ANTONIO SALES

PRÁTICAS ARGUMENTATIVAS NO ESTUDO DA GEOMETRIA POR ACADÊMICOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
Campo Grande/MS
Ano 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Sales, Antonio

Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática / Sales, Antonio – Campo Grande, MS, 2010.

242 f. 30 cm

Orientador: Luiz Carlos Pais.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Centro de Ciências Humanas e Sociais.

1. Argumentação. 2. Demonstração. 3. Livro Didático. I. Pais, Luiz Carlos. II. Título.

ANTONIO SALES

PRÁTICAS ARGUMENTATIVAS NO ESTUDO DA GEOMETRIA POR ACADÊMICOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada como exigência final para a obtenção do grau de Doutor em Educação à Comissão Examinadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Professor Dr. Luiz Carlos Pais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
Campo Grande/MS
Ano 2010

COMISSÃO EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais - Orientador - UFMS

____

Profa. Dra. Bárbara Lutaif Bianchini - PUCSP

____

Prof. Dr. Renato Borges Guerra - UFPA

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas - UFMS

____

Prof.Dr. Antonio de Pádua Machado - UFMS

DEDICATÓRIA

A você que se aventura ao abrir estas páginas dedico este trabalho.

Não consigo imaginar o impacto que ele causará em você. Se contribuirá para esclarecer as suas dúvidas, despertar a sua curiosidade, enriquecer o seu trabalho, fornecer parâmetros para a sua pesquisa ou para indicar-lhe como não se deve conduzir uma pesquisa, é uma incógnita para mim.

Assim mesmo dedico-lhe porque fiz pensando em você.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Mato Groso do Sul que através do Programa de Pós-Graduação em Educação proporcionou-me mais esta oportunidade.

À Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina que, através dos professores e acadêmicos, tornou possível mais essa aventura intelectual.

Ao Professor Doutor Luiz Carlos Pais por me orientar pela terceira vez. Essa tríplice aposta na mesma pessoa atesta a sua grandeza humana e intelectual.

À Banca Examinadora, pelas críticas oportunas e as valiosas sugestões na qualificação.

Aos acadêmicos de matemática da UEMS, Unidade de Nova Andradina, de forma especial aos calouros dos anos de 2008 e 2009, por contribuírem diretamente com a pesquisa. É impossível dizer-lhes a dimensão do meu reconhecimento.

Aos colegas professores de Nova Andradina por todas as contribuições que fizeram. Organizar o horário e ceder a disciplina não é tão simples quanto parece.

Aos colegas do GPHEME e de outros grupos de estudos que participei. Sem a presença de vocês meu aprendizado teria sido mais difícil e mais lento.

Aos meus alunos de todas as escolas e universidades onde trabalhei por serem a razão da minha pesquisa.

Aos meus amigos, inúmeros amigos. É impossível dizer aqui o bem que me faz essa amizade.

Aos colegas de doutorado, aos professores e à equipe da secretaria do PPGEDU. Com vocês eu aprendi, convivi e tratei cordialmente das questões relativas ao Programa.

À minha esposa Cenira e aos meus filhos, genro e neto Cibele, Zildomar Ubirajara, Ari e João Pedro, companheiros constantes e que sempre foram a razão principal da minha luta pela vida.

A Deus em quem eu creio mesmo quando não há evidências e agradeço mesmo que não saiba dimensionar a sua contribuição para o meu sucesso.

RESUMO

O presente estudo foi desenvolvido com acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática, mais especificamente na disciplina de Geometria Euclidiana tendo como objetivo pesquisar o processo de desenvolvimento da argumentação, tanto explicativa quanto justificatória, na resolução de tarefas dessa disciplina. O desenvolvimento da argumentação ingênua para a argumentação lógica; do discurso do cotidiano, sem forma definida, e do discurso didático, coloquial, para o discurso sistemático e embasado em uma teoria foi o enfoque da pesquisa. Foi adotada como método a Etnografia aplicada à educação na perspectiva de Marli André, Menga Lüdke e Bronislaw Malinowsky. Seguiu-se, como Referencial Teórico, os parâmetros da Teoria Antropológica do Didático, conforme os pressupostos de Yves Chevallard, Marianna Bosch e Josep Gascón. Foram analisados pela TAD: o desenvolvimento da argumentação, as articulações entre objetos, as técnicas aplicadas e a pertinência do suporte teórico utilizado na justificação dos passos das técnicas. A análise da estrutura do argumento justificatório foi processada em conformidade com o esquema elaborado por Stephen Toulmin. Os resultados indicam que o desenvolvimento da argumentação para a demonstração é possível e que é possível também elaborar uma organização didática que contribua para que os acadêmicos entrem na obra matemática. Dentre os resultados destaca-se a produção de um teorema em sala de aula com o envolvimento dos acadêmicos.

Palavras-Chave: Argumentação; Demonstração; Teoria Antropológica do Didático; Praxeologia; Momentos de Estudo; Etnografia; Livro Didático.

ABSTRACT

This present study was developed with academics of Licenciature in Mathematics, more specifically the discipline of Euclidean geometry with the objective of researching the process of developing the argumentation both explanatory and justificatory, in solving tasks of this discipline. The development of naive argumentation for the argumentation logic; of everyday discourse, without defined form, and it didactic discourse, colloquial speech, for the systematic and based speech in a theory was the approach of the research. It was adopted as a method to ethnography applied to education for Marli André, Menga Lüdke and Bronislaw Malinowski. Followed, as a theoretical, the parameters of Anthropological Theory of the Didactic, as the assumptions of Yves Chevallard, Marianna Bosch and Josep Gascón. Were analyzed by TAD: the development of the argumentation, the relationship between objects, the techniques used and the relevance of the theoretical support of the justification of the steps of the techniques. The analysis of the structure of the justificatory argument was processed in accordance with the scheme developed by Stephen Toulmin. The results indicate that the development of the argument for the demonstration is possible and that is possible also to elaborate a didactic organization that contributes so that the academics enter in the mathematical workmanship. Amongst the results it is distinguished production of a theorem in classroom with the envolvement of the academics.

Keywords: Argumentation; Demonstration; Anthropological Theory of the Didactic; Praxiology; Moments of Study; Ethnography; Didactic Book.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste texto introdutório procuro explorar como o objeto de estudo foi construído. A linguagem é coloquial porque é história de vida contada por quem viveu essa história.

O destino de cada pessoa é um misto de determinação pessoal e oportunidades que a sociedade oferece. O caminho vai sendo construído ao caminhar enquanto os sonhos vão sendo realizados, descartados ou se transformando em adubo para outros sonhos que nascem das cinzas daqueles que morrem. A vida não é a que se busca, é a que se vive e os alvos significativos não são os sonhos sonhados mas aqueles que são alcançados.

Cada um vive a vida que constrói por si mesmo, a vida que construíram para ele, a vida que o ajudaram a construir e a vida que lhe permitiram viver. Tudo isso ao mesmo tempo.

É a partir dessa perspectiva que que ouso afirmar: tornar-me professor de matemática foi quase uma obra do destino cego. Tornar-me educador matemático foi uma determinação pessoal. Tornei-me professor de matemática, fiz-me educador matemático. Foi a sabedoria milenar, hoje pronunciada em forma de provérbio de que "o que merece ser feito merece ser bem feito" que motivou a transformação do professor em educador. Foi o legado judaico-cristão de que se deve fazer tudo "com toda a tua força", a mola propulsora da transformação.

Iniciei minha carreira como professor leigo, em 1972, nos anos iniciais do ensino fundamental em escolas rurais, em salas multisseriadas. Em 1978 tornei-me professor de Ciências Físicas e Biológicas da 5ª à 8ª série (6º ao 9º ano) e de Química no Segundo Grau Lei 7.044 (Ensino Médio), após concluir a Licenciatura em Ciências. A partir de 1979 fixei-me como professor de matemática no ensino fundamental e médio inclusive trabalhando com Matemática Financeira e Estatística para o curso Técnico em Contabilidade. No decênio 1993 a 2003 atuei como técnico da Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande no setor de currículos e formação de professores. Em 1994 teve início minha experiência no curso superior.

Produto de uma formação autodidática até o nível médio a minha inserção no campo da educação não foi tranqüila e nem isenta de questões existenciais. Ao assumir o desafio de ser professor de matemática em 1979 impus-me a tarefa de percorrer o caminho da educação matemática. Um caminho que embora viesse sendo construído por grandes nomes da história da educação matemática, eu desconhecia por completo. Era, naquele momento, um fazer solitário, um caminho a ser desbravado, um caminhar tateante, um alvo impreciso, uma necessidade pessoal, uma busca de sentido profissional, um primeiro contato com o problema do estudo da matemática.

Alguns anos mais tarde encontrei, na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), as primeiras ferramentas para delinear a trajetória e definir o alvo. Ali encontrei três nomes que me apontaram o caminho da Educação Matemática: Eronides de Jesus Bíscola, José Luiz Magalhães de Freitas e Luiz Carlos Pais.

Participei de projetos de formação de professores, ingressei no curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, fiz minha primeira monografia relacionada com o ensino da matemática, sob a orientação do Professor Luiz Carlos Pais. Em 1988 participei do II Encontro Nacional de Educação Matemática em Maringá, PR, tendo assinado a Ata de Fundação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática como membro fundador. Em 1994 ingressei no Mestrado em Educação sendo orientado mais uma vez pelo Professor Pais.

Continuei participando de grupos de estudos na UFMS e na Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal (UNIDERP). Era a eterna busca uma vez que o saber nunca está completo, o fazer nunca está acabado e o conhecimento é uma construção pessoal a partir do saber socialmente construído.

O estudo da Fenomenologia durante o Mestrado trouxe uma nova visão da educação e da pesquisa. Agora com a Teoria Antropológica do Didático essa visão se ampliou. Um novo ângulo traz sempre uma ampliação da visão. O aprofundamento do estudo da Etnografia como método de investigação ampliou a perspectiva da pesquisa em Educação Matemática.

Desde a defesa da Dissertação do Mestrado no final de 1996 até 2007, quando ingressei no Douturado, foram dez anos atuando na formação inicial de professores nos Cursos de Licenciatura em duas universidades (UNIDERP) e (Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS) e na formação continuada como técnico da Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande, MS.

O trabalho desenvolvido no decorrer da experiência profissional e os discursos ouvidos e lidos foram pouco a pouco apontando para outras necessidades. Tornava-se necessário estudar as características do saber matemático numa perspectiva tanto de sua origem como de sua função social. Conhecer fatores culturais que estão presentes no ato de estudar matemática e no ato de organizar, didaticamente, atividades matemáticas e os propósitos do ensino, isto é, o que a sociedade espera que o estudante saiba ao concluir o seu curso de estudos.

Havia também uma necessidade de estudar a relação entre o saber matemático e a participação do sujeito na sociedade e as formas de se comunicar.

Enquanto preparava este relatório juntei-me a um grupo em que a Teoria Antropológica do Didático é o principal referencial. Trata-se do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar (GPHEME), composto por mestrandos, mestres, doutorandos, doutores e coordenado pelo Prof. Dr. Luiz Carlos Pais. Esse grupo se reúne semanalmente desde 2008.

De todo esse enredo surgiu e ganhou forma o objeto de pesquisa que será delineado alguns parágrafos mais adiante. Apresentaremos também uma justificativa do nosso tema enfatizando que sem as exigências e orientações do Professor Dr. Luiz Carlos Pais, a colaboração dos colegas da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), o envolvimento dos acadêmicos de Matemática da mesma universidade e as contribuições dos colegas do GPHEME, este trabalho não teria sido possível.

A pesquisa do Mestrado, com seu enfoque fenomenológico, foi desenvolvida em uma escola pública do ensino fundamental. A pesquisa cujo relatório está sendo apresentado tem como método a Etnografia por ser desenvolvida no próprio ambiente de trabalho.

O que me aproximou desse método foi o fato de que a Etnografia moderna difere substancialmente da tradicional. Não apenas os métodos foram atualizados, mas a concepção que se tinha do objeto sofreu uma mudança completa. De uma atividade centrada na antropometria, descobertas pré-históricas e classificações tornou-se o "estudo científico da cultura" (MALINOWSKI, 1970, p. 14). O etnógrafo vai a campo com um novo olhar. Ele procura pela ordem existente no suposto caos organizacional das sociedades primitivas. Essas sociedades não são fósseis, não se resumem a um conjunto de músculos, estaturas ou números de filhos, não são regidas pelo acaso, pela vontade individual ou pelo desejo de um momento. Há ordem, leis, autoridades, deveres e direitos. Os procedimentos aceitáveis e inaceitáveis estão definidos.

Enquanto o missionário vai a campo para ensinar leis aos "homens sem lei", orientar o governo das paixões aos "homens dominados pelos instintos" e controlados pelos desejos do momento, o etnógrafo moderno vai a campo para estudar as leis, os comportamentos e a organização existente na comunidade "desumana e selvagem" dos nativos.

Fui a campo como um missionário e como um etnógrafo moderno. Como um missionário moderno da ciência que procura ensinar leis. Ensinar leis não aos selvagens, mas aos que desejam aperfeiçoar as suas relações com a ciência, viver em consonância com outra sociedade, a sociedade dos que dominam os princípios fundamentais da ciência. Assim atuei durante todo o ano na função de professor de geometria euclidiana para a turma em questão. Especifiquei temas de estudo, defini procedimentos, orientei práticas e fiz discursos teóricos. Sempre recorrendo ao uso de argumentos explicativos e justificatórios e procurando atender as especificidades, isto é, as necessidades individuais dos estudantes.

Fui a campo como um etnógrafo que busca descobrir as leis existentes nessa outra sociedade, na sociedade dos que não estão diretamente relacionados com o estudo da ciência, lá existem leis científicas em estado embrionário, práticas aceitáveis do ponto de vista da teoria e argumentos justificatórios plausíveis. Os argumentos, às vezes, são intuitivos, outras vezes são fundamentados em uma vivência escolar e, não raras vezes, são logicamente encadeados e capazes de levar a uma conclusão. Nessa "sociedade" nem sempre há um vocabulário técnico, mas sempre há um gesto que supre essa falta.

Ao ir a campo para pesquisar os argumentos de acadêmicos levamos em conta o que preconizam as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura em Matemática. Esse documento define as competências esperadas dos profissionais egressos de um curso de licenciatura. Entre as competências definidas destacamos: a "capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão", "capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares", "habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema".

Não nos parece casual que a competência que envolve a capacidade de "expressar-se escrita e oralmente, com clareza e precisão", seja a primeira da relação. No relato que construímos ao longo destas páginas ver-se-á que a competência de argumentar desempenha importante papel na formação do professor de matemática, sendo inclusive uma das competências que segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), deverão ser trabalhadas por eles quando assumirem a sala de aula (BRASIL, 1998). Entendemos que o trabalho em equipes multidisciplinares também requer "clareza e precisão" na comunicação das idéias.

Ao analisarmos o discurso do acadêmico na resolução de atividades de geometria e, na análise desse discurso e dos diversos registros de linguagem, a teoria adotada foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Será dedicado um capítulo para a apresentação dessa teoria de aporte.

Destacamos agora o objeto e os objetivos deste trabalho.

1 Objeto e Objetivos

Objeto: O Desenvolvimento Didático das Práticas Argumentativas no Estudo da Geometria Euclidiana por Acadêmicos de Licenciatura em Matemática

1.1Objetivo geral

Descrever, analisar e avaliar como se processa o desenvolvimento didático da prática da argumentação em Geometria Euclidiana de acadêmicos de Licenciatura em Matemática.

Ao analisar estaremos decompondo o complexo em partes mais simples. Observando o todo a partir das suas partes. Descrevendo o fenômeno em cada contexto diferente em que o mesmo se mostra e focalizando as suas múltiplas faces percebidas pela consciência do pesquisador. Ao avaliar estaremos emitindo um juízo sobre o todo com base nas suas partes. Emitindo um parecer fundamentado em parâmetros institucionalizados pela TAD.

O todo que está sendo avaliado é o **processo de desenvolvimento**. Entendemos que há dinamicidade na relação entre processo e produto. Na medida em que o processo se refina, ou se ajusta se pensarmos na metáfora de uma máquina processadora, a qualidade do produto adquire novas dimensões. O produto se desenvolve com o ajustamento do processo. O processo de desenvolvimento antes de ser uma redundância é, no contexto deste trabalho, uma ousadia de buscar traçar um panorama geral a partir da análise das partes. É a busca pela indução, ressalvando os limites que uma pesquisa qualitativa impõe para as generalizações, para uma posterior dedução. Nossa indução tem o sentido que lhe confere Peirce[1].

Falamos em desenvolvimento porque o nosso objeto não é um produto acabado. Ele é um produto em processamento. Não estamos avaliando o

___

[1] Indução e dedução serão objetos de análise em um dos capítulos deste trabalho. A indução de Peirce não tem o mesmo estatuto da indução matemática.

conhecimento, mas o desenvolvimento desse conhecimento durante o processo de estudo. Por ser um processo de estudo é um processo didático que estará sendo avaliado segundo parâmetros já definidos por Chevallard (1999).

Ao avaliar a técnica de resolução de uma tarefa estaremos considerando:

> 1. Se a técnica utilizada estava completa ou era apenas um esboço;
> 2. Se a técnica é fácil de utilizar;
> 3. Se a técnica tem alcance satisfatório, isto é, resolve plenamente a tarefa proposta;
> 4. Se a técnica satisfaz todas as condições de emprego;
> 5. Se a técnica é inteligível;
> 6. E, por fim, se pode ser melhorada ou evoluir para atender tarefas mais complexas (Ibid., p. s/n).

Ao avaliar uma tecnologia deve-se, segundo ainda Chevallard, levar em conta:

> 1. Se o enunciado é natural ou “folclórico”;
> 2. Se as justificações utilizadas são parecidas com as formas canônicas em matemática;
> 3. Se as suas condições de utilização são coerentes;
> 4. Se os recursos tecnológicos disponíveis foram utilizados (Ibid., p. s/n).

Ao avaliar o processo as questões norteadoras serão:

1. Houve evolução no discurso justificatório, do natural para o lógico?
2. Houve evolução do registro gestual para o registro geométrico e do registro oral para o registro algébrico e o escrito na língua materna?

Quanto aos registros, evolução tem o sentido de aumento na frequência e, quando se trata de discurso, entendemos que entre o natural e o lógico há alguns níveis: “folclórico” (ingênuo e “tradição”) e racional. Esses níveis serão discutidos no decorrer do texto e, nesse caso, a evolução será qualitativa.

1.2 Objetivos específicos

1. **Discutir a contribuição da argumentação para o estudo da Geometria Euclidiana.**
2. **Caracterizar as diferentes organizações didáticas e matemáticas da argumentação em Matemática no estudo da Geometria Euclidiana em Livros Didáticos, PCN e Guia do PNLD/2008.**

3. **Descrever a argumentação que se faz presente no processo de resolução de atividades de Geometria Euclidiana, levando em conta os aspectos explicativos e justificatórios.**

4. **Avaliar as organizações que os acadêmicos colocam em prática ao desenvolver o discurso da justificação durante as atividades de Geometria Euclidiana.**

A discussão da contribuição da argumentação para o estudo da Geometria Euclidiana se dará principalmente com base nos documentos oficiais (PCN e Guia do PNLD/2008) e nos pressupostos de estudo da Matemática preconizados pela TAD. Serão levados em consideração também os recursos teóricos e práticos utilizados pelos acadêmicos na atividade de estudo.

A escolha da geometria euclidiana tem razões que devem ser explicitadas. Há pelo menos duas razões: uma ideológica e outra prática. A ideológica leva em conta que um dos modelos psicológicos de raciocínio é o modelo cognitivo e segundo esse modelo, não há um quadro rígido de orientações a serem seguidas, pois o indivíduo que raciocina é considerado como um organismo ativo que busca sua própria saída diante de um problema. Dessa forma o indivíduo deve ser colocado frente a situações desafiadoras. O raciocínio se desenvolve segundo um ciclo geral a partir do desafio. Primeiro o indivíduo lista as informações que o problema oferece e, em seguida, interpreta o problema como um todo, estabelece um plano de ação, busca informações auxiliares contidas na memória, investiga outras fontes de informações relativas ao problema, aplica essas informações e por fim analisa o resultado obtido, verificando se há coerência ou incoerência na solução encontrada. Mas há que se levar em conta também a contribuição social, a vivência e os valores adquiridos e que são cultivados pelo sujeito.

A presença da matemática na Educação Básica[2] tem por objetivo contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo (BRASIL, 1998). Nesse caso a presença do ensino de geometria em nossas escolas seria um fator importante no aprendizado da matemática, contribuindo para amenizar o problema da carência de visibilidade social, presente no estudo da mesma (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). A ausência da geometria no programa escolar acarreta a falta de um conjunto de associações devidamente estabelecidas privando o aluno da

[2] Atuamos em um curso de licenciatura que prepara profissionais para atuarem na Educação Básica.

aquisição de uma linguagem apropriada e de laços que unam imagens e idéias. Laços que estabeleçam uma relação entre o sensível, que nesse caso é o desenho, e outros objetos. Esses outros objetos são constituídos pelas idéias socialmente construídas: as figuras abstratas. Figuras, como por exemplo: retas que são infinitamente retas e paralelas e o quadrado "perfeito" qualquer que seja a dimensão dos seus lados. Desconsideram-se os obstáculos do meio.

Um problema de geometria pode associar o rigor à precisão e objetividade dispensando a busca de problemas fictícios. A geometria é uma das raízes da matemática (a outra é a aritmética), havendo um inter-relacionamento mútuo entre ela e a aritmética. Para medir o comprimento de um objeto (ou uma distância), por exemplo, primeiro se aplica a geometria e em seguida a aritmética, para os cálculos. A geometria euclidiana, no entanto, se ocupa do estudo das relações entre os entes geométricos e figuras, a partir de sua grandeza e posição, sabendo-se que nesse estudo o geômetra abstrai todas as demais propriedades tais como cor, densidade, peso, etc. Numa figura geométrica abstraem-se também as limitações impostas pelo meio, fazendo a análise do ponto de vista puramente abstrato. É exatamente neste ponto, diz Aleksandrov (1985), que jaz a diferença entre a geometria e a astronomia, cristalografia mineral e geodésia matemática. Estas ciências comparam entre si corpos reais, figuras concretas, enquanto a geometria por não poder fazer experimentos com entes abstratos estabelece as relações a partir de raciocínios lógicos. "É o nível de abstração que distingue a geometria das demais ciências" das formas (ALEKSANDROV, 1985, p. 18).

Como uma ciência milenar, com suas regras construídas ainda nos tempos do apogeu do pensamento grego, a matemática e, em particular, a geometria tem contribuído para desenvolver um tipo especial de raciocínio. E aqui raciocínio tem duplo sentido, como normalmente ocorre em toda atividade intelectual: processo e produto. No processo pode não diferir muito das demais ciência, mas quanto o resultado tem características especiais. Como produto o raciocínio desenvolvido pela geometria se caracteriza pelo encadeamento linear. Segundo esse modelo os argumentos se apresentam de forma sucessiva e são examinados um após o outro. Esse tipo de raciocínio necessita ser aprendido tendo em vista não fazer parte do modo natural de pensar. Um médico, ao elaborar um diagnóstico leva em conta fatores que se apresentam nas mais variadas ordens, o mesmo ocorre com um físico ao elaborar uma teoria para explicar as suas observações. Na verdade, o nosso mundo vivencial apresenta uma simultaneidade de eventos. Em geometria, porém, quando se trata de apresentação do produto, o encadeamento é imprescindível.

Em se tratando de resultados o raciocínio geométrico é exato, conciso e se manifesta por meio de um simbolismo especializado. É uma linguagem formalizada (ECO, 2003).

Mesmo que hoje não pensemos mais extamente como os gregos pensavam a geometria há a necesidade de considerar como eles praticavam-na para que possamos compreendê-la.

Ana Maria Kaleff dando ênfase ao valor educativo da geometria tem esse pensamento:

> O Homem faz, desde tempos pré-históricos, uso da imaginação para compor suas imagens visuais e mentais, traduzindo, em desenhos, não somente as imagens reais da natureza a sua volta, como também, as imagens mentais relacionadas com suas emoções e seus sentimentos, expressão de seu mundo interior. Foi da necessidade do homem em compreender e descrever o seu meio ambiente (físico e mental), que as imagens, representadas através de desenhos, foram lentamente conceitualizadas até adquirirem um significado matemático, na Geometria e uma forma, nas Artes (KALEFF, 1994, p. 19).

Sabe-se que o estudo da geometria não tem recebido a devida atenção por diversas razões. Perez (1991) apresenta as mais comuns: a falta de domínio desse conteúdo por parte do professor, o fato do mesmo estar localizado sempre na parte final dos livros e o conteúdo da série nunca ser ministrado na íntegra por falta de tempo.

Com relação a essas constatações de Perez sabemos que após 1991 ocorreram algumas mudanças, embora saibamos que o ensino da geometria continua não recebendo a atenção que deveria receber. Há autores que distribuem a geometria ao longo do livro em capítulos isolados ou articulando com outros conceitos. As razões agora devem ser a falta de domínio ou da falta de clareza quanto à contribuição da geometria e a distribuição inadequada do tempo.

Ainda discutindo essa questão do ensino Pavanello (1993) acrescenta que o fenômeno está ligado a questões de ordem educacional. Falta, segundo ela, unanimidade entre os matemáticos, com relação à contribuição da geometria para o conhecimento matemático. Apresenta também razões históricas para o seu abandono: a questão econômica, a concorrência da indústria estrangeira e a incipiente indústria brasileira, com o país sendo essencialmente agrícola e vivendo da comercialização, e a busca do saber jurídico, pelos filhos dos latifundiários, para ter acesso aos cargos burocráticos e políticos, em detrimento do saber científico; um ensino de caráter puramente utilitário na escola primária visando às atividades comerciais. O ensino secundário destinado às elites, por ser em geral pago, tem por objetivo preparar para o ingresso nos cursos superiores e trata a matemática (aritmética, álgebra e geometria) de forma abstrata e separadamente, sem qualquer relação entre eles.

Após a primeira guerra mundial ocorreram modificações no campo econômico com repercussão no campo educacional, mas ainda assim no que diz respeito ao ensino da matemática, pouco se fez para o seu aprimoramento, pois enquanto se tentava estabelecer a unidade entre os seus vários ramos, entregando a um só professor a responsabilidade pelo seu ensino, os livros didáticos continuavam apresentando o conteúdo por série e sem integração entre si.

Com o Movimento da Matemática Moderna, a partir da década de 1960, optou-se por estudar as noções de figura geométrica, interseção de figuras como conjunto de pontos do plano, usando para a sua representação a linguagem da teoria dos conjuntos. Um enfoque incoerente com o movimento e por isso cedeu lugar à geometria das transformações. Ora, se a abordagem tradicional apresentava dificuldades no que diz respeito ao conhecimento do professor, esse novo enfoque (uma geometria algébrica) dificultou ainda mais e muitos professores preferiram relegar o seu ensino a um segundo plano.

Pesquisas mais recentes apontam que não há indicio de melhora significativa nesse quadro, exceto na distribuição do conteúdo ao longo do livro.

> A análise do sistema educativo, do discurso dos professores e dos jogos que envolvem a própria geometria nos permite identificar certos fatores que podem ser considerados origem de dificuldades que os professores encontram no processo de ensino e de aprendizagem de saberes e de conhecimentos geométricos.
> Em primeiro lugar, identificamos como fator de dificuldades o nosso sistema educativo, que define a política da educação com recomendações e orientações gerais sobre os métodos, os conteúdos e o saber-fazer, deixando para cada escola definir os conteúdos que julga importantes para a formação de seus alunos, o que faz com que a *geometria seja freqüentemente esquecida.*
> Podemos apontar, em relação à formação dos professores, que esta é muito precária quando se trata de geometria, pois *os cursos de formação inicial não contribuem para que façam uma reflexão mais profunda a respeito do ensino e da aprendizagem dessa área da matemática*. Por sua vez, a formação continuada não atende ainda aos objetivos esperados em relação à geometria. Assim, a maioria dos professores do ensino fundamental e do ensino médio não está preparada para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCN (ALMOULOUD et. al., 2004, p. 99 grifo nosso)

Quanto ao valor formativo da geometria Perez afirma que:

> O ensino de Geometria mostra-se de grande importância, se o professor, ao preparar o indivíduo para a vida, atentar para o fato de que a Geometria:
> -colabora com a capacidade de percepção espacial dos alunos,
> -auxilia com a representação geométrica, a visualização dos conceitos matemáticos,
> -apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível - que é dos objetivos do Ensino da Matemática - oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. Todas estas considerações revelam que o trabalhar com o Ensino de Geometria pode colaborar de forma fundamental com a formação dos indivíduos e em particular, dos indivíduos pertencentes às camadas populares (PEREZ, 1991, p. 35-37).

Em seguida Perez cita de R. Thom:

> [...] a Geometria é um intermediário natural e possivelmente insubstituível entre a língua e o formalismo matemático, no qual cada objeto é reduzido a um símbolo e o grupo de equivalência é reduzido à identidade do símbolo escrito consigo mesmo. Deste ponto de vista, o estágio do pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de omitir um desenvolvimento normal da atividade racional do homem (PEREZ, 1991, p. 35-37)

Enquanto ciência, a geometria ilustra o desenvolvimento do raciocínio humano. Conhecida a sua história e a estrutura, conhece-se a história das idéias e estruturação formal das mesmas. Sua organização revela as fases do processo do pensamento científico: 1) contemplação da natureza, tomada de consciência da sua existência; 2) o desejo ou necessidade de conhecê-la e dominá-la; 3) a interrogação e o mergulho na busca de conhecer, de apoderar-se dela; 4) a formalização do conhecimento e, por fim, 5) a extrapolação do sensível, a especulação racional, as novas perguntas e novas buscas, dessa vez não mais na natureza bruta mas no campo teórico (ALEKSANDROV, 1985). Estamos entendendo formalização como algo mais do que sistematização ou ordenação do conhecimento. Inclui a criação de uma linguagem própria, abstrata e, por vezes, artificial, conforme Eco (2003, p. 401).

A segunda razão é de ordem prática, embora não seja a razão principal. A disposição do Professor José Felice em trocar a disciplina comigo permitindo que eu trabalhasse com geometria com os acadêmicos contribuiu também para que se definisse estudar a argumentação no estudo da geometria euclidiana com acadêmicos de Licenciatura em Matemática. Caso contrário o estudo teria sido feito com outros sujeitos, em outra instituição e com muito mais dificuldades.

Embora nosso trabalho tenha sido desenvolvido com acadêmicos consideramos relevante a análise da importância atribuída à argumentação em alguns documentos como PCN, PNLD e livros didáticos do ensino fundamental tendo em vista que estamos trabalhando com acadêmicos de um curso de licenciatura que, supostamente, serão professores da Educação Básica. Nesse nível de ensino, em que irão atuar, esses documentos são norteadores de práticas e discursos.

2 Apresentação dos Capítulos

No capítulo I tratamos do **Referencial Teórico** que dará suporte para a análise. Optamos pela Teoria Antropológica do Didático (TAD) por tratar especificamente do estudo da matemática e tem como teóricos Chevallard, Bosch e Gascón (2001). A análise será suplementada pela teoria das estruturas do argumento proposta por Toulmin (2006). As duas teorias estão apresentadas em capítulos separados. A TAD está definida no capítulo I e os usos do argumento, no capítulo III.

No capítulo II, sobre **A Metodologia da Pesquisa,** construímos o nosso referencial metodológico a partir do trabalho de Malinowski (1970), Malinowski (1976), André (2006), André e Lüdke (1986). A opção pela etnografia como orientação metodológica se deve ao fato de que a pesquisa se processa em um contexto em que o professor e o pesquisador são uma mesma pessoa. Normalmente exerce a função de professor cumprindo o que o regimento da instituição dele requer em termos de cumprimento de horário e de programa. Como tal ele respondeu perguntas, questionou, corrigiu idéias e registros de linguagem, definiu conceitos, aplicou provas, elaborou atividades de estudo, propôs tarefas, orientou as discussões em grupo e atendimentos individuais. Como pesquisador elaborou atividades de pesquisa, coletou dados através de filmagens, fotografias e outros meios que se fizeram necessários e, por fim, procedeu a comparação com as práticas socialmente aceitas.

A pesquisa foi feita no ambiente de trabalho, no horário de aula e nas sessões de pesquisa algumas vezes interferiu e orientou e outras vezes se distanciou para permitir que o discurso pudesse fluir naturalmente. Filmou os debates para que pudesse analisar posteriormente, recolheu materiais produzidos nos grupos e fotografou os registros produzidos no quadro-negro.

A **instituição** onde a pesquisa foi desenvolvida está identificada também nesse capítulo.

O capítulo III é um estudo sobre a argumentação. Registramos diversos autores consultados e os variados matizes em que argumentação se apresenta. Ver a argumentação sob vários ângulos contribuiu fortemente para a sua compreensão. Também definimos a argumentação, os seus usos na educação matemática. Apresentamos a estrutura da argumentação justificatória segundo Toulmin (2006). Para esse teórico a argumentação é fundamentada na lógica que determina as regras que devem ser seguidas rigorosamente. Embora admitimos a existência de uma argumentação folclórica, isto é, natural o nosso foco é a argumentação científica, aquela que é fundamentada na lógica. A argumentação racional.

No capítulo IV fizemos uma análise do Guia do PNLD/2008. Esse documento é importante por definir propostas metodológicas esperadas e conter o discurso oficial.

No capítulo V discutimos a contribuição do livro didático na perspectiva do PNLD e fizemos a análise de algumas atividades em quatro livros aprovados pelo PNLD/2008 e que foram adotados em escolas da região atendida pela UEMS de Nova Andradina (Região do Vale do Ivinhema) levando em conta as reflexões teóricas de Gascón (2003).

No capítulo VI são descritas as atividades desenvolvidas durante as sessões de pesquisa e a **análise** de cada uma delas na perspectiva da TAD e de Toulmin.

CAPÍTULO I

O REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo faremos uma discussão sobre a teoria que será o suporte da nossa análise.

1 A Teoria Antropológica do Didático

Neste trabalho o referencial teórico será a Teoria Antropológica do Didático (TAD) a partir das idéias divulgadas por Chevallard (2001), Bosch e Gascón (2001), Chevallard, Bosch e Gascón (2001). A teoria parte do pressuposto de que a ação de estudar matemática, no contexto específico da sala aula ou fora dela, como sendo uma praxeologia. Essa praxeologia é o produto de uma construção social mas tem uma finalidade específica: estudar matemática. A teoria leva em conta o conhecimento produzido socialmente e, embora tenha surgido no contexto específico da Didática da Matemática, tem aplicação em contextos de estudo de outras disciplinas.

Os autores citados se distanciam do modelo clássico na medida em que rompem com a dicotomia platônica de mundo real e suas representações. As construções se dão a partir da atividade e da mediação do professor uma vez que os objetos matemáticos são produtos humanos e os modelos matemáticos são apenas aproximações do mundo concreto. A matemática é vista como uma produção do espírito humano. É uma construção social cujos conceitos estão imbricados com os objetos observáveis e manipuláveis no quais se originam, a partir da mediação da experiência social, e para onde retornam com novos sentidos até que sejam plenamente abstraídos.

Os autores analisam as práticas docentes e o estudo da matemática em termos de praxeologia. São praxeologias que se desdobram em organizações didáticas (OD) e organizações matemáticas (OM), ou seja, organizações de ensino e organizações dos conteúdos sendo que por conteúdo "estamos entedendo um conjunto constituído por conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e algoritmos" (BRASIL, 2007, p. 15).

Entende-se que para cada atividade matemática tem-se uma organização didática correspondente; que cada conteúdo matemático, cada conjunto de objetos matemáticos a serem trabalhados, tem uma forma específica de abordagem requerendo que o sujeito reorganize seus conceitos, seus materiais e mobilize seus saberes a respeito.

Chevallard (2001) utilizando-se de uma terminologia própria da matemática diz que há um "isomorfismo"[3] didático-matemático. Entendemos que esse isomorfismo implica no entendimento de que cada conteúdo matemático tem a sua forma de ser ensinado, cada conceito é manipulado de modo próprio. Essa forma não é única, mas requer uma organização didática específica. Cada objeto matemático, cada tarefa específica, mobiliza saberes específicos e modos de fazer (não necessariamente um modo único) também específicos. Uma equação do segundo grau não pode ser resolvida pela mesma técnica utilizada para demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180º.

Tanto um quanto outro conjunto de organizações (OD e OM) possui alguns níveis estruturais determinados por um conjunto de fatores em sua maioria externos à escola. Aceitar a existência desses níveis é fundamental para que se entendam algumas questões relacionadas com o ensino da matemática tal como ocorre em sala de aula. Algumas dessas questões dizem respeito ao porque de alguns conteúdos estarem presentes e outros não. Ao porque de se adotar uma forma de ensinar e não outra. E ao motivo de encontrarmos certas dificuldades em formar o professor de matemática com a visão educacional dos Parâmetros Curriculares Nacionais, por exemplo.

É certo que em cada um dos níveis certas restrições são impostas, algumas condições são definidas de modo que a praxeologia do professor vai sendo redefinida e as organizações didáticas e matemáticas vão sendo transformadas.

Essa teoria é denominada antropológica já que pressupõe os processos do conhecimento como um produto social, algo que acontece no seio das instituições sociais. É uma teoria do didático porque é um estudo do objeto de estudo da didática. A didática nessa perspectiva é a ciência de estudo e se ocupa em descrever os processos de estudo "para propor explicações e respostas sólidas para as dificuldades com as quais se deparam todos aqueles (alunos, professores, pais, profissionais, etc.)

---

[3] As aspas são do autor.

que se vêm levados a estudar matemática ou ajudar outros a estudá-la" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 59)

As praxeologias, segundo a TAD, são determinadas por tipos de tarefas (T), técnicas (τ), tecnologias (θ) e teorias (Θ). Dessa forma uma praxeologia é definida pelo quaterno (T, τ, θ, Θ). Uma tarefa é uma atividade proposta para ser desenvolvida. Seja ela a resolução de uma equação específica, a soma de duas frações com mesmo denominador ou a demonstração de certa propriedade geométrica.

Nessa perspectiva a tarefa é uma atividade específica, de caráter particular como, por exemplo, calcular a área de um quadrado sabendo a medida do seu lado. A técnica utilizada pode consistir em apenas elevar a medida do lado à sua segunda potência. Outra técnica poderia consistir em desenhar o quadrado em papel quadriculado e contar os quadradinhos. É evidente que, dependendo do nível de ensino, uma técnica pode ser mais utilizada ou até mesmo mais apropriada do que a outra. Influencia também nessa escolha o objetivo com que a tarefa foi proposta.

A execução de uma tarefa pode requerer a aplicação de uma ou mais técnicas. Técnicas matemáticas se a tarefa for matemática e técnicas didáticas, no caso de uma tarefa didática. Técnicas são modos de fazer, são os procedimentos adotados para resolver uma determinada tarefa ou um tipo de tarefa (T). Um tipo é constituído por tarefas genéricas, tais como, resolver equações do primeiro grau, construir gráficos de funções polinomiais do segundo grau, somar frações com o mesmo denominador ou provar propriedades geométricas, por exemplo. Uma tarefa (t) tem sempre um caráter de especificidade enquanto o tipo de tarefa é composto por um conjunto de tarefas de mesmo nível de complexidade.

Usar uma técnica não é uma decisão aleatória porque não se usa qualquer técnica para resolver uma tarefa. De acordo com a TAD, a técnica para resolver determinada tarefa não é única, mas a escolha de uma técnica sempre vem acompanhada de uma justificativa. Há um conhecimento matemático que justifica a sua aplicação naquela tarefa e não em outra, e há um conhecimento didático que justifica a escolha daquela técnica e não outra que produziria o mesmo resultado matemático. Esse conhecimento, matemático e didático, deve explicar porque ela funciona para aquele caso específico, as razões pelas quais podemos esperar que o resultado obtido por ela seja confiável e porque ela seria a técnica mais indicada.

Essa justificativa, numa organização praxeológica, recebe o nome de tecnologia. Não há nesse termo (tecnologia) qualquer alusão a um artefato, a um produto industrializado ou a algum utilitário. Tecnologia é a justificativa que se dá para um procedimento. Em alguns níveis da aprendizagem, essa justificativa pode ser ingênua[4] podendo se tornar mais teórica, e fundamentada em uma teoria, em níveis mais adiantados. *Pressupomos que essa passagem de um discurso ingênuo para um discurso fundamentado é possível e almejado. É esse o processo a que nos referimos no objetivo geral.*

Tecnologia, portanto, no contexto da TAD significa a explicação lógica do funcionamento de uma técnica, justificativa racional do princípio de funcionamento e das razões da sua utilização. *Tecnologia é uma argumentação justificatória e a técnica é uma argumentação explicativa. Explicar é dizer: "é assim que se faz". Justificar é dizer porque é assim que se faz.*

O argumento também pode ser uma técnica. Ele pode ser uma forma de "manipular" objetos matemáticos. Manipular objetos não sensíveis e, nesse caso, a argumentação é também um objeto sensível. Sobre esses objetos trataremos ainda neste capítulo. Argumentação, nessa perspectiva, é ação, podendo ser a ação de um sujeito em particular ou uma ação institucionalizada. *É ação de fazer ou mostrar como se faz e é ação de justificar porque se faz.* É uma técnica e é uma tecnologia.

Estudamos para nos apropriarmos das ações institucionalizadas, aquelas que são validadas pelas instituições.

Na TAD o elemento mais amplo considerado numa praxeologia é a teoria. É ela que embasa a tecnologia. Teoria nos transmite a idéia de generalidade, abstração; algo afastado das preocupações utilitárias e elementares. Corresponde a um contemplar o cenário em busca das causas, das relações, dos objetivos, enfim, dos porquês.

Segundo se deduz da TAD o que estamos propondo como tecnologia pode, em alguns casos, ser considerado como a própria teoria. A tecnologia, nesses casos,

---

[4] Estamos supondo que docentes que não têm uma formação específica, normalmente, desconhecem as razões porque um modo de resolver uma tarefa matemática funciona. O mesmo pode acontecer com um aluno do nível fundamental. No entanto, a experiência tem revelado que mesmo profissionais habilitados, ou que se consideram como tais, usam argumentos ingênuos. Um exemplo fácil de ser constatado está no procedimento usual para determinar a inversa de uma função dada.

Um exemplo: dada a função f, definida no conjunto dos reais tal que y=2x, procede-se do seguinte modo para determinar a sua inversa: troca-se o y pelo x (fazendo x=2y) e em seguida isola-se o y resultando em $y=\frac{x}{2}$. Este resultado é a lei da função inversa de y=2x. Em muitas ocasiões, quando interrogamos o professor sobre a razão da técnica, obtivemos a resposta de que essa era a "definição" de função inversa.

estaria em um nível mais elementar. Evidentemente que essa alteração de status depende da complexidade da tarefa e do nível de ensino a que se destina.

Por outro lado uma organização didática também não é determinada por uma ação isolada de um professor. Há fatores sociais e estruturais da disciplina que exercem forte influência na ação do professor no instante em que ele decide a OD que orientará a atividade a ser proposta. A atitude do acadêmico, e do estudante em geral, frente às atividades de estudo que lhe são propostas também não é isenta da influência desses fatores. Esses fatores estão hierarquizados de tal modo que um exerce influência sobre o outro e a TAD especifica nove níveis dessa hierarquia.

Os níveis da hierarquia em que as organizações matemáticas e didáticas estão organizadas e que impõem limitações à formação e atuação do professor estão apresentados em ordem decrescente de abrangência. São denominados níveis de determinação didática.

1.1 Níveis de Determinação Didática segundo a TAD

O primeiro deles e mais abrangente é a Civilização.

Nós, ocidentais, recebemos forte influência da Civilização Grega. Nesse contexto a geometria é contemplativa, especulativa, axiomática e com certo rigor na organização. As demonstrações são formais e as argumentações são justificatórias. A geometria nasceu com essas características e tem se mantido com esse rigor nos meios acadêmicos onde é estudada.

Quem vive sob a influência da cultura oriental conduz a sua organização didática de modo diferente embora admitimos que na atualidade os saberes considerados científicos se adequaram ao padrão ocidental. Adequaram-se mas não eliminaram definitivamente as tradições locais e os modos paralelos de produzir conhecimentos.

Martzloff (1990, p. 23) afirma que a matemática chinesa da antiguidade era definida com a "arte do cálculo", era "organizada em torno de adivinhações" embora houvesse também alguns "meios de pesquisas racionais". Baseava-se em "princípios heurísticos" que consistiam em pôr em evidência o processo da descoberta para depois se ocupar com os detalhes do raciocínio.

Esse modo de encarar a ciência determina o modo como ela é trabalhada nas atividades de estudo.

O segundo nível um pouco menos abrangente do que a Civilização é a Sociedade. De uma forma bem evidente a sociedade tanto em seu sentido amplo como a que é diretamente atendida pela escola exerce um grau de influência sobre os fazeres escolares, determinando quais os saberes que devem ser ensinados na escola e quais as práticas que são aceitas. Faria Filho (2004, p. 151) em seu estudo sobre a cultura escolar fala em "constrangimentos sociais" a que são submetidos os sujeitos escolares. Esses constrangimentos dão origem aos saberes que não estão vinculados àqueles da ciência de referência e introduzem saberes que não estavam incluídos no programa escolar (meio ambiente e educação para o trânsito são exemplos recentes). Podem, inclusive, alterar técnicas de resolução de tarefas específicas de determinada disciplina. A inclusão digital pode alterar modos de abordar conteúdos matemáticos e os "macetes" nos cursinhos pré-vestibulares tradicionais são exemplos de técnicas criadas para atender a uma demanda social. Esses "constrangimentos" inculcam práticas docentes.

Instituições sociais como sindicatos, instituições governamentais, Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), igrejas, entre outras, exercem influência marcante na prática escolar, com suas publicações, cursos e discussões. Pode-se incluir também a questão salarial que impõe ao professor certas condições de trabalho nem sempre favoráveis ao bom desempenho das tarefas que lhe são requeridas executar.

A transposição didática defendida por Chevallard (2005) pressupõe que o saber que foi produzido longe da escola, no centro da produção acadêmica, sem nenhuma preocupação com as necessidades da escola, vai sendo modificado segundo certas leis e produzindo novas relações até se transformar em uma tarefa escolar. Muitas vezes a presença dessa tarefa nem mesmo é bem entendida pela escola e na sua execução se empregam certas técnicas cuja tecnologia é desconhecida por quem a executa. Mas pode-se acrescentar ainda a inclusão de disciplinas que são impostas pela sociedade à escola e que esta tem dificuldades para elaborar e implementar uma prática. A própria adoção de um determinado modelo docente depende (GASCÓN, 2003), frequentemente, da aprovação da sociedade porque esta determina as habilidades que espera como produto da escola.

No terceiro nível dessa hierarquia estão as escolas. No interior da escola também ocorrem fatores que influenciam a prática do professor. A disciplina escolar, por exemplo. Isto é, a preocupação com a ordem na sala de aula e com o rendimento escolar é também um fator determinante da OD. Professores recém-formados encontram forte resistência para implantar novas propostas metodológicas em uma escola dominada por professores e administradores veteranos já acostumados a uma determinada prática.

No âmbito das escolas e exercendo forte influência na atividade docente estão as Pedagogias. Este é o quarto nível das determinações didáticas.

No presente contexto Chevallard está considerando a pedagogia como um campo teórico que exerce influência sobre as formas didáticas das disciplinas, por meio de propostas metodológicas genéricas. Essa concepção se aproxima da concepção de Libâneo para o qual Pedagogia é um campo de conhecimento

> que investiga a natureza das finalidades da educação numa determinada sociedade, bem como os meios apropriados para a formação dos indivíduos, tendo em vista prepará-los para as tarefas da vida social. Uma vez que a prática educativa é o processo pelo qual são assimilados conhecimentos e experiências acumulados pela prática social da humanidade, cabe à Pedagogia assegurá-los, orientando-os para finalidades sociais e políticas, e criando um conjunto de condições metodológicas e organizativas para viabilizá-los (LIBÂNEO, 1994, p. 24).

Libâneo trata das diversas tendências pedagógicas e a forma como cada uma delas determina uma prática didática. Entendemos que a tendência pedagógica mais presente na formação do professor de matemática é aquela que concebe o ensino dessa disciplina como devendo seguir a forma linear como a ciência está estruturada. Tendência pedagógica infulenciada pela escola formalista.

Nessa perspectiva e considerando que nos cursos de licenciatura a maior concentração de conteúdos estudados não está nas disciplinas pedagógicas; considerando ainda, que o currículo tem como ponto principal a própria matemática de onde vem o conhecimento a ser ensinado e também o exemplo de como ensinar, temos que levar em conta que o ensino da matemática tem recebido forte influência da escola formalista. Esta escola foi encabeçada por David Hilbert na primeira década do século XX. Nessa corrente filosófica não faz sentido perguntar para que serve a matemática porque ela se reduz a um jogo de símbolos sem sentido, isto é, não tem relação com o mundo físico. O sentido está nas regras de combinação entre os símbolos, é um sentido interno à própria matemática (SNAPPER, 1984).

Os professores dos cursos de Licenciatura em Matemática mesmo que sejam licenciados, na maioria dos casos, tem a sua formação *Stricto Sensu* em Matemática Pura ou Aplicada onde as questões pedagógicas nem sempre são objetos de preocupação. O fazer de um professor, com formação centrada no formalismo, inspira práticas pedagógicas que exercem uma influência direta no desenvolvimento das práticas docentes. Normalmente os que são formados nessa perspectiva tendem a se tornar tecnicistas (GASCÓN, 2003).

No quinto nível dessa hierarquia estão as disciplinas.

Cada disciplina possui suas particularidades próprias. A Matemática, por exemplo, é definida como “a ciência da quantidade e do espaço” mas que “também trata do simbolismo relacionado com as quantidades e o espaço” (DAVIS; HERSH, 1986, p. 31). Constituída por afirmações gerais sempre verdadeiras, mas não necessariamente práticas, ela requer uma forma específica de ser trabalhada para que seus princípios possam ser compreendidos e os objetivos de sua inclusão no currículo escolar possam ser alcançados.

Entendemos que essa definição de Davis e Hersh está um pouco limitada, pois a matemática inclui também o estudo das relações entre símbolos e idéias, das relações entre quantidade e espaço e das relações entre idéias. Citamos a definição acima por estar disponível ao público e, no nosso entender, ser essa uma oportunidade para colocá-la em discussão.

O sexto nível é composto pelas áreas.

As disciplinas escolares, de acordo com essa hierarquia proposta pela TAD, estão divididas por áreas. Em um primeiro momento podemos admitir como áreas os grandes campos do saber matemático que no ensino fundamental são identificados pelos PCN como: Números e Operações (incluindo a introdução à álgebra), Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Cada uma dessas áreas, por sua vez, é estudada por meio de organizações didáticas diferentes porque produzem tarefas diferentes.

Particularmente entendemos que os PCN dividem os conteúdos por blocos e não por áreas e cada um desses blocos de conteúdos determinados pelos PCN comporta várias áreas. No bloco espaço e forma, por exemplo, temos a geometria plana, a geometria espacial e até mesmo um embrião da geometria analítica.

Esse sexto nível de estruturação, também conhecido como *domínios de estudo*, tem a sua razão lógica de existir. Assim está constituída a matemática. No entanto, a abordagem dessas áreas de forma não articulada, de modo que cada uma permaneça no seu isolamento não faz parte dos objetivos propostos pelos PCN. O isolamento das áreas constitui, sem dúvida, um fator de dificuldade.

Cada área, por sua vez, tem as suas divisões denominadas setores. Estes constituem o sétimo nível. Se considerarmos a geometria plana como uma área, então temos os teoremas de Pitágoras e de Tales como dois exemplos de setores.

O oitavo nível dessa distribuição hierárquica é composto pelos temas de estudo em que cada setor é subdividido. No teorema de Tales temos o tema do paralelismo, o tema da proporcionalidade, da semelhança de triângulos e da congruência de triângulos. No setor das equações temos o estudo das equações do primeiro grau, equações do segundo grau incompletas, equações do segundo grau completas, equações redutíveis ao segundo grau e a fórmula de resolução de equações, cada um constituindo um tema de estudo.

Por último, constituindo o nono nível, temos as questões ou assuntos. Os exemplos podem ser apresentados na quantidade que se desejar. Somar frações com mesmo denominador, somar frações com denominadores diferentes, determinar a medida de um segmento tomando outro como unidade, analisar se dois triângulos são semelhantes e muitos outros exemplos. Este é o nível mais elementar e que recebe as influências de todos os outros níveis da hierarquia. Nesse nível a praxeologia do professor se torna efetiva, a organização didática é observável e a organização matemática está definida. Centralizam-se nesse nível de determinação do saber todas as influências dos "constrangimentos sociais" a que se referiu Faria Filho (2004, p. 15), do grau de autonomia da escola e da tendência pedagógica que norteia a praxeologia e norteou a formação do professor.

Inserindo a temática da argumentação nesse contexto, diríamos que a argumentação é primeiramente um setor pertencente à área da lógica. A prática da argumentação como tema de estudo será analisada na perspectiva da TAD e do modelo proposto por Toulmin (2006). Este modelo será definido no capítulo sobre argumentação.

1.2 O Modelo Proposto pela Teoria Antropológica do Didático

Retomando as idéias centrais da TAD lembramos que a teoria propõe um modelo de estudo da atividade matemática. Essa atividade que consiste em "manipular" os objetos matemáticos, sejam eles ostensivos ou não-ostensivos, denomina-se praxeologia. Uma praxeologia é composta de duas partes, indissociáveis entre si, que possuem dimensões distintas: a prática e a teoria.

1.3 Objetos Matemáticos

A atividade matemática, segundo a TAD, se realiza mediante uma pluralidade de registros (escrito, gráfico, verbal, gestual e material). Sendo a matemática uma ciência essencialmente abstrata, seus elementos fundamentais ou conceitos, não são tangíveis senão pela mediação de signos. A TAD não atribui valor aos signos e não os classifica em mais ou menos apropriados. Uma figura, uma descrição verbal ou um gesto pode desempenhar o mesmo papel ou possuir o mesmo significado.

Esse componente da atividade matemática que está sendo denominado de signo recebe nessa teoria uma denominação neutra. Denominam-se objetos ostensivos tendo em vista ser a parte que apela aos sentidos. O termo ostensivo tem sua origem no latim (*ostendere*) e significa mostrar-se, apresentar-se, apelar aos sentidos, insistir em ser percebido.

São eles os elementos mediadores da apreensão dos objetos não-ostensivos, dos objetos propriamente matemáticos, que povoam o campo das idéias e que constituem o mundo do matemático. Não-ostensivos são objetos cuja existência é institucional, isto é, sua existência é um atributo da criação humana que os determinam, que os definem. Eles não podem mostrar-se a si mesmos, mas podem ser evocados mediante a manipulação de certos ostensivos apropriados.

Definida a diferença entre objetos ostensivos e não-ostensivos a TAD postula a existência de ambos e de uma relação entre eles. Uma relação que não é direta, ou assumida previamente, mas é construída pelo sujeito que age sobre eles. Postula-se a polissemia dos objetos ostensivos e não se discute a questão da intensidade com que o objeto insiste em se mostrar embora se admita como evidente que a escolha apropriada de uma simbolização e de uma terminologia adequadas são fatores importantes para a constituição e a qualidade de uma tecnologia ou teoria (CASABÓ, 2001).

Também é fundamental nessa teoria a admissão de que a "possessão", a "aquisição" ou a "apropriação" de um não-ostensivo não está ligada diretamente a um ostensivo ou a uma forma de apresentação. A "apropriação" de um conceito matemático, denominado objeto não-ostensivo, é produto de múltiplos fatores, de uma organização didática ou de uma atividade matemática complexa em que muitos objetos ostensivos intervêm e em que múltiplos recursos são mobilizados.

De igual modo nesse contexto de um modelo de análise em que uma atividade se realiza mediante a manipulação de diversos registros podemos evocar a demonstração e a argumentação. A demonstração, embora não seja um conceito puramente matemático, se processa através de objetos matemáticos ostensivos visando validar a relação que se conjectura existir entre objetos matemáticos não-ostensivos. A argumentação, mesmo sendo menos precisa e menos formal, também utiliza objetos ostensivos, matemáticos ou não, para cumprir o seu papel de procurar esclarecer ou convencer.

Ao dizer que a argumentação pode utilizar de objetos ostensivos não matemáticos estamos pensando nos casos em que, em uma argumentação justificatória, se recorre ao discurso ingênuo para convencer ou de gestos e exemplos não ligados à matemática, para explicar. A argumentação é ela mesma, um objeto ostensivo que evoca objetos não-ostensivos. Evoca inclusive a demonstração.

Sendo uma teoria cognitivista social a TAD concebe que é na prática dos sujeitos, na expressão das suas idéias que se avalia a produção do conhecimento e que uma atividade matemática envolve, invariavelmente, a manipulação dos ostensivos. É por essa razão que os registros de linguagem têm importância fundamental nessa perspectiva teórica. Toda técnica se evidencia através desses registros, e uma praxeologia matemática, portanto, inclui a utilização dos mesmos. Dessa forma, em nossa análise da prática dos acadêmicos nos reportaremos aos registros e não aos objetos ostensivos.

1.4 A Praxeologia

Nos parágrafos anteriores expusemos em linhas gerais o nosso entendimento da TAD. Essa teoria, entretanto, tem uma palavra-chave que é a praxeologia. O autor supostamente julgou irrelevante uma discussão em torno dessa palavra. Ela foi definida a partir de um conjunto de diálogos em que a praxeologia entra em pauta e o seu significado é definido no contexto da exposição da teoria (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). Talvez seja, no seu entender, um conceito que ele denomina de transparente, isto é, evidente por si mesmo.

Porém, da nossa parte, sentimos a necessidade de, se possível, buscar as raízes históricas da palavra e o seu significado em outros contextos. Não sentimos a transparência do conceito e procuramos por uma definição precisa do termo.

Ao produzir este texto, portanto, além de tratar da TAD em seu contexto mais amplo, temos a intenção de apresentar neste espaço uma discussão em torno da palavra "praxeologia". Focalizaremos alguns aspectos relacionados com o significado do termo, grafia e aspectos históricos abordando a evolução do conceito.

Praxeologia é uma teoria que se ocupa da atividade humana ou, mais precisamente, da ação eficiente. Segundo Abbagnano (2000) o termo mereceu destaque com o trabalho de Kotarbinsky, "*Praxiology, an Introducion to the Science of´Efficiente Action*, Oxford, 1965", produzido em polonês em 1955 e vertido para o inglês em 1965. O termo, segundo esse autor, tem grafia, na Língua Portuguesa, com *i* (Praxiologia) tal como é grafado em inglês (*Praxiology*) e italiano (*Prassiologia*). Em outras línguas, entretanto, o *i* é substituído pelo e, como é o caso de *Praxéologie* em francês.

No entanto, Swiatkiewicz (1997), um membro da Sociedade Científica de Praxeologia, em Varsóvia, amplia a informação incluindo outros nomes (Alfred Espinas, Tadeusz Kotarbinsk, Ludwig von Mises e George Hostelet), como autores da teoria sobre a ação humana e que demarcaram diversas praxeologias, e também traçando um resumo histórico da palavra e da teoria praxeológica.

Para esse autor "a praxeologia", grafada com *e*, "pertence ao conjunto das ciências práticas". Para ele a grafia com *i* é uma variante do original em polaco da mesma forma que é uma variante da versão original em Inglês. Em Polonês, língua na qual a palavra se originou, a grafia é com *e* (*Prakseologii*).

Estamos nos valendo dessas informações para justificar a nossa opção por utilizar a versão que grafa a palavra com *e* (Praxeologia), como grafia optativa, embora dicionários de peso indiquem a grafia com *i* como oficial.

A partir desse ponto teceremos algumas considerações sobre o significado do termo tendo ainda como referência o trabalho de Swiatkiewicz. Praxeologia é definida como uma teoria para explicar a ação humana. Pertence ao conjunto de ciências práticas e, na concepção de Kotarbinsky, é também uma ciência comportamental visto que se refere a um caso particular do comportamento humano, a ação. A ação, para o autor, é um comportamento motivado pela *livre vontade* e realizado com um propósito definido, logo, uma *práxis*. O estudo dessa *práxis* é a praxeologia.

Swiatkiewicz nos brinda com uma breve história do conceito lembrando que Praxeologia é formada por dois radicais gregos. *Práxis*, que significa ação, atividade, e *logos*, que significa ciência. Portanto, como já foi dito, praxeologia é o estudo da ação refletida, produto da livre vontade e direcionada para um fim específico.

Tadeusz Kotarbinsky (*apud* SWIATKIEWICZ, 1997, p. 638) escreveu que é “uma ciência sobre a eficiência da atividade humana”. Também pode ser definida como “uma metodologia geral”. Ainda nas palavras de Kotarbinsky: “A praxeologia, num determinado sentido, é algo muito novo e, noutro sentido, algo muitíssimo velho. É nova, enquanto especialidade científica a nascer e, é velha, enquanto conhecimento pré-científico, conhecimento geral”(Ibid.).

