

2) depois ele precisa dividir cada termo dessa expressão pelo fator comum encontrado: $9x^2:3x$ e $-15x:3x$.

Suponhamos que o aluno não consiga identificar o fator comum na expressão ou que identifique errado, então, mesmo que saiba resolver a subtarefa (2) ele não vai conseguir resolver corretamente a atividade. Do mesmo modo, se identificar o fator comum, mas não souber fazer a divisão dos termos, ou fizer a divisão errada, ao final ele não conseguirá resolver a atividade corretamente.

A análise dos conhecimentos envolvidos nas situações é fundamental, bem como, das dificuldades existentes na sua aprendizagem. Desse modo, Vergnaud (1990) nos traz que uma das entradas de um campo conceitual é o conjunto das situações. No caso da nossa pesquisa, todas as situações que requerem alguns dos casos de fatoração apresentados: fatoração colocando fator comum (seja esse fator um monômio ou binômio), fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de dois quadrados. É importante levarmos em consideração que:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação;
> 2) uma situação não se analisa com um só conceito;
> 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes. (MOREIRA, 2004, p.10).

Desse modo, a seleção e análise das situações propostas ao aluno é fundamental para sua aprendizagem. Devemos analisar todas as variáveis envolvidas, os conhecimentos disponíveis, ou não, isto é, tudo que faz parte da construção desse conceito, bem como, das dificuldades existentes na sua aprendizagem.

Ao propormos para o aluno fatorar a expressão x^2-16, por exemplo, devemos considerar todos os conhecimentos que o aluno precisa ter disponíveis para resolver essa atividade. Isto é, ele precisa:

1) saber que fatorar uma expressão algébrica é transformá-la em um produto;
2) reconhecer que essa expressão se trata de um dos casos de distribuição dos produtos notáveis;
3) lembrar da distribuição dos produtos notáveis (ou padrão) e aplicá-la; ou pode se lembrar só dos produtos: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ e $(a-b)(a+b)$ e fazer a distribuição e redução dos termos semelhantes para verificar qual deles se encaixa na expressão dada.

Cada uma dessas etapas tem dificuldades específicas que não devem ser ignoradas, como também, alguns erros que podem aparecer no trabalho dos alunos, por exemplo, $(a-b)^2=a^2-b^2$ é um dos erros comuns observados em pesquisas na distribuição dos produtos notáveis. Tudo isso deve ser levado em consideração, pois, podem vir a comprometer o desempenho do aluno na resolução da atividade, fazendo com que ele venha a cometer algum erro. Desse modo, a análise dos conceitos envolvidos nas situações que utilizamos em nossa pesquisa foi importante para o estudo das dificuldades dos alunos.

Para estudar o desenvolvimento e funcionamento de um conceito, Vergnaud (1990) o define como sendo constituído de três conjuntos indissociáveis (**S**, **I**, **L**)

S - referência: é o conjunto de situações que darão sentido ao conceito;

I - significado: conjunto dos invariantes operatórios (conceito em ação e teorema em ação), associados ao conceito, são os conhecimentos utilizados pelo sujeito para lidar com as situações do primeiro conjunto;

L – significante: conjunto das formas de representação simbólica (lingüística ou não lingüística) do conceito, de suas propriedades, das situações e dos procedimentos de tratamento das situações.

O pesquisador afirma que é importante levar em consideração esses três conjuntos se quisermos estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito.

Com relação ao primeiro conjunto já listamos os aspectos mais relevantes para o nosso estudo, outro que particularmente nos interessa é o segundo, os invariantes operatórios, teorema em ação e conceito em ação, e que, segundo Vergnaud (1990) são a base conceitual implícita (ou explícita), que está por trás das ações dos alunos ao lidar com as situações propostas. "É nos esquemas, que devemos procurar os conhecimentos-em-ação, ou seja, os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito ser operatória" (VERGNAUD, 1990, p. 136).

Uma outra entrada de um campo conceitual é exatamente a dos conceitos e teoremas. Assim, o campo conceitual da fatoração algébrica, no nosso estudo, é o conjunto das situações cujo tratamento requer a utilização de um dos casos de fatoração, já citados, que por sua vez implicam na utilização de multiplicações, ou divisões, ou uma combinação das duas, como também, "[...] o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (VERGNAUD, 1990, p.147). Dentre eles destacamos: conceito de fator comum, quadrado de um número, termo semelhante, monômio, polinômio, produto de fatores, números inteiros, etc. A divisão e a multiplicação de números inteiros, de monômios e polinômios, fatoração de um número inteiro, redução de termos semelhantes, raiz quadrada de um termo, e os teoremas em ação verdadeiros com relação às situações de fatoração estudadas, por exemplo:

- $ax^2+bx=x(ax+b)$
- $x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b)$
- $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
- $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
- $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

Esses conhecimentos, teoremas em ação e conceitos em ação raramente são explicitados pelos alunos. Eles são construídos nas ações dos mesmos ao tentar resolver uma situação, sempre em interação um com o outro; há uma relação dialética entre ambos. Na verdade, eles fazem a articulação essencial entre a teoria e a prática, pois, a análise, a busca e a seleção de informações para o tratamento de uma situação se baseiam no conjunto de conceitos em ação e de teoremas em ação disponíveis para o sujeito.

Os conceitos em ação são do tipo funções proposicionais, podem ser pertinentes ou não às situações tratadas, e são indispensáveis na construção das proposições utilizadas para lidar com as situações: os teoremas em ação. Esses, entretanto, podem ser falsos ou verdadeiros, mas o aluno os utiliza pensando ser verdadeiros. Contudo, em algumas situações eles podem ser falsos, por estarem sendo utilizados fora do seu domínio de validade ou no caso do aluno identificar semelhança nessa situação com alguma outra tratada anteriormente. No entanto, como essa semelhança é só aparente isso faz com que o aluno venha a cometer um erro. São essas escolhas inadequadas que estamos interessados em investigar.

Como exemplo, citamos um suposto caso no qual o aluno, ao tentar fatorar a expressão algébrica $7x^2+2x$, escolhe um caminho que considera pertinente para resolver a situação. Ele pode fatorar como sendo $x(7x+2x)$, está errado, mas o aluno faz essa escolha acreditando ser correta. Nesse exemplo, verificamos que o aluno consegue identificar o fator comum da expressão, e dividiu o primeiro termo da expressão pelo fator comum corretamente. Entretanto, no segundo termo ele não fez a divisão, simplesmente repetiu o termo dentro dos parênteses. Se esse aluno utiliza esse caminho algumas vezes ao resolver atividades semelhantes podemos dizer que utiliza o teorema em ação falso $ax^2+bx \rightarrow x(ax+bx)$. A regra correta, nesse caso, é $x(7x+2)$. O teorema em ação falso que ele utilizou está relativamente próximo do correto, o que não ocorre no caso do aluno fatorar como $x^2(7x+2x)$, por exemplo, pois nesse último caso ele não consegue identificar o fator comum corretamente, nem fazer a divisão correta de nenhum dos termos.

Essas pequenas diferenças são muito importantes, pois mostram o quanto os teoremas utilizados pelos alunos podem ou não estar próximos daqueles que deveriam ter sido utilizados.

Os teoremas em ação são instrumentos importantes no estudo das dificuldades dos alunos na fatoração, pois, nos permitem saber mais sobre possíveis falhas no desenvolvimento desse campo de conhecimento. A identificação dos erros permite selecionar situações que possam ajudar na progressiva superação de tais dificuldades, e o professor tem papel fundamental nesse processo. Por este motivo, a teoria dos campos conceituais nos pareceu um bom instrumento de análise para estudar as dificuldades dos alunos na fatoração de expressão algébrica. Nossa intenção foi identificar os teoremas em ação falsos utilizados por eles, verificar se a sua utilização persistiria no decorrer das atividades e analisar os conhecimentos incorretos empregados nesses teoremas.

Feitos estes esclarecimentos, passamos ao delineamento da metodologia utilizada no decorrer da pesquisa aqui apresentada.

2.2 Metodologia da Pesquisa

O nosso objetivo geral é estudar dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas, e os nossos objetivos específicos são os seguintes:

- identificar teoremas em ação utilizados pelos alunos ao fatorar expressões algébricas;
- investigar a estabilidade dos teoremas em ação construídos pelos alunos.

Para atingir esses objetivos fizemos um estudo com uma turma de alunos da 8ª serie do Ensino Fundamental, em que introduzimos o *software Aplusix*. Ele é um *software* destinado à aprendizagem da Álgebra elementar, sendo possível trabalhar com desenvolvimento e redução de expressões algébricas, resolução de equações e inequações, dentre outros.

De início gostaríamos de trabalhar somente com o *Aplusix*, entretanto, tínhamos um número limitado de computadores no laboratório de informática, e como pretendíamos analisar uma turma de alunos em seu horário normal de aula, decidimos então dividir a turma em duas partes. Uma parte realizou as atividades em papel e lápis e a outra no *software*. As atividades foram as mesmas e aplicadas ao mesmo tempo. Desse modo, poderíamos também observar se haveria alguma diferença entre os teoremas em ação falsos identificados nesses dois ambientes.

A metodologia utilizada foi inspirada no conceito de análise teórica ou análise a *priori* proposta por Henry (2006). Segundo esse autor a análise teórica é um conjunto de estudos com objetivo de analisar situações em sala de aula, no nosso caso, estudar dificuldades dos alunos na fatoração.

Michel Henry (2006) define análise teórica como sendo um conjunto de estudos composto por:

I – Análise do conhecimento em estudo: apresentação do ensino usual do saber em jogo, estudo dos campos conceituais envolvidos nessa apresentação, pesquisas sobre dificuldades existentes no seu ensino e aprendizagem, etc.

II – Análises didáticas: análises das atividades propostas para o estudo, das variáveis didáticas pertinentes ao estudo, dos meios de validação disponíveis ao aluno oferecidos pelos ambientes em estudo, etc.

III – Análise pedagógica: gestão do andamento das atividades, previsão de condutas dos alunos durante a resolução das atividades, etc.

Em nossa pesquisa, a análise do conhecimento em estudo foi feita por meio da análise de livros didáticos e pesquisas existentes sobre concepção, erros e dificuldades no ensino e aprendizagem desse conhecimento, e se encontram detalhadas nos capítulos I e III.

As análises didáticas são constituídas de dois momentos: a realização de um teste diagnóstico e a elaboração da seqüência didática, e estão detalhadas no capítulo IV.

E, finalmente, a análise pedagógica constituída essencialmente das análises dos possíveis erros dos alunos que se encontra também no capítulo IV.

Vejamos um resumo esquemático da metodologia da nossa pesquisa:

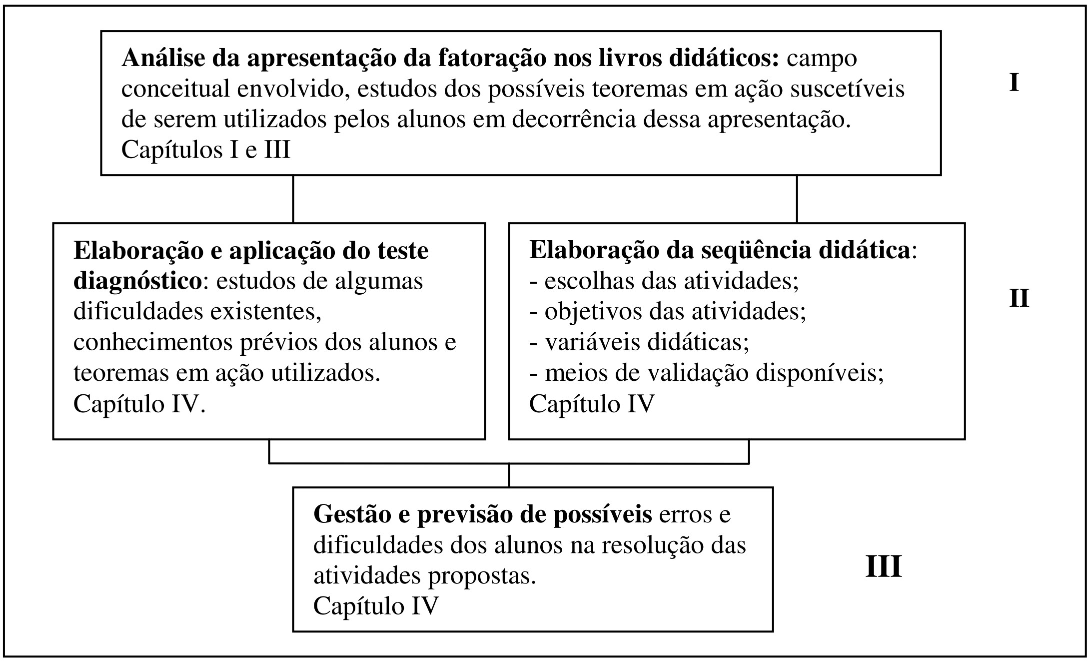

Figura 1: Quadro metodologia de pesquisa

Fizemos as análises das resoluções dos alunos no capítulo V, em que buscamos confrontar os resultados obtidos nessas resoluções com as análises que foram feitas na apresentação das atividades no capítulo IV.

2.2.1 Composição do Grupo Pesquisado e Alguns Dados Sobre a Seqüência Didática.

Nosso universo investigado foi composto por 25 alunos de uma turma de oitava série de uma escola Estadual que continha 38 alunos, porém, selecionamos os vinte cinco alunos que não faltaram a nenhuma das atividades propostas na seqüência didática. Os participantes do estudo resolveram 10 atividades que constituíam essa seqüência didática (Anexo 2).

Para investigar algumas dificuldades e listar alguns teoremas em ação para elaboração da seqüência didática aplicamos um teste diagnóstico. Ele foi aplicado em julho de 2005 em duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental que estudavam em uma escola Municipal localizada em Campo Grande/MS. Ao finalizar e analisar os dados coletados tínhamos o intuito de aplicar a seqüência didática nessa mesma escola. Entretanto, encontramos dificuldades, por parte da professora responsável pelo laboratório de informática, em agendar os encontros nesse laboratório. Por este motivo, optamos por procurar uma outra escola que tivesse maior flexibilidade em relação aos horários. Ou seja, que pudesse disponibilizar quatro encontros por semana durante aproximadamente três semanas seguidas.

Assim sendo, no mês de fevereiro de 2006 entramos em contato com uma escola da rede Estadual e conseguimos autorização para aplicarmos a seqüência didática já mencionada. Esta seqüência foi elaborada com base nos resultados que emergiram tanto da análise dos livros didáticos como da resolução do teste diagnóstico, detalhados nos capítulos III e IV, e aplicada em uma turma da 8ª série do Ensino Fundamental dessa escola mencionada. Vale explicar que a seqüência didática é composta por atividades semelhantes àquelas estudadas no ensino usual. Isto porque tínhamos a intenção de identificar os teoremas em ação apresentados pelos alunos para resolver as atividades que normalmente são propostas em sala de aula. Assim sendo, em nossa opinião, não seria adequado propor questões muito diferentes daquelas que estão habituados.

Com esta perspectiva, formulamos atividades com questões que nos propiciassem identificar os diversos teoremas em ação que os alunos utilizariam ao resolvê-las. A seqüência didática era constituída por atividades que enfocavam a fatoração. Nelas era preciso colocar o fator comum em evidência (seja esse fator um número, um binômio ou monômio), fatorar trinômios quadrados perfeitos e diferença de quadrados.

No teste diagnóstico observamos que nenhum aluno tentou fatorar esses dois últimos casos de fatoração, e nas expressões em que eles apareciam para serem fatorados colocando o fator comum em evidência, caso do binômio, os alunos fizeram a distribuição desses produtos, sendo que a maioria incorretamente. Desse modo, decidimos introduzir algumas atividades para desenvolver os produtos notáveis. Propusemos, então, questões bem próximas das apresentadas nos livros didáticos e das explicações fornecidas pela professora dessa turma. Assim, em nossa seqüência apareceram atividades nas quais os alunos precisavam desenvolver o quadrado da soma, por exemplo, e em seguida utilizavam esse resultado para fatorar trinômios quadrados perfeitos.

Lembramos que essa seqüência de atividades não teve por objetivo criar situações destinadas à aprendizagem da fatoração, mas sim estudar as dificuldades relativas à fatoração. Entretanto observamos também, no teste diagnóstico, que os alunos não se lembravam do que é fatorar uma expressão, por isso, propusemos a eles, no momento de resolver as atividades, que discutissem entre si a respeito do assunto e esclarecemos que só interviríamos se não conseguissem realmente se lembrar.

Antes de propor a resolução das atividades, conversamos informalmente com a professora de Matemática da turma selecionada, que nos forneceu algumas informações sobre os alunos que compunham nossa amostra. Dentre essas informações ela explicou que a maioria dos alunos havia estudado no ano anterior nessa mesma escola e que o livro didático utilizado por eles, naquele momento, era o mesmo por nós selecionado para análise. Esclareceu também que haviam estudado a fatoração no final do quarto bimestre, do ano anterior (2005), e que naquele momente estavam estudando potência numérica e algébrica.

Para os alunos deixamos claro que essas atividades não tinham o objetivo de avaliá-los. Na verdade pretendíamos analisar dificuldades que eles poderiam ter ao resolvê-las, sendo que poderiam discutir entre si para tirar dúvidas durante a resolução de algumas atividades. Nossa intenção foi instigá-los a relembrar a fatoração, e se possível sem a nossa intervenção. Entretanto, não foi permitido copiar os resultados obtidos pelos colegas. Gostaríamos de analisar o trabalho de cada sujeito, verificar se os mesmos utilizariam algum teorema em ação falso, e se persistiria a sua utilização no decorrer das atividades. Assim como ocorreu no teste diagnóstico estes sujeitos não lembravam do conteúdo e por este motivo também tiveram um tempo para expor suas dúvidas e discutir entre eles.

2.2.2 Ambientes Papel e Lápis e *Software Aplusix*

Um outro fator que foi considerado no momento de elaboração da seqüência didática foi o fato de serem dois, os ambientes usados pelos alunos no momento de resolvê-la. Ou seja, os envolvidos solucionaram as atividades tanto utilizando papel e lápis como o *software Aplusix*. Como explicamos anteriomente fizemos esta distinção para poder investigar todos os alunos dessa turma.

Ao resolver as atividades em papel e lápis os alunos teriam, em princípio, a possibilidade de fazer a distribuição dos produtos para verificar se voltariam às expressões iniciais. Poderiam ainda validá-las com o auxílio do professor, isto é o aluno poderia pedir para o professor verificar se estava correto ou não.

No *Aplusix,* os sujeitos tinham a chance de trabalhar com algumas retroações que o *software* oferece como meio de verificar se os cálculos estão corretos, podendo ao final deixar somente a resposta que consideravam correta. Ao término de cada encontro professora e pesquisadora se reuniam para discutir como seria a aplicação da próxima atividade, bem como, o andamento das atividades já aplicadas e sobre as dúvidas surgidas durante sua aplicação.

Os dados que emergiram da resolução das atividades foram tabulados, categorizados, analisados e serão apresentados posteriormente. Na seqüência, esboçaremos algumas características relativas ao *software Aplusix* que são explorados na seqüência didática que elaboramos.

2.2.2.1 Apresentação do *Aplusix*

A*plusix* é um *software* destinado à aprendizagem da Álgebra, em que o professor pode criar listas de exercícios personalizadas de maneira variada. É fácil de ser utilizado pelos alunos, e eles podem resolver as atividades utilizando o *mouse* ou o teclado. Vejamos, em seguida, a figura 2 com o teclado virtual do *Aplusix*.

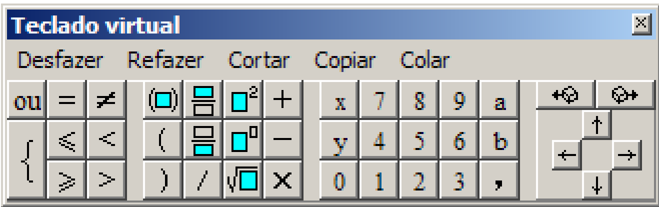

Figura 2: Teclado virtual do *Aplusix*

A nossa seqüência foi composta por atividades para serem resolvidas como exercícios e como teste. As atividades elaboradas para serem resolvidas como exercícios, tiveram dois tipos de personalização oferecidos pelo software:

- verificação permanente - nesse modo o *software* informa ao aluno a equivalência ou não entre as etapas realizadas. Ele não diz o que está errado, somente que há algum erro naquela passagem, assim, o aluno pode corrigir algum erro que venha a cometer. Além disso, quando o aluno finaliza o exercício, o *software* exibe algumas mensagens, avisando se a resposta está correta ou dizendo que há algum erro, no caminho que conduz ao resultado. Escolhemos esse modo de verificação para as primeiras atividades, em que prevíamos que os alunos poderiam ter mais dificuldades, pois observamos no teste diagnóstico que eles não se lembravam da fatoração. Na sala de aula eles teriam a ajuda da professora, e no laboratório a idéia é que o *software* os auxiliasse.

- verificação a pedido, com direito a quatro créditos – nesse modo o aluno poderia pedir a verificação quatro vezes, assim, ele teria de avaliar melhor antes de pedir a verificação, pois, teria um número reduzido de verificação. Esperavámos com isso que o aluno não ficasse somente fazendo tentativas aleatórias, mas sim que refletisse sobre as suas escolhas. Além disso, o *software* não iria exibir nenhuma mensagem ao final, mesmo que o resultado estivesse errado. Vejamos em seguida um exemplo em que o aluno resolve um exercício, e pede a verificação; o *Aplusix* risca em vermelho, mostrando que as etapas não são equivalentes:

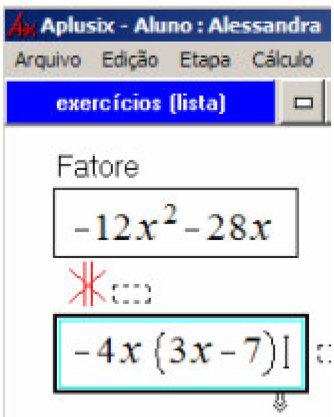

Figura 3: Exemplo de resolução no *Aplusix*

As atividades elaboradas no modo teste, não oferecem nenhuma retroação ao aluno sobre a validade de seus cálculos. Esse tipo de personalização é importante, no estudo das dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas, bem como, na identificação dos teoremas em ação. Escolhemos esse tipo de personalização, pois tinhamos como objetivo também verificar se os teoremas identificados nas primeiras atividades, em que o aluno tinha revisão permanente e a pedido, voltariam a ser utilizados na última atividade que realizamos como um teste. Alguns alunos poderiam deixar de utilizar teoremas falsos no decorrer das atividades, por causa do auxílio que teriam, entretanto, queríamos saber se sem ajuda eles voltariam a utilizar teoremas falsos. Com o *Aplusix*, poderíamos observar em detalhes todas as atividades realizadas pelos alunos, pois ele grava automaticamente tudo o que o aluno faz, mesmo que ele apague várias vezes. Vejamos o exemplo, em seguida, de uma atividade em que ao final o aluno não deixou nada escrito, entretanto, observando com a ferramenta *videocassete*, vemos que tentou resolver o problema.

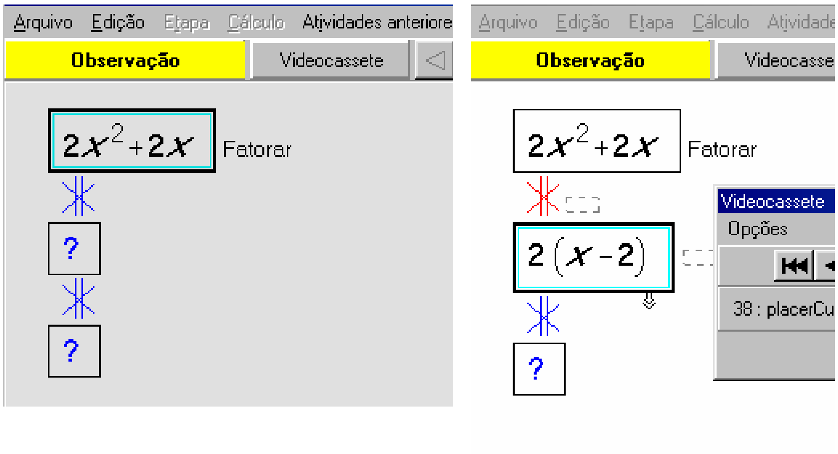

Figura 4: Exemplo de observação com videocassete

Essa atividade estava sendo realizada como um teste. É possível que se estivesse no modo exercício, com verificação, o aluno faria mais tentativas para resolver, pois teria o auxílio do *software*.

Antes de concluirmos este capítulo é importante enfatizar que a ferramenta *videocassete* do *Aplusix* foi de grande ajuda em nossa pesquisa na análise de possíveis erros, bem como, na identificação dos teoremas em ação utilizados pelos alunos ao resolver as atividades.

CAPÍTULO III

ANÁLISE DO CONHECIMENTO EM ESTUDO

Apresentamos neste início de capítulo a fatoração no ensino atual e algumas aplicações possíveis. Em seguida trazemos a análise de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e o teste diagnóstico que fizemos e que serviram de subsídio à elaboração de nossa seqüência didática.

3.1 Apresentação da Fatoração no Ensino Atual e Algumas Aplicações Possíveis.

Alguns conceitos matemáticos são importantes tanto por suas aplicações à situações práticas, como para resolver problemas de outras áreas do conhecimento. Entretanto, muitos conceitos importantes da Matemática são contextualizados dentro da própria Matemática; este é o caso da fatoração algébrica: o seu ensino se justifica pela sua aplicação dentro dessa disciplina. Normalmente, a fatoração é apresentada a partir da sétima série do Ensino Fundamental, e, em geral, junto com produtos notáveis. Alguns livros didáticos trazem um capítulo com o título “Produtos Notáveis e Fatoração”.

Primeiramente são apresentados os seguintes produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos. Após essa apresentação, é dada a fatoração de um trinômio quadrado perfeito e da diferença do quadrado de dois termos. Em seguida, vem a fatoração colocando o fator comum em evidência que é dividida em dois casos: quando o polinômio é fatorado apenas uma vez, por exemplo, $kx+ky+kz$ fatorando essa expressão obtém $k(x+y+z)$; e no caso do polinômio ser fatorado mais de uma vez obtendo um produto de binômios, assim, fatorando $ax-mx+ay-my$ temos $x(a-m)+y(a-m)$, fatorando novamente chega-se a expressão $(a-m)(x+y)$ normalmente denominada pelos livros didáticos como fatoração por agrupamento.

Podemos encontrar também a fatoração de $x^2+(a+b)x+ab$ que recai no produto de Stevin $(x+a)(x+b)$ (SILVEIRA, 2004; LIMA, 1996). Alguns livros trazem também, mais raramente, a fatoração da expressão $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ no cubo da soma de dois termos $(a+b)^3$, e a fatoração de $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ no cubo da diferença de dois termos $(a-b)^3$. No estudo desses conceitos alguns autores de livros didáticos fazem a apresentação algébrica junto com a representação geométrica, principalmente no caso dos produtos notáveis. A esse respeito cabe destacar o que recomendam os PCN:

> [...] a 'visualização' de expressões algébricas, por meio de cálculo de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas, [...]. No entanto, a interpretação geométrica dos cálculos algébricos é limitada, pois nem sempre se consegue um modelo geométrico simples para explicá-lo. Assim, as 'visualizações' desse tipo podem ser interessantes em alguns momentos, dependendo do contexto da situação-problema (BRASIL, 1998, p.121).

De fato, muitas expressões algébricas são difíceis de serem representadas geometricamente, o que faz com que o uso dessas representações seja limitado, talvez, à introdução e a alguns casos da fatoração.

Na apresentação da fatoração são abordados vários casos, entretanto, sua aplicação na resolução de exercícios, no Ensino Fundamental, é pouco explorada feita, em geral, ao final do seu estudo, na sétima série, em alguns exemplos de simplificação de frações algébricas. Na oitava série, pode aparecer na racionalização de denominadores, e na resolução de algumas equações de segundo grau, principalmente nas incompletas do tipo $ax^2+bx=0$ $(a\neq0)$. Apesar de ser enfatizado o estudo dos produtos notáveis, sua aplicação na resolução de equações que são trinômios quadrados perfeitos ainda é pouco explorada.

Em contrapartida, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) indicam que o estudo da fatoração no Ensino Fundamental deve ser orientado para a:

> ● Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatoração e simplificações;
> ● Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta (p.88).

No Ensino Médio, a fatoração pode ser aplicada no estudo das funções quadráticas, para encontrar os pontos onde $f(x)=0$, o que equivale a encontrar as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$. Ou seja, ela pode ser utilizada em alguns casos em que aparece uma equação do segundo grau para ser resolvida e que pode ser fatorada, bem como, no estudo das inequações.

No estudo do gráfico da função quadrática, a fatoração também pode ser muito útil, por exemplo, ao completarmos o quadrado[6] da função $f(x)=ax^2+bx+c$, obtemos $f(x)=a(x-m)^2+k$, em que $m=-b/2a$ e $k=f(m)$, que é chamada de forma canônica do trinômio do segundo grau. Essa forma de apresentação é extremamente útil para resolver problemas que envolvem o vértice da parábola, isto é, estudos de máximos e mínimos, bem como, na visualização do gráfico da função quadrática (LIMA, 2001).

Ainda no Ensino Médio, na geometria analítica, no estudo da equação da circunferência, ela é utilizada para verificar se uma equação dada na forma geral se trata de uma equação da circunferência. Nesse caso, precisamos utilizar o método de completar o quadrado para se chegar à equação na forma reduzida $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Essa é uma abordagem, segundo Lima (2001), mais simples e direta de se constatar se uma equação dada representa ou não uma circunferência. Ou ainda, se dada a equação da circunferência, na forma geral, precisamos encontrar o centro e o raio dela. A fatoração é indicada para resolver essa situação; o mesmo acontece em situações semelhantes que envolvem equações da elipse e da hipérbole.

No Ensino Superior esses conceitos voltam a ser estudados e a fatoração é, novamente, indicada para o estudo das equações da elipse, da hipérbole e da circunferência. Além disso, no estudo das funções polinomiais e racionais precisamos fatorar as expressões algébricas para encontrar: pontos de máximos e mínimos, pontos de inflexão ou no estudo das assíntotas, dentre outros.

Essas aplicações mostram um pouco da importância da presença da fatoração nos currículos escolares. Porém, apesar de seu estudo ser enfatizado no Ensino Fundamental, pelos livros didáticos, os alunos apresentam dificuldades em utilizar a fatoração de maneira adequada. E, nos anos posteriores ao seu estudo, ela não vem sendo suficientemente aplicada.

---

[6] Completar o quadrado não é fatorar uma expressão, entretanto, este método utiliza a fatoração do trinômio quadrado perfeito, por exemplo, dada a equação $f(x)=x^2-8x+17$completando o quadrado obtemos $f(x)=(x-4)^2+1$. Para completar o quadrado o aluno precisa saber fatorar o trinômio quadrado perfeito, em vista disto, estamos considerando esse método como uma aplicação da fatoração.

De fato, Lima (2001), ao fazer um exame dos livros textos de Matemática para o Ensino Médio, criticou a falta de aplicação de conceitos estudados no que se refere aos níveis anteriores, em particular com relação à fatoração:

> Completar quadrado, essa técnica tão útil, é assunto nunca mencionado. O aluno, que já resolveu dezenas de exercícios de fatoração envolvendo o quadrado da soma, terá aqui que aplicar a famigerada fórmula de Báscara para obter a raiz da equação $9x^2+12x+4=0$. O fato de que $9x^2+12x+4=(3x+2)^2$, super-estudado no ano passado, está esquecido, enterrado e ultrapassado (LIMA, 2001, p. 12).

Nas doze coleções analisadas em Lima (2001), a fatoração é quase que esquecida, não aparecendo nas situações que citamos anteriormente: função quadrática e na geometria analítica. Alertando para o fato de que o ensino atual prioriza simplesmente a memorização de fórmulas, cita o exemplo do estudo das cônicas:

> Uma abordagem muito mais indicada é a de utilizar completamento de quadrado para reescrever a equação dada na forma canônica. Além de dispensar completamente a memorização de fórmulas, este método tem a grande vantagem de mostrar a relevância de conteúdos estudados anteriormente (produtos notáveis) (LIMA, 2001, p.159).

A fatoração pode ser aplicada nos vários níveis de ensino, entretanto, vimos que alguns estudos mostram que os alunos expressam várias dificuldades, dentre elas, dificuldades relativas à manipulação de expressões algébricas, seguindo regras próprias dessa estrutura (DA ROCHA FALCÃO, 2003; BOOTH, 1995).

Em seguida fazemos uma análise da apresentação da fatoração nos livros didáticos do Ensino Fundamental, em que buscamos identificar os conceitos envolvidos nesta apresentação, bem como, indícios de possíveis teoremas em ação que essas apresentações pudessem favorecer.

3.2 Apresentação da Fatoração nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental

Os livros didáticos têm um papel fundamental na prática de sala de aula dos professores, sendo muitas vezes um dos únicos meios de consulta. A formação inicial nem sempre o prepara de maneira adequada para o exercício do magistério. Os professores do Ensino Fundamental, mesmo em início de carreira, costumam trabalhar quarenta horas aulas semanais, e dessas, em geral, apenas oito são dedicadas ao planejamento das aulas. O pouco tempo e a falta de oportunidades de aprimorar a sua formação faz do livro didático, um apoio muito importante para o professor. O Programa Nacional do Livro Didático de 2005 observa esses fatos:

> O livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna freqüentemente a única ferramenta disponível para o seu trabalho.
> Isso faz com que a escolha desse material seja extremamente importante.Um bom livro constitui real ajuda para o professor e para o aluno, exercendo vários papéis. Tem a função de transmissão, consolidação e avaliação dos conhecimentos, serve como fonte de referência e pode também contribuir para a educação social e cultural dos alunos. Além disso, no que se refere mais especificamente ao professor, fornece informações sobre a Matemática e outros conhecimentos que intervêm em sua prática profissional, o que propicia a continuação de sua formação e auxilia a gestão de seu trabalho em sala de aula. (BRASIL, 2005, p.196)

Desse modo, a análise da apresentação do conceito e de suas propriedades presentes nos livros didáticos nos pareceu essencial para identificar possíveis teoremas em ação que essas apresentações pudessem favorecer.