A palavra aparece pela primeira vez em uma publicação de 1882 em Paris, mas a teoria praxeológica foi fundada por Alfred Espinas, em 1890 ou 1897, em um artigo também publicado na França. Em 1926 o economista e matemático, de origem polonesa, Eugeniusz Slucki, também dedica uma obra ao tema. A teoria da ação, no entanto, foi formulada por Kotarbinsky em 1910 e desde então vários trabalhos foram produzidos por ele culminando com aquele de 1955, traduzido em 1965 para o Inglês, que popularizou a palavra, e a teoria, como a conhecemos atualmente: um estudo “sobre o bom trabalho”.

Mas para Swiatkiewicz não existe apenas um praxeologia. Cada autor conferiu-lhe um significado específico no âmbito da sua área de conhecimento e conforme o objetivo do seu trabalho. Essa constatação lhe permite informar que existem tantas praxeologias quantos são os seus autores.

Ludwig von Mises, por exemplo, um economista e matemático, aplica-a aos estudos econômicos atribuindo-lhe o significado de teoria sobre a influência da produção e consumo, isto é, da ação humana sobre a economia e estabelece uma diferença epistemológica entre praxeologia e lógica. “A lógica e a matemática lidam com um sistema ideal de pensamento. Suas relações e implicações são coexistentes e interdependentes. Podemos também dizer que são síncronas ou que são atemporais” (CALLAHAN, 2008, p. 2). O sistema praxeológico, porém, “pressupõe as categorias tempo e causalidade” (Ibid.)

Callahan distingue economia matemática de economia praxeológica. A primeira é um sistema mecânico e a segunda é uma ação humana. O autor termina o seu artigo afirmando que “A economia austríaca é a economia em que as pessoas são vistas como agentes inteligentes e criativos” (CALLAHAN, 2008, p. 6).

Petruszewycz (1965) afirma que muitos autores relutam em dar ênfase à palavra praxeologia porque ela remete a algo pragmático como, por exemplo, seguir um roteiro. Nesse sentido é que ela foi gestada na mente de matemáticos como

Jacques Bernoulli na sua arte de conjeturar. Outros grandes temas da matemática seguiram a mesma direção de elaborar roteiros e programas estruturados de estudo.

1.5 Tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias

Uma vez definidos cada um dos termos acima, ocuparemos um breve espaço para exemplificações. Os exemplos estão limitados ao campo da geometria euclidiana por ser neste campo que está situado o nosso objeto de estudo.

Uma tarefa poderia ser: verificar a possibilidade de se construir um triângulo cujos lados tenham 5 cm, 3 cm e 1 cm, respectivamente.

Uma técnica a ser adotada consiste em tentar a construção do mesmo utilizando a régua e o compasso.

Uma segunda técnica seria a soma de seus lados dois a dois para verificar se é sempre maior do que o terceiro lado.

Para a primeira técnica a tecnologia é rudimentar e consiste em demonstrar confiança nos instrumentos utilizados. É uma tecnologia empírica: fazendo não dá certo. A teoria também é empírica: é preciso verificar sempre.

Para o segundo caso há o teorema da desigualdade triangular que embasa o procedimento. O estudante, ao proceder dessa forma, pode ainda não conhecer o teorema, não ter visto a sua demonstração formal, porém acredita na afirmação do professor a esse respeito ou percebe a lógica da construção de um triângulo que resultou no teorema. Para um estudante a afirmação do professor, ou um texto escrito sobre a impossibilidade de se construir um triângulo cujos lados têm dimensões tais que a soma de dois lados é menor ou igual ao terceiro, é a tecnologia. Para outro a evidência lógica do problema é a tecnologia embora ele saiba dizer apenas: “pela lógica”. Ou então: “como que vai dar para fechar o triângulo?”. Em ambos os casos, porém, o teorema é a teoria de suporte.

Dependendo do nível de escolaridade o estudante pode recorrer ao teorema para explicar o seu procedimento. Nesse caso, o teorema da desigualdade triangular é a tecnologia e a teoria, ao mesmo tempo.

Essa tarefa proposta poderia ter caráter mais geral. Suponhamos que o problema fosse proposto nas seguintes palavras: verificar quais as condições que devem existir entre as dimensões dos lados para que seja possível construir um triângulo. Nesse caso teríamos um **tipo (T)** de tarefa e não uma tarefa propriamente dita.

Um segundo exemplo, para complementar o esclarecimento que por acaso tenha faltado nos parágrafos precedentes. Pensemos na verificação da relação que existe entre dois ângulos que são opostos pelo vértice. Do modo como o problema está posto ele nos coloca diante de um tipo de tarefa uma vez que há mais de uma relação[5] possível entre ambos.

Essa tarefa pode ser resolvida dos seguintes modos:

Por dobradura. A técnica consiste em desenhar duas retas concorrentes em uma folha de papel e por dobradura justapor os dois ângulos. Constata-se, por esse meio, que aquele par é formado por ângulos congruentes.

A tecnologia é empírica e consiste em uma experimentação. A teoria também é empírica do tipo verificar caso a caso.

É possível que algum estudante tente resolver a tarefa fazendo medições. A técnica é o procedimento de medir. A tecnologia, além do uso de instrumentos, também tem por base o empirismo. A teoria que explica esse procedimento é a necessidade de verificar caso a caso.

Uma terceira técnica para a resolução da tarefa consiste em usar o conhecimento de ângulos suplementares conforme exemplificado pela figura 1. Nessa figura, em que *a, b* e *c* são medidas dos ângulos, temos:

a) $a+c$=180º por serem suplementares;

b) $b+c$=180º por serem também suplementares;

c) Como c é suplementar de a e de b ao mesmo tempo conclui-se que $a=b$.

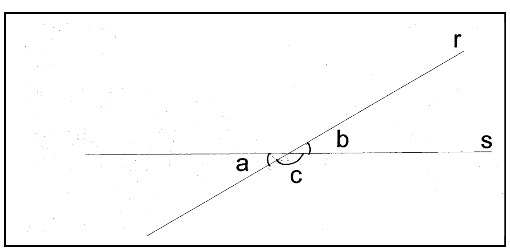


Figura 1–Demonstração da congruência de ângulos opostos pelo vértice (1).

[5] Eventualmente dois ângulos opostos pelo vértice podem ser também complementares (45º) ou suplementares (90º). Quando o problema é proposto, quase sempre, a relação que se tem em mente é a igualdade por ser esta uma propriedade constante.

Nesse caso, a explicação é possível aplicando os conhecimentos de ângulos suplementares e o princípio de que se duas coisas são iguais a uma terceira então são iguais entre si. Essa é a tecnologia mas é também a teoria.

Pode-se ainda resolver a mesma tarefa utilizando o recurso de duas retas paralelas cortadas por uma transversal, ilustrada pela figura 2.

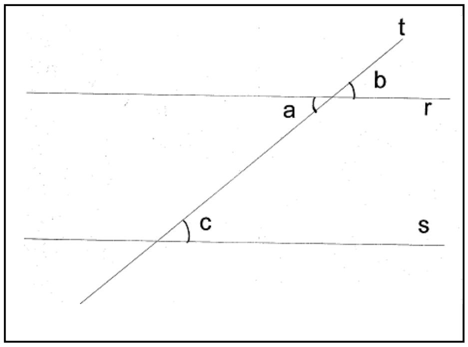


Figura 2–Demonstração da congruência de ângulos opostos pelo vértice (2).

Na figura temos que sendo r//s então a=c por serem alternos internos e c=b por serem correspondentes. Logo, a=b.

Nesse caso a explicação é possível aplicando os conhecimentos de ângulos alternos, ângulos correspondentes e o princípio de que se duas coisas são iguais a uma terceira então são iguais entre si. Essa é a tecnologia, o argumento racional que valida o resultado obtido. A teoria é composta por teoremas que já foram demonstrados e que nos garantem serem válidas essas propriedades.

Os exemplos de praxeologias apresentados até o presente são classificados por Casabó (2001) como locais, tendo em vista que as técnicas de resolução das tarefas podem variar.

Mas no trabalho que nos propusemos realizar, a tarefa proposta ao estudante consiste em afirmar a validade de uma proposição. A maneira de fazer consiste em recorrer a uma argumentação justificatória ou apenas explicativa. No entanto, o almejado não é uma argumentação com suporte na lógica natural. Essa argumentação deve estar apoiada na lógica racional que se embasa na teoria matemática pertinente a cada caso a ser justificado. Essa teoria é composta pelos teoremas, axiomas e definições diretamente ligados à proposição em pauta.

Nem sempre é fácil distinguir a tecnologia da teoria tendo em vista que há um imbricamento entre elas e, em alguns casos, a tecnologia pode ser a teoria. A teoria consiste nos pressupostos fundamentais da ciência enquanto a tecnologia é a explicação fundamentada nessa teoria; é o recorte da teoria utilizado para justificar a técnica.

Ocorre em muitos casos a tecnologia ter por base a experiência pessoal (empírica) ou, conforme já visto, se reduzir a um discurso ingênuo tendo por base impressões pessoais e idéias preconcebidas ou ainda se fundamenta em fatos ocorridos isoladamente. Em casos como esses a falha está na “teoria”, nos pressupostos, e não na tecnologia.

Toda tecnologia tem uma teoria (não, necessariamente, científica) que a fundamenta. Uma tecnologia, um argumento justificatório pode ser devidamente encadeado e ainda assim conduzir a uma conclusão falsa. Isso significa dizer que uma argumentação justificatória pode estar corretamente construída, porém ter partido de pressupostos falsos. Por outro lado, se os pressupostos estiverem corretos a tecnologia se confundirá com a teoria.

Uma técnica também é a aplicação de uma teoria. Mesmo quando se trata de um acerto casual pode estar ocorrendo o uso inconsciente da teoria.

Dessa forma podemos dizer que o que é técnica ou tecnologia em uma tarefa pode ser a teoria em outra.

1.6 Valência Instrumental de um Objeto Ostensivo

Temos visto que a atividade matemática, segundo a TAD, se realiza mediante uma pluralidade de registros (escrito, gráfico, verbal, gestual e material) e, que matemática sendo uma ciência essencialmente abstrata, seus elementos fundamentais ou objetos (que em algumas teorias são denominados de conceitos), não são tangíveis senão pela mediação de signos denominados objetos ostensivos.

Já vimos que TAD não atribui valor aos signos e não os diferencia em mais ou menos apropriados para evocar um objeto matemático. Ela aceita que uma figura, uma descrição verbal e um gesto podem desempenhar o mesmo papel e possuir o mesmo significado. No entanto, admite que para certas ações alguns signos são mais apropriados, isto é, são mais fáceis de ser manipulados e cumprem o seu papel de forma mais eficiente. Nesse caso, fala-se em valência instrumental (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) que corresponde à potencialidade instrumental do signo. Por exemplo, a fração que corresponde à metade do inteiro pode ser representada dos seguintes modos:

- Por uma figura (fig. 3). Esse signo tem um forte potencial instrumental didático, mas um fraco potencial instrumental operacional. É difícil operar com com figuras, especialmente se representarem frações diferentes.

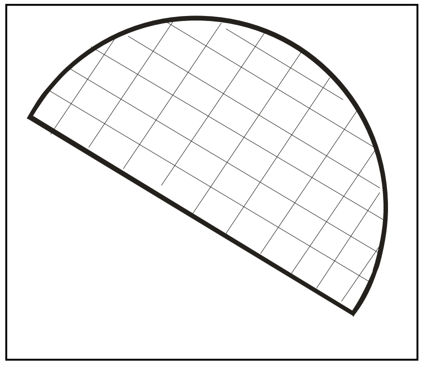


Figura 3 - A metade de um círculo representando a fração $\frac{1}{2}$

- Uma segunda forma de representar a mesma fração é pelo decimal 0,5, que tem grande potencial instrumental operacional, especialmente quando se usa calculadora. Da mesma forma, apresenta forte potencial quando o objetivo é inserir as frações no contexto do sistema decimal posicional. No entanto, como recurso didático tem um potencial menor do que o desenho.

- Mas, a fração meio ou metade, pode ainda ser representada na sua forma mais comum que consiste em fazer um traço horizontal e colocar o algarismo 1 sobre o traço e o algarismo 2 sob o traço resultando no que popularmente se denomina "um sobre dois". Simbolicamente: $\frac{1}{2}$.

Essa representação pode ter um potencial instrumental didático maior do que a representação decimal. Tem forte potencial instrumental para operações sem o uso de recursos tecnológicos, mas fraco potencial instrumental para operações com o uso dos recursos tecnológicos populares. Tem também fraco potencial quando o objetivo é tratar o número no contexto do sistema decimal posicional.

- Ainda outro modo de representação da mesma fração é em forma de potência com expoente negativo: 2^{-1}. Esse signo tem um grande potencial instrumental quando se tem por objetivo incluir o número no contexto das progressões e das potências de base 2. Da mesma forma é potente para operações com tecnologias mais avançadas (calculadora científica, por exemplo). Para algumas operações manuais também ele possui uma potência maior do que a representação decimal.

Parece evidente que o uso da linguagem corrente, usando ilustrações verbais, para tratar do assunto é também uma forma aceitável, porém, com fraco (talvez nenhum) potencial instrumental operatório, embora possua um bom potencial didático.

1.7 O Estudo da Matemática e a TAD

A aprendizagem da matemática se dá através de atividades de estudo quer estejam em um contexto didático ou em um contexto não-didático. Tanto pode ser um contexto em que o sujeito estuda para ensinar, como pode ser um contexto em que se estuda para aplicar ou estuda para compreender e satisfazer as suas curiosidades intelectuais.

A matemática, de acordo com a TAD, é um saber que se aprende e que se ensina e é também um conhecimento que se faz e se utiliza. Ela pode ser aprendida, ensinada, criada e aplicada em contextos escolares ou não-escolares.

O conceito de criação aqui expresso não se limita ao que é concebido na Matemática Pura em que criar significa produzir algo inteiramente novo a partir de uma estrutura previamente construída pela sociedade, especialmente pela comunidade científica. No contexto da TAD fazer também é criar. Fazer matemática inclui a modelação de um problema prático, provindo do cotidiano nosso ou de alguma pessoa de nossas relações sociais, a partir do conhecimento matemático que dominamos.

Resolver problemas intra[6] e extramatemáticos, isto é, resolver problemas gerados a partir do próprio estudo da matemática e aplicar os conhecimentos na solução de problemas sociais de qualquer complexidade são atividades próprias do fazer matemático. Faz, portanto, matemática aquele que apresenta soluções para os problemas propostos e se responsabiliza pela validade da resposta dada.

Ao dar à sociedade a certeza de que a solução proposta está fundamentada nos princípios da ciência o sujeito está fazendo matemática.

---

[6] Um exemplo de problema intramatemático está na busca de uma solução alternativa para a divisão de duas frações. Ao efetuar $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ costumamos fazer: $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2$, mas podemos também multiplicar o denominador de uma fração pelo numerador da outra e obter o mesmo resultado: $4 \times 1 \div 2 \times 1 = 4 \div 2 = 2$. Algebricamente temos: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, ou $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = ad \div bc.$ Os problemas extramatemáticos são oriundos do contexto social.

Dessa forma, a atividade matemática não é vista apenas como “artefato escolar”, pois a teoria leva em conta “o que acontece fora da escola e, em particular, a pouca visibilidade da matemática no conjunto da sociedade” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 46).

1.8 Momentos de Estudo

Chevallard, compreendendo que as ações desenvolvidas no estudo da matemática não acontecem de forma isolada e, observando que há certa regularidade nessas ações, concebeu o conceito de momentos didáticos ou momentos de estudo. Os momentos de estudo, segundo Chevallard (2001) e Chevallard, Bosch e Gascón (2001) são vivenciados por todos que assumem a postura de estudar matemática. Uma pessoa pode estudar matemática para responder a uma questão imediata sua ou de algum amigo que solicita a sua ajuda. Nessa concepção uma pessoa estuda quando assume a responsabilidade pela solução de um problema. Para isso mobiliza seus conhecimentos e busca outras informações pertinentes de modo que o problema seja resolvido. Essa pessoa utiliza uma matemática conhecida e “produz” uma matemática para quem não a conhece, porque produz uma resposta matemática e estabelece uma certeza com base em fundamentos matemáticos.

Pode-se estudar também porque se deseja aprender ou porque assumiu a responsabilidade de ensinar e, portanto, estuda visando a elaboração de uma organização didática que proporcione ao estudante, que pode ser ele mesmo, a vivência com os objetos matemáticos. Nesse caso, os recursos (conhecimentos, saberes, técnicas e argumentos) mobilizados são diferentes do caso anterior. Aqui há um interlocutor presente que não quer saber apenas a resposta mas também os porquês e o como fazer.

Mas também há os que estudam por estarem imbuídos da tarefa de produzir uma matemática nova, querem contribuir para a ampliação do saber matemático. Os problemas a que se propõem resolver não estão ainda modelados ou ainda não há conhecimentos construídos em quantidade e qualidade suficientes para a sua modelagem.

Em todos os três casos se diz que houve uma criação. Nos dois primeiros casos a criação consiste no cultivo da ciência e na reformulação de conceitos. Ocorre a criação de uma nova vivência com a matemática, uma revitalização desse saber. Os conhecimentos “produzidos” não serão novos em termos de vir à existência, mas serão novos por estarem sendo vistos sob uma nova ótica ou vistos por quem nunca os tinha visto antes. No terceiro caso ocorre o que se chama de verdadeira criação ou fecundação da ciência.

Em cada um dos casos o sujeito envolvido no processo vive diferentes momentos de estudo. O momento em que se depara com o problema pela primeira vez ou que recebe o desafio de resolver uma tarefa que ainda não resolvera antes. Se o desafio é aceito, se o problema é assumido, passa-se a viver outros momentos sucessiva ou simultaneamente. Este é o momento número um, o momento do encontro com a tarefa ou pode ser um reencontro. Há casos em que já se estudou sobre determinado tema sem a preocupação de fazer dele objeto de reflexões posteriores. No entanto, uma questão desse mesmo tema pode reaparecer com nova roupagem ou como uma necessidade.

O envolvimento com o desafio leva o sujeito a procurar informações complementares e modelos parecidos. Procurar uma técnica existente, encontrar uma fórmula, que possa ser adaptada ou sugerir idéias para a produção de outra técnica. Este é o momento em que se está ampliando o conhecimento sobre o tema de estudo em que o problema está situado e construindo um discurso que nos convença que o problema é solúvel. A TAD denomina esse segundo momento de "exploração de tarefas" ou, melhor dizendo, exploração de tarefas similares e elaboração de uma técnica.

Uma vez encontrado o caminho, reunidas as idéias básicas necessárias começa-se por viver o terceiro momento em que a técnica é experimentada, modificada, se necessário, e aplicada. Esse é o momento em que a técnica está sendo trabalhada. Mas esse momento também não acontece isolado, pois o trabalho com a técnica envolve reflexões sobre a sua pertinência, explicações, autoconvencimento e experimentações. Todo entorno teórico-tecnológico está sendo construído nesse momento. Também se denomina momento de construção de um ambiente favorável à resolução de uma tarefa.

Mas não basta resolver um problema. É preciso ter certeza de que a solução encontrada está correta. Chega o momento de conferir a técnica utilizada. Mas não basta verificar se ela resolveu bem aquele problema. Sentimos a necessidade de estar certos de que a solução encontrada não foi uma casualidade, porque nesse caso, é possível que logo mais se descubra que contém equívocos que desmerecem o trabalho de quem produziu tal solução. Neste quarto momento ocorre a certificação de que a técnica usada tem respaldo nos princípios teóricos da ciência. Esse momento de consolidação é fundamental para dar credibilidade ao trabalho. Todo trabalho produzido, seja ele matemático ou didático, necessita ser validado por uma teoria, ser explicado com base em um saber. Esse é o momento que se avalia a técnica utilizada.

A conclusão de uma organização didática sempre resulta em um conhecimento organizado, estruturado. Esse conhecimento é validado socialmente porque é fundamentado em uma teoria que recebeu o respaldo social. Tendo confirmado a validade da técnica; tendo sido mostrado e aceito o pressuposto de sua validade geral, surge a necessidade de divulgá-la. É o momento, segundo a TAD, da institucionalização da técnica. Enfim, institucionalizar é dizer que está de acordo com as regras aceitas pelas instituições sociais, pela comunidade acadêmica.

Por fim, se houve o envolvimento pessoal, busca-se por uma forma sintética. Procura-se pela redução do número de passagens por torná-la aplicável ao maior número de problemas possível. Vive-se então o momento didático da algebrização, da generalização, da transformação da técnica em uma regra geral. É o momento da melhoria da técnica, o sexto momento[7].

Esses momentos didáticos são concebidos como uma experiência pessoal ideal de quem estuda matemática. Por essa razão se constitui em um modelo para avaliar uma OD. Uma atividade matemática elaborada com a finalidade de envolver um grupo de estudantes na resolução de uma tarefa ou um tipo de tarefa deve levar em conta esses seis níveis de envolvimento e produção matemática.

1.9 A TAD e a Argumentação

Um dos pressupostos da TAD é que toda técnica utilizada na resolução de uma tarefa tem uma explicação racional, havendo inclusive uma inseparabilidade entre ambas. Não há previsão para a existência de uma prática desprovida de uma explicação. Não há prática sem uma razão para a sua existência. Da mesma forma toda explicação é a explicação de algo ou sobre alguma prática.

Essa inseparabilidade constitui o sentido da praxeologia. Casabó (2001) pressupõe que no próprio sentido cultural a palavra compreensão traz implícita a exigência da produção de um discurso descritivo-justificativo do que deve ser feito.

---
[7] Os seis os momentos didáticos podem ser assim sintetizados: 1) primeiro encontro; 2) exploratório; 3) tecnológico-teórico; 4) trabalho com a técnica; 5) institucionalização; 6) avaliação.

Esse saber que justifica a prática é denominado racional quando é embasado em uma teoria.

Diz-se que é natural quando embasado na experiência, quando resulta da observação de fatos que se repetem um certo número de vezes, com alguma regularidade, por um observador que não sistematizou o registro e não estabeleceu vínculo com nenhuma teoria. Diz-se que esse saber é folclórico quando tem por base os sentimentos, os mitos, os desejos e, muitas vezes, a ingenuidade.

O discurso racional, como é concebido pela TAD, é denominado de tecnologia. Tecnologia, portanto, é uma argumentação que procura justificar o funcionamento da técnica adotada. Procura, inclusive, justificar a opção por aquela técnica, no caso de haver mais de uma possibilidade.

Como argumentação justificatória, a tecnologia tem a finalidade de convencer sobre a importância do objeto em foco, validar o resultado de uma tarefa executada, esclarecer o porquê dos procedimentos adotados.

Conforme já visto, estamos supondo que existem diversos níveis de racionalidade e seus consequentes níveis de argumentação. Desde o raciocínio natural até o lógico-dedutivo há uma gama, mesmo que não muito vasta, de possibilidades.

O próprio raciocínio natural pode variar da linguagem ordinária e a argumentação permanecer no nível “folclórico”[8] aos níveis nos quais a experiência de vida e os muitos exemplos repetidos com acerto são evocados como explicação ou justificativa. Supomos que seja possível também ter um nível de raciocínio próximo do natural mas já impregnado de algum conhecimento formal faltando apenas a incorporação de uma terminologia específica. Da mesma forma pode ocorrer a existência de um raciocínio pré-lógico-dedutivo, no qual falta uma terminologia especializada, mas permite entrever o embrião de uma lógica formal.

Por exemplo, é possível que um pai ou mãe pouco letrado, mas com boa vivência social, ao ver o filho efetuar a operação $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ e obter $\frac{2}{4}$ diga, de imediato, que o cálculo está errado. Mas como aprendeu isso na experiência da vida poderá ter dificuldade para explicar e dirá apenas: “você não está vendo que não pode ser?” No

[8] Pais explica que esse tipo de argumento é carregado de jargões, crenças, tradições, estereótipos, soluções mágicas, modismos e mitos que circulam no imaginário das pessoas e afirma que: “Mesmo que nem todo argumento folclórico seja um argumento errado, pois, em certos casos bem específicos, pode ser apenas uma redução simplista de uma questão, a predominância desse tipo de explicação para os fenômenos educacionais boicota a profissionalização da carreira docente” (PAIS, 2008, s/p.).

entanto, pensamos que não se trata de um argumento folclórico porque há oculta em suas palavras uma lógica racional. Por ser construída fora dos centros acadêmicos não tem um vocabulário próprio, uma nomenclatura para os termos, uma forma sistematizada de esclarecer o problema.

Não raro encontramos torcedores de futebol opinando sobre as possibilidades do time A vencer o time B. O argumento tem por base os jogadores que compõem ambos os times, especialmente os do time A. Jogadores que já mostraram bom desempenho em outros jogos recentes. Cremos que essa argumentação é diferente daquela em que se afirma que o time A vencerá o time B porque "o meu time não pode me envergonhar". Esta última argumentação é folclórica, mas na primeira há uma certa racionalidade que se aproxima da lógica dedutiva. Embora, na maioria das vezes, é conduzida por expressões oriundas da lógica natural, tem toda a sua estrutura embasada na experiência.

Mesmo muito próximo da lógica racional há, em nosso entender, uma dimensão preliminar que, no entanto, ultrapassa os limites da lógica natural. Estamos pensando naqueles casos em que o agricultor aprende a "cubicagem" de terra, isto é, a determinação de áreas a serem cultivadas. É curioso como, às vezes, determinam a área de figuras não regulares, verdadeiros trapezóides, usando métodos aprendidos com agrimensores que por ali passaram. A partir de um exemplo estendem o raciocínio para práticas em outras áreas e transmitem às novas gerações. Falta-lhe o linguajar técnico, a explicação racional, mas há uma lógica naquilo que fazem.

O raciocínio natural produz uma argumentação fraca, com pouco poder de convencimento. Vindo daí a necessidade de que haja uma migração do raciocínio natural para o raciocínio lógico-dedutivo.

Atualmente concebe-se que haja uma forma de estudar contribuindo para que se aproprie dos objetos não-ostensivos e para que os mesmos sejam apresentados. Supõe-se que seja possível um argumento justificatório evoluir do natural para o lógico sem rupturas drásticas que possam comprometer a compreensão.

Há, numa argumentação, aspectos explicativos e aspectos justificativos. Esses aspectos serão tratados em outro capítulo.

Ao analisar as **práticas argumentativas no estudo da geometria euclidiana** na perspectiva da TAD estamos concebendo a existência de uma argumentação explicativa em que o foco é no como se faz, portanto, com função técnica e uma argumentação justificatória, com função tecnológica. A estrutura da argumentação, enquanto tecnologia, será esquematizada pelo modelo de Toulmin (2006).

2 Síntese do Capítulo

Nos parágrafos seguintes retomaremos algumas idéias tratadas neste capítulo visando aproximá-las mais entre si e estabelecer outras relações que o contexto anterior não permitiu.

A TAD é um modelo epistemológico de análise da atividade matemática porque procura entender o que é fazer matemática e como se produz esse conhecimento.

Um modelo para entender as relações que são estabelecidas entre a prática e a teoria, isto é, estudar a praxeologia do fazer matemático. É um modelo descritivo das atividades desenvolvidas enquanto o conhecimento é construído e das condições em que ocorre a criação de um novo saber, na qualidade em que a academia assim o considera, e da reconstrução tal como ocorre em uma atividade didática.

Essa atividade, e o saber que emerge a partir dela, são descritos pela TAD em termos de organizações ou praxeologias matemáticas. Matemáticas no plural porque para essa teoria a matemática produzida pelo pesquisador não é, necessariamente, a mesma produzida pelo estudante em um contexto didático. Uma organização matemática é composta por tarefas e técnicas que resolvem essas tarefas, e por um discurso que explica e justifica a pertinência e a validade teórica da técnica. Esse discurso denominado de tecnologia é sempre embasado em uma teoria, quando se trata de uma produção acadêmica, ou pode ter um embasamento empírico ou "folclórico" do tipo "deu certo" quando se trata de uma reprodução da atividade matemática em uma atividade didática.

Tarefas, embora este seja um conceito suficientemente amplo na TAD, não são elementos espontâneos, naturais. Elas são um produto social porque não se resolvem com o simples emprego da atenção e nem nos ocupamos de "tarefas" sem importância. Atividades que não são valorizadas pela sociedade são descartadas, realizadas com displicência ou como distração[9]. O conceito de tarefa é amplo porque, segundo Chevallard (1999), não se restringe ao fazer matemático mas a tudo que

[9] De alguma forma essa concepção de tarefa como produto social parece explicar porque professores com mais entusiasmo tendem a conseguir melhores resultados com os alunos. Eles imprimem a idéia de estar convictos da importância social das tarefas que desempenham.

pode ser expresso por um verbo: ir à escola, estudar matemática, escovar os dentes, dormir[10].

As técnicas também não são aleatórias, não se utiliza qualquer técnica para resolver um problema. Deve existir uma razão para ser determinada técnica e não outra. E a razão apresentada em forma de explicação ou justificativa é a tecnologia ou argumentação justificatória fundamentada.

Uma técnica pode ser "autotecnológica". Pode ter "dupla função, técnica e tecnológica, que permite por sua vez *encontrar* o resultado pedido (função técnica) e *justificar* que este é o resultado esperado (função tecnológica)" (CHEVALLARD, 1999, p. s/n, grifo do autor; tradução nossa).

Quando são consideradas organizações matemáticas em processo de desenvolvimento podemos falar de "tecnologias" e "teorias" referindo-se a discursos informais e espontâneos. "Em geral os elementos tecnológicos e teóricos de uma organização matemática remetem a elaborações descritivas e justificativas que são frutos do trabalho matemático de várias gerações" (CASABÓ, 2001, p. 4).

A teoria, às vezes, está fora do campo de estudo. Segundo Chevallard (1999, p. 5) com frequência se remete a outra instituição o princípio da explicação teórica. Por exemplo, é relativamente comum dizer: "foi demonstrado por Gauss que...", "em matemática se afirma que..." (frase usada pelos professores de outras áreas), "pelo teorema de..." (mas não se demonstra o teorema e talvez nem seja interessante demonstrá-lo nesse contexto), "da proporcionalidade sabemos que..." (ao resolver problemas relacionados com o teorema de Tales, por exemplo). Uma teoria tende a embasar várias tecnologias e uma tecnologia pode justificar muitas técnicas.

Em praxeologia pontual, por vezes, não é simples identificar todos os quatro elementos, pois a tecnologia e teoria se imbricam. O quaterno (t, τ, Θ, Φ) não pressupõe uma única técnica para cada tarefa. Para cada tarefa pode haver várias técnicas e para várias técnicas uma única tecnologia e para várias tecnologias uma teoria. Dessa forma o quaterno poderia ser explicitado por: (tarefa, pelo menos uma técnica, tecnologia, teoria).

Na realização de algumas tarefas pode ocorrer que a técnica utilizada seja ela mesma a tecnologia. Realizar uma operação no conjunto dos números naturais

[10] Dormir constitui-se em uma praxeologia porque há uma tarefa (dormir), uma técnica, considerada correta (deitar-se em colchão e travesseiro apropriados e número de horas de sono), uma justificativa (tecnologia) para essa forma de dormir e toda uma discussão teórica no campo da medicina a respeito dessa técnica.

como técnica para resolver determinado problema aritmético é por si só uma tecnologia porque dá sustentação à resposta dada.

Uma tarefa ou tipo de tarefa é algo preciso, bem definido. Determinar o valor do ângulo x da figura dada é um exemplo.

Técnica, conforme já visto, é uma maneira de fazer e, embora, uma técnica possa resolver várias tarefas o seu alcance não é ilimitado. Uma técnica pode não resolver todas as tarefas de um mesmo tipo. Citemos um exemplo: calcular a área de figuras planas através da triangulação da mesma. O Cálculo Diferencial e Integral nos mostra que áreas de certas regiões poligonais são calculadas pela retangulação.

Uma técnica, no entanto, não é necessariamente de natureza algorítmica. Chevallard (1999) afirma que o número das técnicas não algorítmicas supera o número das técnicas algorítmicas. Entretanto, uma técnica necessita do reconhecimento de uma instituição para ser válida. Citemos também aqui alguns exemplos sem entrar no debate das questões éticas envolvidas nos exemplos.

Exemplo 1. A tourada é uma técnica de diversão válida em alguns países.

Exemplo 2. Calcular a área do círculo como sendo ¾ da área do quadrado construído sobre o diâmetro já foi uma técnica válida na China antiga.

A tecnologia que justifica uma técnica, quando fundamentada em uma teoria, pode torná-la válida para a resolução de várias tarefas. Nesse caso a organização matemática deixa de ser pontual (uma técnica para cada tarefa) para ser uma organização "local", de caráter mais geral, quando uma técnica é suficiente para resolver um tipo de questão como a adição de todos os pares de frações com denominadores diferentes, por exemplo (CASABÓ, 2001). Uma questão é composta por vários tipos de tarefas.

Na medida em que a argumentação justificatória evolui da forma "folclórica" para um discurso lógico e fundamentado na organização matemática também evolui para um estágio considerado "regional" por possuir maior abrangência de produzir técnicas capazes de resolver uma gama mais extensa de problemas ou uma questão maior.

Tomando ainda como exemplo a operação com frações diríamos que a técnica da adição pode ser estendida para a subtração e para as frações algébricas.

A TAD não tem como objetivo estudar como se processa a formação de conceitos pelo sujeito, mas analisar os usos que ele faz dos conceitos. Esses usos se evidenciam pela manipulação dos objetos ostensivos e os argumentos utilizados na justificativa desses usos.

Os objetos matemáticos não são palpáveis, não são captados pelos sentidos. Em virtude dessa particularidade a TAD não se propõe analisar como eles são compreendidos ou quanto se sabe sobre eles. Sua proposta é de uma técnica de análise do que se faz com eles e do que se diz sobre eles. Diante disso se justifica nossa proposta de análise da argumentação porque é pelo discurso tecnológico que se verifica a relação do sujeito com o objeto matemático. A argumentação nos revelará, através das relações que são estabelecidas no processo de "manipulação" dos objetos não-ostensivos através dos ostensivos, o nível de familiaridade do sujeito com o objeto. Uma familiaridade que depende da relação que ele estabelece com as instituições didáticas: instituições de educação básica ou superior (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). Um sujeito da educação básica possivelmente não terá a mesma familiaridade com determinado objeto que um sujeito de um curso de licenciatura ou bacharelado em matemática. Esses níveis de familiaridade determinam o nível de precisão e adequação da argumentação explicativa ou justificatória.

Na perspectiva da TAD o matemático constrói e o aluno reconstrói o saber, mas ambos estão fazendo matemática e uma matemática nova para o seu grau de familiaridade com as instituições didáticas e grau de familiaridade com o tema de estudo.

Fazer matemática é uma atividade que consiste em desenvolver uma ação justificada por um discurso fundamentado na teoria. A matemática resultante dessa atividade sempre será nova para o seu produtor se o momento didático que está sendo vivenciado não consistir apenas na repetição de tarefas que utilizam a mesma técnica visando a consolidação de um conhecimento.

Há uma estreita relação entre desenvolver uma praxeologia e estudar matemática. A primeira consiste em resolver tarefas, levar a cabo uma ação organizada, e a segunda em construir um conhecimento que não está ainda disponível para o publico, no caso do matemático, ou para si mesmo no caso do sujeito de uma instituição didática. No entanto, mesmo nesse caso temos que postular a inseparabilidade de ambas: uma leva à outra. Não há praxeologia sem o *logos*, sem o saber que a orienta. Não há *logos* se não produz uma ação.

Técnicas e tecnologias às vezes se confundem. Por exemplo, o teorema de Pitágoras é tecnologia e técnica. É um teorema usado para justificar certos procedimentos resolutivos, determinados passos de uma técnica para resolver tarefas envolvendo triângulos. Ao mesmo tempo é uma técnica para resolver outras tarefas também envolvendo triângulos.

Outro exemplo seria a resolução de uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a ≠0, b≠0 e c≠0 que tanto pode ser resolvida pela fórmula comumente atribuída a Bháskara como pela técnica de complemetar quadrados transformando-a em um trinômio quadrado perfeito.

A argumentação que o estudante utilizará enquanto resolve uma tarefa proposta e constrói ou elabora o seu conhecimento matemático será, portanto, definida, em termos de TAD, como técnica como uma tecnologia.

Em todo esse contexto uma organização didática (OD) é uma forma de dispor os elementos que devem ser envolvidos no estudo de cada tema da Matemática. Por exemplo: se a tarefa é estudar um tema X, a técnica didática poderá consistir em escolher as questões, elaborar atividades envolvendo essas questões, reunir os dispositivos didáticos necessários e planejar como e quais os momentos didáticos que serão vivenciados.

Uma OD elaborada pelo professor que segue padrões canônicos ou já se constitui em uma prática usual desse professor, é uma praxeologia didática. A tecnologia sempre consiste no discurso justificatório da ação ou da atividade proposta.

CAPÍTULO II

A METODOLOGIA DA PESQUISA

Todo processo de investigação requer que seja explicitado o método e respectiva metodologia. Portanto, os parágrafos que seguem se constituem em uma tentativa de resolver essa questão.

2 A Escolha do Método

A definição de método adotada neste trabalho foi dada por Pais, nas linhas seguintes:

> Método significa a escolha de um caminho que pode conduzir à busca do conhecimento, incluindo necessariamente uma visão de mundo, da vida, no sentido amplo e os valores historicamente construídos pela humanidade. Como conseqüência dessa visão de mundo, a opção por um determinado método deve explicitar certos procedimentos ordenados, pelos quais se espera chegar à apreensão da verdade (PAIS, 2006, p. 105).

Partimos do pressuposto de que a adoção de um método está condicionada aos objetivos propostos, à experiência do pesquisador e à sua postura diante do mundo.

O método, portanto, é uma escolha pessoal levando em conta os fatores expostos acima e o poder que o mesmo tem de responder as questões que o pesquisador se propõe investigar.

Nas palavras de Sakate:

> Cada método está ligado a uma concepção filosófica, a uma visão de mundo escolhida pelo pesquisador *entre os paradigmas existentes*. Conseqüentemente, cada pesquisador tem certos procedimentos, tem uma forma mais ou menos delineada de conduzir a pesquisa, de buscar as conclusões quanto ao questionamento proposto. Nesse sentido, o método é uma questão de escolha e não deve ser imposto (SAKATE, 2003, p.56 grifo nosso).

Se a proposta de investigação estivesse definida através de questões norteadas pelos objetivos de descobrir o porquê se faz necessário argumentar, provar e demonstrar em matemática o método de investigação naturalmente seria outro, diferente do que o descrito a seguir. Da mesma forma, seria outro o método se a questão norteadora fosse a quantidade de acadêmicos, ou acadêmicas, que utilizam determinados procedimentos argumentativos ou que evoluem de uma argumentação para a demonstração.

No entanto, neste trabalho não nos ateremos a medições ou quantificações. A pretensão é analisar a **prática** da argumentação. Não uma argumentação qualquer, mas aquela que se apresenta durante a resolução de uma tarefa didática de matemática. Uma tarefa que foi apresentada aos acadêmicos numa aula de geometria plana e em sala de aula de um Curso de Licenciatura. Uma prática que tem um público específico, que envolve um grupo de pessoas com a mesma perspectiva profissional; pessoas que vivenciaram a mesma organização didática e que são provenientes de escolas públicas de uma mesma região e, portanto, supostamente com uma variação cultural e escolar não muito grande, optou-se por desenvolver uma pesquisa do tipo etnográfico.

Ao discutir a metodologia da pesquisa entendemos ser oportuno lembrar que, como salientaram André e Lüdke (1986, p. 2), “a pesquisa não se realiza numa estratosfera situada acima da esfera de atividades comuns e correntes do ser humano”. Dessa forma, a pesquisa, sofre “as injunções típicas dessas atividades”. Como atividade humana a pesquisa é produto da consciência do pesquisador (HUSSERL, 2000). O pesquisador vai a campo com a sua experiência de vida, com os seus valores e com as suas teorias. Esses valores, constructos sociais, são conferidos aos objetos. Aliás, esse é, no nosso entender, um segundo princípio da pesquisa exposto por André e Lüdke (1986, p. 3). Elas afirmam que “como atividade humana e social a pesquisa traz consigo, inevitavelmente, a carga de valores, preferências, interesses e princípios que orientam o pesquisador”.

Numa pesquisa educacional, diferentemente do que ocorre nas pesquisas experimentais, o fenômeno não pode ser isolado e não pode ser visto de “fora” pelo pesquisador tendo em vista que este, via de regra, também é um educador, e como um ser político procurará captar o fenômeno com a perspectiva de quem leva consigo uma teoria educacional, um modelo docente, uma experiência de vida e um discurso forjado nesse contexto. A pesquisa do tipo etnográfico na perspectiva de André (2008) e de Malinowski (1970) pauta–se por uma coleta e uma abordagem qualitativa dos dados.

Uma perspectiva que está bem presente na pesquisa qualitativa é que não há perfeita separação entre o sujeito da pesquisa e o pesquisador. Este é o “veículo entre o conhecimento acumulado na área e as novas evidências que serão estabelecidas a partir da pesquisa" (ANDRÉ; LÜDKE, 1986, p.3).

André salienta ainda que vem crescendo o interesse dos pesquisadores da área de educação pelo uso das metodologias qualitativas cujas características básicas consistem em:

a) Ter o ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. É no contato direto e prolongado com o ambiente que o pesquisador presencia o maior número de situações. Em tais condições é possível analisar gestos, palavras e modos de ser das pessoas. No nosso caso estamos considerando como ambiente natural a sala de aula.

Por ter como fonte de dados o ambiente natural uma pesquisa conduzida nessa perspectiva é também denominada naturalista.

b) "Os dados coletados são predominantemente descritivos" (ANDRÉ; LÜDKE, 1986, p.12). Os acontecimentos, as entrevistas, os depoimentos, desenhos, textos produzidos são descritos em suas minúcias. A avaliação desses dados leva em conta fatores como: a completude da tarefa executada; a funcionalidade no contexto em que foi utilizada; a praticidade, o alcance e a inteligibilidade de uma técnica; as possibilidades de seu aperfeiçoamento e a proximidade que ela tem com uma equivalente em outra cultura. No nosso caso essa outra cultura é a cultura acadêmica.

c) Valoriza mais o processo do que o produto. O interesse do pesquisador é investigar como determinado fenômeno se desenvolve, se transforma e se manifesta a partir das atividades cotidianas.

d) A pesquisa é essencialmente descritiva porque o pesquisador centraliza sua atenção no significado que as pessoas atribuem às coisas. Ele analisa os diferentes pontos de vista dos participantes e procura entender o dinamismo que se apresenta no interior das situações.

e) Como a análise parte dos casos particulares, dos fenômenos observados, na busca de uma *possível* generalização, diz-se que segue um processo indutivo. O método naturalista não tem a pretensão de fornecer resultados de aplicação universal.

Lidando com seres humanos o pesquisador em educação, da mesma forma que o docente, se depara "com a irredutibilidade dos indivíduos em relação às regras gerais, aos esquemas globais, às rotinas coletivas" (TARDIF; LESSARD, 2005, p. 43). O objeto da sua pesquisa tende a escapar da sua observação e, por vezes, tomar rumo inesperado após uma intervenção. Seu objetivo principal é compreender o fenômeno naquele contexto em que está inserido, tentar estabelecer relações com outros contextos e, se possível, generalizar.

O trabalho de pesquisa que estamos conduzindo se insere no contexto da pesquisa qualitativa e, como disseram ainda André e Lüdke (1986, p.1), quando se trata de um trabalho de pesquisa faz-se necessário “promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas” sobre o assunto.

Esse confronto é possível graças à vivência do pesquisador com o contexto social em que o fenômeno está inserido e aos paradigmas adotados para a coleta de dados e respectiva análise. Os dados coletados são comparados com esses parâmetros articulando o caso particular observado com outros casos. Como esses outros casos são analisados por outros pesquisadores, e sob outro prisma, o particular fica inserido em um contexto geral.

Para entendermos o significado de pesquisa qualitativa, uma vez que a autora citada afirma que é necessário romper com a dicotomia qualitativo-quantitativa tendo em vista que em ambos os casos podem haver dados quantitativos, traçaremos um breve paralelo entre os dois paradigmas existentes. Manteremos em mente o que salientou André (2008, p. 23) que usar o termo “pesquisa qualitativa” de forma genérica pode contribuir para cair no extremo de qualificar como qualitativa qualquer pesquisa não-quantitativa. A autora considera não ser conveniente falar em pesquisa qualitativa, mas em pesquisa descritiva, histórica, fenomenológica, etc., reservando o termo qualitativo para as técnicas de coleta e para a natureza dos dados. Nesse caso é preferível designarmos nossa pesquisa como sendo do **tipo etnográfico** e dizermos que nossos dados são de natureza qualitativa.

O objetivo principal deste capítulo é discutir a pesquisa do tipo etnográfico, como ela se relaciona e fornece as bases para a metodologia da investigação sobre o desenvolvimento da argumentação durante o estudo da matemática. Por essa razão o paralelo traçado nos parágrafos seguintes não tem a intenção de emitir juízo de valor.

2.1 Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa

As pesquisas quantitativas primam pelas contagens e mensurações. As análises dessa modalidade de pesquisa consistem nas leituras de gráficos, distribuição de freqüências e probabilidades de ocorrência de determinado fenômeno. A partir de testes de hipóteses procedem-se inferências levando em conta as regularidades na freqüência, as aderências, as diferenças quantitativas, as posições, as médias e as dispersões. As amostras devem ser representativas das populações, isto é, conter as características presentes na população e procuram-se ainda levar em conta as possibilidades de repetição do fenômeno. Isso significa dizer que, mesmo quando não se trata de pesquisa experimental, a amostra deve ser de tal magnitude que haja a possibilidade do fenômeno pesquisado estar representado nessa amostra na mesma proporção em que aparece na população.

Nessa perspectiva prima-se pela neutralidade do pesquisador, por níveis de confiabilidade, por isolamento de variáveis, formulação de hipóteses e, em muitos casos, por grupos de controle. O instrumento de coleta é o questionário e o passo seguinte é a tabulação dos dados. Embora seja também de ampla aplicação ao estudo dos fenômenos sociais é no estudo dos fenômenos físicos, econômicos e de saúde que a sua contribuição se faz mais notória (MOREIRA, 1982).

A crítica mais comum que se faz ao seu uso na compreensão da sociedade está relacionada com o seu pressuposto de que a realidade é externa ao sujeito.

Uma ressalva quanto a sua aplicação aos fenômenos educacionais está relacionada com a visão de que uma variável independente produz um efeito em uma variável dependente. A ressalva é justificada quando se trata de problemas relacionados com a educação porque se concebe que são múltiplas as variáveis que agem e interagem ao mesmo tempo e o tempo todo.

Por outro lado, as pesquisas qualitativas, aplicadas especialmente ao estudo dos fenômenos sociais, têm o seu enfoque nas descrições porque levam em conta a complexidade de tais fenômenos. O pressuposto fundamental é que nem sempre a quantificação responde as questões que se propõe investigar e que um questionário pode não coletar todas as manifestações ou nuances desse fenômeno. Algumas pesquisas interessam pela particularidade do fenômeno e não pela repetição ou pela relação causal. Nesse caso, a análise do objeto de estudo leva em conta o contexto particular em que o fenômeno ocorre pois é nesse espaço geográfico, social ou temporal, que se estabelecem as inter-relações, que os significados são construídos, que as ações dos sujeitos ganham sentido. Portanto, é esse contexto que fornece os elementos para a sua compreensão (ANDRÉ, 2008).

Esse contexto também contém informações quantitativas tais como idade, nível socioeconômico, tempo de estudo, entre outros que poderão contribuir para situar o fenômeno. A análise desses dados, porém, poderá seguir uma perspectiva não positivista de relação direta entre causa e efeito e a pesquisa ser ainda qualitativa.

Essa abordagem qualitativa é relativamente recente. André (2008) informa que ela se popularizou a partir da década de 1980 estando essa autora entre os pioneiros com um artigo publicado em 1983. O interesse por um método particular, denominado etnografia, começou se desenvolver um pouco antes, isto é, a partir da década de 1970.

2.2 O Método Etnográfico

O método etnográfico foi desenvolvido por Bronislaw Malinowski, um antropólogo que procurou conhecer primeiramente a cultura de tribos nativas do pacífico ocidental, nas ilhas de Nova Guiné e Melanésia[11]. Depois ele conviveu com culturas australiana, mexicana, sul-africana e norte-americana. Sua teoria é funcional tanto por ser prática como por tomar por base os pressupostos da filosofia funcionalista. Tendo formação inicial em Física e Matemática interessou posteriormente pelo "estudo do homem", ou melhor, pela Antropologia Cultural por influência de Wilhelm Wundt (MALINOWSKI, 1970).

2.2.1 Os Princípios da Etnografia

Em seu livro sobre "Uma Teoria Científica da Cultura" Malinowski (1970) estabelece os princípios básicos da etnografia.

Primeiro Princípio: A pesquisa deve ser conduzida por uma teoria que fornece elementos de análise e interpretação dos fenômenos. Para ele "Não existe a descrição destituída de teoria", porque

> toda declaração e toda argumentação tem de ser feita em palavras, isto é, em conceitos. Cada conceito, por sua vez, é o resultado de uma teoria que declara que alguns fatos são relevantes e outros acidentais, que alguns fatores determinam o curso dos acontecimentos e outros são simplesmente entreatos acidentais; que certas coisas acontecem como acontecem por causa de personalidades e mediações materiais do ambiente que as produziram (MALINOWSKI, 1970, p. 17-18).

Para esse autor a teoria é uma explicação. É o que possibilita a investigação ir além de um simples contato com as possibilidades e com os conceitos. Segundo

[11] Região da Oceania que inclui as ilhas: Vanuatu, Ilhas Salomão, Fidji, Nova Caledônia e Nova Zelândia.

Huntington Cairns (*apud* MALINOWSKI, 1970, p. 8), “a teoria, para ele, era um guia indispensável ao pesquisador de campo na seleção dos fatos, um elemento necessário em qualquer ciência descritiva bem fundada”.

Segundo Princípio: Trabalhar com dados efetivamente observados. O simbolismo pode ter sido

> realizado por declaração verbal, pelos gestos significativos ou por considerável ação real, tais como instruções sobre como armazenar os materiais e produzir as formas, esse simbolismo deve ter estado em ação, e eu próprio o vi em ação em meu trabalho-de-campo (MALINOWSKI, 1970, p. 19).

Terceiro Princípio: Pressupõe a necessidade de adaptação dos instrumentos de coleta de dados e de revisão constante das teorias de análise e metodológica. “A teoria que falha deve ser emendada pela descoberta de por que falhou” (MALINOWSKI, 1970, p. 20-21).

> Se um homem parte numa expedição decidido a provar certas hipóteses e é incapaz de mudar seus pontos de vista constantemente, abandonando-os sem hesitar ante a pressão da evidência, sem dúvida seu trabalho será inútil (MALINOWSKI, 1976, p. 26).

Quarto Princípio: O pesquisador é um observador ativo. Nessa perspectiva metodológica

> observar significa selecionar, classificar, isolar com base na teoria. Elaborar uma teoria é resumir a relevância de observações passadas e prever a confirmação ou refutação empírica dos problemas teóricos apresentados.
> Não é suficiente, todavia, que o etnógrafo coloque suas redes no local certo e fique à espera de que a caça caia nelas. Ele precisa ser um caçador ativo e atento, atraindo a caça, seguindo-a cautelosamente até a toca de mais difícil acesso (MALINOWSKI, 1976, p. 21-26).

Além de um observador ativo, o pesquisador é o seu próprio cronista e intérprete. Este princípio, de forma muito especial, fundamenta a metodologia de pesquisa do tipo etnográfico e a metodologia do presente trabalho.

Quinto Princípio: Os fenômenos que são ligados através da coordenada do tempo “devem ser rigorosamente comparáveis” (MALINOWSKI, 1970, p. 29).

Sexto Princípio: O fenômeno deve ter uma unidade, isto é, ser o mesmo nos diversos momentos temporais da análise.

> É necessário demonstrar, em primeiro lugar, que um fenômeno que desejamos comparar em várias culturas, que desejamos delinear em sua evolução ou acompanhar em sua difusão, é uma legítima unidade de observação e de exposição teórica (MALINOWSKI, 1970, p. 34).

Os princípios metodológicos podem ser agrupados em três unidades: em primeiro lugar, é lógico, o pesquisador deve possuir objetivos genuinamente científicos, conhecer os valores e critérios da etnografia moderna. Em segundo lugar, deve o pesquisador assegurar boas condições de trabalho, o que significa viver mesmo entre os “nativos” e sem depender de outros. Dito de outra forma: conviver com os sujeitos que são objetos de pesquisa e não utilizar de informações de segunda mão e sempre procurando desvincular-se das idéias preconcebidas. Finalmente, deve ele aplicar certos métodos especiais de coleta, manipulação e registro da evidência que sejam compatíveis com a pesquisa etnográfica.

A pesquisa etnográfica tem por objetivo a compreensão da cultura de um grupo de pessoas procurando entender os motivos de determinados tipos de comportamento. Ela envolve a imersão e a convivência. Os instrumentos de pesquisa são a observação e a entrevista. Malinowski (1976) define que, para o pesquisador em etnografia, ter boas condições de trabalho significa “viver mesmo entre”. Ele viveu “mesmo entre” os nativos, observou atentamente o comportamento coletivo, descreveu e analisou as práticas sociais.

Diz ainda Malinowski (1970, p 21) que o pesquisador que trabalha nessa perspectiva “deve agir simultaneamente como seu próprio cronista e como manipulador das fontes por ele mesmo produzidas”. Deve ter presente que as ações humanas estão impregnadas de significações sociais, intenções, motivos, atitudes e crenças.

Essa perspectiva metodológica, conforme visto em parágrafos anteriores, recebe também a denominação de naturalista e o naturalismo não tem a intenção de produzir uma lei universal a partir de suas observações porque observa idéias filosóficas e sociológicas e práticas tradicionais que não são reflexos diretos da universalidade. É um movimento que busca compreender as entranhas dos casos particulares e não o mundo amplo através deles. As generalizações são possíveis a partir da experiência do observador (SILVA, 1994, p. 58-59) e da articulação com trabalhos produzidos por outros pesquisadores.

Na pesquisa do tipo etnográfico o objeto de pesquisa não está inteiramente fora de nós e não está centralizado unicamente no outro. O nosso cotidiano também está em foco. A longa permanência do pesquisador e a sua prática, as interações cotidianas e pessoais entre ele e os pesquisados, fornecem elementos para a elaboração das suas conclusões. Embora o pesquisador seja colocado também na centralidade do objeto pesquisado isso não deve atrapalhar as suas conclusões, tendo em vista que estas são baseadas em uma teoria e não apenas na experiência (SILVA, 1994). Não se trata, portanto, de um simples relato ou de uma descrição ingênua uma vez que o próprio Malinowski salienta que a análise tem por base uma teoria.

2.3 Algumas pesquisas em Educação Matemática conduzidas na perspectiva da Etnografia

Algumas pesquisas em Educação Matemática têm sido na perspectiva da Etnografia. Um trabalho dessa natureza foi conduzido por Gurgel (2005).

Em Portugal, Matos (1996) fez um levantamento das pesquisas em Educação Matemática conduzidas nessa perspectiva. Os dados por ele divulgados dão conta de que até a data citada três “teses de Mestrado” tinham utilizado a abordagem etnográfica. Todos os três trabalhos “têm em comum a preocupação em encontrar relações entre as concepções e as práticas de professores relativamente à matemática e ao seu ensino” (MATOS, 1996, p. s/n.). O levantamento foi publicado no IV Encontro de Investigação em Educação Matemática da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação realizado em 1995.

Fiorentini e Lorenzato se referem a seis dissertações produzidas na UFPE, a partir de 1985 “por meio do método etnográfico combinado com o clínico piagetiano [...] sobre desenvolvimento de noções, estratégias e habilidades matemáticas”. No Programa de Mestrado em Educação da Universidade Federal de São Carlos, no mesmo período, foram produzidas cinco dissertações “pelo estudo de caso com gravações, entrevistas, observações participantes do tipo etnográfico” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 27-29).

No Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará vários trabalhos já foram produzidos tendo a etnografia como referencial metodológico. Embora não saibamos precisar quantos e quais foram esses trabalhos temos contato com a “Etnomatemática Quilombola” de Jacinto Pedro Pinto Leão. Uma dissertação defendida em 2005.

Esses breves relatos nos mostram que este trabalho em desenvolvimento está inserido em uma tendência de pesquisa qualitativa que vem sendo fortalecida gradativamente e expandindo os seus domínios para os diversos campos do saber.

Há, portanto, precedentes que contribuíram para que tivéssemos certa tranquilidade em optar pelo método da pesquisa do tipo etnográfico em Educação Matemática. Embora nossa análise tenha uma perspectiva teórica diferente e nosso objeto também tenha características diferentes desses exemplos citados entendemos que o fato de a Etnografia estar sendo usada como um método de pesquisa em Educação Matemática nos dá respaldo para tentar uma aproximação entre ela e a TAD. O objetivo desses relatos foi somente mostrar que não estamos iniciando uma nova tendência de pesquisa em Educação Matemática.

2.4 A Etnografia e a TAD

Entendemos que a Etnografia como perspectiva teórica está em harmonia com a TAD porque esta, assim como aquela, coloca os processos escolares e, particularmente, o estudo da matemática entre os fenômenos culturais. Analisa-o numa perspectiva social (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Na TAD o processo didático não se limita ao que ocorre na sala de aula. O estudo iniciado sob a orientação do professor, quer individual ou em grupo, continua após o término da aula. Ao fazer as lições, ao preparar-se para a prova, ao procurar esclarecer alguma dúvida na biblioteca, com algum colega ou familiar, o estudante estará dando continuidade ao trabalho iniciado com o professor.

“Ao sair da aula, a matemática que devemos estudar continua sendo a mesma e quem estuda também continua sendo a mesma pessoa” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 57).

As atividades matemáticas e didáticas desenvolvidas nesse processo de estudo envolvem a relação do aluno com o professor, do aluno com os colegas, do aluno com a escola e desta com a sociedade.

Os objetos matemáticos não são produtos da aula onde são estudados. São produzidos em outras instâncias, normalmente na academia, recomendados por especialistas, incorporados ao programa pelos autores de livros didáticos e técnicos educacionais. Chegam à escola após passarem pelo processo de transposição didática[12] e são estudados em um contexto no qual o contrato didático[13] se faz presente.

[12] A transposição didática é um conceito criado por Chevallard para problematizar a transformação do saber acadêmico em saber escolar, contextualizado e relevante para o aluno (PAIS, 2000).

A etnografia tem como matéria-prima as práticas sociais e culturais levando em conta as teias de relações que se estabelecem entre elas. A interdependência dos elementos ocorre de forma complexa e está presente nas tarefas importantes e vitais. Uma pesquisa etnográfica consiste na captação, descrição detalhada, análise, avaliação e teorização das práticas documentadas ou não. Ela pressupõe a vivência do pesquisador no ambiente da pesquisa e a sua disposição para abandonar suas hipóteses conforme as evidências vão descortinando os saberes presentes nas sociedades estudadas.

Pressupõe ainda a presença de uma teoria de análise que define os conceitos e os classifica quanto à sua relevância naquele contexto. A necessidade de adaptação dos instrumentos de coleta de dados e uma revisão constante dos pressupostos procurando corrigir falhas detectadas durante o processo de coleta de dados, análise e avaliação é também um dos seus postulados.

Assim sendo, observar, descrever, analisar e avaliar as práticas argumentativas desenvolvidas pelos sujeitos no processo de resolução de tarefas matemáticas podem se enquadrar numa perspectiva etnográfica de pesquisa. Esse foi o entendimento que norteou o processo de **observação, descrição e análise das práticas argumentativas dos acadêmicos de Licenciatura em Matemática.**

2.5 A Instituição onde a Pesquisa foi Realizada

A pesquisa foi desenvolvida em uma das unidades universitárias da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS). Trabalhando nessa instituição há três anos, como professor efetivo, nos últimos dois anos foi-me concedida pelos colegas a oportunidade de trabalhar com a disciplina de Geometria Euclidiana no primeiro ano do curso. Essa disciplina é oferecida aos calouros juntamente com as disciplinas de Fundamentos de Matemática I e II (lógica, funções e trigonometria)[14], História e Filosofia da Educação, Língua Portuguesa e Introdução à Ciência da Computação.

---

[13] O contrato didático envolve as atitudes, os comportamentos, as posturas dos alunos que são esperadas pelos professores. As atitudes e ações do professor e que são esperadas pelos alunos. Não se trata de um contrato formal ou de um combinado entre as partes mas de algo implícito e construído culturalmente (SILVA, 2000).

[14] Ementas no anexo C

2.6 A Instituição

A Missão, a História, o Perfil Institucional e o Mapa da distribuição das Unidades Universitárias foram extraídos do site da universidade.

Segundo consta no site a UEMS tem como missão "Gerar e disseminar o conhecimento, voltada para a interiorização, e com compromisso em relação aos outros níveis de ensino".

> A Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul foi criada pela Constituição Estadual de 1979 e ratificada pela constituição de 1989 conforme os termos do disposto no artigo 48 do Ato das Disposições Constitucionais de 1989, foi instituída pela Lei nº 1461, de 20 de dezembro de 1993, com sede e foro na cidade de Dourados (UEMS, 2009).

A Comissão de Implantação da UEMS delineou como proposta uma universidade que estivesse voltada para as necessidades regionais objetivando superá-las e contribuir através do ensino, da pesquisa e da extensão para o desenvolvimento científico, tecnológico e social do estado.

> Para cumprir esta proposta, buscando racionalizar recursos públicos, evitar a duplicação de funções, cargos e demais estruturas administrativas e a fragmentação das ações institucionais, a UEMS adotou três estratégias diferenciadas: rotatividade dos cursos, sendo os mesmos permanentes em sua oferta e temporários em sua localização; criação de unidades universitárias em substituição ao modelo de campus e estrutura centrada em coordenações de cursos ao invés de departamentos. Esse modelo de instituição descentralizada permitiu que milhares de alunos realizassem o sonho de fazer um curso superior (UEMS, 2009).

A "oferta temporária de cursos em sua localização" ou rotatividade dos mesmos pelas unidades não vem mais acontecendo. A Unidade de Nova Andradina comporta dois cursos: Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Letras. O curso de Letras está sendo transferindo para Campo Grande. Com a aprovação de um curso de Mestrado em Letras os professores reivindicaram a transferência do mesmo para a capital tendo em vista facilitar a articulação com outros centros. Em seu lugar Nova Andradina está recebendo o curso de Licenciatura em Computação, a partir de 2010. Espera-se com isso fortalecer a área de exatas na expectativa da criação de um curso *Stricto Sensu* em breve.

2.7 Mapa da Distribuição das Unidades da UEMS pelo Estado

Está disponível no site mapa da distribuição das unidades da UEMS (fig. 4).

A unidade universitária da UEMS em Ivinhema, que dista aproximadamente 60 km de Nova Andradina, tem cursos em áreas diferentes dos que são oferecidos em nesta última de modo que uma das cidades atende estudantes da outra e da região.

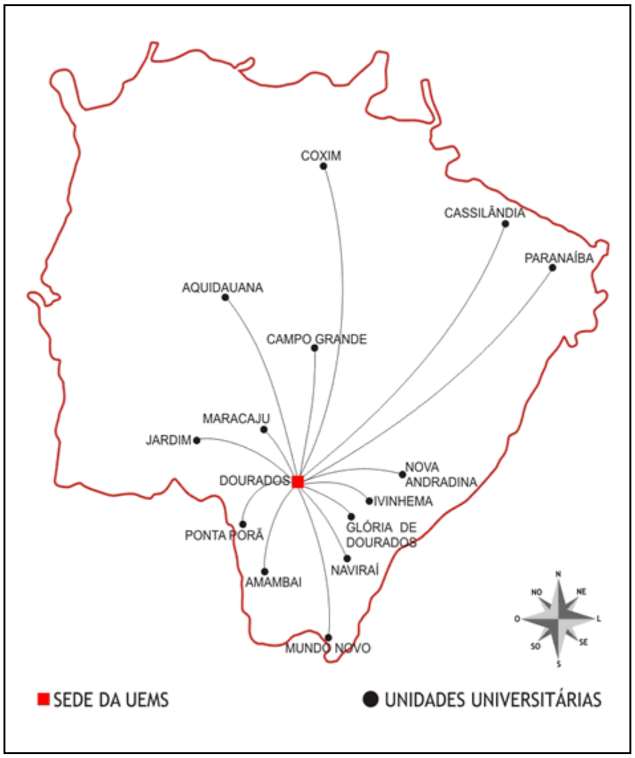


Figura 4-Mapa de distribuição das Unidades da UEMS (www.uems.br).

É nessa instituição, na Unidade Universitária de Nova Andradina, no curso de Licenciatura em Matemática que o trabalho de pesquisa foi desenvolvido. A cidade de Nova Andradina é polo de uma região agropastoril e conta com cerca de 43.000 habitantes[15]. Sua população se aproxima de 50% da população da microrregião conhecida como "Região do Vale do Ivinhema". Atualmente é também um centro industrial com dois frigoríficos, e com a expansão dos canaviais pelo Estado de Mato Grosso do Sul e a instalação de novas usinas nessa região ela vem se tornando o centro de uma região sucroalcooleira. É uma cidade de referência, centro

[15] Segundo o site http://www.citybrazil.com.br/ms/novaandradina/ acessado em 23/06/2009.

comercial bem desenvolvido e centro universitário da região com várias instituições de ensino superior.

Recebe estudantes das seguintes cidades vizinhas: Anaurilândia, Angélica, Batayporã, Ivinhema, Nova Casa Verde (distrito) e Taquarussu. A distância dessas cidades, em relação à Nova Andradina, varia de 10 a 80 quilômetros. Uma delas, Rosana (Porto Primavera), pertence ao Estado de São Paulo. Os acadêmicos são, em sua maioria, trabalhadores e além dos que residem nessas pequenas cidades há os que vivem em assentamentos rurais.

Essas cidades, até recentemente, tinham a sua economia centrada na agricultara familiar. Atualmente a economia também está se tornando sucroalcooleira com a plantação generalizada de cana-de-açúcar e a instalação de várias usinas de açúcar e álcool etílico na região. Em quatro dessas cidades o número de habitantes, segundo o IBGE, não ultrapassa os 10.000 habitantes no município e, somente, uma chega a 20.000 habitantes. Alguns mapas nem mesmo situam algumas delas.

Os acadêmicos vêm à universidade de ônibus fretados para esse fim e chegam exatamente na hora de começar a aula, dificultando contatos prévios ou em outros horários. Mesmo entre os que residem na cidade de Nova Andradina há muitos que têm compromissos trabalhistas durante o dia. Toda atividade, portanto, tem que ser feita no horário da aula. Em nosso caso todas as atividades foram desenvolvidas em sala de aula e durante as aulas de geometria.

Um problema que muitos acadêmicos, que se deslocam, enfrentam é o fuso-horário. Pela proximidade com o Estado de São Paulo algumas dessas cidades (Anaurilândia, Batayporã, Taquarussu e Rosana) adotam o horário vigente naquele estado. Muitos moradores oriundos do interior paulista continuam mantendo contatos comerciais e médicos com a cidade paulista de Presidente Prudente que dista de Nova Andradina tanto quanto a capital do Estado de Mato Grosso do Sul (cerca de 300 km) e possui, segundo dizem, os mesmos recursos médicos, educacionais e comerciais de Campo Grande. Essa é a justificativa que apresentam para manter o fuso-horário paulista.

2.8 As Instituições na Instituição

O que acontece quando duas instituições, opostas entre si, convivem lado a lado, lutando pelo mesmo espaço, recebendo o mesmo apoio social e pleiteando pela credibilidade dos mesmos clientes?

Conforme a Teoria Antropológica do Didático a sociedade, através das suas instituições, exerce o poder de determinar as organizações didáticas que são postas em prática nas escolas. Essas instituições que se complementam, mas que em muitos casos se antagonizam, convivem lado a lado, no mesmo ambiente escolar.

Essas instituições estão lá representadas por professores que defendem os pontos de vista dessas instituições. Muitas vezes nem se dão conta dos objetivos ou da razão da existência de cada instituição com a qual estão envolvidos. Apesar disso cumprem o papel que ela "designou".

Ilustrando o pensamento: um frigorífico não existe somente para sacrificar animais e fornecer carne para o mercado interno ou externo. Ele deve incluir em suas atividades as pesquisas de mercado e de conservação de alimentos. As ações de vigilância sanitária e de proteção ao meio ambiente, entre outras, também fazem parte do seu programa de trabalho. É natural pensar que os trabalhadores de nível técnico ou de serviços gerais não tenham uma visão completa dessa multiplicidade de atividades que o frigorífico deve desenvolver. Esses, de forma aceita como natural, se concentram no desempenho do papel para o qual cada um foi contratado. Não é esse o procedimento que se espera daqueles que ocupam posições de chefia ou são portadores de diploma em curso superior. Desses se espera que, se desempenham a função de pesquisador em conservação de alimento, também se preocupem com as questões ambientais, sanitárias, econômicas e segurança do trabalho. É o que poderia ser dito de todo aquele que atua em outros setores reservados a especialistas generalistas. A expressão "especialista generalista" parece contraditória consigo mesma. Entretanto quando levamos em conta que os especialistas de nível superior tiveram antes uma formação geral que deve ter-lhes dado uma visão abrangente das exigências e expectativas da sociedade vemos que ele é, antes de ser um especialista, um generalista.

Se, ao tornar-se especialista, perdeu de vista essa generalidade é responsabilidade sua recuperá-la se não quiser ficar em dívida para com a sociedade.

No ambiente escolar a experiência revela que essa visão das expectativas sociais não está clara, que as perspectivas das diferentes instituições se confundem e que o especialista não somente perde a sua generalidade mas também a consciência de que deve recuperá-la. Nesse contexto é frequente encontrarmos professores que se dizem portadores de uma neutralidade ideológica. Uma forma de fugir da responsabilidade de distinguir os diferentes papéis que deve desempenhar de forma concomitante ou nos diferentes momentos de sua atuação profissional. Normalmente esse é o profissional que apresenta maior resistência às mudanças pedagógicas anunciadas e tem pouco interesse em saber o que dele se espera quando atua em um curso de licenciatura ou mesmo na formação de alunos do nível básico. Ele é o protótipo da resistência e da falta de diálogo.

Valente (2003, p. 48) no seu histórico sobre a "modernização do ensino de Matemática no Brasil" relata o caso do Professor Raja Gabaglia, do Colégio Pedro II. O mestre na presença do inspetor de ensino mantém os alunos ocupados calculando o valor numérico de expressões como "a divisão da raiz sétima de três décimos, dividida pela raiz quinta de um meio" usando tábuas de logaritmos. O paradoxo é que o inspetor era defensor do método intuitivo enquanto Gabaglia era, nas palavras de Valente, um "herdeiro da tradição". Deparam-se frente a frente duas instituições sociais: o movimento internacional de modernização do ensino da matemática, representado pelos ideais do inspetor, e a tradição representada por Gabaglia e outro personagem do mesmo Colégio, o Professor Almeida Lisboa.

Essa convivência de várias instituições no mesmo espaço, em parte é socialmente saudável porque traz o indicativo de um regime democrático, do respeito das instituições sociais pelas diferenças individuais. Por outro lado, quando os extremos são tolerados reflete fraqueza social. Reflete a dificuldade que a sociedade, e mais especificamente a instituição, tem de disciplinar os que são contratados para o cumprimento de tarefas que requerem um redirecionamento da postura filosófica. A dificuldade está em disciplinar sem tolher a iniciativa, sem interferir no crescimento pessoal e sem coibir o desempenho profissional. Estamos usando o verbo disciplinar no sentido de responsabilizar, coibir excessos e esperar produtividade condizente com a função para o qual foi contratado.

A sociedade confere às instituições o papel de bem servir, de cumprir o ideal democrático. Cada instituição, por sua vez, é representada por pessoas. Se essas pessoas não são disciplinadas para o cumprimento da tarefa para a qual são designadas a instituição torna-se devedora para com a sociedade por não cumprir devidamente o que dela é esperado.

Quando instituições opostas se instalam em um mesmo lugar e os sujeitos que as representam não administram essas diferenças colocando cada uma em seu lugar tende a aparecer um clima pouco confortável para o cumprimento da tarefa.

É certo que a construção coletiva é conflituosa e não se pode esperar a unanimidade. O enfrentamento das idéias é força motriz de novos processos de transformação. O que está sendo questionado é o desinteresse pelo diálogo, a fixidez das idéias, o alheamento com relação aos aspectos mais amplos do fazer docente, a alimentação das explicações simplistas e o reducionismo da atividade educativa a uma mera transmissão de informações e depois de tudo isso a cobrança de interesse por parte dos alunos.

Chevallard (1994) parte do pressuposto de que na constituição de um trabalho didático há que serem levados em conta alguns fatores. Um deles é constituído pelas pesquisas que embasam o fazer docente e os documentos que definem a função da escola ou o papel da universidade em determinada época. O outro consiste em não se deixar levar, prontamente, pelas palavras de ordem que tomam a parte pelo todo e oferecem soluções mágicas para os problemas de aprendizagem. Algumas dessas palavras de ordem consistem em explicações parciais para as dificuldades como a falta de interesse dos alunos. São explicações ingênuas[16] e, algumas delas, excessivamente desgastadas. Ao seguir as orientações pedagógicas deve-se levar em conta que ao tratar com seres humanos não há receitas infalíveis, explicações completas e soluções coletivas elaboradas por uma única pessoa ou escola filosófica.

Um terceiro fator seria a individualização. A individualização ocorre quando se esquece os interesses da espécie. A Teoria Antropológica do Didático considera que formamos um conjunto e que há um assujeitamento do indivíduo aos interesses mais abrangentes. O conhecimento que é objeto do nosso trabalho é uma produção social. Foi produzido para atender aos interesses sociais e está na escola ou universidade para preparar o sujeito para acompanhar os progressos científicos, tecnológicos e sociais da humanidade. A prática docente não pode consistir apenas em discussões teóricas e conflitos ideológicos. Deve haver um certo grau de pragmatismo também.

Alguns professores que atuam em cursos de licenciaturas são oriundos de cursos de bacharelado, com Pós-Graduação em Matemática Pura ou Matemática Aplicada. Muitos, porém, são licenciados que fizeram a pós-graduação em Matemática Pura ou Matemática Aplicada em que as questões pedagógicas não constituem o enfoque principal. Esses profissionais, embora façam concurso para o magistério superior, conservam a visão voltada para a ciência matemática e não para a formação de professores.

[16] "Os alunos não têm interesse", "no meu tempo havia mais interesse", "a cada dia os alunos aprendem menos" e "os alunos não querem nada com nada" são algumas das explicações ingênuas. "Falta motivação" e "a família não ajuda o aluno nas tarefas" são exemplos de um discurso já desgastado que continua sendo repetido por professores.

A vivência pessoal nesse ambiente, em duas universidades, e tendo trabalhado em vários cursos, em companhia de professores que não possuem formação pedagógica, tem nos mostrado que o discurso pedagógico desses profissionais se resume, basicamente, em duas palavras: tempo e ementa (ou conteúdo). Há pouco tempo, dizem, para cumprir a ementa. Essa falta de tempo sobrecarrega a aula que deve ser densa para que se possa apresentar o máximo de conteúdo no mínimo de tempo. A praxeologia didática desse professor consiste em definir, exemplificar e "aplicar", sendo que "aplicar" é entendido como exercitar a memorização do modelo apresentado, a repetição da técnica

Não há tempo para dialogar com o aluno porque cada minuto deve ser gasto com definições e exercícios de "aplicação". As perguntas e questionamentos nem sempre são bem-vindos pois tomam tempo.

Ainda nesse discurso da falta de tempo o estudante não evolui porque não dedica tempo para se apropriar do conteúdo ministrado, isto é, fazer os exercícios de memorização da técnica. Toda questão pedagógica gira, então, em torno do tempo, a saber: tempo de aula e tempo de resolução de exercícios.

Poucas vezes a palavra qualidade aparece em cena. Quando aparece vem acompanhada do adjetivo "pouca". A pouca qualidade, nesse discurso, é permanente e se deve ao pouco tempo. Com mais tempo seria dado mais conteúdo e resolvidos mais exercícios, logo, com mais tempo haveria mais qualidade. Qualidade então seria uma quantidade maior de conteúdo e de exercícios?

No nosso contexto parece que ainda não se tornou tradição pensar os cursos de licenciatura em matemática numa perspectiva de formar professores para a educação básica. Que ainda não estamos buscando na escola a motivação para a escolha dos temas de estudo e a elaboração das atividades. Enfim, não é usual recorrer à perspectiva de trabalho na educação básica como motivo para a elaboração da organização didática do professor dos cursos de licenciatura em matemática. Diante do exposto pode-se afirmar que, como na maioria das instituições universitárias, a experiência vivida aqui na UEMS é de conflito pedagógico.

O acadêmico, conforme foi visto, é oriundo de escolas públicas da região e muitos cursam Matemática por falta de opção. Alguns prefeririam estar cursando Economia, Administração, Engenharia. Salvo raras exceções são acadêmicos que trabalham durante o dia e, portanto, o curso de Licenciatura em Computação, previsto para implantação em 2010 e para ser oferecido no período diurno, não será concorrente do curso de Licenciatura em Matemática.

O deslocamento dos acadêmicos, a partir das cidades vizinhas, e o vínculo trabalhista de muitos deles são fatores que impedem a formação de grupos de estudo e de atividades de pesquisa em horário diferente do horário de aula. Portanto, as **práticas argumentativas** analisadas foram produzidas nas atividades especialmente elaboradas para esse fim, mas durante as aulas.

CAPÍTULO III

A CONTRIBUIÇÃO DA ARGUMENTAÇÃO NA ELABORAÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

O estudo da argumentação como um fator importante nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática vem despertando a atenção de autores e pesquisadores em Educação Matemática (BRASIL, 1998; PEDEMONTE, 2002; PIETROPAOLO, 2005). Na França desde um pouco antes da década de 1990 e no Brasil, um pouco mais tardiamente, muitos trabalhos vêm sendo produzidos discutindo: 1) a relação entre a argumentação e a prova rigorosa ou demonstração na Matemática; 2) a relação entre a argumentação e a elaboração do conhecimento matemático; 3) a importância da prova rigorosa para a ciência matemática e 4) a importância da argumentação para a constituição do sujeito.

3. Argumentação, Conhecimento e Sociedade

Com relação à importância da argumentação na construção do conhecimento é possível encontrar referências em teóricos da perspectiva sociointeracionista (MOYSÉS, 2004) para os quais os atos discursivos da fala desempenham importante papel na compreensão da realidade do sujeito e na sua própria constituição. Em Habermas (*apud* BANNELL, 2006) encontramos destaques para a prática da argumentação como fator de desenvolvimento da compreensão mútua e a emancipação do sujeito. Nos PCN (BRASIL, 1998) a argumentação se vincula à capacidade de raciocinar e em Pais (2006) a argumentação está relacionada com a validação de proposições e, consequentemente, à compreensão da validade de um enunciado.

Dessa forma a argumentação ganha importância uma vez que o raciocínio se expressa através de argumentos e, ao mesmo tempo, se reelabora através deles. Portanto, argumentar é imprescindível à formação de uma vontade política e à construção da razão. Dessa forma, o agir argumentativo pressupõe liberdade, autonomia ou um caminhar em direção à emancipação. Esse agir argumentativo pressupõe a condução do sujeito a um nível de domínio do contexto onde está inserido, que neste caso é a geometria euclidiana. Argumenta-se para comprrender e argumenta-se por ter compreendido.

O nosso trabalho parte do pressuposto de que a argumentação ocupa lugar privilegiado na resolução de tarefas matemáticas. De forma especial, porém, destacamos a contribuição do uso da argumentação para diminuir a individualização e uma possível produção solitária tendo em vista que, de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais, profissional da educação deve ter "capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares".

Nesse ponto cumpre destacar que a argumentação tem a sua importância aumentada quando levamos em conta que o conhecimento a ser elaborado pelo sujeito tem origem social, seu estudo se processa em um contexto social, deve estar voltado para a unidade e preservação da espécie humana e não apenas para o bem-estar do indivíduo.

Nosso trabalho se insere em um contexto de formação de professores de matemática.

3.1 A Demonstração e o Conhecimento Matemático

Historicamente, embora a data e o personagem sejam imprecisos, tudo teria começado com Tales de Mileto (séc. VII a.C.) em suas viagens para o Egito de onde trouxe para Grécia proposições que teriam que ser validadas. Pitágoras de Samos (séc. VI a.C.) com a fundação da escola que leva o seu nome inaugurou o estudo da matemática pura cujos motivos para estudá-la não seriam outros além das razões intelectuais (BOYER, 1996; DOMINGUES, 2002).

Começou com eles e prosseguiu com Aristóteles o esforço em proporcionar um encadeamento lógico, cabendo a este último a demonstração por redução ao absurdo.

No entanto, embora já houvesse toda uma construção lógica que permitisse estabelecer a veracidade ou não de uma proposição, a base axiomática foi estabelecida por Euclides (séc. IV a. C.) em Os Elementos, onde trabalhou com cinco noções comuns e cinco postulados (BOYER, 1996). O trabalho de Euclides, mesmo contendo imperfeições, foi o precursor do sistema dedutivo da geometria.

Segundo Domingues (2002, p. 50) com o declínio cultural do Ocidente na Idade Média essa ênfase na organização axiomática ficou muito restrita porque a obra de Euclides ficou em "um nível muito acima das possibilidades da época". Do

Renascimento até o início do século XIX houve um resgate da geometria euclidiana ao mesmo tempo em que surgem novas áreas da matemática (geometria analítica e cálculo) que não usaram postulados e nem demonstrações.

Com relação à demonstração consta que:

> até perto do final do século XIX, a demonstração em matemática tinha um caráter grandemente material. A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição" (DOMINGUES, 2002, p. 51).

A partir de um certo momento essa demonstração fundamentada na evidência intuitiva deixou de satisfazer tendo em vista o grau de desnvolvimento das novas áreas da Matemática.

Silva (2002) em sua exposição defende que a demonstração tem várias finalidades, entre elas: "estabelecer a veracidade relativa de um enunciado", "convencer-nos da veracidade da tese que demonstra" e exercer uma função heurística induzindo a descoberta matemática. Nesse caso, quando exercendo a função heurística, denominamos apenas de argumentação, pois, como afirma o próprio Silva, a indução à descoberta ocorre quando ela "abre o flanco a contra-exemplos" (SILVA, 2002, p. 56-57). Uma demonstração propriamente dita quanto ao aspecto lógico-epsitemológico é impecável e encerra o debate, melhor dizendo, encerra o embate para quem produziu a demonstração e encerra o debate para quem a apresenta pronta.

Silva também entende que uma demonstração está dotada de dois aspectos: o lógico-epistemológico e o retórico. O aspecto lógico-epistemológico se evidencia quando ela é assumida como uma entidade objetivamente existente, isto é, cuja existência independe de ser conhecida, e por ser capaz de induzir, "no agente matemático real" uma vivência de convicção e "possibilitar a apreensão das relações lógica ideais". Quando o foco está no seu poder coercitivo é o aspecto retórico da demonstração que está sendo considerado (SILVA, 2002, p. 56-57).

A matemática na visão de Shoenfield (*apud* BICUDO, 2002) não se prende à observação. Embora, ocasionalmente, recorra a ela não a aceita como lei. Somente a demonstração define a verdade. Por essa razão a matemática não é uma ciência empírica e necessita de um sistema formal como foi instituído por Euclides e vem sendo referendado e ampliado por tantos outros. Esse sistema formal é composto por uma linguagem com símbolos próprios e com expressões ou fórmulas que são sequências finitas desses símbolos.

Dessa forma fica estabelecido que a demonstração deve ser algo formal e de domínio de quem tem um bom relacionamento com esse sistema de linguagem. Bicudo (2002) admite que a demonstração não é algo definível, embora plenamente realizável. Entendemos que embora seja parte integrante da matemática, uma atividade dos matemáticos, a demonstração é um conceito paramatemático, isto é, o seu significado não é discutido no interior da matemática. Em um curso de Matemática aprende-se a fazer demonstração mas não se aprende defini-la. Como vimos em parágrafos precedentes Silva aborda o tema do ponto de vista da lógica.

Até agora a demonstração foi vista sob o ponto de vista dos matemáticos que destacaram a sua inegável importância para ciência. Do ponto de vista de educadores matemáticos cabe destacar que as potencialidades educativas da demonstração estão condicionadas ao tratamento didático que ela recebe. É um o tratamento quando se destina ao trabalho dos profissionais que atuam na área da pesquisa em Matemática Pura ou produção do conhecimento matemático, é outro o tratamento quando se trata da educação escolar. No contexto escolar, isto é, no nível da educação básica, aparecem algumas limitações ao seu uso tendo em vista a pouca vivência do estudante com a linguagem matemática e com o rigor formal. Em sala de aula, segundo Garnica (2002), impera outro regime de verdade distinto do regime de verdade absoluta existente entre os matemáticos. Há, portanto, diferentes perspectivas para o uso das demonstrações porque há diferentes propósitos para o seu uso.

A visão defendida por Chevallard (2001) é que as construções matemáticas, e, por conseguinte a demonstração se dá a partir da atividade e da mediação do professor, uma vez que os objetos matemáticos são produtos humanos e os modelos matemáticos são apenas aproximações do mundo concreto. A matemática é uma construção social cujos conceitos estão imbricados com os objetos observáveis e manipuláveis de onde se originam, a partir da mediação da experiência social, e para onde retornam com novos sentidos até que sejam plenamente abstraídos. É nessa perspectiva que a demonstração deve ser vista: como um objeto de estudo a ser manipulado e usado como técnica ou como tecnologia.

Reñón afirma que a demonstração é uma invenção grega e possui três características:

> (i) A construção e o uso inequívoco de argumentos dedutivos efetivamente conclusivos.
> (ii) A consciência expressa da capacidade demonstrativa que possui tais argumentos em virtude das relações que mediam entre determinadas premissas e as conclusões que delas se seguem.
> (iii) A intenção de organizar dedutivamente um corpo de conhecimento em torno de uma trama conceitual e teórica, e da correspondente trama lógica: há filósofos e matemáticos gregos que mantêm certas pretensões "axiomáticas" e na ciência helenística cabe rastrear um início do método de axiomatização que amadurecerá mais tarde (com o desenvolver do pensamento científico e matemático moderno dos séc. XVII – XIX), e que hoje podemos denominar "método axiomático clássico" (REÑON *apud* BALANHUK, 2003, p. 43).

Balanhuk (2003, p. 43) entende que para os gregos "a idéia de demonstração consiste em uma forma de se provar ou mostrar um resultado".

Gravina defendeu na Universidade Federal do Rio Grande do Sul e sob a orientação conjunta de Lucila M. Costi Santarosa e Liane Tarouco, a sua tese sobre "o pensamento hipotético dedutivo" tendo como referencial teórico a Psicologia Cognitiva e como metodologia a Engenharia Didática com o uso do *software* Cabri-Géomètre. O "processo de demonstração" foi a mola propulsora das suas inquietações intelectuais resultando na preocupação em como "os ambientes de geometria dinâmica podem desencadear [uma] situação de argumentação dedutiva" (GRAVINA, 2001, p. 7)

Essa pesquisadora compartilha com Lakatos, Kline e Davis & Hersh a preocupação com a contribuição da demonstração em matemática para o aprendizado dessa ciência. Ela afirma que "Se a demonstração é um dos componentes naturais da matemática, a ela a matemática não se reduz. O registro formal, que cristaliza o conhecimento matemático, pouco guarda da complexidade do processo de criação" (GRAVINA, 2001, p. 12). Sua perspectiva é de uma demonstração como produto.

De alguma forma partilhamos dessa mesma preocupação e a deixaremos transparecer livremente no decorrer deste texto. Em nenhum momento estaremos questionando a validade e o profundo significado da demonstração para a ciência matemática. Pela sua característica abstrata a matemática necessita desse instrumento de solidificação. É a construção da demonstração que melhor caracteriza o fazer matemático. São as evidências de que articulações entre objetos matemáticos estão ocorrendo que nos dão a garantia de que esse fazer está sendo conduzido de forma tecnicamente correta. Para que cada etapa do processo de uma produção matemática possa ser considerada concluída, consolidada e uma ferramenta para nova produção é necessário que todas as relações estabelecidas estejam legitimadas pela comunidade acadêmica.

Todo questionamento apresentado no decorrer deste trabalho diz respeito aos aspectos formativos levando em conta a constituição de uma escola democrática. Mas os aspectos formativos estão relacionados com o tratamento dado à demonstração em sala de aula e não à demonstração em si.

Rolkouski (2002) empreendeu uma pesquisa em busca da resposta a questões que o angustiavam desde o tempo de licenciatura. O que é demonstrar? Para que demonstrar? O que está sendo demonstrado?

Inicialmente questiona a definição de demonstração como, às vezes, é apresentada[17]. Entende que essa definição traz implícita uma subjetividade e indica que não há necessidade de ser compreendida por parte de quem a executa. Basta que seja referendada por algum perito. Em seguida Rolkouski apóia-se em Lakatos para conceber uma noção flexível de demonstração. Concebe demonstrar como uma atividade

> em que se parte de um problema, e procura-se, num ir e vir constante entre conjeturas e contra-exemplos, chegar a uma conclusão em que todos os passos sejam coerentes e verificados de acordo com a teoria subjacente adotada, neste caso a geometria plana (ROLKOUSKI, 2002, p. 20)

Sua concepção é coerente com a sua visão de que a matemática não é uma ciência fria, simplesmente formal e presa aos fazeres acadêmicos. Não é apenas uma linguagem específica, abstrata.

O autor relata que seu primeiro contato com as demonstrações ocorreu quando fazia um curso de Fundamentos de Matemática, uma rotina que se seguiria pelos quatro anos da graduação.

> Enfim, ao término de um fatigante primeiro ano, lá estávamos eu e meus colegas a "fazer" nossas primeiras demonstrações sem sabermos, de fato, o que vinha a ser uma demonstração. Porém, minha dificuldade não era unanimidade. Havia pelo menos um aluno que, supostamente, entendia o que se passava e desestabilizava a professora questionando se não haveria outra forma de demonstrar o mesmo teorema. Nem sempre seus comentários eram bem vindos, e a professora chegou a romper uma vez a rotina em que se encontrava para tentar, em vão, demonstrar certo teorema seguindo o caminho sugerido por este aluno. Este fato não se repetiu, pois, caso contrário, não daríamos conta do programa (ROLKOUSKI, 2002, p.11).

[17] A definição alvo da crítica é a apresentada por Davis & Hersh quando afirmam que demonstração "é um raciocínio que convence alguém que entenda do assunto" (ROLKOUSKI, 2002, p. 15).

No seu relato Rolkouski acrescenta que no ano seguinte, o segundo do curso, participou de um programa financiado pela CAPES (Programa Especial de Treinamento) em que havia “um período de estudos em grupo em que o orientador insistia nas demonstrações de teoremas para os quais não tínhamos idéia do que significavam”.

E continua o seu depoimento afirmando que:

> Mas foi no terceiro ano, nos cursos de Elementos de Geometria e Análise A, que o que era apenas uma certa angústia tomou proporções de problema. No curso de Análise A tive a oportunidade de estudar com apenas quatro colegas, pois os outros quarenta e tantos já haviam desistido antes do terceiro mês de aula. Com isso alguns questionamentos, que ficariam abafados, permeavam as aulas. A rotina não diferia da já citada. Mas, as perguntas também viraram rotina: “Professor, de onde o senhor tirou este épsilon?” As respostas também se repetiam: “Espere e você vai descobrir!” Esperávamos e não descobríamos. A preparação para a prova consistia em decorar uma dúzia de definições e meia dúzia de teoremas, repetindo-os exatamente da mesma forma no dia da avaliação. A boa nota era garantida. No curso de Elementos de Geometria, o conteúdo era distinto, mas era a mesma rotina, embora houvesse uma suave alteração: A professora repetia a demonstração da apostila no quadro negro, apagava, pedia que virássemos a apostila e tentássemos, sem olhar, fazer a demonstração novamente. Tínhamos, portanto, a oportunidade de acreditarmos (ou nos iludirmos) que estávamos fazendo nossas próprias demonstrações. No caso de Elementos de Geometria, como os conteúdos me eram familiares, ao estudar, compreendia os teoremas demonstrados, encontrando às vezes mais de uma maneira de demonstrá-los (ROLKOUSKI, 2002, p. 12).

Esse depoimento reforça o pensamento, expresso em outros parágrafos de que a demonstração, em um contexto educacional, somente faz sentido num ambiente onde o debate tem livre curso, há uma visão suficientemente ampla do contexto e a dúvida existe ou é provocada.

O caso de Rolkouski não é um caso isolado mas também não pode ser generalizado. A experiência dele com certeza não é a experiência de todos, mas também não cremos que seja apenas uma exceção à regra. Ainda neste trabalho revisitaremos este caso citando Osório (2002) e Santos e Sales (2009).

Vigo (2006) desenvolveu um trabalho de pesquisa com alunos da educação secundária (Ensino Médio Superior) do Uruguai mas a dissertação foi apresentada ao Instituto Politécnico Nacional Centro de Investigação em Ciência Aplicada e Tecnologia Avançada do México. O objetivo foi estudar o papel dos lugares geométricos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo e no ensino da demonstração. Ao longo da sua dissertação a autora enfatiza a importância da argumentação, da prova e da demonstração, na aprendizagem da Matemática.

Destaca ainda que é importante para o aluno fixar-se nas invariâncias da situação para justificar os resultados obtidos e deixar algumas perguntas pendentes. Suas questões são: Que tipo de trabalho é necessário realizar para desenvolver esquemas de demonstração? Como ajudar os alunos para que os esquemas montados por eles não os conduza a becos sem saída?

Também Osório (2000) defendeu a sua Dissertação de Mestrado intitulada: "Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática" em Querétaro no México. De forma especial ele problematiza a questão levantada por Duval: "Existe na passagem da argumentação para a demonstração uma ruptura cognitiva ou é um processo contínuo?" (OSÓRIO, 2000, p. 10). Segundo ele há quatro posturas polarizadas com relação a isso e conclui que se o assunto não está resolvido é porque não se levou a cabo uma atividade em que desse ampla liberdade aos alunos.

Kline (1976) e Lakatos (1978) fazem uma crítica ao modo como a demonstração é apresentada ou praticada com os estudantes. Segundo eles a forma clássica de praticar a matemática em sala de aula tem reduzido boa parte dessa ciência a um jogo de símbolos e palavras sem sentido e a um conjunto de frases ambíguas. A ausência de sentido é para uma teoria externa, evidentemente, e a ambiguidade faz parte do discurso matemático.

No discurso matemático, mesmo com toda a sua concisão e precisão, há também ambiguidades. Há "ambiguidade no discurso matemático" e "ambiguidade do discurso" (HARIKI, 1992a, p. 100), isto é, a ambiguidade pode ser inerente ao discurso matemático ou apenas se fazer presente no discurso de quem ensina matemática. A experiência vivida por Roulkoski com relação à origem do *épsilon* é uma "ambiguidade do discurso" porque representa uma "promessa" não cumprida.

Com relação às ambiguidades do discurso matemático Hariki destaca que esse discurso é uma combinação da linguagem cotidiana com a simbólica e que nele estão presentes vários tipos de ambiguidades. Algumas estão no âmbito da sinonímia tais como: a) o posto de uma matriz é o mesmo que a característica da matriz, b) um grupo comutativo é o mesmo que um grupo abeliano e c) o kernel é o mesmo núcleo de uma transformação linear. Mas ele destaca ainda que nesse grupo de ambiguidades temos "função, aplicação ou transformação" cujas diferenças são sutis. Há também ambiguidades decorrentes de palavras homônimas como é o caso do zero (o número zero) e o zero (raiz) de um polinômio que não é necessariamente o número zero, as ambiguidades no uso dos símbolos como na derivada (f´, y´, Df, dy/dx), nas funções (y ou f(x)) e o mesmo símbolo zero (0) para vetor nulo, matriz nula e transformação nula. Há ainda o caso das funções trigométricas onde símbolos parecidos têm significados diferentes ($a\text{sen}x \neq \text{sen}\,ax$).

Ao analisar essa questão do discurso Hariki (1992b) vai mais longe. Ele distingue discurso pedagógico de discurso científico. O discurso científico está presente nos textos escritos, com a respectiva correção de linguagem, com o rigor e a concisão característicos e quando há ambiguidades estas são próprias da linguagem da ciência de referência. O rigor e a concisão são, inclusive, muito valorizados. É o discurso dos especialistas ou quase especialistas. O discurso pedagógico se insere no contexto de comunicação da ciência, da interação entre o professor, o estudante e o texto. Essa comunicação enfrenta alguns problemas porque alguns autores transferem diretamente para o texto os valores próprios do discurso científico e alguns professores os repetem tal qual estão.

A comunicação professor-estudante é face a face. Negociam-se significados de acordo com o nível e o comportamento da classe. Não é uma negociação em busca do equilíbrio de forças, mas em benefício do processo didático. Portanto, uma negociação que não prejudica a comunicação dos valores da ciência tais como o encadeamento lógico, a aproximação sucessiva da linguagem formal e o domínio dos conceitos.

O encadeamento lógico, presente no discurso científico, é muito valorizado pelos PCN. Consideram-no essencial para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno. A lógica está ligada à matemática e não se pode dizer que a demonstração está inserida em um contexto educativo sem que haja um encadeamento lógico no qual o aluno esteja desenvolvendo a criatividade, a intuição, a capacidade de analisar e criticar, podendo assim interpretar os fatos e os fenômenos, possibilitando o desenvolvimento da capacidade de argumentar dentro de um determinado espaço de conhecimento, adquirido por ele no decorrer de sua trajetória escolar possibilitando, dessa forma, que ele possa evoluir para a realização de demonstrações formais por iniciativa própria (BRASIL, 1998).

Citamos por várias vezes a demonstração formal, mas na realidade não esclarecemos sobre o que realmente a lógica define como sendo uma demonstração. No artigo publicado por Bicudo (2002, p. 67), encontramos que demonstração caracteriza o que vem a ser um sistema formal. O formal é a parte “sintática de um sistema axiomático”.

Um sistema formal é composto de três partes, sendo que a primeira delas é constituída pela linguagem. Uma linguagem com símbolos próprios que se constituem em um conjunto de fórmulas. Símbolos e fórmulas devidamente especificados caracterizam uma linguagem específica.

“A parte seguinte de um sistema formal consiste em seus axiomas. A única exigência feita é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal” (BICUDO, 2002, p. 67).

A terceira parte de um sistema formal é constituída pelas regras de inferências, que nos permitem concluir teoremas a partir dos axiomas.

Cada uma dessas regras contém explicitadas as condições que permitem fazer inferências conclusivas a partir das condições estabelecidas inicialmente, as hipóteses, e as condições encontradas no processo através de procedimentos que envolvem o uso da linguagem e das propriedades.

3.2 A Argumentação no Contexto da Educação Matemática

A demonstração, como uma prática de inferência Matemática, mesmo estando sempre presente nos textos matemáticos, normalmente, o seu valor formativo nem sempre recebe a atenção que merece por ocasião da formação inicial do professor. No entanto, no contexto educacional essa prática vem despertando a atenção de teóricos e pesquisadores de vários países (ARSAC, 1992; DUVAL, 1993; OSÓRIO, 2002; ROBOTTI, 2002; GARNICA, 2002; PIETROPAOLO, 2005; VIGO, 2006).

Quando se trata de discutir a sua importância para a ciência matemática há fortes indicações de que ela recebe aprovação unânime dos pesquisadores, inclusive de Lakatos (1978) um crítico do formalismo matemático.

Pesquisas experimentais têm sido conduzidas (VIGO, 2006; PEDEMONTE, 2002) com a intenção de compreender como os estudantes manifestam o seu relacionamento com a demonstração matemática ou mesmo com o processo de aquisição da habilidade de praticar a demonstração com compreensão.

Em décadas recentes vem crescendo o interesse de pesquisadores em realizar estudos sobre o papel da demonstração e, mais amplamente, sobre o processo da argumentação em matemática (GARNICA, 2002; PIETROPAOLO, 2005; LEANDRO, 2007).

Diante do reconhecimento da importância do tema e tendo em vista nosso envolvimento na formação de futuros professores, nos propusemos a estudar o valor formativo do processo de argumentar e **a sua evolução no transcorrer de um curso de Licenciatura em Matemática.**

Entendemos que o desenvolvimento cognitivo da argumentação, por exigir articulação entre diferentes conceitos, por envolver a atividade matemática e a comunicação, desloca o aluno da posição de passividade para transformá-lo em sujeito na construção do seu próprio conhecimento. Um deslocamento que no nível teórico é uma realidade conquanto na prática seja apenas uma possibilidade. Esse pressuposto do deslocamento da posição do aluno através da argumentação parece ser também o entendimento daqueles que elaboraram os PCN.

Estamos entendendo que a argumentação é uma etapa do processo de demonstração, tal como teoriza Arsac (1992). No entanto, em se tratando de ensino fundamental, pode ser confundida com as etapas mais evoluídas desse tipo de raciocínio: a prova e a demonstração, nessa ordem.

Essa confusão entre os três conceitos, no entanto, só ocorre em nível da prática, pois em nível teórico, os estudiosos distinguem claramente cada um deles e o papel que desempenham no estudo da matemática.

Com base em nossa experiência profissional composta por uma longa trajetória no ensino da matemática, podemos observar que é na prática da sala de aula da Educação Básica que as noções acima citadas se misturam. Quando esta temática está relacionada com o aluno do ensino fundamental talvez nem fosse próprio dizer que ele faz confusão tendo em vista que o termo demonstração raramente é utilizado e, por vezes, aparece com sentido diverso daquele que lhe é próprio. Ele entende que exemplificar é demonstrar, portanto, não se trata de confundir, mas de não distinguir tecnicamente ou de, simplesmente, desconhecer a diferença ou até mesmo não saber que existe uma ou outra coisa. Quando o aluno faz uso da argumentação para explicar ou justificar[18] um procedimento adotado ou um resultado obtido ele está fazendo uma demonstração em seu estágio embrionário e normalmente dá-se por satisfeito supondo ter esgotado o assunto.

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998) consideram relevante que a argumentação seja desenvolvida e pressupõe que seja uma habilidade a ser desenvolvida com a contribuição da matemática. Os PCN explicitam ainda que a

---

[18] Alguns professores solicitam, na prova (avaliação), que justifiquem o procedimento adotado. Às vezes o aluno questiona a correção da prova e argumenta ao seu modo.

argumentação contribui para o desenvolvimento das habilidades requeridas para o domínio da demonstração.

A demonstração, na cultura educacional, dificilmente é praticada até o ensino médio. Por não distinguir os laços que unem argumentação e demonstração e não ter clareza das regras de inferência, os professores não enfatizam esse aspecto da aprendizagem matemática considerando que o aluno desse nível de ensino não possui requisitos conceituais e domínio de notação algébrica suficientes para empreender uma tarefa demonstrativa, que é uma atividade formal. Não lhe é atribuída importância formativa. Demonstrar não é praticado por considerá-la difícil para o aluno e a argumentação não é estimulada, talvez, por considerarem-na carente de objetividade (OSÓRIO, 2002). Em uma organização didática centrada na aprendizagem de técnicas, argumentar torna-se uma prática incoerente e demonstrar, uma prática desnecessária.

Santos e Sales (2009) entrevistaram quatro professores de matemática da Educação Básica. Três deles, equivocadamente, consideravam a exemplificação como demonstração. O professor que revelou saber o que é uma demonstração disse não praticá-la em sala de aula, pois, “para que serve as demonstrações dentro da sala de aula a não ser para passar o tempo e fazer com que o aluno tenha receio da Matemática, receio do professor e receio da escola? Quero dizer aquela distância só irá aumentando.[...] Demonstração é matemática pura e isso não é a realidade do aluno [...]” (SANTOS; SALES, 2009, p.6).

A aridez da demonstração (LAKATOS, 1978) desestimula a sua prática em contextos de ensino anterior ao curso de licenciatura ou bacharelado (OSÓRIO, 2002). Nesse caso, ao acadêmico que recém ingressou em um curso de Licenciatura em Matemática falta também essa habilidade. Melhor dizendo, ele desconhece quase por completo o significado do termo quando é introduzido no tratamento algébrico, repleto de rigor, e que se chama demonstração.

Os próximos parágrafos visam apenas situar a temática em um contexto mais amplo e estabelecer a distinção entre a argumentação, a prova e a demonstração. Estes são conceitos cuja relação entre si, bem como os diferentes graus de complexidade que possuem, não são percebidos distintamente pelos docentes de matemática. Não são aplicados, discutidos ou ensinados, em sala de aula dificultando, dessa forma, o processo de aprendizagem de um elemento chave, fundamental, para a Matemática.

3.3 Argumentação, Prova e Demonstração

A relação entre a argumentação e demonstração na matemática recebe de Arsac (1992) uma distinção clara e objetiva. Demonstração é um caso particular de prova que, por sua vez, está inserida num contexto mais amplo denominado argumentação.

A argumentação não tem, como ponto de partida, um compromisso com a verdade, se entendermos verdade como algo já construído, como é o caso da prova e da demonstração. *A argumentação busca a verdade em potencial, uma verdade a ser estabelecida, e procura esclarecer ou também convencer.*

O componente racional de uma argumentação é composto pela coerência e pela articulação entre as proposições.

Desenvolver a capacidade de argumentar parece ser uma necessidade cada vez mais presente na sociedade atual cuja característica principal é a comunicação e em que o diálogo se apresenta como uma moeda de grande valor.

Prova, é uma explicação ou argumentação aceita por um grupo social. Não se trata necessariamente de algo rigoroso. É uma argumentação que possui coerência suficiente para convencer. Encaixam-se nesse status as "demonstrações" feitas por computador, onde muitos experimentos são realizados, e os vários exemplos propostos em sala de aula que culminam por convencer o aluno da veracidade do que está sendo exposto.

No entanto, a prova tem caráter temporário uma vez que, mais cedo ou mais tarde, a dúvida poderá ressurgir mesmo que em outra dimensão ou por outro motivo.

Arsac (1992) classifica a demonstração como uma prova aceita pela comunidade de matemáticos. Ela é atemporal e impessoal. A demonstração, nessa perspectiva, é uma argumentação que satisfaz os requisitos exigidos por uma comunidade de especialistas. Demonstração é um caso particular de argumentação e de prova.

A demonstração nos conduz para um resultado já conhecido, portanto, seu papel é desfazer possíveis dúvidas, evidenciar ou confirmar uma verdade já conhecida. A argumentação, nessa perspectiva, é aberta ao debate e a demonstração é fechada ao debate.

Até agora a nossa discussão ficou no âmbito dos aspectos funcionais, porém, do ponto de vista da estrutura pode-se dizer, sinteticamente, que a argumentação se "desenvolve pelo encadeamento dos enunciados" e a demonstração pela "substituição dos enunciados" (FREITAS, 1993, p. 30).

Segundo os estudos feitos pelos Van Hiele (CROWLEY *apud* LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 4), a demonstração, com todo o seu rigor característico, é indício de plena maturidade no conhecimento geométrico. Para esses pesquisadores são cinco os níveis de conhecimento geométrico, sendo eles: 1) visualização; 2) análise "através da observação e da experimentação"; 3) dedução informal; 4) dedução e 5) rigor. O último deles, o da abstração e do rigor, ocorre quando o estudante consegue manejar com fluidez diversos sistemas dedutivos e analisar o grau de rigor desses sistemas, ele está apto comparar sistemas diferentes (CROWLEY *apud* LINDQUIST; SHULTE, 1994, p. 4).

No penúltimo deles, o da dedução, quando o estudante consegue perceber "a inter-relação e o papel de termos não definidos, axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações e não apenas de memorizá-las"(Ibid.) ocorre a demonstração. Há, sem dúvida, um grau muito elevado de abstração em cada demonstração geométrica, pois o desenho ali aparece apenas como um coadjuvante à linguagem. A argumentação, por sua vez, começaria no nível dois da escala de Van Hiele quando começam ocorrer o ordenamento lógico das propriedades e a compreensão das primeiras definições. Um aprofundamento da argumentação ocorre no nível três, quando o estudante já consegue desenvolver algumas sequências, relacionar alguns axiomas, observar regularidades.

A partir dessa perspectiva, no ensino fundamental, o trabalho deveria incluir a argumentação tendo em vista que o estudante precisa ser levado a ultrapassar o nível da visualização. Os PCN (BRASIL, 1998) atribuem importância fundamental ao processo de argumentação como elemento que contribui para a formação do sujeito cidadão e como um preparativo para a demonstração.

O documento chega mesmo a afirmar que a contribuição da matemática para o desenvolvimento da argumentação se constitui num dos princípios norteadores do seu ensino visando adequar o ensino à nova realidade, justificando a sua presença (da matemática) cada vez maior nos diversos campos da atividade humana.

A busca de caminhos pessoais e coletivos para o estabelecimento de relações econômicas, sociais e culturais que promovam a qualidade de vida exige que se estabeleçam profundas mudanças na relação do homem com o meio onde vive. É necessário que sejam plenamente compreendidas as relações de interdependência dos diversos elementos e a importância dessas relações para a manutenção da vida no

Planeta. O respeito à vida requer novas formas de organização e um trabalho interdisciplinar com a inserção da matemática. Nessa visão o estudo é para a vida e a argumentação é considerada um procedimento com a mesma importância de "(coleta, organização, interpretação de dados estatísticos, formulação de hipóteses, realização de cálculos, modelização, **prática da argumentação** etc.)" (BRASIL, 1998, p. 31 grifo nosso).

Perelman (*apud* OLÉRON, 1987), justifica o uso da argumentação tomando como base a liberdade dos indivíduos, os interesses pessoais e coletivos e o uso maciço dela pelos meios de comunicação. Já não podemos mais impor, temos que convencer.

A capacidade de argumentar, na perspectiva dos PCN, deve, inclusive, ser um dos fatores da avaliação no quarto ciclo [8º e 9º anos] e tem por objetivo verificar a capacidade do aluno em justificar a validade de um procedimento matemático.

3.4 Argumentar, provar, justificar

Embora o uso da justificativa ou a presença da necessidade de prova apareça de forma esparsa em lugares diferentes e em momentos históricos diferentes, Arsac (1992) situa o nascimento da demonstração no século V a.C., na Grécia. Esse século marcou o início da época áurea dos sofistas, os polêmicos divulgadores da cultura. Por ter sido a época da democracia, da liberdade de expressão é, portanto, de se supor que tenha mesmo sido esse um dos momentos propícios para o desenvolvimento do raciocínio demonstrativo matemático.

ABREU (2006, p. 27) reforça o exposto por Arsac. Afirma que a "retórica ou arte de convencer e persuadir surgiu em Atenas, na Grécia antiga" no tempo em que os atenienses estavam vivendo a experiência da democracia. Essa experiência teria ocorrido "por volta de 427 a.C" quando o legislador Sólon estabeleceu os princípios da democracia.

Tomando por base o contexto do seu nascimento entendemos que isso não ocorre em qualquer ambiente e em quaisquer circunstâncias porque somente em um regime democrático, no qual as dúvidas podem ser expressas, é que as explicações se fazem necessárias e se justificam. Apenas em um ambiente onde se tem uma visão geral do contexto e as idéias têm livre curso, se justificam os debates e surge a necessidade de esclarecer, convencer, justificar. É o conflito sóciocognitivo resultante do embate que faz surgir a necessidade de explicar, justificar, provar e/ou demonstrar. Em outro contexto a demonstração é impositiva como, por vezes, acontece na escola.

Entendemos que em um contexto educacional as demonstrações em matemática só adquirem sentido numa condição de compreensão do que está sendo exposto ou defendido. O ambiente institucional onde o debate é possível e desejado justifica o uso do argumento justificatório. Nessa perspectiva, a demonstração é um argumento compreensível e justificável em que há uma dúvida, ainda que provocada.

Esse entendimento nos leva a estabelecer uma articulação dessas idéias com o recorte antropológico, na linha proposta por Yves Chevallard, que situa a atividade matemática no âmbito do conjunto das atividades humanas e não como um fator isolado que prescinde de um contexto social.

Chevallard (2001) discute essa questão de forma ampla explicitando o papel das instituições sociais na determinação dos temas da matemática a serem estudados e as necessidades sociais que tornam imperativo o estudo da matemática

Ao posicionar, no tempo, o nascimento da demonstração Arsac e Abreu contribuem para percebermos que a dimensão política desempenha importante papel para a validação do saber em um dado contexto institucional, podendo ser o plano acadêmico, escolar ou do cotidiano.

Arsac (1992, p. 6) procede, então, uma classificação dos níveis e das características do raciocínio empregado numa atividade visando estabelecer uma certeza relativa a uma afirmação matemática. A demonstração matemática, nessa perspectiva, caracteriza-se como um tipo particular de rigor, cultivado no saber acadêmico, e parte de enunciados aceitos como verdadeiros - os axiomas - deduzindo os demais de acordo com um conjunto de regras da lógica. Para o matemático um conhecimento deixa de ser processo e se torna solidificado quando, reunidos os axiomas e teoremas pertinentes, se puder concluir ser aquele o único resultado possível. Segundo Fetissov, a demonstração é exigida por uma das leis fundamentais do nosso pensamento - o princípio da razão suficiente que aponta para a necessidade de fundamentar rigorosamente as nossas afirmações. Nessa atividade a inteligência é desafiada à medida que se põe a procurar a sucessão de silogismos que "permitirá ligar a afirmação a demonstrar às verdades anteriormente reconhecidas e às condições do teorema" (FETISSOV, 1985, p. 18).

Como vimos, na classificação proposta por Arsac, a demonstração é tratada como um caso particular de prova e esta como um caso particular de explicação, conforme o seguinte esquema (fig. 5):

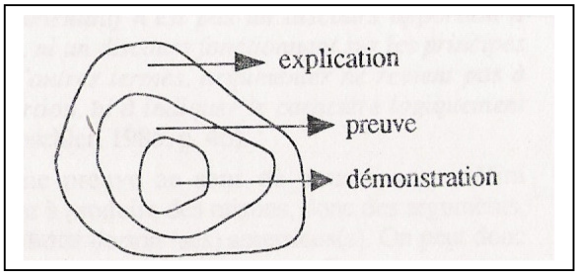


Figura 5–Esquema de Arsac (ARSAC, 1992, p. 6)

Mas, a explicação é tomada por Arsac[19] com o sentido de justificar. Ele chama de explicação "todo discurso mantido por uma pessoa ou um grupo com o objetivo de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático" (ARSAC, 1992, p. 5 tradução nossa).

Em um sentido mais amplo, tal como exposto por Oléron (1987), a argumentação pode ser concebida como a tentativa, de uma pessoa ou de um grupo de pessoas, de conseguir adesão ao seu ponto de vista. Nesse sentido, a noção de argumentação não está limitada a um campo do saber. Na prática da argumentação, ainda segundo Oléron, não há, necessariamente, a preocupação com a verdade, há apenas a defesa de um ponto de vista e uma tentativa de convencer, isto é, argumentar é uma tentativa de construir uma verdade. Pode ser válida ou não. É válida se convencer, se os recursos utilizados forem suficientes para esclarecer e obtiver a adesão pretendida. *Nisso está um dos aspectos do seu valor formativo: o fato de ser uma construção do próprio indivíduo.*

Os recursos lógicos (expressos através de ações verbais, gráficas, tecnológicas, mímicas, etc.) que forem utilizados podem, ou não, conduzir na direção de uma demonstração, com todo o seu rigor e poder de fechamento da questão.

Não tendo a preocupação com a validade da tese ou, melhor dizendo, ainda não conhecendo o desfecho, a argumentação, nem sempre se prende a deduções lógicas e nem se compromete previamente com a verdade do que afirma. Pode, inclusive, basear-se em premissas equivocadas e se conduzir pela lógica natural tendo como endereço um determinado grupo.

Estamos entendendo Lógica Natural como o discurso do cotidiano. Constitui-se numa mescla de argumentos sem rigor, onde tese e hipótese são confundidas e as passagens de uma etapa para outra são feitas sem as devidas

[19] Arsac, Oléron e outros não distinguem a argumentação explicativa da argumentação justificatória.

justificativas teóricas. Estamos supondo que quando se trata do campo específico da matemática a argumentação tende a evoluir para a configuração da defesa de uma tese específica.

Uma argumentação pode ser forte ou fraca e nunca é mais forte do que o seu ponto mais fraco. Essa concepção de força da argumentação, já era defendida pelo sofista Protágoras que distinguia o discurso fraco do discurso forte pela quantidade de indivíduos que o aceitavam.

> A passagem do discurso fraco para o discurso forte se daria a partir dos pontos em comum que o discurso individual encontraria no discurso/opinião dos outros indivíduos. Como a verdade do indivíduo se manifesta através do discurso, enquanto for um discurso individual é um discurso fraco, uma verdade fraca (RAMIRES, 1993, p. 16).

A argumentação que não tem um público definido fica carente de significado. As argumentações que são aceitas por um grupo, num determinado momento, adquirem o *status* de prova. A prova tem valor relativo, serve apenas para o grupo que a aceita, que foi convencido pelo argumento. Um exemplo de prova matemática, comumente usado em nossas escolas, consiste em verificar, através de dobraduras, a validade do teorema que afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o. Em outros aspectos da vida social a prova pode consistir em um exemplo ou contra-exemplo.

Enquanto, como foi exposto em parágrafos antecedentes, uma argumentação, pode ser considerada boa, fraca ou forte, sobre a demonstração, conforme Arsac, não se emite juízo de valor. Ela é correta ou incorreta; não há meio termo. É atemporal e impessoal, porque a sua validade não depende de quem a apresenta ou do tempo em que foi apresentada. É verdade sempre. Não depende nem mesmo da compreensão de quem a apresenta. Ela precisa ser compreendida apenas por quem a avalia. Alguém pode apresentar uma demonstração sem entendê-la. Para que tenha sentido, porém, é necessário que a pessoa a quem se destina possa entendê-la.

Da leitura de Oléron (1987) e dos parágrafos precedentes podemos sintetizar as principais características de uma demonstração como sendo:

- Destina-se a um grupo que tem uma cultura específica e uma linguagem comum. Esta é a sua característica social. A argumentação e a prova possuem apenas em parte essa característica. Os grupos a que se destinam não têm uma cultura específica e sim um objetivo comum.

- Apóia-se em enunciados considerados verdadeiros. Os outros argumentos são deduzidos dos precedentes a partir de um conjunto de regras da lógica. Ela é formal. A argumentação e a prova, porém, não possuem essa característica. Não há, necessariamente, uma formalidade nelas e os pressupostos (no caso da argumentação) podem estar ainda em construção.

- Ela é teórica. Opera com objetos que não pertencem ao mundo sensível, objetos não-ostensivos. O concreto serve apenas como ponto de referência. A argumentação e a prova também partem dos objetos sensíveis mas, às vezes, a conclusão fica restrita à manipulação desses objetos. Aqui nos remetemos aos trabalhos de Chevallard (2001), Bosch e Chevallard (1999), Bosch e Gascón (2001), para os quais objetos sensíveis não estão restritos aos que são manipulados pelo tato. Podem ser também palavras, gestos, desenhos e esboços.

Pelo seu aspecto teórico, algumas vezes, a demonstração se torna inacessível, especialmente quando se desconsidera a necessidade de uma organização didática específica para o seu estudo. Deve ter sido a preocupação com essa característica da demonstração que levou Kline a afirmar que

> o conceito de 'demonstração' é fundamental em matemática e, assim, na geometria, o aluno tem a oportunidade de aprender uma das grandes características da matéria. Mas como demonstração dedutiva final de um teorema é geralmente o resultado de uma série de adivinhações e tentativas e muitas vezes depende de um esquema engenhoso que permita provar o teorema na devida sequência lógica, a demonstração não é forçosamente natural, isto é, uma atividade que acudiria prontamente ao espírito do adolescente. Além disso, o argumento dedutivo não dá discernimento ("insight") das dificuldades que foram vencidas na criação original da demonstração. Por conseguinte, o aluno não pode perceber o fundamento lógico e ele pratica na geometria o mesmo que pratica na álgebra. Decora a demonstração (KLINE, 1976, p. 21).

Lakatos (1978), assim como Kline, escreve na perspectiva de uma época em que se tratava a matemática com ênfase nos aspectos estruturais. A formalidade consistia na totalidade ou quase totalidade do tratamento dado à matemática escolar. Nesse contexto a demonstração encobre a lógica do descobrimento por apresentar o assunto pronto, sem questionamentos. Por essa razão esses dois autores não poupam críticas à demonstração. Entendemos, porém, que suas críticas dizem respeito aos aspectos pedagógicos e didáticos com que ela é usada.

Embora eles tenham escrito no contexto do Movimento da Matemática Moderna entendemos que para a formação de professores, vertente na qual estamos inseridos, as críticas de Lakatos e Kline não podem ser ignoradas. Considerando que na esfera educacional, na qual o desafio deve estar presente, a demonstração como ponto de partida de uma atividade didática ou em uma instância muito próxima desse ponto nem sempre é recomendada.

Além do que foi dito no parágrafo precedente temos a perspectiva de que o ensino do futuro professor precisa ser conduzido de tal modo a habilitá-lo para enfrentar desafios de natureza reflexiva para que possa conduzir um ensino semelhante quando assumir a sala de aula.

Novamente temos uma advertência de Kline (1976, p. 59): “Do ponto de vista da pedagogia matemática, temos naturalmente que protestar contra a apresentação de tais coisas abstratas e difíceis muito cedo aos alunos”.

Ainda nesse contexto de formação de professores, e levando em conta que a prática da demonstração é frequente nos cursos de Licenciatura em Matemática, pode-se perguntar: até que ponto o acadêmico “compreende” as demonstrações que, por vezes, são apenas repetidas e memorizadas? Uma resposta a essa questão foi fornecida por Rolkouski em seu depoimento pessoal citado anteriormente.

Sabemos que embora o desenvolvimento do raciocínio dedutivo seja um dos objetivos do ensino da matemática no nível da educação básica isso nem sempre acontece. Osório (2002) salientou que esse desenvolvimento nem mesmo é estimulado porque está implícito na prática dos professores da educação básica que eles entendem não ser justo propor aos alunos processos que exijam recursos intelectuais equivalentes ao de um matemático.

O que foi destacado por Osório foi constatado também por Santos e Sales (2009) em nosso Estado. Por essa razão, as demonstrações cedem lugar a uma “suposta apresentação desta ciência mais acessível ao aluno” (OSÓRIO, 2002, p. 46). No entanto hoje, ainda segundo Osório, em vários países, está se buscando incluir em maior ou menor medida a metodologia da validação no ensino da matemática. A razão apresentada para isso é: a escola que tem a pretensão de ser a transmissora do conhecimento científico deve incluir em seu programa atividades de demonstração matemática, porque a “demonstração é o meio de validação de um conhecimento científico muito particular: o matemático” (OSÓRIO, 2002, p. 46).