Para isso, escolhemos três coleções para analisar: (1) Matemática Hoje é Feita Assim, de Antonio José L. Bigode (2000), (2) Tudo é Matemática, de Luiz Roberto Dante (2003) e (3) Novo Praticando Matemática, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos (2002). Todas as coleções foram analisadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2005). Optamos em analisar coleções que sintetizassem as várias opções disponíveis de abordagens da fatoração, por exemplo, apresentação em capítulo separado de outros conteúdos ou não, somente no volume da sétima serie, ou nos volumes da sétima e da oitava series; além disso, a coleção (3) foi escolhida por ser o livro didático adotado na escola em que realizamos a pesquisa.

3.2.1 Análise das coleções

Coleção 1

Essa coleção traz a fatoração nos volumes sete e oito. No volume sete "Algebreira: calculando com letras", ao final do tópico "Multiplicação de polinômios", são apresentados os produtos notáveis através de alguns exemplos com suas representações geométricas. Neste momento, a ênfase está no desenvolvimento dos seguintes produtos: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos.

A fatoração vem em seguida, e o primeiro caso é a fatoração colocando o fator comum em evidência, e segundo o autor: "[...] fatorar um polinômio equivale a decompô-lo num produto indicado de polinômios" (BIGODE, 2000, p. 184). Ele apresenta esse conceito explorando alguns exemplos a partir da multiplicação de monômios com binômios, ou de números com binômios. Vejamos como faz:

> Quando multiplicamos o monômio $2x$ pelo binômio $3a+b$, obtemos o binômio $6ax+2bx$. Veja:
> Como $6ax+2bx$ é o desenvolvimento do produto $2x(3a+b)$, ele pode ser decomposto em um produto indicado de polinômios.
> $6ax+2bx=2x(3a+b)$
> Dizemos que $2x(3a+b)$ é a forma fatorada de $6ax+2bx$.
> (BIGODE, 2000, p. 184).

Junto a um dos exemplos ele traz a indicação que: "Fatorar é como ir detrás para frente".(BIGODE, 2000, p.184). Para o autor, a fatoração está diretamente relacionada ao desenvolvimento, nesse caso, a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição.

De fato, na página seguinte o autor explica através de um diálogo entre um professor e um estudante como fatorar com um exemplo: dado o trinômio $3x^2+6x^3+9x^4$, ele pergunta "Qual o monômio que multiplicado por $3x$ resulta $3x^2$?" o aluno responde "É o x" (BIGODE, 2000, p. 185). E assim ele faz para cada termo dentro dos parênteses até, ao final, apresentar a forma fatorada $3x(x+2x^2+3x^3)$.

Ao final, ele observa que para verificar se a fatoração está correta: "[...] aplique à expressão fatorada a propriedade distributiva".(BIGODE, 2000, p.186). Essa observação é importante, pois, é uma maneira do aluno verificar se o seu trabalho está correto. Além disso, permite compreender melhor a maneira que o autor apresenta a fatoração, e entender o que ele quer dizer com “ir detrás para frente”.

Em seguida apresenta os outros três casos da fatoração: fatoração por agrupamento, diferença de quadrados e expressões obtidas dos produtos notáveis. São apresentados alguns exemplos com sua interpretação geométrica, e posteriormente é feita a aplicação da fatoração na simplificação de frações algébricas.

Na fatoração por agrupamento o autor traz dois exemplos com expressões que, embora não tenham fator comum a todos os termos, podem ser fatoradas. Assim, dada a expressão: $ax+ay+bx+by$, agrupando os termos e fatorando temos: $a(x+y)+b(x+y)$, podemos fatorar novamente colocando $(x+y)$, que é um fator comum, em evidência obtemos então: $(x+y)(a+b)$.

A fatoração da diferença de quadrados e dos trinômios quadrados perfeitos é feita se reportando ao resultado visto no início, no desenvolvimento dos produtos notáveis, lembrando que a forma fatorada dessas expressões é:

- $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
- $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
- $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

Em seguida o autor propõe duas atividades, uma para fatorar polinômios e outra para simplificar algumas expressões. Nesse volume, a fatoração do trinômio quadrado perfeito é visto rapidamente, pois: “[...] será retomada e aprofundada na 8ª. Série”.(BIGODE, 2000, p.189).

De fato, no volume oito a fatoração é apresentada novamente, na unidade três – Fatoração, Produtos Notáveis e Cálculo Algébrico. São repetidos os quatro casos estudados no volume sete, agora mais detalhadamente, isto é, com maior número de exemplos e exercícios propostos ao aluno.

Ao iniciar o estudo da fatoração o autor relembra que fatorar um número: “[...] equivale a decompô-lo em um produto de fatores” (BIGODE, 2000, p.80), e uma fatoração estará completa quando o número for decomposto em um produto de fatores primos, por exemplo, $60=2^2.3.5$. Em seguida diz que essa idéia pode ser estendida para expressões algébricas e apresenta alguns exemplos.

Na fatoração colocando o fator comum em evidência vemos, novamente, a ênfase na propriedade distributiva, observe o primeiro exemplo:

> Fatorar a expressão $2x+4y$.
> O fator 2 compõe os dois termos da expressão $2x+4y$.
> Colocando 2 em evidência, obtemos:
>
> $$2(?+?)=2x+4y$$
>
> Para completar a expressão, devemos imaginar a propriedade distributiva ao contrário e responder às questões:
> 1ª) Qual é a expressão que multiplicada por 2 dá $2x$?
> A resposta é simples: x.
> 2ª) Qual é a expressão que multiplicada por 2 dá $4y$?
> A resposta é $2y$.
>
> $\boxed{2(x+2y)=2x+4y}$ ← Pronto, está fatorado!
>
> (BIGODE, 2000, p.81).

Esta apresentação pode trazer algumas dificuldades para o aluno, pois, a igualdade apresentada ao final mostra uma expressão da forma fatorada para a forma desenvolvida, sendo indicada como fatorada. E, em seguida, ele faz outro exemplo que, agora, ao final apresenta a expressão no sentido de que foi fatorada: $6ab^2-8a^2+18ax^2=2a(3b^2-4a+9x^2)$.

As indicações como: "propriedade distributiva ao contrário", "fazer o caminho inverso" ou "fatorar é como ir detrás para frente" são justificadas pelo autor em alguns momentos, como, por exemplo:

$$\xrightarrow{\text{fatorar}}$$

$$2ax+6ay \;=\; 2a(x+3y)$$

$$\xleftarrow{\text{Desenvolver O produto}}$$

(BIGODE, 2000, p.80)

Essa apresentação é importante para que o aluno possa entender as indicações citadas acima. Entretanto, apesar de falar em "propriedade distributiva ao contrário" em nenhum momento o autor utiliza a divisão de monômios, que foi apresentada antes da multiplicação, para o estudo da fatoração, sendo que é esta propriedade que está sendo aplicada para se fazer esta "volta" da distribuição citada pelo autor.

Na verdade é isso que é feito ao fatorar uma expressão, por exemplo: para fatorar $21x+12x^2$ precisamos primeiro identificar o fator comum, no caso $3x$. E seria interessante também escrever a expressão de modo a torna esse fator explícito, como, por exemplo, $7.3x+4.3x.x$, para em seguida dividir cada termo pelo fator comum identificado $7.3x : 3x = 7$ e $4.3x.x : 3x = 4x$, obtendo-se então a forma fatorada $3x(7+4x)$.

Os outros casos de fatoração são apresentados como no volume sete, com exceção dos trinômios quadrados perfeitos.

Para fatorar um trinômio quadrado perfeito, nesse volume, primeiramente o autor relembra que esse é o desenvolvimento do quadrado de uma expressão do tipo $(x+y)^2$ ou $(x-y)^2$. Faz as distribuições desses quadrados, em seguida traz alguns exemplos de fatoração baseados nas estruturas desses trinômios. Vejamos como ele faz:

> Fatorar a expressão $4x^2+12xy+9y^2$.
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | $4x^2$ | $+12xy$ | $+9y^2$ |
> | $(2x)^2$ | $2(2x)(3y)$ | $(3y)^2$ |
>
> a) Identificamos os quadrados perfeitos da expressão e extraímos a sua raiz quadrada.
> $4x^2=(2x)^2$ e $9y^2=(3x)^2$
> b) Verificamos se o termo $12xy$ é o dobro do produto $2x$ por $3y$.
> $12xy=2.2x.3y$
> Então, $(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$
> (BIGODE, 2000, p.86).

Podemos observar que a distribuição é enfatizada, outra vez, pelo autor, e que ao final desse exemplo, é apresentada novamente a expressão da forma fatorada para a desenvolvida: $(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$; mesmo problema que observamos em um dos exemplos da fatoração colocando o fator comum em evidência.

O autor faz outros exemplos e observa em um deles que, algumas vezes, os termos dos trinômios podem aparecer diferentes da forma que estamos acostumados. Esse é um exemplo interessante para o professor trabalhar, entretanto, apesar desse exemplo, em todos os exercícios propostos aos alunos os trinômios aparecem na forma usual, isto é, os termos que são quadrados perfeitos são o primeiro e o último: $x^2+2ax+a^2$ ou $a^2+2ax+x^2$.

Desse modo, é possível que algum aluno se lembre da indicação que foi apresentada pelo autor para a fatoração dos trinômios: extrair a raiz quadrada dos termos que são quadrados perfeitos; em seguida tentar extrair a raiz quadrada do primeiro e do último termo em expressões como, por exemplo, $4x+1+4x^2$, sendo que esses termos não são quadrados perfeitos, e fatorar incorretamente obtendo $(2x+2)^2$. E nesse caso acreditamos que o aluno ao ter que fatorar uma expressão assim: $2abx+b^2+a^2x^2$, possa utilizar o teorema em ação falso $(ax+a)^2$.

Ao final do capítulo é proposta uma lista de atividades para os alunos denominada de "Retomando", sendo alguns dos exercícios para simplificar frações algébricas, cujo enunciado diz claramente como a fatoração será utilizada: "Fatore os numeradores e denominadores e simplifique as frações algébricas" (BIGODE, 2000, p.92).

A diferença de quadrados é pouco explorada nos exemplos e exercícios. O autor traz uma indicação para o professor, justificando que esse não é o foco deste capítulo; esse assunto já foi explorado no volume sete, e caso seja necessário o professor deve retomar esse conceito. Neste momento, o autor está retomando os casos de fatoração para resolver equações do segundo grau no próximo capítulo, e as equações incompletas que recaem numa diferença de quadrados $(ax)^2-b^2=0$ são resolvidas mais facilmente extraindo a raiz quadrada dos dois membros.

No manual do professor, o autor fala da importância dos alunos estarem familiarizados com a seqüência dos números quadrados perfeitos, 1, 4, 9, 16, 25,..., para poderem fatorar bem e mais rapidamente os produtos notáveis.

Como vimos, para esse autor a fatoração está relacionada mais diretamente ao desenvolvimento de expressões algébricas. Ele trabalha a fatoração em situações variadas, isto é, exercícios teóricos e situações problemas, em alguns casos junto com a sua representação geométrica. Há uma ênfase ao estudo dos produtos notáveis, em particular no desenvolvimento do quadrado da soma, que em seguida o autor utiliza para o que denomina de caminho inverso, que seria a fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da soma.

Essa ênfase nos fez supor que algum aluno ao tentar fatorar a diferença de quadrados pudesse tentar fatorar como o quadrado da soma, que é mais explorado nas atividades. Desse modo, ao tentar fatorar a expressão x^2-4x+4 o aluno pode fazer uso do teorema em ação falso $(x+2)^2$, por exemplo.

Coleção 2

A apresentação da fatoração é feita no volume sete, capítulo sete – "Cálculo Algébrico". Esse autor, não faz um capítulo específico para a fatoração, ela aparece em uma seção, depois da divisão e da multiplicação de polinômios, como um tópico, “Fatoração: colocação de um termo em evidência”.

Segundo o autor: “Quando transformamos um polinômio de dois ou mais termos em uma multiplicação dizemos que fizemos a fatoração do polinômio”, e “Fatorar um polinômio é transformá-lo em um produto”. (DANTE, 2003, p.162). Ele inicia com um diálogo, em que um professor pergunta a um aluno: qual o monômio que multiplicado por $a+b$, resulta em $3a^2+3ab$? E tem como resposta $3a$, pois, $3a(a+b)=3a^2+3ab$. Em seguida, ele mostra como fatorar essa expressão:

> $$3a^2+3ab \quad = \quad \underbrace{\mathbf{3a}.a + \mathbf{3a}.b}_{\text{fator comum}} \quad = \quad 3a\,.\,(a+b)$$
>
> Veja que **3a** é o fator comum às duas parcelas da adição $3a^2+3ab$.
> Assim: $3a^2+3ab=\underbrace{\underline{3a(a+b)}}_{\text{Forma fatorada}}$
>
> Verificação:
> Para verificar se a fatoração está correta basta desenvolver o produto $3a(a+b)=3a^2+3ab$ e observar se volta ao polinômio inicial ($3a^2+3ab$). (DANTE, 2003, p. 162).

Esse autor também apresenta a fatoração atrelada ao desenvolvimento, com uma diferença em relação à outra coleção, esta enfatiza a explicitação do fator comum da expressão, antes de colocá-lo em evidência. Não só nesse exemplo, como também em uma das atividades propostas aos alunos, em que, dado o polinômio $8x^3-6x$ pede-se que o escreva de tal forma que apareça um fator comum em ambos os termos dessa subtração, no caso a resposta esperada é $4x^2.2x-3.2x$.

É uma atividade muito importante e necessária no caso da fatoração colocando o fator comum em evidência, pois, alguns alunos podem ter dificuldade em identificar o fator comum das expressões. Por exemplo, na expressão citada nessa atividade o fator comum $2x$ não estava aparente[7], o aluno precisava identificá-lo na expressão.

Além disso, ele traz como indicação para verificar se a fatoração está correta, o desenvolvimento do produto encontrado, observando que se deve chegar a

---

[7] Estamos dizendo que um fator comum está aparente, quando ele está visível na expressão, por exemplo, na expressão $3x^2+3x$ o fator comum $3x$ está aparente (visível), enquanto que, no caso de $15x-12x^2$ o fator comum $3x$ não está explícito, o aluno precisa identificá-lo.

expressão inicial. Essa indicação aparece também em atividades propostas ao aluno, e é importante para que o mesmo consiga verificar se o seu trabalho está correto, como também, entender melhor o processo de fatoração proposto pelo autor.

O autor propõe várias atividades de fatoração e, em uma delas o fator comum é um binômio, vejamos como ele traz:

> Veja esta expressão algébrica $x(x+2)+3(x+2)$. Como podemos fatorá-la?
> É bem simples.
> Nesse caso, o fator comum é $(x+2)$.
> Colocando-o em evidência, temos:
> $$x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x+3)$$
> (DANTE, 2003, p.163).

Na seção seguinte, o autor traz a multiplicação de binômio por binômio, são apresentados exemplos algébricos e geométricos, com exercícios nos quais o aluno deverá distribuir os produtos e reduzir os termos semelhantes. Essa apresentação é pertinente, pois, na seção seguinte o autor faz o estudo dos produtos notáveis. Nesse estudo são feitos alguns exemplos com sua representação geométrica.

Há vários exercícios propostos aos alunos, em que a ênfase, num primeiro momento, está no desenvolvimento dos produtos, isto é, na propriedade distributiva, chegando-se, ao final, ao trinômio quadrado perfeito. Em alguns exercícios pede-se para o aluno resolver a atividade "aplicando o padrão" que ele já conhece.

Em seguida é proposto que o aluno faça o caminho inverso: "Tendo um trinômio quadrado perfeito, você vai fatorá-lo, ou seja, escrevê-lo como o quadrado de uma soma ou de uma diferença indicada".(DANTE, 2003, p.167). Vejamos uma das atividades propostas aos alunos:

> Copie a igualdade em seu caderno e complete-as.
> a) $(x+\square)^2=\square+\square+16$
> b) $(x-\square)^2=\square-12x+\square$
> c) $(4x+\square)^2=\square+\square+1$
> d) $\square+18x+\square=(x+\square)^2$
> e) $\square-\square+49=(x-\square)^2$
> f) $\square-24x+\square=(3x-\square)^2$
> (DANTE, 2003, p.167).

Esse autor não traz nenhum exemplo nem observa que algumas vezes os trinômios podem aparecer fora da forma usual, por exemplo, $16x+1+64x^2$. O que, como já dissemos na análise da coleção (1), pode fazer com que algum aluno ao ter de fatorar uma expressão como essa, fora da ordem, utilize o teorema em ação falso $(4+8x)^2$.

A fatoração que outros autores denominam de agrupamento é vista ao final em "Outras fatorações", com exemplos de expressões que podem ser fatoradas mais de uma vez. Vejamos dois exemplos:

$3x^2-75=3(x^2-25)=3(x+5)(x-5)$

$xy+3x+2y+6=x(y+3)+2(y+3)=(y+3)(x+2)$

A fatoração é retomada no volume oito do capítulo dois: Equações e Sistemas de Equações do 2º Grau. O livro traz "Recordando a fatoração de um trinômio quadrado perfeito" (DANTE, 2003, p. 47). A ênfase neste momento não será mais no desenvolvimento e sim na fatoração que ele denomina de "caminho inverso", assim indicado:

$$\underbrace{x^2}_{x\ (1^o)} \quad \underbrace{+\ 2.x.y}_{\text{duas vezes o } 1^o \text{ pelo } 2^o} \quad \underbrace{+\ y^2}_{y\ (2^o)} \quad = \quad (x+y)^2$$

São propostos exercícios para fatorar os trinômios, resolver equações que são trinômios quadrados perfeitos, e problemas variados com representações geométricas que recaem em equações. Observamos que esse autor explora tanto o quadrado da soma como o quadrado da diferença de dois termos, o que não é comum, pois os livros enfatizam geralmente o quadrado da soma. Vejamos uma das atividades para fatorar trinômios:

> Todos os trinômios abaixo são trinômios quadrados perfeitos. Fatore-os em seu caderno.
>
> a) $x^2+10x+25$ d) $a^2+2ab+b^2$ g) $16x^2+40x+25$
>
> b) $9x^2-6x+1$ e) $y^2+2/3.y+1/9$ h) $9t^2-6t+1$
>
> c) $y^2-y+¼$ f) $16x^2-8x+1$ i) $¼\ y^2-3y+9$
>
> (DANTE, 2003, p.48)

Em seguida, o livro traz a seção: Resolvendo equações do 2º grau completas por fatoração, o autor relembra que: "[...] fatorar é transformar em produto" (DANTE, 2003, p. 53), e apresenta um outro método de fatoração, que consiste em:

● encontrar dois números a e b, tais que: $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$. Assim, para fatorar a expressão: x^2+4x-5 devemos encontrar dois números a e b, tais que, $a+b=4$ e $ab=-5$, por tentativas ele lista vários pares ordenados de números, em que:

- a soma seja 4: (2,2), (5,-1), (1,3), (7, -3),...
- o produto seja -5: (-1,5), (5, -1), (1,-5),...

Os que satisfazem as duas condições ao mesmo tempo são (-1,5) e (5,-1), assim a forma fatorada é $x^2+4x-5=(x-1)(x+5)$.

No final propõe atividades para os alunos, sendo que, algumas são para fatorar os trinômios.

A fatoração é apresentada de maneira variada, o que segundo os PCN torna o ensino mais significativo ao aluno. Além disso, não é feita exaustivamente em um só ano, pois, na oitava série o autor retoma os casos já vistos na sétima e acrescenta um outro método.

O manual pedagógico traz indicações aos professores, para que frisem ao aluno que todo o estudo com cálculo algébrico, visa a sua utilização na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações.

Coleção 3

A fatoração é apresentada no volume sete, unidade cinco: “Produtos Notáveis e Fatoração”. Primeiro é feito o desenvolvimento dos produtos notáveis, junto com a sua representação geométrica, e ao final os autores apresentam o que denominam de “padrão” $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Traz a indicação para que se utilize esse “padrão” para economizar tempo.

São feitos alguns exemplos, e há uma grande quantidade de exercícios para o aluno. Os exemplos e os exercícios propostos são, na sua maioria, para desenvolver o quadrado ou distribuir, no caso do produto da soma pela diferença.

Em seguida a fatoração é apresentada, e primeiro os autores recordam a fatoração de um número em fatores primos, para depois trazerem que: “Fatorar é escrever na forma de produto. Muitos polinômios podem ser fatorados: podemos escrevê-los como produto de outros polinômios, [...]” (ANDRINI e VASCONCELOS, 2002, p.105).

Na fatoração colocando o fator comum em evidência os autores fazem exemplos, em que o fator comum está aparente, como: $3a+3b+3c=3(a+b+c)$, alguns junto com a representação geométrica. E, em casos em que o fator comum não está aparente, vejamos um dos exemplos:

$$6a^2+8a \quad = \quad 2a \quad (3a+4)$$

$$2.3.a.a \qquad 4.2.a$$

Colocamos o fator $2a$ em evidência.

$6a^2 : 2a=3a$
$8a \ : 2a=4$

Para conferir se a fatoração está correta, use a propriedade distributiva:
$2a(3a+4)=6a^2+8a$ (Voltamos ao polinômio original!).
(ANDRINI e VASCONCELOS, 2002, p.106).

Essa coleção, como a (2), também escreve os termos da expressão de modo a tornar explícito o fator comum antes de colocá-lo em evidência. E como as outras coleções, propõe a distribuição do produto encontrado como meio de verificar se a fatoração está correta. Entretanto, tem uma diferença em relação às outras, ela utiliza a divisão de monômios na fatoração.

Essa apresentação é importante e necessária para aprendizagem da fatoração, principalmente por estar junto com a indicação de distribuir o produto encontrado para verificar se está correto. Um dos erros comuns observados em pesquisas é o aluno distribuir o fator em evidência somente para o primeiro termo dentro dos parênteses, por exemplo, distribuir o produto $3x(x+4)$ como $3x^2+4$. Acreditamos que talvez falte trabalhar a multiplicação de expressões algébricas junto com a sua divisão. Desse modo, é possível que o aluno utilize esse caminho incorreto também ao fatorar uma expressão e use, por exemplo, o teorema em ação falso $ax^2+bx \rightarrow x(ax+bx)$.

Na fatoração por agrupamento os autores apresentam dois exemplos com expressões que podem ser fatoradas, embora não tenham fator comum a todos os termos, vejamos um deles: $xy^2+xy^3+3+3y=xy^2(1+y)+3(1+y)=(1+y)(xy^2+3)$. Ao final indicam que se deve aplicar a propriedade distributiva para voltar ao polinômio original.

Os outros casos de fatoração os autores apresentam como sendo: "[...] desfazer os produtos notáveis" (ANDRINI e VASCONCELOS, 2002, p.108), que são a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de dois quadrados.

A fatoração da diferença de dois quadrados é apresentada relembrando a distribuição do produto da soma pela diferença de dois termos. É explicado que para fatorar, nesse caso, devemos fazer o caminho inverso, em seguida faz alguns exemplos e propõe diversas atividades para o aluno.

Os trinômios quadrados perfeitos também são feitos como o exemplo anterior, em que dada a distribuição do quadrado da soma $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, os autores trazem que: "Agora faremos o inverso: vamos escrever o trinômio quadrado perfeito na sua forma fatorada". (ANDRINI e VASCONCELOS, 2002, p.108). Em seguida faz alguns exemplos sendo um deles junto com a representação geométrica, e apresenta outro em que o trinômio não é quadrado perfeito.

Traz também um exemplo de um trinômio quadrado perfeito: $a^2b^2+25-10ab$, que aparece fora da ordem usual, mas que pode ser fatorado como $(ab-5)^2$, pois, segundo os autores: a^2b^2 e 25 são quadrados de ab e de 5 e $2.ab.5=10ab$. Como dissemos anteriomente, esses exemplos são importantes porque alguns alunos podem tentar sempre extrair a raiz quadrada do primeiro e do último termo, pois são eles que em geral aparecem como os quadrados perfeitos, não só nos exemplos, como também nas atividades que são propostas aos alunos.

O livro traz uma grande quantidade de exercícios para o aluno nas seções "Exercícios" ao final de cada tópico, e no final do capítulo nas seções "Revisando", "Desafios" e "Para saber mais".

Na unidade seis, a fatoração aparece sendo aplicada na simplificação de frações algébricas. São feitos exemplos utilizando a fatoração, e propostos alguns exercícios em que a fatoração aparece de modo explícito, nos enunciados: "colocando o fator comum em evidência, simplifique" ou "utilize a fatoração da diferença de quadrados ou fatoração de trinômio quadrado perfeito e simplifique" (ANDRINI e VASCONCELOS, 2002, p.126).

No volume oito, unidade dois – Equações do Segundo Grau – a fatoração é retomada para resolver equações. É relembrado que, para fatorar uma expressão do tipo x^2+2x devemos colocar o x em evidência, assim fatorando x^2+2x obtemos $x(x-2)$.

A fatoração dos trinômios quadrados perfeitos também é relembrada, e como no volume sete é feita primeiramente a distribuição dos produtos notáveis, para em seguida fatorar os trinômios.

3.2.2 Síntese das Coleções Analisadas

Nas análises observamos que a fatoração é apresentada geralmente na sétima série do Ensino Fundamental, após serem feitos os estudos sobre potenciação e operações com polinômios. Esse conteúdo parece ser valorizado, pois, das coleções analisadas duas dedicam um capítulo ao seu estudo e retomam no ano seguinte, no estudo das equações do 2º grau, relembrando os casos apresentados no ano anterior. A terceira não faz um capítulo em separado, mas traz todos os casos já citamos e também retoma no ano seguinte no estudo das equações.

A fatoração é apresentada junto com os produtos notáveis, e observa-se que há uma ênfase ao estudo dos produtos notáveis, principalmente o quadrado da soma, apresentados em um primeiro momento para serem distribuídos, e em seguida para serem fatorados, utilizando o "padrão" observado na distribuição.

As coleções analisadas apresentam, em geral, os mesmos casos de fatoração: fator comum em evidência, agrupamento, trinômios quadrados perfeitos e diferença de dois quadrados. Podemos perceber algumas semelhanças e diferenças nessas apresentações; vamos listar abaixo alguns pontos em comum e algumas diferenças entre elas.

Pontos em comum entre as coleções:

- a fatoração é vista pela primeira vez na sétima série;
- é explorada a idéia de que fatorar é transformar uma expressão algébrica em produtos;
- a fatoração é apresentada articulada ao desenvolvimento de um produto algébrico;
- é proposta a distribuição dos produtos como meio de verificar se a fatoração está correta;
- é dada ênfase ao estudo dos produtos notáveis, desenvolvendo primeiro os produtos e depois fatorando;
- a fatoração é revisada ao se iniciar o estudo das equações do segundo grau.

Diferenças entre as coleções:

- a coleção (2) é a única que não dedica um capítulo para o estudo da fatoração e dos produtos notáveis;
- as coleções (1) e (3) iniciam o estudo da fatoração relembrando a decomposição de um número em fatores primos;
- a coleção (2) propõe atividades em que o aluno deve primeiro identificar o fator comum, escrever a expressão colocando esse fator aparente, para em seguida fatorar;
- a coleção (3) apresenta a fatoração, com alguns exemplos utilizando a divisão de monômios;
- a coleção (1) apresenta a fatoração na sétima série como um tópico do capítulo 8, e na oitava série retoma com um capítulo para o seu estudo;
- a coleção (2) propõe a técnica de fatoração: $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

A apresentação da fatoração envolve a utilização de vários conceitos.

Entretanto, nem todas as coleções relacionam todos esses conceitos ao apresentarem a fatoração. A divisão de monômios, por exemplo, só aparece em uma das coleções. As atividades propostas aos alunos priorizam somente parte dos conhecimentos envolvidos, nessa apresentação. Os exercícios são repetitivos; na maioria das vezes aparecem em grande quantidade, mas, como dissemos anteriormente, explorando geralmente só a multiplicação tanto como meio de fatorar como de verificar se a fatoração está correta.

Listamos em seguida os teoremas em ação falsos que podem ser utilizados pelos alunos ao fatorar expressões algébricas, que supomos a partir das análises feitas nas coleções:

- ✓ $ax^2+bx \rightarrow x(ax+bx)$ previsto na análise da coleção 3.
- ✓ $b^2+a^2x^2+2abx \rightarrow (b+2x)^2$ previsto nas análises das coleções 1 e 2.
- ✓ $x^2-2ax+a^2 \rightarrow (x+a)^2$ previsto na análise da coleção 1.

Lembramos que, essas hipóteses são feitas a partir do estudo que fizemos das apresentações proposta pelas coleções analisadas para esses casos de fatoração.

CAPÍTULO IV

ELABORAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Assim, após as análises dos livros didáticos elaboramos um teste diagnóstico com atividades de fatoração semelhantes às propostas nos livros didáticos, em que buscamos verificar se os alunos apresentam dificuldades em fatorar as expressões algébricas propostas, fazendo um pequeno estudo de possíveis teoremas em ação falsos utilizados por eles. A análise dos resultados desse teste, juntamente com as análises de outras pesquisas já realizadas nos serviram de base para a elaboração das atividades da nossa seqüência didática.

4.1 Teste Diagnóstico

O teste foi aplicado no dia 04/07/2005 em uma Escola Municipal de Campo Grande, com duas turmas da oitava série do Ensino Fundamental, num total de 54 alunos.

Realizamos o teste no laboratório de informática com o *software Aplusix,* e teve duração de cinqüenta minutos. Os alunos já estavam familiarizados com o *Aplusix,* e o utilizavam desde o começo do ano não tendo, portanto, nenhuma dificuldade em utilizar o *software*.

Esses alunos haviam visto a fatoração no final de 2004, a maioria estudou nessa mesma escola, e naquele momento estavam estudando resolução de equação do segundo grau com o uso da fórmula. A professora nos informou que retomou a fatoração somente para a resolução de equações incompletas do tipo $ax^2+bx=0$ $(a\neq 0)$, logo em seguida, apresentou a fórmula de Bháskara.

O teste foi composto por uma lista com doze exercícios e esperávamos poder observar se os alunos utilizariam alguns teoremas em ação falsos relativos à fatoração. Além disso, gostaríamos de observar na análise dos exercícios outros possíveis erros que os alunos pudessem vir a cometer.

Questões:

1. Fatore: $2x^2+2x$

2. Fatore x^2-4x

3. Fatore: x^2-16

4. Fatore: x^2+4x+4

5. Fatore: $5(x-1)-(x+2)(x-1)^2$

6. Fatore: $(1+x)(1-x)-(1+x)^2$

7. Fatore: $(x-2)(x+1)+3(x+1)$

8. Fatore: $(x-2)^2+x^2-4$

9. Fatore: $(x+1)(x+2)+(x+2)(x-3)$

10. Fatore: $4x^2-4x+1$

11. Fatore: x^2-2x+1

12. Fatore: $(x+2)^2+(x+2)(x-2)$

Escolhemos trabalhar com os casos de fatoração mais priorizados pelo ensino usual e que podem ser aplicados principalmente no Ensino Fundamental e Médio. Assim, os exercícios foram escolhidos com objetivo de observar se os alunos conseguiam: fatorar colocando o fator comum em evidência seja este fator um monômio ou binômio, fatorar os trinômios quadrados perfeitos e a diferença de quadrados.

Queríamos saber, também, se os alunos reconheciam os produtos notáveis, por exemplo, dado o trinômio x^2-4x+4 fatorar como $(x-2)^2$; ou dado $(x-2)^2$ transformá-lo no produto $(x-2)(x-2)$ para depois colocar o fator $(x-2)$ em evidência como no caso da questão (8) para fatorar a expressão $(x-2)^2+x^2-4$.

Além disso, colocamos uma das expressões para fatorar, no caso do fator comum em evidência, com o fator comum composto de um número multiplicado pelo x, pois gostaríamos de observar se o aluno conseguiria identificar todo o fator comum, no caso $2x$. Temos ainda, questões em que o fator comum é um binômio e eles aparecem em diversas posições. Em alguns casos, como já dissemos, o aluno para fatorar precisaria se lembrar dos produtos notáveis, questões: (5), (6), (8) e (12), e, em outras não, pois não aparecem esses produtos, como nas questões (7) e (9).

As expressões algébricas foram escolhidas todas com números inteiros, pois nosso objetivo, nesse teste, era investigar as dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas. Entendemos que expressões algébricas com números fracionários ou decimais poderiam representar dificuldades a mais para os alunos.

4.1.1 Análise do Teste Diagnóstico

A maior parte dos alunos não se lembrava da fatoração, não sabiam o que deviam fazer, tivemos então de intervir lembrando que fatorar uma expressão é escrevê-la na forma de um produto. Entretanto, mesmo assim a maioria deles não conseguiu fatorar as expressões.

Somente as questões (1) e (2) de fatoração colocando o fator comum em evidência foram resolvidas corretamente por alguns alunos, a (1) por três alunos e a questão (2) por dois alunos. A maior parte dos alunos não tentou fatorar, e nas questões em que apareciam produtos, como: (5), (6), (7), (8), (9) e (12), foram distribuídas pelos alunos, sendo que a grande maioria incorretamente, como pode ser visto nas tabelas I e II (Anexo 1).

Além disso, muitos alunos transformaram a expressão em uma equação e tentaram encontrar uma solução; ou reduziram toda a expressão a um só termo, como podemos observar a seguir:

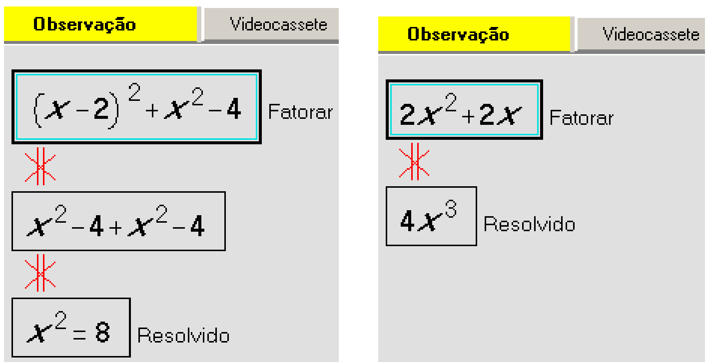

Figura 5: Resolução dos alunos no teste diagnóstico

Esses erros de redução de termos em que o aluno, por exemplo, soma número com x ou soma os expoentes do x apareceram diversas vezes e foram cometidos por vários alunos como pode ser observado na tabela III (Anexo 1). Eles também já apareceram em outras pesquisas (BOOTH, 1995; NOTARI, 2002).