Temos nesses parágrafos o indicativo de que ainda temos muito para refletir sobre a verdadeira função de certas formas de abordagens dos conceitos na formação clássica. Estamos supondo também que Kline e os outros autores que criticam fortemente o uso da demonstração no contexto educacional mantêm a visão clássica de uma organização didática. Na forma clássica quase sempre se define um objeto, anunciam-se as suas propriedades e, em seguida, são demonstradas essas propriedades. Muitas vezes tudo isso ocorre antes mesmo que o estudante tenha a oportunidade de refletir sobre elas e entender o que está sendo demonstrado[20].

Os que concebem que o estudo da matemática deve consistir na transmissão do conhecimento que já está consolidado, têm na demonstração o ponto de partida da atividade de ensino da matemática.

Na relação entre argumentação e demonstração, como estamos entendendo uma como um caso particular da outra, devemos ter em mente que alguns elementos constitutivos do conjunto de argumentações, muitas vezes, precisam ser revistos ou descartados no processo de particularização. Uma argumentação, mesmo conduzida por parâmetros da lógica (coesão e coerência), pode não resultar em uma demonstração por ter partido de pressupostos equivocados. Pode ainda acontecer de atender aos demais requisitos mas ter sido expressa por uma linguagem particular ou coloquial.

Duval (1993) vai mais longe e admite a possibilidade de haver uma distância cognitiva entre ambas. Para ele admitir uma proximidade, isto é, que possa haver uma continuidade na passagem de uma para a outra implica em admitir que a linguagem natural se aproxima da linguagem formal. Nesse caso, temos alguns problemas conhecidos. Na linguagem natural a hipótese tanto pode significar algo possível como algo improvável o que não acontece na linguagem formal. Por outro lado, admitir uma ruptura na passagem de uma para a outra implica afirmar que o raciocínio usado na demonstração se norteia por princípios diferentes do raciocínio válido usado na linguagem natural.

Para se posicionar Duval argumenta que a demonstração possui um estatuto teórico que lhe atribui um valor epistêmico particular. Sua validade não depende do conteúdo das suas proposições, mas dos pressupostos que embasam a dedução. A relação entre pressupostos e conclusão é direta. Os elementos intermediários, o conteúdo propriamente dito, não interferem na conclusão porque possui definição precisa, um estatuto pré-fixado. A demonstração é impessoal. Na argumentação, por sua vez, há um entrelaçamento das partes envolvidas: pressupostos, conteúdo e conclusão. Há ainda o envolvimento pessoal de quem apresenta a argumentação. A pessoa que argumenta estabelece os pressupostos e a validade da conclusão depende

[20] Rolkouski, ao narrar a sua experiência, descreve esse procedimento.

do conteúdo. Não há um estatuto teórico, mas uma compreensão do conteúdo das proposições.

Para Duval há uma certa proximidade discursiva mas nessa proximidade está oculta uma distância cognitiva entre ambas as atividades. Por terem estatutos operacionais diferentes a passagem da argumentação para a demonstração implica numa ruptura cognitiva. Esse pensamento, no entanto, não se aplica a todo tipo de raciocínio e Pedemonte (2002) se encarrega de pontuar as ressalvas. Assumimos com Pedemonte a possibilidade de continuidade.

3.5 A Argumentação e a sua contribuição para a Educação Matemática

Conforme foi visto demonstrar, justificar e provar são conceitos frequentemente usados em matemática, não necessariamente nesta ordem, mas sempre significando que o cumprimento da tarefa proposta não estará completo se não for devidamente comprovado ou explicado segundo regras pré-estabelecidas e aceitas como verdadeiras.

Desde que Tales de Mileto (séc. VI a.C.) organizou dedutivamente a geometria e provou alguns teoremas (BOYER, 1996) e séculos depois Euclides de Alexandria (séc. III a.C.) sistematizou a matemática produzida até então, nos treze volumes de Os Elementos, o estudo dessa ciência tem sido conduzido tendo em vista a formalização dos conceitos definidos pelos matemáticos e a demonstração das propriedades desses conceitos (BICUDO, 1999). Essas propriedades são em seguida despersonalizadas, descontextualizadas e generalizadas. A formalidade, como característica essencial e inconfundível da matemática, é, portanto, um fim a ser perseguido especialmente no presente contexto em que predomina a concepção formalista encabeçada por David Hilbert (BRASIL 1998).

No entanto a precocidade na abordagem da demonstração não é um procedimento recomendado. Encontramos no Guia do PNLD/2008, em diversos momentos, indicativos de que quando o seu estudo (da matemática como um todo) na sala de aula se apresenta excessivamente formal e precocemente sistematizado há necessidade de cuidados por parte do professor (BRASIL, 2007). A ausência de flexibilidade desprovê a matemática da potencialidade de “ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento” (BRASIL, 1998, p. 26).

Em diversos momentos anunciamos que a demonstração tem uma grande contribuição para a aprendizagem da matemática, mas que essa contribuição somente se efetiva quando são elaboradas atividades de tal modo que a demonstração seja, preferencialmente, a culminância de um processo. Entendemos ainda que há procedimentos pré-demonstrativos que, por serem insuficientes em si mesmos para se constituírem em um final de processo, possuem a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo e, ao mesmo tempo, preparam para o desenvolvimento da habilidade de demonstrar.

A demonstração como ponto de partida, ou como finalidade improrrogável, pode transparecer um caráter impositivo. Apresentada dessa forma ela encerra abruptamente o assunto em um contexto social no qual o debate é valorizado e faz surgir a questão: o ensino da matemática necessita mesmo acontecer na contramão do contexto histórico em que vivemos?

Explicação, conforme visto em parágrafos precedentes, é uma prática pré-demonstrativa, na classificação de Arsac. É um caso particular de argumentação. Em nossa forma de entender há em uma argumentação aspectos explicativos e aspectos justificativos. Pressupomos que a explicação seja mais ampla do que a justificação. Isso significa dizer que a segunda está contida na primeira conforme esquema que apresentamos na figura 5. Entendemos que a diferença entre ambas está na intencionalidade.

O aspecto explicativo de uma argumentação tem sua ênfase no esclarecimento podendo ou não ter por objetivo justificar. Explicar não implica, necessariamente, uma defesa, uma prestação de contas. Pode significar apenas um esclarecimento. A justificativa, porém, sempre implicará numa defesa de um ponto de vista ou de uma ação.

Dessa forma estamos entendendo que quem explica pode ter ou não a intenção de justificar. Mas, quem se propõe a justificar terá, necessariamente, que recorrer a uma explicação. Seguindo essa linha de raciocínio, em certo sentido, nossa concepção de justificativa coincide, em nível de abrangência e complexidade, com a prova definida por Arsac (1992). No entanto, há diferenças entre ambas: a prova fecha temporariamente a discussão sobre o assunto enquanto a justificativa fornece elementos para a prova. Uma justificativa pode não culminar em prova. É difícil conceber uma argumentação que não explique nada, mas estamos supondo que no nível teórico isso seja possível.

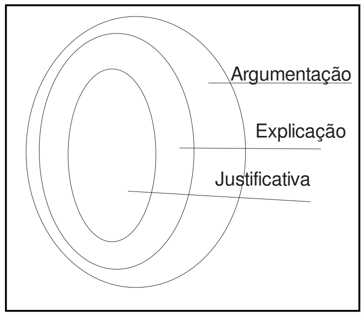


Figura 6–Esquema de classificação de argumentação, explicação e justificativa.

Um segundo esquema (fig. 7) articula justificativa e prova.

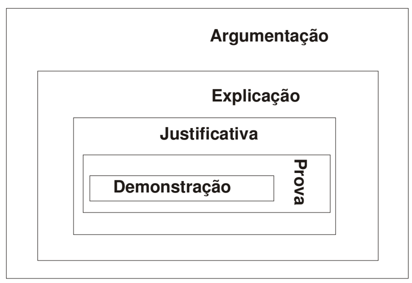


Figura 7–Articulação entre justificativa e prova

A compreensão de que é possível evoluir da forma natural de pensar para uma forma racional justifica a presença da argumentação no contexto do desenvolvimento de atividades de estudo da matemática.

3.6 Nossa Definição de Argumentação, Prova e Demonstração

A argumentação como técnica de esclarecer um processo ou validar um produto sem possuir, necessariamente, os atributos que asseguram a verdade. Toda argumentação pressupõe uma intecionalidade sobre um dado objeto e caracteriza-se pela articulação de argumentos novos que podem ser integrados de modo a revelar a intencionalidade.

Sendo que é possível faltar-lhe o rigor na articulação das regras podendo, inclusive, haver lacunas entre os elementos constituintes ela está sujeita a julgamento de validade, podendo ser aceita ou não.

Toda argumentação busca explicar mas não está assegurada a justificativa. Há, portanto, argumentações que são explicativas, descritivas do processo e argumentações que são justificatórias, que procuram convencer. Estas últimas são tecnologias, na acepção da TAD. As explicativas utilizam recursos práticos e as justificatórias utilizam recursos teóricos.

A argumentação é uma técnica quando é aplicação de outros saberes para a resolução de uma tarefa, quando ferramenta para interpretação e compreensão da tarefa proposta. Quando se vale de conhecimentos práticos como traçar paralelas, identificar ângulos, identificar e/ou construir triângulos ou outro polígono qualquer. É tecnologia quando incide sobre a técnica esclarecendo, justificando; quando se vale da teoria para justificar, porque a construção foi feita ou um certo recurso foi utilizado.

Prova: toda argumentação que consegue convencer. Mesmo uma argumentação explicativa pode transformar-se em prova dependendo do grau de exigência da comunidade envolvida no processo.

Demonstração: toda argumentação que, além de convencer, possui uma forma definida socialmente. É realizada conforme um ritual aceito pelos especialistas: definição da hipótese e da tese e a justificação dos passos que conduzem da hipótese à tese. Segue "o princípio de razão suficiente" e requer que "todas as nossas afirmações sejam fundamentadas" (FETISSOV, 1985, p. 12).

> Para que a demonstração seja correcta, isto é, para que se torne indubitável a veracidade do teorema a demonstrar, ela deve ser construída com base em silogismos correctos e estar livre de erros. A justiça da demonstração depende dos seguintes factores: 1) a formulação exacta e certa da afirmação a demonstrar, 2) a escolha de argumentos necessários e verdadeiros e 3) a observância rigorosa das regras lógicas no decurso da demonstração (FETISSOV, 1985, p. 62.)

O poder de convencimento de uma demonstração nem sempre é evidente. Às vezes uma demonstração não convence *que é*. Recorrendo aos princípios da identidade, da não-contradição e do terceiro excluído, ela convence *que não pode ser*. É o caso da demonstração por redução ao absurdo.

Em alguns casos, as demonstrações feitas em sala de aula são feitas por tradição: o professor copia como está no livro e entrega pronta. Não há uma discussão das relações. Entendemos que nesses casos, a demonstração não é uma argumentação. É uma categoria à parte: é uma "imposição" porque não explica ou não justifica (no sentido de procurar esclarecer, convencer).

Diante do exposto estamos concebendo que, do ponto de vista didático, uma demonstração, quando é impositiva, é somente um produto porque encerra a busca, determina uma verdade e põe fim ao diálogo. As justificativas que aparecem fazem parte do cumprimento de um ritual sem a preocupação com o entendimento do processo. Mas a demonstração também pode ser um processo, uma argumentação, quando se admite que ela seja passível de não ser compreendida, logo, não convencer e que pode não ser a única forma de estabelecer aquela verdade ou demonstrar aquela propriedade.

Toda demonstração tem um ritual, mas se a tomarmos como argumentação esse ritual é discutido. Uma discussão no sentido de explicar, desfazer dúvidas sobre o processo, justificar a necessidade do procedimento.

3.7 Um Referencial para Análise da Argumentação

A TAD é a nossa teoria de análise, no entanto, para analisar uma prática argumentativa ainda nos falta definir alguns elementos constituintes dessa prática. A ação de argumentar, quando cumpre plenamente o seu papel de esclarecer, convencer, estabelecer uma verdade, se constitui em um ou dois dos componentes de uma praxeologia[21]. Essa argumentação que é uma prova ou, dependendo do grau de rigor, dos recursos e da linguagem utilizados, é uma demonstração, foi desenvolvida segundo técnicas e critérios apropriados. Ela deve ter elementos lógicos suficientes para lhe conferir forma, força e critérios. Há uma teoria definindo as suas características e seus critérios de validade.

Pela TAD analisaremos o uso da argumentação e por Toulmin (2006) a estrutura da argumentação. São dois referenciais distintos usados com finalidades distintas.

Nos próximos parágrafos estaremos construindo, a partir dos escritos de Toulmin, as categorias de análise da estrutura argumentação justificatória utilizada pelos acadêmicos na resolução das tarefas geométricas. Estaremos recorrendo também ao trabalho de Pedemonte (2002) que adotou Toulmin como referencial teórico e a Peirce (1983) um semiótico que discute as espécies de raciocínio.

Em Toulmin (2006, p. 8) encontramos que “um discurso é válido se tem a forma certa”. Ele centra a sua atenção na argumentação justificatória e, nessa perspectiva, um argumento válido possui um certo ritual, procedimentos que lhe dão validade, que impedem ou possibilitam a sua anulação. Nesses procedimentos está o peso social de um argumento ou o seu valor como tecnologia.

[21] Praxeologia: (tarefa, *argumentação* explicativa, *argumentação* justificatória, teoria)

No contexto do cotidiano esse ritual nem sempre é observado. É fácil constatar a diferença que há entre a comunicação que se faz verbalmente e a comunicação que se faz por escrito. Na comunicação escrita, especialmente nos documentos oficiais, a revisão técnica sempre se faz necessária e toda idéia que se quer comunicar deve ser explicitada. No contexto não formalizado do cotidiano o argumento comporta muitas idéias implícitas além de tolerar revisão *a posteriori*.

Um exemplo de idéias implícitas é encontrado quando consideramos aquelas que conferem autoridade legal a um guarda para proibir o estacionamento ou a passagem de um veículo em determinado lugar. No caso específico da geometria, os axiomas, as definições, os teoremas e até mesmo a "tradição" de se fazer de um certo modo como acontece nos níveis do ensino fundamental e médio são, muitas vezes, idéias implícitas. Há muitas afirmações que, usualmente, não são demonstradas nesses níveis de ensino e que, apesar disso, conservam a sua validade. Citamos como exemplo desse último caso a afirmação pura e simples de que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180º. Este é o conhecimento com o qual convivem muitos alunos dos níveis anteriores ao universitário.

Estamos denominando de "tradição"[22] a um fazer totalmente embasado em afirmações não justificadas. Admitimos que seguir parcialmente a "tradição" é uma forma de fazer o programa avançar não sendo, portanto, um procedimento descartável e até é praticado por matemáticos, segundo Bicudo (1999). Muitos resultados são evocados sem que se faça a demonstração dos mesmos no momento do uso. De igual modo admitimos que em determinados níveis de estudo certos procedimentos como demonstração e justificativa podem não ser apropriados devendo ser substituídos por exemplificações. Entendemos, no entanto, que não se deve ter todo o fazer embasado *somente* na "tradição".

Na perspectiva de Toulmin, em um argumento há termos que são "modais", isto é, importantes. Esses termos têm *força* e *critérios*. A força está na consonância com o discurso socialmente aceito, na dificuldade que oferece à contradição ou refutação. Trata-se da plausibilidade do argumento tanto com relação ao fim a que se destina como a ausência do folclórico e do absurdo.

---

[22] Exemplo de uma prática que se faz por "tradição": em algumas regiões para resolver a equação $\frac{x}{2} = \frac{5}{4}$ as duas frações são reduzidas ao mesmo denominador e depois "cortam-se" os denominadores. Isso é admitido como uma regra que dispensa explicação. A "tradição" também está presente nos discursos: "aprendi assim", "o professor fazia assim", "o livro traz assim".

Os critérios são os “padrões, bases e razões” (TOULMIN, 2006, p. 43) que nos levam a decidir porque o termo usado é importante. Tem a ver com os recursos implícitos ou explícitos que usa e com o contexto em que é aplicado. Em uma demonstração dedutiva os recursos que lhe servem de critérios são os teoremas, definições e axiomas. Em uma prova esses recursos podem ser constituídos da experimentação ou mesmo na utilização de axiomas e teoremas, porém apresentados sem maiores esclarecimentos ou detalhamentos. Em uma argumentação a tradição, conforme já visto anteriormente, também pode ser um recurso.

Os aspectos formais da argumentação se desenvolvem de modo diferente dos aspectos naturais. Dessa forma o que Chevallard (2001, p. 75, 76) afirma sobre a didática da matemática que deve se ocupar das questões da própria matemática, das dificuldades relativas ao próprio conhecimento matemático, também se aplica ao estudo da argumentação. É necessária uma organização didática voltada para a prática da argumentação racional.

A argumentação com um certo grau de formalidade não é uma prática usual. No cotidiano ela não acontece com muita frequência e por essa razão deve ser objeto de estudo. Precisa ser praticada no ambiente escolar conforme preconizam os PCN.

Não há espontaneidade na prática da argumentação formal. O exercício da argumentação em qualquer que seja nível de formalidade requer aprendizado, requer prática, requer uma organização didática específica e que envolva os sujeitos no processo.

Essa questão já incomodava Vigo (2006, p. 48) que ao desenvolver a sua pesquisa com alunos do nível médio no Uruguai se perguntava se “a demonstração é um tema, uma prática ou uma habilidade a ser desenvolvida, dentro do currículo?”. Da nossa parte entendemos que a argumentação deve ser uma prática visando o desenvolvimento da habilidade de demonstrar.

Toulmin continua a sua exposição sobre os usos dos argumentos classificando–os, quanto à sua validade formal, em dois tipos: os “que usam garantia” e os “que estabelecem garantia”. No primeiro caso o argumento se baseia em um dado cuja aceitabilidade está garantida. Normalmente ocorrem nas demonstrações porque nestas os resultados são conhecidos. Todo argumento é utilizado no sentido de estabelecer essa verdade e torná-la universal. As deduções são argumentos que usam garantia. Eles transformam em verdades idéias produzidas pelo processo de inferência.

Os argumentos que estabelecem garantia são usados, na resolução de exercícios ou problemas de álgebra ou geometria, quando se faz experimentações da técnica. De forma mais evidente aparecem na elaboração de conjeturas, é uma garantia em aberto.

Os argumentos podem ainda ser classificados em inferenciais (abdutivos), dedutivos e indutivos. No entender de Peirce o raciocínio abdutivo é o único que produz idéias novas.

A *Abdução* é um argumento originário que apresenta, em suas premissas, fatos similares ao da conclusão. Esses fatos tornariam as premissas verdadeiras ainda que a conclusão seja falsa. Nesse caso a conclusão não é uma afirmação, mas algo admitido. Um exemplo citado pelo próprio Peirce é a conclusão de Kepler de que a órbita dos astros devia ser elíptica porque as suas observações o inclinaram para isso. Os estatísticos recorrem frequentemente às inferências. A partir de um teste podem inferir se duas amostras vieram da mesma população ou não.

A *Dedução* é um argumento que apresenta fatos nas premissas e a conclusão é levada a cabo a partir desses fatos anunciados nas premissas e por isso se constitui em um "índice do fato cujo reconhecimento é assim compelido" (PEIRCE, 2003, p. 30). As demonstrações apresentadas em Os Elementos de Euclides se enquadram nesse perfil. De alguma forma há uma inferência também na dedução, porque há uma relação entre o que está suposto nas premissas e a conclusão.

A *Indução* é, no conceito de Pierce, um argumento que emerge de abduções ou inferências. Emerge de hipóteses, de experimentos realizados, e conclui-se que as hipóteses são verdadeiras na medida em que as predições se confirmam. No entanto essa conclusão pode estar sujeita a modificação na medida em que novos experimentos são realizados. Essa, a modificação da conclusão, não é uma possibilidade em matemática tendo em vista que, nessa ciência, a indução se baseia em regularidades de entes abstratos e a conclusão é induzida algebricamente.

Os argumentos indutivos se valem de observações de regularidades e ocorrem nas conjeturas e nas conhecidas provas por indução. Conjeturar é um argumento indutivo.

Peirce (1983, p. 44) diz textualmente: "O raciocínio é de três tipos: Dedução, Indução e Abdução". Afirma ainda que

> abdução é o processo para formar hipóteses explicativas. É a única operação lógica a introduzir idéias novas; pois que a indução não faz mais que determinar um valor, e a dedução envolve apenas as conseqüências

> necessárias de pura hipótese. Dedução prova algo que *deve ser*; Indução mostra que algo *atualmente é* operatório; Abdução faz uma mera sugestão de que algo *pode ser* (PEIRCE, 1983, p. 46 grifo do autor).

Segundo Pedemonte (2002, p. 72) há três tipos de argumentação indutiva.

3.8 Tipos de Argumentação Indutiva

De forma sucinta cada tipo será abordado nos parágrafos seguintes.

3.8.1 Primeiro Tipo: Argumentação Indutiva por Generalização

É uma inferência que procede de casos particulares. O processo permite a abstração de uma propriedade. Mas, esse processo pode apresentar uma generalização diferente.

Há o *resultado padrão de generalização* que ocorre quando o sujeito vê em cada caso um motivo para generalizar. Os casos podem ser dissociados um dos outros, não seguir uma ordem particular. A conjetura de Goldbach de que um número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma dois números primos é um exemplo.

Dessa forma, temos que:

P(4) = 2+2; P(6) =3+3; P(8) =5+3; P(10) = 7+3 ou 5+5 e, assim, sucessivamente

P é a propriedade de generalização sobre cada caso.

Há o *processo padrão de generalização*. A regularidade é vista no processo. Há uma cadeia de enunciados. Dois ou mais casos específicos e ordenados são considerados ligados entre si.

Uma Progressão Aritmética (PA), por exemplo, é um processo padrão de generalização pois dada uma razão e determinado o primeiro termo conseguimos obter qualquer termo seguinte. Esquematicamente temos que: P(2) $\Rightarrow$P(3); P(3) $\Rightarrow$P(4) e, assim, sucessivamente.

3.8.2 Segundo Tipo: Argumentação Indutiva por Passagem "Pelo Limite"

Obtém-se experiencialmente um caso limite. Esse caso limite funciona como uma "experiência crucial". O termo "experiência crucial" segundo Balacheff (1988, p. 56) foi criado por Francis Bacon em 1620 e não se trata de um empirismo ingênuo[23]. É uma experiência que permite distinguir, entre duas hipóteses, qual a verdadeira, mas não permite afirmar que a outra seja falsa ou, ao contrário, afirmar qual é a falsa e garantir que a outra seja verdadeira.

3.8.3 Terceiro Tipo: Argumentação Indutiva por Recorrência

Esse tipo de argumentação ocorre quando se descobre uma relação recorrente. O exemplo da Progressão Aritmética (PA) também se encaixa neste caso. A construção dos números naturais formulada por Peano em que o sucessor de um número é dado por $s(n) = n+1$ é outro exemplo. Pela sua característica de partir da descoberta de uma relação recorrente ou recursiva ela é também denominada de "*quase-indução"* (PEDEMONTE, 2002, p. 73 grifo do autor).

Citamos neste capítulo que Duval questiona a relação de continuidade entre argumentação e demonstração. Citamos também que Pedemonte se propõe discutir essa questão e ela o faz a partir dessa classificação da argumentação, num tópico da sua tese que denomina "retorno sobre a unidade ou ruptura cognitiva entre argumentação e demonstração" (PEDEMONTE, 2002, p. 74).

A ênfase é na unidade ou ruptura cognitiva, mas ela afirma que a

> análise estrutural entre a demonstração e a argumentação supõe uma continuidade do sistema de referência e se houver um desvio dos sistemas de referência entre argumentação e demonstração, uma análise estrutural perde o seu sentido, porque provavelmente temos já um caso de ruptura cognitiva (PEDEMONTE, 2002, p. 74).

Para isso é necessário que seja feita uma análise da estrutura em todos os casos de argumentação procurando, em cada um, o que há nessa estrutura que pode determinar se há ruptura ou continuidade entre argumentação demonstração.

---

[23] O empirismo ingênuo, segundo Balacheff (1988, p. 56), "consiste em assegurar a validade de um enunciado com base em qualquer caso". É uma validação rudimentar, insuficiente, mas é um dos primeiros casos de generalização que se apresenta na criança.

3.9 Análise dos Casos de Argumentação

Nessa análise o fator principal consiste em observar se o tipo de argumento contribui para que haja ruptura ou continuidade na passagem da argumentação para a demonstração.

3.9.1 Argumentação Dedutiva

Quando a argumentação é dedutiva a demonstração também é dedutiva e, nesse caso, está satisfeita a condição de continuidade. Aliás, se a argumentação é dedutiva é possível que já seja uma demonstração.

3.9.2 Argumentação Abdutiva

Quando a argumentação é abdutiva é preciso uma ruptura estrutural porque a demonstração não pode ser abdutiva. Essa ruptura deve ser preenchida para se construir uma demonstração. Mas uma continuidade estrutural permite a construção de prova também abdutiva. Nesse caso vale lembrar que estamos diferenciando prova de demonstração.

3.9.3 Argumentação Indutiva

Pedemonte analisou separadamente cada caso de indução procurando comparar com o tipo de indução por recorrência.

Se a argumentação tem por base os enunciados é necessário uma ruptura para transformar-se em uma demonstração por recorrência. Mas, em uma prova indutiva é possível basear-se em enunciados. Nesse caso, há uma continuidade estrutural na transformação da argumentação em prova indutiva.

Por outro lado uma generalização sobre o processo pode permitir uma demonstração por recorrência. Há uma continuidade estrutural porque há uma ligação de cada termo sucessivo com o seu antecedente como é o caso da PA e do sucessor de um número natural.

3.9.4 Argumentação indutiva "pelo limite" ou experiência crucial

Se essa argumentação tem por base o processo, então, a evolução para uma demonstração por recorrência é possível porque há uma continuidade estrutural. Por outro lado, se a argumentação está apoiada nos enunciados então a ruptura se faz necessária.

3.9.5 Argumentação indutiva por recorrência

Não há dificuldade em transformar a argumentação indutiva por recorrência em uma demonstração indutiva por recorrência. É evidente a continuidade estrutural entre ambas.

Pedemonte (2002, p. 76) apresenta um resumo da sua análise sobre o tema da ruptura ou continuidade entre argumentação e demonstração como se vê na tabela a seguir[24].

Argumentação	Demonstração/ prova	Continuidade(C)/ Ruptura (R).
Dedutiva	Demonstração dedutiva	C
	Outra	R
Abdutiva	Prova abdutiva	C
	Demonstração abdutiva	R
	Outra	R
Indutiva por recorrência Indutiva por generalização sobre o processo. Indutiva pela passagem "pelo limite" como um caso de generalização sobre o processo.	Demonstração por recorrência	C
	Outra	R
Indutiva por generalização sobre os enunciados. Indutiva pela passagem "pelo limite" como um caso de uma generalização sobre os enunciados.	Prova indutiva	C
	Demonstração por recorrência	R
	Outra	R

Encontramos ainda em Pedemonte (2002, p. 65) exemplos esclarecedores de argumentos que ela diz ter encontrado em Peirce. São três exemplos que permitem distinguir os três argumentos considerados: dedutivo, indutivo e abdutivo.

[24] Elaborada pela autora (PEDEMONTE, 2002, p. 76 tradução nossa)

Exemplo nº 1: dedução[25]

"Regra: Os feijões deste pacote são brancos
Fato: Estes feijões vieram deste pacote
Conclusão: Estes feijões são brancos."

Exemplo nº 2: indução

"Fato: Estes feijões vieram deste pacote
Conclusão: Estes feijões são brancos
Regra: Os feijões deste pacote são brancos."

Exemplo nº 3: abdução

"Regra: Os feijões deste pacote são brancos
Conclusão: Estes feijões são brancos
Fato: Estes feijões devem ter vindo deste pacote."

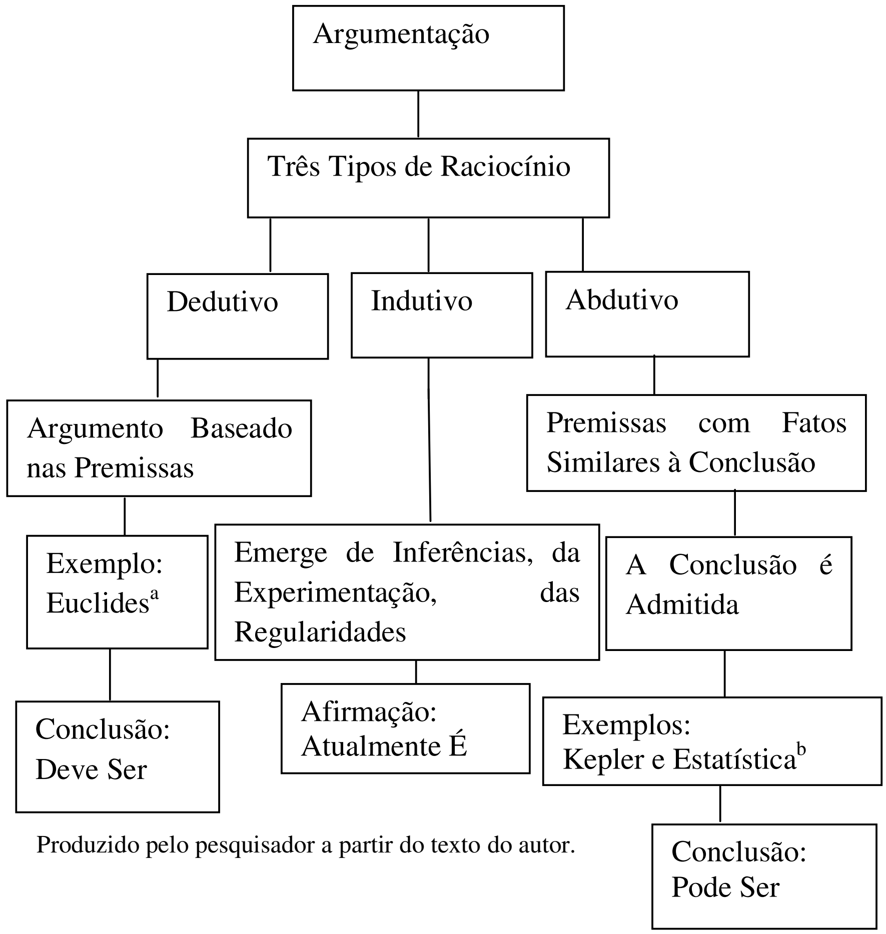
3.10 O Modelo de Análise

Este item consiste em um resumo esquemático do que foi apresentado por Peirce, Toulmin e Pedemonte.

Os esquemas seguintes foram elaborados pelo pesquisador a partir da leitura dos textos dos autores.

[25] Pedemonte (2002, p.65 tradução nossa). Para melhor entendimento dos exemplos citados convém supor que os pacotes sejam opacos. No anexo B apresentamos um exemplo nosso desses tipos de raciocínio.

3.10.1 Esquema dos Desdobramentos de Peirce sobre Argumentos.



Produzido pelo pesquisador a partir do texto do autor.

[a.] O sistema desenvolvido por Euclides em Os Elementos.

[b.] Kepler abduziu a forma elíptica da órbita dos planetas. Os estatísticos fazem abdução com base em testes de hipóteses.

Em Peirce a dedução é conclusiva, a indução é uma constatação, porque o raciocínio indutivo é "um processo de investigação experimental", e a abdução é uma sugestão, "é o processo para formar hipóteses explicativas" (PIERCE, 1983, p. 46).

Por investigação experimental Peirce entende uma metodologia de pesquisa no campo das ciências naturais que consiste em verificar a validade de uma teoria, ou melhor, a concordância das predições dos fenômenos observados com a teoria. Consiste, portanto, em uma observação continuada que permitirá concluir que até determinado ponto é assim. A indução, em Peirce, não é conclusiva. É constatativa.

Em matemática o raciocínio indutivo conduz a uma demonstração, a uma afirmação categórica de caráter geral, que pode ser utilizada para fazer deduções.

Pastor e Adam (1948) ao discorrerem sobre os métodos indutivo e dedutivo, na perspectiva da matemática posicionam a indução como um caminhar do particular para o geral, um caminho ascendente. Ao observar a regularidade com que os fatos matemáticos acontecem estabelece-se uma lei geral. Ocorre uma análise das diversas etapas do processo de construção de uma lei para depois estabelecer essa lei.

Na dedução ocorre a particularização de casos gerais. O processo é descendente porque parte de leis ou propriedades universalmente válidas para concluir um caso particular.

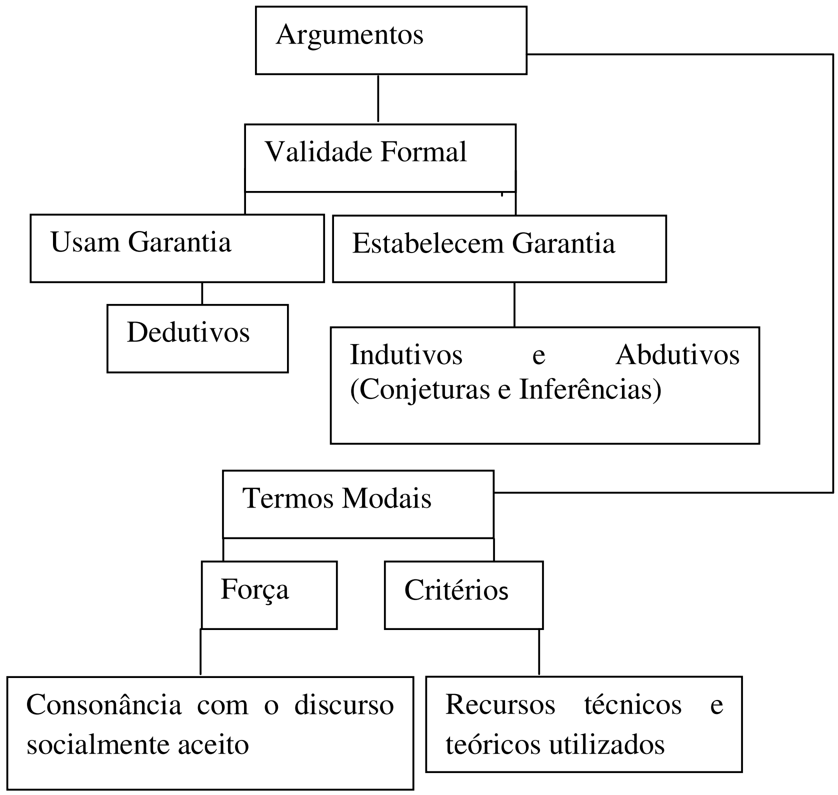
Embora sejam dois métodos opostos, em termos de processo, em termos de resultado são compatíveis entre si. O produto de uma indução é uma dedução porque resulta em uma predição. O produto de uma dedução é uma indução porque é aplicável a casos genéricos.

Tomemos como exemplo a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º. O processo é dedutivo porque parte de princípios gerais, axiomas e propriedades do paralelismo, para concluir que um triângulo qualquer tem 180º como soma dos ângulos internos. Mas se vale para um triângulo qualquer, isto é, vale para este, para aquele e para aquele outro, indistintamente, então vale para todos. De modo análogo se demonstramos, por indução, que um termo qualquer de uma PA pode ser obtido por é $a_n=a_1+(n-1)r$ então posso aplicar a um caso particular de PA cuja é razão igual a 5 e o primeiro termo é igual 2.

Galileu, a partir de observações de casos particulares, induziu uma lei geral para a queda dos corpos que se aplica a todos os corpos em particular. Essa lei permite prever como cada corpo se comporta quando em queda livre. A indução permite a dedução para cada novo caso que surgir.

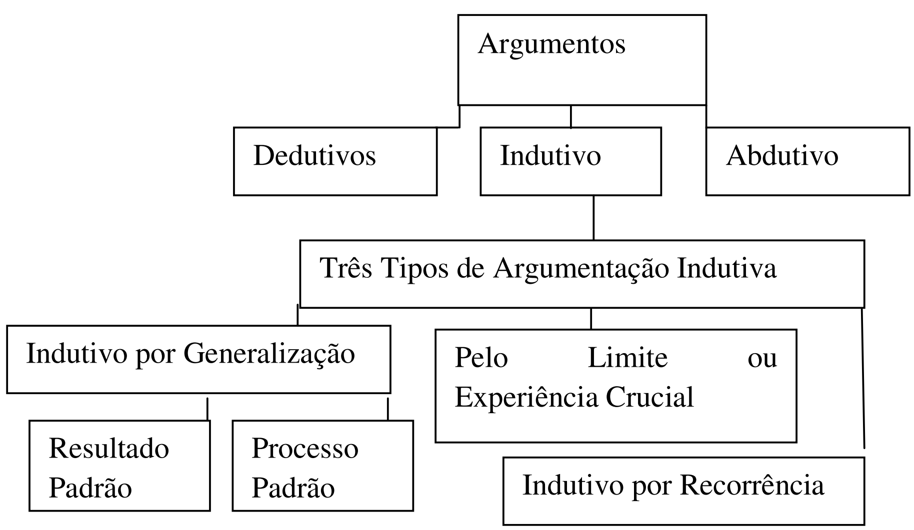
A abdução não leva a uma demonstração, é um raciocínio que conduz a suposições. Suposições plausíveis porque não se trata de um raciocínio ingênuo ou destituído de lógica.

3.10. 2 Esquema dos Desdobramentos de Toulmin para os Argumentos



Produzido pelo pesquisador a partir do texto do autor.

3.10.3 Esquema dos Desdobramentos de Pedemonte



Produzido pelo pesquisador a partir do texto da autora.

Tendo em vista que as discussões de Pedemonte a respeito das rupturas tiveram por finalidade embasar nossa concepção de que é possível evoluir da argumentação para demonstração sem rupturas não retornaremos a esse assunto em nossa análise praxeológica. Consideramos que a exposição feita já cumpriu o seu papel. Nossa visão de processo, de que é possível haver um desenvolvimento da argumentação está contemplada.

Considerando que nossa pesquisa está voltada para a análise praxeológica na resolução de tarefas geométricas, tomaremos por referencial de análise o modelo apresentado por Toulmin quando o enfoque for a argumentação enquanto tecnologia e a TAD na perspectiva de ser uma técnica. Eventualmente poderemos recorrer a Peirce dada a sua classificação dos argumentos. Manteremos em vista as proposições dos PCN com sua visão social da argumentação tendo em vista que o acadêmico, objeto de nossa pesquisa, é um ser social que está envolto neste universo de comunicação e por ele sendo influenciado. Não há como "purificá-lo" de uma vez por todas a menos que o isolemos do seu contexto e depois o retornemos à sociedade em um estágio de convivência e relacionamentos inferior ao que de lá saiu.

Entendemos que a melhoria no rigor da argumentação envolve um processo lento e que não deve ser apressado para que o sujeito a ser assujeitado não perca o vínculo social caindo no individualismo que Chevallard não vê como salutar para sociedade, isto é, para a espécie humana.

Evoluir da argumentação para a demonstração, mesmo quando exige uma ruptura cognitiva, é uma consequência necessária. Este estudo procura descrever e analisar como esse processo se desenvolve.

Toulmin estabelece um padrão ou forma de apresentação de um argumento. Quando se trata de um argumento pensado, responsável, ele tem por base alguns fatos (garantias) que lhe dão sustentação. Na Teoria Antropológica do Didático esses fatos recebem a denominação de tecnologias ou elementos teóricos. São argumentos previamente validados, de forma racional, experiencialmente ou por aceitação social, que dão suporte ao argumento que está sendo conduzido.

Um segundo aspecto do argumento, na perspectiva de Toulmin, é que ele possui uma *alegação* (que na matemática denominamos de tese). Para chegar à alegação ele parte de *dados* (as hipóteses), define a(s) garantia(s) e prevê a refutação. A previsão da refutação significa admitir que o argumento tem um limite, que ele vale em determinadas circunstâncias ou em determinados contextos sociais ou teóricos.

Mesmo os argumentos que visam estabelecer garantias têm alguns fatores que lhes dão garantia. Eles criam a verdade com base em outras verdades e por isso a verdade estabelecida fica em aberto, dependendo de que certas condições sejam satisfeitas.

O modelo proposto por Toulmin consiste, segundo Plantin (2008, p. 25), em “um modelo de coerência argumentativa”, isto é, em analisar a estrutura da argumentação.

Quando, recorrendo ao recurso de um feixe de paralelas cortadas por uma transversal (fig. 8), um matemático diz:

(1) x é alterno interno com y [e] (2) os ângulos alternos internos são de mesma medida, [tendo em vista que] (3) um é oposto pelo vértice ao ângulo (z) correspondente do outro, e (4) vale para [sempre que tivermos] paralelas cortadas por uma transversal.

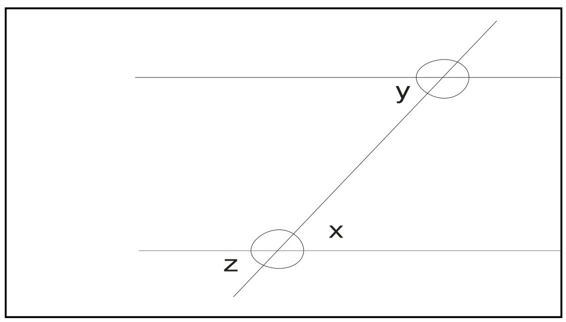


Figura 8–Retas paralelas cortadas por uma transversal

O matemático organizou o seu discurso segundo a estrutura relacional entre os conceitos que está exposta abaixo e que denominamos, neste trabalho, de **estrutura do argumento da perspectiva de Toulmin ou, simplesmente, Esquema de Toulmin**:

Dados: os ângulos são alternos internos.

Conclusão: são congruentes.

Garantia: ângulos correspondentes são congruentes.

Refutação: se as retas não forem paralelas.

Suporte: um ângulo é oposto pelo vértice ao correspondente do outro.

Exemplo elaborado pelo pesquisador a partir do texto do autor.

Segundo Toulmin todo argumento válido expõe a sua própria limitação antevendo as possíveis refutações. O seu esquema, portanto, explicita os dados, a conclusão, a garantia, o suporte e o limite de validade do argumento.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DO TEMA DA ARGUMENTAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA CONFORME O GUIA DO PNLD/ 2008

Em sua análise da Didática da Matemática Chevallard, Bosch e Gascón (2001) entendem que o distanciamento entre o pensamento matemático e as práticas diárias constitui um fator de ausência de motivação para o estudo desse componente curricular. Entendemos que esse distanciamento ocorre de forma bem marcante com alguns temas de estudo do ensino fundamental. Alguns temas como as operações fundamentais, números naturais e frações, por exemplo, parecem receber mais atenção do que outros no que diz respeito a essa relação entre pensamento matemático e a prática diária. O estudo das funções, por exemplo, quase sempre permanece no nível do trabalho com exemplos prontos[26], sem contextualização. Na geometria plana o cálculo das áreas são, em sua maioria, hipotéticos e o mesmo se pode dizer com respeito ao estudo dos segmentos proporcionais. Na busca de uma forma de ensinar, segundo os autores citados, o professor, ao elaborar uma organização didática, não pode ignorar esse fator e deve empreender esforços no sentido de dar visibilidade à matemática.

Outra dificuldade relacionada com o estudo da matemática consiste no fato de que muitas pessoas não sentem necessidade de aprender matemática para a vida. Há razões para isso: muita gente sobrevive e outro tanto de pessoas vive relativamente bem sem usar, de forma direta, a matemática. Melhor dizendo, é possível viver bem sem dominar o conhecimento matemático.

Todas as ciências, sem dúvida alguma, são imprescindíveis para sociedade, mas não necessariamente imprescindíveis para um indivíduo. Dessa forma, é possível passar uma vida inteira, relativamente bem vivida, sem ter percebido o quanto uma determinada ciência contribuiu para esse bem-estar. A matemática não é uma exceção à regra e talvez esteja entre aquelas ciências em que é mais difícil de perceber a sua aplicabilidade, exceto no caso das operações elementares. Uma evidência disso é que dificilmente encontramos alguém que não valorize o

[26] Por "exemplos prontos" queremos dizer que a função não é construída a partir de problemas do mundo social ou mesmo provindos de outras ciências (Física, por exemplo). Os exemplos trabalhados são dados prontos e atribuem-se, à variável independente, valores sugeridos pelo professor.

aprendizado dessas operações. Admitimos que atualmente, com o acesso às tecnologias, talvez já seja possível encontrar exceções, especialmente entre os que trabalham no comércio. O uso das tecnologias tem tornado o conhecimento das operações prescindível como forma de sobrevivência.

Aprender matemática é, portanto, uma necessidade cultural e não de sobrevivência. Em virtude disso a equipe coordenada por Chevallard afirma que "haveremos de manter o combustível matemático que faz a sociedade funcionar e devemos ser capazes de recorrer aos matemáticos quando necessário" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 45).

Não é difícil encontrar analogias para esse pensamento. Todos nós nos sentimos responsáveis por nos manter informados sobre as normas básicas de higiene e de manutenção de pessoa com alguma doença crônica na família, mas não hesitamos em recorrer a um profissional da área quando um problema agudo de saúde se manifesta.

O ensino da matemática, assim, se justifica por uma necessidade cultural. As aplicações, normalmente, ficam a cargo dos matemáticos, dos “práticos” e dos técnicos.

Os matemáticos e os especialistas em Matemática Aplicada discutem as relações entre a teoria e a prática, produzem modelos e definem fórmulas. Os “práticos” (pedreiros, carpinteiros, pequenos comerciantes, entre outros) usam os rudimentos dessa ciência e os técnicos recorrem a tabelas e fórmulas prontas para fins específicos (construção, mensuração, financiamentos, etc.). Para os demais interessam os resultados.

As contextualizações e articulações, que se fazem presentes em textos para o ensino fundamental, se constituem em um dos recursos para ilustrar a influência da matemática no funcionamento da sociedade. Sem esse recurso a presença da matemática não seria percebida por muitos.

É esse o pensamento que norteia a fala dos autores citados (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 45) quando dizem que "a presença da matemática na escola é uma conseqüência de sua presença na sociedade e, dessa maneira, as necessidades matemáticas que surgem na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade". Pensamos ser também este o pensamento expresso pelos autores dos PCN quando afirmam que há

> necessidade de reverter o quadro em que a Matemática se configura como um forte filtro social na seleção dos alunos que vão concluir, ou não, o

> ensino fundamental e a necessidade de proporcionar um ensino de Matemática de melhor qualidade, contribuindo para formação do cidadão (BRASIL, 1998, p. 15).

Não entendemos cidadania como apenas o uso dos recursos sociais que nos garantem certos direitos individuais. Pressupomos que ser cidadão consiste também em estar imbuído da preocupação em valorizar as produções culturais e científicas. Em valorizar e procurar expandir as diversas conquistas sociais que trazem benefícios a todos e garantem a sobrevivência e a melhoria de vida da espécie.

A inversão da ordem ocorre quando, ao invés da matemática estar subordinada às necessidades sociais, supomos que as necessidades sociais devam estar subordinadas à matemática ensinada na escola. Nesse caso, transformamos o ensino da matemática em um fim em si mesmo e ocorre o fenômeno que Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 40) chamam de "didatite[27]". Ocorre então o empenho exagerado de tentar, por múltiplos meios, convencer o aluno de que deve estudar matemática e disso resulta a crença ingênua de que a didática é suficiente para motivar o estudo dessa ciência.

Como o professor da educação básica deve conduzir o seu trabalho frente a essa problemática do sentido social para o estudo da matemática e da questão da argumentação com vistas não somente ao exercício da cidadania mas também ao aprendizado da ciência, do método matemático?

Um estudo do Guia de livros didáticos para 2008 (BRASIL, 2007) nos revelará o pensamento dos que pensam o ensino da matemática na educação básica em nosso país. Os avaliadores, por certo, expressam esse pensamento. A discussão das confluências discursivas que seguem este estudo, os excertos extraídos do referido documento e a análise desses excertos, aqui denominados de unidades de discurso, nos fornecerão valiosas informações de como devemos nos pautar no preparo do professor da educação básica.

Não se pode perder de vista que este trabalho está sendo conduzido com acadêmicos de um Curso de Licenciatura em Matemática e tendo em vista o preparo desse profissional da educação básica.

---

[27] Os autores usam o termo também para se referir ao pressuposto de que se ensina e se aprende matemática apenas na escola. Quando há a suposição de que somente se estuda matemática para aprender, não incluindo o estudo para aplicar, resolver problemas práticos, interpretar a sociedade e outras possibilidades, a didática se resume no estudo de como ensinar. Isso é “didatite” (op. cit. p. 40-74)

O esforço do professor em tornar a matemática acessível ao aluno, em apresentar um conteúdo menos distante do que ocorre na sociedade, é um dos múltiplos fatores do que Chevallard (2005) denomina de transposição didática. Nesse processo de transposição ocorrem inúmeras influências no sentido de transformar a ciência produzida nas academias em uma matemática escolar, subordinada às necessidades sociais. Entendemos que o autor do livro didático é uma dessas influências. A elaboração do livro didático é uma das etapas desse processo de transposição.

O PNLD, com sua avaliação pautada pelos PCN e Diretrizes Curriculares Nacionais, tem sido uma influência poderosa nessa transformação. A utilização do livro, ao seu modo, pelo professor se constitui numa outra etapa da transposição. Em cada etapa desse processo o saber sofre transformações. Às vezes ocorrem mudanças na essência e outras vezes as mudanças se dão apenas na forma sempre visando torná-lo aceitável pela comunidade escolar e acessível ao aluno.

Chervel (1990) ao conceber a escola como portadora de autonomia para produzir sua própria cultura, e justificar as disciplinas que mantém, de alguma forma partilha do pensamento de que o saber científico sofre mutações para sobreviver na comunidade escolar. A sociedade, segundo esse autor, impõe à escola as suas necessidades forçando-a a criar suas próprias disciplinas, porque as políticas educacionais e os programas de estudo são elaborados visando produzir transformações na escola. Essa escola, subordinada a esses programas, a essas exigências sociais, modifica ou referenda as modificações que os saberes científicos sofrem desde a sua elaboração até a aplicação em sala de aula.

Julia (*apud* FARIA FILHO, 2004), entende que não há inércia no processo e que mudanças estão ocorrendo continuamente, embora em pequena escala. Há uma inventividade na cultura escolar segundo concebem os autores que participam dessa linha de pesquisa. Há essa inventividade porque há um constrangimento constante sobre os sujeitos escolares motivando artimanhas criativas. A adoção de livros, em algumas cidades interioranas, pode ser um desses constrangimentos. Uma pesquisa por nós conduzida revelou que os professores reúnem-se em uma escola, previamente “combinados” de que escolherão o mesmo livro para todas as escolas, visando não prejudicar os alunos que são transferidos de uma escola para outra no decorrer do ano letivo. No momento da escolha predomina a opinião dos mais experientes e o argumento mas convincente é de que tal livro está de acordo com as diretrizes curriculares do Município, do Estado ou do Projeto Político Pedagógico da escola, isto é, contém “a ementa que a escola estava pedindo” e “um linguajar mais claro para o aluno” (SALES et al. 2008, p. 84-86). A iminência de uma possível prestação de contas com relação ao quanto foi ensinado gera a artimanha de usar o livro adotado para passar tarefas para casa e seguir outro livro em sala de aula.

Chevallard (2001) entende que a didática da matemática também é objeto de transformação constante na medida em que novas pesquisas estão sendo produzidas. Da visão clássica, que concebia o conhecimento como possível de ser transmitido e que, se bem transmitido, a sua apropriação se daria como num passe de mágica, evoluímos para a visão de que se deve analisar o envolvimento dos sujeitos, os fatores de motivação, a conduta docente e o material utilizado.

A didática da matemática como ciência normativa, conforme abordada na visão clássica, é um saber técnico, é a aplicação de outros saberes. Ela consistia na discussão de como o conhecimento matemático devia ser apresentado. Normalmente conduzia para a apresentação das definições, partindo de um saber sistematizado ou conduzido precocemente para isso, sem nenhuma discussão sobre a forma como se dá a apreensão da ciência. Essa visão está presente em alguns livros didáticos, conforme será visto em uma das confluências discursivas, mas não recebe menção favorável dos avaliadores.

Essa forma de abordagem tem contra si o fato de induzir o aluno a aceitar acriticamente o saber. É um saber não problematizado, não contextualizado, não subordinado às necessidades sociais. Essa abordagem não leva em conta os fatores psicológicos envolvidos no processo de aprendizagem e, portanto, segundo Chevallard, Bosch e Gascón “não inclui entre os seus objetos de estudo as noções de ‘ensinar matemática’, nem a de ‘aprender matemática’. Somente as utiliza como noções transparentes ou como noções construídas com outras disciplinas” (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 75). O conceito de transparência neste texto transmite a idéia de algo aceito como natural, já tradicionalmente incorporado à prática e que, em virtude disso, dispensa questionamentos ou explicações.

Essas limitações forçaram a didática da matemática a ampliar a sua problemática. Antes limitada às formas de ensinar, a didática da matemática agora inclui, entre seus objetos de estudo, o conhecimento matemático. A forma como esse conhecimento se apresenta e como ele é estudado tornaram-se fatores relevantes. A matemática não mais deve ser vista como simples ferramenta para interpretação, descrição ou modelização de outros objetos, mas como ela mesma, objeto de estudo.

É nessa perspectiva de Chevallard que se insere a preocupação em tornar o desenvolvimento da argumentação em matemática e, por conseqüência, da demonstração um objeto de estudo. Objeto de estudo para procurar entender as dificuldades na sua operacionalização.

No texto das confluências discursivas veremos como os avaliadores dão indicativos das formas como se espera que esse processo ocorra.

4 Algumas Definições

Considerando que nosso aporte de trabalho é a pesquisa qualitativa do tipo etnográfico e o referencial teórico é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) os termos utilizados ora nos remetem ao método e ora nos remetem ao referencial.

Em uma pesquisa do tipo etnográfico o procedimento consiste em juntar fragmentos da cultura escolar, dos documentos oficiais, do discurso do aluno ou do livro didático, fragmentos simples e ir compondo o cenário mais amplo tal como se faz no estudo da natureza. Primeiro estudam-se as florestas, os rios, o relevo e o clima para se chegar à compreensão da geografia enquanto ciência (MERLEAU-PONTY, 1971). Ou, conforme Malinowski (1970, p. 44), “tomando uma cultura individual como um todo coerente podemos definir uma série de determinantes gerais” de modo que “não nos parecerá uma ‘colcha de retalhos’”.

Essa visão do todo a partir de suas partes menores estamos chamando de confluências discursivas.

É nesse contexto que as expressões “unidades do discurso”, como unidades mais simples e buscadas diretamente do texto, e “confluências discursivas”, que designam o cenário mais amplo, são utilizadas.

A partir desses pressupostos buscamos, no texto do Guia de livros didáticos, as sentenças que, de alguma forma, segundo o nosso entender, se relacionavam com a temática que nos propúnhamos estudar. Essas sentenças compuseram as nossas “unidades do discurso”.

Após essa leitura fomos compondo um conjunto dessas unidades do discurso que, de forma explícita ou implícita, fazem referência ao mesmo tema e que podem ser agrupadas como forma de completar, reforçar, ou esclarecer o tema está em pauta e constituímos as convergências. As sentenças que convergem para um determinado tema constituem uma confluência discursiva

4.1 As Unidades do Discurso e suas Confluências

Ao ler atentamente os pareceres dos avaliadores das dezesseis coleções de matemática, para o ensino fundamental, terceiro e quarto ciclos, que constam no Guia de livros didáticos/2008 conseguimos extrair algumas sentenças que nos pareceram significativas e percebemos que muitas delas expressam, com palavras diferentes, a mesma idéia trazendo à tona elementos que os avaliadores consideram relevantes estar presentes no processo de ensino. Em algumas coleções essa presença é destacada como um fator positivo e, em outras, a sua ausência é percebida e destacada como um aspecto negativo da coleção. Em alguns casos expressões ou sentenças diferentes transmitem a mesma idéia e evocam o mesmo fator e, nesse caso, agrupamos sob uma mesma confluência discursiva. Um elemento que se faz presente no parecer da maioria dos avaliadores é a questão metodológica. Muitos deles registraram de forma inequívoca o seu parecer favorável ou desfavorável à abordagem que a coleção, por ele avaliada, faz da matemática. Nesse caso, reunimos todas essas sentenças sob a mesma confluência que denominamos, genericamente, de "**Questões Metodológicas".**

Essa é a primeira confluência e receberá o número um (1). É, no nosso entender, a mais genérica de todas e é composta pelas unidades discursivas que expressam ou deixam transparecer que o avaliador aprova, desaprova ou estabelece algumas ressalvas à proposta metodológica da coleção, isto é, encontra ou não coerência entre a proposta do autor do livro e os documentos oficiais. Em alguns casos a aprovação ou reprovação é explícita, em outros casos é a recomendação de que o professor deve estar atento, buscar complementação, redirecionar o trabalho, etc., que deixa transparecer a insatisfação do avaliador com a metodologia adotada pela coleção. Com relação a esta confluência elencaremos um maior número de sentenças dada a variabilidade de expressões que conduzem ao mesmo pensamento. Nossa atenção esteve voltada para as questões que, de alguma forma, **exercem influência no processo de argumentação**.

Outras confluências temáticas serão elencadas e definidas a seguir.

4.1.1 Questões Metodológicas

A seguir algumas sentenças, encontradas nos pareceres relativos a diferentes coleções sobre questões metodológicas, considerando que o livro didático tem como uma das suas funções “favorecer a formação didático-pedagógica” o professor e “favorecer a aquisição de conhecimentos socialmente relevantes” para o aluno (BRASIL, 2007, p. 12).

4.1.2 Progressividade na apresentação dos conteúdos

“A coleção destaca-se por apresentar os conteúdos de forma progressiva”. (BRASIL, 2007, p. 56-59)

Com relação a essa sentença entendemos que esta progressividade é vista como um dos fatores positivos da coleção, como se pode ver na sentença: “O desenvolvimento destes é iniciado com a explanação das idéias, situações e, só depois, são introduzidos os conceitos, as regras, as definições e a formalização” (Ibid.). Em determinado momento da sua análise o avaliador afirma que a coleção pauta-se por conduzir o trabalho “de maneira satisfatória”. O ponto positivo da obra não está na linearidade e sim na forma não estanque da abordagem. Pelo contexto é possível deduzir, de imediato, que se trata de uma abordagem em que os objetos são estudados mais de uma vez, em contextos diferentes e em níveis diferentes de profundidade.

O documento citado diz textualmente que:

> Tem sido defendida a concepção de que os alunos constroem um dado conceito no decorrer de um longo período de aprendizagem. Essa idéia leva a se preconizar um tipo de ensino em que **os mesmos conteúdos são revisitados, de forma progressivamente ampliada e aprofundada**, durante todo o percurso escolar. Por sua vez, tal modelo de ensino influencia a elaboração de obras didáticas em que os conteúdos estão distribuídos em cada livro e ao longo da coleção, em unidades ou capítulos dedicados, alternadamente, a assuntos de cada um dos blocos mencionados acima, e nos quais os conceitos e procedimentos são abordados, **retomados e ampliados** (BRASIL 2007, p. 29 grifo nosso).

Supomos estar sendo entendido que uma abordagem de forma estanque, como às vezes acontece, tem em si o inconveniente de ser conclusiva em cada etapa e dificultar a articulação entre os diversos conteúdos da mesma disciplina abordados no mesmo volume.

A linearidade segue a estrutura da ciência matemática. Segue a forma como ela está constituída e não do caminho percorrido na sua construção. Mas não é recomendável uma organização didática nos moldes da linearidade porque o raciocínio humano não está, em princípio, constituído de forma linear (OLÉRON, 1977).

O raciocínio, enquanto encadeamento da linguagem segundo certas normas, é uma aquisição social, algo a ser construído. Essa atividade tipicamente humana, quando analisada do ponto de vista psicológico é um fenômeno natural e se desenvolve em resposta a desafios. Do ponto de vista da lógica é um encadeamento da linguagem segundo certas normas.

Para Kline (1976, p. 126) "a mente humana não opera na matemática diferentemente do pensamento político ou social", portanto, um pensar lógico-dedutivo ou lógico-indutivo, típico da matemática, precisa ser construído.

Ao destacar a forma progressiva da apresentação do conteúdo, o Guia do livro didático por certo está se referindo a uma abordagem em que o assunto é retomado várias vezes em diversos contextos; no qual não há apressamento da sistematização. A sistematização precoce, conforme será visto em diversas oportunidades e, na opinião dos avaliadores, é um procedimento didático não recomendável. Com relação a isso não há dúvidas, como se pode perceber nos excertos seguintes, todos do mesmo Documento, onde os grifos foram acrescidos para destaque.

a) "No entanto, é feita uma **sistematização precoce** de certos conceitos, o que pode dificultar a elaboração de significados por parte dos alunos." (BRASIL, 2007, p. 102)

b) Também é dito que

> A obra [a coleção analisada] destaca-se pelas contextualizações, ilustrações e desafios encontrados em todos os volumes, apesar de optar por uma metodologia que, além de não incentivar a interação dos alunos, faz a **sistematização** do conhecimento muitas vezes de forma **precoce**, sem dar aos alunos a oportunidade de **tirar conclusões próprias e discutir estratégias** (BRASIL, 2007, p. 138).

Diante do exposto conclui-se que os avaliadores, ao discutir a metodologia abordada pela coleção em análise, focalizam a não precocidade da formalização como um dos seus aspectos positivos. A recomendação tem o respaldo dos PCN quando, ao descrever a trajetória das reformas curriculares, enfatiza que "o ensino passou a ter a preocupação excessiva com formalizações, distanciando-se das questões práticas [...] comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas" (BRASIL, 1998, p.19).

Novamente nos remetemos a Kline que, por vezes, se apresenta um tanto radical com relação ao modelo clássico de abordagem da matemática mas cujas afirmações, embora duras, merecem ser objetos de reflexão. Diz ele: “A apresentação lógica e ordenada da matemática pode ter uma atração estética para o matemático mas serve como anestésico para o estudante” (KLINE,1976, p.19). Já comentamos que Kline estava se referindo ao excesso de formalismo presente no ensino da matemática por algum tempo e que norteou o Movimento da Matemática Moderna, mas que serve de alerta para que não retrocedamos.

Dessa vez, porém, Kline não está sozinho em sua crítica severa ao formalismo precoce. Davis e Hersh partilham de pensamento semelhante ao afirmar que:

> A formalização é o processo de adaptar a matemática ao processo mecânico. [...] As linguagens formais foram introduzidas pela primeira vez por Peano e Frege no fim do século dezenove, com o intuito de tornar as demonstrações matemáticas mais rigorosas- isto é, de aumentar a certeza da conclusão de um raciocínio matemático. No entanto, este objetivo não poderia ser atingido enquanto o raciocínio fosse destinado a um leitor humano. Os *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead foram a grande tentativa real de efetuar a formalização da matemática. Têm sido aceitos como um exemplo notável de uma obra-prima ilegível. Enquanto os leitores humanos demonstram uma aversão insuperável às linguagens formais, os computadores as adoram (DAVIS; HERSH, 1975, p. 167 grifo dos autores).

Nosso pressuposto é que tanto Kline quanto Davis e Hersh quando são categóricos com relação ao formalismo, na realidade, querem chamar a nossa atenção para o fato de que essa linguagem sintética com que muitos livros textos e livros didáticos introduzem a matemática deveria ser ponto de chegada e não ponto de partida. E, quando afirmam que “enquanto os leitores humanos demonstram uma aversão insuperável às linguagens formais, os computadores as adoram” (DAVIS; HERSH, 1975, p. 167), devemos entender à luz do capítulo em que está inserido.

O capítulo trata da formalização, isto é, da adaptação da matemática a um processo mecânico. Supomos que o aspecto negativo está relacionado com a prática usual de colocar a formalização e, consequentemente, a demonstração como ponto de partida do estudo da matemática, antes mesmo que o assunto abordado esteja entendido. Entendemos que não faz sentido dar forma a um conhecimento quando o interlocutor ainda não se deu conta dele. De modo semelhante nos parece não fazer sentido demonstrar, isto é, convencer alguém de uma verdade quando ele ainda está perguntando: “do que é que está se falando?”. No nível prático a linha divisória entre o entendimento e o não entendimento não está definida, portando, quando sistematizar, dar forma a um conhecimento, e demonstrar uma propriedade acaba ficando no nível do bom senso. De qualquer forma os autores nos alertam quanto à inconveniência de apressar-se.

Os avaliadores do PNLD também não escondem a sua preocupação com os livros didáticos em que os autores têm pressa em formalizar. Supostamente é nesse mesmo sentido que Kline e Lakatos se posicionam quando falam dos aspectos negativos da demonstração.

"Os leitores humanos", a que se referem Davis e Hersh, em contraposição a computadores, significam que estes se valem dos resultados enquanto aqueles procuram entender. Para os que buscam entender o processo, o fato de serem postos em contato com a matemática a partir do ponto final de cada tema de estudo e, se este ponto final é tido como ponto de partida para outra etapa, antes que seja entendida a construção da etapa anterior, pode não ser uma experiência muito agradável. Para esses a apresentação lógica e ordenada da matemática perde a sua atração estética, segundo Kline (1976).

Supomos que esse seja um problema para o estudante mas não para o matemático. Pensamos que o matemático experiente posiciona-se frente a uma demonstração pronta como o veterano soldado que voltou vitorioso da luta e ainda mantém vívidas as batalhas que travou. Ele consegue compreender a emoção do jovem soldado que delira e se excita desordenadamente quando, em regresso, seus pés tocam o solo pátrio. Somente o veterano consegue penetrar-lhe na alma e viver os mesmos sentimentos enquanto os demais poderão não ver motivos para tanta euforia.

"Os computadores as adoram", isto é, servem-se prontamente das linguagens formais porque são desprovidos da capacidade de pensar e jamais compreenderiam os "percalços" enfrentados durante o processo de construção do saber matemático. A formalização como ponto de partida esconde o que há de mais humano nesse processo: as conjeturas não confirmadas e os rascunhos desprezados. Estudar matemática é proceder a uma construção passo a passo.

Estamos entendendo que essa abordagem progressiva que destaca como um fator positivo contribui para o desenvolvimento de uma **prática argumentativa** na medida em que objetos ostensivos estudados em etapas anteriores podem ser usados para justificar o surgimento de novos ostensivos e sua relação com não-ostensivos. O próprio raciocínio lógico-dedutivo vai se construindo e a argumentação lógico-dedutiva tende a ganhar forma.

4.1.2.1 A "apresentação diretiva" é um aspecto metodológico que não contribui para o desenvolvimento da argumentação

> A obra caracteriza-se por uma apresentação diretiva dos conteúdos, que limita a ação dos alunos na aquisição do conhecimento matemático. [...] Em vários pontos da obra, são feitas afirmações para as quais não são apresentadas justificativas, o que prejudica a ampliação da capacidade de argumentação lógica. Além disso, no campo da geometria, esta limitação é reforçada pelo fato de que as comprovações são apoiadas quase exclusivamente em validações empíricas (BRASIL, 2007, p.126)

A metodologia diretiva também recebe uma observação negativa quando percebida em outra coleção. O avaliador assim se expressa em relação a ela: "A partir do volume da 7ª série [8º ano], as demonstrações formais ganham destaque. Porém, são quase sempre conduzidas de maneira diretiva [...]" (BRASIL, 2007, p. 135).

4.2 Estratégias Experimentais

Estratégias experimentais são passos para a argumentação e a demonstração.

4.2.1. Validar através de experimentos e justificar

> Com respeito à validação[28] das propriedades geométricas, observa-se que tanto as justificativas baseadas em experimentos no mundo físico, que são bem freqüentes, quanto algumas demonstrações presentes na obra são conduzidas de maneira satisfatória (BRASIL, 2007, p. 59).

A observação de que as justificativas e demonstrações são "conduzidas de maneira satisfatória" é evidência da importância de uma organização didática que contempla a validação tanto de modo formal através da demonstração quanto de modo menos formal, por meio de exemplos do mundo físico. A coleção contempla uma demanda da pedagogia não clássica, relativa ao ensino da matemática, que é

[28] "Validar, *v.tr.dir*. Tornar ou declarar válido; legitimar; legalizar; *pr*. fazer-se válido. (Do lat. *validare*)" (FERNANDES; LUFT; GUIMARÃES, 2003, verbete validar).

conduzir à construção do raciocínio lógico-dedutivo sem, no entanto, ter nos aspectos formais o ponto de partida.

Esse parecer do avaliador, como era de se esperar, está em consonância com os PCN. Consta nesse documento que capacidades de natureza prática são desenvolvidas a partir do estudo visando atender as necessidades do cotidiano.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1998, p. 37).

Quando as "atividades de traçado de figuras geométricas são seqüências de passos a serem seguidos, sem justificativa, e caberá ao professor complementar esse trabalho" (BRASIL, 2007, p. 73). Isto é, cabe ao professor justificar, promover o debate em torno dos exemplos particulares utilizados de modo a estimular a formação de conjeturas porque "as validações por meio de verificações experimentais e de medições, além das generalizações realizadas, a partir de exemplos, prejudicam a construção do raciocínio dedutivo" (BRASIL, 2007, p. 71).

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (BRASIL, 1998, p. 26).

O que faz sentido no estudo da matemática é a formulação de hipóteses, a inferência ou abdução que conduz à construção de uma verdade para o aluno. O texto destaca a importância de exercitar a indução, a dedução e a abdução, o que pressupõe a construção de argumentos racionais, a vivência de diversos momentos de estudo, a experimentação de diversas técnicas e a institucionalização dos resultados.

Um dos itens da "ficha de avaliação" fornecida aos avaliadores do PNLD trata das "competências complexas". São competências que a coleção analisada deve contribuir para que sejam desenvolvidas. Essas competências estão divididas em sete blocos conforme vemos a seguir:

> 1. observar, explorar e investigar;
> 2. estabelecer relações, classificar e generalizar;
> 3. argumentar, tomar decisões e criticar;
> 4. visualizar;
> 5. utilizar a imaginação e a criatividade;

> 6. conjecturar[29] e provar;
> 7. expressar e registrar idéias e procedimentos (BRASIL, 2007, p. 23)

Podemos também entender que algumas competências citadas podem ser complexas em dadas circunstâncias e não complexas em outra, como é o caso da argumentação. Essa competência pode se mostrar algo banal se for conduzida com base em crenças, explicações “folclóricas” ou tendo por base alguns exemplos particulares para construir princípios. Toda argumentação que tem por objetivo validar uma solução encontrada para determinada tarefa necessita possuir um encadeamento lógico e estar fundamentada em pressupostos aceitos como verdadeiros pela comunidade a qual se destina e, no caso da matemática, pela comunidade acadêmica. Atendendo esses requisitos é uma competência complexa.

É interessante observar que, segundo o Guia do PNLD/2008, há atividades consideradas próprias para o desenvolvimento das competências complexas, e também organizações didáticas que privilegiam esse desenvolvimento.

> Os conhecimentos extra-escolares dos alunos, e também aqueles anteriormente trabalhados, são valorizados. A interação entre os alunos é estimulada**,** bem como o desenvolvimento das competências de observar, explorar e investigar; estabelecer relações, classificar e generalizar; argumentar; visualizar; conjecturar; e expressar idéias de forma oral e escrita. A coleção apresenta situações que englobam desafios, problemas com nenhuma solução ou várias soluções e a verificação de processos e resultados pelo aluno. O desenvolvimento de habilidades de cálculo mental, cálculo aproximado e por estimativa é incentivado, assim como o uso de instrumentos de desenho e de materiais concretos. O emprego da calculadora é bem abordado na obra, que também estimula a consulta a dicionários, jornais e Internet (BRASIL, 2007, p. 95)

Em contrapartida há organizações didáticas que pela forma como dispõem as atividades matemáticas deixam de contribuir para o desenvolvimento dessas competências.

> Os **conhecimentos extra-escolares**, bem como aqueles já trabalhados na própria coleção, **não são muito valorizados**, da mesma forma que **a interação entre os alunos não é incentivada**. Apesar de numerosas, as

[29] Conjetura, *s.f.* Suposição, hipótese; opinião fundada em indícios; presunção. (Do Lat. *conjectura*). Conjeturar. *v.tr. dir*. Depreender ou julgar por conjeturas; suspeitar; supor; presumir (Do lat. *conjectuare*) (FERNANDES; LUFT; GUIMARÃES, 2003, verbetes: conjetura e conjeturar).
“O termo conjetura na Matemática se refere a afirmações de conteúdo matemático (os objetos e as relações que se estabelecem entre eles são de caráter matemático) que não são teoremas, e que tem, portanto, como uma das características principais o fato de não haver sido demonstradas, isto é, não existe validação científico-matemático confirmando a afirmação apresentada” (OSÓRIO, 2000, p. 11 tradução nossa).

> atividades sugeridas não colaboram muito para o desenvolvimento de competências complexas como investigar, estabelecer relações, argumentar, conjecturar**,** entre outras (BRASIL, 2007, p. 100 grifo nosso)

Teríamos na interação entre os alunos e na valorização dos conhecimentos extraescolares uma organização didática que contribui para o desenvolvimento dessas competências?

Uma possível resposta está no parecer dado a uma coleção onde é recomendado que o professor supra algumas falhas na organização didática da obra:

> Sugere-se, também, o incentivo à participação ativa dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, com discussões em classe e envolvimento em atividades que estimulem a argumentação e outras competências complexas pouco propiciadas na obra (BRASIL, 2007, p. 131).

Em seguida há a indicação de como isso pode ser feito:

> As leituras recomendadas ao professor são de fácil acesso e podem servir de fonte de consulta para elaboração de atividades que valorizem competências mais complexas e o uso de materiais concretos e de recursos tecnológicos, pouco explorados na coleção (BRASIL, 2007, p. 137).

Analisando algumas dentre as muitas leituras recomendadas encontramos temas como: demonstração em geometria, construção de gráficos, resolução de problemas, história da matemática, quebra-cabeças, jogos numéricos e jogos geométricos, indução matemática, paradidáticos que contém história de alguns temas específicos, aplicações e curiosidades.

“Nesse contexto, convém lembrar que as competências não se realizam no vazio e sim por meio de saberes de diversos tipos, dos mais informais aos mais sistematizados, estes últimos a serem construídos na escola” (BRASIL, 2007, p. 14).

Uma atividade matemática considerada relevante consiste na **validação** da técnica utilizada e contribui para o desenvolvimento do **Raciocínio Lógico-Dedutivo**[30]. Esta é a próxima Confluência Discursiva. Validar é institucionalizar. Na concepção de Chevallard (2001) um conceito matemático ou um procedimento

---

[30] Para John Dewey “Em seu sentido mais amplo, todo pensamento que chega a uma conclusão é lógico. [...] O vocábulo se refere somente ao que está demonstrado a partir das premissas que têm significações definidas e que são evidentes por si mesmas ou que cuja verdade foi demonstrada previamente. O caráter de prova é tomado como equivalente a lógico. Neste sentido as matemáticas e a lógica formal (como um ramo da matemática) são as únicas estritamente lógicas” (DEWEY, 1928, p. 98 tradução nossa).

didático está institucionalizado quando é reconhecido, quando está de acordo com normas já estabelecidas, quando satisfaz as condições sociais exigidas ou produz os resultados esperados sem contrapor aos preceitos lógicos devidamente estabelecidos.

Validar em matemática consiste em “mostrar” que a técnica utilizada na resolução de uma tarefa ou as afirmações a respeito de um determinado objeto matemático satisfaz as condições estabelecidas pela lógica formal. Entendemos que no contexto das atividades didáticas há diversos níveis de validação e que a demonstração é o nível pleno. Esses níveis existem em função dos diversos níveis de maturidade intelectual em que, naturalmente, se encontram os sujeitos.

Supostamente os recursos argumentativos e os objetos ostensivos utilizados pelos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em suas validações possuem um nível de complexidade próprio e que é difícil de ser comparado com o nível dos recursos lógicos e objetos utilizados pelos alunos do ensino médio. O mesmo se pode dizer destes em relação a um aluno de um curso de Licenciatura em Matemática.

Validar é uma atividade que está no cerne da ciência matemática. Um problema proposto não consiste em verdadeiro problema se não consistir em um desafio e não incluir “a necessidade de verificação para validar o processo de solução” (BRASIL, 1998, p. 41). É impossível pensar na consolidação de um conhecimento matemático que não tenha sido objeto de validação. Até mesmo as conjeturas são submetidas a esse processo. Embora permaneçam aguardando a demonstração o fato de estarem institucionalizadas como conjeturas é uma evidência de que já foram submetidas a um processo que comprove a sua validade para um número finito, mas suficientemente grande, de elementos. Conjeturar é uma aplicação do raciocínio abdutivo.

4.2.2 Raciocínio Lógico-Dedutivo

O termo raciocínio lógico-dedutivo nos remete ao pensamento aristotélico que concebia a matemática “como um edifício logicamente estruturado de verdades encadeadas em relações de conseqüência lógica a partir de pressupostos fundamentais não demonstrados” (SILVA, 2007, p. 50). “Numa teoria axiomática formal as deduções são cadeias de transformações de expressões simbólicas segundo regras explícitas de manipulação de símbolos” (Ibid., p. 184).

Balacheff (1988) usa o termo raciocínio como sinônimo de uma atividade intelectual, não completamente explícita, de manipulação de informações, ou aquisições que conduzem a novas informações.

Mas provar ou validar é uma ação motivada pelo desejo da certeza, segundo Balacheff. Essa posição confirma o exposto por Sales:

> Para o uso da demonstração, em sala de aula, os alunos devem ser colocados em situação de engajamento, num processo de interação social. Devem ser confrontados com situações-problema que estimulem o debate, porque do ponto de vista da matemática, demonstrar é estabelecer uma certeza, mas do ponto de vista da educação, deve ser um espaço para o diálogo. [...] Ela pode ser o início ou o fim de um diálogo. Pode ser o ponto de partida, para a descoberta da beleza interior da matemática, mas pode também ser um basta ao espírito investigador (SALES, 1998, p. 151).

4.2.3 Validação e Raciocínio Lógico-Dedutivo

Os avaliadores também cuidaram de destacar a importância do raciocínio dedutivo no estudo da matemática.

4.2.3.1 A demonstração

A respeito de uma determinada coleção é dito que:

> As propriedades das figuras geométricas são tratadas, inicialmente, de forma intuitiva e com recurso à visualização, à construção com instrumentos e à medição. Algumas dessas propriedades são comprovadas por demonstração lógica, porém, a articulação entre o empírico e o abstrato nem sempre é feita de forma apropriada, [...] (BRASIL, 2007, p. 65).

Há saltos entre o empírico e o formal nas atividades de validação desta coleção? Talvez seja esse o problema. Nosso pressuposto é que a validação de forma muito direta sem um momento de aproximação informal e gradativa não é um procedimento recomendado. A demonstração[31] é uma atividade essencialmente formal e os recursos utilizados nem sempre transmitem a idéia precisa do que se quer

[31] Segundo Balacheff (1988) há dois aspectos da demonstração no que diz respeito à comunidade científica: 1) uma ferramenta privilegiada de prova, usada tanto na comunicação como para avaliação; 2) é um objeto de estudo pelos lógicos de quem recebe uma definição precisa no conjunto das teorias formais.

demonstrar, exceto para quem já possui uma vivência considerável com o objeto. Balacheff (1988) afirma que os alunos nem sempre sentem necessidade de demonstrar em geometria tendo em vista que, para eles, a figura é uma evidência. O racionalismo da demonstração, por vezes, se contrapõe à necessidade de evidenciar algo. Tendo em vista que demonstrar o “evidente” é uma prática comum na matemática, essa evidência constitui-se, nessa perspectiva Balacheff, em um obstáculo ao funcionamento de uma organização didática com vistas a trabalhar e ensinar a demonstração.

Entendemos que este fator justifique a necessidade de validações prévias, através de experimentos, com retóricas menos elaboradas e questionamentos, como um preparativo para a demonstração. Que a aproximação seja gradativa.

Como foi possível observar o PNLD/2008 está pautado por uma concepção de ensino de matemática que inclui a argumentação, a justificativa e a demonstração no rol das competências complexas. Porém, são competências que devem ser desenvolvidas e o estudo da matemática deve contribuir para esse desenvolvimento.

Parece-nos próprio estabelecer um vínculo com a TAD, especialmente no que diz respeito à teoria dos momentos didáticos. Na concepção de Chevallard uma organização didática deve ter em vista a vivência de diversos momentos de estudo. Desde o primeiro contato com o problema, quando o desafio é aceito, passando pelas tentativas de encontrar uma técnica de resolução até a institucionalização, diversas etapas são vencidas, mesmo que sejam etapas simultâneas. A pesquisa ou busca de problemas semelhantes já resolvidos, registros diversos que constituem os esboços, a verificação do resultado encontrado, a revisão da técnica adotada e análise de sua validade e, finalmente, a validação ou institucionalização dessa técnica utilizada são os diversos momentos que precisam ser vivenciados. Esses momentos sempre são vividos por estudantes que assumem o compromisso de resolver um problema. Nesses casos a argumentação está presente, embora de forma implícita, porque toda técnica envolve manipulação de ostensivos verbais, gráficos e gestuais, entre outros. Toda técnica também traz embutida uma tecnologia, uma explicação do seu funcionamento e melhor adequação para aquele tipo de tarefa.

As unidades do discurso analisadas revelam que o PNLD/2008 procura conduzir o professor a se afastar da didática clássica que parte dos aspectos formais e também que evite elaborar organizações didáticas nas quais a matemática já se apresenta sistematizada e pronta para a aplicação.

Valoriza o que denomina de “competências complexas”, tais como conjeturar, investigar, estabelecer relações e argumentar. Explorar novas técnicas ou relações, provar buscando o autoconvencimento e o convencimento dos outros também são competências a serem desenvolvidas.

CAPÍTULO V

UM ESTUDO DA PRAXEOLOGIA DA ARGUMENTAÇÃO NO LIVRO DIDÁTICO

Em primeiro lugar nos deteremos em tecer algumas considerações sobre o papel do livro didático (LD) dos anos finais do ensino fundamental. Procuraremos situar o LD nesse contexto de argumentação, demonstração e prova, analisando como os temas que foram tratados em nossas sessões de estudo são abordados em algumas coleções aprovadas pelo PNLD de 2008. Daremos atenção à sua contribuição para a o desenvolvimento de uma **prática argumentativa** no estudo da geometria.

Entendemos que ao assumir o papel de avaliar o livro didático e distribuí-lo o governo tem deixado claro quais os interesses que norteiam essa ação. Que ele tenha definido claramente qual o papel que o LD deve desempenhar na educação.

Segundo Bittencourt (2004) nos primórdios do século XIX o governo idealizou os autores de obras didáticas como sábios e empenhados no cumprimento de uma tarefa patriótica. A legislação pertinente, conforme será visto ainda neste capítulo, não deixa dúvidas com relação ao que estava sendo entendido por patriotismo naquele contexto.

Quando Cassiano (2007), em sua tese de doutorado, analisa a questão do investimento e da implantação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) ela também destaca o seu objetivo de forma clara: proporcionar atendimento escolar de qualidade ao maior número possível de alunos.

Entendemos ser a educação de qualidade um termo que requer maiores esclarecimentos. O seu sentido pode variar de uma dada época para outra ou de um contexto para outro. No entanto, pode-se supor que qualidade em educação significa adequação ao contexto sociocultural que se quer forjar ou manter.

Já em 1854 um Decreto Imperial estabelece que os delegados de distrito embora não pudessem exercer o "magistério público ou particular, primário ou secundário" tinham a responsabilidade de visitar trimestralmente os:

> estabelecimentos particulares desse genero [escolas] que tenhão sido autorisados, observando se neles são guardados os preceitos da moral e as

> regras hygienicas; se o ensino dado não he contrario á Constituição, á moral e ás Leis; e se cumprem as disposições deste Regulamento (BRASIL, 1854)

Estava explícito na lei o significado de qualidade de ensino para a época: conformidade com a moral, as leis e aprendizagem das regras básicas de higiene. É nessa perspectiva também que o autor do livro didático cumpria e deveria cumprir a sua tarefa patriótica: promover o cumprimento das leis enaltecendo a moral e orientando nos princípios básicos do viver saudável.

Hoje supomos que ensino de qualidade é aquele que está em conformidade com os documentos oficiais que norteiam a política de ensino (LDB, PCN, Diretrizes Curriculares, etc.) porque, supostamente, atendem aos anseios da sociedade. Também entendemos que os LD elaborados em conformidade com essa proposta, devidamente avaliados e recomendados, contêm ressalvadas as fragilidades apresentadas pelos avaliadores em cada coleção, de forma implícita esse ensino de qualidade que a sociedade espera da escola. Os avaliadores expressam, muitas vezes, de forma bem direta as fragilidades da proposta didática de algum autor ou dos autores de determinada coleção.

Frequentemente os avaliadores denunciam a diretividade que não envolve o aluno no processo de conjeturar e argumentar conforme foi visto em capítulo anterior. Do mesmo modo denunciam a sistematização precoce com ênfase nos "procedimentos e algoritmos em detrimento da dimensão conceitual da matemática" (BRASIL, 2007, p. 106). Ao mesmo tempo há, nesse documento, pronunciamentos elucidativos sobre qual seria uma organização didática recomendada.

> Além disso, são chamados a observar, explorar e investigar diferentes situações, muitas vezes para estabelecer relações ou generalizar as idéias exploradas e tomar decisões. Também é pedido a eles para argumentar e criticar os resultados obtidos, oralmente ou por escrito. Na coleção, são valorizadas diferentes estratégias para resolução de problemas e verificação de resultados, o que contribui para o desenvolvimento da autonomia do aluno (BRASIL, 2007, p. 118).

Ainda no mesmo documento encontramos que a coleção deve contribuir para:

> -o desenvolvimento de capacidades básicas do pensamento autônomo e crítico (como a compreensão, a memorização, a análise, a síntese, a formulação de hipóteses, o planejamento, a argumentação), adequadas ao aprendizado de diferentes objetos de conhecimento e a seu uso social;

> -a percepção das relações entre o conhecimento e suas funções na sociedade e na vida prática (BRASIL, 2007, p. 20).

Temos nos três parágrafos precedentes alguns indicativos do que se entende por qualidade de ensino no atual contexto social.

Julgamos oportuno também uma retrospectiva histórica do PNLD. A importância de conhecer a trajetória desse aspecto da política educacional brasileira reside no fato de que os livros didáticos "estabelecem em grande parte as condições materiais para o ensino e aprendizagem nas salas de aulas na maioria dos países do mundo" (CASSIANO, 2007, p. 4). Ele é o mediador entre o currículo proposto e o currículo real, aquele que se desenvolve na prática. É através dele que o conhecimento específico de cada disciplina chega à sala de aula e se materializa. É uma das forças socioculturais que influenciam o fazer escolar, as organizações didáticas.

A instituição do PNLD evidencia a preocupação com a redemocratização e com o enfrentamento de diversos problemas relacionados com a educação. Após a ditadura militar um decreto governamental

> Considerando os propósitos de universalização e melhoria do ensino de 1º grau, contidos no Programa "Educação para Todos";
> Considerando a necessidade de promover-se a valorização do magistério, inclusive mediante a efetiva participação do professor na indicação do livro didático;
> [...]
> D E C R E T A
> Art. 1º - Fica instituído o Programa Nacional do Livro Didático, com a finalidade de distribuir livros escolares aos estudantes matriculados nas escolas públicas de 1º Grau.
> Art. 2º - O Programa Nacional do Livro Didático será desenvolvido com a participação de professores do ensino de 1º Grau, mediante análise e indicação de títulos dos livros a serem adotados.
> § 1º - A seleção far-se-á por escola, série e componente curricular, devendo atender às peculiaridades regionais do país.
> § 2º - Os professores procederão a permanentes avaliações dos livros adotados, de modo a aprimorar o processo de seleção (BRASIL, 1985).

Os principais problemas que se propunha resolver com a instituição do PNLD são também discriminados em documentos oficiais e segundo Cassiano são os seguintes:

> A falta de uma consciência nacional sobre a importância da política social da educação; Baixa produtividade do ensino; Aviltamento da carreira do magistério [e] Inexistência de um adequado fluxo de recursos financeiros para a educação básica (CASSIANO, 2004, p. 23).

Segundo a autora citada é com base nos itens segundo e quarto que se constituiu a política pública do livro didático.

Ocupar-nos-emos dos itens segundo e terceiro porque não pretendemos discutir políticas públicas. Estamos preocupados com alguns aspectos relativos à formação do professor e do processo de estudo da matemática. Por aviltamento estamos entendendo as dificuldades decorrentes da formação inicial no que diz respeito ao preparo para a elaboração de um programa de trabalho que leva em conta questões didáticas, pedagógicas e sociais. Não temos dúvida de que as questões trabalhistas, principalmente as relativas ao salário, que exigem uma sobrecarga de trabalho do professor da educação básica também sejam um fator importante nesse processo de aviltamento, mas não estão no foco do nosso trabalho.

A baixa produtividade do ensino tem sido proclamada por diversas fontes noticiosas, oficiais ou não. Entendemos que essas duas questões estão relacionadas com as propostas de trabalho apresentadas pelos autores do LD. Ele, o LD, tem o potencial de contribuir para a melhoria dos índices de produtividade do ensino e para melhorar a qualidade do programa de trabalho do professor, inclusive complementando a sua formação profissional. Em parágrafos anteriores citamos um excerto do Guia do PNLD/2008 onde há a recomendação de uma forma de trabalho com a matemática. Portanto, o LD adotado, supostamente, tem alguma contribuição para os resultados obtidos pelos alunos nas avaliações que medem a produtividade da escola.

O programa de trabalho do professor, normalmente, é centrado em conteúdos e tempo. Discute-se, com freqüência, se a ementa cabe no espaço de tempo disponível, mas raramente são discutidas questões relativas à didática, aos processos de estudo, aos objetivos da disciplina e às expectativas da sociedade com relação ao retorno daquele estudo. Ainda está em construção a cultura de o professor avaliar a sua organização didática. Exatamente pela reconhecida "condição de aviltamento" há muitos que supõem estarem fazendo o que podem e isso lhes é suficiente.

> O livro didático é um importante material de apoio ao processo de ensino e aprendizagem, pois contribui, ao mesmo tempo, para o trabalho do professor e para o estudo do aluno. Embora a prática pedagógica do professor envolva diversas dimensões, como sua pesquisa constante para o aprimoramento de seu trabalho em sala de aula, um livro didático com textos adequados, ilustrações pertinentes e informações atualizadas auxilia no planejamento de ensino. Para que suas possibilidades sejam aproveitadas ao máximo, o livro didático deve estar adequado às necessidades da escola, do aluno e do professor. Portanto, sua escolha

> deve ser pautada, entre outros fatores, no projeto político-pedagógico da escola, na realidade sociocultural em que a escola está inserida e nas experiências prévias dos professores com títulos anteriores (BRASIL, 2009a).

O PNLD tinha ainda por objetivos evitar a evasão e a repetência devido à "impropriedade dos currículos, que conflitam com a realidade dos alunos, na medida em que os conteúdos curriculares, frequentemente, são tratados com superficialidade, repetições desnecessárias e marcante presença de temas acessórios" (CASSIANO, 2007, p. 24).

Dessa forma o LD é um elemento aglutinador do currículo nacional e os documentos oficiais disponíveis na internet não deixam dúvidas quanto ao objetivo dos programas relacionados com o livro didático.

> O governo federal executa três programas voltados ao livro didático: o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e o Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA). Seu objetivo é o de prover as escolas das redes federal, estadual e municipal e as entidades parceiras do programa Brasil Alfabetizado com **obras didáticas de qualidade** (BRASIL, 2009b grifo nosso).

Prover "obras didáticas de qualidade" pressupõe a expectativa de prover a escola brasileira de uma educação também de qualidade e orientar o professor para uma prática visando essa almejada qualidade.

É na perspectiva dessa "qualidade" que analisaremos a praxeologia sugerida na resolução de algumas tarefas em alguns livros didáticos aprovados pelo PNLD de 2008. Limitar-nos-emos na análise de tarefas relativas aos temas que foram abordados por nós nas sessões conduzidas e relatadas neste trabalho. Nosso objetivo não é a análise do livro didático, mas fazer um estudo de como esses temas são abordados, a praxeologia sugerida ou exemplificada e as indicações para envolvimento dos estudantes no processo de argumentação.

De acordo com a TAD, o livro é uma instituição e o autor ou autores apresentam uma praxeologia. Esse apresentar significa que os autores defendem uma organização didática, representam os ideais de uma instituição (SBM, SBEM) para o estudo da matemática, e postulam a validade de um modelo docente. Essa instituição (LD) está devidamente reconhecida pela sociedade e foi aprovada pelo PNLD.

Modelos docentes são modos de conceber e elaborar uma organização didática. Apropriamo-nos dessa concepção a partir de um trabalho produzido por Gascón sobre organizações didáticas (OD). Conforme Gascón (2003) as OD podem ser situadas, esquematicamente, em três planos constituídos a partir dos três eixos coordenados numa perspectiva tridimensional. Os eixos representam os casos extremos: teoricismo, tecnicismo e modernismo.

Os teoricistas centram a atenção no bloco teórico da organização: definições, demonstrações e nas propriedades operatórias do conceito matemático, nessa ordem. Há nessa organização didática muito diretivismo porque as normas são dadas prioritariamente, a "verdade" estabelecida no meio acadêmico ocupa espaço privilegiado. Os problemas são pré-elaborados porque o aprender depende do ensino e este está centralizado no professor. Ensinar matemática é trabalhar com teorias cristalizadas. O momento de estudo privilegiado nessa organização é o do entorno tecnológico porque o teoricismo se apóia no bloco teórico-tecnológico.

O processo didático consiste em mostrar a teoria para o aluno. Fica difícil estudar porque a ênfase é na inculcação e memorização da norma culta.

A resolução de problemas é uma atividade secundária e utilizada para aplicar a teoria, motivar o estudo da mesma, auxiliar a compreensão. Não há razão para a elaboração de atividades de resolução de problemas complexos. Os problemas são formulados para serem modelados e não para serem explorados. No teoricismo não se discute as dificuldades de aprendizagem, porque elas não existem. O que existe é a falta de estudo, a falta de motivação, a falta de vontade, a falta de tempo. Se a ciência que está sendo estudada está solidamente edificada, a aprendizagem ou não aprendizagem é resultado de conceitos bem ou mal apresentados. O processo é mecânico e controlável.

Os tecnicistas oferecem modelos prontos para serem seguidos. Dão ênfase nas técnicas, na resolução de exercícios. O foco deles está na "fazeção", na imitação. Aprender é fazer. O tecnicista treina técnicas. Os problemas são trivializados e reduzidos a um simples manejo de técnicas e memorização de palavras-chave ou regras particulares (macetes). São profundamente diretivistas.

Segundo Gascón, o tecnicismo tende a aparecer depois de algum período de domínio do teoricismo. Após o fracasso deste, como aconteceu com o Movimento da Matemática Moderna, o tecnicismo surge com força conservando características daquele. O trabalho com a técnica é o momento didático privilegiado.

O que difere os teoricistas dos tecnicistas é que nos primeiros cada fazer é justificado pela teoria levando em conta as estruturas da ciência, as definições, a explicitação das propriedades utilizadas embora essa exposição nem sempre seja entendida ou valorizada pelo estudante. No trabalho dos tecnicistas cada fazer é simplesmente um fazer. O domínio da técnica é o objetivo. Porém, ambos têm algumas características em comum: o diretivismo didático e a trivialização da resolução de problemas (são meros exemplos ilustrativos). São problemas previamente elaborados e distantes do contexto social.

Os modernistas, por outro lado, focalizam as explorações e as contextualizações. A sistematização não está no centro da sua organização didática. O modernismo valoriza a criatividade, combate a trivialização dos problemas e a excessiva algoritmização. Os problemas triviais são explorados para formar as conjeturas e contribuir na resolução de outros problemas. O momento didático vivenciado é o da exploração de técnicas.

Evidentemente que na prática dificilmente encontraremos um exemplo de puro tecnicismo, teoricismo ou modernismo. O que se vivencia é a interação entre duas dessas organizações com predominância de uma delas.

O construtivismo, por exemplo, resulta da interação entre teoricismo e modernismo, podendo ser um construtivismo mais modernista ou mais teoricista. Podendo concluir cada atividade com uma sistematização, pouca sistematização ou com nenhuma sistematização. Pode explorar a constituição de um entorno tecnológico, o trabalho com a técnica ou a exploração de técnicas e tarefas.

Da articulação entre o teoricismo e o tecnicismo surgem as organizações clássicas. As organizações clássicas são constituídas de definições seguidas de exemplos de ilustração ("aplicação") e os exercícios de repetição que consistem no trabalho com a técnica. Os matizes nessas organizações são numerosos, variando da ênfase na teoria e exposição do professor e as longas listas de exercícios repetitivos de "aplicação" e fixação ou as revisões de conteúdo para a prova.

Nessas organizações clássicas o aluno é levado também a vivenciar os momentos do primeiro encontro com a tarefa e do entorno teórico-metodológico.

O empirismo ou procedimentalismo é resultado da articulação entre as organizações modernistas e tecnicistas. Predominam nessas organizações os jogos de treinamento, as manipulações de material, as discussões sem uma conclusão formal. Privilegia o primeiro e o quarto momentos, isto é, o contato com a tarefa e a técnica e o treino com a técnica. Os empiristas conferem importância ao uso de problemas de "aplicação", todos do mesmo tipo e que se modelam do mesmo jeito. Trabalham com exercícios de fixação a partir de um modelo.

Entendemos que existe uma organização didática ideal[32]. Posta em prática ela contemplaria os três eixos canônicos: teoria, técnica e criação. Resolução de problemas, sistematização, definições, institucionalização de resultados, aperfeiçoamento da técnica, argumentação racional e (auto)avaliação do que foi aprendido seriam dimensões exploradas nessa organização.

Também nessa organização ideal considera-se que a "apropriação" de um conceito matemático, denominado objeto não-ostensivo, é produto de múltiplos fatores, de uma organização didática ou de uma atividade matemática complexa em que muitos objetos ostensivos intervêm e em que múltiplos recursos são mobilizados.

5 A Praxeologia dos LD

Analisamos quatro coleções que aparecem no Guia de livros didáticos do PNLD/2008. O critério de escolha foi adoção nas escolas da região atendida pela UEMS de Nova Andradina. Entendemos que embora haja a possibilidade de um egresso dessa unidade da UEMS ir trabalhar em outras regiões do Estado ou do Brasil, o Estágio Supervisionado é feito nas escolas da região. É nessas escolas que receberam a sua formação e, em virtude da carência de profissionais, muitos deles começam a trabalhar como professor substituto já no terceiro ano do curso. O livro adotado induz praxeologias nesses acadêmicos.

Do Guia do livro didático/2008 extraímos o seguinte excerto: "Nas coleções, ocorrem, ainda, falhas do tipo acima indicado no teorema dos ângulos alternos internos e seu recíproco, na congruência de triângulos, no Teorema de Pitágoras, entre outros" (BRASIL, 2007, p. 47). Essa afirmação se constituiu em um fator de análise. Procuramos, dentre as quatro coleções, verificar quais as que, segundo os avaliadores, tratavam dessas questões com mais propriedade. Demos atenção ao tema de ângulos opostos pelo vértice e, em especial, ao tema de paralelismo porque as tarefas propostas aos acadêmicos tiveram maior concentração nesse tema.

[32] Para alguns não é ideal, é possível. Concordamos com essa possibilidade e atribuímos a "ideal" o sentido de algo a ser buscado. Não nos ocupamos, neste espaço, em discutir a ordem em que as dimensões seriam exploradas nessa OD.

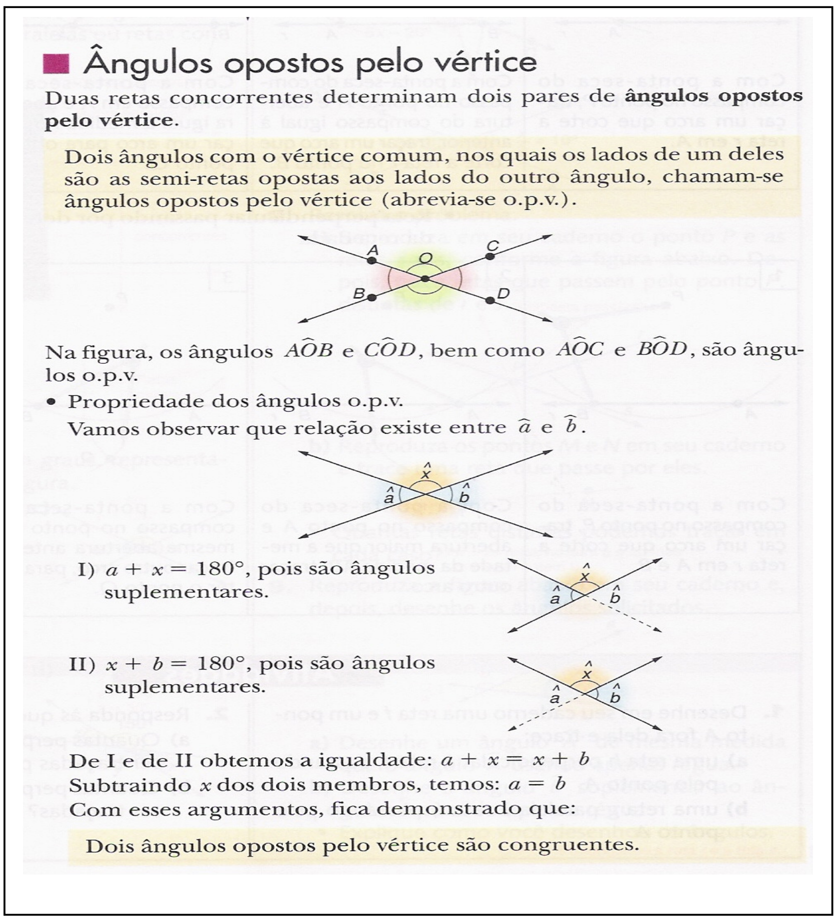
5.1 Coleção A

Barroso (2006) coordenou a produção de uma obra coletiva denominada “Projeto Araribá” que está sendo utilizada pelas escolas de uma cidade da região do Vale do Ivinhema. Coordenou também a produção da obra “Projeto Pitanguá” para os anos iniciais e que está incluída no PNLD/2010.

Conforme a figura 9 os autores ao tratar de ângulos opostos pelo vértice, seguem o padrão clássico: definem e demonstram.

A demonstração também é clássica. É a que mais comumente se encontra nos livros didáticos, é a mesma que foi utilizada por Lacroix (1808) e Legendre (1817) nos livros que elaboraram como textos para as escolas militares do seu tempo.

Nas páginas seguintes o livro traz alguns exemplos que possibilitam a vivência com o teorema e com a técnica de resolução.



Ângulos opostos pelo vértice

Duas retas concorrentes determinam dois pares de **ângulos opostos pelo vértice**.

Dois ângulos com o vértice comum, nos quais os lados de um deles são as semi-retas opostas aos lados do outro ângulo, chamam-se ângulos opostos pelo vértice (abrevia-se o.p.v.).

Na figura, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$, bem como $A\widehat{O}C$ e $B\widehat{O}D$, são ângulos o.p.v.

- Propriedade dos ângulos o.p.v.

Vamos observar que relação existe entre $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$.

I) $a + x = 180°$, pois são ângulos suplementares.

II) $x + b = 180°$, pois são ângulos suplementares.

De I e de II obtemos a igualdade: $a + x = x + b$

Subtraindo x dos dois membros, temos: $a = b$

Com esses argumentos, fica demonstrado que:

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Figura 9 –O.P.V.(1) (BARROSO, 2006, p. 77)

O outro problema analisado é também um exemplo resolvido, proposto como modelo para uma sequência de tarefas. O problema está exposto na figura 10, apresentada abaixo, onde se pede para determinar o valor de x dado que p//q.

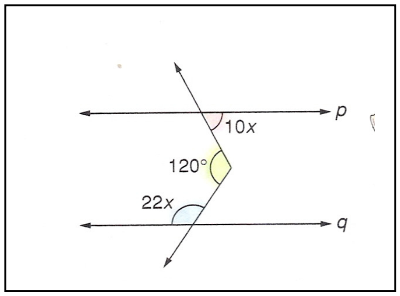
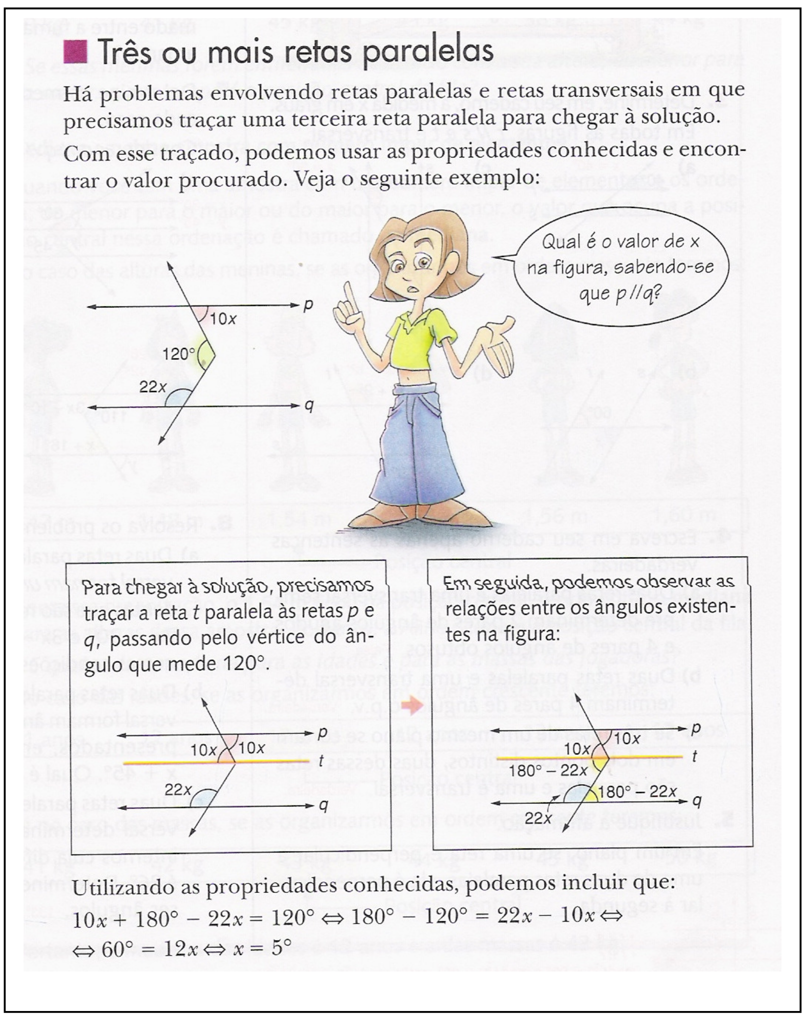


Figura 10–Ângulos entre paralelas (BARROSO, 2006, p. 83)

A resolução proposta pelos autores está na figura 11.



Três ou mais retas paralelas

Há problemas envolvendo retas paralelas e retas transversais em que precisamos traçar uma terceira reta paralela para chegar à solução. Com esse traçado, podemos usar as propriedades conhecidas e encontrar o valor procurado. Veja o seguinte exemplo:

Qual é o valor de x na figura, sabendo-se que p//q?

Para chegar à solução, precisamos traçar a reta *t* paralela às retas *p* e *q*, passando pelo vértice do ângulo que mede 120°.

Em seguida, podemos observar as relações entre os ângulos existentes na figura:

Utilizando as propriedades conhecidas, podemos incluir que:

$10x + 180° - 22x = 120° \Leftrightarrow 180° - 120° = 22x - 10x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 60° = 12x \Leftrightarrow x = 5°$

Figura 11-Resolução proposta por Barroso (2006, p.83)

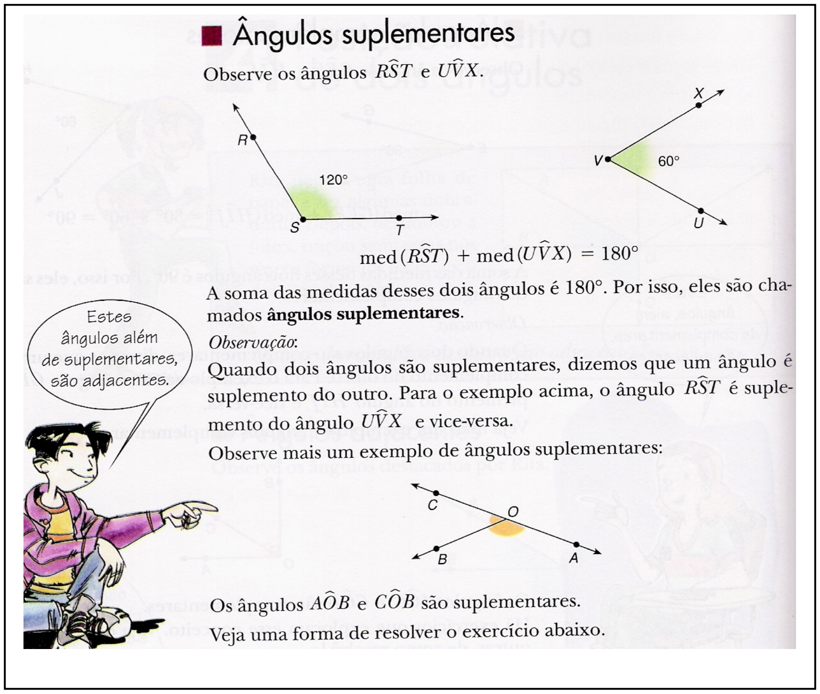
5.1.1 Análise da praxeologia induzida

A pedagogia presente neste exemplo é diretiva na qual predomina a organização didática clássica. Foi dito no início que se trata de um problema para ser resolvido por meio da construção de uma paralela. Foi antecipado também que "há problemas" que se resolvem por esse processo. Nada foi dito sobre outra possibilidade de solução, outra técnica de resolução. Não há o desafio para a busca de alternativas de resolução.

O modelo didático é de resolução de uma tarefa como exemplo. Uso do desenho ilustrativo e uma forma diretiva de desenvolver a tarefa que propõe. Aplicam recursos técnicos e teóricos explicitados recentemente, em páginas imediatamente anteriores do mesmo capítulo. Alguns passos da técnica não são justificados como, por exemplo, porque parte do ângulo de 120º se torna em 180º-22x. Do mesmo modo não explica porque parte desse mesmo ângulo se transforma em 10x. Não há também nenhum questionamento indicando que há necessidade de justificar ou explicar o aparecimento dessas expressões (180º-22x e 10x). Diz apenas que as propriedades são conhecidas. Portanto, a argumentação justificatória não foi exercitada.

Estão presentes os registros escritos na língua materna, desenho ilustrativo, registros algébrico, geométrico e aritmético. O desenho chama a atenção para a questão que se constitui na tarefa a ser resolvida.

No caso dos o.p.v. não há figura ilustrativa e não está explicado porque os ângulos x e b são suplementares. Admite-se a hipótese de que se trata de uma propriedade autoevidente, ou que o aluno se lembre de umas poucas atividades propostas nas páginas 60 e 61 do livro, também sem esclarecer porque dois ângulos nessa posição são suplementares (fig.12). Nesses dois casos examinados o modelo didático adotado pelos autores está mais concentrado no teoricismo.



■ Ângulos suplementares

Observe os ângulos $R\hat{S}T$ e $U\hat{V}X$.

$$\text{med}(R\hat{S}T) + \text{med}(U\hat{V}X) = 180°$$

A soma das medidas desses dois ângulos é 180°. Por isso, eles são chamados **ângulos suplementares**.

Observação:

Quando dois ângulos são suplementares, dizemos que um ângulo é suplemento do outro. Para o exemplo acima, o ângulo $R\hat{S}T$ é suplemento do ângulo $U\hat{V}X$ e vice-versa.

Observe mais um exemplo de ângulos suplementares:

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}B$ são suplementares.

Veja uma forma de resolver o exercício abaixo.

Figura 12-Ângulos suplementares (BARROSO, 2006, p. 60).

Sobre a coleção os avaliadores do PNLD afirmam:

> As atividades introdutórias dos capítulos permitem o resgate de conhecimentos anteriores dos alunos, e as atividades finais contribuem para o desenvolvimento da autonomia. A problematização e o estímulo à interação entre os alunos, elementos centrais na proposta da coleção, contribuem para a construção dos conhecimentos. *No entanto, é feita uma sistematização precoce de certos conceitos*, o que pode dificultar a elaboração de significados por parte dos alunos.
> Cada tópico começa por apresentar um problema contextualizado, porém *há poucas oportunidades para que os alunos se dediquem a novas descobertas*, pois a solução do problema é dada em seguida (BRASIL, 2007, p. 102-106 grifo nosso).

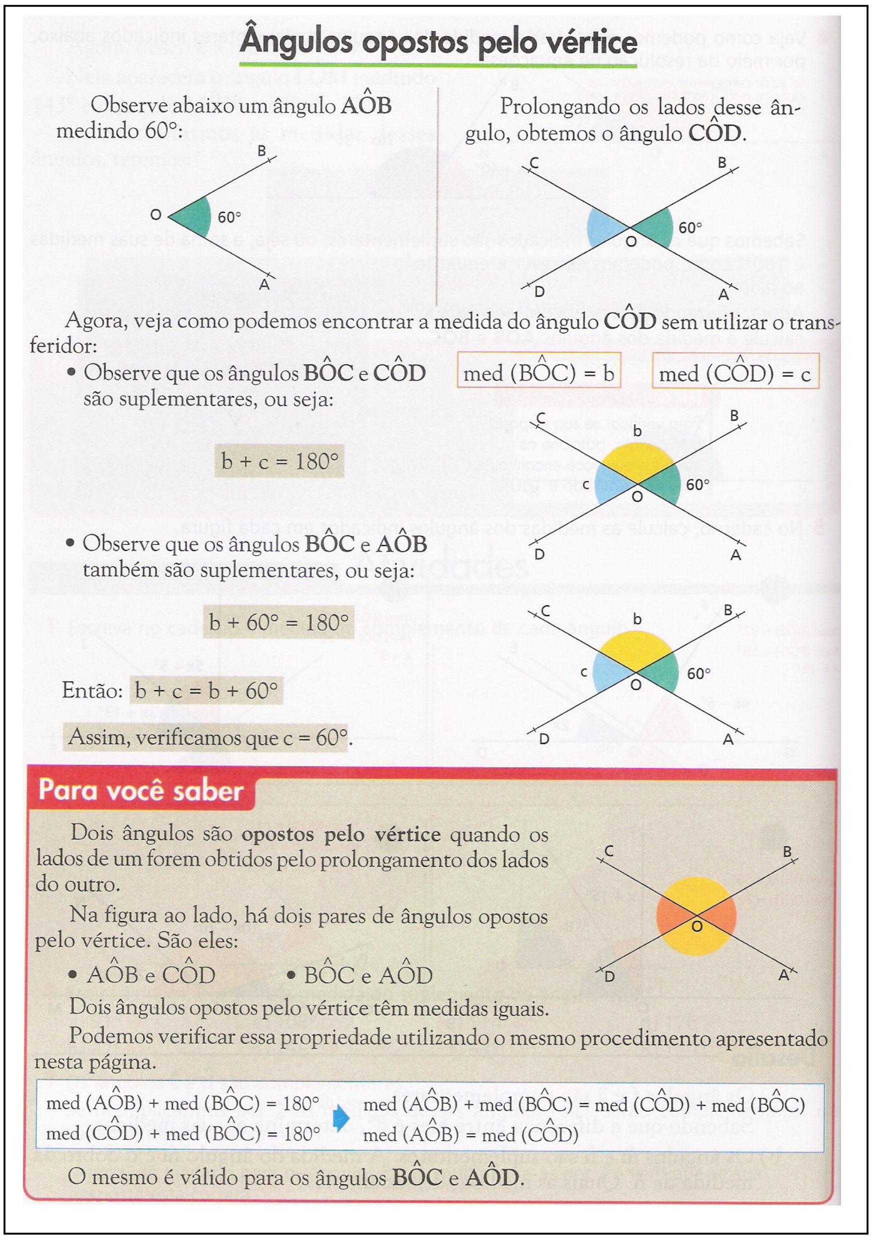
É evidente que nenhuma obra pode ser julgada com base em um único tema ou com a análise de umas poucas páginas. Nem mesmo é nossa intenção avaliar as obras que estão sendo analisadas. Queremos apenas situar o contexto em que os acadêmicos estão situados para justificar as atividades e a escolha dos temas que propusemos para eles. Era intenção também fazer uma abordagem que proporcionasse as oportunidade da argumentação explicativa e justificatória. No nosso entender, e no que diz respeito aos temas abordados, a coleção tem como centro o teoricismo.

Barroso se apresenta na obra como Editora, Licenciada em Matemática e Professora em escolas públicas e particulares de São Paulo.

5.1.2 Coleção B

A coleção “Para Saber Matemática” de Cavalcante, Sosso, Vieira e Poli (2006) também é adotada em uma das escolas de uma cidade da região. No currículo dos autores, segundo a página introdutória do livro, consta que Cavalcante é Licenciado em Matemática e Engenheiro Civil; Sosso é Licenciada em Matemática e Pós-Graduanda em Educação Matemática; Vieira é Licenciado em Matemática e Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática e Poli é Licenciada em Matemática, Mestre e Doutoranda em Educação.

De modo semelhante ao que ocorreu com os autores da coleção antecedente também estes autores apresentam definição e demonstração (fig. 13).



Ângulos opostos pelo vértice

Observe abaixo um ângulo $A\hat{O}B$ medindo 60°:

Prolongando os lados desse ângulo, obtemos o ângulo $C\hat{O}D$.

Agora, veja como podemos encontrar a medida do ângulo $C\hat{O}D$ sem utilizar o transferidor:

- Observe que os ângulos $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$ são suplementares, ou seja:

$\text{med}(B\hat{O}C) = b$ $\text{med}(C\hat{O}D) = c$

$b + c = 180°$

- Observe que os ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ também são suplementares, ou seja:

$b + 60° = 180°$

Então: $b + c = b + 60°$

Assim, verificamos que $c = 60°$.

Para você saber

Dois ângulos são opostos **pelo vértice** quando os lados de um forem obtidos pelo prolongamento dos lados do outro.

Na figura ao lado, há dois pares de ângulos opostos pelo vértice. São eles:

- $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$
- $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$

Dois ângulos opostos pelo vértice têm medidas iguais.

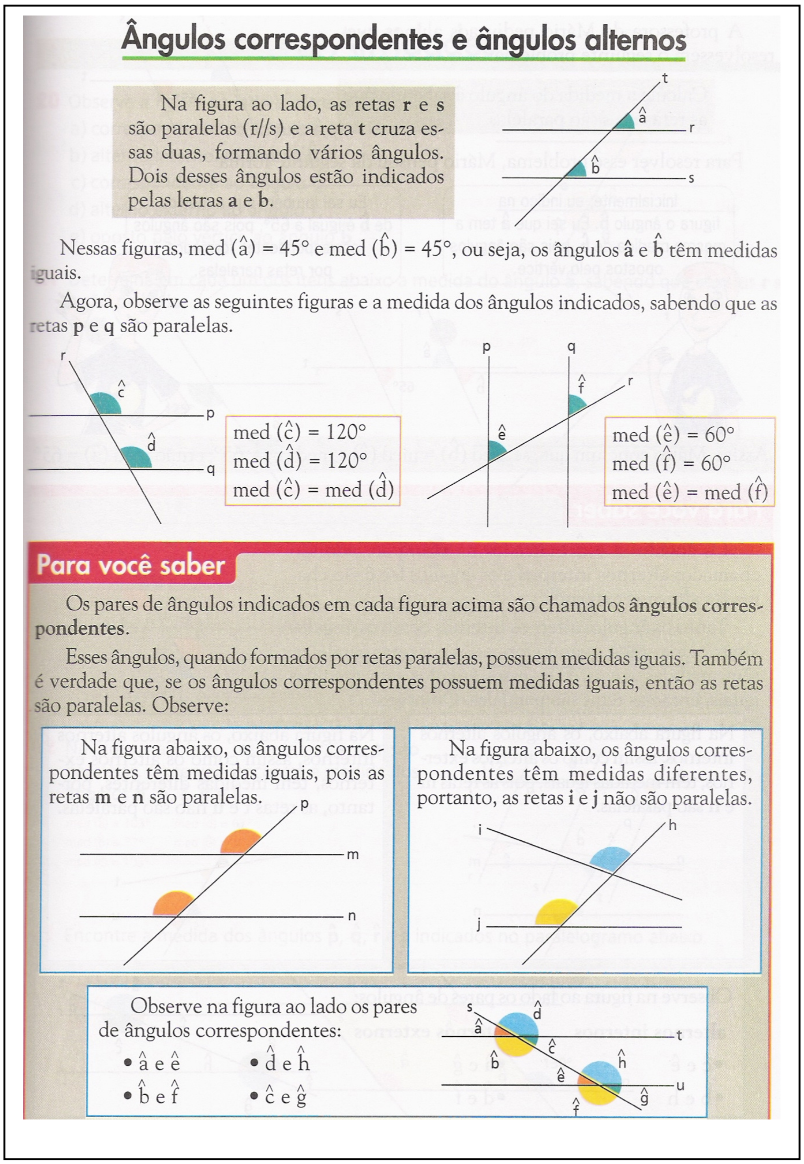
Podemos verificar essa propriedade utilizando o mesmo procedimento apresentado nesta página.

$\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = 180°$
$\text{med}(C\hat{O}D) + \text{med}(B\hat{O}C) = 180°$
$\Rightarrow \text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(C\hat{O}D) + \text{med}(B\hat{O}C)$
$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(C\hat{O}D)$

O mesmo é válido para os ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$.

Figura 13-O.P.V. (2) (CAVALVANTE et al. 2006, Os autores trabalharam com certa intensidade, nas três páginas anteriores, os conceitos de ângulos, ângulos complementares e suplementares e medidas de ângulos. No caso específico de ângulos o.p.v. começaram com um exemplo particular e evoluíram para a demonstração. As duas páginas seguintes são dedicadas ao trabalho com a técnica. A demonstração também é clássica mas há um articulação maior entre tecnicismo e teoricismo do que no caso anterior.

Depois vem o estudo do paralelismo. Ver fig. 14.



Ângulos correspondentes e ângulos alternos

Na figura ao lado, as retas **r** e **s** são paralelas (r//s) e a reta **t** cruza essas duas, formando vários ângulos. Dois desses ângulos estão indicados pelas letras **a** e **b**.

Nessas figuras, med ($\hat{a}$) = 45° e med ($\hat{b}$) = 45°, ou seja, os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ têm medidas iguais.