Poucos alunos tentaram fatorar, como pode ser observado na tabela I (Anexo 1), e alguns que fatoraram as expressões ao final distribuíam os produtos, e pudemos observar que cometiam erros tanto ao fatorar como ao distribuir esses produtos. Vejamos a resolução da questão (3) de um aluno:

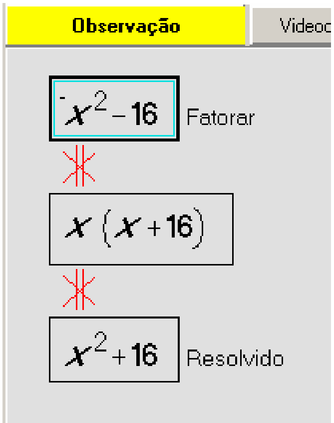

Figura 6: Resolução de um aluno na questão (3) do teste diagnóstico

O aluno tentou fatorar a diferença de dois quadrados como fatoração do fator comum em evidência, em que fatorou corretamente o primeiro termo e repetiu dentro dos parênteses o segundo termo com sinal trocado. E, ao final, distribuiu o produto encontrado do mesmo modo, ou seja, distribuiu o fator em evidência só para o primeiro termo e o segundo termo ele repete sem fazer a distribuição, mas agora ele não muda o sinal. E não observa que não obtém a expressão inicial, ou seja, não observa que sua fatoração está incorreta.

Listamos em tabela os teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos, pelo menos uma vez, ao resolverem as atividades propostas no teste, juntamente com os teoremas em ação verdadeiros, que poderiam ter sido utilizados por eles. Escrevemos os teoremas na forma de uma regra genérica, em que a e b representam as constantes, e x e y as variáveis, utilizando o símbolo (→), entre a expressão algébrica e o teorema em ação falso utilizado pelo aluno.

Além disso, na listagem dos teoremas em ação falsos utilizamos as identificações: $[T_1]$, $[T_2]$,...$[T_n]$,.... Essas identificações serão utilizadas nas análises da seqüência didática.

Alguns teoremas em ação falsos estão com a mesma identificação, pois consideramos que esses erros têm algumas semelhanças. Vejamos um exemplo:

- a identificação $[T_1]$ é composta pelos seguintes tipos de erros:

$x^2-a^2x \rightarrow x(x-a)$

$x^2-a^2x \rightarrow x(x+a)$

$ax^2+ax \rightarrow ax(x+a)$

Nesses três exemplos, o aluno fatora corretamente o primeiro termo, e incorretamente o segundo, pois, repete dentro dos parênteses um dos fatores desse termo, independente do sinal ser positivo ou negativo.

Segue a tabela 1 com os teoremas em ação que conseguimos identificar no teste diagnóstico. Na primeira coluna, denominada Corretos, estão as expressões algébricas fatoradas corretamente. Na segunda coluna: Falsos, aparece a expressão algébrica seguida do símbolo → e do teorema em ação falso utilizado pelo aluno. Na última, a identificação desses teoremas, e como dissemos, alguns deles estão com a mesma identificação.

Tabela 1
Teoremas em ação falsos identificados no teste diagnóstico

TEOREMAS EM AÇÃO		
CORRETOS	**FALSOS**	**Identificação**
$x^2-a^2x=x(x-a^2)$	$x^2-a^2x \to x(x-a)$ $x^2-a^2x \to x(x+a)$	[T_1]
$ax^2+ax=ax(x+1)$	$ax^2+ax \to ax(x+a)$	
$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$	$x^2-a^2 \to (x+a)(x+a)$	[T_2]
$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$	$x^2+2ax+a^2 \to (x+a^2)(x+a^2)$	[T_3]

4.1.2 Retorno ao Estudo dos Teoremas em Ação

As análises dos livros didáticos e do teste diagnóstico nos levaram a supor outros teoremas em ação falsos, que os alunos poderiam utilizar ao fatorar as expressões algébricas. Por exemplo, no teste foi diagnosticado o teorema em ação falso: [T_3] $x^2+2ax+a^2 \to (x+a^2)(x+a^2)$, desse modo, supomos, por analogia, que dada a expressão $x^2-2ax+a^2$**,** algum aluno poderia utilizar o teorema em ação falso: [T_8] $(x-a^2)(x+a^2)$.

Em alguns dos livros didáticos observamos que a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos se dá pela observação da distribuição do quadrado da soma, em que na expressão $x^2+2ax+a^2$ o aluno deve identificar os termos que são quadrados perfeitos, e o termo restante que deve ser duas vezes esses dois termos encontrados. Deve, em seguida, extrair a raiz quadrada dos termos, que são quadrados, e fatorar como $(x+a)^2$. Supondo então, que algum aluno pudesse se lembrar de parte dessa regra, e aplicá-la incorretamente em algumas expressões sem observar que o termo não é um quadrado perfeito, assim, dada a expressão $x^2+16x+64$ o aluno poderia tentar extrair a raiz quadrada do x^2 e do $16x$ e fatorar incorretamente como, por exemplo, $(x+4)^2$, nesse caso consideramos que ele utilizou o teorema [T_5].

Além disso, em expressões que aparecem fora da forma usual (o 1º termo ao quadrado mais duas vezes o 1º pelo 2º mais o quadrado do 2º), por exemplo, x^2+1+4x, supomos nesse caso também que os alunos se lembrem de parte da regra e relacionem a expressão com a forma fatorada $(x+2)^2$, esse erro aparece identificado como [T_{13}].

A diferença entre esses dois tipos de erros listados acima é que no primeiro caso o aluno tenta extrair a raiz quadrada de quaisquer dois termos da expressão, e no segundo ele sempre tenta extrair a raiz quadrada do primeiro e do último termo. Lembramos que na apresentação usual dos trinômios quadrados perfeitos, geralmente, são esses os termos que são apresentados como quadrados perfeitos.

Esses teoremas e outros que supomos estão listados na tabela 2, e foram utilizados na elaboração de nossa seqüência didática, bem como, na análise das atividades realizadas pelos alunos. Assim, segue a tabela com a lista desses outros teoremas em ação falsos, que julgamos possíveis de serem utilizados pelos alunos ao resolver as atividades da nossa seqüência didática.

E novamente alguns deles estão com a mesma identificação, pois consideramos que esses erros têm algumas semelhanças. Decidimos agrupar os teoremas em ação falsos para que nossa lista não ficasse muito extensa. Segue abaixo um exemplo desse agrupamento que identificamos por [T_4] e é composto pelos seguintes teoremas em ação:

$x^2+ax \rightarrow x(x+ax)$

$ax^2+a^2x \rightarrow ax(x+a^2x)$

$x^2-ax \rightarrow x(x-ax)$

Nessas expressões o aluno fatora corretamente o primeiro termo, e repete todo o segundo termo dentro dos parênteses, nesse caso também estamos considerando sinal positivo e negativo.

Tabela 2

Teoremas em ação falsos que estamos supondo poder ser utilizado pelos alunos

TEOREMAS EM AÇÃO		
CORRETOS	**FALSOS**	**Identificação**
$x^2+ax=x(x+a)$	$x^2+ax\rightarrow x(x+ax)$	$[T_4]$
$ax^2+a^2x=ax(x+a)$	$ax^2+a^2x\rightarrow ax(x+a^2x)$	
$x^2-ax=x(x-a)$	$x^2-ax\rightarrow x(x-ax)$	
$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$	$x^2+2ax+a^2\rightarrow(x+2a)^2$	$[T_5]$
	$x^2+2ax+a^2\rightarrow(x+2ax)^2$	
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$	$x^2-2ax+a^2\rightarrow(x-2a)^2$	
$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$	$x^2+2ax+a^2\rightarrow(x+a^2)^2$	$[T_6]$
	$x^2+2ax+a^2\rightarrow(x+ka)^2$	
$x^2-2ax+a^2(x-a)^2$	$x^2-2ax+a^2\rightarrow(x-a^2)^2$	
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$	$x^2-2ax+a^2\rightarrow(x+a)^2$	$[T_7]$
$a^2x^2-2abx+b^2=(ax-b)^2$	$a^2x^2-2abx+b^2\rightarrow(ax+b)^2$	
	$a^2x^2-2abx+b^2\rightarrow(a^2x+b^2)^2$	
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$	$x^2-2ax+a^2\rightarrow(x-a^2)(x+a^2)$	$[T_8]$
	$x^2-2ax+a^2\rightarrow(x-a)(x+a)$	
$a^2x^2-2abx+b^2=(ax-b)^2$	$a^2x^2-2abx+b^2\rightarrow (ax-b)(ax+b)$	
	$a^2x^2-2abx+b^2\rightarrow(a^2x-b^2)(a^2x+b^2)$	
$a^2x^2+2abx+b^2=(ax+b)^2$	$a^2x^2+2abx+b^2\rightarrow(ax+b^2)^2$	$[T_9]$
	$a^2x^2+2abx+b^2\rightarrow(a^2x+b)^2$	
$a^2x^2-2abx+b^2=(ax-b)^2$	$a^2x^2-2abx+b^2\rightarrow(ax-b^2)^2$	
	$a^2x^2-2abx+b^2\rightarrow(a^2x-b)^2$	
$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$	$x^2-a^2\rightarrow(x-a)(x-a)$	$[T_{10}]$
	$x^2-a^2\rightarrow(x-a^2)^2$	$[T_{11}]$
	$x^2-a^2\rightarrow(x-a)^2$	
$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$	$x^2-a^2\rightarrow(x-a^2)(x+a^2)$	$[T_{12}]$
$a^2x^2-b^2=(ax-b)(ax+b)$	$a^2x^2-b^2\rightarrow(a^2x-b)(a^2x+b)$	
	$a^2x^2-b^2\rightarrow(ax-b^2)(ax+b^2)$	
	$a^2x^2-b^2\rightarrow(a^2x-b^2)(a^2x+b^2)$	
$x^2+a^2+2ax=(x+a)^2$	$x^2+a^2+2ax\rightarrow(x+2ax)^2$	$[T_{13}]$
$a^2x^2+b^2+2abx=(ax+b)^2$	$a^2x^2+b^2+2abx\rightarrow(ax+2ab)^2$	
	$a^2x^2+b^2+2abx\rightarrow(ax+2ax)^2$	

Observamos no teste diagnóstico que alguns alunos têm dificuldades em distribuir potência e produtos de polinômios[8]. Por exemplo, em algumas questões para fatorar a expressão $(x-2)^2+x^2-4$, alguns alunos relacionaram com a expressão $x^2-2^2+x^2-4$. Nesse caso, observamos que o aluno distribuiu o quadrado da diferença $(x-a)^2$, como: x^2-a^2. Essa dificuldade poderá comprometer o desempenho desse aluno nas atividades em que ele precise fatorar a diferença de quadrados. A operacionalidade de um conceito, segundo Vergnaud (1990), não pode ser estudada

[8] Listamos esses erros de distribuição na tabela IV do Anexo 1.

de maneira isolada, a apropriação de um conceito envolve vários outros conceitos, que são interligados. Deste modo, acreditamos que se um aluno não consegue desenvolver um produto corretamente, ele provavelmente também não conseguirá fatorar[9]. Vimos, nas análises dos livros didáticos, que a multiplicação de monômios é utilizada para apresentar os casos de fatoração, e que os produtos notáveis, por exemplo, são apresentados relembrando a sua distribuição.

Esses erros nos fizeram supor alguns dos teoremas em ação falsos citados na tabela 2. Por exemplo, dada a expressão x^2-a^2 o aluno poderia fatorá-la como $(x-a)^2$, nesse caso consideramos que ele utilizou o teorema [T_{11}]. Além disso, nos fizeram refletir sobre a necessidade de se introduzir algumas atividades de desenvolvimento dos produtos notáveis antes de propor a sua fatoração, como faz o ensino usual, pois vimos que nenhum aluno tentou fatorar esses casos no teste diagnóstico.

Observamos também que a maioria dos alunos não relaciona a fatoração a um produto de fatores, e mesmo relembrando que fatorar é reescrever a expressão na forma de um produto, muitos deles não fizeram isso, como podemos observar no Anexo 1.

Somente 7% dos alunos tentaram escrever as questões (1) e (2) na forma de um produto, e desses 5%, conseguiram fatorar corretamente a questão (1). A maioria dos alunos, 87%, fez a distribuição das expressões que tinham produtos (Anexo 1). Essas expressões eram para ser fatoradas colocando fator comum em evidência em que o fator era um binômio.

4.2 A Seqüência Didática

Os alunos que participaram desse estudo, como já dissemos, faziam parte de uma turma da oitava série do Ensino Fundamental, de uma escola estadual de Campo Grande. Essa turma foi dividida em duas partes: uma realizou as atividades em papel e lápis e a outra parte no computador, com o *software Aplusix*. Todos os alunos gostariam de trabalhar no *Aplusix*, mas como no laboratório de informática tínhamos poucos computadores disponíveis, realizamos um sorteio, na presença de todos os alunos, dos que iriam trabalhar com o *Aplusix*, pois queríamos que a escolha fosse

[9] De fato, na página 51 (Figura 5) aparece um exemplo em que o aluno fatora a expressão incorretamente e em seguida faz a distribuição do produto do mesmo modo.

aleatória.

Antes de iniciarmos a seqüência didática, realizamos uma aula no laboratório de informática, com os alunos que iriam trabalhar com o *software*, para familiarização com o *Aplusix.* Os alunos já haviam tido aulas no laboratório, em anos anteriores, e não tiveram nenhuma dificuldade em utilizar o *Aplusix*.

As atividades realizadas com papel e lápis foram acompanhadas pela professora da turma, que ficou com parte dos alunos, e nós trabalhamos no laboratório de informática, com os outros alunos. Aplicamos as mesmas atividades e ao mesmo tempo, utilizando o horário normal de aulas desses alunos**,** totalizando oito horas-aula com 50 minutos cada.

A seqüência didática é composta por 10 atividades aplicadas em seis encontros, dois de 2 horas-aula, e quatro de 1 hora-aula cada, perfazendo um total de 8 horas-aula. Separamos as atividades em dois grupos conforme os casos de fatoração, e ao final aplicamos um teste, a atividade X, com todos os casos de fatoração vistos nos grupos 1 e 2. Vejamos, na tabela 3, um esquema da distribuição dos tipos de exercícios aplicados na seqüência didática:

Tabela 3
Atividades da seqüência didática

<table>
<tr><td rowspan="3">10 Atividades</td><td>I – 8 exercícios
II – 8 exercícios
III – 7 exercícios</td><td><u>Grupo 1:</u> Fator comum em evidência.
Atividades para fatorar colocando o fator comum em evidência, seja esse fator: um número, um monômio ou binômio.</td></tr>
<tr><td>IV – 6 exercícios
V – 8 exercícios
VI – 5 exercícios
VII – 9 exercícios
VIII – 6 exercícios
IX – 10 exercícios</td><td><u>Grupo 2</u>: Fatoração dos produtos notáveis
- Atividade IV: desenvolvimento quadrado da soma.
- Atividade V: fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da soma.
- Atividade VI: desenvolvimento quadrado da diferença.
- Atividade VII: fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da diferença.
- Atividade VIII: desenvolvimento do produto da soma pela diferença.
- Atividade IX: fatoração da diferença de quadrados transformado no produto da soma pela diferença de dois termos.</td></tr>
<tr><td>X – 13 exercícios</td><td><u>Teste com Atividades dos Grupos 1 e 2.</u>
Atividade com todos os casos de fatoração trabalhados nas atividades: I, II, III, V, VII e IX.</td></tr>
</table>

Apresentamos a seguir as análises dos dois ambientes juntas, pois, como dissemos anteriormente, pretendíamos avaliar a seqüência didática, em papel e lápis e com o *software Aplusix*. Como as atividades aplicadas foram as mesmas, os teoremas em ação que estávamos supondo de serem utilizados pelos alunos são os mesmos.

4.2.1 Análise das Atividades

As atividades da seqüência didática envolviam a fatoração, colocando o fator comum em evidência, seja este fator um monômio ou binômio, a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e a diferença de dois quadrados. Escolhemos esses tipos de fatoração, por serem os priorizados na maioria dos livros didáticos. As atividades foram escolhidas semelhantes às propostas nos livros analisados.

Lembramos que escolhemos trabalhar com números inteiros, pois nosso objetivo era investigar dificuldades dos alunos na fatoração, e entendemos que trabalhar com outros números poderia trazer mais dificuldades para os alunos.

Nas atividades da seqüência didática, com exceção da atividade X que foi realizada como um teste, o aluno teve meios de validar o seu trabalho, conforme o ambiente no qual esteja trabalhando. No ambiente:

- papel e lápis os alunos poderiam discutir entre si e tirar dúvidas com o professor. Ao final das atividades em que se pede para fatorar, eles deveriam distribuir os produtos encontrados para verificar se o procedimento efetuado estava correto ou não.
- *Aplusix* verificação permanente, ou a pedido, dos cálculos, informações sobre o resultado do exercício, se está correto ou não, e se não está totalmente resolvido. Além disso, poderiam também tirar dúvidas com a pesquisadora nas atividades I, II e III, além de discutir entre eles em algumas das atividades.

A maior diferença entre o tipo de validação desses dois ambientes é que, no papel e lápis, os alunos iriam depender do professor para validar o seu trabalho, já no laboratório, eles teriam o auxílio do *Aplusix.* Acreditamos que as retroações oferecidas pelo *software* favorecem uma maior autonomia por parte do aluno (BITTAR; CHAACHOUA; FREITAS, 2004).

Nas análises das atividades supomos a utilização de alguns teoremas em ação falsos. Além disso, é possível também que alguns alunos não transformem as expressões em um produto, ou que transformem em produto, mas não consigam identificar o fator comum, no caso das atividades I, II e III; ou que não fatorem como um dos casos dos produtos notáveis, atividades V, VII e IX. Vimos no teste diagnóstico que os alunos apresentam diversos tipos de dificuldades, e de resoluções, ao tentar fatorar as expressões algébricas.

Nesse sentido, tivemos de fazer algumas escolhas para análise das possíveis resoluções dos alunos nas atividades, pois, alguns deles poderiam, por exemplo, não transformar a expressão em um produto, nas primeiras questões, mas com o decorrer das atividades poderiam começar a tentar fatorar. Desse modo, separamos as diversas resoluções possíveis dos alunos em alguns casos conforme o tipo de fatoração estudado, que apresentamos antes das análises das atividades dos grupos 1 e 2.

4.2.1.1 Grupo 1: Atividades I, II e III do Fator Comum em Evidência.

Nas atividades I, II e III os fatores comuns são, respectivamente, um número, um monômio e um binômio. Apresentamos em seguida as estratégias possíveis dos alunos utilizarem ao resolver essas atividades. Salientamos que supomos essas resoluções com base nas análises feitas no teste diagnóstico, como também nas pesquisas sobre erros e dificuldades dos alunos na álgebra (BOOTH, 1995; NOTARI, 2002; RIBEIRO, 2001).

Dada uma expressão para fatorar colocando o fator comum em evidência, por exemplo, $8x+8y$ o aluno poderia:

(1) - Não escrever como um produto, podendo:

1.1 transformar em uma equação, por exemplo, $x=8y$;

1.2 reduzir tudo a um termo, por exemplo, $8xy$;

1.3.reescrever a expressão de qualquer maneira, por exemplo, $16xy-8$;

(2)- Transformar a expressão num produto, em que ele pode:

2.1 não identificar o fator comum, por exemplo, $x(8x+8y)$ ou $x^2(8x+y)$; ou tentar fatorar como um produto notável $(4x+4y)^2$;

2.2 identificar o fator comum, e nesse caso ele poderia:

2.2.1 identificar o máximo fator comum, e:

2.2.1.1 fatorar corretamente: $8(x+y)$;

2.2.1.2 não fatorar corretamente utilizando algum teorema em ação falso, por exemplo, $8(x+8y)$;

2.2.2 identificar parte do fator comum, e:

2.2.2.1 fatorar corretamente $4(2x+2y)$;

2.2.2.2 não fatorar corretamente utilizando algum teorema em ação falso, por exemplo, $4(2x+8y)$;

Embora tenhamos identificado todas essas possibilidades, em relação a esse tipo de fatoração, centralizamos nossa identificação de teoremas em ação nos casos 2.2, em que o aluno transforma a expressão em um produto e identifica o fator comum, e nesses casos ele poderia fatorar corretamente ou não. Não consideramos os outros casos para efeito de identificação de teoremas, pois consideramos que estas resoluções estão muito distantes das possíveis resoluções corretas, e a nossa análise poderia ficar muito extensa. Desse modo, optamos em identificar os teoremas em ação somente nos casos em que o aluno sabe que fatorar é transformar a expressão em um produto e, além disso, consegue identificar pelo menos parte do fator comum.

Atividade I

Fatore os polinômios, colocando em evidência o fator comum em cada um deles. Depois, faça a verificação desenvolvendo o produto encontrado.

1) $8x+8y$

2) $2x^2+2$

3) $2x-14$

4) $9-21x$

5) $21x+14$

6) $15-12x$

7) $4x-4$

8) $32+8x$

Análise da atividade I

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- propriedade distributiva da multiplicação em relação adição (subtração);
- fatoração de números inteiros;
- fatoração algébrica do fator comum em evidência;
- divisão e multiplicação numérica e algébrica;

Nesta atividade relembramos a fatoração, em que o fator comum que deve ser colocado em evidência é um número inteiro. Como a fatoração foi vista, em geral, na sétima série, algum aluno talvez pudesse não se lembrar (como observamos no teste diagnóstico) e não conseguir fatorar. Nesse caso, propomos que os alunos discutam entre si sobre suas dúvidas e só interviríamos se víssemos que os alunos não iriam conseguir avançar na atividade. Essa intervenção tem como objetivo explicitar algum conceito envolvido na atividade ou esclarecer alguma dúvida.

O objetivo desta atividade é verificar que tipo de dificuldades os alunos apresentam ao tentar fatorar colocando o fator comum em evidência, quando esse fator é um número inteiro. As tarefas envolvidas em cada questão são:

- (1ª) identificar o fator comum da expressão estando esse fator aparente ou não;
- (2ª) dividir cada termo da expressão pelo fator comum encontrado ou encontrar o monômio que multiplicado pelo fator comum identificado se transforma em cada termo da expressão inicial;

Identificaremos os teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos ao resolverem esta atividade no caso dele ter resolvido corretamente a (1ª) tarefa listada acima.

Listamos na tabela 4 alguns teoremas em ação falsos possíveis de serem utilizados pelos alunos ao resolver esta atividade. Apresentamos primeiro o número do exercício, em seguida identificamos o fator comum, e por último o teorema em ação falso que o aluno poderia utilizar.

Tabela 4

Análise da atividade I

Expressão	Fator comum	Teoremas em ação falsos
(1) 8x+8y	8	8(x+2y) [T_1] 8(x+8y) [T_4]
(2) $2x^2+2$	2	2(x+1) [T_1] $2(x^2+2)$ [T_4]
(3) 2x-14	2	2(x-2) [T_1] 2(x-14) [T_4]
(4) 9-21x	3	3(3-x) [T_1] 3(3-21x) [T_4]
(5) 21x+14	7	7(3x+7) [T_1] 7(3x+14) [T_4]
(6) 15-21x	3	3(5-4x) [T_1] 3(5-21x) [T_4]
(7) 4x-4	4	4(x-4) [T_4]
(8) 32+8x	8	4(8+4x) [T_1] 8(4+8x) [T_4]

Nos exercícios (1), (2), (3), (7) e (8) o fator que deve ser colocado em evidência é aparente. Nesses casos esperávamos que os alunos não tivessem muita dificuldade; talvez o sinal de (-), pudesse trazer um pouco mais de dificuldade a alguns alunos.

Supomos que os alunos pudessem utilizar os teoremas [T_1] e [T_4], em quase todas as atividades, nesses casos os alunos identificam o fator comum e conseguem fatorar o primeiro termo, mas erram ao fatorar o segundo ou simplesmente repetem o segundo dentro dos parênteses. O primeiro foi identificado no teste e o segundo nós supomos, pois, um dos erros comuns de distribuição observados em pesquisas é $a(x+b)=ax+b$, e vimos, também, no teste diagnóstico que alguns alunos utilizam o mesmo caminho para fatorar uma expressão e para fazer a distribuição do produto encontrado.

Nesta atividade o enunciado que aparece na tela do *Aplusix* é: Fatore o polinômio. Ela foi realizada com verificação permanente dos cálculos e, deste modo, não foi pedido no enunciado para fazer a verificação desenvolvendo o produto. As retroações oferecidas pelo *software* validam o trabalho do aluno, assim, somente observamos ao final da atividade, o que aconteceria se o produto encontrado fosse desenvolvido.

Como o *Aplusix* mostra a equivalência entre as expressões, e os alunos podiam discutir entre si, prevê-se que a maioria apresente, ao final, a resposta correta, nesta atividade e em todas as outras, com exceção da X que foi aplicada como um teste.

Atividade II

Fatore os polinômios, colocando em evidência o fator comum em cada um deles. Depois, faça a verificação desenvolvendo o produto encontrado.

1) x^2+x

2) $2x+2x^2$

3) $x-2x^2$

4) $8x+x^2$

5) $4x^2-16x$

6) $12x^2-15x$

7) $17x-2x^2$

8) $4x-8x^2$

Análise da atividade II

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- propriedade distributiva da multiplicação em relação adição (subtração);
- divisão de monômio por um número inteiro, ou por um monômio;
- fatoração de números inteiros;
- fatoração algébrica do fator comum em evidência;
- divisão e multiplicação numérica e algébrica;

Nesta atividade aparece o fator x, algumas vezes acompanhado de um número inteiro, como sendo o fator comum que deve ser colocado em evidência. Apesar da discussão feita na atividade anterior, é possível que alguns alunos continuem a ter dúvidas e não consigam fatorar as expressões. Prevemos, também, que alguns alunos pudessem colocar em evidência somente parte do fator comum ao resolver as questões.

Temos como objetivo verificar que tipo de dificuldades os alunos apresentam ao tentar fatorar colocando fator comum em evidência, quando esse fator é um monômio. As tarefas envolvidas em cada questão são:

- (1ª) identificar o fator comum da expressão estando esse fator aparente ou não;
- (2ª) dividir cada termo da expressão pelo fator comum encontrado, sendo que agora se trata de uma divisão de monômios; ou encontrar o monômio que multiplicado pelo fator comum identificado se transforma em cada termo da expressão inicial;

Identificaremos os teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos nesta atividade no caso deles resolverem corretamente a (1ª) tarefa listada acima.

Na tabela 5 são listados alguns teoremas em ação falsos possíveis de serem utilizados pelos alunos nesta atividade.

Tabela 5
Análise da atividade II

Expressão	**Fator comum**	**Teoremas em ação falsos**
(1) x^2+x	x	$x(x+x)$ [T_4]
(2) $2x+2x^2$	$2x$	$2x(1+2x)$ [T_1] $2x(1+2x^2)$ [T_4]
(3) $x-2x^2$	x	$x(1-x^2)$ [T_1] $x(1-2x^2)$ [T_4]
(4) $8x+x^2$	x	$x(8+x^2)$ [T_4]
(5) $4x^2-16x$	$4x$	$4x(x-4x)$ [T_1] $4x(x-16x)$ [T_4]
(6) $12x^2-15x$	$3x$	$3x(4x-3)$ [T_1] $3x(4x-15x)$ [T_4]
(7) $17x-2x^2$	x	$x(17-2x^2)$ [T_4]
(8) $4x-8x^2$	$4x$	$4x(1-2x^2)$ [T_1] $x(4-8x^2)$ [T_4]

Novamente estamos supondo que os alunos possam utilizar os teoremas [T_1] e

[T_4] em quase todas as questões como na atividade I; nesses casos eles indentificam o fator comum, ou parte dele, e tentam fatorar parte da expressão.

No laboratório alguns alunos podem colocar em evidência somente o fator x, por exemplo, no exercício (2) $2x+2x^2$ ficaria $x(2+2x)$, sendo que poderiam colocar em evidência também o número dois $2x(1+x)$; nos dois casos o *Aplusix* considera correto. No caso do aluno colocar em evidência somente o número dois $2(x+x^2)$, o *software* avisa que a expressão não está totalmente fatorada, fazendo com que ele tenha de colocar em evidência o fator máximo comum.

Atividade III

Fatore os polinômios:

1) $x(x+2)+3(x+2)$

2) $(x-4)+x(x-4)$

3) $x(x+7)-2x(x+7)$

4) $(x+1)(x-3)+2(x+1)$

5) $(3x+7)(2x-4)+(5x+8)(3x+7)$

6) $(3x+5)(x+1)-(x+1)(2x+4)$

7) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$

Análise da atividade III

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- propriedade distributiva da multiplicação em relação adição (subtração);
- divisão de binômio por um número inteiro, por um monômio ou binômio;
- fatoração algébrica do fator comum em evidência;
- fatoração algébrica em que o fator comum é um binômio;
- divisão e multiplicação numérica e algébrica;
- redução de temos semelhantes;

Caso os alunos tenham dúvidas e não consigam resolver a atividade, será proposto, novamente, uma discussão, como na atividade I e II, pois é possível que alguns não consigam começar a resolver os exercícios. No teste diagnóstico observamos que esse tipo de exercício foi o que mais suscitou dúvidas nos alunos. Nenhum deles tinha idéia do que deveria ser feito, assim, é possível que mesmo após a discussão, alguns alunos não consigam resolver a atividade. E, apesar das retroações oferecidas pelo *Aplusix*, é provável que poucos alunos apresentem a resposta correta.

No teste diagnóstico em questões deste tipo, a maioria dos alunos aplicou a propriedade distributiva. Desse modo é possivel que alguns alunos:

- façam a distribuição dos produtos e não consigam fatorar;
- façam a distribuição dos produtos e consigam fatorar corretamente, por exemplo, as questões: (4), (6) e (7), depois de distribuídas aparecem x^2-1, x^2+2x+1 e $x^2-12x+9$, respectivamente; algum aluno pode reconhecer a diferença de quadrados ou os trinômios quadrados perfeitos e fazer a fatoração correta deles;
- façam a distribuição correta, mas errem a distribuição do sinal negativo;

Alguns alunos podem identificar o fator comum, mas não conseguir dividir os binômios corretamente. Podem também identificar o fator comum e dividir corretamente os binômios, mas não reduzir perfeitamente os termos semelhantes.

O objetivo desta atividade é verificar que tipo de dificuldades os alunos apresentam ao tentar fatorar colocando fator comum em evidência, em que agora o fator é um binômio. As tarefas envolvidas nestas questões são:

- (1ª) identificar o fator comum da expressão, e nesses casos eles são aparentes;
- (2ª) dividir cada termo da expressão pelo fator comum encontrado, sendo que agora se trata de uma divisão entre binômios; ou encontrar o monômio que multiplicado pelo fator comum identificado se transforma em cada termo da expressão inicial;
- (3ª) e reduzir os termos semelhantes dentro dos parênteses;

Nas análises das resoluções dos alunos identificaremos os teoremas em ação falsos utilizados por eles somente no caso dele resolver corretamente a (1ª) tarefa listada acima.

Não prevíamos a utilização de teorema em ação falso para esta atividade, pois nenhum aluno tentou fatorar expressões desse tipo no teste diagnóstico[10]. E não encontramos pesquisas que indicassem alguma dificuldade relacionada e esse caso de fatoração. Observamos que os livros didáticos raramente trabalham este tipo de fatoração, e estamos propondo por ser um caso importante de fatoração que pode ser aplicado em simplificação de expressão algébrica ou para o estudo, por exemplo, das inequações. Desse modo, buscamos identificar possíveis teoremas em ação falsos a partir das resoluções dos alunos na atividade.

---

[10] As questões desse tipo foram distribuídas pelos alunos, como pode ser observado no Anexo 1.

4.2.1.2 Grupo 2: Atividades de desenvolvimento e de fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados.

As atividades V, VII e IX são para fatorar os trinômios quadrados perfeitos e a diferença de quadrados, transformando-os, respectivamente, no quadrado da soma, no quadrado da diferença e no produto da soma e da diferença de dois números. Apresentamos em seguida as estratégias possíveis dos alunos utilizarem ao resolver estas atividades.

Lembramos, que supomos essas resoluções com base nas análises feitas no teste diagnóstico, como também nas pesquisas sobre erros e dificuldades dos alunos na álgebra (BOOTH, 1995; NOTARI, 2002; RIBEIRO, 2001).

Dado um trinômio quadrado perfeito ou uma diferença de dois quadrados, por exemplo, se a expressão fosse x^2+6x+9 o aluno poderia resolver do seguinte modo:

(1) - Não escrever como um produto, podendo:

1.1 transformar em uma equação, por exemplo, $x^2=15$, observamos que vários alunos no teste diagnóstico resolveram desse modo.

1.2 reduzir tudo a um termo, por exemplo, $16x^2$, essas resoluções apareceram no teste diagnóstico e na pesquisa de Booth (1995);

1.3.reescrever a expressão de qualquer maneira, por exemplo, $7x^2+9$ observamos resolução semelhante também no teste diagnóstico;

(2)- Transformar a expressão num produto, em que ele poderia:

2.1 não fatorar com um dos casos dos produtos notáveis, por exemplo, fatorando como se fosse o caso do fator comum em evidência $x(x+6x+9)$, como esse foi o caso de fatoração apresentada nas atividades anteriores, algum aluno poderia tentar resolver utilizando esse caminho;

2.2 tentar fatorar como um dos casos dos produtos notáveis, e nesse caso ele poderia:

2.2.1 fatorar corretamente $(x+3)^2$;

2.2.2 não fatorar corretamente utilizando um teorema em ação falso, por exemplo, $(x+2x)^2$ ou $(x+2)^2$, poderia também tentar fatorar esse trinômio como se fosse o produto de uma soma e uma diferença: $(x+3)(x-3)$, e nesses casos consideramos que ele utilizou um teorema em ação falso;

Fizemos a identificação de teoremas em ação nos casos 2.2, em que o aluno identifica a expressão como um dos casos de fatoração dos produtos notáveis, e nesses casos ele poderia fatorar corretamente ou não a expressão.

Atividade IV

Escreva a expressão na forma de produto, e em seguida desenvolva estes produtos:

1) $(x+1)^2$

2) $(2+x)^2$

3) $(x+3)^2$

4) $(3+2x)^2$

5) $(5x+3)^2$

6) $(a+b)^2$

Análise da atividade IV

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- propriedade distributiva da multiplicação em relação adição (subtração);
- potência de números inteiros;
- produto de polinômios;
- redução de termos semelhantes;
- distribuição do quadrado da soma de dois termos;
- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;

Nesta atividade estamos fazendo o desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos, em que ao final o aluno deve reconhecer a identidade notável (ou padrão, como é denominada por alguns livros didáticos):

$(x+a)^2=(x+a)(x+a)=x^2+2ax+a^2$.

O objetivo é relembrar o desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos, que produz um trinômio quadrado perfeito. Esse resultado será utilizado para fatorar os trinômios quadrados perfeitos da próxima atividade.

Nesta atividade estamos pedindo para escrever primeiro a expressão na forma de um produto, e depois fazer a distribuição. Com isso, esperamos evitar os erros observados no teste diagnóstico na distribuição do quadrado da soma de dois termos: $(x+a)^2$. Um dos mais freqüentes foi a sua distribuição em x^2+a^2. Deste modo, esperamos que poucos alunos cometam esses erros nesta atividade.

Entretanto, é possível que alguns alunos não escrevam a expressão na forma de um produto e cometam alguns dos erros de distribuição observados no capítulo I, ou que escrevam na forma de produto, mas façam a distribuição incorretamente. Além disso, algum aluno pode distribuir utilizando a regra apresentada nos livros didáticos.

Nesta atividade, e nas VI e VIII, não analisamos as resoluções dos alunos, pois não fazem parte dos objetivos de nossa pesquisa, somente listamos ao final em tabela anexa as soluções dos alunos. Como já dissemos, nós introduzimos essas atividades com intuito de utilizar nas atividades de fatoração: V, VII e IX.

Atividade V

Use o resultado da atividade anterior para fatorar os polinômios:

1) x^2+2x+1

2) $x^2+8x+16$

3) $16+16x+4x^2$

4) x^2+4x+4

5) $9x^2+6x+1$

6) $24x+9x^2+16$

7) $x^2+20x+100$

8) $4+4x^2+8x$

Análise da atividade V

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- potência de números inteiros;
- fatoração dos trinômios quadrados perfeitos;
- produto de polinômios;
- raiz quadrada;
- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;

Nesta atividade, e na VII e IX, os alunos devem resolver os exercícios sem a intervenção de outros alunos, somente com auxílio do professor na sala de aula, e do *Aplusix* no laboratório. Pois, gostaríamos de analisar as dificuldades e identificar mais detalhadamente, e particularmente, os possíveis teoremas em ação que os mesmos pudessem utilizar.

Além disso, a partir desta atividade, os alunos do laboratório estão com verificação dos cálculos somente a pedido, quatro vezes. Deste modo, esperamos que reflitam mais durante a resolução da atividade, e que não fiquem simplesmente testando valores aleatórios para fatorar a expressão no quadrado da soma de dois termos, pois eles têm um número limitado de verificação.

A revisão realizada na atividade anterior não garante que todos os alunos consigam fatorar a expressão; alguns deles podem não conseguir, ou fatorar incorretamente. Segue a tabela 6 com os teoremas em ação falsos que supomos possíveis de serem utilizados pelos alunos ao resolver as questões. Na primeira coluna aparecem as questões, na segunda denominada Ordem estamos considerando que as expressões estão na ordem usual quando aparecem como : $x^2+2ax+a^2$ ou $a^2+2ax+x^2$ e fora da ordem quando aparecem como $2ax+x^2+a^2$ ou x^2+a^2+2ax. Na última, estão listados os teoremas em ação falsos, na sua forma geral, que podem ser utilizados conforme a questão, por exemplo, na questão (1) podem ser utilizados os teoremas: [T_3], [T_5] e [T_6].

Tabela 6
Análise da atividade V

Expressão	**Ordem**	**Teoremas em ação falsos na forma geral**
(1) x^2+2x+1 (2) $x^2+8x+16$ (3) $16+16x+4x^2$ (4) x^2+4x+4 (5) $9x^2+6x+1$ (7) $x^2+20x+100$	Usual	$x^2+2ax+a^2 \rightarrow (x+a^2)(x+a^2)$ [T_3] $x^2+2ax+a^2 \rightarrow (x+2a)^2$ [T_5] $a^2x^2+2abx+b^2 \rightarrow (ax+2ab)^2$ [T_5] $x^2+2ax+a^2 \rightarrow (x+a^2)^2$ [T_6] $a^2x^2+2abx+b^2 \rightarrow (a^2x+b)^2$ [T_9] $a^2x^2+2abx+b^2 \rightarrow (ax+b^2)^2$ [T_9]
(6) $24x+9x^2+16$ (8) $4+4x^2+8x$	Fora ordem	$2abx^2+a^2x^2+b^2 \rightarrow (2bx+b)^2$ [T_{13}] $x^2+a^2+2ax \rightarrow (x+2a)^2$ [T_{13}]

Supomos que algum aluno possa fazer uso do teorema em ação falso [T_3] que foi identificado no teste diagnóstico. Como também, dos [T_6] e [T_9], nesses casos ele identifica os dois termos que são quadrados perfeitos, mas tem dificuldade em extrair a raiz quadrada dos termos.

Estamos supondo também que algum aluno possa se lembrar de parte da regra do produto notável: “quadrado do 1º termo e quadrado do 2º termo”, e tentar extrair a raiz quadrada de quaisquer dois termos da expressão, mesmo que um deles não seja quadrado perfeito, por exemplo, na questão (5) $9x^2+6x+1$ o aluno pode tentar extrair a raiz quadrada dos termos $9x^2$ e $6x$, e nesse caso supomos que não consiga extrair corretamente, o termo $6x$, fatorando como $(3x+2)^2$, assim, estamos prevendo que ele pode utilizar o teorema [T_5].

Além disso, colocamos os termos do trinômio quadrado perfeito fora da ordem usual, nesta atividade e na VII, e não só na que costuma aparecer nos livros didáticos: $x^2+2ax+a^2$ ou $a^2+2ax+x^2$. Estamos supondo, também, nesse caso que algum aluno possa se lembrar de parte da regra do produto notável, e tente extrair as raízes quadradas do primeiro e do último termo, que são os que geralmente são apresentados como quadrados perfeitos. Assim, na questão (6) $24x+9x^2+16$ algum aluno poderia tentar extrair a raiz de $24x$ e de 16, e de novo supomos que não consiga extrair corretamente fatorando como, por exemplo, $(12x+4)^2$, nesse caso prevemos que ele possa utilizar o teorema em ação falso [T_{13}]. Entretanto, uma só utilização pode significar somente falta de atenção, desse modo tentamos observar se a utilização persistia no decorrer das atividades.

O objetivo desta atividade é verificar que tipo de dificuldade os alunos apresentam ao tentar fatorar o trinômio quadrado perfeito, transformando-o no quadrado da soma de dois termos. As tarefas envolvidas nestas questões são:

- (1ª) identificar que se trata da fatoração de um produto notável;
- (2ª) identificar qual tipo de fatoração dos produtos notáveis esse caso faz parte;
- (3ª) identificar os dois termos que são quadrados perfeitos;
- (4ª) extrair a raiz quadrada desses dois termos, somá-los e elevar ao quadrado;

Nas análises das resoluções dos alunos identificaremos os teoremas em ação falsos utilizados por eles somente no caso deles resolverem corretamente a (1ª) tarefa listada acima.

Atividade VI

Desenvolva as expressões seguintes e reduza os termos semelhantes.

1) $(x-1)^2$

2) $(3x-2)^2$

3) $(x-5)^2$

4) $(x-y)^2$

5) $(a-3b)^2$

Análise da atividade VI

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- propriedade distributiva da multiplicação em relação adição (subtração);
- potência de números inteiros;
- produto de polinômios;
- redução de termos semelhantes;
- distribuição do quadrado da diferença de dois termos;

- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;

Relembramos a distribuição do quadrado da diferença de dois termos, transformado no trinômio quadrado perfeito, e ao final o aluno deve reconhecer a identidade notável:

$(x-a)^2=(x-a)(x-a)=x^2-2ax+a^2$.

Esse resultado é para ser utilizado na fatoração dos trinômios quadrados perfeitos, na próxima atividade, no quadrado da diferença de dois termos.

No enunciado desta atividade estamos pedindo primeiro para desenvolver a expressão para depois reduzir os termos semelhantes. Um dos erros mais comuns observado no teste diagnóstico é com relação a distribuição do quadrado da diferença de dois termos $(x-a)^2$ em x^2-a^2. Deste modo, esperamos que poucos alunos cometam esse erro nessa atividade.

Entretanto, é possível que alguns alunos não desenvolvam corretamente a expressão e cometam alguns dos erros de distribuição observados no capítulo III, inclusive o que citamos acima, ou que façam a distribuição corretamente, mas errem na redução dos termos semelhantes.

Como dissemos anteriormente não analisamos as resoluções dos alunos nesta atividade, e nas V e VIII, pois não fazem parte dos objetivos de nossa pesquisa, somente listamos ao final em tabela anexa as resoluções dos alunos.

Atividade VII

Use o resultado da atividade anterior para fatorar os polinômios:

1) x^2-2x+1

2) $4x^2+1-4x$

3) $y^2-6xy+9x^2$

4) x^2-4x+4

5) $1+9x^2-6x$

6) $25x^2-20x+4$

7) $49-14x+x^2$

8) $x^2-2xy+y^2$

9) $1-10x+25x^2$

Análise da atividade VII

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- fatoração dos trinômios quadrados perfeitos;

- potência de números inteiros;
- produto de polinômios;
- raiz quadrada;
- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;

Esta atividade será desenvolvida como a atividade V: os alunos não podem se comunicar, e somente ao final será feita discussão e correção da atividade pelo professor.

Apesar da revisão realizada na atividade anterior é possível que alguns alunos não consigam fatorar ou que o façam incorretamente, fazendo uso dos teoremas em ação falsos citados na tabela 7:

Tabela 7
Análise da atividade VII

Expressão	Ordem	Teoremas em ação falsos na forma geral
(1) x^2-2x+1 (3) $y^2-6xy+9x^2$ (4) x^2-4x+4 (6) $25x^2-20x+4$ (7) $49-14x+x^2$ (8) $x^2-2xy+y^2$ (9) $1-10x+25x^2$	Usual	$x^2-2ax+a^2 \rightarrow (x-2a)^2$ [T_5] $x^2-2ax+a^2 \rightarrow (x-a^2)^2$ [T_6] $x^2-2ax+a^2 \rightarrow (x+a)^2$ [T_7] $a^2x^2-2abx+b^2 \rightarrow (ax+b)^2$ [T_7] $x^2-2ax+a^2 \rightarrow (x-a)(x+a)$ [T_8] $a^2x^2-2abx+b^2 \rightarrow (ax-b)(ax+b)$ [T_8] $a^2x^2-2abx+b^2 \rightarrow (ax-b^2)^2$ [T_9]
(2) $4x^2+1-4x$ (5) $1+9x^2-6x$	Fora ordem	$b^2+a^2x^2-2abx \rightarrow (b-2ax)^2$ [T_{13}]

Estamos supondo novamente que os alunos possam utilizar os teoremas [T_5], [T_9] e [T_{13}] pelos mesmos motivos já citados na atividade V. Além disso, acreditamos que algum aluno possa ter mais dificuldade na fatoração desses trinômios por causa do sinal negativo, vimos nas análises dos livros didátivos que o quadrado da soma é o mais explorado. Assim, prevemos que possam utilizar também os teoremas [T_7] e [T_8].

O objetivo desta atividade é verificar que tipo de dificuldade os alunos apresentam ao tentar fatorar o trinômio quadrado perfeito, transformando-o no quadrado da diferença de dois termos. As tarefas envolvidas nestas questões são:

- (1ª) identificar que se trata da fatoração de um produto notável;
- (2ª) identificar qual tipo de fatoração dos produtos notáveis esse caso faz parte;
- (3ª) identificar os dois termos que são quadrados perfeitos;
- (4ª) extrair a raiz quadrada desses dois termos, fazer a subtração deles e elevar

ao quadrado;

Nas análises das resoluções dos alunos identificaremos os teoremas em ação falsos utilizados por eles somente no caso dele resolver corretamente a (1ª) tarefa listada.

Atividade VIII

Desenvolva os produtos:

1) (x+1)(x-1)

2) (1-2x)(1+2x)

3) (x-3)(x+3)

4) (a-b)(a+b)

5) (3x-5)(3x+5)

6) (ax-by)(ax+by)

Análise da atividade VIII

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (subtração);
- potência de números inteiros;
- produto de polinômios;
- redução de termos semelhantes;
- distribuição do produto da soma pela diferença de dois termos;
- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;

Nesta atividade, a propriedade distributiva (dupla) da multiplicação em relação à adição (subtração), e a redução de termos semelhantes será utilizada para relembrar o desenvolvimento do produto da soma pela diferença de dois termos transformado na diferença de dois quadrados. Ao final, os alunos devem reconhecer a identidade:

$(x-a)(x+a)=x^2-a^2$.

Esse resultado será utilizado para fatorar a diferença de dois quadrados na próxima atividade.

Essa atividade, e a IV e VI, têm como objetivo auxiliar os alunos que têm dificuldades em distribuir e reduzir termos semelhantes.

E como as outras atividades de desenvolvimento, nesta também não analisamos as resoluções dos alunos, somente listamos ao final em tabela anexa as resoluções dos alunos.

Atividade IX

Use o resultado da atividade anterior para fatorar os polinômios:

1) x^2-4

2) $36-x^2$

3) $9x^2-1$

4) x^2-y^2

5) $1-x^2$

6) $1-4x^2$

7) $9x^2-16$

8) $100x^2-25$

9) $4x^2-y^2$

10) $16x^2-9$

Análise da atividade IX

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- potência de números inteiros;
- produto de polinômios;
- fatoração da diferença de dois quadrados;
- raiz quadrada;
- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;

Esta atividade será realizada como as atividades V e VII, os alunos devem resolver os exercícios sem a intervenção de outros alunos, somente com auxílio do professor na sala de aula, e do *Aplusix* no laboratório. Como dissemos anteriormente, queríamos analisar as dificuldades e identificar mais detalhadamente, e particularmente, os possíveis teoremas em ação utilizados pelos alunos.

A revisão realizada na atividade anterior, não garante que os alunos irão resolver corretamente o exercício, é possível que alguns não consigam fatorar ou que o façam incorretamente, fazendo uso de qualquer um dos teoremas em ação falsos citados no capítulo II.

Tabela 8
Análise da atividade IX

Expressão	Teoremas em ação falsos na forma geral
1) x^2-4 2) 36-x^2 3) 9x^2-1 4) x^2-y^2 5) 1-x^2 6) 1-4x^2 7) 9x^2-16 8) 100x^2-25 9) 4x^2-y^2 10) 16x^2-9	$x^2-a^2 \rightarrow (x+a)(x+a)$ [T_2] $x^2-a^2 \rightarrow (x-a)(x-a)$ [T_{10}] $x^2-a^2 \rightarrow (x-a)^2$ [T_{11}] $a^2x^2-b^2 \rightarrow (ax-b)^2$ [T_{11}] $a^2x^2-b^2 \rightarrow (ax-b^2)(ax+b^2)$ [T_{12}] $a^2x^2-b^2 \rightarrow (a^2x-b)(a^2x+b)$ [T_{12}]

Supomos que os alunos possam utilizar o teorema em ação falso [T_2] identificado no teste diagnóstico, em função disso pode ser que também utilizem o [T_{10}], supondo que tentem fatorar transformando em produtos com o mesmo sinal.

O teorema [T_{11}] pode ser utilizado por algum aluno que não consiga identificar qual o caso de fatoração dos produtos notáveis que essa expressão faz parte, pois um dos erros freqüentes de distribuição observado no teste diagnóstico foi $(x-a)^2 \rightarrow x^2-a^2$. Além disso, algum aluno pode utilizar o [T_{12}] por ter dificuldade em extrair a raiz quadrada dos termos ou por achar que extraindo de um dos termos já está resolvido.

O objetivo desta atividade é verificar que tipo de dificuldade os alunos apresentam ao tentar fatorar a diferença de dois quadrados, transformado-a no produto da soma pela diferença de dois termos. As tarefas envolvidas nestas questões são:

- (1ª) identificar que se trata da fatoração de um produto notável;
- (2ª) identificar qual tipo de fatoração dos produtos notáveis esse caso faz parte;
- (3ª) extrair a raiz quadrada dos dois termos que são quadrados perfeitos, e multiplicar a soma deles pela diferença;

Nas análises das resoluções dos alunos identificaremos os teoremas em ação falsos utilizados por eles somente no caso dele resolver corretamente a (1ª) tarefa listada acima.

4.2.1.3 Teste com Atividades dos Grupos 1 e 2.

Atividade X

Fatore os polinômios:

1) x^2+2x

2) $7x+21x^2$

3) $15x^2+12x$

4) $4x^2-4$

5) $4x^2-x$

6) $x^2-2xy+y^2$

7) x^2+2x+1

8) $x(x-1)+2(x-1)$

9) $(8x-5)(6x+3)+(8x-5)$

10) $4x^2-4x+1$

11) $10xy+x^2+25y^2$

12) $3x^2+xy$

13) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$

Análise da atividade X

Conhecimentos que os alunos precisam ter para resolver esta atividade:

- potência de números inteiros;
- fatoração de números inteiros;
- fatoração do fator comum em evidência;
- redução de termos semelhantes;
- divisão e multiplicação numérica e algébrica;
- divisão de monômio (ou binômio) por um número inteiro, por um monômio, ou binômio;
- fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de dois quadrados;
- raiz quadrada;
- quadrado perfeito de um número inteiro ou de um termo algébrico;
- saber identificar o caso de fatoração que a expressão dada faz parte.

Esta atividade foi realizada como um teste, e não fizemos a correção ao final. Escolhemos questões semelhantes às das atividades anteriores, porque queríamos verificar se as dificuldades apresentadas e os teoremas em ação falsos utilizados anteriormente iriam se repetir. Desse modo, temos questões para fatorar colocando o fator comum em evidência, fatorar os trinômios quadrados perfeitos e a diferença de quadrados.

Apresentamos em seguida uma tabela com os teoremas em ação falsos possíveis de serem utilizados pelos alunos ao resolverem esta atividade.

Tabela 9
Análise da atividade X

Expressão	Tipo de fatoração	Teoremas em ação falsos
1) x^2+2x	Fator comum x	$x(x+1)$ [T_1] $x(x+2x)$ [T_4]
2) $7x+21x^2$	Fator comum 7x	$7x(1+7x)$ [T_1] $7x(1+21x)$ [T_4]
3) $15x^2+12x$	Fator comum 3x	$3x(5x+6)$ [T_1] $3x(5x+12x)$ [T_4]
4) $4x^2-4$	Diferença de quadrados	$(2x-2)^2$ [T_{11}] $(2x-4)(2x+4)$ [T_{12}]
5) $4x^2-x$	Fator comum x	$x(4x-4)$ [T_1] $x(4x-x)$ [T_4]
6) $x^2-2xy+y^2$	Trinomio quadrado perfeito	$(x+y)^2$ [T_7] $(x-2y)^2$ [T_5]
7) x^2+2x+1	Trinomio quadrado perfeito	$(x+2)^2$ [T_5]
8) $x(x-1)+2(x-1)$	Fator comum (x-1)	- - -
9) $(8x-5)(6x+3)+(8x-5)$	Fator comum (8x-5)	- - -
10) $4x^2-4x+1$	Trinomio quadrado perfeito	$(2x+1)^2$ [T_7] $(2x-1)(2x+1)$ [T_8] $(4x-1)^2$ [T_9]
11) $10xy+x^2+25y^2$	Trinomio quadrado perfeito fora da ordem usual	$(2x+5y)^2$ [T_{13}]
12) $3x^2+xy$	Fator comum x	$x(x+3y)$ [T_1] $x(3x+xy)$ [T_4]
13) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$	Fator comum (x-3)	- - -

Estamos supondo que os alunos possam utilizar esses teoremas em ação falsos listados na tabela 9, pelos motivos já citados anteriomente nas análises das atividades I, II, III, V, VII e IX.

CAPÍTULO V

REALIZAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1 Experimentação e Análise das Atividades em Papel e Lápis e com *Aplusix*

Aplicamos a seqüência didática nessa turma em março de 2006 e nela havia 38 alunos dos quais selecionamos 25 para análise. Como dissemos anteriomente, o critério para escolha desses alunos foi o de não considerar os que faltaram a algumas atividades.

Os 25 alunos foram divididos, por meio de sorteio, em duas turmas, uma com 15 alunos que realizaram as atividades em fichas com papel e lápis, e a outra com 10 alunos que realizaram no *software Aplusix*. Elas serão identificadas assim:
<u>Papel e lápis</u> composta pelos alunos: P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12, P13, P14 e P15.
<u>*Aplusix*</u> - composta pelos alunos: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 e A10.

Antes do início das atividades avisamos os alunos do ambiente papel e lápis, que todas as questões eram para serem resolvidas com caneta, não sendo permitido o uso de corretivo, pois gostaríamos de observar todas as tentativas de resolução, mesmo as incorretas.

No laboratório, e na sala de aula, avisamos aos alunos que eles podiam discutir entre si, mas não poderiam olhar o trabalho do colega, pois, gostaríamos de estudar as dificuldades de cada aluno. Na sala de aula dispusemos os alunos um longe do outro, entretanto, no laboratório isso não foi possível, pois as máquinas eram encostadas umas as outras, desse modo, é possível que algum aluno tenha olhado o trabalho do outro, pois, estavam muito próximos e como podiam discutir entre si, ficava difícil cuidar se estavam observando o trabalho do colega. Somente na atividade X, realizada como um teste, foi possível cuidar melhor para que não olhassem o trabalho do outro.

5.1.1 Análise do Grupo 1

Listamos em tabelas todas as resoluções dos alunos algumas denominadas de teoremas em ação falsos. Primeiramente vamos só listar, mas conforme observamos que o aluno o utilizou várias vezes no decorrer das atividades, iremos identificar e numerar esses teoremas em ação continuando a identificação dos teoremas que supomos no capítulo IV (Tabela 2).

Além disso, no caso do aluno utilizar alguns dos teoremas em ação falsos já identificados e listados no capítulo IV (Tabelas 1 e 2), nós vamos identificá-lo durante as análises. Essa identificação aparece na tabela, ao lado do teorema em ação falso utilizado pelo aluno**.**

Separamos a nossa análise em dois momentos:

- Primeiro vamos analisar cada atividade, para isso listamos em tabelas as questões com todas as resoluções dos alunos buscando identificar os teoremas supostos na análise do capítulo IV, bem como, outros possíveis de terem sido utilizados pelos alunos, evidenciando as dificuldades apresentadas nessas utilizações. Além disso, faremos uma breve análise dessas resoluções, explicitando os erros mais persistentes, como também, os alunos que mais cometeram esses erros.
- Ao final das atividades de cada grupo apresentamos uma tabela dos alunos com todos os teoremas em ação falsos utilizados por eles nas atividades, do grupo em questão, e quantas vezes esses teoremas foram utilizados, em que buscamos analisar a persistência na utilização desses teoremas pelos alunos.

5.1.1.1 Resoluções da Atividade I

Listamos em tabelas os teoremas em ação utilizados pelos alunos, pelo menos uma vez, escrevemos cada expressão na sua forma geral representando as variáveis por x e y, e as constantes por a, b, c e d. No caso do aluno ter utilizado uma constante que não aparece na equação na forma geral, procedemos do seguinte modo: suponhamos que a questão seja fatorar $2x^2+4x$, cuja forma geral é ax^2+a^2x; se a resposta do aluno foi $2x(x+3)$, escrevemos como $ax(x+b)$.

Além disso, sublinhamos a identificação dos alunos para indicar o teorema em ação que foi identificado através da ferramenta *videocassete* do *Aplusix*. Por exemplo, na tabela 10 na questão (1) ax+ay os alunos A5, A8 e A7, apresentaram ao final o teorema correto, entretanto, observando com o *videocassete*, vimos que reduziram toda a expressão a um termo, ao iniciar a atividade. Eles estavam trabalhando com revisão permanente dos cálculos, e provavelmente vendo que estava errado, corrigiram o erro. Assim, sublinhamos a identificação desses alunos, para indicar que esse teorema (ou tipo de resolução) foi observado no *videocassete*.

Como dissemos no capítulo IV centralizamos a identificação dos teoremas em ação falsos nos casos de resoluções em que o aluno transforma a expressão em um produto: identifica o fator comum (no caso do fator comum em evidência) ou tenta fatorar como um dos casos dos produtos notáveis (para os casos de fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença entre dois quadrados), e nesses casos ele pode fatorar corretamente ou não. Além disso, listamos juntos na tabela os outros casos em que o aluno não transforma em produto ou transforma em produto, mas não identifica o fator comum, pois queríamos observar as mudanças de resoluções dos alunos no decorrer das atividades.

Os dados coletados estão listados na tabela 10, em que na primeira coluna aparecem as questões escritas também na forma geral e na segunda coluna aparecem as resoluções que estão classificadas em quatro casos:

a) Não transforma em produto, que são os casos já citados no capítulo IV;

b) Transforma em produto e não identifica o fator comum;

c) TA. Corretos, são os teoremas em ação corretos utilizados pelos alunos;

d) TA. Falsos, são os teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos, nos casos em que ele identifica o máximo fator comum ou parte dele;

Finalmente, na última coluna estão relacionados os alunos que apresentaram algumas dessas resoluções. E caso algum aluno não apareça identificado na tabela é porque ele não apresentou nenhuma resolução nesta questão, isto é, que deixou em branco a questão.

Tabela 10

Resolução dos alunos da atividade I

	Atividade I		
Questões	**Resolução**		**Alunos**
(**1**) 8x+8y ax+ay	**Não transforma em produto**		A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, P1, P2, P3, P4, P7, P9, P10, P12, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P8
	TA.Correto	a(x+y)	A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A7, P1, P5, P6, P11, P12, P13
	TA.Falso		
(**2**)2x²+2, forma geral: ax²+a	**Não transforma em produto**		A1, A2, A3, A4, A6, P9, P10, P13, P14
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P8, P11, P15
	TA.Correto	$a(x^2+1)$	A8, P3, P4, P5, P6
	TA.Falsos	$a(x^2+a)$[T_4]	A4, A5, A6, P1, P12
		a(x+1)	A8, A7
(**3**) 2x-14, forma geral: ax-ab	**Não transforma em produto**		P15, A2, A3, A8, A9, A10, P2,P7, P9, P10, P14,
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A5 ,A5, A8, A8, P8
	TA.Correto	a(x-b)	A1, A2, A3, A4, A6, A8, A9, A7, P3, P4, P5, P6, P11,
	TA.Falsos	a(1-abx)	P13
		a(x+ab) [T_4]	A3
		a(x+b) [T_1]	A7
		a(x-ab) [T_4]	A1, A5, P1, P12,
(**4**)9-21x, forma geral: a^2-abx	**Não transforma em produto**		A4, A5, A8, A9, A10, P1, P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A6, A6, P8, P12
	TA.Corretos	a(a-bx)	A1, A3, A8, A9, A7, P1, P3,P4, P5, P6, P11, P13
		a(-bx+a)	A2, A3, A4, A6
	TA.Falsos	a(-b-x)	A2
		a(-b+x)	A2
		a(-b+ax)	A2
		a(bx+a)	A9
(**5**)21x+14 forma geral: abx+bc	**Não transforma em produto**		A3, A5, A10, P1, P2, P7, P9, P10, P14, P15,
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A4, A6, P1, P12
	TA.Correto	b(ax+c)	A1, A2, A4, A6, A8, A9, A7, P3, P5, P6
	TA.Falsos	b(ax+b) [T_1]	P4
		b(a+cx)	P13
(**6**)15-12x forma geral: $ab-ac^2x$	**Não transforma em produto**		A5, A10, P2, P7, P9, P10, P12, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A1, A2, A2, P8
	TA.Corretos	$a(b-c^2x)$	A1, A2, A8, A9, A7 A10, P3, P4, P5, P6, P11, P13
		$a(-c^2x+b)$	A4, A6
	TA.Falsos	a(b-dx) [T_1]	A4

		$a(b+dx)$ **[T_1]**	A4
		$a(-b+dx)$	A4
		$a(-c^2+x)$	A6
		$a(-c^2x-a)$	A10
		$a(-c^2x+a)$	A10
(**7**)$4x-4$ forma geral: a^2x-a^2	**Não transforma em produto**		A2, A5, A9, P2, P7, P9, P10, P12, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P8
	TA.Correto	$a^2(x-1)$	A1, A2, A4, A6, A7, A8, A9, A10, P3, P4, P5, P6, P11,
	TA.Falsos	$a^2(x+1)$**[T_1]**	A9
		$a(a-ax)$	P13
		$a^2(a^2x-a^2)$	A4
		$a^2(x-a^2)$ **[T_4]**	A4, P1
(**8**) $32+8x$ forma geral: a^5+a^3x	**Não transforma em produto**		A5, A9, A10, P2, P7, P9, P10, P12, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A6, P8
	TA.Corretos	$a^3(a^2+x)$	A1, A2, A4, A6, A7, A9, P6, P13
		$a^2(a^3+ax)$	A8, P3, P5
	TA. Falsos	$a^3(x+a^5)$ **[T_4]**	P1
		$a^2(a^3+a^2x)$ **[T_1]**	P4, P11
		$a^2(a^2+x)$	A9
		$a(a^2+x)$	A9
		$a^3(x-a^2x)$	A7
		$a^3(a^2-x)$	A7

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

A maioria dos alunos não escreveu a expressão como um produto; em geral, reduziam tudo a um só termo. Apesar das discussões entre eles e da nossa intervenção muitos resolveram desse modo; os alunos P2, P7, P9, P10 e P14 resolveram assim todas as questões.

Alguns alunos primeiro reduziram a expressão a um só termo, em seguida, talvez pelas discussões, tentaram fazer a fatoração, mas não riscaram a expressão inicial que reduziram, deixaram as duas resoluções, talvez tivessem dúvida de qual estava correta; o aluno P1 resolveu desse modo em três questões e o P12 em uma, sendo que esse último aluno nas questões (6), (7) e (8) voltou a não transformar em produto. Vejamos na Figura 7 alguns exemplos das resoluções do aluno P1:

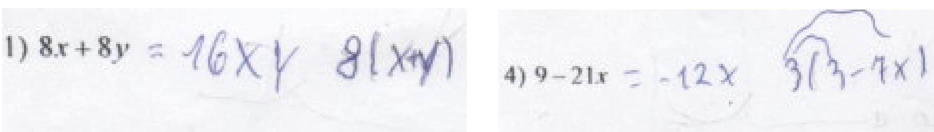

Figura 7 – Resoluções do aluno P1 na atividade I

Como previmos, a maioria dos alunos que estavam utilizando o *Aplusix* fizeram mais tentativas para resolver e, apesar de alguns apresentarem resposta correta ao final, vimos com *videocassete* que tiveram dificuldades e utilizaram teoremas em ação falsos ou outras resoluções incorretas. Por exemplo, na questão (1) todos os alunos do laboratório reduziram toda a expressão a um só termo na primeira tentativa de resolução; em seguida viram que havia um erro, pois estavam com revisão permanente dos cálculos, e alguns corrigiram e começaram a utilizar o teorema em ação correto no decorrer da atividade.

Entretanto, houve aluno que a cada nova questão resolvia novamente reduzindo toda a expressão, observava que estava errado e transformava em produto, o aluno A9, por exemplo, fez assim 5 vezes. Vimos também casos em que mesmo o *software* mostrando que havia um erro o aluno não tentava mudar a resolução, mantinha a expressão reduzida; o aluno A5 resolveu desse modo em seis questões.

Observamos que nesses casos os alunos não relacionam a fatoração a um produto de fatores, de certo modo parecem tentar obter um resultado. Essa mesma dificuldade foi apontada por Booth (1995), em que alguns alunos pareciam tentar encontrar uma resposta numérica; ou em alguns casos eles simplificavam uma expressão juntando todos os termos, mesmo não sendo semelhantes, na tentativa de encontrar uma resposta com um único termo.

Transforma a expressão em um produto, mas não identifica o fator comum.

Poucos alunos transformaram a expressão em produto e não identificaram o fator comum, dentre esses o aluno P8 se manteve nesse tipo de resolução durante toda atividade. Entretanto, não conseguimos observar um padrão (ou constância) no modo de resolver, pois algumas vezes colocava todo o primeiro termo em evidência, em outras, parte dele ou o segundo termo, e não parecia fazer a divisão dos termos pelo fator escolhido. Os outros alunos acabaram mudando de resolução, principalmente os que estavam utilizando o *Aplusix.* Acreditamos que seja pelas retroações oferecidas pelo *software*.

Transforma a expressão em produto e identifica o fator comum.

Dos teoremas que previmos identificamos dois:

[T_1] o aluno identifica o fator comum e divide o primeiro termo corretamente, mas erra na divisão do segundo termo;

[T_4] o aluno identifica o fator comum divide o primeiro termo corretamente, mas não tenta dividir o segundo termo só repete dentro dos parentêses.

Os alunos do laboratório utilizaram o teorema [T_1], verificaram que estava errado e corrigiram, a maioria desses erros estava relacionada com o sinal negativo de alguns termos e com a divisão do segundo termo pelo fator comum. Esses erros poderiam estar relacionados com a dificuldade em reescrever a expressão com o fator comum explícito, como também, na divisão desses termos. Por exemplo, dada a expressão a^3+a^2x reescrevê-la como $a.a^2+a^2x$, ou quando aparecem termos com sinal negativo, $a^3-a^2.x$ em $a.a^2-a^2x$, vimos que atividades como essa são pouco exploradas nos livros didáticos.

Percebemos que os alunos tiveram essa dificuldade mesmo nos casos em que o fator comum estava aparente, por exemplo, na questão (3) $2x-14$ o aluno A8 teve dificuldades em identificar o fator comum na expressão, fez três tentativas incorretas, viu que havia um erro e corrigiu deixando ao final a resposta correta.

O aluno A6 também teve dificuldade em identificar o fator comum em questões em que o fator estava explícito, na questão (8), e em questões que não estavam, como (4) e (5); mas parece ter tido mais dificuldade na questão (4) em que fez duas tentativas incorretas antes de resolver corretamente, e nesse caso o fator não estava explícito, como podemos observar na tabela 10.