Agora, observe as seguintes figuras e a medida dos ângulos indicados, sabendo que as retas **p** e **q** são paralelas.

med ($\hat{c}$) = 120°
med ($\hat{d}$) = 120°
med ($\hat{c}$) = med ($\hat{d}$)

med ($\hat{e}$) = 60°
med ($\hat{f}$) = 60°
med ($\hat{e}$) = med ($\hat{f}$)

Para você saber

Os pares de ângulos indicados em cada figura acima são chamados **ângulos correspondentes**.

Esses ângulos, quando formados por retas paralelas, possuem medidas iguais. Também é verdade que, se os ângulos correspondentes possuem medidas iguais, então as retas são paralelas. Observe:

Na figura abaixo, os ângulos correspondentes têm medidas iguais, pois as retas **m** e **n** são paralelas.

Na figura abaixo, os ângulos correspondentes têm medidas diferentes, portanto, as retas **i** e **j** não são paralelas.

Observe na figura ao lado os pares de ângulos correspondentes:

- $\hat{a}$ e $\hat{e}$
- $\hat{d}$ e $\hat{h}$
- $\hat{b}$ e $\hat{f}$
- $\hat{c}$ e $\hat{g}$

Figura 14-Estudo do paralelismo (CAVALCANTE et al. 2006, p. 121).

Nesta página os autores trabalham os conceitos de retas paralelas cortadas por uma transversal e os ângulos correspondentes. A técnica usada é da exemplificação com casos particulares e definição. Na página seguinte e seguindo o mesmo procedimento eles trabalham ângulos alternos. Seguem-se então duas páginas de trabalho com a técnica, alternam com duas páginas sobre triângulos e voltam com quatro páginas de atividades complementares incluindo alguns "desafios" sobre o tema. Um dos "desafios" vem logo após uma atividade em que aparece, sem maiores esclarecimentos, a construção de uma terceira paralela para determinar o valor de um ângulo entre as paralelas (fig. 15). No estudo das equações (fig. 16) esse tema foi novamente trazido à tona com quatro exercícios numa busca pela articulação entre a geometria e a álgebra.

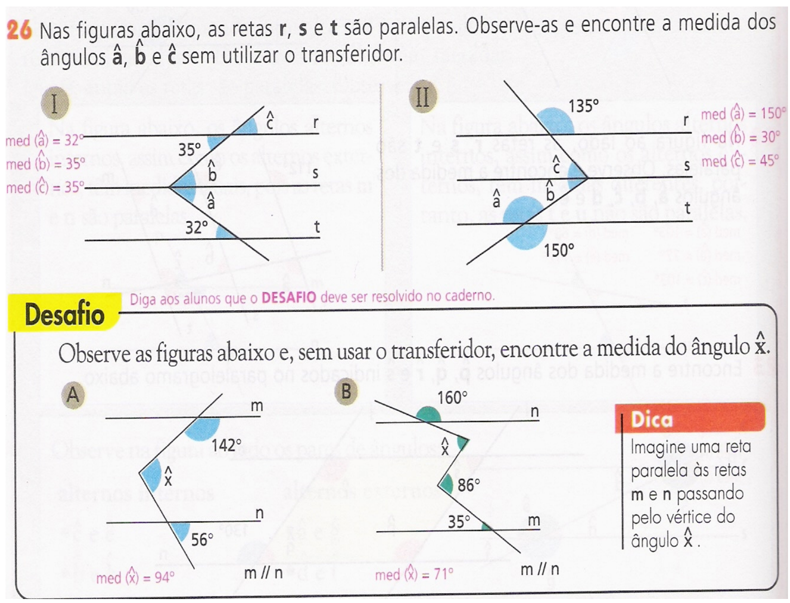


Figura 15-Ângulos e paralelas (CAVALCANTE et al. 2006, p. 124).

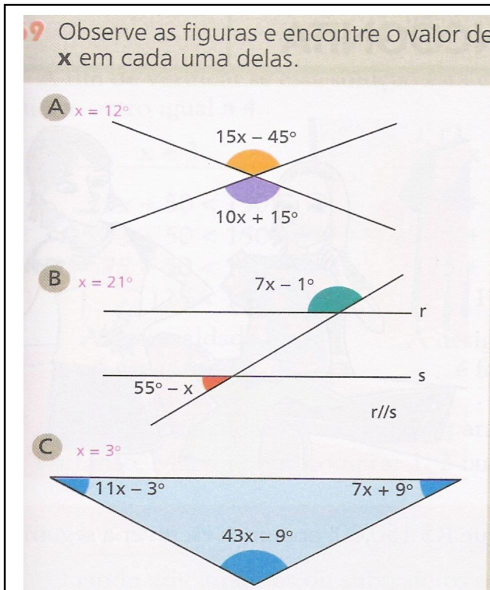


Figura 16-Paralelas e equações (CAVALCANTE et al. 2006, p. 161)

Posteriormente, em um contexto de estudo de triângulos, os autores inserem outro desafio (fig. 17) envolvendo paralelas e ângulos. O desafio aparentemente está isolado mas abre espaço para revisão (revisitar a técnica e os conceitos) e para articular o tema com o estudo dos triângulos.

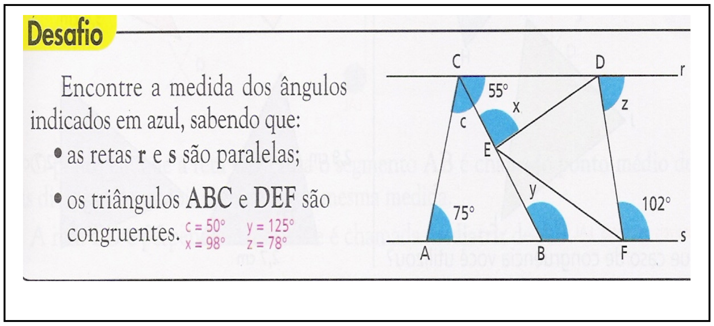


Figura 17-Desafio em um contextode estudo de triângulos (CAVALCANTE et al. 2006, p. 183).

5.1.2.1 Praxeologia Induzida

Nessa coleção B, os autores tratam do assunto da mesma forma que a maioria dos autores, logo após terem tratado de ângulos e de paralelismo em páginas recentes. Considerando que os objetos matemáticos abordados são novos para os alunos parece natural que seja assim, isto é, que haja uma preparação prévia. O que se observa nesta coleção bem como na anterior é ausência de um vínculo com o cotidiano. Parte-se de definições, isto é, o modelo didático está concentrado no plano teoricista-tecnicista. Com relação à resolução de tarefas envolvendo ângulos e paralelismo a primeira tarefa proposta já traz a terceira paralela traçada e não há nenhum exemplo resolvido como modelo. De igual modo não há uma discussão envolvendo explicações e justificativas. Estamos diante de mais um exemplo do que os avaliadores do PNLD/2008 chamam de diretivismo ou procedimento "diretivo" (BRASIL, 2007, p. 35).

Estão presentes os registros escritos na língua materna, o registro algébrico e o geométrico. Por não ser um exemplo resolvido os registros são reduzidos ao mínimo necessário para compreensão do que a tarefa requer. Dos desafios apenas um traz "dicas". Dessa forma o professor é induzido a praticar o diretivismo resolvendo exercícios como modelos e propondo tarefas de "fixação".

Sobre a coleção os avaliadores do PNLD destacam:

> A obra destaca-se pelas contextualizações, ilustrações e desafios encontrados em todos os volumes, apesar de optar por uma metodologia que, além de *não incentivar a interação dos alunos*, faz a *sistematização* do conhecimento muitas vezes de forma *precoce, sem dar aos alunos a oportunidade de tirar conclusões próprias e discutir estratégias*. Entre os muitos exercícios propostos, alguns são muito trabalhosos e outros bastante *repetitivos e com foco na reprodução de modelos* (BRASIL, 2007, p. 138 grifo nosso).

Muitos dos nossos acadêmicos, na UEMS de Nova Andradina, estudaram nessas escolas e, embora não se possa garantir que sejam produtos dessa perspectiva didática, um livro adotado exerce, sem dúvida, a sua influência.

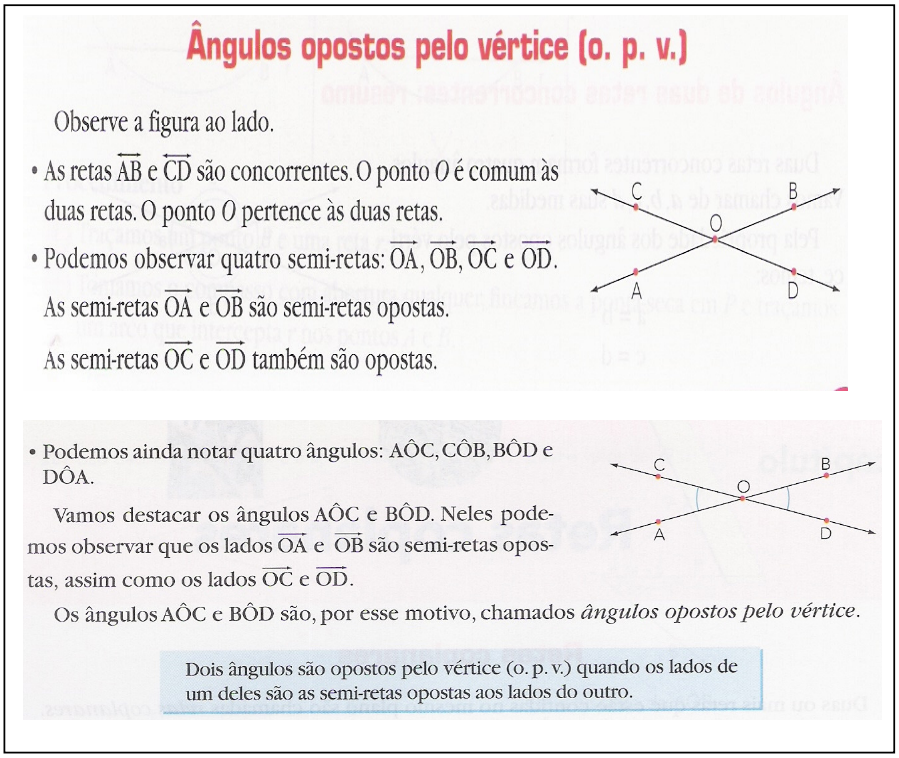
5.1.3 Coleção C

A coleção "Matemática e Realidade" é adotada pelas escolas estaduais de Nova Andradina e Anaurilândia. Seus autores Iezzi, Dolce e Machado (2005) são conhecidos no mercado de livros didáticos de longa data. São autores de livros para o ensino médio e de livros sobre tópicos específico da matemática de uso frequente nos anos iniciais dos cursos de exatas nos quais a matemática básica se faz necessária. Desde a década de 1970 que esses nomes aparecem como autores, coautores ou como organizadores de coleções de matemática básica. Iezzi é apresentado como Engenheiro Metalúrgico, Dolce, como Engenheiro Civil e Professor efetivo da rede pública de São Paulo e Machado, como Bacharel e Mestre em Estatística e Professor de escolas particulares de São Paulo.

Na "síntese avaliativa" os avaliadores do PNLD afirmam que:

> A obra caracteriza-se por uma boa organização dos conteúdos, que são apresentados em linguagem clara e concisa.
> Há grande quantidade e variedade de exercícios. Alguns são problemas-desafio e outros envolvem situações do cotidiano. Mas também há muitos rotineiros e repetitivos, que enfatizam a manipulação algébrica e numérica.
> Apesar de as seções de leituras e alguns exercícios oferecerem possibilidades de contextualização do conhecimento, o que predomina na obra é a atribuição de significados dentro da própria Matemática e a valorização de procedimentos e técnicas, o que pode dificultar o desenvolvimento de um leque mais amplo de competências (BRASIL, 2007, p. 132).

Já conhecendo de antemão o perfil da obra focalizemos os dois temas abordados em todas elas: ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.) e retas paralelas cortadas por transversal. A obra traz uma unidade (unidade 3) que trata de "segmentos, ângulos e triângulos". São oito capítulos e setenta e seis páginas dedicadas ao estudo da geometria plana com vasto uso de objetos ostensivos. Começam conceituando o.p.v. a partir de uma figura (fig. 18)



Ângulos opostos pelo vértice (o. p. v.)

Observe a figura ao lado.

• As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são concorrentes. O ponto *O* é comum às duas retas. O ponto *O* pertence às duas retas.

• Podemos observar quatro semi-retas: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$.

As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semi-retas opostas.

As semi-retas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ também são opostas.

• Podemos ainda notar quatro ângulos: $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, $B\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$.

Vamos destacar os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$. Neles podemos observar que os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semi-retas opostas, assim como os lados $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$.

Os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são, por esse motivo, chamados *ângulos opostos pelo vértice*.

Dois ângulos são opostos pelo vértice (o. p. v.) quando os lados de um deles são as semi-retas opostas aos lados do outro.

Figura 18-Ângulos o.p.v. (1) (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 85-86).

É então apresentado um exemplo e atividades de aplicação "dentro da própria Matemática". Isto é, tarefas cuja técnica resolutiva consiste em aplicar a propriedade dos ângulos o.p.v.

Em seguida os autores apresentam um exemplo de "ângulos de duas retas com uma transversal" (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 89) (fig.19) e destacam três propriedades:

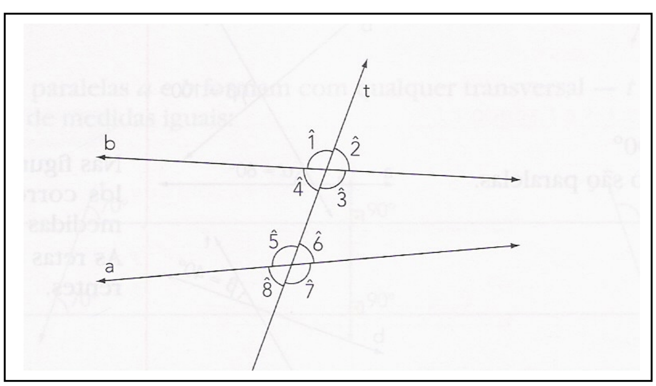


Figura 19- Ângulos de retas com uma transversal (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 89).

Propriedade 1: Ângulos correspondentes iguais implica em retas paralelas

Propriedade 2: O quinto postulado de Euclides

Propriedade 3: A recíproca da primeira propriedade

São apresentadas algumas atividades de trabalho com a técnica e no capítulo nove o tema é revisto no contexto da soma dos ângulos internos de um triângulo. No último capítulo da seção de geometria o tema do paralelismo volta à tona por meio de testes de vestibulares.

Os avaliadores já haviam identificado a obra como valorizando "procedimentos e técnicas", portanto, portadora de uma perspectiva didática tecnicista.

Os avaliadores afirmam ainda a respeito dessa coleção que:

> Valorizam-se as definições, nomenclaturas, classificações e propriedades, recorrendo-se, algumas vezes, à linguagem da teoria de conjuntos. [...] A partir do volume da 7ª série, as demonstrações formais ganham destaque. Porém, são quase sempre conduzidas de maneira diretiva, apesar de serem propostas experiências prévias ao aluno, em alguns casos. (BRASIL, 2005, p.135-136).

A obra é "diretiva" e não induz à argumentação quer explicativa quer justificatória. Está centrada na "fazeção" particularmente no que diz respeito aos temas estudados.

5.1.4 Coleção D

Denominada "Matemática na Medida Certa" (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008) a coleção foi adotada por uma escola municipal de Nova Andradina. Dois dos autores, Lellis e Jakubovic, estão no mercado de livros didáticos há mais tempo sempre atuando juntos e, em algumas coleções, em parceria com Luiz Marcio Imenes. São também autores e coautores de livros paradidáticos[33]. Jakubovic se apresenta como Licenciado em Matemática, ex-professor "e assessor de ensino de Matemática em diversas escolas" e Lellis é apresentado na coleção como Bacharel em Matemática, Mestre em Educação Matemática, "professor e assessor de ensino de Matemática em diversas escolas". Centurión é a nova integrante da equipe

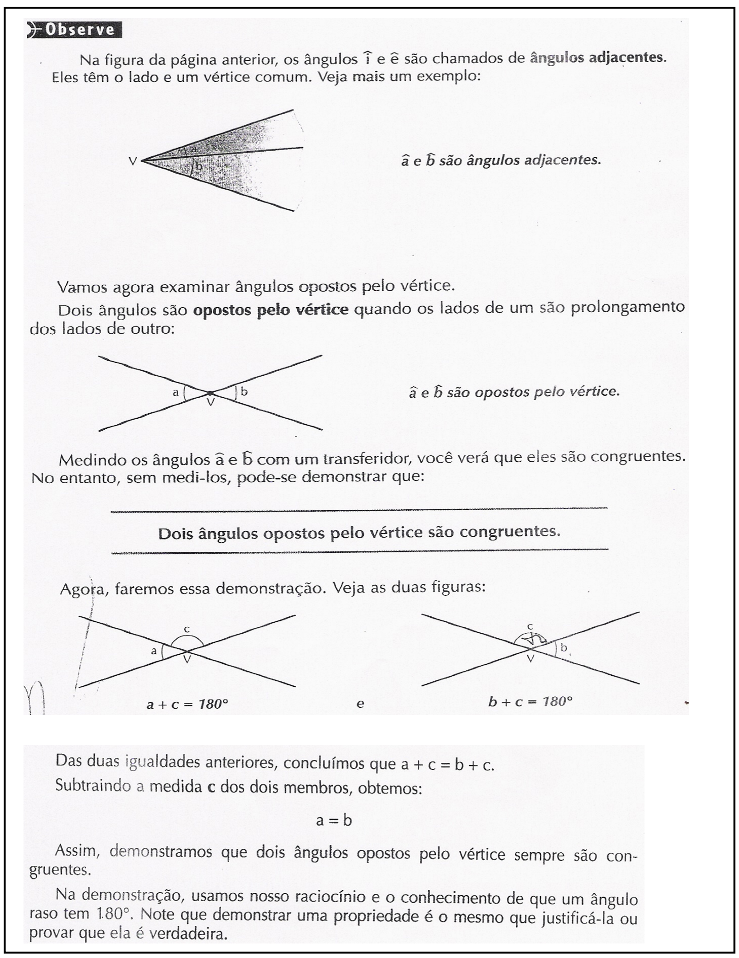
---

[33] Coleção "Vivendo a Matemática" publicada pela Editora Scipione e Coleção "Pra que serve Matemática?" publicada pela Editora Ática.

e é autora de um livro de didática da matemática[34] e se apresenta como Licenciada e bacharel em Matemática e ainda como "professora e assessora de ensino de Matemática em diversas escolas".

No livro da sexta série (7º ano) os autores já abordam conceitos de ângulos e suas medidas e apresentam algumas atividades envolvendo medidas de ângulo. É no livro da sétima série (8º ano) que os ângulos o.p.v. e a propriedade dos ângulos formados por paralelas são estudados. No capítulo intitulado "ângulos notáveis" em que definem ângulo raso, ângulo de uma volta e ângulos adjacentes abordam também ângulos opostos pelo vértice (fig. 20).

Os autores definem e demonstram a propriedade. Após a definição a obra traz atividades envolvendo os conceitos apresentados incluindo questões que pedem para dizer se a afirmação é verdadeira. Uma delas: "dois ângulos opostos pelo vértice nunca são suplementares" (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008, p. 141).



Observe

Na figura da página anterior, os ângulos $\hat{i}$ e $\hat{e}$ são chamados de **ângulos adjacentes**. Eles têm o lado e um vértice comum. Veja mais um exemplo:

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ *são ângulos adjacentes.*

Vamos agora examinar ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos são **opostos pelo vértice** quando os lados de um são prolongamento dos lados de outro:

$\hat{a}$ e $\hat{b}$ *são opostos pelo vértice.*

Medindo os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ com um transferidor, você verá que eles são congruentes. No entanto, sem medi-los, pode-se demonstrar que:

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Agora, faremos essa demonstração. Veja as duas figuras:

$a + c = 180°$ e $b + c = 180°$

Das duas igualdades anteriores, concluímos que $a + c = b + c$.

Subtraindo a medida **c** dos dois membros, obtemos:

$$a = b$$

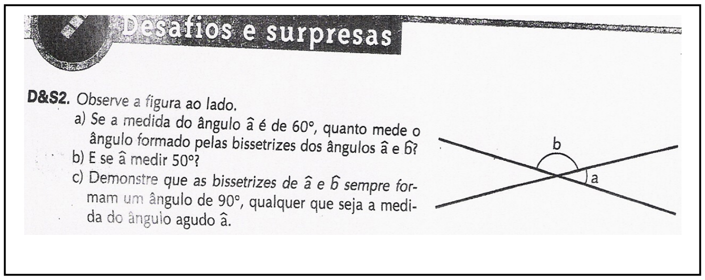
Assim, demonstramos que dois ângulos opostos pelo vértice sempre são congruentes.

Na demonstração, usamos nosso raciocínio e o conhecimento de que um ângulo raso tem 180°. Note que demonstrar uma propriedade é o mesmo que justificá-la ou provar que ela é verdadeira.

Figura 20-Ângulos o.p.v. (2) (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008,

[34] CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e Metodologia da Matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 1994. (Série Didática-Classes de Magistério).

Na mesma página há uma atividade que envolve demonstração (fig. 21).



Desafios e surpresas

D&S2. Observe a figura ao lado.

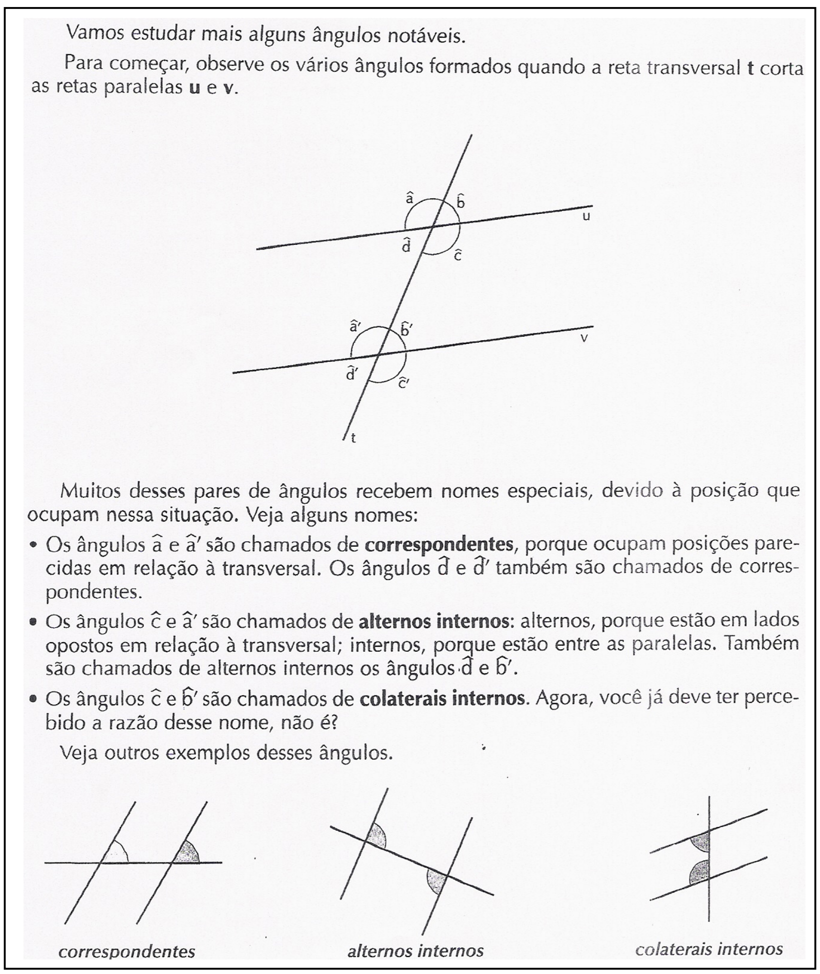
a) Se a medida do ângulo $\hat{a}$ é de 60°, quanto mede o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$?

b) E se $\hat{a}$ medir 50°?

c) Demonstre que as bissetrizes de $\hat{a}$ e $\hat{b}$ sempre formam um ângulo de 90°, qualquer que seja a medida do ângulo agudo $\hat{a}$.

Figura 21-Atividade para demonstrar (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008, p. 141)

No capítulo seguinte o tema estudado é “ângulos formados por paralelas e transversais” (Ibid., p. 142). Esses ângulos são chamados de ângulos notáveis e são apresentados com o auxilio de uma figura e definições (fig.22).



Vamos estudar mais alguns ângulos notáveis.

Para começar, observe os vários ângulos formados quando a reta transversal **t** corta as retas paralelas **u** e **v**.

Muitos desses pares de ângulos recebem nomes especiais, devido à posição que ocupam nessa situação. Veja alguns nomes:

- Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{a}'$ são chamados de **correspondentes**, porque ocupam posições parecidas em relação à transversal. Os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{d}'$ também são chamados de correspondentes.
- Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{a}'$ são chamados de **alternos internos**: alternos, porque estão em lados opostos em relação à transversal; internos, porque estão entre as paralelas. Também são chamados de alternos internos os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{b}'$.
- Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{b}'$ são chamados de **colaterais internos**. Agora, você já deve ter percebido a razão desse nome, não é?

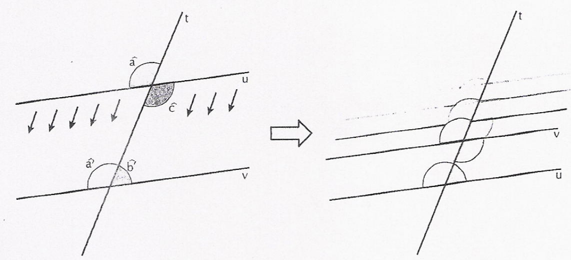
Veja outros exemplos desses ângulos.

Figura 22-Ângulos formados por paralelas (1) (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008, p. 142)

A continuação vem na página seguinte (fig.23).

Propriedades dos ângulos formados por paralelas e transversal

Imagine que você deslize a reta **u** na direção da transversal, mantendo **u** paralela a **v**. O que vai acontecer?



Quando a reta **u** fica sobre **v**, notamos que os correspondentes $\hat{a}$ e $\hat{a}'$ se sobrepõem. São congruentes.

Notamos também que os alternos internos $\hat{c}$ e $\hat{a}'$ ficam opostos pelo vértice. Também são congruentes.

Finalmente, notamos que os colaterais $\hat{c}$ e $\hat{b}'$ formam um ângulo de 180°.

Dessas observações podemos concluir que:

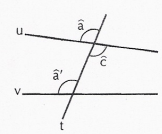
Duas paralelas e uma transversal determinam:
- ângulos correspondentes congruentes;
- ângulos alternos internos congruentes;
- ângulos colaterais internos suplementares.

Reciprocamente também podemos dizer que se uma transversal **t** corta duas retas **u** e **v** e forma ângulos correspondentes congruentes, as retas são paralelas.

Com essas propriedades, descobriremos nos próximos itens fatos importantes sobre os polígonos.

Quando não há paralelas

Na figura, as retas **u** e **v** não são paralelas. É fácil perceber que os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{a}'$ não são congruentes e os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{a}'$ também não.



No entanto, $\hat{a}$ e $\hat{a}'$ continuam sendo chamados de correspondentes. Da mesma forma, $\hat{c}$ e $\hat{a}'$ continuam sendo chamados de alternos internos. Veja que o nome dos ângulos não muda, mas a propriedade de serem congruentes só vale quando as retas que os formam são paralelas.

Figura 23-Ângulos formados por paralelas (2) (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008, p. 142)

A introdução é extensa e as atividades de trabalho com a técnica são mínimas; menos de uma página. São cinco atividades: uma de identificar os ângulos, uma de traçar paralelas com régua e esquadro, uma envolvendo ângulo externo de um paralelogramo, uma para calcular o valor de x dados dois ângulos correspondentes e envolvendo equação do primeiro grau e uma envolvendo mais de um dos conceitos estudados (fig.24). Praticamente o assunto ficou somente na exposição teórica.

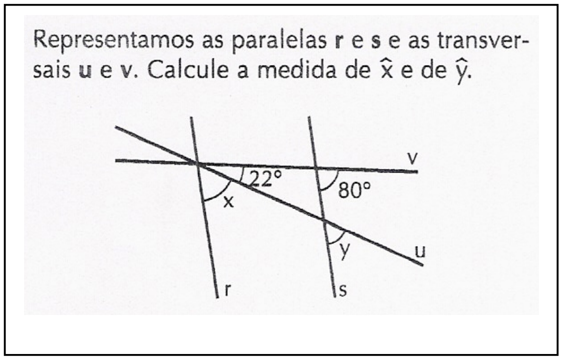


Figura 24-Ângulos formados por paralelas (3) (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008, p. 145)

Os autores têm o cuidado em detalhar a apresentação do tema mesmo que para isso tenham que produzir um texto extenso. Deixam pronta a sistematização e produzem pouco desafio à argumentação. Se considerarmos as atividades propostas na mesma página ficamos com a impressão de que o que está sendo requerido é uma argumentação justificatória sem a formalidade da demonstração. Das tarefas propostas a maioria nos pareceu ser de aplicação direta da técnica. Há, na realidade, apenas duas atividades que requerem uma argumentação justificatória. As duas atividades estão na mesma página e uma foi citada em parágrafos anteriores. A outra tem o seguinte enunciado:

> Represente dois ângulos opostos pelo vértice. Considere ainda as bissetrizes desses ângulos.
> Se os ângulos opostos pelo vértice medirem 30º, quanto medirá o ângulo formado pelas duas bissetrizes?
> E se os ângulos opostos pelo vértice medirem 45º? (CENTURIÓN; JAKUBOVIC; LELLIS, 2008, p. 141).

Essa atividade prepara o aluno para a demonstração solicitada no desafio.

O que disseram os avaliadores do PNLD/2008 sobre a coleção:

> Em geral, os conteúdos são apresentados em capítulos extensos, que seguem uma seqüência ditada pela organização interna dos campos matemáticos. Quase sempre, a sistematização dos conceitos é realizada de forma direta, no próprio livro. Dessa maneira, a coleção pode servir de apoio para o professor elaborar suas aulas e selecionar as atividades que possibilitem uma participação mais ativa do aluno no seu processo de aprendizagem, visto que a diversidade de atividades propostas é um ponto forte da obra (BRASIL, 2007, p. 120).

Para o aluno e no que diz respeito aos dois temas estudados a obra é teoricista, tecnicista e com pequena tendência para o construtivismo, porém a maior concentração está na teoria. O eixo teórico é a sustentação da obra.

5.2 O Ensino da Geometria no Século XIX

No século XIX estavam sendo formados os militares que comporiam depois o quadro docente do colégio militar e de alguma forma influenciariam o ensino da geometria no Brasil.

5.2.1 A Geometria de Lacroix e Legendre

Analisaremos rapidamente aqui as obras desses dois autores apenas para evidenciar as relações históricas existentes entre nossas organizações didáticas e as organizações adotadas em épocas anteriores. Segundo Valente (1999) quando foi criada a Academia Real Militar, no Brasil, em 1810, os autores adotados foram Lacroix com "Aritmética e Álgebra" e Legendre com "Geometria e Trigonometria Retilínea" cuja primeira edição data de 1794. Posteriormente, em 1812, foi traduzida a geometria de Lacroix e adotada pela Academia Real Militar. Os dois autores são: Adrien-Marie Legendre (1752-1833) e Sylvestre-François Lacroix (1765-1843). Lacroix depois foi adotado no "Imperial Colégio D. Pedro II [...] em razão da referência ao ensino nos liceus franceses [...] [e] nos cursos anexos preparatórios à Faculdade de Direito" (VALENTE, 1999, p. 122). Legendre teve várias edições e foi traduzido para muitas línguas e "os livros-textos publicados por Lacroix tiveram um sucesso enorme e *efetuaram uma influência não somente na França mas também em muitos países - da Europa e da América do Norte e do Sul*" (SCHUBRING, 2003, p. 126, grifo nosso).

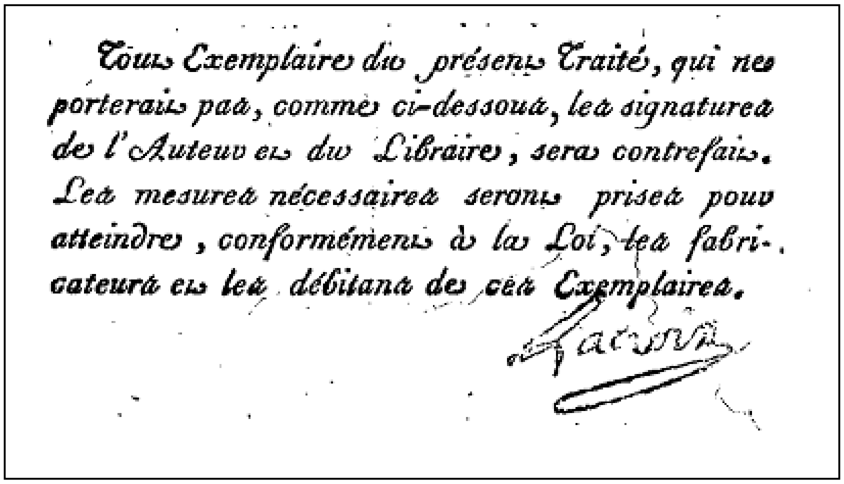
Destaca-se ainda que são obras que estão disponíveis na Biblioteca Nacional da França para ser baixada para o seu computador via internet[35]. Os livros não trazem figuras no texto, naturalmente em decorrência das limitações tecnológicas da época, e toda proposição remete a uma figura de um banco de figuras existente no apêndice.

Lacroix (1808) começa a sua obra com um aviso do editor de que o autor reuniu nessa obra tudo o que escreveu sobre ensinamentos em geral, sobre matemática em particular, sobre a metafísica da ciência, com argumentações,

[35] www.gallica.bnf.fr

discursos produzidos sob o título de reflexões sobre a ordenação dos Elementos de Geometria, modos de escrever, sobre o Método Matemático. Esses diversos fragmentos foram reunidos para o propósito do Ensino da Matemática elementar

Logo abaixo o autor faz a advertência de que os livros que não trouxerem a assinatura do autor e do editor são falsos (fig. 25).


Tout Exemplaire du présent Traité, qui ne porterait pas, comme ci-dessous, les signatures de l'Auteur et du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricateurs et les débitans de ces Exemplaires.

Lacroix

Figura 25- Advertência (LACROIX, 1808, p. s/n)

O livro traz um índice completo e a obra está dividida em duas partes, cada uma com duas secções. Começa com um suplemento explicando os símbolos, operações e conceitos que serão utilizados. Esse suplemento tem nada menos do que dezenove páginas e traz explicações sobre sistema métrico decimal, medida de área, exemplos de alíquotas, volume de sólidos, proporcionalidade, potências, raiz quadrada, como trabalhar com as grandes medidas e termina com algumas observações que na realidade seriam definições de axioma, teoremas, corolário, escólio e problema[36].

A partir do que seria a página de número 46 começam os "Élémens de Géométrie" com algumas noções gerais sobre a sua extensão.

De ambos os autores analisaremos uma tarefa que foi por nós trabalhada e também pelos autores dos livros didáticos analisados (fig.26). As figuras que acompanham foram retiradas dos apêndices das obras. O que queremos destacar são a notação e a forma de abordagem que não difere da que é usada em nossos dias.

---

[36]. "Um *problema*, uma questão a ser resolvida. Uma proposição que serve de preparação a uma outra se denomina *lema*. E dá-se às observações o nome de *escólio*." (LACROIX, 1808, p. s/n, grifo do autor, tradução nossa).

A tarefa consiste em provar que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

11. Lorsqu'une droite *AE* tombe sur une autre droite prolongée de part et d'autre du point de rencontre, elle fait, avec cette autre, deux angles *EAB* et *EAD*, qui, réunis ensemble, valent deux droits.

FIG. 7. Deux droites *BD* et *EF*, *fig.* 7, qui se coupent, étant prolongées au-delà de leur point de rencontre *A*, forment autour de ce point quatre angles qui sont opposés par le sommet deux à deux, savoir : *EAB* à *FAD*, *EAD* à *FAB*.

12. *Théorème.* Les angles opposés par le sommet que forment deux droites en se coupant, sont égaux.

Démonstration. En effet, il résulte du numéro précédent, que la somme des angles *BAE* et *DAE*, placés du même côté de la droite *DB*, est égale à deux droits, et que celle des angles *DAE* et *DAF*, placés du même côté de la droite *EF*, est aussi égale à deux droits : d'où il suit que les angles *BAE* et *DAE* réunis, équivalent aux angles *DAE* et *DAF* réunis. Retranchant de part et d'autre l'angle commun *DAE*, il restera l'angle *BAE*, égal à l'angle *DAF*, qui lui est opposé par le sommet.

On démontrerait de même que l'angle *DAE* est égal à *BAF*.

Figura 26 – Proposição de (LACROIX, 1808, p. 7-8)

A figura 7 a que se refere está na fig. 27 com tamanho ligeiramente ampliado. Por se tratar de obra antiga, às vezes, aparecem borrões.

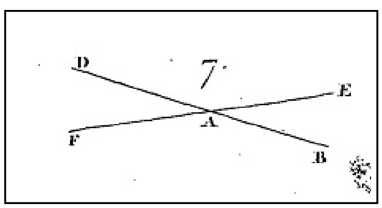


Figura 27–Fig. 7 do apêndice da obra (LACROIX, 1808)

A outra obra histórica é a de Legendre (1817) que nas páginas iniciais do que ele intitula de primeiro livro, e que não tem índice, define e apresenta vinte definições. Entre elas: o que é geometria, o que é tridimensional, o que é linha, o que é linha reta, o que é sólido e o que é ângulo. Faz uma etapa de explicações de termos incluindo: axioma, teorema, hipótese, problema, lema, corolário e escólio evidenciando que o tratamento da geometria será o do rigor, o demonstrativo. O autor explica também o significado dos sinais de operação que vai utilizar.

Antes ainda de começar o estudo das proposições o autor apresenta cinco axiomas. O que ele considera como axiomas são as noções comuns. Para nós, axiomas se confundem com os postulados (BOYER 1996, p. 73).

O aluno é conduzido passo a passo, proposição após proposição, até a vigésima-segunda quando passa para o segundo livro que trata do círculo e da medida dos ângulos. Esse segundo livro também começa com definições e apresenta dezoito proposições.

O livro três trata das proporções ou semelhança de figuras e traz sete definições, trinta e quatro proposições e uma relação de dezenove problemas todos envolvendo demonstrações.

O livro quatro trata da figuras regulares incluindo a definição de polígono, dezesseis proposições, um apêndice sobre máximo, mínimo e figuras isoperimétricas com dez proposições. Já o livro cinco trata dos planos e os ângulos sólidos. O livro tem seis definições e vinte e cinco proposições ou problemas. O livro seis é um tratado sobre poliedros. Apresenta dezenove definições e vinte e sete proposições.

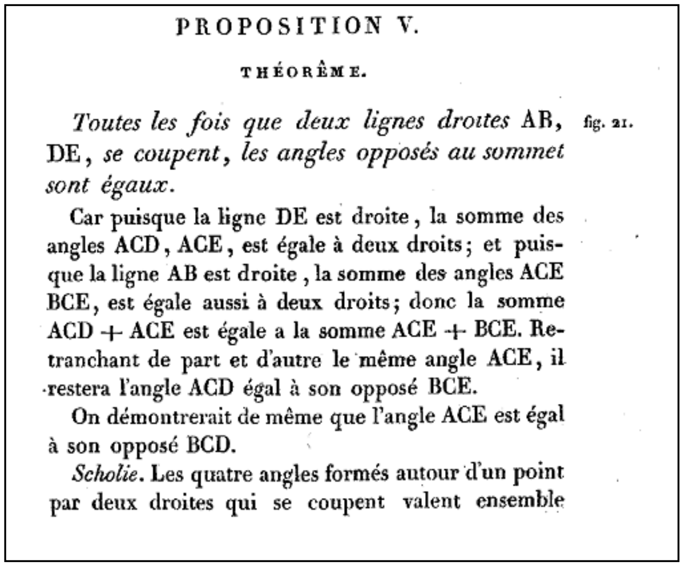
O livro sete é sobre a esfera, com quinze definições e vinte e sete proposições. Traz um apêndice aos livros seis e sete sobre poliedros regulares com quatro proposições. O livro oito é sobre os corpos redondos com seis definições e dezoito proposições. Ao final, o autor apresenta doze notas explicativas sobre vários assuntos relacionados às geometrias incluindo triângulo esférico, o quinto postulado de Euclides, definições, relação entre uma proposição e outra, circunferência, diâmetro e números irracionais, triângulo, quadrilátero inscrito, poliedros simétricos, igualdade e semelhança entre poliedros e outros temas. Os oito livros consomem 335 páginas sequenciais de pura geometria demonstrativa.

Todas as proposições estão demonstradas e comentadas exaustivamente, gastando-se para isso, às vezes, duas ou três páginas. Procura, inclusive, apresentar o que Toulmin denomina de refutação, isto é, limites do teorema ou possibilidades de aparecerem casos correlatos em que ele não se aplica e, portanto, tem que fazer uma nova abordagem. Foram incluídos nos comentários os corolários, os lemas e os escólios relacionados. Todas as figuras estão no apêndice e ao lado de cada demonstração há o número da figura a qual se refere.

O tratamento dado à geometria é excessivamente rigoroso e a obra é, na realidade, um tratado completo e formal sobre geometria euclidiana. Foi essa a organização didática do autor. Não há preocupação com as aplicações, mas com a formalidade. Os registros de linguagem são essencialmente algébricos e na língua materna exceto as figuras do apêndice, num total de 226 delas.

Toda a obra induz uma prática didática diretiva, centrada no teoricismo.

A tarefa considerada: congruência dos ângulos opostos pelo vértice (figs. 28, 29).



PROPOSITION V.

THÉORÈME.

Toutes les fois que deux lignes droites AB, DE, *se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.* fig. 21.

Car puisque la ligne DE est droite, la somme des angles ACD, ACE, est égale à deux droits; et puisque la ligne AB est droite, la somme des angles ACE BCE, est égale aussi à deux droits; donc la somme ACD + ACE est égale a la somme ACE + BCE. Retranchant de part et d'autre le même angle ACE, il restera l'angle ACD égal à son opposé BCE.

On démontrerait de même que l'angle ACE est égal à son opposé BCD.

Scholie. Les quatre angles formés autour d'un point par deux droites qui se coupent valent ensemble

Figura 28–Proposição V de Legendre (LEGENDRE, 1817 p. 9-10)

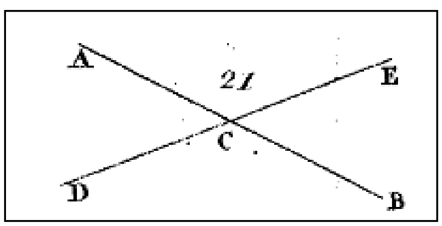


Figura 29-Fig. 21 (LEGENDRE, 1817).

Essa demonstração é a mesma usada em nossos dias. Até mesmo a notação de ângulo a partir de pontos situados nas semirretas ainda está em uso. As coleções B e C analisadas neste capítulo são dois exemplos. A forma direta de definir ou fazer a proposição e demonstrar em seguida também serve de exemplo para as quatro coleções analisadas. O que se observa é que esse procedimento demonstrativo tem permanecido por séculos.

É possível demonstrar a mesma proposição pela soma dos ângulos internos do triângulo (fig.30). Traçam–se duas paralelas s_1 e s_2 e, pela propriedade dos ângulos alternos internos, tem-se que a=a´ e b=b´. Pela soma dos ângulos internos conclui-se que x=y.

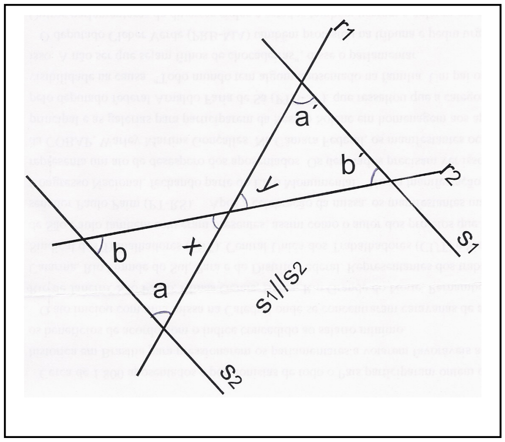


Figura 30-Demonstração da congruência de ângulos o.p.v., feita pelo pesquisador.

Em Lacroix cada proposição é precedida por uma definição ou um esclarecimento sobre a propriedade a ser demonstrada. Esse cuidado não é tomado por Legendre. A notação é a mesma nos dois autores.

Schubring (2003) denomina o método de Lacroix de método dos inventores. E explica que a intenção era apresentar a matemática em conformidade com o que havia de mais moderno nas demais ciências. Obviamente que se tratava de apresentar um raciocínio rigoroso, aprofundando o conhecimento, fazer um “tratamento gradual da matéria já abordada de modo que sempre informasse os estudantes onde eles de fato estavam” (SCHUBRING, 2003, p. 108) fazendo retomadas sempre que necessário.

Há semelhanças e diferenças entre os autores Legendre e Lacroix. Ambos começam com definições. Legendre gastou mais tempo com esse detalhe enquanto Lacroix dedicou-se a uma maior organização do material incluindo um completo índice, algumas definições ficaram para o momento em que dela se precisasse, um procedimento, no nosso entender, mais produtivo. Para Legendre cada proposição era um tópico colocado em destaque. Esse não foi o enfoque de Lacroix embora as proposições estejam numeradas.

Lacroix também demonstra algebricamente todas as proposições e dedica atenção ao detalhamento. Este, no entanto, é menos extenso do que em Legendre e há espaço para a resolução de problemas logo após a demonstração de muitos teoremas. Dedicou 32 páginas para registrar a bibliografia consultada. Cuidado que também faltou a Legendre, pois o seu livro não traz referências bibliográficas. Na realidade Schubring nos informa que eram comuns na época as cópias em larga escala sem dar crédito ao verdadeiro autor. Nesse aspecto Lacroix foi cuidadoso em indicar as fontes de consulta reconhecendo o mérito de quem produziu as idéias que estava utilizando.

A obra de Lacroix estava longe de ser original em conteúdo, pois ele tomara material "emprestado" de Bézout.

> [Na primeira edição] tomei emprestado da terceira parte da coleção de Bézout alguns artigos referentes a detalhes de operações e que são comuns a todos os livros e a todos os métodos. Fiz isso a fim de preencher as lacunas que existiam entre as notas e os complementos pelos quais eu havia feito acompanhar a minha edição de Clairaut, e nos quais eram discutidos os aspectos mais sutis da álgebra (LACROIX, 1800, *apud* SCHUBRING, 2003, p. 111).

Se conforme Schubring (2003), a ausência de rigor foi uma característica da obra de Bézout, outro autor adotado na Academia Real Militar, desses dois autores não se pode dizer o mesmo. Com um olhar de hoje diríamos que houve um excesso no rigor do ponto de vista pedagógico.

Os dois autores não se propuseram a explorar tarefas que não fossem proposições demonstráveis. Não houve exploração de técnicas e não ocorreu o estudo da matemática no sentido da TAD. Estudar matemática, conforme essa teoria, consiste em se defrontar com um problema para o qual não há, necessariamente, uma resposta pré-elaborada. Um problema cujo modelo de resolução ainda não é conhecido pelo estudante. Esse fator desconhecido exige que ele se empenhe na busca de informações complementares sobre o problema e técnicas matemáticas que podem ser usadas para a solução.

Legendre e Lacroix foram concorrentes no mercado de livros-textos e trabalharam com problemas em que se estabelecem relações fechadas. A proposta de trabalho dos autores foi teoricista-tecnicista e bem diretiva, centrada na teoria e no exercício da técnica e pode ser classificada como clássica, segundo Bosch e Gascón (2001b, p. 15).

O "método dos inventores" não se parece em nada com as múltiplas tentativas, os erros e os acertos, a que se submetem os que produzem ciência. O método proposto, pela sua diretividade e formalização *a priori*, dificulta a "visibilidade social da atividade matemática" (CHEVALLARD, 2001 p. 129).

5.3 Síntese do Capítulo

Com relação aos livros avaliados pelo PNLD nossa intenção não foi emitir juízo de valor sobre a proposta dos autores tendo em vista que já foram avaliados por especialistas. Fizemos apenas a constatação e a descrição daquilo que constatamos. Focalizamos também os objetivos do PNLD que é contribuir para a formação continuada do professor de matemática e, dessa forma, é possível avaliar a contribuição de cada coleção para o **desenvolvimento das práticas argumentativas no estudo da Geometria Euclidiana.**

A busca de um exemplo nos livros históricos teve apenas a intenção de mostrar o nosso vínculo com a história pois, como disseram Souza e Hiane (2009), "vivemos em uma época de valorização da cultura, estudada por vários autores, sociólogos, antropólogos, historiadores, entre outros". Entendemos que culturalmente somos produtos do nosso passado. Quanto mais intensamente foi vivido esse passado maior a marca que deixou sobre o presente.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ACADÊMICOS

Este capítulo final do trabalho é dedicado à descrição das sessões de trabalho e à análise das atividades propostas e das tarefas resolvidas pelos acadêmicos. Tarefas de geometria euclidiana.

A geometria euclidiana é um vasto campo de estudo. Na educação básica, mais precisamente no ensino fundamental, ela se constitui em um setor de estudo, isto é, situa-se no sétimo nível de determinação didática conforme a Teoria Antropológica do Didático. Porém, em um curso de licenciatura ela é uma disciplina e situa-se no quinto nível.

O domínio em que nós trabalhamos na geometria plana é o das figuras uni e bidimensionais. Delimitamos, no setor de paralelismo, o tema de retas paralelas cortadas por transversais e ângulos opostos pelo vértice; no setor de triângulos, os temas: ângulos internos e ângulos externos. Uma das razões desta escolha está no próprio programa a ser cumprido. Outra razão consiste no fato de termos de escolher dentre as atividades a ser trabalhadas no programa e fizemos opção por aquelas que, tradicionalmente, são demonstradas nos livros didáticos, levando em conta que nosso sujeito é um licenciando.

A geometria plana estudada na perspectiva euclidiana tem como suporte teórico, basicamente, os axiomas e os teoremas. Uma prática comum entre os matemáticos consiste em aceitar alguns teoremas como axiomas (BICUDO, 1999) e fazer demonstrações localizadas. Esse procedimento é justificado, segundo Bicudo, para evitar longas cadeias de demonstrações e, consequentemente, a interminabilidade da tarefa. Em sala de aula, nos níveis fundamental e médio, essa prática também é muito comum, embora, não pela mesma razão.

Buscamos durante esse ano letivo estabelecer uma organização didática em que conceitos geométricos fossem trabalhados de forma menos rígida, menos formal nos estágios iniciais da atividade e permitisse o trabalho com conteúdos procedimentais e atitudinais (CHEVALLARD, 2001) e uma evolução para a sistematização.

O domínio de estudo está classificado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) como Espaço e Forma do qual faz parte a geometria plana. As propriedades geométricas, aceitas no meio acadêmico especializado como verdadeiras, embora a sua demonstração não seja ainda de domínio do nosso acadêmico, constituíram o arcabouço teórico da técnica utilizada na resolução das tarefas.

Nas atividades propostas procuramos observar, descrever, analisar e avaliar as praxeologias, os registros de linguagem, a validade do raciocínio e dos argumentos justificatórios.

Analisamos também as garantias, os suportes tecnológicos, as conclusões e até mesmo as fragilidades do argumento, que Toulmin denominou de refutação, isto é, os fatores que limitam a validade do argumento utilizado. Levamos em conta todo o contexto, isto é, todo conhecimento ou saber que o acadêmico conseguir mobilizar para explicar, justificar, provar ou demonstrar as asserções feitas ou as decisões tomadas.

6 O Contexto da Pesquisa

Mais um detalhe sobre o funcionamento da Unidade Universitária onde foi desenvolvido todo esse processo. Pelo fato de que nem todos professores são efetivos, muitas vagas são preenchidas por professores aulistas, denominados convocados, que trabalham em mais de uma unidade. Essas unidades universitárias, às vezes, se distanciam umas das outras por mais de uma centena de quilômetros e, em virtude disso, as aulas de cada disciplina são concentradas em um só dia da semana. Dizendo melhor, em uma única noite da semana[37]. São questões de ordem social que impõem a tomada de certas medidas que influenciam, de forma muito marcante, na organização didática do professor. É a influência da sociedade na determinação do trabalho didático.

[37] A nova direção da UEMS eleita e empossada no final de 2008 vem envidando esforços para diminuir esse deslocamento. Ele se torna dispendioso para a universidade e o professor não tem disponibilidade para participar de reuniões nas unidades e nem mesmo para orientar acadêmicos. Em 2009 as unidades universitárias tiveram autonomia para selecionar os seus professores da mesma região onde está situada. Foi autorizada a proceder a “convocação especial”, isto é, convocação válida em apenas uma das unidades. Para o ano de 2010, segundo entendimento do Ministério Público, as convocações especiais não deverão mais acontecer por deixar o trabalhador muito vulnerável.

As aulas de geometria estavam concentradas na quinta-feira, e a pesquisa foi desenvolvida com todos os acadêmicos da turma de 2009[38]. Eram calouros, recém ingressados na universidade, e a primeira sessão da pesquisa ocorreu no dia 12 de março de 2009, cerca de um mês após o início das aulas.

No período que antecedeu a primeira sessão, as aulas seguiram o programa procurando inserir o acadêmico no contexto de estudo da geometria euclidiana. Foram apresentados as noções primitivas e conceitos fundamentais através de atividades de estudo, conforme o programa a seguir.

6.1 Programa da Disciplina de Geometria na UEMS/NA

> **Carga horária: 136 horas h/a (primeiro ano do curso).**
> **Professor: Antonio Sales.**
> **Descrição:**
> Desenvolver estudos sobre toda a Geometria básica, através de demonstrações matemáticas, com aplicações práticas e construções geométricas fundamentais. Desenvolver estudos para a aquisição de conhecimento sobre a teoria axiomática e os vários métodos de demonstração dos conteúdos da geometria plana e espacial.
> **Ementa**:
> Noções e proposições primitivas: ponto, reta e plano; segmento, ângulo e triângulo: conceitos fundamentais; paralelismo e perpendicularismo: construções geométricas; polígonos e construções das figuras; quadriláteros notáveis; pontos notáveis do triângulo: construção; circunferência, círculo e ângulos na circunferência; semelhança de triângulos e potência de ponto: desenvolvimento dos teoremas de Tales e Pitágoras; triângulo retângulo e triângulo quaisquer; polígonos regulares e comprimento da circunferência; áreas de figuras planas; figuras no espaço: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera; volumes de figuras espaciais (UEMS, 2009).

A presença da geometria euclidiana na universidade, em cursos de licenciatura, é uma determinação da sociedade que estabelece a sua presença na escola. As questões, os temas e os setores abordados e a forma de abordagem são herança da civilização grega de quem somos tributários no que diz respeito à concepção de ciência. Entendemos que estudar geometria euclidiana em nossos dias e da forma axiomática como fazemos é uma forma de pagar nosso tributo aos sábios gregos pela herança intelectual que nos legaram. É uma forma de inserir nossa

[38] No início eram 40 acadêmicos e mais para o final esse número foi reduzido para cerca de 30. Alguns poucos, menos de cinco, após alguns meses passaram a receber algum tipo de bolsa e passavam algumas horas do dia na biblioteca e outros, em quantidade variada e com frequência irregular, se uniam a eles aos sábados, também na biblioteca, mas o objetivo era estudar todas as disciplinas.

juventude nesse nível mais amplo que é o nível da civilização, para conhecer como pensaram e como pensam os que se dedicam ao estudo dessa ciência.

Na turma de 2008 desenvolvemos sessões semelhantes porém com o objetivo de aperfeiçoar as atividades a serem propostas para a pesquisa em 2009. Percebemos nesse experimento que questões muito teóricas seriam inviáveis pois alguns acadêmicos não haviam estudado geometria na educação básica, outros concluíram o ensino médio há muitos anos e nem se lembravam do que haviam estudado porque a perspectiva era de que não voltariam mais a estudar. Mesmo os que tinham ingressado na universidade logo após o término do ensino médio estavam há, pelo menos, quatro anos sem contato com um abordagem teórica da geometria. A geometria que se estuda no nono ano é uma geometria métrica e no ensino médio é a geometria analítica que não tem por base axiomas, definições, etc. Ela é calculista. Algumas demonstrações são puramente algébricas. Essa geometria "especulativa" consta do programa do oitavo ano, segundo os LD e, mesmo que bem trabalhada nesse ano, há um interstício mínimo de quatro anos até o primeiro ano universitário quando, na UEMS, a geometria euclidiana é estudada.

Os poucos que se lembravam ter estudado no oitavo ano recordavam apenas das definições e dos cálculos.

A experiência do ano anterior revelou ser muito difícil conseguir questionamentos, extrapolar o aspecto visual imediato e especular sobre o absurdo, isto é, tentar contrapor com um raciocínio absurdo para confirmar a regra. Quando o SER é desconhecido, pouco conhecido ou inquestionável, como o NÃO SER pode imaginável, para muitas pessoas? As organizações didáticas clássicas trabalham sobre certezas, sobre o que é dado e não sobre explorações e descobertas, e romper com essa tradição não é tarefa simples.

6.2 Sobre a Metodologia

Nosso referencial metodológico é a pesquisa qualitativa do tipo etnográfico que procura ter no ambiente natural a sua fonte de dados. Estamos entendendo que esse "ambiente natural", no nosso caso, é a sala de aula. O pesquisador como principal instrumento de coleta de dados permaneceu atendo às falas, às manifestações gestuais e, principalmente, às resoluções de tarefas propostas (ANDRÉ, 2008).

Nenhuma atividade foi proposta por casualidade e o contato direto e prolongado com o ambiente proporcionou ao pesquisador a oportunidade de presenciar um significativo número de situações. Seguindo os princípios da etnografia procuramos trabalhar com dados efetivamente observados.

Segundo Malinowski (1970, p. 26) não basta o pesquisador posicionar seus instrumentos de pesquisa e ficar esperando que “a caça caia nelas. Ele precisa ser um caçador ativo e atento, atraindo a caça, seguindo-a cautelosamente até a toca de mais difícil acesso”.

Nessa perspectiva nossas tarefas sempre eram planejadas visando um duplo objetivo: atender a demanda curricular com uma atividade de estudo e colocar o acadêmico frente a uma tarefa que exigia dele a elaboração de uma organização de estudo e a exploração ou elaboração de técnicas de resolução que envolvia necessidade de explicar e justificar; que não fosse uma tarefa cuja técnica se confundisse facilmente com a própria tecnologia.

Havíamos trabalhado com a idéia de que toda afirmação, conquanto verdadeira, deveria ser justificada com base em outra verdade, considerada como tal no contexto de geometria euclidiana. Os acadêmicos assumiram ainda outra posição interessante no contexto de uma pesquisa do tipo etnográfico: para toda tarefa é possível existir mais de uma técnica de resolução.

De acordo com a TAD todas as técnicas são válidas desde que devidamente embasadas em uma teoria. Dessa forma cada tarefa que iremos analisar foi pensada para servir de atividade sobre o conteúdo abordado em aulas anteriores. Mas a tarefa foi pensada também visando proporcionar a oportunidade do embate de idéias, tendo em vista que a pesquisa teve por objetivo analisar a presença da argumentação como técnica e como tecnologia do acadêmico na resolução das tarefas propostas.

A técnica de coleta de dados consistiu, principalmente, em fotografar os registros dos acadêmicos, logo após a conclusão da tarefa, a apresentação no quadro. Foram usadas igualmente filmagens e entrevistas pessoais em menor escala. O diário de bordo também foi utilizado.

Havíamos conseguido com que todos os acadêmicos participassem dos grupos e discutissem as tarefas. Grupos que se formavam espontaneamente com dois, três ou, no máximo, quatro componentes. Usavam cadernos e alguns levavam livros da biblioteca da universidade ou de sua propriedade. Os grupos não eram rígidos tendo em vista que queríamos estimular a argumentação e, em virtude dessa flexibilidade, durante o processo alguns acadêmicos se deslocavam para outros grupos para observar a técnica utilizada e trazer para discutir no seu grupo. Quando um grupo terminava a tarefa ele anunciava o resultado para classe e os grupos que tinham encontrado outros resultados questionavam produzindo uma troca coletiva de idéias. Muitas vezes se ouvia alguém dizer “fizemos diferente e deu o mesmo resultado”, indicando que a tarefa estava concluída. A técnica adotada pelo pesquisador para arrematar consistia em pedir que um(a) voluntário(a) viesse ao quadro expor e justificar a técnica do grupo. A condição era que cada passo deveria ser justificado e poderia ser questionado ou complementado por qualquer elemento do mesmo grupo ou de outro grupo.

O ambiente de trabalho foi favorável pois, exceto uma única vez, todas as observações foram feitas de forma respeitosa e com a intenção de colaborar ou de entender o processo. A única exceção está relatada na análise de uma das tarefas propostas. O que ocorreu com frequência foi de outro grupo ter utilizado outra técnica ou a mesma técnica porém ter trocado a ordem de algum passo ou ainda ter substituído um dos passos por outro. Eles diziam ter feito de modo diferente e queriam submeter à apreciação da classe também.