Muitos alunos utilizaram teoremas em ação falsos uma única vez em algumas questões e algumas dessas resoluções foram até apagadas, no caso dos alunos do *Aplusix*, consideramos que alguns desses casos podem ter sido por falta de atenção, entretanto, sempre listamos essas utilizações nas tabelas, pois queríamos observar se esses alunos voltariam a utilizá-las no decorrer das atividades.

5.1.1.2 Resoluções da Atividade II

Nesta atividade, os alunos podiam tirar dúvidas com a professora e com os colegas. No laboratório, teriam a retroação permanente do *Aplusix* e poderiam discutir entre si.

Tabela 11

Resolução dos alunos da atividade II

	Atividade II		
Questões	**Resolução**		**Alunos**
(**1**)x^2+x forma geral: x^2+x	**Não transforma em produto**		A9, A10, A10, P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A1, P13
	TA. Correto	$x(x+1)$	A1, A2, A3, A6, A7, A8, A9, P3, P5, P6, P11
	TA. Falsos	$x(x^2+x)$	A5, P12
		$x(x+x)$ **[T_4]**	P1, P4, P8
(**2**)$2x+2x^2$ forma geral: $ax+ax^2$	**Não transforma em produto**		P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P8, P13
	TA. Corretos	$ax(1+x)$	A2, A3, A7, P3, P4, P5, P6, P11
		$x(a+ax)$	A1, A6, A8, A9
	TA. Falsos	$ax(x+ax)$ **[T_4]**	P1
		$a(ax+ax^2)$	P12
		$a(x+b)$ **[T_1]**	A2
		$x(x+1)$	A3
		$ax(x+x^2)$	A5
		$a(x^2-1)$	A6
		$x(a-ax)$ **[T_1]**	A6
		$ax(ax+ax^2)$	A8
		$ax(1+ax)$**[T_1]**	A8
		$x(x+ax^2)$	A9
		$x(x+ax)$	A9
		$x(x+x^2)$	A9
		$a(x+a^2x)$**[T_1]**	A10
		$x(ax+a^2)$	A10
(**3**) $x-2x^2$ forma geral: $x-ax^2$	**Não transforma em produto**		A3, A10, P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A3, A5, P8, P13
	TA. Correto	$x(1-ax)$	A1, A6, A8, A9, A7, P3, P4, P5, P6, P11
		$-x(ax-1)$	A2, A3
	TA. Falsos	$x(ax-x)$	P1
		$x(x-ax^2)$	P12
(**4**) $8x+x^2$, forma geral: a^3x+x^2	**Não transforma em produto**		A3, P2, P7, P9, P10, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A3, A5, A9, P1, P4, P8
	TA. Correto	$x(a^3+x)$	A1, A8, A9, A7, A10, P3, P5, P6, P11
		$x(x+a^3)$	A2, A3, A6
	TA. Falsos	$x(a^3x+x^2)$	P12
		$-x(a^3+x)$	A2
(**5**) $4x^2-16x$ forma geral: $a^2x^2-a^4x$	**Não transforma em produto**		P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A5, P4, P8, P13
	TA. Corretos	$a^2x(x-a^2)$	A2, A6, A9, A7, P3, P5, P6, P11
		$a^2(x^2-a^2x)$	P1

		$x(a^2x-a^4)$	A1, A8
	TA. Falsos	$x(a^2x^2-a^4x)$	P12
		$a^2x(x-1)$ **[T_1]**	A2
		$a^2(a^2x-a^2)$	A9
		$a^2(a^2x-x^2)$	A9
		$a(ax^2-a^2x)$[T_1]	A9
		$x(a^2-a^2x)$	A10
(**6**)$12x^2-15x$ forma geral: abx^2-acx	**Não transforma em produto**		A5, P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A2, A2, P1, P8, P13
	TA. Corretos	$ax(bx-c)$	A1, A2, A9, A7, P3, P5, P6, P11
		$x(abx-ac)$	A6, A8
		$a(bx^2-cx)$	A9, P4
	TA. Falsos	$x(abx^2-acx)$	P12
		$ax(bx-ax)$ **[T_1]**	A2
		$ax(bx-cx)$ **[T_1]**	A2
(**7**)$17x-2x^2$ forma geral: $ax-bx^2$	**Não transforma em produto**		A5, P2, P7, P9, P10, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A5, P1, P4, P8
	TA. Corretos	$x(a-bx)$	A1, A6, A8, A7, P3, P5, P6, P11
		$-x(bx-a)$	A2, A9
	TA. Falsos	$x(ax-bx^2)$	P12
		$x(bx-a)$	A9
(**8**) $4x-8x^2$ forma geral: $a^2x-a^3x^2$	**Não transforma em produto**		P2, P7, P9, P10, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P8, P13
	TA. Corretos	$a^2(x-ax^2)$	P1.
		$a^2x(1-ax)$	A1, P3, P5, P6
		$x(a^2-a^3x)$	A2, A6, A8, A7.
		$-a^2x(ax-1)$	A9
	TA. Falsos	$a^2x(1-a^2x)$ **[T_1]**	P4, P11
		$x(a^2x-a^3x^2)$	P12
		$-x(a-abx)$	A2
		$x(a^2-a^3x^2)$[T_4]	A5
		$a^2x(ax-1)$	A9

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

Alguns alunos continuam a resolver dessa maneira as questões, observamos que os alunos que estão no *Aplusix* e que resolvem desse modo, verificam que há um erro e algumas vezes mudam a resolução, mas no papel e lápis não. Ao mostrar que há um erro na resolução, acreditamos que o *Aplusix* faz com que o aluno mude a resolução.

Lembramos que nos dois ambientes os alunos continuam a discutir sobre o que é fatorar, entretanto, vemos que alguns alunos parecem não identificar a fatoração como um produto de fatores.

De fato, os alunos P2, P7, P9, P10, P14 e P15 não transformaram em produtos todas as questões, parecem tentar obter um resultado. Vejamos algumas resoluções do aluno P14:

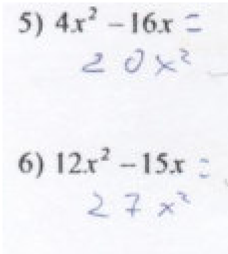

Figura 8: Resoluções do aluno P14 na atividade II

Transforma a expressão em um produto, mas não identifica o fator comum.

As discussões parecem surtir efeito em alguns alunos que não estavam tentando fatorar, e que começam a escrever a expressão como um produto. O aluno A5 é um desses casos; na primeira atividade não transformou várias questões em produto e nesta passou a fazer isso. Contudo, apresenta dificuldades em identificar o fator comum, por exemplo, nas questões (3), (4), (5) e (7) ele não conseguiu indentificar nem parte do fator.

O aluno P8 novamente não conseguiu identificar o fator comum em quase todas as questões, apresentando resoluções semelhantes às que citamos na atividade I.

Outro aluno que também não conseguiu identificar o fator comum persistentemente nesta atividade foi o P13, sendo que na atividade I ele conseguiu identificar o fator comum em quase todas as questões, mas nesta atividade ele tentou fatorar algumas questões como se fosse o quadrado da soma.

O *Aplusix* nos permitiu observar que os alunos que algumas vezes mudam a maneira de resolver a atividade, por exemplo, o A3 que reduzia tudo a um termo e verificava que havia um erro e começava a utilizar teoremas corretos, ou pelo menos a tentar escrever como um produto, em uma nova questão voltava a reduzir toda a expressão.

Transforma a expressão em produto e identifica o fator comum.

Alguns alunos conseguem identificar totalmente (ou parcialmente) o fator comum, o teorema em ação [T_1], por exemplo, se encaixa nesses casos. Observamos que alguns dos que estavam no *Aplusix* e utilizaram esse teorema, verificaram que havia um erro, e fizeram outras tentativas. Esse teorema e o [T_4] que previmos, foram utilizados pelos alunos; nesses casos, os alunos estão identificando o fator comum, mas nem sempre totalmente. A identificação do fator comum é fundamental neste caso de fatoração, e percebemos que essa tarefa parece trazer dificuldades aos alunos, pois, mesmo os que conseguem identificar em uma questão, às vezes na próxima não consegue ou só consegue identificar parcialmente.

De fato, observando os alunos que utilizaram teoremas em ação corretos vemos o aluno A1, por exemplo, que identificou somente parte do fator comum nas questões (2) e (5) e nessas os fatores estavam aparentes. Além dele, outros alunos também tiveram dificuldades na questão (2). Vemos na tabela 11 que os alunos A6, e A9 não conseguiram identificar todo o fator comum para colocar em evidência.

Esses dois alunos fizeram várias tentativas antes de resolver, e em algumas delas utilizaram o teorema [T_1], e pudemos observar que também não conseguiram identificar todo o fator comum para colocar em evidência.

O aluno A8 também teve esta dificuldade em identificar todo o fator comum nas questões (2), (5), (6) e (8), e dessas somente na (6) o fator comum não estava aparente.

Mesma dificuldade já observada na atividade I, em escrever um número inteiro como produto de fatores (NOTARI, 2002), como também de escrever a expressão com o fator explícito.

5.1.1.3 Resoluções da Atividade III

Segue abaixo a tabela com as resoluções dos alunos nesta atividade.

Tabela 12

Resolução dos alunos na atividade III

	Atividade III		
Questões	**Resolução**		**Alunos**
(1) x(x+2)+3(x+2) forma geral**:** x(x+a)+b(x+a)	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A6, A6, A6, A9, A9, A9, A10, P1, P6, P7, P8, P9, P12, P13, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A3, A4, A6, A7, A8, A10, P2
	TA.Correto	(x+a)(x+b)	A1, A4, A6, A7, P2, P3, P4, P5, P7, P10, P11, P13, P14, P15
	TA.Falsos	(x+a)(bx+a)	A6

		(x+a)(b+ax)	A6
		(x+a)(x+a)	A6
(2) (x-4)+x(x-4) forma geral**:** (x-a)+x(x-a)	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A4, A4, A5, A6, A7, A8, A9, P1, P2, P4, P5, P6, P8 P12, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A6, A7, P13, P15
	TA.Correto	(x-a)(x+1)	A1, A7, P10
	TA.Falsos	(x-a)(x+a)	A6, A7, P9, P11
		(x-a)(x-ax)	A6
		(x-a)(x+b)	A6
		(x-a)(x-a)	A7
		x(x-a)	P3, A1, A7
(3) x(x+7)-2x(x+7) forma geral: x(x+a)-bx(x+a)	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A7, A8, A9, A9, A9, A9, P1, P2, P5, P6, P7, P8, P12, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P4, P13, P15
	TA.Correto	(1-b)x(x+a)	P3, A7
		(x+a)(x-bx)	A1, A6, P5
	TA.Falsos	$bx^2(x+a)$	A5
		(x+a)(x+c)	A6
		(x+a)(x-cx)	A6
		(x+a)(bx+a)	A6
		(x+a)(bx-a)	A6
		(x+a)(bx-d)	A6
		(x+a)(x-b)	A6
		(x+a)(a+ab)	P6
		(x+a)(x+bx)	P9, P11, P13
		(x+a)(bx+c)	P10
(4) (x+1)(x-3)+2(x+1) forma geral: (x+a)(x-b)+c(x+a)	**Não transforma em produto**		A1, A2, A5, A7, P1, P5,P6, P7 P8, P12, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A6, A7, P3, P4,
	TA.Corretos	(x+a)(x-b+c)	
		(x+a)(x-a)	
	TA.Falsos	(x+a)(x-bc)	P2, A4, P10, P13
		(x+a)(x-b-c)	P9, P11
		(x+a)(x-b)	A6
		(x+a)(x-b)(x+c)	A6
		(x+a)(x-b)(x+a)	A6
		(x+a)(x-b)(cx+a)	A6
		(x+a)(c(x-b))	A1
(5) (3x+7)(2x-4)+ (5x+8)(3x+7) forma geral: $(ax+b)(cx-c^2)+$ $(dx+c^3)(ax+b)$	**Não transforma em produto**		A5, P4, P5, P6, P7, P8, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A7, P2, P3, P7, P9
	TA.Correto	$(ax+b)(cx-c^2+dx+c^3)$	A1
	TA.Falsos	$(ax+b)(bx^2-c^2)$	A5
		$(ax+b)(cdx+c^4)(c^2dx+c^5)$	P2
		$(ax+b)(cxd-c^3x)(c^2d+c^5)$	P10
		$(ax+b)(cdx^2-c^5)$	P11
		$(ax+b)(cdx-c^5x)(c^2d+c^5x)$	P13
(6)	**Não transforma em produto**		P4, P5, P6, P7, P8, P13, P14, P15

$(3x+5)(x+1)-(x+1)(2x+4)$ forma geral: $(ax+b)(x+c)-(x+c)(dx+d^2)$	**Transforma em produto e não identifica o fator comum**		P2, P3, P7
	TA.Corretos	$(x+c)((a-d)x+b-d^2)$	A7
		$(x+c)((ax+b)-(dx+d^2))$	A1
	TA.Falsos	$(x+c)(ax+dx)(b+d^2)$	A7
		$(x+c)(adx+ad^2x)(bd+bd^2)$	P10
		$(x+c)(adx^2+bd^2)$	P9, P11
(7) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$ forma geral: $(x-a)(b-c^2x)+(dx-c^2)(x-a)$	**Não transforma em produto**		A5, P1, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P13, P14, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P2, P7
	TA.Correto	$(x-a)^2$	
	TA.Falso	$(x-a)(bdx-c^4)$	P9
		$(x-a)(dx-c^2)(c^2d+c^2.c^2)$	P10
		$(x-a)(bdx-c^2)$	P11

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

Grande parte dos alunos continuou a não transformar a expressão em produto, lembramos que antes de aplicarmos esta atividade corrigimos as anteriores, reforçando que fatorar era transformar a expressão em um produto. Entretanto, parece que alguns alunos não fizeram esta relação, observamos que eles distribuíam os produtos e tentavam reduzir os termos, mesmo quando não eram semelhantes. Vejamos uma das resoluções do aluno A3 como exemplo:

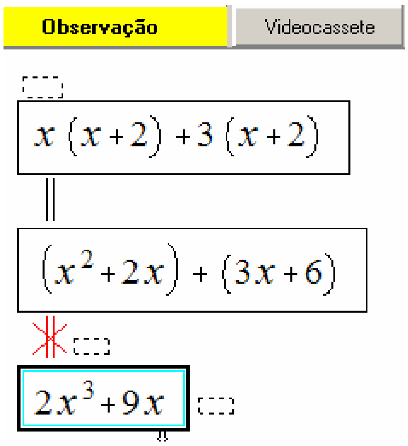

Figura 9: Resolução de um aluno na atividade III

Este erro também foi observado nas pesquisas de Booht (1995), em que o aluno acaba juntando os termos na tentativa de simplificar as expressões algébricas.

Os alunos do papel e lápis que mais resolveram desse modo foram P1, P4, P5, P6, P8, P14, P15. No *Aplusix* a maioria dos alunos resolveu assim a primeira questão, verificaram que havia um erro e mudaram de resolução, o A6 foi o que mais investiu em outras resoluções. Contudo, houve aluno, como o A5, que se manteve neste tipo de resolução em quase todas as questões.

Transforma a expressão em um produto, mas não identifica o fator comum.

Alguns alunos apresentaram esse tipo de resolução, entretanto, a dificuldade em certos casos não parece ser somente com relação à identificação do fator comum, mas do que realmente deve ser feito. De fato, observando a tabela vemos alunos listados nesta resolução e na anterior, inclusive dos que estavam resolvendo em papel e lápis, isso aconteceu porque alguns que tentaram resolver desse modo ao final distribuíram e reduziram os termos, mesmo não sendo semelhantes. Observamos isso nos alunos P7, P13 e P15, mesma dificuldade citada na resolução anterior (BOOTH, 1995), pois apesar de terem transformado em produto, ao final distribuiram e tentaram reduzir os termos, mesmo não sendo semelhantes.

Transforma a expressão em produto e identifica o fator comum.

Observamos que neste tipo de expressão a dificuldade em dividir os termos pelo fator comum é ainda maior, ou em identificar o binômio que multiplicado pelo fator comum, agora um binômio, resultaria nos dois produtos que são os termos da expressão, que seria a (2ª) tarefa listada na nossa análise da atividade no capítulo IV. Dentre os alunos que conseguiram resolver corretamente essa tarefa, observamos que alguns não reduziram os termos semelhantes, temos: na questão (3) os alunos A1, A6 e P5, na questão (5) o A1 e na questão (6) os alunos A1 e A7, eles não resolveram a (3ª) tarefa. Talvez não sabiam que devia ser feito isso, ou não acharam que era necessário.

Dentre esses alunos o A6 foi o que mais investiu em tentativas de resolução, nas questões (1), (2) e (3) ele fez várias até acertar. Observamos que a partir da questão (4) em que aparecem termos com produto de binômios ele teve mais dificuldades e tentou resolver somente a (4), fez algumas tentativas e acabou desistindo, nas outras questões ele só abriu e olhou.

5.1.1.4 Análises das Atividades do Grupo 1

Como previmos alguns alunos não conseguiram fatorar as expressões, não se lembravam, e mesmo após as explicações da professora os alunos P2, P7, P8, P9, P10, P12, P14 e P15 não conseguiram utilizar teoremas em ação corretos nas questões das atividades I e II.

As retroações disponibilizadas no *Aplusix* parecem ter auxiliado os alunos A9 e A7 nas atividades I e II, em particular, o A9 fez mais tentativas e somente em uma questão da atividade I, não apresentou o teorema correto.

Entretanto, na atividade III foi diferente. Os alunos se mostraram bastante desmotivados, pois não conseguiram resolver, mesmo com a correção das atividades I e II que fizemos antes do início desta. Nessa correção, relembramos que fatorar uma expressão era colocar o fator comum máximo em evidência, seja este fator um número, um monômio ou um binômio. Contudo, poucos alunos conseguiram se lembrar e fatorar corretamente; alguns deixaram várias questões sem responder, mesmo os que estavam tentando resolver no *Aplusix*. Desses alunos, somente o aluno A6 investiu em várias tentativas de resolução, mas ao final, mesmo ainda tendo tempo, desistiu deixando algumas questões sem fazer. Alguns diziam que era muito difícil e que não entendiam o que era para ser feito. Estas questões parecem estar longe dos conhecimentos prévios dos alunos. E, ter meios de verificar se os cálculos estão corretos, no caso do *Aplusix*, não foi suficiente para motivar o aluno a tentar resolver ou investir em mais tentativas.

Observamos alguns teoremas em ação que não foram identificados na listagem que fizemos no capítulo IV, como persistiram nas atividades, listamos e identificamos as que foram mais utilizadas pelos alunos, continuando os números de identificação da tabela 2.

Observamos que o aluno A9 tentou fatorar algumas das questões da seguinte maneira:

- atividade I questão (4): $a^2\text{-}abx \rightarrow a(bx+a)$;
- atividade II questão (5): $a^2x^2\text{-}a^4x \rightarrow a^2(a^2x\text{-}x^2)$;
- atividade II questão (5): $a^2x^2\text{-}a^4x \rightarrow a^2(a^2x\text{-}a^2)$;
- atividade II questão (7): $ax\text{-}bx^2 \rightarrow x(bx\text{-}a)$;
- atividade II questão (8): $a^2x\text{-}a^3x^2 \rightarrow a^2x(ax\text{-}1)$;

O aluno P13 também resolveu desse modo na atividade I a questão (7) e o P1 na atividade II a questão (3).

Nesses casos o segundo termo da expressão tem sinal negativo, o aluno fatorou primeiro esse termo com sinal positivo, e o outro termo que era positivo ele fatorou com sinal negativo. Consideramos que esses erros têm algumas semelhanças, assim identificamos com o número [T_{14}], continuando a numeração da nossa tabela 2 do capítulo IV.

Identificamos também o teorema em ação falso [T_{15}], em que os alunos colocaram um dos fatores, dos termos, em evidência e repetiram toda a expressão algébrica dentro dos parênteses. Ele foi utilizado oito vezes pelo aluno P12 e uma vez na:

- na atividade I, questão (7) $ax^2+a^2 \rightarrow a^2(ax^2+a^2)$ pelo aluno A4;
- na atividade II, questão (1) $x^2+x \rightarrow x(x^2+x)$ pelo aluno A5;
- na atividade II, questão (2) $ax+ax^2 \rightarrow ax(ax+ax^2)$ pelo aluno A8;

Na atividade III os alunos P2, P9, P10, P11 e P13 apresentaram resoluções que consideramos semelhantes em algumas questões, por exemplo, dada a expressão $(x+a)(x+b)+(dx+c)(x+a)$ eles colocaram o fator comum $(x+a)$ em evidência e fizeram a distribuição dos produtos $(x+b)(dx+c)$ incorretamente como $x.dx$ e $b.c$ obtendo $(x+a)(dx^2+bc)$; ou como $(x.dx+x.c)(b.d+b.c)$, fatorando ao final $(x+a)(dx^2+cx)(bd+bc)$. Eles cometeram erros tanto na distribuição dos produtos como também na multiplicação dos termos. Nesses casos colocaram o fator comum em evidência, não sabemos se estão dividindo o fator comum pelos termos da expressão corretamente, entretanto, vimos que ao invés de somar os binômios que seriam resultantes dessa divisão e reduzir os termos semelhantes, eles fizeram a multiplicação de alguns dos termos, e nem sempre certo. Vamos identificar esse teorema em ação falso como [T_{16}]. Consideramos que ele foi utilizado pelos alunos:

- P2 na questão (5);
- P9 nas questões (6) e (7);
- P10 nas questões (5), (6) e (7);
- P11 nas questões (5), (6) e (7);
- P13 na questão (5);

Apesar de não ser objetivo dessa pesquisa analisar as concepções dos alunos com relação a fatoração, vimos que muitos alunos não relacionam a fatoração a um produto de fatores, mesmo sendo essa a apresentação da fatoração no ensino usual. Após as discussões alguns alunos começaram a tentar escrever as expressões como um produto, mas em geral não conseguiam identificar o fator comum. No *Aplusix* notamos que alguns alunos que não tentavam resolver como um produto, verificavam que havia um erro e faziam novas tentativas, às vezes até acertar, entretanto, nas próximas questões voltavam a cometer o mesmo erro, evidenciando a persistência dessa dificuldade.

Apesar das discussões realizadas no ambiente papel e lápis, observamos que a maioria dos alunos que não resolvia como produto de fatores, não mudou a maneira de resolver no decorrer das atividades I e II, por exemplo, P2 e P7. Entretanto, no *Aplusix* é diferente, eles mudaram mais vezes a maneira de resolver, confirmando a nossa hipótese inicial de que, nesse ambiente, eles fariam mais tentativas. As retroações permanentes e a possibilidade de deixar ao final a resposta correta parecem fazer com que alguns alunos tentem resolver até acertar.

As principais dificuldades dos alunos que tentam fatorar parecem começar na identificação do fator comum. Alguns só conseguem identificar parte desse fator, e outros parecem não conseguir nem isso. Dos alunos que conseguem identificar pelo menos parte do fator comum, identificamos alguns teoremas em ação falsos utilizados: [T_1], [T_4], [T_{14}], [T_{15}] e [T_{16}], que apresentam dificuldades específicas:

[T_1] o aluno divide o primeiro termo corretamente, mas não consegue dividir o segundo termo;

[T_4] o aluno divide corretamente o primeiro termo, mas não tenta dividir o segundo, simplesmente repete o termo dentro dos parênteses, parecendo com o erro de distribuição muito comum já citado no capítulo I;

[T_{14}] o aluno divide primeiro o segundo termo de sinal negativo corretamente, mas com sinal trocado, e tenta dividir o outro termo, entretanto, não consegue;

[T_{15}] o aluno não tenta dividir nenhum dos termos, simplesmente repete toda a expressão dentro dos parênteses;

[T_{16}] o aluno não faz a soma e a redução dos termos semelhantes dos binômios resultantes da divisão do fator comum pelos binômios, ao invés disso, faz a multiplicação de alguns dos termos.

Na maioria dos teoremas em ação a dificuldade maior parece estar em dividir os termos pelo fator comum encontrado, ou em encontrar o monômio que multiplicado pelo fator comum dê o termo inicial, como apresentam os livros didáticos.

Como dissemos, a primeira dificuldade dos alunos está relacionada a identificação do fator comum. Como vimos, alguns livros didáticos não propõem atividades para identificar e explicitar o fator comum nas expressões algébricas. Por exemplo, atividades em que o aluno deve escrever a expressão $21x^2+14x$ como $3.7x.x+2.7x$. Acreditamos que esse trabalho poderia auxiliar os alunos, como também atividades para fatorar números naturais como produtos de dois ou mais números, pois vimos na pesquisa de Notari (2002) que os alunos também têm dificuldade na fatoração numérica.

As dificuldades se tornaram maiores na atividade III em que os alunos tiveram de trabalhar com binômios.

Outra dificuldade observada relaciona-se com a divisão dos termos pelo fator comum: o ensino usual prioriza a multiplicação de monômios. De fato, a maioria dos livros didáticos não traz exemplos nem propõe atividades em que o aluno deve determinar o fator comum, torná-lo explícito como o exemplo anterior, e dividir cada termo pelo fator encontrado, e ao final distribuir o produto encontrado para verificar se está correto. Sentimos necessidade, como Notari (2002), de atividades que relacionem a divisão com a multiplicação, pois os alunos na sua maioria apresentaram dificuldades em dividir os fatores.

Na construção do campo conceitual da fatoração a divisão e a multiplicação de termos são fundamentais, e, como vimos, muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos estão em utilizar esses conhecimentos de maneira adequada. O ensino usual apresenta a fatoração logo após o estudo desses tópicos, entretanto, de maneira isolada, pois não conseguimos observar situações que relacionassem a multiplicação com a divisão de maneira explíta nas atividades propostas aos alunos.

Entendemos que dificuldades na utilização desses conhecimentos podem gerar uma impossibilidade do aluno em conseguir desenvolver o conceito de fatoração adequadamente.

Além de identificar os teoremas em ação buscamos verificar se eles persistiam na resolução dos alunos no decorrer das atividades. Assim, segue a tabela 13 com a síntese dos alunos que utilizaram teoremas em ação falsos, pelo menos uma vez, nessas três atividades.

Tabela 13
Teoremas em ação utilizados pelos alunos nas atividades I, II e III

		Teoremas em ação falsos	
Aluno	**Atividade**	**Nº da questão e nº do teorema**	**Quantidade de vezes utilizada**
A1	I	(3) [T_4]	[T_4] uma vez
A2	II	(2) [T_1], (5) [T_1], (6) [T_1], (6) [T_1]	[T_1] quatro vezes
A4	I	(2) [T_4], (6) [T_1], (6) [T_1], (7) [T_{15}], (7) [T_4]	[T_1] duas vezes [T_4] duas vezes [T_{15}] uma vez
A5	I	(2) [T_4];(3) [T_4] ;	[T_4] três vezes [T_{15}] uma vez
	II	(1) [T_{15}], (8) [T_4]	
A6	I	(2) [T_4]	[T_1] uma vez [T_4] uma vez
	II	(2) [T_1]	
A7	I	(3) [T_1]	[T_1] uma vez
A8	I	(3) [T_1]; (3) [T_1]	[T_1] três vezes [T_{15}] uma vez
	II	(2) [T_1] ; (2) [T_{15}]	
A9	I	(4) [T_{14}] ; (7) [T_1];	[T_1] duas vezes [T_4] uma vez [T_{14}] cinco vezes
	II	(4) [T_4] ; (5) [T_1], (5) [T_{14}] (5) [T_{14}] ;(7) [T_{14}] ; (8) [T_{14}]	
A10	II	(2) [T_1]	[T_1] uma vez
P1	I	(2) [T_4], (3) [T_4], (7) [T_4], (8) [T_4]	[T_4] seis vezes [T_{14}] uma vez
	II	(1) [T_4], (2) [T_4], (3) [T_{14}]	
P2	III	(5) [T_{16}]	[T_{16}] uma vez
P4	I	(5) [T_1], (8) [T_1]	[T_1] três vezes [T_4] uma vez
	II	(1) [T_4], (8) [T_1]	
P8	II	(1) [T_4]	[T_4] uma vez
P9	III	(6) [T_{16}]; (7) [T_{16}]	[T_{16}] duas vezes
P10	III	(5) [T_{16}]; (6) [T_{16}]; (7) [T_{16}]	[T_{16}] três vezes
P11	I	(8) [T_1]	[T_1] duas vezes [T_{16}] três vezes
	II	(8) [T_1]	
	III	(5) [T_{16}]; (6) [T_{16}]; (7) [T_{16}]	
P12	I	(2) [T_4]; (3) [T_4]; (5) [T_1]	[T_1] uma vez [T_4] duas vezes [T_{15}] oito vezes
	II	(1)-(8) [T_{15}]	
P13	I	(7) [T_{14}]	[T_{14}] uma vez [T_{16}] uma vez
	III	(5) [T_{16}]	

Alguns teoremas em ação falsos persistiram no decorrer das atividades. Os alunos, A2, A8 e P4, por exemplo, utilizaram algumas vezes o [T_1]. Esse teorema foi utilizado por vários alunos na resolução dessas atividades, mas a maior parte dos alunos o utilizou apenas uma vez, desse modo, acreditamos que a maioria dessas utilizações foi por falta de atenção. Contudo, o aluno o A2 utilizou esse teorema em ação falso quatro vezes ao resolver as questões propostas, nesse caso parece que ele não está conseguindo dividir o segundo termo da expressão corretamente.

Observamos também a utilização do teorema [T_4], que supomos no capítulo IV, por vários alunos, o P1 em particular o utilizou seis vezes. Nós havíamos previsto sua utilização por ser um dos erros mais comuns observados em pesquisas com relação à multiplicação de termos (propriedade distributiva da multiplicação com relação a adição). Vemos que esse erro de distribuição é bem semelhante ao que poderíamos chamar de "volta", do teorema [T_4] $ax(x+b) \rightarrow ax^2+b$. Vejamos algumas resoluções desse aluno nas atividades I e II:

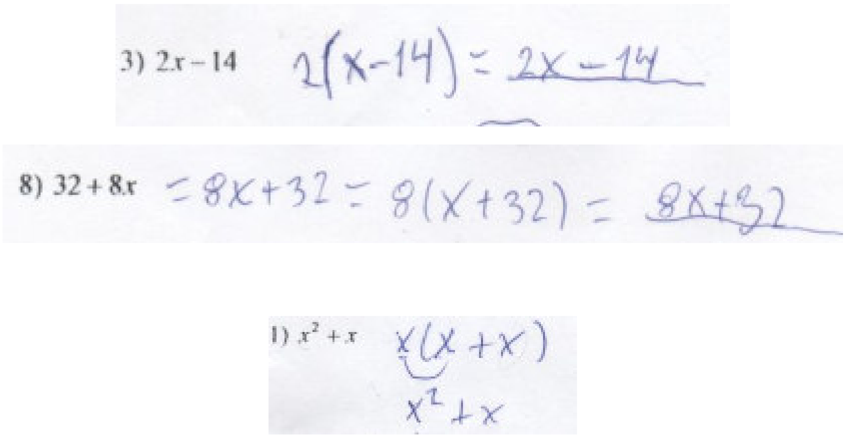

Figura 10: Resoluções de um aluno nas atividades I e II

Nas resoluções desse aluno observamos que é isso mesmo que ele fez, fatorou utilizando esse teorema em ação falso e ao final fez a distribuição do produto utilizando esse mesmo caminho incorreto. O que parece confirmar nossa previsão no capítulo IV, quando dissemos que uma dificuldade na distribuição dos produtos poderia comprometer o trabalho do aluno na fatoração. Esse conceito, como vimos é utilizado na apresentação da fatoração, desse modo faz parte da construção deste campo conceitual.

Identificamos um novo teorema [T_{15}], que não havia sido listado no capítulo IV, em que essa dificuldade se mostra ainda maior, pois o aluno identifica o fator comum, transforma a expressão em produto, mas não faz a divisão de nenhum dos termos pelo fator comum encontrado, observamos que o aluno P12 o utilizou em todas as questões da atividade II.

Além desse teorema, identificamos outros dois novos teoremas o [T_{14}] e o [T_{16}]. O teorema em ação falso [T_{14}] foi mais utilizado pelo aluno A9, nesse caso observamos que a dificuldade parece estar em trabalhar com expressões em que o segundo termo tem sinal negativo. Observamos que ele utilizava esse teorema, o

Aplusix mostrava que havia um erro ele corrigia e utilizava teoremas corretos, mas a cada nova questão, com essa característica citada, ele voltava a utilizar o teorema falso; evidenciando a persistência dessa dificuldade.

O teorema em ação falso [T_{16}] foi mais utilizado pelos alunos P10 e P11 em que a dificuldade parece estar tanto em saber o que deve ser feito como também na maneira correta de aplicar a regra escolhida, e no caso a escolha deles não era a indicada para a situação. Esses alunos colocaram o fator comum em evidência corretamente, no caso era um binômio, mas ao invés de somar os binômios resultantes eles fizeram a multiplicação deles, e distribuíram a maioria de maneira incorreta.

Desses três novos teoremas em ação falsos identificados, o [T_{16}] só foi utilizado pelos alunos do ambiente papel e lápis, os outros dois: [T_{14}] e o [T_{15}] foram utilizados nos dois ambientes, só que o [T_{14}] foi mais utilizado pelo aluno do *Aplusix* e o [T_{15}] pelos alunos do papel e lápis.

Observamos na tabela 13 que conseguimos identificar mais teoremas em ação falsos, supostos a princípio, nos alunos que estavam utilizando o *Aplusix*, o que confirma a nossa hipótese inicial de que, nesse ambiente, os alunos fariam mais tentativas. Além disso, confirmou-se também que ao final a maioria apresentaria a resposta correta, pois, vimos que utilizavam teoremas falsos, o *software* mostrava que havia um erro, eles discutiam entre si sobre as dúvidas, e ao final colocavam a resposta correta. Entretanto, a cada nova questão o teorema incorreto voltava a ser utilizado, mostrando a persistência dessas dificuldades.

5.1.2 Análise do Grupo 2

As resoluções dos alunos nas atividades IV, VI e VIII de desenvolvimento dos produtos notáveis se encontram no Anexo 3, pois são atividades de revisão.

Vamos apresentar e discutir aqui as resoluções das atividades V, VII, IX e X.

5.1.2.1 Resoluções da Atividade V

Segue na tabela 14 os teoremas em ação falsos identificados nas produções dos alunos nos dois ambientes:

Tabela 14

Resolução dos alunos na atividade V

	Atividade V		
Questões	**Resolução**		**Alunos**
(1) x^2+2x+1 forma geral**:** $x^2+2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		A2, A3, P1, P4, P10, P11, P12
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(x+a)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A7, P2, P3, P5, P6, P7, P8, P9, P13
	TA. Falso	$(x+2x)^2$ **[T_5]**	P14
		$(x^2+x)^2$	P15
(2) $x^2+8x+16$ forma geral: $x^2+2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		A2, P1, P4, P11, P12, P13, P14
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		A3, A5
	TA.Correto	$(x+a)^2$	A1, A2, A4, A6, A8, A9, A7, P2, P3, P5, P6, P7, P10
	TA.Falsos	$(x+a^2)^2$ **[T_6]**	A8, A2
		$(x+2ax)^2$ **[T_5]**	A8
		$(x^2+a)^2$ **[T_6]**	A10
		$(x+2a)^2$ **[T_5]**	A7;
		$(x+a^3)^2$ **[T_6]**	P8
		$(bx+a^2)^2$	P9
		$(x^2+ax)^2$ **[T_5]**	P15
(3) $16+16x+4x^2$ forma geral: $a^4+2a^3bx+a^2x^2$	**Não transforma em produto**		A2, A3, P1, P2, P3, P4, P11
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		A8
	TA.Correto	$(a^2+ax)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A7, A10, P5, P7, P10, P13
	TA.Falsos	$(x+a^4)^2$	A6
		$(x+a)^2$	A6
		$(a^4+a^2x)^2$ **[T_9]**	A8
		$(a^2+x)^2$	A9
		$(a^2x+ax)^2$	P6
		$(a^3+ax)^2$ **[T_9]**	P8
		$(a^4+acx)^2$ **[T_9]**	P14
		$(a^3x+ax^2)^2$**[T_5]**	P15
(4) x^2+4x+4 forma geral: $x^2+2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		A2, A10, P1, P4, P11, P13
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P2, P12
	TA.Correto	$(x+a)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A7, P3, P5, P6, P10
	TA.Falsos	$(x^2+a)^2$ **[T_6]**	P8
		$(x+a^2)^2$ **[T_6]**	P9
		$(x+2a^2x)^2$ **[T_5]**	P14
		$(x^2+x)^2$	P15
(5) $9x^2+6x+1$ forma geral: $a^2x^2+2abx+b^2$	**Não transforma em produto**		P1, P4, P11
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P2, P12
	TA.Correto	$(ax+b)^2$	A1, A4, A5, A6, A7, P3, P5, P6, P8, P13
	TA.Falsos	$(ax^2+b)^2$ **[T_9]**	P7
		$(ax+2)^2$	A7

		$(a+x)^2$	A9
		$(x+b)^2$	P9, P10
		$(a^2x+cx)^2$	P14
		$(a^2x^2+bx)^2$ **$[T_5]$**	P15
(6) $24x+9x^2+16$ forma geral: $2abx+a^2x^2+b^2$	**Não transforma em produto**		P1, P4, P11
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(ax+b)^2$	A1, A4, A5, A6, A7, P3, P6, P8
	TA.Falsos	$(bx+b)^2$**$[T_{13}]$**	A6
		$(bx-b)^2$**$[T_{13}]$**	A6
		$(a+x)^2$	A9
		$(abx+b)^2$**$[T_{13}]$**	P5, P7
		$(x+b)^2$	P9
		$(\sqrt{2abx}+\sqrt{b^2})^2$ **$[T_{13}]$**	P10
		$(2ax+a)^2$ **$[T_{13}]$**	P13
		$(a^2x+cx)^2$	P14
		$(abx+a^2x^2)^2$**$[T_5]$**	P15
(7) $x^2+20x+100$ forma geral**:** $x^2+2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		P1, P2, P4, P11, P12
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(x+a)^2$	A1, A4, A5, A6, A9, A7, P3, P5 P6, P7, P8, P10, P13
	TA.Falso	$(x+ka)^2$ **$[T_6]$**	P9
		$(a^2x+2abx)^2$ $[T_5]$	P14
		$(x^2+ax)^2$ **$[T_6]$**	P15
(8)$4+4x^2+8x$ forma geral**:** $a^2+a^2x^2+2a^2x$	**Não transforma em produto**		P1, P4, P11
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(a+ax)^2$	A1, A4, A5, P3, P7, P6
	TA.Falsos	$(a+a^2x)^2$ **$[T_9]$**	A4
		$(a+x)^2$	A4
		$(a^2+ax)^2$ **$[T_9]$**	A6
		$(ax+1)^2$	A7
		$(a+x)^2$	A9, A6
		$(a+2ax)^2$ **$[T_{13}]$**	P5, P8, P13
		$(\sqrt{a^2}+\sqrt{2a^2x})^2$ **$[T_{13}]$**	P7, P10
		$(x+b^2)^2$	P9
		$(2a^2x+2a^2x)^2$	P14
		$(x^2+x)^2$	P15

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

Observamos que nesta atividade a quantidade de alunos que resolvia desse modo foi menor, entretanto, esta mudança pode ter sido em função da apresentação da atividade anterior e pelo fato dela ter sido corrigida e comentada antes do início desta. Além disso, o enunciado desta atividade pode ter contribuido com esse resultado.

Transforma a expressão em produto, mas não fatora como um produto notável.

Poucos alunos procederam deste modo, a maioria resolveu corretamente ou pelo menos tentou fatorar como um produto notável. Entretanto, esta aparente "melhora" também pode ser em função do motivo citado no parágrafo anterior.

Transforma a expressão em produto e fatora como um produto notável.

Os alunos utilizaram mais teoremas em ação corretos nesta atividade, principalmente os que estavam no *Aplusix*. Alguns deles fatoraram corretamente, mas não pediram a verificação eles fizeram a distribuição do produto encontrado seguindo as indicações propostas pelos livros didáticos, para verificar se estava correto, desse modo, vimos que se lembram do padrão.

Conseguimos identificar os teoremas em ação falsos: [T_5], [T_6], [T_9] e [T_{13}], em que listamos as seguintes dificuldades:

[T_6] e [T_9]: o aluno identifica os dois termos que são quadrados perfeitos, mas tem dificuldade em extrair a raiz quadrada desses termos. Alguns casos podem ser por falta de atenção, em que o aluno esquece de extrair a raiz de um dos termos, em outros percebemos que esse erro é mais constante, isto é, eles não conseguem extrair a raiz quadrada corretamente de várias questões;

[T_5]: o aluno não identifica corretamente os dois termos que são quadrados perfeitos, e tenta extrair a raiz quadrada de quaisquer dois termos, os dois primeiros ou os dois últimos, e na maioria das vezes extrai a raiz incorretamente, principalmente do termo que não é um quadrado perfeito.

[T_{13}]: neste caso a ordem que o trinômio aparece parece trazer dificuldades ao aluno, pois, observando as resoluções de todas as questões vemos que quando a expressão é dada na ordem usual, isto é, o primeiro e o último termo são os quadrados perfeitos o aluno identifica corretamente, entretanto nestes casos não. Deste modo, acreditamos que, talvez, para esse aluno os quadrados perfeitos sejam sempre o primeiro e o último termo do trinômio quadrado perfeito.

Ao utilizar estes dois últimos teoremas parece que o aluno se lembrou de parte da regra apresentada nos livros didáticos, sendo que no caso do teorema [T_6] ele escolhe quaisquer dois termos, ao passo que no [T_{13}] escolhe sempre o primeiro e o último para extrair a raiz quadrada somar e elevar ao quadrado. Estamos fazendo essas diferenciações, pois, observamos várias tentativas no *Aplusix* que parecem indicar que os alunos escolheram esses caminhos, já no papel e lápis observamos que eles extraíram a raiz quadrada antes de fatorar, desse modo conseguimos observar quais termos eles escolheram.

Os alunos que estavam resolvendo as atividades no laboratório não gostaram das retroações limitadas. E, mesmo tendo sido avisados, alguns não perceberam que agora precisavam pedir para verificar se estava correto, e que ao terminar a questão o *software* não exibia mais as mensagens, dando os parabéns, ou avisando que havia algum erro no caminho que conduzia à resposta.

Talvez por causa disso, o aluno A9 utilizou teoremas em ação falsos nas questões: (3), (5), (6) e (8). Observando com *videocassete* percebemos que ele não pediu a verificação nenhuma vez.

Apesar disso, observamos na tabela 14 que os alunos do *Aplusix* se saíram melhores do que os do papel e lápis, em geral, utilizaram mais teoremas em ação corretos ao final das questões. Alguns deles fizeram várias tentativas incorretas até conseguir resolver corretamente, destacamos os alunos: A4 na questão (8), A6 nas questões (3) e (6), A8 na questão (2) que fizeram três tentativas de resolver essas questões citadas, apresentando ao final o teorema em ação correto.

5.1.2.2 Resoluções da Atividade VII

Tabela 15
Resolução dos alunos na atividade VII

	Atividade VII		
Questões	**Resolução**		**Alunos**
(1) x^2-2x+1 forma geral: $x^2-2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		A3, <u>A3</u>, <u>A3</u>, P1, P8
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(x-a)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A9 A10, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P9 P10, P11, P12, P13, P14, P15
	TA.Falso	$(x+a)^2$ $[T_7]$	<u>A9</u>
(2) $4x^2+1-4x$ forma geral: $a^2x^2+b^2-2abx$	**Não transforma em produto**		A3, <u>A3</u>, <u>A3</u>, <u>A7</u>, <u>A7</u>, P1, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(ax-b)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A7, A10, A14, P2, P3, P6, P7, P11, P14
	TA.Falsos	$(ax+ax)^2$ $[T_{13}]$ e $[T_7]$	<u>A1</u>, <u>A2</u>
		$(ax+a)^2$ $[T_{13}]$ e $[T_7]$	<u>A2</u>, <u>A6</u>, <u>A6</u>
		$(a^2x+a^2x)^2$	P12, <u>A8</u>
		$(ax+b)^2$ $[T_7]$	<u>A2</u>, <u>A4</u>, <u>A5</u>, <u>A6</u>, <u>A9</u>, P4 P5, P13, P15

		$(ax-ax)^2$ **[T_{13}]**	P8
		$(a^2x+b)^2$ **[T_7]** e **[T_9]**	P9
		$(2a^2x-b)^2$ **[T_5]**	A10
(3) $y^2-6xy+9x^2$ forma geral: $y^2-2axy+a^2x^2$	**Não transforma em produto**		A3, P1, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		A10
	TA.Correto	$(y-ax)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8 A7, P3,P5, P6, P8
	TA.Falsos	$(y+ax)^2$ **[T_7]**	A2
		$(2xy-ax)^2$ **[T_5]**	P2, P13
		$(y-a^2x)^2$ **[T_9]**	A4, A6, P12
		$(y^2-a^2xy)^2$	P4
		$(y-2ax)^2$ **[T_5]**	A9
		$(a^2-ax)^2$	A9
		$(x+a^2)^2$	P9
		$(y-axy)^2$ **[T_5]**	P11
		$(y^2-ax)^2$	P14
		$(y-xy)^2$	P15
(4) x^2-4x+4 forma geral: $x^2-2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		A3, P1, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		A10
	TA.Correto	$(x-a)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A7 P3, P4, P5, P6, P7, P8, P11, P13
	TA.Falsos	$(x-ax)^2$ **[T_5]**	P2
		$(bx+a^2)^2$	P9
		$(x-a^2)^2$ **[T_6]**	P12, P14
		$(x+a^2)^2$ **[T_6]** e **[T_7]**	P15
(5) $1+9x^2-6x$ forma geral: $b^2+a^2x^2-2abx$	**Não transforma em produto**		A3, P1, P10, P14
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Corretos	$(ax-b)^2$	A1, A2, A4, A6, A8, A7, A10, P3, P4, P6, P7, P11
		$(b-ax)^2$	A5, A9
	TA.Falsos	$(ax-2ax)^2$ **[T_{13}]**	A2
		$(b+2ax)^2$ **[T_{13}]** e **[T_7]**	P8
		$(ax-2x)^2$ **[T_{13}]**	P2,
		$(b+2abx)$ **[T_{13}]** e **[T_7]**	P12
		$(ax+2abx)^2$ **[T_{13}]** e **[T_7]**	A8
		$(ax+b)^2$ **[T_7]**	A2, A4, A6, A8, P5, P9, P13, P15
		$(b+2abx)^2$ **[T_{13}]** e **[T_7]**	A8
(6)$25^2x^2-20x+4$ forma geral: $a^2x^2-2abx+b^2$	**Não transforma em produto**		A3, P1, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		A10, P7
	TA.Correto	$(ax-b)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A7 A10, P3, P4, P5, P6, P8, P11, P13
	TA.Falsos	$(ax-b^2)^2$ **[T_9]**	A7
		$(ax-bx)^2$	P2
		$(ax+b^2)^2$ **[T_7]** e **[T_9]**	P9, P15
		$(ax^2-b^2)^2$ **[T_9]**	P12
		$(b-bax)^2$ **[T_5]**	P14
(7) $49-14x+x^2$ forma geral: $a^2-2ax+x^2$	**Não transforma em produto**		A3, P1, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P7

	TA.Corretos	$(a-x)^2$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9 A10, P4, P5, P6, P11, P13
		$(x-a)^2$	A7
	TA.Falsos	$(ax-x)^2$ **[T_5]**	P2
		$(a+x)^2$ **[T_7]**	P3
		$(a-2x)^2$ **[T_5]**	A9
		$(c-x)^2$	P8
		$(bx-a^2)^2$	P9
		$(a^2-x)^2$ **[T_6]**	P12
		$(x-ax)^2$ **[T_5]**	P14
		$(ax-a^2)^2$ **[T_5]**	P15
(**8**) $x^2-2xy+y^2$ forma geral: $x^2-2xy+y^2$	**Não transforma em produto**		P1, P7, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(x-y)^2$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9 A7, A10, P3, P5, P6, P8, P12
	TA.Falsos	$(x-2xy)^2$ **[T_5]**	P2, P14
		$(x-xy)^2$ **[T_5]**	P4, P11, P13
		$(cx+c)^2$	P9
		$(xy+y)^2$ **[T_5] e [T_7]**	P15
(**9**) $1-10x+25x^2$ forma geral: $b^2-2abx+a^2x^2$	**Não transforma em produto**		A7, P1, P8, P10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P7
	TA.Corretos	$(b-ax)^2$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9 P3, P4, P5, P9, P11, P13, P14, P15
		$(ax-b)^2$	P6, A10
	TA.Falsos	$(ax-ax)^2$ **[T_5]**	P2
		$(b-a^2x)^2$ **[T_9]**	P12

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

Alguns alunos ainda persistem em não escrever a expressão como um produto, em particular A3, A7, P1 e P10. Nas resoluções eles estão reduzindo os termos que não são semelhantes, e até apresentando valores numéricos para as expressões. Desses, somente o A7 verificou que havia um erro e conseguiu fatorar corretamente. O A3 fazia tentativas, verificava que havia erro, mas tentava sempre resolver do mesmo modo, vejamos, por exemplo, algumas de suas resoluções:

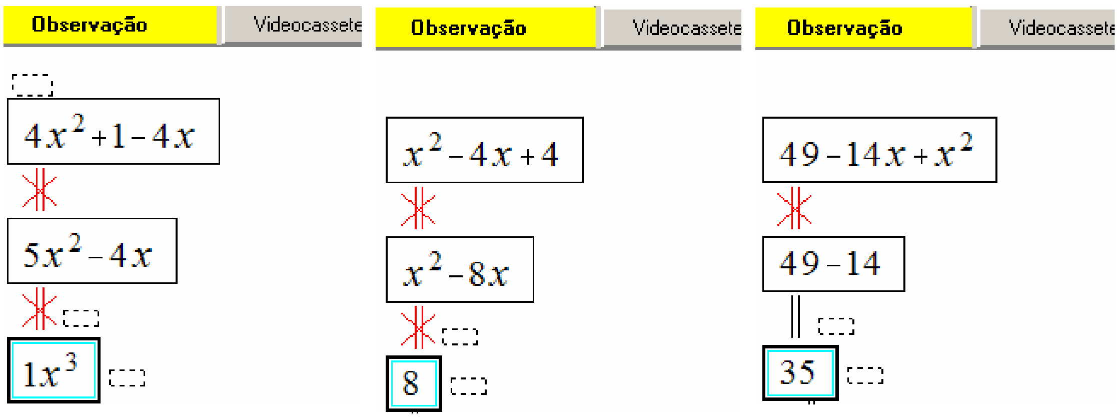

Figura 11 –Resoluções de um aluno na atividade VII

Esta dificuldade já apareceu nas outras atividades, e, como já dissemos anteriomente, também foi constatada por Booth (1995); em que os alunos parecem tentar simplificar as expressões reduzindo os termos, mesmo não sendo semelhantes, na tentativa de se obter uma resposta.

Transforma a expressão em produto mas não fatora como um produto notável.

Somente dois alunos resolveram desse modo. Destacamos o A10 que não vinha tentando resolver as questões propostas nas atividades, mas começou a fazer mais tentativas.

Parece que as discussões, e a possibilidade de verificar os cálculos com professor (ou no *Aplusix*), estavam fazendo com que a maior parte dos alunos resolvessem corretamente a (1ª) e a (2ª) tarefas listadas na análise que fizemos no capítulo IV.

Transforma a expressão em produto e fatora como um produto notável.

A maioria dos alunos no laboratório, ao final, apresentou o teorema em ação correto, mas com o *videocassete* conseguimos observar que alguns tiveram dificuldades e utilizaram teoremas em ação falsos, em algumas das questões.

Conseguimos identificar os teoremas em ação falsos: [T_5], [T_6], [T_7], [T_9] e [T_{13}] com dificuldades específicas:

[T_6] e [T_9]: o aluno identifica os dois termos que são quadrados perfeitos, mas tem dificuldade em extrair a raiz quadrada desses termos;

[T_7] o aluno tenta fatorar o trinômio quadrado perfeito como se fosse o quadrado da soma, neste caso talvez possa ser:

- por se lembrar da regra apresentada nos livros em que os dois termos que são quadrados perfeitos são sempre positivos, além disso, vimos que os livros didáticos em geral exploram mais a fatoração do trinômio quadrado perfeito no quadrado da soma do que no da diferença.

- por falta de atenção, inclusive alguns alunos aparecem identificados com dois teoremas, em que, observando na tabela, conseguimos ver que eles nem sempre cometem esse erro.

- pelo fato do sinal negativo estar no terceiro termo x^2+a^2-2ax, desse modo, a posição do termo negativo parece trazer um pouco mais de dificuldade aos alunos, podemos constatar isso observando na tabela 15 o grande número deles que cometeram esse erro nas questões (2) e (5).

[T_5]: o aluno não identifica corretamente os dois termos que são quadrados perfeitos e tenta extrair a raiz quadrada de quaisquer dois termos e, na maioria das vezes incorretamente, pois um dos termos não é um quadrado perfeito.

[T_{13}]: neste caso a ordem que o trinômio aparece parece trazer dificuldades ao aluno, pois, observando as resoluções de todas as questões, vemos que quando a expressão aparece na ordem usual, isto é, o primeiro e o último termo são os quadrados perfeitos o aluno identifica corretamente, entretanto nestes casos não. Deste modo, acreditamos que talvez para esse aluno os quadrados perfeitos sempre são o primeiro e o último termo do trinômio quadrado perfeito.

Os alunos do *Aplusix,* novamente, se saíram melhor que os do papel e lápis, pois utilizaram mais teoremas em ação corretos nas questões desta atividade. Observamos que eles fazem mais tentativas de resolver as questões e na maioria das vezes até acertar, dentre eles destacamos os alunos: A2, A6, A8 e A9 que fizeram mais tentativas. Ao final observamos, também, que os alunos A1, A2, A4, A6, A8 e A9, que tiveram dúvidas nas primeiras questões e utilizaram teoremas em ação falsos, conseguiram resolver as duas últimas questões corretamente sem fazer uso de nenhum teorema em ação falso.

5.1.2.3 Resoluções da Atividade IX

Tabela 16
Resolução dos alunos da atividade IX

Questões	Atividade IX – Resolução		Alunos
(1) x^2-4 forma geral: x^2-a^2	**Não transforma em produto**		A3, P1, P15
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		A4
	TA.Correto	$(x-a)(x+a)$	A1, A2, A3, A5, A6, A7, A8, A9, A10 P2, P3,P4, P5, P7, P9, P10, P11, P12, P14
	TA.Falsos	$(x-a)(x-a)$ **[T_{10}]**	A1, P6
		$(x^2-a^2)(x^2+a^2)$ **[T_{12}]**	A4
		$(x-a^3)(x+a^3)$ **[T_{12}]**	A6
		$(x-a^2)(x+a^2)$ **[T_{12}]**	A6, A8
		$(x-a^2)^2$ **[T_{11}]**	A9
		$(x-a)^2$ **[T_{11}]**	A7
		$(x^2-a)(x+a)$ **[T_{12}]**	P8
		$(x-a)^2(x+a)^2$	P13
(2) $36-x^2$ forma geral: a^2-x^2	**Não transforma em produto**		P1
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P11
	TA.Correto	$(a-x)(a+x)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A7 A10, P2, P3, P4, P5, P8, P9, P10, P12
	TA.Falsos	$(ax-x)(ax+x)$	A6
		$(a-x)^2$ **[T_{11}]**	A7, P15
		$(a-x)(a-x)$ **[T_{10}]**	P6
		$(x-a)(x+a)$	P7
		$(x-a)^2(x+a)^2$	P13
		$(x-a^2)(x-a^2)$ **[T_{10}]** e **[T_{12}]**	P14
(3) $9x^2-1$ forma geral: $a^2x^2-b^2$	**Não transforma em produto**		P1
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P11
	TA.Correto	$(ax-b)(ax+b)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A7 A10, P2, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 P12, P13
	TA.Falsos	$(ax-b)^2$ **[T_{11}]**	A7
		$(ax-b)(2ax+b)$	A9
		$(ax^2-b)(ax^2+b)$ **[T_{12}]**	P3,
		$(b-a^2x)(b-a^2x)$ **[T_{12}] e [T_{10}]**	P14
		$(a^2x-b)^2$ **[T_{11}]**	P15
(4) x^2-y^2 forma geral: x^2-y^2	**Não transforma em produto**		P1
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(x-y)(x+y)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A7 A10, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 P11, P13
	TA.Falso	$(x-y)^2(x+y)^2$	P12
		$(x-y)(x-y)$ **[T_{10}]**	P14
		$(x-y)^2$ **[T_{11}]**	P15
(5) $1-x^2$	**Não transforma em produto**		

forma geral: a^2-x^2	**Transforma em produto mas não fatora como um produto notável**		
	TA.Correto	$(a-x)(a+x)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A7 A10, P2, P3, P4, P5, P6, P8, P9, P10 P11, P13
	TA.Falsos	$(a-x)^2$ **[T_{11}]**	P1, P15
		$(x-a)(x+a)$	P7
		$(a-x^2)(a+x^2)$ **[T_{12}]**	P12
		$(x-a)(x-a)$ **[T_{10}]**	P14
(6) $1-4x^2$ forma geral: $a^2-b^2x^2$	**Não transforma em produto**		
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(a-bx)(a+bx)$	A1, A2, A3, A5, A6, A8, A9, A7, A10 P2, P4, P5, P6, P9, P10, P11, P13
	TA.Falsos	$(a-b^2x)(a+b^2x)$ **[T_{12}]**	A3, A8, A10
		$(a-b^2x)^2$ **[T_{11}]**	A3
		$(a-bx)^2$ **[T_{11}]**	P1, P15
		$(bx-a)(bx+a)$	P7
		$(a-bx^2)(a+bx^2)$ **[T_{12}]**	P3, P12
		$(a-bx)(a-bx)$ **[T_{10}]**	P8
		$(a-b^2x)(a-b^2x)$ **[T_{10}]** e **[T_{12}]**	P14
(7)$9x^2-16$ forma geral: $a^2x^2-b^4$	**Não transforma em produto**		A3, A3, P1
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(ax-b^2)(ax+b^2)$	A1, A2, A4, A5, A6, A8, A9, A7, P4 P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P13
	TA.Falsos	$(x-b^2)(x+b^2)$	A2
		$(ax-b^3)(ax+b^3)$ **[T_{12}]**	P2, A10
		$(ax^2-b^3)(ax^2+b^3)$ **[T_{12}]**	P12, A10
		$(ax-b^4)(ax+b^4)$ **[T_{12}]**	A10
		$(ax-b)(ax+b)$ **[T_{12}]**	A10
		$(ax^2-b^2)(ax^2+b^2)$ **[T_{12}]**	P3
		$(b^2-a^2x)(b^2-a^2x)$ **[T_{10}]** e **[T_{12}]**	P14
		$(a^2x-b)^2$ **[T_{11}]**	P15
(8) $100x^2-25$ forma geral: $a^2x^2-b^2$	**Não transforma em produto**		P1
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(ax-b)(ax+b)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 A10, P2, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 P11, P13
	TA.Falso	$(abx+b)(abx-b)$	A2
		$(ax^2-b)(ax^2+b)$ **[T_{12}]**	P3, P12
		$(b^2-a^2x)(b^2-a^2x)$ **[T_{10}]** e **[T_{12}]**	P14
		$(ax-b)^2$ **[T_{11}]**	P15
(9)$4x^2-y^2$ forma geral: $a^2x^2-y^2$	**Não transforma em produto**		
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P1
	TA.Correto	$(ax-y)(ax+y)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A7 A10, P2, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 P11, P13
	TA.Falsos	$(ax^2-y)(ax^2+y)$ **[T_{12}]**	P3
		$(ax^2-y^2)(ax^2+y^2)$ **[T_{12}]**	P12
		$(y-a^2x)(y-a^2x)$ **[T_{10}]** e **[T_{12}]**	P14
		$(ax-y)^2$ **[T_{11}]**	P15
	Não transforma em produto		P1

(10) $16x^2-9$ forma geral: $a^4x^2-b^2$	**Não transforma em produto**		P1
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		
	TA.Correto	$(a^2x-b)(a^2x+b)$	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10 P11, P13
	TA.Falsos	$(cx-b)(cx+b)$	A3
		$(a^3x-b)(a^3x+b)$ **[T_{12}]**	P2, A10
		$(ax-1)(ax+1)$	A10
		$(a^2x^2-b)(a^2x^2+b)$ **[T_{12}]**	P3
		$(a^3x^2-b)(a^3x+b)$ **[T_{12}]**	P12
		$(b^2-a^2x)(b^2-a^2x)$ **[T_{10}]** e **[T_{12}]**	P14
		$(ax-b)^2$ **[T_{11}]**	P15

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

A maioria dos alunos não resolve mais desse modo, provavelmente pelas discussões e correções feitas no decorrer das atividades, entretanto, ainda persiste esse erro em alguns alunos. O aluno P1, por exemplo, só transformou em produto duas das questões. O aluno A3 apesar de apresentar ao final, na maior parte das vezes, a resposta correta, vimos com o *videocassete* como esse erro é persistente nas suas resoluções. Em algumas questões ele novamente tentou apresentar um resultado numérico:

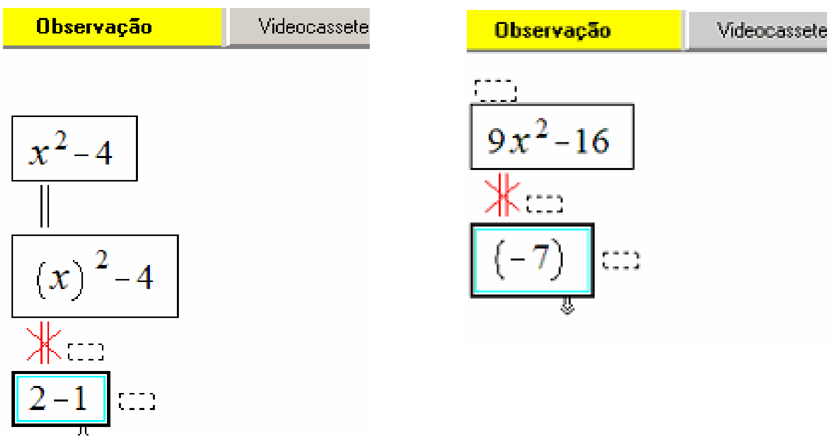

Figura 12 – Resoluções de um aluno na atividade IX

Transforma a expressão em produto, mas não fatora como um produto notável.

Três alunos resolveram transformando uma das questões em produto e fatorando como a fatoração do fator comum em evidência. Acreditamos que esse resultado deve-se, em parte, pelas atividades propostas anteriomente para esse caso de fatoração, e talvez algum aluno a ache “parecida” com as expressões das atividades I e II. Além disso, este caso de fatoração é pouco explorado nos livros didáticos nas atividades propostas ao aluno, em geral, é enfatizado a fatoração dos trinômios no quadrado da soma.

Transforma a expressão em produto e fatora como um produto notável.

A maioria dos alunos apresentou a resposta correta, principalmente os que estavam utilizando o *Aplusix*. Entretanto, observando com *videocassete,* vimos que tiveram dúvidas. Em particular na questão (1) pode-se notar que as primeiras tentativas de resolução estavam incorretas.

Conseguimos identificar os teoremas em ação listados nas análises do capítulo IV: [T_{10}], [T_{11}] e [T_{12}].

[T_{10}]: o aluno não transforma a expressão em um produto de uma soma pela diferença de dois termos, mas pelo produto da diferença pela diferença. O aluno P14 resolveu dessa maneira várias vezes; parece escolher esse caminho considerando estar correto.

[T_{11}]: fatora a diferença de quadrados como o quadrado da diferença de dois termos. Acreditamos que alguns casos possam estar relacionados a uma dificuldade dos alunos na distribuição de alguns produtos, como dissemos na análise da apresentação das atividades, um dos erros de desenvolvimento mais comuns é $(x-a)^2 \rightarrow x^2-a^2$.

[T_{12}]: o aluno identifica corretamente o caso de fatoração relacionada a essas expressões, mas parece ter dificuldade em extrair a raiz quadrada dos quadrados perfeitos. Alguns alunos apresentam essa dificuldade somente quando um dos termos é composto de um número multiplicado pelo fator x^2, como: $9x^2-16$. Entretanto, outros apresentam essa dificuldade também em exercícios mais simples, $36-x^2$. O aluno P14, por exemplo, é um desses casos.

Além dos teoremas identificados observamos que alguns alunos ao tentar fatorar as expressões faziam a inversão dos termos. Observamos duas situações diferentes:

- uma em que o fator x^2 era o segundo termo, em casos como: a^2-x^2 ou $a^2-b^2x^2$, o aluno invertia os termos ao fatorar, no caso dos exemplos ficava $(x-a)(x+a)$ ou como $(bx-a)(bx+a)$. Nestes casos ele parece ter dificuldade em reconhecer um número como sendo o primeiro termo da expressão a ser fatorada. O aluno P7 resolveu assim as questões (2), (5) e (6).
- na outra o aluno invertia quando o primeiro termo era composto por um número e pelo x; casos como $a^2x^2-b^2$ ou $a^2x^2-y^2$, fatorava como $(b-ax)(b+ax)$ e $(y-ax)(y+ax)$,

ou seja, escolhia deixar sempre o primeiro termo da expressão, dentro dos parênteses, composto somente por um número ou pelo y. O aluno P14 foi o que mais resolveu assim.

Não vamos identificar esses dois casos como um teorema em ação falso, pois, tivemos alunos que resolveram as questões desses dois modos citados. Decidimos esperar a atividade X para ver se essas resoluções voltariam a aparecer.

Os alunos do laboratório estão investindo em mais tentativas de resolução e, apesar de apresentarem ao final o teorema correto, observamos que ainda apresentam dificuldades e que utilizam teoremas falsos. Em geral, eles fazem tentativas até acertar; os alunos A3 e A7 são exemplos disso. Além disso, os alunos do *Aplusix* foram os que mais utilizaram teoremas em ação corretos nesta atividade, e nas questões (2), (3), (4), (5), (8) e (9) todos os alunos desse ambiente utilizaram, ao final, teoremas em ação corretos.

5.1.2.4 Análises das Atividades do Grupo 2

Além de identificar os teoremas em ação buscamos também verificar se eles persistiam na resolução dos alunos no decorrer dessas atividades. Assim, segue abaixo uma tabela com a síntese dos alunos que utilizaram teoremas em ação falsos, pelo menos uma vez, nessas duas atividades.

Tabela 17

Teoremas em ação utilizados pelos alunos nas atividades V, VII e IX.