Uma tentativa de adotar essa técnica no ano anterior (2008) enquanto realizávamos o “projeto piloto” trouxe poucos resultados tendo em vista a intimidação dos acadêmicos diante da máquina fotográfica e da aproximação do professor enquanto trabalhavam em grupo. As tentativas de fazer anotações enquanto discutiam entre si a resolução de alguma tarefa também produziam uma suspensão dos trabalhos para saber o que o professor estaria anotando. Queriam saber se o professor anotava os erros ou os acertos.

Neste ano de 2009 procedemos a uma mudança na estratégia. Desde o primeiro dia de aula nos apresentamos como um professor de matemática que tem “mania” de fotografar. Começamos por “banalizar” a fotografia. Fotografávamos a classe como um todo e coisas comuns como a própria escrita do professor no quadro e, dessa forma, fomos acostumando os acadêmicos com o *flash*. De igual modo, de vez em quando, aproveitávamos alguma fala de um acadêmico para dizer: “isso vai para o meu caderno, gosto de anotar as falas importantes”. Enfatizamos que fazer matemática inclui usar processos já institucionalizados, reconhecidos como válidos pela comunidade acadêmica, mas também inclui desbravar caminhos, buscar técnicas alternativas, construir uma nova técnica. Toda nova técnica para resolver uma mesma tarefa será igualmente válida se for devidamente justificada com base na teoria. No nosso caso a teoria seria composta pelas definições, axiomas, teoremas, propriedades conhecidas e outras propriedades que fôssemos descobrindo durante o processo. Em março, quando começamos as sessões de pesquisa (as aulas tiveram início em fevereiro), não havia muita intimidação diante das máquinas e muitos acadêmicos começavam perder o medo de expor. Após cada sessão o tema era retomado e os erros de notação e conceituais erram corrigidos.

Nos dois anos (2008 e 2009) tivemos o cuidado de esclarecer que estávamos também pesquisando e que para isso precisávamos da autorização deles, por escrito, para uso desse material para fins educacionais. A autorização foi concedida (Ver anexo A).

6.3 A Primeira Sessão: as Tarefas

Nos parágrafos seguintes analisamos as tarefas que foram propostas aos acadêmicos, as técnicas por eles utilizadas na resolução das mesmas e as justificativas ou elementos tecnológicos envolvidos no processo.

Fizemos a modelagem dos procedimentos na perspectiva da TAD para facilitar a visualização e a análise.

Em alguns casos a tarefa foi proposta com antecedência de uma semana para ser resolvida em casa. Na aula seguinte pedíamos que quem havia resolvido circulasse pelos grupos procurando ajudar os que não haviam conseguido. Como as tarefas propostas sempre exigiam explicações e justificativas a intenção era que houvesse amplo exercício da argumentação. Cientes de que quem viesse ao quadro explicaria e daria um encadeamento lógico ao processo o debate nos grupos era intenso.

Em outras oportunidades a tarefa era proposta na hora e concedido um tempo maior para a resolução. Nesses casos a movimentação entre os grupos era mais intensa.

Do meu diário de bordo (DB de 12/3/2009), primeira sessão, tomo essas anotações:

> Neste dia todas as atividades envolviam retas paralelas cortadas por uma transversal. Há um acadêmico bem falante na classe que sempre está disposto a ir ao quadro. Escreve pouco e gesticula bastante. Mesmo no trabalho em dupla teve dificuldade em escrever. Explicava, gesticulava para a colega dando a entender que sabia o que devia ser feito mas se mostrava inseguro quanto a registrar. O registro foi feito pela colega.
> Os acadêmicos, na maioria das vezes, recorreram à triangulação da figura para resolver a tarefa proposta. Eles assumem que a soma dos ângulos

> internos do triângulo é 180°. Nesse dia vários acadêmicos foram ao quadro e procuravam por diversas maneiras de resolver a mesma tarefa. Cada um procurando mostrar que a sua técnica também funcionava.
> Foram feitas várias atividades no quadro com a participação dos acadêmicos e após o intervalo [das aulas[39]], por um período de, aproximadamente, 30 minutos, foi proposta uma atividade escrita para ser desenvolvida em dupla [demonstrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes]. Durante essa atividade verificou-se a ânsia por encontrar um modelo pronto. A consulta foi o primeiro procedimento da maioria das duplas [esperavam encontrar um exemplo resolvido] e também fazer o rascunho para depois passar a limpo. Começou nesse dia a liberdade da classe em opinar. Um número cada vez mais crescente de acadêmicos começou a opinar depois da metade da sessão (SALES, 2009).

6.3.1 Tipo deTarefas T_1 - Ângulos e Paralelas

Várias atividades envolvendo retas paralelas cortadas por retas transversais foram propostas. Estávamos inseridos no estudo desse tema e haviam sido desenvolvidas atividades envolvendo os conceitos de ângulos, medidas de ângulo, classificação de ângulos com relação às medidas (agudo, reto obtuso, complementar e suplementar) identificação de posições relativas entre si e em relação a retas paralelas (consecutivos, adjacentes, colaterais, alternos, etc.), retas coplanares e não coplanares, paralelismo e perpendicularismo. Nossos objetos matemáticos eram ângulos e retas e suas respectivas posições relativas e classificações. Estávamos prontos para iniciar atividades que envolviam estudos comparativos entre ângulos levando em conta suas posições e medidas. Estudos que envolviam argumentos justificatórios e explicativos.

Começamos propondo tarefas cujas resoluções requeriam que se estabelecessem relações entre esses objetos matemáticos recentemente estudados e suas propriedades. Propriedades que precisavam ser estabelecidas para aqueles acadêmicos e que poderiam ser estabelecidos a partir daqueles estudos prévios por meio da manipulação daqueles objetos estudados. Era tarefas rotineiras, se considerarmos como rotina o que é frequentemente encontrado nos livros didáticos ou nos programas de ensino.

---
[39] Após duas horas de aula há, regularmente, um intervalo de 10 minutos.

6.3.1.1 Primeira tarefa (t_1)- Ângulos opostos pelo vértice

A tarefa de determinar a congruência entre ângulos opostos pelo vértice, no contexto em que trabalhamos, pertence ao tipo de tarefas em que está envolvida a determinação dos ângulos constituídos por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

A tarefa (t_1) consistiu em provar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes e foi assim proposta.

A folha entregue era composta por três quadros: um com o enunciado (fig. 31), outro com o desenho (fig. 32) e outro para os rascunhos e a resposta.

> Na figura abaixo temos que *r* e *s* são paralelas (*r//s*) e *t* é transversal. Os ângulos x e y são opostos pelo vértice (opv). **Afirma-se que "ângulos opostos pelo vértice são congruentes", isto é, têm a mesma medida.**
>
> *Será que essa afirmação é verdadeira? Por quê?*
>
> Deixem resgitrados os esboços que fizerem e as explicações que escreverem. Usem caneta e não borrem nunhum risco ou palavra que fizerem/escreverem mesmo que julguem errados. Podem usar também o verso da folha e, se fizerem rascunho em outra folha, entreguem junto.

Figura 31-Enunciado da tarefa t_1

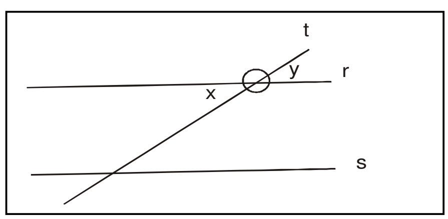


Figura 32-Figura que compunha a tarefa t_1

Os conceitos de congruência e ângulos opostos pelo vértice não tinham sido objetos de estudo até então. A técnica que os livros didáticos apresentam, e estamos chamando de canônica porque, supostamente, todos conhecem, consiste em eleger um suplementar comum aos dois ângulos e constatar que se ambos têm o mesmo suplementar então são congruentes.

As técnicas utilizadas nas respostas certas apresentadas pelos acadêmicos podem ser agrupadas em duas categorias, com se vê a seguir.

Resposta nº 1 (fig. 33).

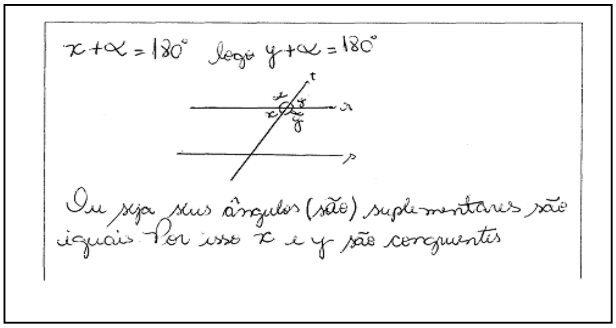


Figura 33-Técnica τ_1 para provar a congruência de o.p.v. (t_1)

Esta é a técnica canônica. A solução foi apresentada pela dupla que no DB foi identificada como sendo composta pelo acadêmico que gesticulava bastante e procurava convencer a colega que estava encarregada de registrar. O segundo y que aparece na figura deve ter sido erro de registro ou mal entendido, uma vez que quem falava não escrevia.

Descrição da técnica:

Técnica τ	**Elementos tecnológicos**
Passo 1. Identificar o suplementar de x denominando de α.	Ângulos adjacentes apoiados sobre uma mesma reta são suplementares.
Passo 2. Identificar esse suplementar de x como também suplementar de y.	O mesmo do anterior.
Passo 3. Concluir que se dois ângulos têm o mesmo suplementar então são congruentes.	Houve uma aplicação da lei do cancelamento de uma igualdade entre duas somas.

A resposta nº 2 (fig. 34) parte de um raciocínio diferente. A dupla recorre à construção de paralelas e triângulos.

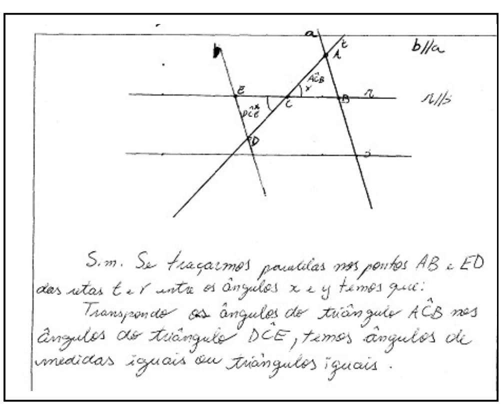


Figura 34-Técnica τ_2 para provar a congruência de o.p.v. (t_1)

Como concluíram que os ângulos são congruentes e que os triângulos também são congruentes? O traçado de paralelas supostamente equidistantes de um mesmo ponto (ponto C) produziu a impressão de triângulos congruentes. A falta de convivência em um ambiente de argumentação produziu uma argumentação folclórica, com base na "evidência". Faltava à dupla o domínio de outras propriedades geométricas que ainda seriam trabalhadas: a congruência de ângulos alternos internos e soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Com o domínio dessas propriedades poderiam ter demonstrado conforme fizemos no capítulo V. As retas nem precisariam ser simétricas em relação ao vértice dos ângulos. Faltaram elementos teóricos para produzir um argumento tecnológico e conduzir uma técnica.

Descrição da técnica:

Técnica τ_2	**Elementos tecnológicos**
Passo 1. Traçar paralelas equidistantes de um ponto (no caso, o ponto C).	Simetria.
Passo 2. Produzir dois triângulos supostamente congruentes.	As medidas dos segmentos que unem um ponto fixo sobre o eixo de simetria entre duas retas paralelas e pontos correspondentes dessas paralelas são iguais.
Passo 3. Concluir que se os dois ângulos são congruentes então os ângulos correspondentes são congruentes.	Se duas figuras são congruentes então seus elementos se sobrepõem.

Essa técnica está correta, mas a tecnologia contém alguns elementos frágeis. Um deles consiste em concluir com base em uma constatação visual. Faltou o processo analítico mas houve um indução intuitiva (BRASIL, 2007).

A resposta de nº 3 (fig. 35) traz um argumento baseado na evidência e em casos particulares mas contém um embrião de generalização. Quando afirmaram que as medidas que sugerem são apenas exemplos evidenciam ter entendido a generalidade mas faltar-lhes o domínio da linguagem algébrica (serve para um ângulo de 80º e serve também para um ângulo de 90º). Perceberam que os dois suplementares do mesmo ângulo são congruentes e como esses suplementares são o.p.v. e são congruentes estava provado o que se queria provar, porém para outros dois ângulos. Concluíram que independente das medidas dos ângulos essa relação permanece válida. Tal como no caso anterior podemos afirmar que como técnica o argumento está correto e como tecnologia ficou no nível empírico.

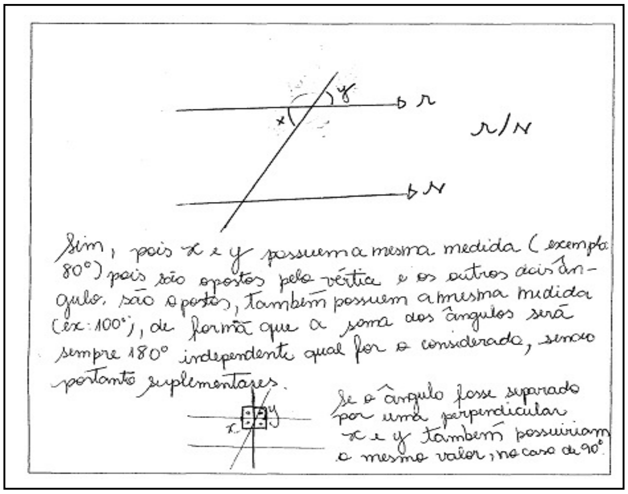


Figura 35-Técnica τ_3 para provar a congruência de opv (t_1)

As técnicas τ_1 e τ_3 pertencem a uma mesma categoria. Somente as tecnologias foram diferentes. A técnica τ_2 pertence a outra categoria e foi um caso único. De igual modo muitas outras técnicas apresentadas pelas diversas duplas pertencem a uma ou outras dessas duas categorias com pequenas variações nos registros geométricos, nos registros de língua materna e nos registros algébricos. A tecnologia variou do empirismo ou folclórico ("se são o.p.v. então são congruentes") até os casos em que, como na resposta nº 1, tem-se quase uma demonstração. Faltou o ritual de definir hipótese e tese. Em todos os casos procuraram explicitar as regras de inferência e nas respostas de números 1 e 2 houve evolução do registro gestual para o registro geométrico e, nos 3 casos, do registro oral para o registro na língua materna.

Ficou evidente uma praxeologia a partir dos vários exemplos de embriões da mesma e a possibilidade de outra praxeologia também com alguns embriões. A técnica utilizada no primeiro caso foi a mesma utilizada por Lacroix (1808) e Legendre (1817). Parece ser a mais simples e mais direta.

No segundo caso há uma inovação e em todos eles percebe-se a visão da interdependência dos fatores. No terceiro caso há um equívoco de registro: onde deveria constar r//s consta r/s.

Nos casos 1 e 3 o **Esquema de Toulmin** é único.

Dados: duas paralelas cortadas por uma transversal.

Conclusão: os angulos o.p.v. formados pela transversal com qualquer uma das paralelas são congruentes.

Garantia: ângulos adjacentes apoiados sobre uma mesma reta são suplementares.

Refutação: não há refutação para este argumento.

Suporte: dois ângulos opostos pelo vértice têm um ângulo suplementar comum.

Para o segundo caso temos um segundo modelo do **Esquema de Toulmin.**

Dados: duas paralelas cortadas por uma transversal.

Conclusão: os angulos o.p.v. formados pela transversal com qualquer uma das paralelas são congruentes.

Garantia: dois triângulos com um vértice comum sobre o ponto médio do segmento perpendicular a duas retas paralelas e que têm os dois lados que partem desse vértice com extremidades em pontos correspondentes dessas duas retas, são congruentes

Refutação: se o vértice comum não estiver sobre o ponto médio do segmento perpendicular.

Suporte: triângulos congruentes têm ângulos correspondentes congruentes.

No caso de ocorrer a refutação e no caso do vértice comum estar sobre o referido segmento poder-se-ia encontrar a solução pela propriedade dos ângulos alternos internos, isto é, levando-se em conta ângulos alternos internos.

As atividades desenvolvidas anteriormente haviam proporcionado aos acadêmicos a vivência com esses objetos matemáticos. Para alguns era o momento didático do primeiro encontro e para outros era o momento do reencontro. Agora estavam vivenciando os momentos de transformar alguns daqueles objetos em técnicas e tecnologias. E até mesmo discutir ou apenas vivenciar novas técnicas e de construir um entorno tecnológico para elas.

Procedendo a uma avaliação das técnicas e das tecnologias (CHEVALLARD, 1999) podemos dizer que uma das técnicas foi apresentada completa por uma dupla enquanto, por outras duplas não expostas aqui, foi apenas esboçada. A outra técnica foi apenas esboçada. A primeira é fácil de utilizar e a outra nem tanto por requerer mais domínio teórico. Ambas resolvem plenamente a tarefa e são inteligíveis. Quanto à tecnologia tivemos desde enunciados folclóricos até justificações. A primeira é parecida ou igual à forma canônica em matemática.

A dupla que apresentou a terceira técnica fez um uso maior da indução. Serve para 80º, serve para 90º então deve servir para qualquer ângulo. Na primeira técnica a dedução ficou mais evidente e na segunda técnica, tendo em vista que o tema que estava sendo estudado era o paralelismo a dupla inferiu que estava no traçado de paralelas a possível solução. Outras abduções foram sendo processadas: se as paralelas são simétricas em relação a um ponto então os pares de triângulos formados com um vértice nesse ponto são congruentes. Tudo isso em um estágio embrionário e não formalizado, evidentemente.

Análise da organização didática

Conforme já visto uma organização didática ou de estudo é uma referência a uma forma de organizar atividades matemáticas visando o envolvimento do sujeito em um processo de estudo em que se vivenciam diversos momentos didáticos na resolução de um tipo de tarefa.

A tarefa foi proposta em um contexto em que se estudavam retas paralelas cortadas por uma transversal, a identificação e classificação dos ângulos formados nessa relação entre as retas, as propriedades desses ângulos e as relações que se estabelece entre eles. Foi pensada visando proporcionar a oportunidade do embate de idéias, a construção de técnicas de resolução desse tipo de tarefa e de um entorno tecnológico mantendo em vista que a pesquisa tinha por objetivo **analisar a argumentação** presente na atividade de estudo da matemática pelo acadêmico.

As atividades desenvolvidas deviam ser tais que contribuíssem para o cumprimento do currículo da disciplina e, dentre elas escolher, previamente, algumas que permitissem analisar as ações dos acadêmicos.

Estamos partindo do pressuposto de que a prática docente difere da prática dos acadêmicos. O professor norteia a sua prática pelos livros, pelas ações institucionalizadas, pelo compromisso de conduzir o aluno pelo caminho já percorrido por outros.

Nesse caso em particular, na resolução dessa tarefa, os acadêmicos já estavam vivenciando o momento didático (MD) do primeiro encontro com tarefas envolvendo paralelas, transversais e ângulos. Agora a perspectiva era conduzir um trabalho que envolvia a produção de técnicas e a vivência da construção de entornos tecnológicos.

O fato de sempre perguntarem se poderiam resolver de outra forma indica que tinham consciência de que há técnicas institucionalizadas e que ao final de uma atividade sempre se procura pela institucionalização da técnica produzida.

6.3.1.2 Segunda tarefa (t_2)–determinar ângulo entre retas paralelas

Determinar o valor de um ângulo cujas retas suportes de seus lados interceptam duas retas paralelas, sendo fornecidos a representação gráfica e os valores de dois ângulos formados pelas paralelas e semirretas transversais.

A mesma tarefa foi resolvida três vezes por acadêmicos diferentes e usando técnicas diferentes. Não houve intervalo e nem discussão entre uma e outra resolução porque tão logo um terminava o outro dizia: "resolvi de forma diferente, posso mostrar?". Somente após as três resoluções terem sido apresentadas houve a discussão embora algumas tivessem que ser refeitas por terem sido apagadas para dar lugar à outra. As fotos foram obtidas no momento em que cada uma era concluída pelo acadêmico que a executou.

6.3.1.2.1 A tarefa t_2

"Calcule o valor de x, sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas." (GONÇALVES JUNIOR, 1995, p.55). Ver fig. 36.

A figura foi esboçada no quadro semelhantemente à que foi proposta pelo autor da atividade.

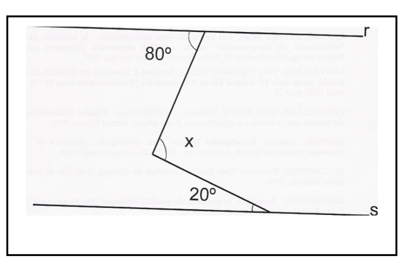


Figura 36-Figura integrante da segunda tarefa (t_2)

A resolução da tarefa sugerida pelo autor é a técnica utilizada em todos os livros que consultamos e que apresentam tarefas desse tipo, portanto, em nossa classificação é a técnica canônica.

Descrição da técnica canônica

Técnica τ_c	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Secionar o ângulo cuja medida se deseja conhecer com uma paralela às retas *r* e *s*.	Quinto postulado de Euclides.
Passo 2. Determinar o ângulo alterno interno em relação ao ângulo formado com a reta *s*.	Ângulos alternos internos
Passo 3. Determinar o ângulo alterno interno em relação ao ângulo formado com a reta *r*.	O mesmo do passo anterior.
Passo 4. Fazer a soma dos dois ângulos determinado nos passos anteriores igual ao ângulo procurado.	Equação do primeiro grau.
Passo 5. Resolver a equação e determinar o valor de x.	O mesmo do passo anterior.

Supostamente a técnica canônica é a mais econômica, mais evidente e por essa razão esperava-se que fosse ela a adotada, pelo menos, por uma parte dos acadêmicos. Não é o que foi constatado.

Registro e descrição da técnica dos acadêmicos

A figura 37 é uma foto da solução apresentada pelo primeiro acadêmico. Sempre que um acadêmico se apresentava para resolver ele representava um grupo que o elegia para isso.

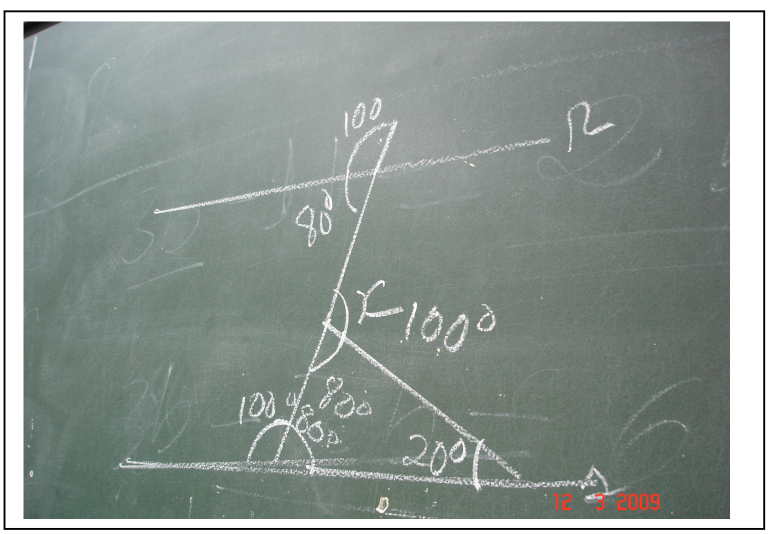


Figura 37– Primeira técnica τ_1 da resolução da tarefa

Descrição da técnica

Técnica τ_1	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Prolongamento do segmento que parte da reta *r*, sobre a semirreta suporte, até atingir a reta *s*, formando um triângulo.	O conhecimento de que um segmento de reta pode ser prolongado sobre a reta suporte do mesmo, sem restrição. Um dos postulados de Euclides.
Passo 2. Identificar o ângulo alterno interno com o ângulo formado entre a semirreta, cujo segmento sobre ela foi prolongado, e a reta *r*. Esse ângulo é interno ao triângulo.	Ângulos alternos internos.
Passo 3. Determinar o valor do outro ângulo do triângulo sabendo já o valor de dois dos seus ângulos: um dado no problema e o outro determinado por construção pelas propriedades do paralelismo.	A soma dos ângulos internos de triangulo qualquer é 180º.
Passo 4. Identificar esse ângulo (determinado no passo anterior) do triângulo como suplementar do ângulo procurado.	Ângulos suplementares.
Passo 5. Escrever a equação soma dos dois ângulos suplementares igualando-a a 180º.	Equação do primeiro grau.
Passo 6. Resolver a equação.	O mesmo do passo anterior.
Passo 7. Registrar e anunciar o resultado.	Técnica não matemática.

Descrição e Discussão da técnica

O acadêmico foi ao quadro e, explicando verbalmente e gesticulando, foi colocando os valores. Primeiro prolongou o segmento que partiu da reta *r* até que ele atingisse a reta *s* completando o triângulo (registro geométrico). Em segundo lugar marcou o valor 80º no ângulo que esse prolongamento faz com a reta *s* (registro numérico). Partindo do pressuposto de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º (assunto não abordado até então nas atividades em classe[40]) ele marcou o outro ângulo do triângulo como 80º e concluiu que o ângulo com valor de *x* e o ângulo de 80º eram suplementares (registro verbal, gestual, geométrico e numérico). Registrou numericamente o resultado encontrado para o valor de x.

Fez ainda outros registros verbais, gestuais e numéricos para acrescentar os valores dos dois ângulos correspondentes que mediam 100º. Procurou com isso mostrar que a figura permitia explorar outras propriedades que a tarefa não exigia. Os registros gestuais são muitos esclarecedores mas têm uma natureza transitória e escapam ao registro do pesquisador.

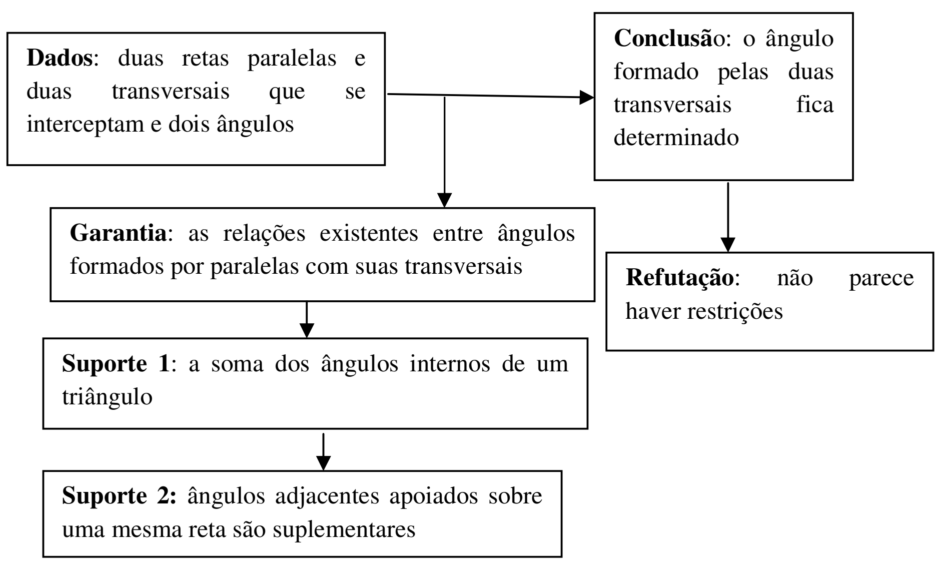
[40] Revelou-se mais tarde que era um conhecimento adquirido por “tradição”.

Estava sendo utilizada uma organização didática (OD) que permite a utilização de afirmações verdadeiras, no âmbito da geometria euclidiana, mesmo que ainda não demonstradas para o acadêmico. Não é uma prática nova. Ela está presente em muitas atividades docentes e é praticada pelos matemáticos, segundo Bicudo (1999). Ao assumir publicamente o seu exercício Bicudo abriu uma lareira que nos permite incorporar essa prática como parte da nossa organização didática.

A técnica utilizada tem força porque o argumento tecnológico não é folclórico. O critério utilizado é compatível. No entanto há também fragilidades: a) os registros não evoluíram da oralidade e do gestual para a escrita algébrica e na língua materna; b) não há sistematização e c) a tecnologia é a "tradição". A evolução dessa argumentação para a demonstração requer maior vivência com a técnica e com a tecnologia. O raciocínio usado foi o dedutivo.

A estrutura do argumento na perspectiva de Toulmin

Na perspectiva de Toulmin, que não se restringe à matemática, todo argumento tem as suas limitações e deve prevê-las. No entanto, quando fazemos um recorte encontramos casos de argumentos irrefutáveis nos limites da área considerada.



Uma segunda técnica foi apresentada por outro grupo de acadêmicos.

Descrição e análise da técnica apresentada pelo segundo grupo de acadêmicos

A argumentação explicativa desse grupo difere da técnica do primeiro por recorrer à construção de uma reta perpendicular formando triângulos retângulos.

A figura 38 é uma foto da solução apresentada pelo segundo grupo.

Figura 38– τ_2 usada na resolução da tarefa t_2

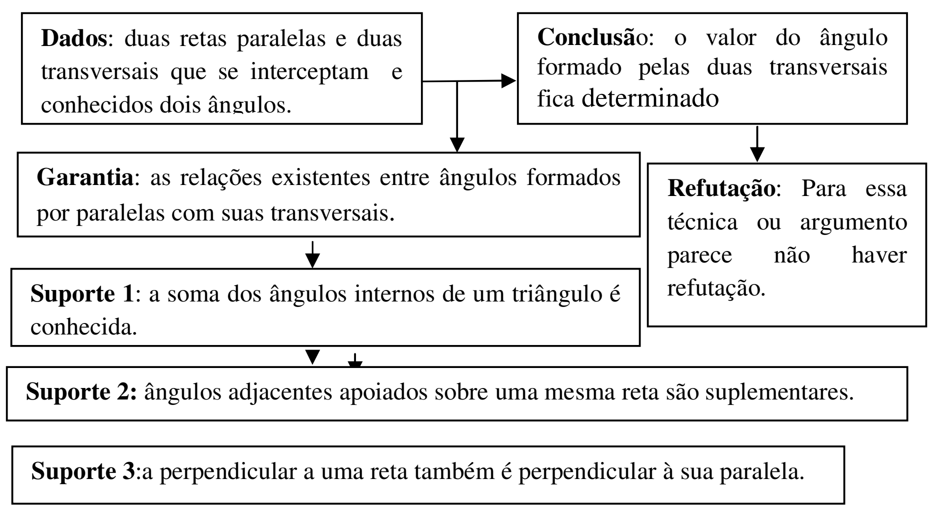
Descrição da técnica

Técnica τ_2	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Traçar a reta perpendicular às retas *r* e *s*, passando pelo vértice do ângulo desconhecido formando dois triângulos.	A perpendicular a uma reta será perpendicular a todas as retas paralelas a essa reta.
Passo 2. Marcar os ângulos retos formados pela reta perpendicular com as retas *r* e *s*.	Todos os ângulos retos são iguais. Postulado de Euclides.
Passo 3. Identificar e marcar, em cada triângulo, o ângulo complementar do ângulo dado no enunciado do problema.	A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180º e o complemento de um ângulo.
Passo 4. Como são dois triângulos foi preciso somar os valores dos dois complementares e identificar essa soma como suplementar do ângulo procurado	Soma de ângulos. Ângulos suplementares.
Passo 5. Montar a equação envolvendo a soma obtida no passo nº 4 e o ângulo de valor desconhecido.	Equação do primeiro grau.
Passo 6. Resolver a equação.	O mesmo do passo anterior.
Passo 7. Registrar o resultado.	Técnica não matemática.

Discussão da técnica

Os objetos matemáticos envolvidos são os mesmos da técnica t_1 acrescido do conceito de perpendicular. Os elementos procedimentais foram diferentes: traçar perpendicular e determinar ângulos complementares e suplementares. Os registros não diferem significativamente dos utilizados na técnica anterior e percebe-se que o ângulo de 20º está registrado apenas como 20. Alguns acadêmicos ainda não tinham se dado conta da importância dos aspectos formais. É um detalhe que teve que ser trabalhado com uma certa insistência. Nos dois casos vários registros gestuais foram utilizados para suprir dificuldades de vocabulário e para ilustrar passos não registrados de outra forma. Neste segundo caso não houve registros desnecessários. Também não houve preocupação com a sistematização. Como no caso anterior a fragilidade está na transitoriedade dos registros auxiliares que se concentraram nos gestuais e orais. A técnica é pertinente, não é folclórica, está em consonância com o discurso matemático e é fácil de utilizar. Tem alcance satisfatório, satisfaz todas as condições de emprego e é inteligível. É mais complexa do que a técnica anterior: envolve mais objetos ostensivos e não-ostensivos.

Estrutura do argumento na perspectiva de Toulmin



Terceira técnica apresentada

Uma terceira técnica foi utilizada na resolução da mesma tarefa. Embora essa terceira técnica consista também na construção de um triângulo ele é não retângulo e a organização dos objetos difere significativamente das técnicas anteriores.

O registro da técnica

A figura 39 é a foto da utilização da terceira técnica dos acadêmicos.

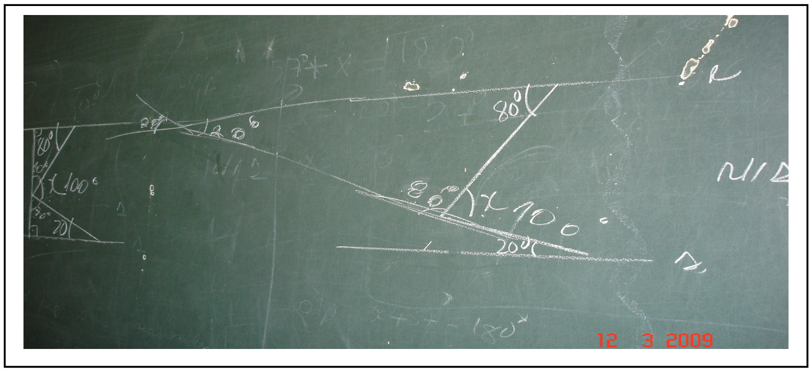


Figura 39- τ_3 utilizada na resolução da tarefa t_2.

Descrição da terceira técnica

Técnica τ_3	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Prolongamento do segmento que parte da reta *s* até atingir a reta *r*, formando um triângulo.	O conhecimento de que um segmento de reta pode ser prolongado sobre a reta suporte do mesmo, sem restrição. Um dos postulados de Euclides.
Passo 2. Identificar o ângulo correspondente ao ângulo formado com a reta *s*. Esse ângulo é externo ao triângulo.	Ângulos correspondentes.
Passo 3. Determinar o ângulo oposto pelo vértice ao ângulo encontrado no passo anterior. Esse ângulo oposto é interno ao triângulo.	Ângulos opostos pelo vértice.
Passo 4. Determinar o terceiro ângulo sendo conhecidos os outros dois.	A soma dos ângulos internos de triangulo qualquer é 180º.
Passo 5. Identificar esse terceiro ângulo determinado no passo anterior como suplementar do ângulo desconhecido.	Ângulos suplementares.
Passo 6. Montar a equação envolvendo o ângulo desconhecido com o seu suplementar.	Equação do primeiro grau.
Passo 7. Resolver a equação.	Equação do primeiro grau.
Passo 8. Anunciar o resultado.	Técnica não matemática

Discussão da técnica

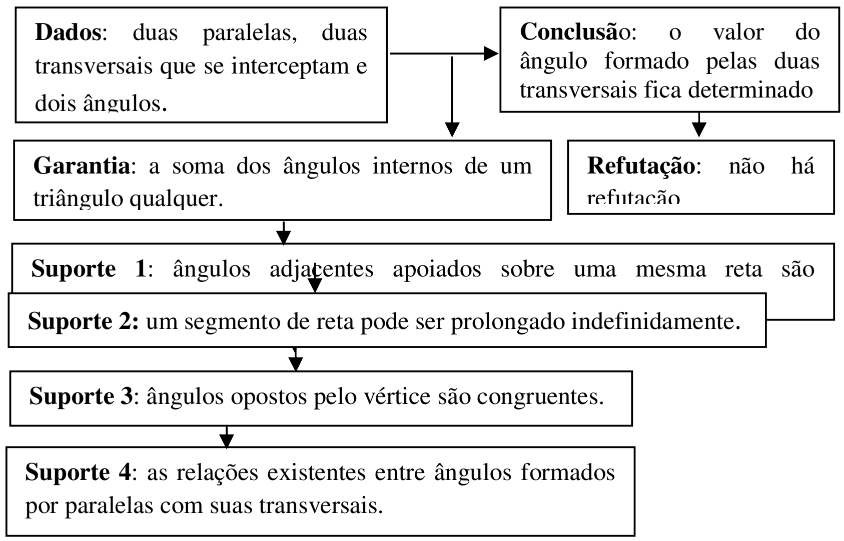
Esta técnica não difere significativamente da utilizada pelo primeiro grupo. A diferença se reduz a um aspecto que foi descrito no passo nº 3. Ao invés de ir direto para o ângulo alterno interno esse acadêmico fez um "percurso" mais extenso passando primeiro pelo ângulo correspondente, externo ao triângulo. Ele chegou ao ângulo interno por meio do oposto pelo vértice e não pelo alterno interno como foi feito na técnica anterior. O "atalho" possível não foi percebido.

Como nos casos anteriores, isto é, no desenvolvimento das técnicas aqui também todo suporte teórico está centrado nos postulados e teoremas da geometria plana quando tratada na perspectiva euclidiana. Também, a rigor, não se pode dizer que ocorreu uma demonstração em nenhum dos casos analisados. Dada a particularidade com que foi tratada a tarefa o que correu, de fato, foi uma prova. A prova contém todos os elementos da demonstração, exceto a falta de generalidade e o fato de ter presentes outros registros, além dos geométricos e algébricos. Os demais registros, que não aparecem, foram verbais e gestuais. Registros coerentes com o que o acadêmico pretendia mostrar, porém resumidos como se tudo estivesse muito óbvio. Além disso, transitórios.

Nos casos analisados a particularidade fica evidenciada pelos registros numéricos e pelas justificativas verbais que substituíram os usuais registros na língua materna. O raciocínio, como nos outros casos, seguiu um encadeamento lógico igual ao que ocorre em uma demonstração. Entretanto, o enunciado da tarefa ao propor que se ache o valor de um ângulo específico e não que prove a existência de determinada relação com outros objetos, faz com que a argumentação não adquira o status de prova ou demonstração, mas mostra que é possível evoluir para esse estágio. Houve também a falta de registros algébricos provavelmente porque a tarefa não induzia a isso, não evidenciava a sua necessidade. Estávamos resolvendo tarefas particulares e a necessidade de evidenciar a idéia de generalidade não foi sentida. Percebe-se também a ausência de rigor nos registros e a ausência de justificativas na língua materna ou com alguma simbologia apropriada. No entanto, o processo de uma argumentação que se direciona para o rigor de uma demonstração fica evidente, o caminho está sendo percorrido.

Os objetos matemáticos são produtos sociais e os registros de linguagem são convencionais. Dessa forma, o domínio desses registros de linguagem e a manipulação dos objetos ostensivos, que contribuem para a compreensão dos objetos não-ostensivos, requerem o desenvolvimento de múltiplas atividades de estudos didaticamente organizadas para esse fim. Os acadêmicos estavam no início de uma trajetória e alguns revelariam, mais tarde: “eu não sabia nada de geometria, tudo o que sei aprendi aqui”.

Estrutura argumentativa da terceira técnica segundo o Esquema de Toulmin



Discussão das três técnicas

A prática adotada nos três casos consistiu em construir triângulos tendo por base o “postulado” de que a soma dos seus ângulos internos é 180º. A técnica consistiu primeiramente em construir uma figura auxiliar, fazendo traçados de semirretas ou prolongamento de segmentos de retas sobre essas semirretas e o uso de registros verbais e gestuais que indicam os valores ou as relações existentes. Alguns registros resultam em um simples “pingo” do giz no ponto que se queria destacar da figura. As justificativas apresentadas verbalmente foram todas embasadas em afirmações verdadeiras e indicam que há um raciocínio lógico norteando essa prática. Falta apenas formalidade.

Há nessa prática a evidência de uma praxeologia em construção. Todas as tarefas desse mesmo tipo até agora resolvidas envolveram a triangulação e propriedades como o uso de ângulos alternos e prolongamento de um segmento, por exemplo. Determinados argumentos nos levam a admitir a existência de uma praxeologia diferente da canônica para resolver várias tarefas desse tipo.

Se compararmos as construções de praxeologias aqui apresentadas, exceto a canônica, veremos que os acadêmicos criam técnicas de resolução que diferem entre si em alguns detalhes importantes mas não, necessariamente, pela eficácia. Todas resolveram satisfatoriamente a tarefa.

O raciocínio predominante foi o dedutivo. A abdução se fez presente quando os acadêmicos inferiram que conhecendo os valores de um maior número de ângulos presentes, direta ou indiretamente, na figura é possível deduzir o valor do ângulo desconhecido. A triangulação, no nosso entender, segue esse raciocínio.

O resultado evidencia que os sujeitos podem produzir técnicas de resolução que os conduzirão, oportunamente, para a necessidade de uma sistematização, mas não, necessariamente, para uma única técnica.

Estávamos conseguindo conduzir os sujeitos à vivência de diversos momentos didáticos: o primeiro encontro com o problema (quando foram desafiados a resolver a tarefa), trabalhar e explorar técnicas nas diversas tentativas de resolução e a criação de um entorno teórico-tecnológico. No final de todas as apresentações foram discutidas as fragilidades de cada técnica, as limitações dos argumentos e registros utilizados, a validade de cada técnica. Enfim houve a institucionalização da técnica e da tecnologia. Não conseguimos até esse ponto levá-los a trabalhar com a técnica canônica.

Mas a técnica utilizada é pertinente e completa, de fácil utilização, resolve plenamente a tarefa proposta e é fácil de ser entendida. As justificações utilizadas são parecidas com as formas canônicas em matemática, são coerentes e foram utilizados muitos recursos dos tecnológicos disponíveis para eles.

Observa-se uma tendência: triangular a figura. Essa ação repetida indica a busca por determinados padrões. Se o que se quer determinar é medida de ângulo então a idéia é "encher" a figura de ângulos usando o triângulo como padrão porque é conhecida a soma dos seus ângulos internos. É o princípio da "exaustão" e pode se constituir em um praxeologia.

6.3.1.2.2 Tarefa t_3

Do meu diário de bordo (DB 17/3/2009) extraio as seguintes anotações:

> Estava planejado que no primeiro momento desta sessão discutiríamos as atividades deixadas e que possuíam um pouco mais de complexidade em relação às anteriores.
> Como nenhum acadêmico havia conseguido resolver coube ao professor o desafio de resolver usando somente conceitos de paralelismo [técnica canônica]. Depois disso surge a outra resolução onde o acadêmico recorre

> à técnica da soma dos ângulos internos de um quadrilátero. [...] Enfim todas as atividades são planejadas tendo em vista o desafio, a prova, o investimento de conhecimentos sobre paralelismo. [Como as atividades tinham sido anotadas na sessão anterior] um acadêmico passava os exercícios no quadro e os outros resolviam. De qualquer forma está se consolidando o hábito de argumentar, de explicar, de justificar (SALES, 2009).

Esta tarefa é uma evolução das tarefas apresentadas até então. Pensamos que não caberia colocá-la em outro tipo de tarefas porque a técnica canônica de resolução é a mesma: traçar paralelas e determinar ângulos alternos internos.

Determinar o valor de um ângulo sabendo que:

a) a reta suporte de seus lados intercepta duas retas paralelas;

b) a reta suporte do outro lado intercepta outra transversal;

c) que essa transversal, por sua vez, é interceptada por outra transversal;

d) que essa outra transversal forma ângulo com uma das paralelas.

e) são fornecidos a representação gráfica e os valores de três ângulos formados pelas paralelas e semirretas transversais.

Esta tarefa havia sido deixada para ser feita em casa e tinha o seguinte enunciado específico.

"Sabendo que r//s, calcule x em cada figura" (GONÇALVES JÚNIOR, 1995, p. 57). Ver fig. 40.

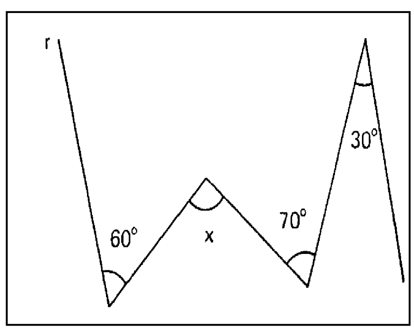


Figura 40–Terceira tarefa (t_3)

Para resolver esta tarefa usando as propriedades do paralelismo que vinham sendo estudadas bastaria que fossem traçadas duas retas paralelas a *r* e *s*, uma passando pelo vértice ângulo de 70º e a outra passando pelo ângulo cujo valor x se deseja determinar. Recorrendo-se ao conceito de ângulos alternos internos e à soma de ângulos obtém-se o valor de x. Técnica canônica.

Novamente a técnica canônica não foi a utilizada pelos acadêmicos. A praxeologia que se consolidava era a busca por constituir outros ângulos através da construção de triângulos ou quadriláteros. Nenhum desses objetos geométricos tinha sido estudado até então, em nossas sessões, e os acadêmicos que já haviam estudado um pouco de geometria na educação básica se destacavam na solução das tarefas. Traziam na bagagem cultural as informações de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Abduziam que, se nos triângulos a propriedade do triângulo equilátero pode ser estendida para todos os triângulos então a propriedade dos retângulos vale para todos os quadriláteros. Isto é, entenderam que se em um triângulo cujos ângulos são todos de 60º e cuja soma é 180º essa soma pode ser estendida para todos os triângulos independente das medidas dos seus ângulos, então a soma dos ângulos de um quadrilátero também será sempre 360º. Que elaboraram essa conjetura não é uma conjetura nossa, é uma revelação dos próprios acadêmicos.

> A inspiração abdutiva acontece em nós num lampejo. É um ato de *insight*, embora extremamente falível. É verdade que os elementos da hipótese estavam antes em nossa mente; mas é a idéia de associar o que nunca antes pensáramos em associar que faz lampejar a inspiração abdutiva em nós (PEIRCE, 1983, p. 51).

O processo de resolução apresentada pelo acadêmico (fig. 41)

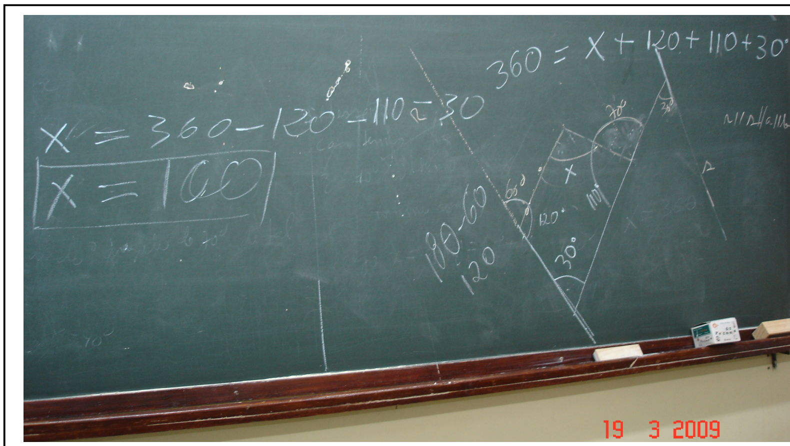


Figura 41–Resolução da terceira tarefa (t_3)

Descrição da técnica

Técnica τ	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Prolongamento, sobre a semirreta suporte, do segmento de reta que parte de uma das retas paralelas dadas até interceptar a outra reta paralela deixando o ângulo cujo valor é procurado no interior do quadrilátero.	O conhecimento de que um segmento de reta pode ser prolongado sobre a reta suporte do mesmo, sem restrição. Um dos postulados de Euclides.
Passo 2. Determinar o ângulo interno ao quadrilátero e que seja alterno interno com o ângulo que a semirreta forma com reta de origem.	Propriedades do paralelismo. Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 3. Determinar os ângulos suplementares dos outros ângulos dados no problema.	Ângulos suplementares.
Passo 4. Afirmar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º	A soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é igual a 360º. Conjetura.
Passo 5. Armar a equação envolvendo todos os ângulos desse quadrilátero	Equação do primeiro grau.
Passo 6. Resolver e equação.	O mesmo do passo anterior.
Passo 7. Anunciar o resultado.	Técnica não matemática.

Discussão da técnica

Embora os elementos teóricos, em todos os casos estudados até aqui, sejam sempre os mesmos (as propriedades do paralelismo) há neste caso elementos novos. Aparecem a figura do quadrilátero e a afirmação de que a soma dos seus ângulos internos é 360º. Estamos denominando essa afirmação de conjetura (dos acadêmicos) tendo em vista que o assunto não foi abordado em classe e os acadêmicos obtiveram essa informação por inferência, conforme se deduz das informações a seguir. Nem todos os acadêmicos haviam estudado geometria na educação básica ou, pelo menos, não se lembravam disso.

Esta tarefa parece ter trazido alguma dificuldade aos acadêmicos. Ninguém propôs solução e alguns disseram não ter conseguido resolver. Até esse instante todas as soluções incluím o triângulo e não viam, agora, como o triângulo poderiam ajudá-los. Para desencadear o processo, o professor resolveu a tarefa usando a técnica do paralelismo, ou técnica canônica, descrita acima.

Após anunciar o valor de x o acadêmico G perguntou se podia resolver de outro jeito. Ao receber resposta afirmativa foi ao quadro e apresentou a solução descrita. Um acadêmico sempre representava um grupo, mas neste caso parece ter sido uma ação individual.

Merece atenção a afirmação de que a soma dos seus ângulos internos é 360º. O seu silêncio anterior indica que havia incerteza, mas a sua proposta imediata de resolução é indicativo de que estava pronta. Inclusive ao começar desenvolver a técnica voltou ao caderno para confirmar se estava no caminho certo.

Ele aguardava uma informação que confirmasse a sua conjetura de que soma dos ângulos internos é realmente 360º. De onde teria provindo essa conjetura?

Sem dúvida proveio da observação das propriedades dos quadriláteros retangulares, porque quando lhe foi perguntado como sabia desse resultado respondeu apenas: "os ângulos internos de um retângulo somados dão 360º". Foi uma abdução.

Novos conhecimentos estavam sendo construídos, novas conjeturas elaboradas, novos conceitos sendo aplicados e as "habilidades complexas" (BRASIL, 2007, p. 23) estavam sendo desenvolvidas.

O momento didático mais marcante vivenciado aqui é o da exploração de técnicas. No entanto, também houve a construção de um entorno tecnológico ao avançar em relação às técnicas utilizadas anteriormente.

Os registros foram, predominantemente, geométricos, verbais e gestuais. A preocupação maior do acadêmico foi com a comunicação das idéias e não com o registro gráfico e formal. Estes sempre ficam reduzidos àqueles que são estritamente necessários. O hábito da escrita em língua materna durante uma aula matemática não é muito usual. Os registros verbais, durante a exposição da aula, são mais comuns. Os registros gestuais sempre entram em cena quando o vocabulário se mostra insuficiente ou quando se tem que apontar determinado ponto da figura ou transformação que a mesma tem que sofrer porém de difícil representação geométrica.

A fragilidade da "praxeologia" está na ausência de registros permanentes da tecnologia: algébrico e em língua materna. A técnica da manipulação dos objetos ostensivos satisfez as condições de emprego, é de fácil compreensão, pode ser aplicada a outros casos, foi completa e representa uma ampliação da técnica da triangulação.

Quanto à tecnologia pode-se afirmar que não teve enunciado e a justificações foram embasadas na teoria matemática, portanto, coerentes.

Estrutura do argumento na perspectiva de Toulmin

Dados: duas paralelas, três transversais que se interceptam e três dos ângulos, por elas, formados.

Conclusão: o valor do quarto ângulo fica determinado.

Garantia: soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º.

Refutação:se não houver paralelismo

Suporte 1: um segmento pode ser prolongado.

Suporte 2: ângulos adjacentes sobre uma mesma reta são suplementares.

As tarefas seguintes foram apresentadas como uma continuação dessa.

6.3.1.2.3 Tarefas t_4 e t_5

Determinar o valor de um ângulo cujas retas suporte de seus lados interceptam duas retas paralelas, sendo fornecidos a representação gráfica e os valores de dois ângulos formados pelas paralelas e as semirretas transversais.

Esta tarefa difere da anterior pelo fato de que naquela eram fornecidos os ângulos agudos formados entre as transversais e as paralelas. Desta vez, porém são fornecidos os ângulos obtusos.

Esta tarefa apresentava o seguinte enunciado: "Sabendo que r//s, calcule x em cada figura" (GONÇALVES JÚNIOR, 1995, p. 57).

Dentre as figuras que compunham o conjunto de tarefas propostas pelo autor escolhemos uma. Convém esclarecer que este é um dos livros constante na biblioteca e, portanto, poderia se tornar em um dos manuais de uso frequente. Era nossa intenção trabalhar com tarefas que de alguma forma poderão ser levadas para sala de aulas do ensino fundamental para não perdermos de vista a nossa intenção maior que é a formação de professores de matemática para a educação básica. A figura escolhida e que será exposta a seguir (fig. 42) consiste em duas retas paralelas identificadas por *r* e *s* e dois segmentos cujas semirretas suportes interceptam as duas paralelas e se interceptam na região interior a essas paralelas. Os ângulos formados com as paralelas são dados e o ângulo entre as duas transversais constitui a incógnita.

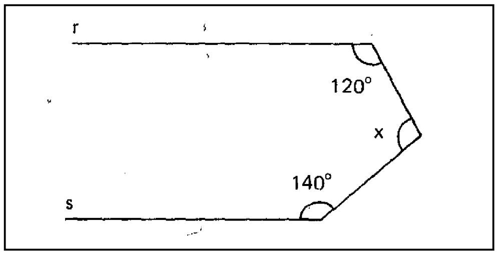


Figura 42-Terceira tarefa (t_4)

A tarefa foi proposta para ser resolvida extraclasse e que na próxima aula haveria uma discussão, nos grupos, sobre as soluções encontradas, as técnicas utilizadas e os argumentos usados para explicar. Todos os procedimentos deveriam ser justificados, visando convencer os pares.

Nesse caso ocorreu uma particularidade. A primeira tarefa dessa sessão seria a que denominamos de (t_4) provocou o aparecimento da quinta tarefa (t_5).

Resolução da tarefa

A técnica canônica é a mesma da tarefa t_2, mas o caminho seguido por alguns acadêmicos foi outro.

"Consideramos a soma dos três ângulos igual a 360º. Fizemos a conta 120º +140º + x = 360º e achamos o valor de x. Achamos que x=100º. Não sei se está certo." O registro gráfico apresentado foi apenas: 120º+140º+x =360º e x=100º. Os demais registros foram verbais.

Diante dessa afirmação o professor iniciou um discurso que não foi improvisado porque reflete o seu pensamento sobre o tema em pauta, mas que não estava previsto para aquele momento.

"Sim"- disse o professor, "tudo o que foi feito estará certo se provarmos que a soma desses três ângulos é 360º".

O professor explicou então não haver nenhum problema em fazer afirmações desse tipo desde que se tenha alguma informação confiável de que ela é correta. Se não temos essa informação confiável então precisamos provar, isto é, concluir por nós mesmos, utilizando uma técnica adequada e um argumento racional, se ela é correta ou não. Se essa afirmação que 120º+140º+x =360 for correta então a conclusão a que chegaram estará correta.

Esse discurso explicativo fez com que a tarefa t_4 se transformasse em t_5.

A tarefa agora (t_5) consistiu em provar que a soma daqueles três ângulos é 360º. Após algum tempo de trabalho coletivo um acadêmico anunciou que o acadêmico “A consegue provar”.

A figura 43 é a foto da técnica apresentada pelo acadêmico A e que provou ser 360º a soma dos três ângulos.

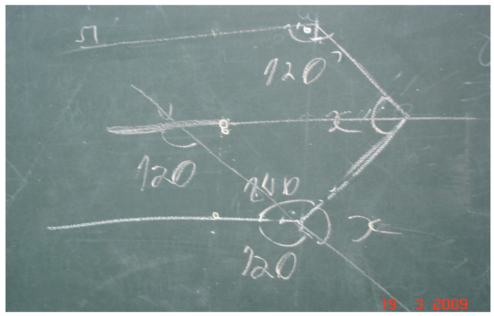


Figura 43–Resolução da tarefa t_5

Descrição da técnica

Técnica τ	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Traçar, pelo vértice do ângulo cujo valor se quer determinar, uma reta *u* paralela às retas *r* e *s*.	Por um ponto fora de uma reta é possível traçar e uma e só uma paralela a ela. Quinto postulado de Euclides.
Passo 2. Pelo vértice de um dos ângulos dados (no caso foi escolhido o de 140º) traçar uma reta t paralela à transversal que forma o outro ângulo conhecido.	O mesmo do anterior.
Passo 3. Determinar, na intersecção dessa reta t com as duas paralelas, os ângulos correspondentes aos ângulos dados e ao ângulo procurado.	Ângulos alternos internos, alternos externos e ângulos correspondentes.
Passo 4. Agrupar esses ângulos correspondentes em torno da intersecção da reta t com a reta com a qual estava formado o ângulo por onde iniciou o traçado de t (no caso a reta *s* e o ângulo de 140º).	Propriedades do paralelismo. Ângulos correspondentes. Soma geométrica de ângulos.

Discussão da técnica

Por ser um caso isolado não se pode afirmar que houve uma praxeologia, mas pode-se perceber que houve uma evolução no processo argumentativo. Nesse caso tivemos uma atividade dinâmica em que uma técnica e uma tecnologia geraram um novo problema e apelou para novos resultados tecnológicos. Esses resultados fortaleceram a técnica apresentada e produziram novos resultados (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001). Escrevemos (cap.III) ser a construção da demonstração o que melhor caracteriza o fazer matemático. São as evidências de articulações entre objetos matemáticos ocorrendo que nos dão a garantia de que esse fazer está sendo conduzido de forma tecnicamente correta.

Todo este trabalho foi conduzido na perspectiva de que é possível elaborar e conduzir uma OD que contribua para a evolução do tecnicismo para o construtivismo teoricista e essa possibilidade foi constatada. De um fazer seguindo a "tradição" para uma ação norteada pelo raciocínio lógico-dedutivo.

O resultado dessa resolução nos conduziu à elaboração de um teorema até então desconhecido por todos os presentes na sessão de estudos e que será discutido ainda neste capítulo. A elaboração de um teorema é uma obra matemática (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001) porque responde a uma questão social. A questão respondida consiste no fato de que o resultado obtido pode ser utilizado em outras tarefas e mostra a fertilidade da matemática como componente curricular e, portanto, como elemento formativo. Da mesma forma mostra a fertilidade da matemática como ciência. Mostra ainda que é possível estabelecer uma organização didática que conduza os acadêmicos da resolução de casos particulares para generalização.

Como a primeira dupla chegou à conclusão de que a soma era 360º não está plenamente esclarecida. Há suposição de que tenham vislumbrado um quadrilátero, porque horas depois o outro componente da dupla afirmou: "aquele quadrilátero não prova que a soma dos ângulos dá 360º, foi isso que eu pensei". Ele se referia ao quadrilátero formado pelas retas *r, s, t* e as duas transversais.

A resolução de t_5 trouxe embutida a solução de t_4 e confirmou que a afirmação da acadêmica estava correta. O professor continuou o seu discurso explicativo: "hoje fizemos uma matemática nova para nós. Descobrimos um teorema. O teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

São dadas duas retas paralelas. Se essas paralelas são cortadas por duas transversais, que se interceptam na região interna em relação às paralelas, então a soma dos ângulos internos que estão de um mesmo lado das paralelas é 360º".

Um teorema que deve ser antigo e ter sido enunciado e provado por muitos outros, mas que não era conhecido pelos acadêmicos envolvidos. Foi um teorema novo para eles e recebeu dos próprios envolvidos o nome de Kamyle em homenagem à acadêmica que fez a primeira exposição, em nome do seu grupo, e que produziu o desafio.

Entendemos que dentre as múltiplas razões apresentadas para a inserção do estudo da Matemática e, particularmente, da geometria euclidiana na Educação Básica, a perspectiva de que ela permite descobertas sem por em risco a integridade física das pessoas seja uma delas. Imaginemos que alguém queira fazer uma descoberta em química e não tenha experiência ou um equipamento adequado. A possibilidade de se misturar substâncias que juntadas produzem toxidade suficiente para produzir danos físicos ao “cientista” não pode ser descartada. Na Matemática os experimentos podem ocorrer à vontade porque, se conduzida em um contexto ético, não causa danos. A “toxidade” de um erro matemático está restrita ao campo da ética, especificamente, da ética do professor. Dessa forma, o que parecia um erro do grupo representado pela Kamyle e que, em outra ciência, poderia conter riscos, resultou em uma bonita descoberta. Os acadêmicos vivenciaram uma experiência científica.

A sessão seguinte foi iniciada com a demonstração formal do “teorema Kamyle” seguindo o raciocínio do acadêmico A. Embora possa haver outras formas de demonstrá-lo, e acreditamos que até mais diretas, preferimos seguir a mesma linha de raciocínio como forma de valorização do trabalho dos acadêmicos envolvidos.

Os registros de linguagem usados pelos acadêmicos são, em sua maioria, centrados na verbalização, nos gestos e nos traçados geométricos por serem os que mais facilitam a comunicação. Na TAD, cujo pressuposto é de que o conhecimento é uma produção social e os registros de linguagem exercem um importante papel, tanto na comunicação das idéias como na manipulação dos objetos matemáticos, e que não há supremacia entre eles durante uma organização didática, os registros verbais e gestuais também podem compor uma praxeologia.