		Teoremas em ação falsos	
Aluno	**Atividade**	**Nº da questão e nº do teorema**	**Quantidade de vezes utilizada**
A1	VII	(2) [T_{13}], (2) [T_7]	[T_7] uma vez [T_{10}] uma vez [T_{13}] uma vez
	IX	(1) [T_{10}]	
A2	V	(2) [T_6]	[T_6] uma vez [T_7] cinco vezes [T_{13}] três vezes
	VII	(2) [T_{13}], (2) [T_{13}], (2) [T_7], (2) [T_7] (2) [T_7], (3) [T_7], (5) [T_{13}], (5) [T_7]	
A3	IX	(6) [T_{11}], (6) [T_{12}]	[T_{11}] uma vez [T_{12}] uma vez
A4	V	(8) [T_9], (3) [T_9]	[T_7] duas vezes [T_9] duas vezes [T_{12}] uma vez
	VII	(2) [T_7], (5) [T_7]	
	IX	(1) [T_{12}]	
A5	VII	(2) [T_7]	[T_7] uma vez

A6	V	(6) [T_{13}], (6) [T_{13}], (8) [T_9]	[T_7] quatro vezes [T_9] duas vezes [T_{12}] duas vezes [T_{13}] quatro vezes
	VII	(2) [T_{13}], (2) [T_{13}], (2) [T_7], (2) [T_7] (2) [T_7], (3) [T_9], (5) [T_7]	
	IX	(1) [T_{12}], (1) [T_{12}]	
A7	V	(2) [T_5]	[T_5] uma vez [T_9] uma vez [T_{11}] três vezes
	VII	(6) [T_9]	
	IX	(1) [T_{11}], (2) [T_{11}], (3) [T_{11}]	
A8	V	(2) [T_6], (2) [T_5], (3) [T_9]	[T_5] uma vez [T_6] uma vez [T_7] três vezes [T_9] uma vez [T_{12}] duas vezes [T_{13}] duas vezes
	VII	(5) [T_{13}], (5) [T_{13}], (5) [T_7], (5) [T_7] (5) [T_7]	
	IX	(1) [T_{12}], (6) [T_{12}]	
A9	VII	(1) [T_7], (2) [T_7], (3) [T_5], (7) [T_5]	[T_5] duas vezes [T_7] duas vezes [T_{11}] uma vez
	IX	(1) [T_{11}],	
A10	V	(2) [T_6]	[T_5] uma vez [T_6] uma vez [T_{12}] seis vezes
	VII	(2) [T_5]	
	IX	(6) [T_{12}], (7) [T_{12}], (7) [T_{12}], (7) [T_{12}], (7) [T_{12}], (10) [T_{12}]	
P1	IX	(5) [T_{11}], (6) [T_{11}]	[T_{11}] duas vezes
P2	VII	(3) [T_5], (4) [T_5], (5) [T_{13}], (7) [T_5] (8) [T_5], (9) [T_5]	[T_5] cinco vezes [T_{12}] duas vezes [T_{13}] uma vez
	IX	(7) [T_{12}], (10) [T_{12}]	
P3	VII	(7) [T_7]	[T_7] uma vez [T_{12}] seis vezes
	IX	(3) [T_{12}], (6) [T_{12}], (7) [T_{12}], (8) [T_{12}] (9) [T_{12}], (10) [T_{12}]	
P4	VII	(2) [T_7], (8) [T_5]	[T_5] uma vez [T_7] uma vez
P5	V	(6) [T_{13}], (8) [T_{13}]	[T_7] duas vezes [T_{13}] duas vezes
	VII	(2) [T_7], (5) [T_7]	
P6	IX	(1) [T_{10}], (2) [T_{10}]	[T_{10}] duas vezes
P7	V	(5) [T_9], (6) [T_{13}], (8) [T_{13}]	[T_9] uma vez [T_{13}] duas vezes
P8	V	(2) [T_6], (3) [T_9], (4) [T_6], (8) [T_{13}]	[T_6] duas vezes [T_7] uma vez [T_9] uma vez [T_{13}] três vezes
	VII	(2) [T_{13}], (5) [T_{13}], (5) [T_7]	
	IX	(6) [T_{10}]	
P9	V	(4) [T_6], (7) [T_6]	[T_6] duas vezes [T_7] três vezes [T_9] duas vezes
	VII	(2) [T_7], (2) [T_9], (5) [T_7], (6) [T_7], (6) [T_9]	
P10	V	(6) [T_{13}], (8) [T_{13}]	[T_{13}] duas vezes
P11	VII	(3) [T_5], (8) [T_5]	[T_5] duas vezes
P12	VII	(3) [T_9], (4) [T_6], (5) [T_{13}], (5) [T_7] (6) [T_9], (7) [T_6], (9) [T_9]	[T_6] duas vezes [T_7] uma vez [T_9] três vezes [T_{12}] cinco vezes [T_{13}] uma vez
	IX	(6) [T_{12}], (7) [T_{12}], (8) [T_{12}], (9) [T_{12}] (10) [T_{12}]	
P13	V	(6) [T_{13}], (8) [T_{13}]	[T_5] duas vezes [T_7] duas vezes [T_{13}] duas vezes
	VII	(2) [T_7], (3) [T_5], (5) [T_7], (8) [T_5]	
P14	V	(1) [T_5], (3) [T_9], (4) [T_5], (7) [T_5]	[T_5] seis vezes [T_6] uma vez
	VII	(4) [T_6], (6) [T_5], (7) [T_5], (8) [T_5]	

	IX	(2) [T_{10}], (2) [T_{12}], (3) [T_{10}], (3) [T_{12}] (4) [T_{10}], (5) [T_{10}], (6) [T_{10}], (6) [T_{12}] (7) [T_{10}], (7) [T_{12}], (8) [T_{10}], (8) [T_{12}] (9) [T_{10}], (9) [T_{12}], (10) [T_{10}], (10) [T_{12}]	[T_9] uma vez [T_{10}] nove vezes [T_{12}] sete vezes
P15	V	(2) [T_5], (3) [T_5], (5) [T_5], (6) [T_5] (7) [T_6]	[T_5] seis vezes [T_6] duas vezes [T_7] cinco vezes [T_9] uma vez [T_{11}] nove vezes
	VII	(2) [T_7], (4) [T_6], (4) [T_7], (5) [T_7] (6) [T_7], (6) [T_9], (7) [T_5], (8) [T_5] (8) [T_7],	
	IX	(2) [T_{11}], (3) [T_{11}], (4) [T_{11}], (5) [T_{11}] (6) [T_{11}], (7) [T_{11}], (8) [T_{11}], (9) [T_{11}] (10) [T_{11}]	

O teorema em ação [T_7] foi o mais utilizado para resolver as questões, e ele estava relacionado somente com a atividade VII. Observamos que alguns alunos o usaram mais de uma vez: o A2, A4, A6, A8, A9, P5, P9, P13 e o P15; em particular o A2 e o P15 o utilizaram cinco vezes. Contudo, este último aluno variou muito a resolução ficando difícil dizer se esse é o caminho que considera pertinente para resolver, pois em questões semelhantes ele resolvia de modo diferente.

O aluno A2, entretanto, parece utilizar esse caminho como válido quando o terceiro termo do trinômio está com sinal negativo, por exemplo, na questão (2) $4x^2+1-4x$ ele fez três tentativas utilizando este teorema até conseguir resolver corretamente. Além dele, temos também os alunos A4, A6, A8 e P13 que parecem apresentar a mesma dificuldade neste tipo de expressão, no caso as questões (2) e (5). Acreditamos que um dos fatores que contribuíram para esse erro foi o fato das expressões estarem fora da ordem usual, que seria $4x^2-4x+1$, e assim o segundo termo dessas questões, fora da ordem usual, ficou com sinal positivo, o que pode ter feito com que os alunos confundissem com o quadrado da soma.

O teorema [T_{12}] também foi muito utilizado e estava relacionado com a atividade IX, nesse caso o aluno parece ter dificuldade em extrair a raiz quadrada dos quadrados perfeitos; ele foi utilizado principalmente pelos alunos A10, P3, P12 e P14, sendo que esse último aluno o utilizou nove vezes. Nesse caso, a dificuldade está relacionada a um dos conceitos envolvidos na construção do conceito da fatoração dos produtos notáveis. Vemos aqui, a necessidade de se retomar esses conceitos na apresentação da fatoração.

O teorema [T_5] foi também muito utilizado e, de maneira mais persistente pelos alunos: P2, P14 e P15, em que eles tentaram extrair a raiz quadrada de dois termos quaisquer do trinômio. Nesses casos os alunos parecem se lembrar de parte da regra apresentada no ensino usual, em que deve-se identificar os quadrados e extrair a raiz quadrada deles, entretanto não conseguem identificar corretamente os termos que são quadrados perfeitos.

Outro teorema bastante utilizado pelos alunos foi o [T_{13}], e de modo mais persistente pelos alunos: A2, A6, A8, P10 e P13 percebemos que a ordem da expressão faz diferença ao fatorar os trinômios, pois eles sempre tentaram extrair a raiz quadrada do primeiro e do último termo. E, nesse caso, eles também parecem utilizar parte da regra apresentada nos livros didáticos.

Além disso, nesses dois teoremas [T_5] e [T_{13}] os alunos apresentam um erro semelhante, pois tentam extrair a raiz quadrada de termos que não são quadrados perfeitos. Vejamos alguns exemplos de utilização do [T_5] e [T_{13}]:

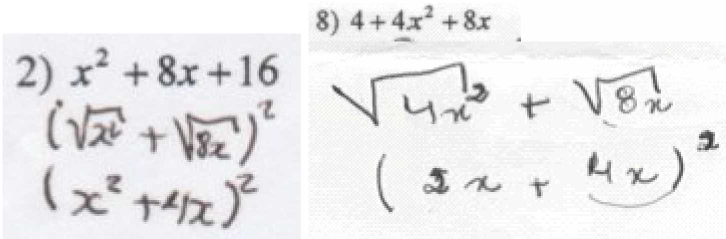

Figura 13: Exemplos de resoluções utilizando os teoremas em ação [T_5] e [T_{13}].

De fato, vemos que esses alunos parecem ter a mesma dificuldade em identificar os termos que são quadrados perfeitos, pois extraem a raiz de 8x como se fosse um quadrado perfeito, obtendo 4x. Assim, eles não só memorizam e utilizam incorretamente a regra apresentada nos livros didáticos, como também, têm dificuldade em aplicar alguns conceitos que, como já dissemos, fazem parte da construção da fatoração dos produtos notáveis, no caso: quadrado perfeito e raiz quadrada.

Acreditamos que o erro em extrair a raiz quadrada mereceria um estudo mais aprofundado, pois em alguns casos pode ser em função da escolha incorreta do quadrado perfeito, mas também pode ser que alguns alunos tenham realmente dificuldade em extrair a raiz quadrada.

O teorema [T_{11}] que faz parte da atividade IX em que o aluno tenta fatorar a diferença de quadrados como se fosse um trinômio quadrado perfeito não foi utilizado por muitos alunos. Entretanto, foi utilizado nove vezes pelo aluno P15, lembramos que supomos esse teorema por causa do erro de distribuição observado em pesquisas $(x\text{-}a)^2 \rightarrow x^2\text{-}a^2$. Contudo, tínhamos proposto atividade de desenvolvimento desse produto notável antes da atividade IX de fatoração da diferença de quadrados, como faz o ensino usual, e vimos que isso não foi suficiente para se evitar esse erro.

Acreditamos que além dessas apresentações em separado, do desenvolvimento dos produtos notáveis e da sua fatoração, o ensino deveria incluir atividades com expressões que são trinômios quadrados perfeitos e diferenças de quadrados, em um mesmo exercício, para serem fatoradas. Evitando, assim, a memorização e aplicação de regras de maneira compartimentada, como vimos nas resoluções das atividades. Os alunos precisam aprender essas regras, entretanto, é necessário que reflitam ao ter de utilizá-las. Cabe ao ensino proporcionar sempre que possível essas situações de reflexão, de escolhas pertinentes (ou não) ao tratamento da situação proposta.

5.1.3 Análise do Teste com Atividades do Grupo 1 e 2

Aplicamos a atividade X na semana seguinte ao término das nove atividades, e os alunos tiveram 50 minutos para resolver as questões.

Esta atividade foi realizada como um teste, e não fizemos a correção ao final. Escolhemos questões semelhantes às das atividades: I, II, III, V, VII e IX, porque queríamos verificar se as dificuldades apresentadas e os teoremas em ação falsos utilizados anteriormente iriam se repetir. Desse modo, temos questões para fatorar colocando o fator comum em evidência, fatorar os trinômios quadrados perfeitos e a diferença de quadrados.

5.1.3.1 Resoluções da Atividade X

Tabela 18

Resolução dos alunos na atividade X

	Atividade X		
Questões	**Resolução**		**Alunos**
(1) x^2+2x forma geral: x^2+ax	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A9, A9, P4, A10
	TA.Correto	$x(x+a)$	A1, P1, P3, P5, P6, P7, P9, P10, P11,

	TA.Falsos	$x(x+x^2)$ **$[T_1]$**	P2, P8
		$x(x+x/ax)$	P12
		$x(x+ax)$ **$[T_4]$**	P13
		$x(x+b)$ **$[T_1]$**	P14
		$x(x+x)$ **$[T_1]$**	P15
(2) $7x+21x^2$ forma geral: $ax+abx^2$	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A7, A8, A9, A10, P13
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A8, P8, P9
	TA.Corretos	$ax(1+bx)$	A1, P4, P5, P6, P11
		$a(x+bx^2)$	A6
		$x(a+abx)$	P7
	TA.Falsos	$a(x+bx)$ **$[T_1]$**	A1, A6
		$ax(x+bx)$	P1, P15
		$x(a+ax^2)$ **$[T_1]$**	P2
		$ax(1+2x)$**$[T_1]$**	F3
		$x(x+(a+b))$	P10
		$x(x+x/ab)$	P12
		$x(cx+dx)$	P14
(3) $15x^2+12x$ forma geral: abx^2+acx	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, P2, P13
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P8
	TA.Corretos	$ax(bx+c)$	A1, P1, P3, P5, P11
		$a(bx^2+cx)$	A1, P4
		$x(abx+ac)$	P6, P7
	TA.Falsos	$x(x+(ab+ac))$	P10
		$x(ab+x/acx)$	P12
		$x(abx+dx)$ **$[T_1]$**	P14
		$ax(ax+c)$	P15
		$ax(x+b)$	P9
(4) $4x^2-4$ forma geral: $a^2x^2-a^2$	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P1, P2, P3, P4, P8, P7, P9, P10, P12, P13, P14, P15
	TA.Corretos	$(ax-a)(ax+a)$	
		$a^2(x^2-1)$	A1, P5, P6, P11
	TA.Falsos	$(a^2x-1)^2$ **$[T_{11}]$**	A9
		$(ax-1)^2$ **$[T_{11}]$**	A9
		$(a^2x-a^2)(a^2x+a^2)$**$[T_{12}]$**	A10
(5) $4x^2-x$ forma geral: a^2x^2-x	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, P13
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A9, A10, P8
	TA.Correto	$x(a^2x-1)$	A1, P3,P5, P6, P11, P12,
	TA.Falsos	$ax(ax-x)$ **$[T_4]$**	P1
		$x(a^2-x)$	P2
		$x(a^2x-0)$ **$[T_1]$**	P4
		$x(x-1)$	P7
		$x(x-a)$	P9, P10, P14
		$x(ax-1)$	P15
(6) $x^2-2xy+y^2$ forma geral: $x^2-2xy+y^2$	**Não transforma em produto**		A3, A5, A6, A7, A8, A10
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P1, P2, P3, P7, P8, P10, P11, P12, P13, P14, P15

	TA.Correto	$(x-y)^2$	A1, A2, A4, A9, P6
	TA.Falso	$(x+y)^2$ **[T_7]**	A2, P5
(7) x^2+2x+1 forma geral: $x^2+2ax+a^2$	**Não transforma em produto**		A3, A5, A6, A7, A8, A9, A10, P2, P4, P13
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P1, P3, P7, P8, P10, P11, P12, P14, P15
	TA.Correto	$(x+a)^2$	A1, A2, A4, P5, P6,
	TA.Falso		
(8) $x(x-1)+2(x-1)$ forma geral: $x(x-a)+b(x-a)$	**Não transforma em produto**		A2, A3, A5, A6, A8, A10, P1, P2, P4, P8, P10, P11, P13, P15
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A9, P12, P14
	TA.Correto	$(x-a)(x+b)$	A1, A4, A7, P3, P5, P6, P7
	TA.Falso		
(9) $(8x-5)(6x+3)+(8x-5)$ forma geral: $(a^3x-b)(acx+c)+(a^3x-b)$	**Não transforma em produto**		A1, A2, A6, A8, A10, P1, P2, P4, P7, P11, P13
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A2, A5, P8, P14
	TA.Correto	$(a^3x-b)(acx+c+1)$	P5
	TA.Falsos	$(a^3x-b)(acx+c)$	A3, P3, A4, A9, A7, P10
		$(a^3x-b)(x+a+1)$	P6
(10) $4x^2-4x+1$ forma geral: $a^2x^2-2abx+b^2$	**Não transforma em produto**		A2, A3, A5, A6, A7, A8, A10, P2
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P1, P3, P4, P7, P8, P10, P11, P13, P14, P15
	TA.Correto	$(ax-b)^2$	A1, A4
	TA.Falsos	$(ax+b)^2$ **[T_7]**	P5
		$(a^2x+b)^2$ **[T_9]**	P6
		$(ax-a)^2$	A9
(11) $10xy+x^2+25y^2$ forma geral: $2axy+x^2+a^2y^2$	**Não transforma em produto**		A3, A4, A5, A6, A7, A8, A10, P1, P2
	Transforma em produto mas não fatora como um produto notável		P3, P7, P4, P8, P10, P11, P13, P14, P15
	TA.Correto	$(x+ay)^2$	A1, A2, A9, P5, P6
	TA.Falso		
(12) $3x^2+xy$ forma geral: ax^2+xy	**Não transforma em produto**		A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		P1, P4, P8, P11
	TA.Correto	$x(ax+y)$	A1, P3, P5, P6,
	TA.Falsos	$x(a+xy)$	P2
		$x(ax+xy)$**[T_4]**	P7
		$x(y+a)$	P9, P13, P14
		$x(x+ay)$	P10
		$(ax+xy)(ax-xy)$	A10
(13) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$ forma geral: $(x-a)(b-c^2x)+(dx-c^2)(x-a)$	**Não transforma em produto**		A1, A2, A3, A4, A6, A8, A9, P1, P2, P3, P4, P7, P8, P11, P13
	Transforma em produto e não identifica o fator comum		A5, P14
	TA.Correto	$(x-a)(b-c^2-c^2x+dx)$	A7
	TA.Falso	$(x-a)(d-c^2x)(x-x)$	P10

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ALUNOS:

Não transforma a expressão em um produto.

Vários alunos voltaram a cometer este erro, principalmente os que estavam utilizando o *Aplusix,* e ao compararmos com a análise das atividades anteriores observa-se que eles sempre tiveram essa dificuldade, no decorrer da seqüência didática. Na atividade I, por exemplo, na primeira questão, todos os alunos do laboratório resolveram desse modo, viram que havia algo errado e corrigiram, entretanto, a cada nova questão, a primeira tentativa em geral era simplificar a expressão ou reduzir todos os termos.

Durante a realização da seqüência didática os alunos do *Aplusix*, em geral, resolviam corretamente as atividades, talvez mais pela possibilidade de fazer várias tentativas e de deixar ao final somente a resposta correta, entretanto, a cada nova atividade esse erro, em alguns alunos, voltava a aparecer principalmente nas primeiras questões, mostrando a persistência dessa dificuldade.

As pesquisas mostram que esse erro é comum (NOTARI, 2002; BOOTH, 1995) e parece ser resistente, pois apareceu insistentemente nesta atividade, bem como, em algumas das atividades anteriores. E apesar de frizarmos nas discussões e correções que fatorar uma expressão é transformá-la em um produto, alguns alunos parecem ter muita dificuldade em fazer essa relação.

Transforma a expressão em produto e não identifica o fator comum ou não fatora como um produto notável.

O aluno P8 foi o que mais resolveu desse modo esta atividade, ele também apresentou esta resolução insistentemente nas atividades I e II. Nesse caso, parece que o aluno sabe que fatorar é transformar em produto, mas tem dificuldade em saber qual caso de fatoração a expressão dada faz parte; mesmo em atividade com um só tipo de fatoração como as atividades I e II.

Observamos este tipo de resolução em outros alunos principalmente nas questões para fatorar os trinômios quadrados perfeitos, ou a diferença de quadrados, transformando-os nos produtos notáveis, e com os alunos do papel e lápis. Entretanto, grande parte dos alunos que utilizaram esta resolução nesta atividade tentou fatorar como o caso do fator comum em evidência. Acreditamos que esse fato tenha ocorrido em função de apresentarmos todos esses casos de fatoração em separado, nas atividades anteriores, sem muita reflexão das diferenças entre esses tipos de fatoração, e das condições que permitem que sejam realizadas, como faz o ensino usual.

Nas questões que propomos atividades de desenvolvimento antes da fatoração dos produtos notáveis, e novamente seguindo a apresentação do ensino usual, os alunos se saíram melhor. Entretanto, esta atividade realizada como teste mostra que esse resultado é apenas temporário, sendo, portanto insuficiente para uma aprendizagem satisfatória. Lembramos que estávamos somente relembrando a fatoração, e que ela já havia sido apresentada no ano anterior.

Concordamos com Ribeiro (2001) e Notari (2002), quando trazem que o ensino usual prioriza a memorização de várias técnicas e regras, e que isso não garante um rendimento satisfatório dos alunos.

Transforma a expressão em produto e identifica o fator comum ou fatora como um produto notável.

Identificamos alguns dos teoremas já utilizados pelos alunos nas outras atividades, cujas dificuldades citamos nas análises dessas atividades, que são os casos de fatoração:

- do fator comum em evidência os teoremas [T_1] e [T_4];
- dos trinômios quadrados perfeitos os teoremas [T_7] e [T_9];
- da diferença de quadrados os teoremas [T_{11}] e [T_{12}].

Observamos que a partir da questão (6), em que misturamos todos os casos de fatoração, os alunos tiveram mais dificuldade em resolver a (2ª) tarefa que listamos na análise prévia: identificar o fator comum (no caso da fatoração do fator comum em evidência) ou fatorar como um produto notável (no caso dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados).

Nesta atividade o aluno A1 foi o que teve um melhor desempenho, seguido pelo P5, eles foram os que mais utilizaram teoremas em ação corretos. Eles resolveram corretamente a maioria das questões, o A1 só não conseguiu as questões (9) e (13) e o P5 as questões (6), (10) e (13).

Observamos que os alunos A1, A2 e A4, do *Aplusix,* se saíram melhor nas questões para fatorar os trinômios quadrados perfeitos desta atividade. E nas atividades V e VII que eram para fatorar esses casos de trinômios eles tiveram dificuldades, e utilizaram teoremas em ação falsos, algumas vezes fizeram tentativas até acertar.

Nesses casos, parece que as retroações do *Aplusix* representaram um fator positivo para esses alunos. Entretanto, temos exemplos de alunos que tiveram dúvidas nas atividades anteriores, fizeram tentativas de resolução até conseguir fatorar corretamente, e na maioria das vezes conseguia apresentar ao final a resposta correta. Entretanto, nesta atividade X realizada como teste esses alunos voltaram a não transformar em produto, os alunos A6, A8 e A9 são alguns desses casos. Parece que alguns alunos faziam tentativas sem muita reflexão, ou tinham muita dificuldade. Lembramos, que a nossa seqüência que não tínhamos a intenção de aprendizagem, pretendíamos somente identificar os teoremas em ação utilizados pelos alunos e verificar se persitiam no decorrer das atividades.

Contudo, conseguimos observar algumas diferenças entre os ambientes papel e lápis e *Aplusix*, uma delas é que no papel e lápis os alunos não mudam muito o tipo de resolução no decorrer das atividades, já no *Aplusix* eles mudam mais vezes o tipo de resolução. Por exemplo, um aluno que resolvia a primeira questão não transformando em produto no decorrer da atividade acabava mudando, algumas vezes utilizava teoremas em ação falsos ou corretos. Além disso, os alunos do papel e lápis não faziam, em geral, mais de uma tentativa para resover as questões e os do *Aplusix* fizeram várias tentativas e, como já dissemos, algumas vezes até conseguir resolver corretamente.

5.1.4 Síntese dos Teoremas em Ação Utilizados nas Atividades dos Grupos 1 e 2 e no Teste

Na tabela 19, apresentamos uma síntese dos teoremas em ação utilizados pelos alunos em todas as atividades, com o objetivo de verificar se eles persistiram na atividade X.

Tabela 19

Teoremas em ação utilizados pelos alunos em todas as atividades

		Teoremas em ação falsos	
Aluno	**Atividade**	**Nº da questão e nº do teorema**	**Quantidade de vezes utilizada**
A1	I	(3) [T_4]	[T_1] uma vez [T_4] uma vez [T_7] uma vez [T_{10}] uma vez [T_{13}] uma vez
	VII	(2) [T_{13}], (2) [T_7]	
	IX	(1) [T_{10}]	
	X	(2) [T_1]	
A2	II	(2) [T_1],(5) [T_1], (6) [T_1], (6) [T_1]	[T_1] quatro vezes [T_6] uma vez [T_7] seis vezes [T_{13}] três vezes
	V	(2) [T_6]	
	VII	(2) [T_{13}], (2) [T_{13}], (2) [T_7], (2) [T_7] (2) [T_7], (3) [T_7], (5) [T_{13}], (5) [T_7]	
	X	(6) [T_7]	
A3	IX	(6) [T_{11}], (6) [T_{12}]	[T_{11}] uma vez [T_{12}] uma vez
A4	I	(2) [T_4], (6) [T_1], (6) [T_1], (7) [T_{15}], (7) [T_4]	[T_1] duas vezes

	V	(8) [T_9], (3) [T_9]	[T_4] duas vezes [T_7] duas vezes [T_9] duas vezes [T_{12}] uma vez [T_{15}] uma vez
	VII	(2) [T_7], (5) [T_7]	
	IX	(1) [T_{12}]	
A5	I	(2) [T_4];(3) [T_4] ;	[T_4] três vezes [T_7] uma vez [T_{15}] uma vez
	II	(1) [T_{15}]; (8) [T_4]	
	VII	(2) [T_7]	
A6	I	(2) [T_4]	[T_1] duas vezes [T_4] uma vez [T_7] quatro vezes [T_9] duas vezes [T_{12}] duas vezes [T_{13}] quatro vezes
	II	(2) [T_1]	
	V	(6) [T_{13}], (6) [T_{13}], (8) [T_9]	
	VII	(2) [T_{13}], (2) [T_{13}], (2) [T_7], (2) [T_7] (2) [T_7], (3) [T_9], (5) [T_7]	
	IX	(1) [T_{12}], (1) [T_{12}]	
	X	(2) [T_1]	
A7	I	(3) [T_1]	[T_1] uma vez [T_5] uma vez [T_9] uma vez [T_{11}] três vezes
	V	(2) [T_5]	
	VII	(6) [T_9]	
	IX	(1) [T_{11}], (2) [T_{11}], (3) [T_{11}]	
A8	I	(3) [T_1]; (3) [T_1]	[T_1] três vezes [T_5] uma vez [T_6] uma vez [T_7] três vezes [T_9] uma vez [T_{12}] duas vezes [T_{13}] duas vezes [T_{15}] uma vez
	II	(2) [T_1] ; (2) [T_{15}]	
	V	(2) [T_6], (2) [T_5], (3) [T_9]	
	VII	(5) [T_{13}], (5) [T_{13}], (5) [T_7], (5) [T_7] (5) [T_7]	
	IX	(1) [T_{12}], (6) [T_{12}]	
A9	I	(4) [T_{14}] ; (7) [T_1];	[T_1] duas vezes [T_4] uma vez [T_5] duas vezes [T_7] duas vezes [T_{11}] três vezes [T_{14}] cinco vezes
	II	(4) [T_4] ; (5) [T_1], (5) [T_{14}] (5) [T_{14}] ;(7) [T_{14}] ; (8) [T_{14}]	
	VII	(1) [T_7], (2) [T_7], (3) [T_5], (7) [T_5]	
	IX	(1) [T_{11}],	
	X	(4) [T_{11}], (4) [T_{11}]	
A10	II	(2) [T_1]	[T_1] uma vez [T_5] uma vez [T_6] uma vez [T_{12}] sete vezes
	V	(2) [T_6]	
	VII	(2) [T_5]	
	IX	(6) [T_{12}], (7) [T_{12}], (7) [T_{12}], (7) [T_{12}], (7) [T_{12}], (10) [T_{12}]	
	X	(4) [T_{12}]	
P1	I	(2) [T_4], (3) [T_4], (7) [T_4], (8) [T_4]	[T_4] sete vezes [T_{11}] duas vezes [T_{14}] uma vez
	II	(1) [T_4], (2) [T_4], (3) [T_{14}]	
	IX	(5) [T_{11}], (6) [T_{11}]	
	X	(5) [T_4]	
P2	III	(5) [T_{16}]	[T_1] duas vezes [T_5] cinco vezes [T_{12}] duas vezes [T_{13}] uma vez [T_{16}] uma vez
	VII	(3) [T_5], (4) [T_5], (5) [T_{13}], (7) [T_5] (8) [T_5], (9) [T_5]	
	IX	(7) [T_{12}], (10) [T_{12}]	
	X	(1) [T_1], (2) [T_1]	
P3	VII	(7) [T_7]	[T_1] uma vez [T_7] uma vez [T_{12}] seis vezes
	IX	(3) [T_{12}], (6) [T_{12}], (7) [T_{12}], (8) [T_{12}] (9) [T_{12}], (10) [T_{12}]	
	X	(2) [T_1]	
P4	I	(5) [T_1], (8) [T_1]	[T_1] quatro vezes

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>II</td><td>(1) [T_4], (8) [T_1]</td><td rowspan="3">[T_4] uma vez
[T_5] uma vez
[T_7] uma vez</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(2) [T_7], (8) [T_5]</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(5) [T_1]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">P5</td><td>V</td><td>(6) [T_{13}], (8) [T_{13}]</td><td rowspan="3">[T_7] quatro vezes
[T_{13}] duas vezes</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(2) [T_7], (5) [T_7]</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(6) [T_7], (10) [T_7]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P6</td><td>IX</td><td>(1) [T_{10}], (2) [T_{10}]</td><td rowspan="2">[T_7] uma vez
[T_9] uma vez
[T_{10}] duas vezes</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(10) [T_7], (10) [T_9]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P7</td><td>V</td><td>(5) [T_9], (6) [T_{13}], (8) [T_{13}]</td><td rowspan="2">[T_7] uma vez
[T_9] uma vez
[T_{13}] duas vezes</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(12) [T_7]</td></tr>
<tr><td rowspan="5">P8</td><td>II</td><td>(1) [T_4]</td><td rowspan="5">[T_1] uma vez
[T_4] uma vez
[T_6] duas vezes
[T_7] uma vez
[T_9] uma vez
[T_{10}] uma vez
[T_{13}] três vezes</td></tr>
<tr><td>V</td><td>(2) [T_6], (3) [T_9], (4) [T_6], (8) [T_{13}]</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(2) [T_{13}], (5) [T_{13}], (5) [T_7]</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>(6) [T_{10}]</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(1) [T_1]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">P9</td><td>III</td><td>(6) [T_{16}]; (7) [T_{16}]</td><td rowspan="3">[T_6] duas vezes
[T_7] três vezes
[T_9] duas vezes
[T_{16}] duas vezes</td></tr>
<tr><td>V</td><td>(4) [T_6], (7) [T_6]</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(2) [T_7], (2) [T_9], (5) [T_7], (6) [T_7],
(6) [T_9]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">P10</td><td>III</td><td>(5) [T_{16}]; (6) [T_{16}]; (7) [T_{16}]</td><td rowspan="2">[T_{16}] três vezes
[T_{13}] duas vezes</td></tr>
<tr><td>V</td><td>(6) [T_{13}], (8) [T_{13}]</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P11</td><td>I</td><td>(8) [T_1]</td><td rowspan="4">[T_1] duas vezes
[T_{16}] três vezes
[T_5] duas vezes</td></tr>
<tr><td>II</td><td>(8) [T_1]</td></tr>
<tr><td>III</td><td>(5) [T_{16}]; (6) [T_{16}]; (7) [T_{16}]</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(3) [T_5], (8) [T_5]</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P12</td><td>I</td><td>(2) [T_4]; (3) [T_4]; (5) [T_1]</td><td rowspan="4">[T_1] uma vez
[T_4] duas vezes
[T_{15}] oito vezes
[T_6] duas vezes
[T_7] uma vez
[T_9] três vezes
[T_{12}] cinco vezes
[T_{13}] uma vez</td></tr>
<tr><td>II</td><td>(1)-(8) [T_{15}]</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(3) [T_9], (4) [T_6], (5) [T_{13}], (5) [T_7]
(6) [T_9], (7) [T_6], (9) [T_9]</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>(6) [T_{12}], (7) [T_{12}], (8) [T_{12}], (9) [T_{12}],
(10) [T_{12}]</td></tr>
<tr><td rowspan="5">P13</td><td>I</td><td>(7) [T_{14}]</td><td rowspan="5">[T_4] uma vez
[T_5] duas vezes
[T_7] duas vezes
[T_{13}] duas vezes
[T_{14}] uma vez
[T_{16}] uma vez</td></tr>
<tr><td>III</td><td>(5) [T_{16}]</td></tr>
<tr><td>V</td><td>(6) [T_{13}], (8) [T_{13}]</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(2) [T_7], (3) [T_5], (5) [T_7], (8) [T_5]</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(1) [T_4]</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P14</td><td>V</td><td>(1) [T_5], (3) [T_9], (4) [T_5], (7) [T_5]</td><td rowspan="4">[T_1] duas vezes
[T_5] seis vezes
[T_6] uma vez
[T_9] uma vez
[T_{10}] nove vezes
[T_{12}] sete vezes</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(4) [T_6], (6) [T_5], (7) [T_5], (8) [T_5]</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>(2) [T_{10}], (2) [T_{12}], (3) [T_{10}], (3) [T_{12}]
(4) [T_{10}], (5) [T_{10}], (6) [T_{10}], (6) [T_{12}]
(7) [T_{10}], (7) [T_{12}], (8) [T_{10}], (8) [T_{12}]
(9) [T_{10}], (9) [T_{12}], (10) [T_{10}], (10) [T_{12}]</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(1), [T_1], (3) [T_1]</td></tr>
<tr><td rowspan="4">P15</td><td>V</td><td>(2) [T_5], (3) [T_5], (5) [T_5], (6) [T_5],(7) [T_6]</td><td rowspan="4">[T_1] uma vez
[T_5] seis vezes
[T_6] duas vezes
[T_7] cinco vezes
[T_9] uma vez
[T_{11}] nove vezes</td></tr>
<tr><td>VII</td><td>(2) [T_7], (4) [T_6], (4) [T_7], (5) [T_7], (6) [T_7]
(6) [T_9], (7) [T_5], (8) [T_5], (8) [T_7],</td></tr>
<tr><td>IX</td><td>(2) [T_{11}], (3) [T_{11}], (4) [T_{11}], (5) [T_{11}], (6) [T_{11}]
(7) [T_{11}], (8) [T_{11}], (9) [T_{11}], (10) [T_{11}]</td></tr>
<tr><td>X</td><td>(1) [T_1]</td></tr>
</table>

Conseguimos observar poucas reutilizações dos teoremas identificados nas outras atividades. Dentre os alunos que utilizaram teoremas em ação mais de cinco vezes nas outras atividades e voltaram a fazer uso no teste aplicado ao final, destacamos:

- O aluno A2 que utilizou o teorema em ação falso [T_7], na atividade VII, cinco vezes e voltou a utilizá-lo uma vez no teste. O interessante é que no teste ele não tinha retroações disponíveis, mas utilizou esse teorema falso e, por algum motivo, percebeu que estava errado e ao final utilizou o teorema em ação correto. Acreditamos que nesse caso talvez fosse em função das retroações disponibilizadas no *Aplusix* na atividade VII, pois nas vezes em que utilizou esse teorema em ação falso naquela atividade, ele fez tentativas até conseguir acertar no final. Desse modo, parece que ao fazer essas tentativas, ele refletia sobre o que estava fazendo, o que talvez tenha feito com que percebesse o erro no teste, atividade X, para poder corrigir.
- O aluno A10 que utilizou o teorema [T_{12}] seis vezes e voltou a utilizá-lo no teste uma vez. Nesse caso, ele parece ter dificuldade em extrair a raiz quadrada dos quadrados perfeitos, tanto de números como 4, ou como 16, como também de números multiplicado por x^2, no caso $4x^2$. Apesar de não ter conseguido utilizar o teorema em ação correto na atividade X, este aluno foi o único que tentou fatorar a diferença de quadrados transformando em um produto da soma pela diferença de dois termos.
- O aluno P1 que utilizou o teorema [T_4] seis vezes e voltou a utilizá-lo no teste uma vez. Nesse caso, ele consegue identificar o fator comum, mas só faz a divisão desse fator pelo primeiro termo da expressão, o segundo termo ele somente repete dentro dos parênteses. Como já havíamos dito, nas análises do grupo 1, este aluno utiliza esse caminho para fatorar e para distribuir o produto ao final (figura 10).

Ficou difícil de verificar a persistência dos teoremas em ação na última atividade, pois muitos alunos deixaram várias questões sem responder, alguns diziam que estavam cansados de resolver atividades desses tipos.

No próximo capítulo fazemos a nossas considerações finais sobre as análises realizadas nas atividades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo inicial do nosso trabalho era estudar dificuldades na aprendizagem da fatoração. Para isso decidimos identificar teoremas em ação (VERGNAUD, 1990) utilizados pelos alunos ao resolver as atividades de fatoração.

Buscamos listar os conhecimentos envolvidos na construção do conceito de fatoração, objeto de nosso estudo, para melhor compreender as dificuldades existentes na sua formação e no seu desenvolvimento por parte do aluno. Observamos, nas análises dos livros didáticos, que o ensino usual prioriza a multiplicação algébrica na apresentação desse conceito. Entretanto, o campo conceitual da fatoração algébrica é composto por vários outros conceitos, como: divisão e multiplicação numérica e algébrica, fatoração numérica, fator comum de uma expressão, redução de termos semelhantes, quadrado perfeito, raiz quadrada, dentre outros; e apesar de alguns desses conceitos serem interligados, como a divisão e a multiplicação, o ensino, em geral, não faz esta relação.

O ensino usual apresenta a fatoração a partir da sétima série do Ensino Fundamental, logo após as operações algébricas: redução de termos semelhantes, divisão e multiplicação de polinômios. Em seguida são apresentados os produtos notáveis, os casos de fatoração do fator comum em evidência e a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados. Ou seja, a fatoração é apresentada logo em seguida a alguns dos conceitos que fazem parte da sua construção. E para Vergnaud (1990) a aprendizagem de um conceito é um processo longo, que pode levar muitos anos, e não é feita assim de imediato como se espera usualmente, em que se ensina um conceito para logo em seguida utilizá-lo para estudar outro, e, muitas vezes não mais se voltam a esse conceito.

De fato, segundo Lima (2001) a fatoração é quase esquecida nos anos após o seu estudo, não sendo aplicada em várias situações que ele considera pertinente. Em particular, cita a aplicação da fatoração dos trinômios quadrados perfeitos (para completar quadrados) e no estudo da equação da circunferência. Aliás, no ensino da função do segundo grau “O método de completar quadrados, instrumento essencial para o estudo deste tópico, não é usado e nem ao menos mencionado". (LIMA, 2001, p.464).

Além disso, a fatoração é apresentada, na maioria das vezes, de maneira compartimentada, cada caso de fatoração em separado, as expressões são apresentadas com uma mesma forma. Não são propostas atividade com os vários casos de fatoração, em que o aluno precise refletir, analisar cada expressão para verificar se se trata de um trinômio quadrado perfeito, ou de uma diferença de quadrados, ou ainda do caso do fator comum em evidência.

Na aplicação da seqüência didática conseguimos observar diversas dificuldades na aprendizagem da fatoração, relacionadas, na maioria das vezes, aos conhecimentos envolvidos na formação desse conceito. Algumas dessas dificuldades já tinham sido observadas em outras pesquisas como a fatoração de um número inteiro e a utilização da propriedade distributiva da multiplicação.

Na fatoração colocando fator comum em evidência conseguimos identificar diversos teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos ao resolver as questões. Alguns deles persistiram nas resoluções de alguns alunos, em que pudemos observar mais detalhadamente quais as principais dificuldades apresentadas.

Observamos que muitos alunos têm dificuldade em identificar o fator comum máximo para colocar em evidência, seja esse fator um número ou um monômio. Essa dificuldade se torna maior quando o fator é um binômio. Além disso, muitos não conseguem fazer a divisão de todos os termos da expressão pelo fator comum identificado. O teorema em ação falso [T_1] $ax^2+ax \rightarrow ax(x+a)$, bastante utilizado pelos alunos, representa um desses casos.

Temos ainda, situações em que os alunos não fazem a divisão do segundo termo pelo fator comum identificado e utilizam o teorema em ação falso [T_4] $ax^2+ax \rightarrow ax(x+ax)$. Acreditamos que essas dificuldades podem estar relacionadas também com dificuldades na multiplicação de monômios, pois vimos que muitos alunos utilizam esse teorema para fatorar e cometem o mesmo erro ao fazerem a distribuição dos produtos $ax(x+ax)=ax^2+ax$. Esse é um erro comum observado em outras pesquisas (MARQUIS, 1995; RIBEIRO, 2001).

Na fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados observamos também muitas dificuldades. Os alunos, em geral, tentam fatorar utilizando as regras que são apresentadas para esses casos de fatoração. Quando têm de resolver situações de distribuição de produtos para se chegar a essas regras apresentam dificuldades, que vão desde a multiplicação de monômios até a redução de termos semelhantes. Identificamos alguns teoremas em ação falsos mobilizados por eles para fatorar as expressões que representam a tentativa de utilização dessa regra de maneira incorreta: [T_5] $x^2+2ax+a^2 \rightarrow (x+2a)^2$ e [T_{13}] $b^2+a^2x^2+2abx \rightarrow (b+ax)^2$.

Além disso, muitas dificuldades estão relacionadas com a utilização dos conceitos envolvidos na sua apresentação. Alguns alunos não conseguem extrair a raiz quadrada de termos que são quadrados perfeitos, e algumas vezes tentam extrair a raiz de termos que não são quadrados perfeitos.

Gostaríamos ainda de salientar que nosso estudo sobre teoremas em ação considerou somente as resoluções dos alunos nas atividades, fossem elas nas fichas ou nas gravações com o *software*. Apesar do *Aplusix* nos possibilitar verificar várias resoluções dos alunos, temos apenas uma visão parcial do raciocínio do aluno.

Buscamos ainda em nosso estudo avaliar a utilização do *software Aplusix* em comparação ao papel e lápis. Observamos que, com ele, os alunos se mostraram mais motivados a fazerem várias tentativas de resolução das atividades em função das retroações que ele oferece. E, em geral, esses alunos mudaram mais a maneira de resolver as atividades. O *videocassete*, como previmos, nos possibilitou um maior acesso às resoluções dos alunos, em que observamos que alguns, apesar de apresentarem teoremas em ação corretos nas respostas finais, tiveram muitas dificuldades e fizeram uso de vários teoremas em ação falsos no decorrer das atividades.

De fato, no laboratório observamos que alguns alunos que nas primeiras atividades não conseguiam utilizar teoremas corretos, com as retroações do *software* e as discussões, passaram a apresentar teoremas em ação corretos em algumas atividades. Contudo, essas dificuldades parecem ser resistentes, pois na atividade X realizada como um teste, a maioria não conseguiu utilizar o teorema em ação correto.

Em alguns casos, pode ser, como já dissemos anteriomente, não somente por ser uma dificuldade resistente, mas também pelo fato de alguns alunos terem feito tentativas sem muita reflexão do que faziam, tendo uma melhora “aparente” nas atividades.

A intenção da nossa pesquisa era justamente testar a resistência dos teoremas em ação, o que foi possível fazer conforme as análises dos dados nos mostra. Porém, em uma situação de aprendizagem normal acreditamos que o *Aplusix* pode ser usado de forma a contribuir com a construção do conhecimento. O *software* poderia ser integrado às atividades quotidianas das aulas de Matemática cabendo ao professor o papel de mediador nesse processo.

Em nosso estudo observamos também que muitos alunos não relacionam a fatoração a um produto de fatores, tanto no teste diagnóstico como na seqüência didática. Mesmo isso sendo enfatizado durante toda a aplicação da seqüência, esse tipo de resolução persistiu em todas as atividades. Acreditamos ser um bom tema para pesquisas futuras: investigar qual a concepção dos alunos com relação a fatoração e o que eles entendem como sendo um produto de fatores.

A partir disso e das conclusões obtidas com essa pesquisa acreditamos que seria importante trabalhar a fatoração observando alguns aspectos como:

- lembrar a fatoração de números inteiros na apresentação da fatoração, não somente com exemplos, mas também em atividades para os alunos, em que dado o número 90 o aluno deva fatorá-lo para obter $2.3^2.5$;
- trabalhar situações em que o aluno tenha que identificar o fator comum e reescrever a expressão com esse fator explícito, antes de fazer a divisão de cada termo;
- propor situações de fatoração enfatizando a divisão de monômios de cada termo, e ao final indicar a distribuição dos termos para verificar se está correto, e novamente não só com exemplos, como também, com atividades propostas aos alunos. Relacionando, sempre que possível, a divisão com a multiplicação de modo a dar sentido às indicações propostas nos livros didáticos;
- repensar a necessidade de se apresentar todos os casos de fatoração na sétima série, lembrando que a maior parte deles só será aplicada na oitava série;
- trabalhar a fatoração dos produtos notáveis relacionando a sua distribuição e redução de termos semelhantes junto com o resultado que os livros didáticos denominam de “padrão”. Evidenciar todos os termos que compõem o trinômio quadrado perfeito;
- trabalhar sempre que possível com os trinômios quadrados perfeitos em diversas ordens, evidenciando o que são cada termo dessas expressões.
- propor atividades em que os alunos identifiquem dentre várias expressões algébricas quais são trinômios quadrados perfeitos.

- Propor atividades com todos os casos de fatoração, em que o aluno tenha de identificar qual o tipo de fatoração as expressões fazem parte, como também, se é possível de fatorar a expressão dada.

Finalmente, ao término desse trabalho temos a satisfação de ter conseguido atingir nossos objetivos, identificar algumas dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas. Entretanto, nas análises várias questões surgiram como, por exemplo, a necessidade de um estudo mais aprofundado em relação aos erros observados na tentativa de extrair a raiz quadrada dos termos das expressões, na fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados. Desse modo, sentimos um misto de encerramento e vontade de continuar. Enfim, de um recomeço.

.

ANEXO 1

TESTE DIAGNÓSTICO

TABELAS I, II, III E IV DO TESTE DIAGNÓSTICO.

TESTE DIAGNÓSTICO

Questões:

1. Fatore: $2x^2 + 2x$

2. Fatore $x^2 - 4x$

3. Fatore: $x^2 - 16$

4. Fatore: $x^2 + 4x + 4$

5. Fatore: $5(x-1) - (x+2)(x-1)^2$

6. Fatore: $(1+x)(1-x) - (1+x)^2$

7. Fatore: $(x-2)(x+1) + 3(x+1)$

8. Fatore: $(x-2)^2 + x^2 - 4$

9. Fatore: $(x+1)(x+2) + (x+2)(x-3)$

10. Fatore: $4x^2 - 4x + 1$

11. Fatore: $x^2 - 2x + 1$

12. Fatore: $(x+2)^2 + (x+2)(x-2)$

TABELA I – TESTE DIAGNÓSTICO

	Exercícios												
Aluno	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**Diagnóstico parcial**
01	A	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	E	E	E	Parece tentar fatorar. Distribui os produtos.
02	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui todos os produtos errados.
03	E	E	E	O	E	O	O	O	O	O	O	O	Distribuiu certo a (5).
04	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	N	N	N	Distribui certos todos produtos.
05	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	Eq	Distribui certo só errou com sinal negativo.
06	E	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	E	Eq	Distribui certo só errou com sinal negativo.
07	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Distribui todos errados.
08	Eq	Eq	E	Eq	E	E	E	E	E	Eq	E	E	- - -
09	E	E	E	E	E	E	Eq	Eq	O	E	E	E	- - -
10	E	E	E	O	E	E	O	E	E	E	O	E	Distribui as que têm produto errado.
11	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.
12	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	- - -
13	A	A	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto errado, mas certo $(x+a)^2$
14	E	E	E	E	E	E	O	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto errado.
15	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto errado.
16	Eq	E	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	O	Eq	E	Eq	Distribui as que têm produto, alguns certos.
17	E	E	E	E	E	E	E	O	E	E	E	E	- - -
18	Eq	Eq	Eq	Eq	E	E	E	E	E	E	Eq	E	Distribui as que têm produto errado.
19	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.
20	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	E	Eq	E	Eq	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.
21	Eq	Eq	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.
22	E	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	E	Eq	Distribui as que têm produto, alguns certos.
23	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	N	N	Distribui as que têm produto errado.
24	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	N	Distribui as que têm produto errado.
25	O	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Parece tentar fatorar, mas distribui as que têm produtos.
26	E	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	N	N	Distribui as que têm produto errado.
27	E	E	E	E	Eq	Eq	E	Eq	O	E	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado, e certo $(x+a)^2$.
28	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.
29	Eq	O	N	O	E	E	E	E	E	O	N	E	Distribui as que têm produto errado.
30	E	E	E	E	O	E	E	E	N	E	E	E	Distribui as que têm produto errado.
31	Eq	E	E	E	E	E	E	E	E	Eq	Eq	E	Distribui as que têm produto errado.
32	E	E	E	O	E	E	E	O	E	O	E	O	Distribui as que têm produto errado.
33	E	A	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	A (2) fatorou e depois distribuiu, os produtos também dist.
34	E	Eq	O	Eq	Eq	O	Eq	O	O	E	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.

35	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto, alguns certo.
36	Eq	Eq	Eq	E	O	E	O	Eq	Eq	Eq	Eq	O	Distribui as que têm produto errado.
37	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Reduz tudo a um termo.
38	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produtos, alguns certo.
39	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui e reduz tudo a um termo.
40	A	E	O	E	E	E	E	E	E	O	O	E	Parece tentar fatorar, mas distribui as que têm produto.
41	E	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	O	Eq	Eq	Eq	Distribui e reduz a um só termo algumas das questões.
42	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto errado, e certo $(x+a)^2$ e $(x-a)^2$
43	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	Eq	Eq	Eq	N	Distribui as que têm produto errado.
44	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui e reduz tudo a um só termo
45	E	E	E	E	E	E	E	E	Eq	Eq	E	Eq	Distribui as que têm produto, alguns certos $(x+a)^2$ e $(x-a)^2$.
46	E	E	E	E	E	E	E	O	E	E	E	E	Distribui, e reduz a um só termo.
47	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	Eq	E	Eq	Eq	Eq	E	Distribui as que têm produto errado.
48	Eq	E	E	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	E	Eq	Eq	O	- - -
49	Eq	Eq	Eq	Eq	O	O	O	N	N	E	E	N	- - -
50	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto, alguns certo.
51	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Eq	Distribui as que têm produto errado.
52	Eq	Eq	Eq	Eq	E	E	Eq	Eq	E	Eq	Eq	E	Distribui as que têm produto errado.
53	E	E	Eq	E	E	E	E	E	E	E	E	E	Distribui as que têm produto errado.
54	E	E	E	Eq	E	E	E	N	N	N	N	N	Distribui as que têm produto errado.

LEGENDA:
A: acerta.
E: erra.
Eq: transforma em equação.
O: só olha não faz nada
N: não abre.

Obs: As questões que foram distribuídas pelos alunos são: (5), (6), (7), (8), (9) e (12), em que apareciam alguns produtos para serem fatorados colocando o fator comum em evidência, sendo que nesses casos os fatores eram binômios.

TABELA II – TESTE DIAGNÓSTICO

Nesta tabela relacionamos erros relativos à distribuição e a fatoração de expressões algébricas. Os referentes à fatoração foram utilizados uma vez pelos alunos relacionados na tabela.

Expressão algébrica	Erros relacionados	Alunos
$(x+a)^2$	x^2+a^2	05;18;19;22;29;33;35;40;44;53
	$x+a+x+a$	21;
	$x^2+2ax+ax$	25;
	$x+a^2$	39;
	x^2+ax	50;
$(a+x)^2$	a^2+2x	01;05
	$x+x^2$	43
x^2-a^2x	$x(x-a)$	25 (uma vez)
	$x(x+a)$	25 (uma vez)
ax^2+ax	$ax(x+a)$	40 (uma vez)
x^2-a^2	$x(a-x)$	25 (uma vez)
	$(x+a)(x+a)$	40 (uma vez)
	$x(x+a^2)$	33 (uma vez)
$(x-a)^2$	x^2+ax	01.
	x^2-a^2	05;15;18;19;22;29;33;40;43;53
	x^2-ax+a^2	10.
	$x^2+2ax+a^2$	13;27
	$x-a+x-a$	21.
	$2x+2a$ ou $2x-2a$	28.
	x^2+a^2	35;38
	$x-a^2$	39;
	$x^2+2ax-a^2$	50;
$x^2+2ax+a^2$	$(x+a)+(x+a)$	25;
	$(x+a^2)(x+a^2)$	40 (uma vez)

TABELA III – TESTE DIAGNÓSTICO

Nesta, listamos alguns erros observados no teste diagnóstico, na primeira coluna estão os erros observados, na segunda os alunos e os números das questões em que ele cometeu o erro. Por exemplo, o primeiro item da primeira coluna trás o erro em que o aluno relaciona x^2 com $2x$, temos relacionado a esse erro na segunda coluna o aluno 02 que cometeu esse erro nas questões (1), (2), (3) e (4), na tabela aparece como: 02 [1,2,3,4].

Erros variados	**Número do aluno [nºs.dos exercícios em que ocorreram os erros]**
multiplica o x pelo expoente, levando x^2 em $2x$	01 [08]; 02 [1,2,3,4]; 05 [2,3,4,11]; 07 [1,2,3]; 08 [1,10]; 09 [1]; 14 [1,12]; 19 [1]; 21 [1,2,3,4,8]; 22 [1]; 24 [1,2,3,4,10]; 27 [8]; 28 [1,3]; 30 [1,2,3,4,8,10,11]; 32 [1,2,3,7,11]; 36 [1,2,3,10,11]; 43 [2]; 46 [1,10,11]; 48 [1]; 49 [1]; 52 [1,2,3,4,11]; 54 [1];
Soma x com x^2 ou com números	01 [8]; 02 [2,3,4,5,7,8,9,10,11,12]; 03 [1,2]; 06 [1,2,3]; 09 [8,10]; 10 [2]; 12[1]; 14 [2,3,4,5,6,8,10,11]; 15 [11,12]; 16 [2,3,4,10,11] 17 [1]; 22 [2,3]; 26[1]; 28 [3,5,7,8,11]; 30 [1,2,3,4,5]; 31 [2]; 33 [4,10,11]; 36 [10,11]; 37 [1,2,3,4]; 41 [1,2];44 [1,10,11]; 48 [2,4]; 52 [4,11];
soma os expoentes e as vezes os nrs.	10 [1]; 27 [1,2,3,4]; 31 [1,4]; 38 [1,2];

TABELA IV – TESTE DIAGNÓSTICO

Erros de desenvolvimento dos produtos notáveis observados no teste diagnóstico.

DESENVOLVIMENTO DOS PRODUTOS NOTÁVEIS	
CORRETO	**INCORRETO**
$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$	$(x+a)^2 \rightarrow x^2+a^2$
	$(x+a)^2 \rightarrow x^2+ax$
	$(x+a)^2 \rightarrow (x+a)+(x+a)$
	$(x+a)^2 \rightarrow x+a^2$
	$(x+a)^2 \rightarrow x^2+2ax+ax$
$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$	$(x-a)^2 \rightarrow 2x+2$ª
	$(x-a)^2 \rightarrow x-a^2$
	$(x-a)^2 \rightarrow x^2-a^2$
	$(x-a)^2 \rightarrow x^2+ax$
	$(x-a)^2 \rightarrow x^2+a^2$
	$(x-a)^2 \rightarrow 2x-2$ª
	$(x-a)^2 \rightarrow x^2+2ax+a^2$
	$(x-a)^2 \rightarrow x^2+2ax-a^2$
	$(x-a)^2 \rightarrow x^2-ax+a^2$
	$(x-a)^2 \rightarrow (x-a)+(x-a)$
$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$	$(a+x)^2 \rightarrow a^2+2x$
	$(a+x)^2 \rightarrow x+x^2$

ANEXO 2

ATIVIDADES DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Atividade I

Fatore os polinômios, colocando em evidência o fator comum em cada um deles. Depois, faça a verificação desenvolvendo o produto encontrado.

1) $8x+8y$

2) $2x^2+2$

3) $2x-14$

4) $9-21x$

5) $21x+14$

6) $15-12x$

7) $4x-4$

8) $32+8x$

Atividade II

Fatore os polinômios, colocando em evidência o fator comum em cada um deles. Depois, faça a verificação desenvolvendo o produto encontrado.

1) x^2+x

2) $2x+2x^2$

3) $x-2x^2$

4) $8x+x^2$

5) $4x^2-16x$

6) $12x^2-15x$

7) $17x-2x^2$

8) $4x-8x^2$

Atividade III

Fatore os polinômios:

1) $x(x+2)+3(x+2)$

2) $(x-4)+x(x-4)$

3) $x(x+7)-2x(x+7)$

4) $(x+1)(x-3)+2(x+1)$

5) $(3x+7)(2x-4)+(5x+8)(3x+7)$

6) $(3x+5)(x+1)-(x+1)(2x+4)$

7) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$

Atividade IV

Escreva a expressão na forma de produto, e em seguida desenvolva estes produtos:

1) $(x+1)^2$

2) $(2+x)^2$

3) $(x+3)^2$

4) $(3+2x)^2$

5) $(5x+3)^2$

6) $(a+b)^2$

Atividade V

Use o resultado da atividade anterior para fatorar os polinômios:

1) x^2+2x+1

2) $x^2+8x+16$

3) $16+16x+4x^2$

4) x^2+4x+4

5) $9x^2+6x+1$

6) $24x+9x^2+16$

7) $x^2+20x+100$

8) $4+4x^2+8x$

Atividade VI

Desenvolva as expressões seguintes e reduza os termos semelhantes.

1) $(x-1)^2$

2) $(3x-2)^2$

3) $(x-5)^2$

4) $(x-y)^2$

5) $(a-3b)^2$

Atividade VII

Use o resultado da atividade anterior para fatorar os polinômios:

1) x^2-2x+1

2) $4x^2+1-4x$

3) $y^2-6xy+9x^2$

4) x^2-4x+4

5) $1+9x^2-6x$

6) $25x^2-20x+4$

7) $49-14x+x^2$

8) $x^2-2xy+y^2$

9) $1-10x+25x^2$

Atividade VIII

Desenvolva os produtos:

1)$(x+1)(x-1)$

2) $(1-2x)(1+2x)$

3) $(x-3)(x+3)$

4) $(a-b)(a+b)$

5) $(3x-5)(3x+5)$

6) $(ax-by)(ax+by)$

Atividade IX

Use o resultado da atividade anterior para fatorar os polinômios:

1) x^2-4

2) $36-x^2$

3) $9x^2-1$

4) x^2-y^2

5) $1-x^2$

6) $1-4x^2$

7) $9x^2-16$

8) $100x^2-16$

9) $4x^2-y^2$

10) $16x^2-9$

Atividade X

Fatore os polinômios:

1) x^2+2x

2) $7x+21x^2$

3) $15x^2+12x$

4) $4x^2-4$

5) $4x^2-x$

6) $x^2-2xy+y^2$

7) x^2+2x+1

8) $x(x-1)+2(x-1)$

9) $(8x-5)(6x+3)+(8x-5)$

10) $4x^2-4x+1$

11) $10xy+x^2+25y^2$

12) $3x^2+xy$

13) $(x-3)(1-4x)-(5x-4)(x-3)$

ANEXO 3

TABELAS I, II E III RESOLUÇÃO DOS ALUNOS NAS ATIVIDADES DE DESENVOLVIMENTO.

Tabela I

Resoluções dos alunos na atividade IV

	Questões da Atividade IV		
Aluno	**Distribuiu certo**	**Distribuiu errado**	**Deixou em branco ou não abriu**
A1	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A2	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A3	(1)(2)(3)		(4)(5)(6)
A4	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A5	(1) (2)	(3) (4) (5) (6)	
A6	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A7	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A8	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A9	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A10	(1)	(2)	(3) (4) (5) (6)
P1	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P2	(1) (6)	(2) (3) (4) (5)	
P3	(1) (2) (3) (6)	(4) (5)	
P4	(2)(6)	(1)(3)(4)((5)	
P5	(1)(2)(6)	(3)(4)(5)	
P6	(1) (2) (3) (6)	(4) (5)	
P7	(1) (3) (6)	(2) (4) (5)	
P8	(1)(2)(6)	(3)(4)(5)	
P9	(6)		(1)(2)(3)(4)(5)
P10	(2)	(1)(3)	(4)(5)(6)
P11	(2)(4)(6)	(1)(3)(5)	
P12		(1)	(2) (3) (4) (5) (6)
P13	(2)(6)	(1)(3)(4)(5)	
P14	(2)(6)	(1)(3)(4)(5)	
P15	(2)(6)	(1)(3)(4)(5)	

Esta atividade é de desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos no trinômio quadrado perfeito. E, estamos relembrando com objetivo de utilizar na fatoração dos trinômios quadrados perfeitos na próxima atividade.

Os alunos do laboratório tiveram um melhor desempenho a maioria acertou todas as questões, mas com o videocassete vimos que alguns deles distribuíram a primeira questão incorretamente, viram que havia um erro e corrigiram. No ambiente papel e lápis eles tiveram mais dificuldade em distribuir as questões, como pode ser observado na tabela I.

Nos dois ambientes verificamos que alguns alunos não escreveram o quadrado da soma como produto antes de fazer a distribuição, fizeram a distribuição diretamente utilizando a regra (ou padrão) apresentado nos livros didáticos.

Tabela II

Resoluções dos alunos na atividade VI

	Questões da Atividade VI		
Aluno	**Distribuiu certo**	**Distribuiu errado**	**Deixou em branco ou não abriu**
A1	(1) (2) (3) (4) (5)		
A2	(1) (2) (3) (4) (5)		
A3	(3)	(1)(2)(4)	(5)
A4	(1) (2) (3) (4) (5)		
A5	(1) (2) (3) (4)	(1) (5)	
A6	(1) (2) (3) (4) (5)		
A7	(1) (2) (3) (4) (5)	(3)	
A8	(1) (2) (3) (4) (5)	(1)	
A9	(1) (2) (3) (4)	(2) (3) (5)	
A10	(1) (2) (3) (4) (5)	(1) (5)	
P1		(1) (2) (3) (4) (5)	
P2	(1) (3) (4)	(2) (5)	
P3	(1) (2) (3) (4)	(5)	
P4	(1)(2)(3)(4)	(5)	
P5		(1) (2) (3) (4) (5)	
P6		(1) (2) (3) (4) (5)	
P7		(1) (2) (3) (4) (5)	
P8		(1) (2) (3) (4) (5)	
P9	(4)	(1)(2)(3)(5)	
P10		(1) (2) (3) (4) (5)	
P11		(1) (2) (3) (4) (5)	
P12		(1) (2) (3) (4) (5)	
P13		(1) (2) (3) (4) (5)	
P14	(1)	(2)(3)(4)(5)	
P15		(1) (2) (3) (4) (5)	

Esta atividade, composta por cinco questões, era para desenvolver o quadrado da diferença de dois termos. As resoluções dos alunos estão listadas na tabela II.

Os alunos do laboratório fizeram a verificação dos cálculos em todas as questões, e a maioria corrigiu os erros cometidos. Eles se saíram melhor do que os do papel e lápis, o A10, por exemplo, que sempre deixava algumas questões sem fazer, nesta atividade fez todas.

Os alunos, em geral, apresentaram dificuldades em distribuir os produtos 66% dos que estavam resolvendo em papel e lápis fizeram a distribuição errada do quadrado da diferença.

Tabela III

Resoluções dos alunos na atividade VIII

	Questões da Atividade VIII		
Aluno	**Distribuiu certo**	**Distribuiu errado**	**Deixou em branco ou não abriu**
A1	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A2	(1)(3)(4)(5)(6)	(2)	
A3	(1)(2)(3)(4)(6)	(5)	
A4	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A5	(1) (2) (3) (4) (5) (6)	(2)	
A6	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
A7	(1) (2) (4) (5) (6)	(1) (2)	
A8	(1) (3) (4) (5) (6)	(2) (3) (6)	
A9	(1) (2) (3) (4) (5) (6)	(1) (6)	
A10	(1) (2) (4) (6)	(1) (2) (3) (5)	
P1	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P2	(1) (3) (4) (5)	(2) (6)	
P3	(1) (2) (3) (4) (5)	(6)	
P4	(1)(3)(5)	(2)(4)	
P5	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
P6	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
P7	(1) (3) (4)	(2) (5) (6)	
P8	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P9	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P10	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P11	(1) (2) (3) (4) (5) (6)		
P12	(1)	(2) (3) (4) (5) (6)	
P13	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P14	(1)	(2)(3)(4)(5)(6)	
P15	(1)(4)	(2)(3)(5)(6)	

Esta atividade era composta por seis questões, em que os alunos deveriam distribuir os produtos, reduzir os termos semelhantes, e ao final encontrar a diferença de dois quadrados.

O *videocassete* permitiu observar que os alunos fizeram mais tentativas para resolver as questões, em particular o A10 foi o que investiu em um número maior de tentativas. E, apesar desses alunos, do laboratório, apresentarem ao final a distribuição correta, vimos que alguns tiveram dificuldades e fizeram algumas distribuições erradas.

Nesta última atividade de distribuição dos produtos observamos que alguns alunos não souberam, novamente, utilizar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição, e nem reduzir os termos semelhantes de uma expressão algébrica. Apesar da correção das atividades e das discussões na sala de aula, esses alunos ainda não conseguem resolver corretamente esse tipo de atividade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELOS, Maria J. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, v.7 e 8, 2002.

BAUMGART, John K. **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula – Álgebra**. São Paulo: Editora Atual, 1992.

BIGODE, Antonio J.L. **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, v.7 e 8, 2000.

BITTAR, Marilena. O uso de software educacionais no contexto da aprendizagem virtual. In: CAPISANI, Dulcimira e OUTROS. **Educação e arte no mundo digital**. – Editora UFMS, 2000 p.77-101.

______. A Noção de Vetor no Ensino Secundário Francês: Um Exemplo de Metodologia de Pesquisa em Didática da Matemática. Caxambu-MG, 1999. **Anais da 22ª reunião da Anped**, 1999**.**

______. A Teoria dos Campos Conceituais e o Ensino de Vetores no Ensino Secundário Francês. Caxambu/MG, 2002. **Anais da 25ª reunião da Anped**, 2002.

BITTAR, Marilena; CHAACHOUA, Hamid; FREITAS, JOSÉ L.M. *Aplusix*: Um *software* para o Ensino de Álgebra Elementar. Recife, 2004. **Anais VIII ENEM**, Recife – UFPE, 2004.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra. In: COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P. (org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. **Relatório Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - 2001 – Matemática.** Brasília, 2001.

______. Ministério da Educação e do Desporto (MEC). **Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)**. Guia Nacional de Livros Didáticos: Matemática de 5ª a 8ª séries. Brasília, 2005.

______. **Qualidade da Educação: Uma Nova Leitura do Desempenho dos Estudantes da 8ª Série do Ensino Fundamental.** SAEB 2001: Relatório Final. Brasília: MEC/SEF, 2003.

______. Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CURY, Helena C. **Análise de Erros em Cálculo diferencial e Integral: Resultados de Investigações em Cursos de Engenharia**. São José do Rio Preto – SP, 2003. Anais - Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2003.

DA ROCHA FALCÃO, Jorge.T. **Psicologia da Educação Matemática.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

D`AMBROSIO, Beatriz S. **Formação de matemática para o século XXI: o grande desafio**. Revista Pro-Prosições. Unicamp, São Paulo, v. 4, n.1[10], mar. 1993.

D`AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática da teoria à pratica**. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz R. **Tudo é Matemática.** São Paulo: Editora Ática, v.7 e 8, 2003.

FREITAS, José L.M. Situações didáticas In: MACHADO, Silvia Dias A. e OUTROS. **Educação matemática: uma introdução**. PUC-SP: EDUC, 1999 p.65-87.

HENRY, Michel. **Analyse Theorique de Situations Didactiques**. Recife-Pernambuco, 2006. Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa de Educação Matemática, Recife – UFPE, 2006.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LIMA. Elon L. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**. Sociedade Brasileira de Matemática – IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

LIMA, Maria A. B.; FILHO, Nicola S.; FILHO, Thales do C. **Matemática...Você Constrói**. 7ªsérie. Rio de Janeiro: Ediouro, 1996.

LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MARQUIS, June. Erros Comuns em Álgebra. In: COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 234-236.

MOREIRA, Marco A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Investigação Nesta Área**. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2004.

NOTARI, Alexandre M. **Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas: Um Diagnóstico Comparativo dos Procedimentos**. Dissertação de Mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2002.

RIBEIRO, Alessandro J. **Analisando o desempenho de Alunos do Ensino Fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP**. Dissertação de Mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2001.

SILVEIRA, Enio; MARQUES, C. **Matemática Contextualizada**. 7ªsérie. Recife: Editora Construir, 2004.

TELES, Rosinalda A.de Melo. A Aritmética e a Álgebra na Matemática Escolar. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, ano 11, n.16, p.8-15, maio 2004.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a Álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p.9-22.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, Editora La Pensée Sauvage, Grenoble, França, 1990, v.10, n.2.3, p.133-170.