Os registros gestuais normalmente acompanham os atos da fala, fazendo indicações dos pontos da figura que estão sendo considerados. Também aparecem quando se deseja indicar no espaço as transformações que se deseja imprimir na figura para que se obtenha o resultado esperado.

Observa-se nesse caso que o contexto em que a tarefa foi proposta proporcionou a vivência de vários momentos de estudo. O primeiro encontro com o problema ocorreu quando a Kamyle anunciou que a soma dos ângulos era 360º. Estávamos trabalhando com a técnica e quando o problema foi assumido pelos acadêmicos começaram os momentos de explorar técnicas e de vivenciar um entorno teórico-tecnológico. Por último ocorreu a institucionalização com a demonstração do teorema.

A argumentação justificatória, o trabalho com a técnica e a autonomia para criar e testar novas técnicas constituiu-se em processo que culminou em uma obra matemática.

Um dos pressupostos da TAD é que uma tarefa proposta se constitui em uma obra matemática quando o aluno se vê levado a estudar matemática. Não é sempre que esse fenômeno, essa disposição de estudar matemática, é observado. Por outro lado também não se pode dizer que este seja um caso isolado. O principal fator que motiva o não envolvimento, isto é, que dificulta o aluno "entrar" na obra matemática é o modelo docente que centraliza no professor a tarefa de ensinar colocando o aluno na posição de passividade (CHEVALARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Ao processar a prova o acadêmico A, e os que com ele elaboraram a técnica, seguiram o raciocínio prioritariamente dedutivo. A acadêmica Kamyle e seu colega de dupla fizeram uma abdução a partir de um suposto quadrilátero e o argumento por eles usado foi natural.

A técnica utilizada, primeiramente, estava incompleta mas atingiu a completude com a participação de outros acadêmicos e especialmente do acadêmico A. Essa técnica utilizada na prova, por A, poderia ser simplificada como foi feita na demonstração do teorema que ficou com uma reta a menos do que na prova.

Com relação ao alcance é indiscutível que a prova de A atende plenamente a tarefas daquele tipo, mas não está garantido que possa resolver tarefas mais complexas como, por exemplo, se envolver mais de três ângulos. No entanto, é possível que possa ser melhorada para atender tarefas mais complexas.

As justificações utilizadas por A são parecidas com as formas canônicas em matemática e as condições de utilização da técnica são coerentes com os pressupostos da geometria euclidiana.

Demonstração do teorema:

Destacando o enunciado do teorema:

> Dadas duas retas paralelas e duas retas transversais, se essas transversais se interceptam na região interior das paralelas então a soma dos ângulos internos, que estão de um mesmo lado das transversais, é 360º.

Hipótese: *r* e *s* são paralelas, *t* e *u* são transversais que se interceptam na região interior das paralelas (fig. 44).

Tese: a soma dos ângulos internos que estão de um mesmo lado das transversais é 360º (a+b+c=360º).

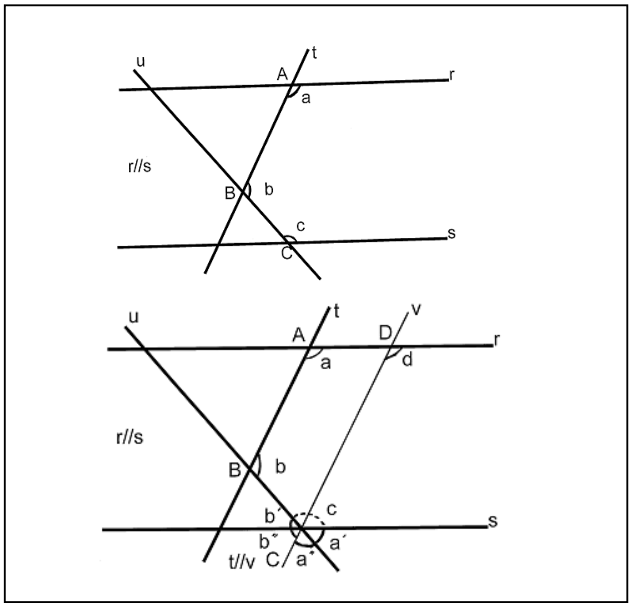


Figura 44–Demonstração do "teorema Kamyle".

Descrição da técnica usada para demonstrar o "teorema Kamyle".

As transversais são as retas *t* e *u* e os ângulos considerados são: *a, b* e *c*.

Técnica (fig. 44)	**Elementos de tecnologia**
Passo 1. Destacar os pontos A, B e C, sendo que $A \in r \cap t$, $B \in t \cap u$ e $C \in s \cap u$ com os respectivos ângulos *a,b* e *c* todos internos e de um mesmo lado de *t* e *u* (*r* e *s* são as retas paralelas).	Duas retas se interceptam em um ponto. A intersecção de duas retas produz ângulos.
Passo 2. Por C traça-se uma reta *v* paralela a *t*.	Quinto postulado de Euclides.
Passo 3. Se D é o ponto de intersecção de *v* com *r* então existe um ângulo *d* na região interna de *r* e *s* que é correspondente ao ângulo *a*.	Ângulos correspondentes são congruentes. Propriedade do paralelismo
Passo 4. Existe um ângulo (*a´+a´´*) formado por *v* e *s*, externo, que é correspondente ao ângulo *d*. Consequentemente, ele é correspondente ao ângulo *a* (*a=a´+a´´*).	Propriedade transitiva da relação de equivalência: correspondência entre ângulos.
Passo 5. Tomando as paralelas *v* e *t* e tendo a reta *u* como transversal tem-se um ângulo (*b´+b´´*) que é alterno interno com *b*.	Propriedade do paralelismo. Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 6. A soma dos ângulos (*a´+a´´*), *c* e (*b´+b´´*) é 360º.	Medida do ângulo de volta completa.
Passo 7. A soma de *a*, *b* e *c* é 360º	Ângulos correspondentes são congruentes.

Estrutura do argumento segundo Toulmin

Dados: duas paralelas, duas transversais que se interceptam e dois ângulos obtusos formados por elas.

Conclusão: a soma dos ângulos internos que estão do mesmo lado das transversais é 360º.

Garantia: um ângulo de volta completa mede 360º

Refutação: se os ângulos não estiverem do mesmo lado das transversais ou se forem mais de três ângulos.

Suporte 1: por um ponto fora de uma reta é possível traçar uma paralela a essa reta.

Suporte 2: ângulos alternos internos são congruentes.

Sexta Tarefa

Esta tarefa pertence ao mesmo tipo de tarefa da t_3. Pelo fato de a figura estar em posição diferente em relação à da figura de t_3 inspirou outras técnicas de resolução. Técnicas diferentes tanto da que foi apresentada anteriormente como diferentes das que eram esperadas nesse momento de trabalho com a técnica do uso de paralelas e ângulos alternos internos.

É importante destacar que a nova posição da figura trouxe novas idéias e outras possibilidades de resolução da tarefa.

A fotografia (fig. 45) obtida em 2 de abril de 2009 indica o instante em que a tarefa era exposta no quadro para resolução. A proposição da mesma ocorrera na sessão da semana anterior.

Meu diário de bordo (DB 2/4/2009) está resumido.

> A tarefa foi deixada para casa e muitos acadêmicos haviam resolvido. Três se prontificaram em vir ao quadro resolvê-los. A primeira [acadêmica] explicou com detalhes o que ia fazendo. O segundo fez em silêncio e depois foi pedido que explicasse. O terceiro também foi explicando o que fez (SALES, 2009).

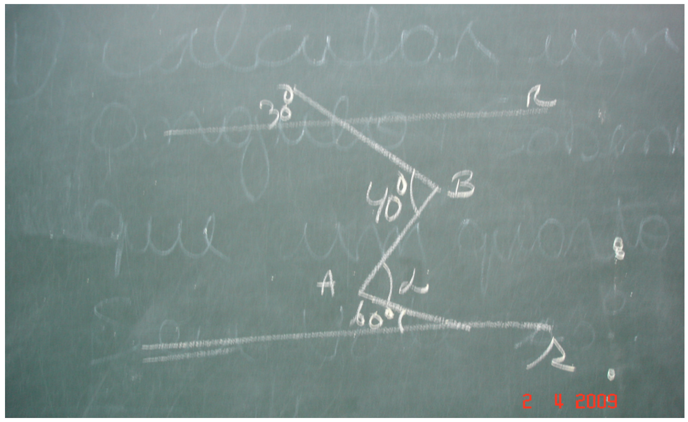


Figura 45-Sexta tarefa (t_6)

Descrição da Tarefa na Língua Materna

São duas retas paralelas e três retas transversais que se interceptam duas a duas no interior das paralelas. As transversais são representadas por segmentos de retas sendo que aquele segmento que representa a reta que intercepta as outras duas é identificado pelos pontos de intersecção A e B. Duas das transversais são inclinadas para o mesmo lado. São dados: um ângulo externo formado entre uma das transversais que passa por B e uma das paralelas, um ângulo interno formado pela outra transversal que passa por A com a outra paralela e o ângulo B formado pela intersecção de duas transversais. O ângulo A, formado pela intersecção da transversal $\overleftrightarrow{AB}$ com uma das outras transversais, é designado de α e se constitui no problema a ser resolvido.

As técnicas apresentadas são em número de três sendo que duas delas estão centradas na construção de triângulos. Porém, tão diferentes entre si que todas merecem análise.

Descrição da Técnica Canônica

Técnica τ_c	**Elementos tecnológicos**
Passo 1: Seccionar os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ com as retas *t* e *v* paralelas às retas *r* e *s*	Quinto postulado de Euclides
Passo 2: Determinar os ângulos alternos internos levando em conta as retas *t* e *v* e as transversais.	Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 3: O ângulo $\hat{B}$ fica constituído de 30º e 10º e o ângulo $\hat{A}$ de 10º e 60º	Soma de ângulos.
Passo 4: Indicar o resultado de α como sendo 70º.	Soma de ângulos.

Primeira técnica (τ_1) apresentada para a resolução da tarefa

A figura 46[41] retrata a técnica.

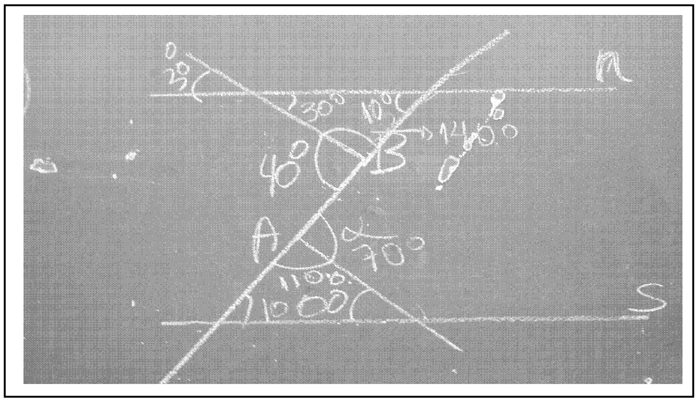


Figura 46–τ_1 para a tarefa seis (t_6)

Descrição da Técnica

Técnica τ_1	Elementos Tecnológicos
Passo 1. Prolongamento, sobre a reta suporte, do segmento de reta $\overline{AB}$ até interceptar as paralelas formando dois triângulos.	Dois pontos definem uma reta.
Passo 2. Determinar o ângulo oposto pelo vértice ao ângulo externo em relação às paralelas. Esse ângulo é interno a um dos triângulos.	Ângulos opostos pelo vértice.
Passo 3. Determinar o ângulo suplementar do ângulo B. Esse suplementar é também interno ao mesmo triângulo do passo anterior.	Ângulos suplementares.
Passo 4. Determinar o terceiro ângulo do triângulo mencionado no passo anterior	A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º.
Passo 5. Determinar o ângulo alterno interno ao ângulo determinado no passo anterior. Esse ângulo é interno ao outro triângulo que já tem um dos seus ângulos dados no problema.	Ângulos alternos internos.
Passo 6. Determinar o terceiro ângulo desse triângulo mencionado no passo anterior	O mesmo do passo nº 4.
Passo 8. Identificar esse terceiro ângulo do triângulo como suplementar do ângulo procurado.	O mesmo do passo nº 3.

[41] O registro que aparece no interior do triângulo inferior que se parece com como o nº 1000, na realidade é 10 e 60 e representam os graus dos respectivos ângulos (10º e 60º). O outro valor é 110º. O discurso pedagógico ainda está muito distante do discurso científico.

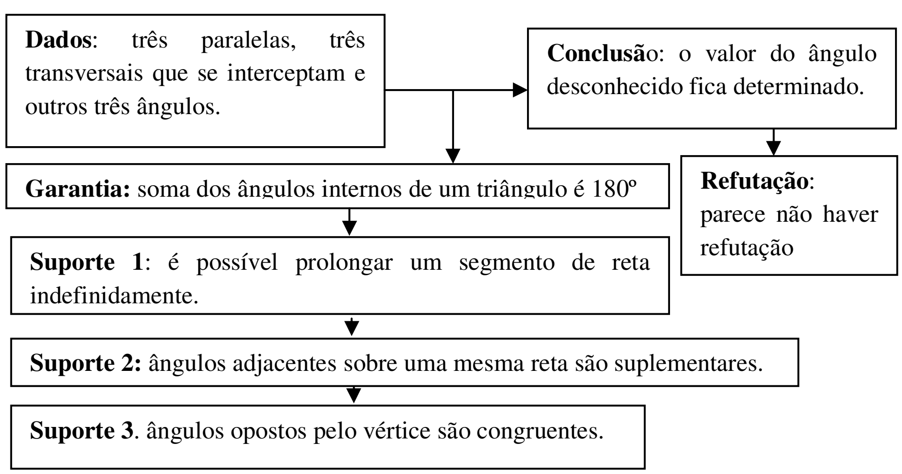
Passo 9. Montar a equação e determinar o valor de α.	Equação do primeiro grau.
Passo 10. Anunciar o resultado.	Técnica não algorítmica.

Discussão da técnica

O trabalho com a técnica do paralelismo não foi suficiente para convencer os acadêmicos da sua simplicidade. Chevallard (2001, p. 266) faz referência a casos de "alunos reacionários" porque tem dificuldade em se desprender de uma técnica e se apropriar de outra, mas não parece ser este o caso. Talvez a técnica da triangulação fosse mais operacional para eles. Está havendo a repetição de certo procedimento, de um elemento da técnica. Consolida-se uma praxeologia onde as tarefas envolvendo paralelismo são resolvidas com a técnica da triangulação. É uma técnica inteligível, fácil de utilizar, tem alcance satisfatório para esse tipo de tarefa e satisfaz as condições de emprego. Com relação aos elementos tecnológicos o raciocínio predominante foi o dedutivo, seguiu as normas canônicas da matemática e são coerentes com as condições de utilização.

Os registros continuam sendo predominantemente geométricos, verbais e gestuais. A preocupação maior é com a comunicação das idéias e não com o registro simbólico, formal. Estes continuam reduzidos àqueles que são estritamente necessários. Os registros gestuais se mostraram de grande valia para ilustrar o que se pretendia fazer, dizer ou escrever. Escrever ainda não é uma prática muito espontânea.

Estrutura do argumento: Esquema de Toulmin



Mas há uma segunda técnica, que foi apresentada pelos acadêmicos. A segunda técnica ainda tem por base a triangulação, porém, agora por um caminho mais complexo embora não menos interessante. Para maior comodidade estamos repetindo a figura 45 que contém a explicitação da tarefa.

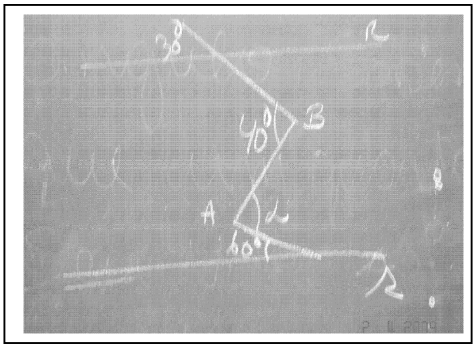


Figura 45-Sexta tarefa (t_6)

Registro fotográfico da segunda técnica (τ_2) (fig. 47)

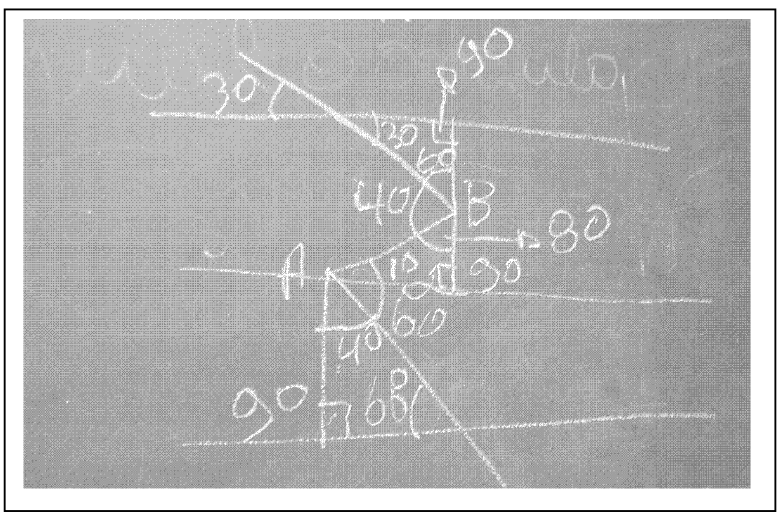


Figura 47-τ_2 para a sexta tarefa (t_6)

Descrição da técnica

Técnica τ_2	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Traçar uma reta paralela às retas *r* e *s* passando por A (chamemo-la de t).	Quinto postulado de Euclides
Passa 2. Traçar uma reta perpendicular às paralelas *r* e *t*, passando por B, dado no problema.	A perpendicular a uma reta é perpendicular a todas as retas paralelas a ela. Dois pontos definem uma reta.

Passo 3. Traçar uma reta perpendicular às paralelas *t* e *s*, passando por A dado no problema.	O mesmo do passo anterior.
Passo 4. Identificar três triângulos retângulos determinados pelas retas paralelas, pelas transversais e pelas perpendiculares.	Perpendiculares determinam ângulos retos.
Passo 5. Determinar os ângulos internos de cada triângulo usando os conceitos de ângulos complementares, ângulos suplementares e ângulos opostos pelo vértice.	A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180º. Propriedades do paralelismo.
Passo 6. Identificar o ângulo α como a soma de três ângulos consecutivos adjacentes dois a dois.	Soma de ângulos. Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes.
Passo 7. Identificar os três ângulos cuja soma constitui o ângulo α e obter os valores desses ângulos sabendo que dois são ângulos complementares em dois triângulos retângulos e o terceiro é alterno interno a um dos ângulos dados no problema.	Ângulos alternos internos e ângulos complementares.
Passo 8. Somar os ângulos e determinar o valor de α.	Operação com ângulos.
Passo 9. Anunciar o resultado.	Técnica não algorítmica.

Discussão da Técnica

Não têm sido apresentados muitos elementos teóricos novos. No presente caso há uma exploração das propriedades do perpendicularismo, dos ângulos complementares, ângulos consecutivos e adjacentes. Tem predominado o uso da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. A técnica da triangulação tem sido a nota tônica enquanto a técnica do paralelismo traria resultados mais imediatos. A posição da figura influenciou na visualização da solução. Uma tarefa (t_3) do mesmo tipo desta já havia sido proposta e a técnica adotada para a resolução foi outra porque a figura estava em outra posição, estava inclinada, enquanto a figura desta tarefa (t_6) estava na posição horizontal. Observa-se que há dificuldades por parte dos alunos em perceber a possibilidade de rotação da figura.

A insistência na triangulação e a dificuldade em explorar técnicas embasadas em outras tecnologias evidenciam que a mudança de técnica não é um caminho escolhido de imediato. O processo de apropriação de uma nova técnica tende a ser longo porque envolve o desenvolvimento de confiança no manuseio da nova técnica.

O momento didático mais presente é o do trabalho com da técnica, no caso a técnica da triangulação. Continuou sendo vivenciado também o momento de elaboração de técnicas novas, porém, pertencentes ao mesmo tipo. Talvez estejam tentando consolidar e institucionalizar a técnica da triangulação com todo o seu aparato tecnológico para depois viverem outros momentos didáticos.

Os registros de linguagem permanecem quase inalterados ao longo de todas as sessões. Os registros algébricos e a escrita na língua materna estiveram ausentes. O embrião de formalização ficou por conta da figura, dos registros geométricos, e dos registros verbais.

O raciocínio predominante foi o dedutivo embora o abdutivo parece ter sido a causa de alterar a técnica partir de um triângulo qualquer para partir do triângulo retângulo. Há avanços no processo argumentativo. O uso do triângulo retângulo requer que sejam incorporados novos elementos tecnológicos ao argumento justificatório. É também, em si mesmo, uma técnica diferente, portanto, um argumento diferente. Há um erro no registro aritmético que somente foi percebido depois que o acadêmico sentou-se. O ângulo de 40º no triângulo inferior em realidade tem apenas 30º.

Estrutura do argumento: esquema de Toulmin

Dados: três paralelas, três transversais que se interceptam e outro três ângulos.

Conclusão: o valor do ângulo desconhecido fica determinado.

Garantia: soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º

Refutação: se o contexto não for de paralelismo ou tiver apenas duas transversais.

Suporte 1: é possível prolongar um segmento de reta indefinidamente.

Suporte 2: ângulos adjacentes sobre uma mesma reta são suplementares.

Suporte 3. ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Suporte 4.a perpendicular a uma reta também é perpendicular à sua paralela.

6.4 Síntese Parcial do Capítulo

Tendo em vista que passaremos a analisar outros tipos de tarefas procederemos a uma síntese parcial do que foi estudado até aqui.

As tarefas propostas e resolvidas pertenciam ao tipo que envolve prioritariamente retas paralelas e retas transversais. É um tipo que poderíamos considerar elementar e de caráter fundamental por servir de suporte técnico e tecnológico para outras atividades do programa de estudos. A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer e a relação do ângulo externo de um triângulo com os ângulos internos não adjacentes a ele, por exemplo, são propriedades demonstráveis com o uso das propriedades do paralelismo.

É um tipo de tarefa de caráter fundamental também para o desenvolvimento de uma prática argumentativa por possuir uma quantidade significativa de elementos envolvidos com propriedades cuja evidência não é dificultada. A congruência dos ângulos correspondentes e a condição suplementar dos ângulos adjacentes colaterais também são propriedades de forte apelo visual e de fácil constatação. E, consequentemente, o uso dessas propriedades para demonstrar outras se constitui em um argumento justificatório acessível. É nessa particularidade que está também o seu caráter elementar, a fácil constatação da propriedade que se quer evidenciar. Apesar dessa fácil constatação e do forte apelo a uma conclusão visual não é óbvio o suficiente para “dispensar” um argumento justificatório. Um dos problemas encontrados no exercício da demonstração ou da argumentação justificatória consiste em ter que provar o aparentemente óbvio ou então demonstrar uma propriedade ainda não percebida. Por exemplo, provar a unicidade[42] do plano que contém duas retas paralelas é bem mais complexo do que admitir a unicidade sem provas. Para alguns a referida “prova” pode ser menos convincente do que admitir intuitivamente a propriedade. O mesmo poderia ser dito da demonstração da propriedade comutativa da adição de números naturais[43]. A comutatividade da adição parece ser tão óbvia a ponto de a demonstração se afigurar desnecessária e extremamente complexa.

Por outro lado temos o caso da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Embora na educação básica essa propriedade normalmente seja

---

[42] Essa demonstração é encontrada em: ANTAR NETO, Aref et al. **Geometria**. São Paulo: Moderna, 1982, p. 20

[43] Demonstração disponível em: SILVA, Valdir Vilmar da. **Números**: construção e propriedades. Goiânia: Editora da UFG, 2003, p. 20.

apresentada sem justificativas e aceita, pela maioria dos estudantes, sem questionamentos, quando a demonstração foi trabalhada em classe com os acadêmicos percebeu-se na maioria deles uma expressão de satisfação pelo prazer de uma descoberta. “Interessante” - expressaram os mais envolvidos no processo. Haviam encontrado a resposta para uma pergunta latente. Não é evidente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Também não é evidente que um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele. São propriedades não-ostensivas. Porém, a congruência dos ângulos correspondentes e a condição suplementar dos ângulos adjacentes colaterais são propriedades que não oferecem dificuldades para se mostrarem. São propriedades ostensivas.

Propriedade ostensiva não é uma categoria da TAD. A teoria trata de objetos ostensivos, aqueles objetos matemáticos que insistem em se mostrar, e cuja “manipulação” põe em ação os objetos não-ostensivos. Estamos denominando propriedades ostensivas aquelas propriedades que além de permitir uma fácil constatação empírica ou visual a sua “manipulação” descortina outras propriedades geométricas, embasa técnicas. Por serem ostensivas tem um papel fundamental no desenvolvimento da argumentação.

Esta síntese não ficaria completa sem o destaque do teorema produzido a partir de uma atividade proposta e que os acadêmicos foram suficientemente envolvidos no processo, isto é, entraram na obra matemática. Conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 112) “entrar em uma obra é submeter-se à sua disciplina”. Por essa razão foram além da superfície e não se limitaram à resolução das tarefas “possíveis”, daquelas tarefas cuja resolução consiste em uma aplicação imediata das técnicas conhecidas e utilizadas recentemente. Foi possível produzir um teorema a partir desse mergulho dos acadêmicos na obra matemática e demonstar esse teorema utilizando as idéias apresentadas por eles.

6.5 Segunda Etapa das Sessões

Como sabemos na pesquisa do tipo etnográfico não há distanciamento entre o pesquisador e o objeto. As rupturas são intencionais. Este é, portanto, mais um recorte em um contexto amplo de atividades contínuas.

Era o dia sete do mês de maio e do meu diário de bordo (BD 7/5/2009) extraio o seguinte:

> No início da aula o professor fez referência a um incidente acontecido em aulas anteriores. Nessas aulas tinham estudado sobre triângulos envolvendo a soma dos ângulos internos que fora demonstrada com a participação dos acadêmicos. Casos de congruências e verificação desses casos através de exercícios também tinham sido objetos de estudo
> No entanto, durante essas aulas, um acadêmico, por duas ou três vezes, procurou o professor, em particular, para mostrar uma relação percebida por ele. Ele havia percebido que um ângulo externo do triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
> O professor apresentou o conceito de ângulo externo através de exemplos e iniciou o seguinte diálogo com a turma.
> Professor:
> —Na aula anterior um acadêmico trouxe para eu ver uma relação importante que ele havia descoberto. Acenei que estava correto mas fingi não dar muita importância porque queria dedicar uma sessão especialmente para o assunto. O acadêmico M percebeu uma relação entre o ângulo externo de um triângulo e os ângulos internos. M venha nos mostrar o que você percebeu.
> Acadêmico M:
> —Trabalhei com paralelas mas não me lembro onde está o rascunho. Você se lembra G? Nós fizemos juntos.
> Acadêmico G:
> —Lembro, mas prefiro fazer de outro modo. Achei mais fácil.
> Professor:
> —Vamos ver os dois modos? O que é mesmo que vocês perceberam?
> Acadêmico M:
> —Vai G
> G foi ao quadro e resolveu algebricamente (SALES, 2009).

6.5.1 Segundo tipo de tarefas (T_2): tarefas envolvendo ângulos de um triângulo.

São tarefas que também são resolvidas por meio de retas paralelas mas que podem igualmente ser resolvidas algebricamente

6.5.1.1 Tarefa t_7-relações entre o ângulo externo de um triângulo e os ângulos internos

Enunciado da tarefa, uma vez que a propriedade já fora anunciada: explicar porque, em um triângulo qualquer, um ângulo externo é igual à soma de dois ângulos internos não adjacentes a ele.

A primeira técnica utilizada foi a demonstração algébrica (fig.48):

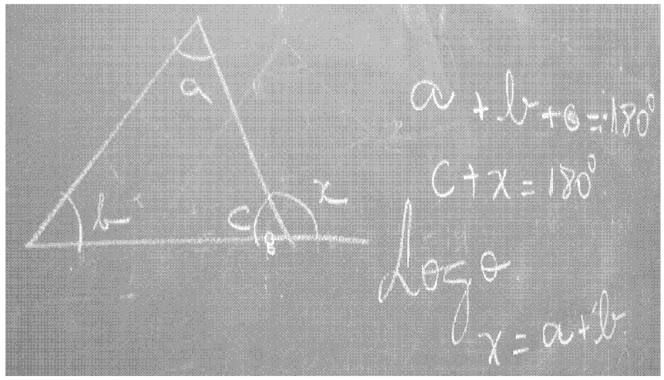


Figura 48–τ_1 usada na resolução sétima à tarefa (t_7)

Descrição da técnica

Técnica τ_1	**Elementos tecnológicos**
Passo 1: Esboçar a figura no quadro identificando os ângulos.	O esboço da figura é o ponto de partida para demonstrações.
Passo 2: Identificar o ângulo interno (no caso, c) como suplementar do ângulo externo (x).	Ângulos adjacentes que têm como suporte uma reta são suplementares.
Passo 3: Identificar a soma dos outros dois ângulos internos como suplementar do ângulo.	A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
Passo 4: Identificar a soma dos outros dois ângulos internos como suplementar do ângulo.	Ângulos que têm o mesmo suplementar são iguais entre si.

Discussão da técnica

A apresentação do acadêmico foi resumida mas ele explicou verbalmente o significado do que fez e da conclusão obtida. Tudo isso sem dar muita ênfase, pois, para ele parecia tudo muito óbvio. A técnica estava completa, é fácil de utilizar, tem alcance pleno, é inteligível e satisfaz as condições de emprego. Ocorreu uma demonstração incipiente tendo em vista que faltou definir hipótese, definir a tese e registrar por escrito as justificativas, isto é, faltaram alguns elementos formais. O argumento tecnológico foi dedutivo. No entanto, por ser a técnica canônica, encontrável em todos os livros que tratam do tema e tendo em vista que a uma semana o assunto vinha incomodando o acadêmico M que, por sua vez, “provocava” os outros não é possível afirmar que técnica tenha sido produzida pelo acadêmico G.

Estrutura do argumento: esquema de Toulmin

Dados: três um triângulo qualquer e um dos seus ângulos externos

Conclusão: o valor o ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos nãoa djecentes a ele.

Garantia: soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Refutação: polígonos com o número de lados maior do que 3.

Suporte 1: ângulos adjacentes que têm como suporte uma mesma reta são suplementares

Após a resolução pela técnica algébrica apresentada pelo acadêmico G, iniciaram-se processos geométricos de resolução. O acadêmico M apresentou uma técnica geométrica explicando que estava refazendo o que havia feito anteriormente, quando mostrou ao professor. Desenhou um triângulo e no seu desenho o ângulo externo, identificado por x, é adjacente do ângulo interno *c* da base do triângulo. Os ângulos x e *c* estão situados à direita do observador.

A figura 49 é a foto da resolução apresentada por M.

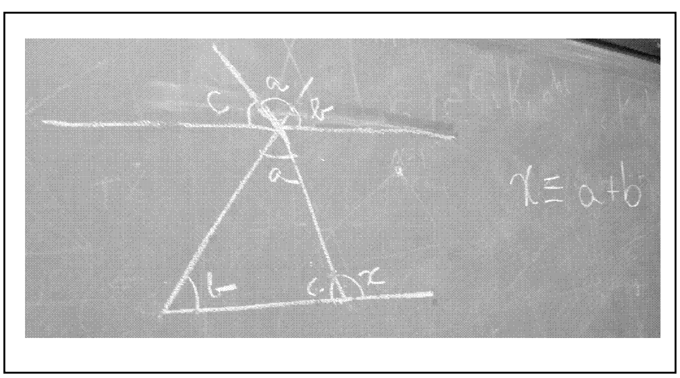


Figura 49–Técnica geométrica para a resolução da tarefa sete (t_7)

Descrição da técnica matemática

Técnica τ_1	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Traçar, pelo vértice do ângulo *a*, oposto à base, uma reta paralela à base do triângulo.	Quinto postulado de Euclides.
Passo 2. Prolongar os lados do triângulo que constituem o ângulo *a*.	Um segmento pode ser prolongado indefinidamente.
Passo 3. Identificar um ângulo oposto ao ângulo *a* de mesmo nome e oposto à base.	Ângulos opostos são congruentes.
Passo 4. Identificar o ângulo alterno interno com o ângulo *b* da base do triângulo (foi também denominado *b*).	Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 5. Identificar o ângulo externo denominado x como correspondente de *a*+*b*.	Ângulos correspondentes são congruentes.
Passo 6. Definir o resultado x=*a*+*b*	A medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Discussão da técnica

A técnica utilizada é completa, fácil e resolve satisfatoriamente a tarefa. O argumento utilizado tem suporte na teoria matemática e os recursos disponíveis foram utilizados satisfatoriamente. Há problemas de registros (*discurso ambíguo*). A medida de x é igual à soma das medidas de *a* e *b* (x=*a*+*b*). Não foi feita a diferenciação de identificação entre um ângulo e o seu oposto pelo vértice e entre um ângulo e o seu colateral interno. O registro verbal não deixou dúvida de que o acadêmico entendia que ângulos congruentes podem ter a mesma identificação. Como no caso anterior aqui também se pode dizer que o raciocínio predominante foi o dedutivo e ocorreu uma demonstração incipiente tendo em vista que faltou definir a hipótese e a tese e registrar por escrito as justificativas, isto é, faltaram alguns elementos formais. O prolongamento dos segmentos e o traçado da paralela foram feitos à mão livre deixando aparecer alguma inclinação indevida, mas tudo foi esclarecido verbalmente e por meio de gestos. Um registro escrito das intenções, das justificativas, da hipótese e da tese teria contribuído para que a demonstração ficasse completa. É uma técnica que pode compor uma praxeologia para demonstrar que a medida de um ângulo externo a um triângulo é igual à soma do ângulo interno não adjacente a ele.

Estrutura do argumento: esquema de Toulmin

Dados: um triângulo e seus ângulos internos

Conclusão: um ângulo externo é a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Garantia: o quinto postulado de Euclides e o axioma do prolongamento de um segmento de reta.

Refutação:polígonos com mais de três lados.

Suporte 1: as propriedades do paralelismo.

Suporte 2: as relações de congruência entre ângulos presentes num condição de paralelismo.

A terceira técnica

Concluída a tarefa de M o diálogo com a classe continuou.

Acadêmica P:

–Fiz de outro modo

Professor:

–Mostra para a gente

A acadêmica foi ao quadro e construiu a figura (fig. 50).

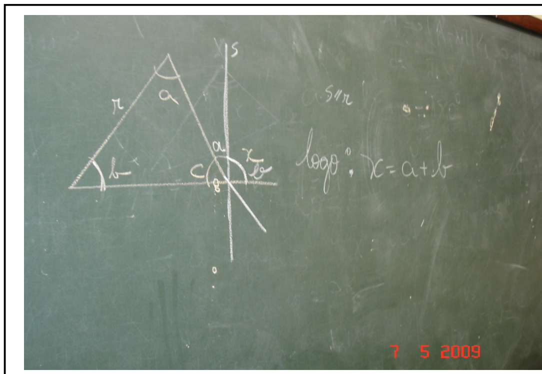


Figura 50-τ_3 para a tarefa sete (t_7)

O esboço inicial era semelhante ao do acadêmico M, com os ângulos na mesma posição. Aliás, esta é a forma mais comum de desenhar um triângulo qualquer, com os ângulos dispostos no sentido anti-horário, começando pelo vértice oposto à base. A reta *s*, supostamente, é paralela à reta *r* que é a reta suporte do lado do triângulo que se opõe a x, aliás, isso foi registrado pela acadêmica como se pode ver na figura.

Descrição da técnica

Técnica τ_3	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Traçar uma reta pelo vértice em que em que se encontra o ângulo externo e que seja paralela à reta suporte do lado do triângulo que é adjacente aos ângulos *a* e *b*.	Quinto postulado de Euclides.
Passo 2. Identificar o ângulo *a* alterno interno ao ângulo de mesmo nome e oposto à base.	Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 3. Identificar o ângulo correspondente do ângulo *b* da base do triângulo	Ângulos correspondentes são congruentes.
Passo 4. Identificar o ângulo externo denominado x como igual à soma de *a* e *b*.	A medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Discussão da técnica

Como em todos os casos anteriores os argumentos utilizados podem ser classificados como “argumentos que usam garantias”. Vários axiomas foram utilizados como garantia da conclusão.

Não difere significativamente do anterior. Não foi detectado se a acadêmica havia elaborado a técnica anteriormente ou se o fez enquanto M apresentava a sua resolução no quadro. Pela presteza com que apresentou o resultado e pela segurança demonstrada enquanto resolvia a tarefa perante todos se deduz que já havia resolvido antes. De alguma forma ela participa das discussões do grupo que M participa. Há a possibilidade de que ele tenha mostrado a sua técnica para ela enquanto estava empolgado com a descoberta. A acadêmica P é ativa participante dos grupos de trabalho.

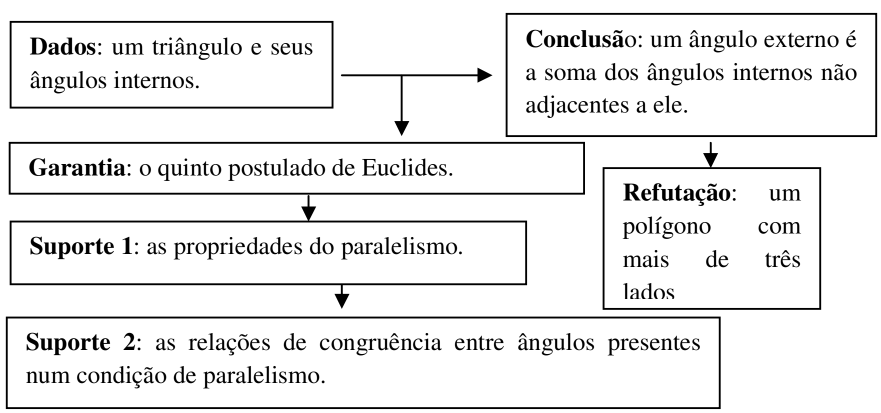
No quadro sua exposição também foi muito resumida, embora tenha se apresentado mais segura e mais preocupada em verbalizar o que pensava. Enquanto registrava sua técnica no quadro o acadêmico G não entendeu uma passagem, pensou que ela tivesse errado e fez um gracejo. A única vez que isso aconteceu.

A acadêmica P se ofendeu com a brincadeira, revelou o seu desagrado, e foi sentar-se chateada. A sua técnica foi posta em discussão e recebe a “aprovação” de todos. Foi validada pela classe.

Com relação aos momentos didáticos pode-se dizer que a classe experimentava o momento de explorar novas técnicas, de construir um entorno tecnológico e a maioria vivia também o momento do primeiro encontro. O problema havia sido colocado por M a alguns colegas, na semana anterior, e é possível que a acadêmica P tenha vivenciado esse momento com o grupo, o momento didático do primeiro encontro e que agora estava vivenciando com a turma os outros momentos.

Os registros de linguagem têm sido repetidos. Há mais ênfase no uso dos registros verbais e gestuais. A acadêmica P recorreu a um registro verbal mais extenso e registros gestuais mais restritos. Procurou esclarecer cada passo verbalmente. A técnica consistiu em uma demonstração embrionária. A argumentação justificatória ainda está precisando evoluir para estágios mais formais para se tornar uma demonstração.

Estrutura do argumento segundo Toulmin



Terminada a exposição da acadêmica P o diálogo recomeçou.

Professor:

– Tem outro caminho?

Acadêmica C:

–Tem

A acadêmica C foi ao quadro e esboçou um triângulo no mesmo padrão dos outros. Definiu que trabalharia a partir do ângulo ainda não explorado, o ângulo *b*.

Fez várias tentativas. Fez riscos a mais e depois foi apagando na medida em que outros acadêmicos foram fazendo suas observações.

A figura 51 é a foto da solução apresentada por C.

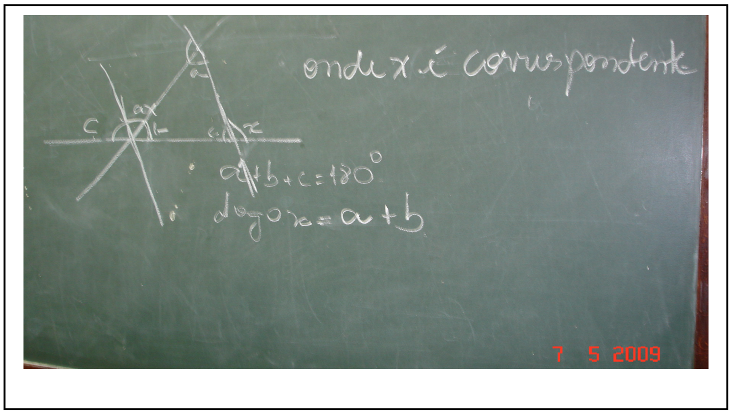


Figura 51 τ_4 para a sétima tarefa (t_7)

Descrição da técnica

Técnica τ_3	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Traçar uma reta pelo vértice em que em que se encontra o ângulo interno identificado por *b*. Essa reta é paralela à reta suporte do lado do triângulo que é adjacente ao ângulo externo considerado	Quinto postulado de Euclides.
Passo 2. Identificar o ângulo *a* alterno interno ao ângulo de mesmo nome e oposto à base.	Ângulos alternos internos são congruentes.
Passo 3. Identificar o ângulo *c* correspondente do ângulo *c* da base do triângulo e suplementar do ângulo externo.	Ângulos correspondentes são congruentes.
Passo 4. Identificar o ângulo externo denominado x como correspondente com o ângulo formado por *a* + *b*.	Igual ao passo anterior

Discussão da técnica

Como a solução a partir do traçado de paralelas pelo vértice já estava explorada para dois ângulos do triângulo a acadêmica fez as suas tentativas a partir do terceiro ângulo. Tentou pelo oposto pelo vértice ao ângulo *b*. Tentou pelo correspondente de *a* e finalmente optou pelo ângulo alterno interno com *a*. Abduziu que o desafio era para que tentasse a saída pelo vértice do outro ângulo. Acatando ainda sugestões dos colegas colocou x como a+b. Estava dando o assunto por encerrado quando ouviu alguém dizer que faltava informar que “x é correspondente”. Voltou-se e escreveu a frase no quadro, mas não completou o seu sentido. A frase completa seria: x é correspondente do ângulo resultante de $b+a$. Finalmente concluiu que se $a+b+c=180º$ e $x+c=180º$ então $x=a+b$. Porém essa dedução era desnecessária uma vez que se x é correspondente ao ângulo obtido pela soma de *a* e *b* então a tarefa estava resolvida. Por outro lado, para concluir que $x=a+b$, que $x+c=180º$ e $a+b+c=180º$ não precisaria da construção da reta paralela. As soluções anteriores estavam influenciando na sua decisão ou apenas quis dizer que tanto fazia uma como a outra técnica? Não lhe foi perguntado.

Para demonstrar que o ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele é possível construir, pelo menos, quatro praxeologias, embora somente uma seja canônica: a que utiliza a técnica algébrica.

Os registros algébricos foram mais numerosos mas foram apagados pela própria acadêmica. Ela não registrou a condição de paralelismo. Ficou subentendido em virtude de a técnica anterior ter usado o mesmo recurso. Os registros verbais pareceram-lhe desnecessários por estar, no seu entender, repetindo uma técnica e estar recebendo questionamentos dos colegas. Por isso os registros foram poucos. Hariki (1992b) enfatiza esse ascpeto do discurso pedagógico. Foram registros verbais que ora eram apresentados de forma decisiva e ora de forma vacilante. Os geométricos seguiram o mesmo padrão de vacilamento. Há indicativos de que a acadêmica tinha certeza do que esperava como resultado, mas estava insegura quanto à técnica. De alguma forma mesmo quando se sabe onde vai chegar não se pode garantir que não ocorrerão erros, indecisões e tentativas mal sucedidas no processo. Sua técnica foi validada por todos quando lhe disseram “muito bem!” o que reflete ser uma técnica de fácil compreensão.

Nos três últimos casos os elementos tecnológicos foram os mesmos e a estrutura do argumento foi a mesma. Por essa razão não repetiremos o esquema de

Toulmin. A técnica, embora haja muita semelhança, não é a mesma. Em τ_2 houve o prolongamento dos dois lados do triângulo. Em τ_3 e τ_4 esse procedimento não se fez necessário. Em τ_4 foi preciso trabalhar com correspondência entre x e *a+b* o que não aconteceu em τ_3 . O conceito de o.p.v. foi usado apenas em τ_2 e o correspondente de *b* foi usado em τ_2 e τ_3 mas não em τ_4.

A exploração da técnica foi o momento didático mais vivenciado na resolução dessas tarefas. Os três exemplos nos mostram que é possível constituir uma praxeologia para demonstrar que a medida de um ângulo externo, de um triângulo, é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, tendo como técnica traçar paralelas. Traçar paralelas é uma técnica que tem uma boa "valência instrumental"[44] didática para o exercício da argumentação tanto explicativa quanto justificatória.

Após a conclusão surgiu um novo elemento.

Acadêmica P:

– Fiz de outro modo

Professor:

– Vem ao quadro

Acadêmica P:

– Não, estou insegura:

Acadêmica C:

– Empresta o caderno que eu passo no quadro.

Acadêmica C passou o exercício no quadro conforme fig. 52.

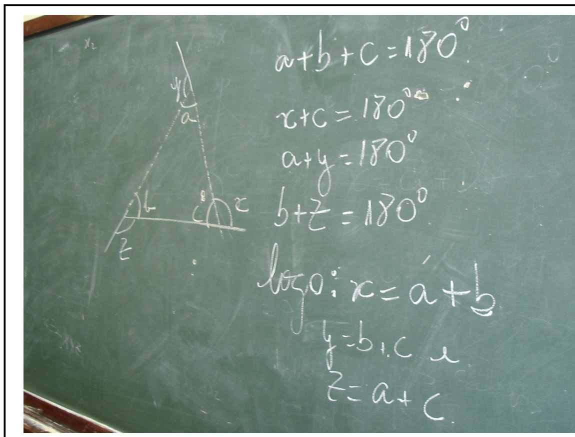


Figura 52- Extensão da sétima tarefa

[44] Na TAD o termo "valência instrumental" é aplicado aos objetos. Aqui, por nossa conta, estamos aplicando a uma técnica ou argumentação explicativa.

Discussão da técnica

Aparentemente nada foi provado com essa técnica. A acadêmica identificou os três ângulos externos do triângulo, fez os registros algébricos e escreveu a conclusão.

Professor:

– O que você viu de novo nessa resolução?

Acadêmica P:

– Que serve para todos os ângulos externos do triângulo.

Em entrevista posterior em que o exercício foi mostrado à acadêmica e a sua fala gravada, ocorreu o seguinte diálogo:

Professor:

– O que você viu nesta tarefa que a levou fazer o que fez?

Acadêmica P:

– Era para achar o valor de x. Pensei: se x está fora [é externo] e os outros dois estão dentro [são internos] então, pensei, os outros não podem valer a mesma coisa? No caso: x=a+b; y=b+c e z= a+c

Professor:

– Você percebeu isso olhando na figura ou através dos cálculos?

Acadêmica P:

– Olhando. Pensei: se vale para x por que não pode valer para os outros ângulos externos também?

Professor:

– Por que você fez este trabalho?

Acadêmica P:

– Foi para dizer que a+b+c=180º, x mais o suplementar dele é igual a 180º. *a* mais o suplementar dele é 180º e b+z=180º

Professor:

– Isso aqui não te ajudou na conclusão?

Acadêmica P:

– Não. Só olhei que vale. Se vale para x que é um ângulo externo por que não pode valer para os outros ângulos externos? Só pensei que poderia valer. Os cálculos ajudaram para encontrar o x.

A acadêmica seguiu um raciocínio indutivo e uma conclusão importante se pode tirar daqui: uma demonstração efetuada, ou mesmo uma prova, uma argumentação justificatória convincente, como foram os casos anteriores, não é garantia de que o acadêmico entendeu a generalidade da tese. Estender os seus efeitos a todos os casos não está ao alcance de muitos acadêmicos ainda que estes sejam participativos, como é o caso da acadêmica P. Ela parece ter intuído que vale para todos os casos mas não foi a partir da prova realizada, isto é, se tivesse sido formalizada uma demonstração, talvez o resultado não fosse diferente. A prova repetida quatro vezes não lhe “disse” que valia para todos os casos. Se a prova tivesse sido suficiente o assunto estaria encerrado para ela no momento da conclusão da mesma. Como ela estava tendo domínio sobre o assunto foi-lhe possível pensar posteriormente e estender a conclusão, independente das provas realizadas. Nesse caso, uma afirmação do professor sobre o assunto teria o mesmo valor da prova, conduziria a acadêmica à mesma conclusão? Será que a prova, ou a demonstração, não “particulariza” a resposta para muitos estudantes? Afinal, não faz sentido repetir o mesmo processo para todos os ângulos quando a intenção é provar. Faz sentido esse exercício de repetição quando a intenção é exercitar a argumentação, seja ela explicativa ou justificatória.

O interessante é que depois de resolver a mesma tarefa utilizando quatro técnicas diferentes, instituir quatro formas de explicar o mesmo resultado, usar uma ampla argumentação justificatória usando registros algébricos, supostamente portadores da idéia de generalização, a acadêmica tenha pensado: agora falta explicar, ou provar, que vale para todos. Está implícito que a acadêmica tenha entendido que a propriedade era de todos os ângulos (isto é, qualquer medida) que estivessem naquela posição. Para ela a generalidade valia para medida do ângulo e não para a posição dele. O exemplo nos mostra que a idéia *explícita* de generalidade em uma prova ou demonstração não é inerente. Nem todos percebem.

Esse é um fenômeno importante pela sua particularidade (ANDRÉ, 2008).

De alguma forma somos levados a pensar nas preocupações de Kline (1976), Lakatos (1978) e Rolkouski (2002) quanto ao tratamento didático que damos à argumentação ou à demonstração.

6.6 Terceira Etapa das Sessões

Ocorreu no dia 14/05/2009 e a definição de terceira sessão é a mesma que foi apresentada para as anteriores. Não há interrupção no trabalho do professor e pesquisador. Há um recorte proposital em uma atividade contínua. Todas as atividades são planejadas visando o desenvolvimento da argumentação, a participação de um maior número possível de acadêmicos embora a exposição pública das idéias ficasse restrita a uns poucos mas os trabalhos desenvolvidos em grupos ou individuais ocorreram em todas as sessões. Exceto um incidente mencionado anteriormente em que a acadêmica P sentiu-se desconfortada por uma observação de um colega, todo o contexto da sala de aula contribuía para que as idéias e as palavras fluíssem tranquilamente em um clima de perguntas, explicações e intervenções.

Os casos de congruência de triângulos já haviam sido trabalhados no mês de abril e também no mês de maio. Várias atividades haviam sido desenvolvidas com o objetivo de familiarizar os acadêmicos com a nomenclatura e identificar os casos de congruência. Nesse dia é proposta uma tarefa envolvendo argumentação e os casos de congruência. Chamamo-la de t_8.

Esta tarefa pertencente ao gênero "provar", estava relacionado com triângulos isósceles. De forma mais específica ela pertence a um terceiro tipo de tarefa (T_3): propriedades do triângulo isósceles.

6.6.1 Tarefa: Prove que, num triângulo ABC, se a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é também bissetriz do angulo Â, então o triângulo ABC é isósceles.

Demonstração canônica (fig.53)

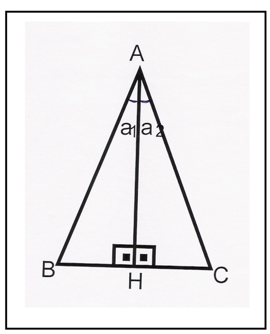


Figura 53-Demonstração do teorema (t_8)

Hipótese: $\overline{AH}$ é bissetriz e altura

Implicações: a_1=a_2 e $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

Consequência: $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e ΔABH ~ΔACH

Como $\overline{AH}$ é comum então ΔABH ≡ ΔACH

Logo: AB=AC e ΔABC é isósceles.

Ou

Hipótese: $\overline{AH}$ é bissetriz e altura

Implicações: $a_1 = a_2$ e $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

Como AH é lado comum aos triângulos ABH e ΔACH, pelo caso ALA tem-se que ΔABH ≡ ΔACH, AB=AC e ΔABC é isósceles.

Resolução da tarefa pelos acadêmicos

Este é mais um exemplo de uma tarefa levada a cabo coletivamente, e a foto (fig.54) foi obtida em dois momentos, procurando captar a dinamicidade do processo. Dito em outra palavras: a segunda foto capta os registros da primeira foto após sofrer correções feitas pela própria acadêmica. Essas correções ocorriam na medida em que a turma ia opinando.

Esclarecemos que o quadro de giz possui algumas ranhuras que, às vezes, sugerem que foram colocados determinados sinais distintivos nos registros algébricos. Essas marcas não foram colocadas, elas apareceram e devem ser desconsideradas.

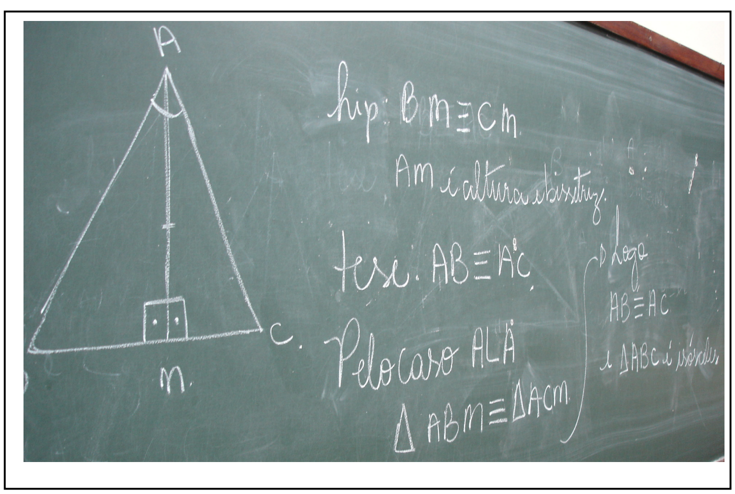


Figura 54-Primeira foto relativa à tarefa sete (t_7)

Figura 54a- Segunda foto relativa à tarefa sete (t_7)

Descrição da técnica matemática

Técnica τ_1	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Esboçar uma figura.	Um enunciado, em geometria, evoca uma figura.
Passo 2. Definir a hipótese.	Um teorema é composto de hipótese e tese.
Passo 3. Definir a tese.	
Passo 4. Identificar ângulos e lados congruentes em ambos os triângulos resultantes.	Bissetriz e altura definem ângulos congruentes e ângulos retos respectivamente. A coincidência delas define um lado comum para os dois triângulos resultantes.
Passo 5. Identificar um caso de congruência de triângulos.	Casos de congruência.
Passo 6. Definir outros dois lados congruentes.	Triângulos congruentes têm lados congruentes.
Passo 7. Afirmar que o triângulo é isósceles.	Triângulos isósceles têm dois lados congruentes.

Detalhamento do processo

Sendo uma demonstração dedutiva é uma argumentação que usa garantias. O pedido de aceitação está explícito na hipótese.

Foi uma atividade que privilegiou a participação coletiva. A acadêmica aprecia expor no quadro o que pensa, ir esboçando e contando com o apoio dos colegas. Havia informações complementares, perguntas, revisões e correções, nos grupos trabalhando em paralelo para conferir os resultados.

Os registros ostensivos não se diferenciam muito de uma tarefa para outra. De alguma forma há uma padronização. Especialmente na etapa final do processo todos têm os mesmos registros. Há predominância do verbal, em segundo lugar o geométrico e o registro na língua materna. O registro algébrico apareceu também e houve um titubear no registro da hipótese, equívocos na notação e imprecisões conceituais. Equívocos parcialmente sanados com a participação da classe.

Nem sempre é fácil separar a organização didática da organização matemática. Embora sejam distintas, na maioria das vezes, as duas estão imbricadas de tal forma que a tentativa de separação torna-se infrutífera.

Desenvolvimento Didático

Técnica τ_1	**Elementos Tecnológicos**
Passo 1. Vislumbrar a solução.	Interpretação do enunciado.
Passo 2. Definir uma estratégia matemática.	Para cada tarefa há uma estratégia que melhor resolve.
Passo 3. Expor em público	O debate produziu um conflito cognitivo que induziu à solução
Passo 4. Ir esboçando a solução	
Passo 5. Definir uma possível hipótese	
Passo 6. Corrigir a hipótese	
Passo 7.Afirmar que um caso de congruência resolve o problema.	

Os elementos teóricos são encontrados em Chevallard quando defende que a produção da matemática é uma produção social. O elemento fundamental no estudo é o aspecto social da matemática.

Frequentemente os trabalhos em grupo, ou expostos para a participação pública, favorecem o aparecimento de conflitos sociocognitivos. Sócios por não se tratar de conflitos internos e pessoais e cognitivos por estarem relacionados com o conhecimento. Ele está presente quando dois ou mais indivíduos se defrontam com o mesmo problema e interagem entre si na busca da solução. “A cooperação ativa entre alunos, a necessidade de explicar suas escolhas e de argumentar são favoráveis a um desenvolvimento do controle do aluno sobre a sua atividade” (ARSAC, 1992, p.177-178).

A participação da classe foi captada através de uma filmadora.

Antes da resolução no quadro os acadêmicos trabalharam em grupos e muitos resolveram a tarefa enquanto outros estavam a meio caminho da solução. A hora de vir ao quadro foi decidida voluntariamente pela acadêmica C.

Quando a acadêmica C desenhou o triângulo e traçou a bissetriz relativa ao ângulo marcou a intersecção dela com base com a letra M.

O professor perguntou:

– Por que você chama esse ponto de M? [*Ela antecipou BM=MC. O que devia ser visto como conseqüência ela viu como hipótese*].

Acadêmica C:

– Por que é bissetriz. [O registro gestual indicou a ceviana. *Equívoco conceitual*].

Alguém da classe:

– Altura

Acadêmica C marcou o ângulo bissectado e registrou a hipótese como sendo $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{AM}$ como altura e bissetriz. Virou-se para classe e perguntou pela tese.

Acadêmico JJ:

– A primeira hipótese [$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$] é a tese [*deve-se entender: primeira parte da hipótese*].

A opinião da classe se dividiu:

– A segunda hipótese [$\overline{AM}$ como altura e bissetriz] é a tese [*deve-se entender: segunda parte da hipótese*].

– Essa é hipótese.

Acadêmica C escreveu tese na segunda hipótese [$\overline{AM}$ como altura e bissetriz].

Acadêmico G

– Se ela escreveu hipótese é hipótese. Se está certo ou não é hipótese [*o acadêmico percebeu que hipótese é a verdade admitida. Se estiver equivocada não conduzirá à tese pretendida, mas não deixa de ser a verdade admitida. Em outras palavras: se ela admitiu isso como verdade deixemos para ver aonde vai chegar*].

A classe se descontraiu e houve risos. A acadêmica C também sorriu. Escreveu a tese como $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e apagou essa expressão [$\overline{AB} \equiv \overline{AC}$] da hipótese. Recebeu a provação da classe.

A acadêmica arriscou outra hipótese [em substituição a $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$]: $\overline{CM} \equiv \overline{BM}$.

Prosseguiu e desenvolveu toda demonstração. Foi sentar-se e o registro algébrico ficou sendo:

Hipótese: $\overline{CM} \equiv \overline{BM}$ e $\overline{AM}$ é altura e bissetriz

Tese: $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$

Caso de congruência: ALA

Conclusão: ΔABM≡ΔACM, logo $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e o triângulo ABC é isósceles.

Acadêmico G se dirigiu para o grupo próximo dele e para C.

– Ela escreveu na hipótese que $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$, mas não é verdade [*deve-se entender: não é hipótese. De fato:* $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$ *é consquência da hipótese*].

A acadêmica voltou ao quadro apagou a primeira parte da hipótese e escreveu: “No triângulo ABC”.

Nova intervenção da classe:

– Escreva em símbolos: triângulo ABC.

Acadêmica C escreve ΔABC e encerra a atividade. A classe dá-se por satisfeita.

Há que considerar aqui alguns equívocos de notação. Deve ser AB=AC e BM=CM ou $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{CM}$ e não como consta no registro da acadêmica. A parte inferior da foto é uma tentativa de corrigir o que está na parte superior. Quando o registro da parte inferior foi feito o registro da parte superior já estava apagado.

Embora titubeante, ainda com erros de notação a classe evoluiu da argumentação para a demonstração. O caminho percorrido foi o caminho da construção. A manipulação dos ostensivos foi satisfatória, carecendo de poucos reparos. A falta de registro de algumas etapas intermediárias que explicariam os passos deve ser considerado como natural nesse processo de aprendizagem.

Fica evidente que é possível elaborar uma organização didática que produza uma evolução da argumentação para a demonstração. O discurso explicativo e justificatório está em processo de ascensão do cotidiano para o científico. Nesse caso foi possível evoluir da argumentação para a demonstração.

Esquema de Toulmin

Dados: um triângulo e uma altura coincidindo com uma bissetriz.

Conclusão: o triângulo é isósceles.

Garantia: dois ângulos correspondentes são congruentes e um lado é comum.

Refutação: se a altura não for a bissetriz.

Suporte: bissetriz produz dois ângulos congruentes e altura produz dois ângulos retos. Bissetriz e altura representam um único elemento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tanto na Etnografia quanto na Teoria Antropológica do Didático o processo é mais importante do que o produto. O produto procurado por essas perspectivas teóricas é um processo, tendo em vista que está em constante transformação.

Quando o ser humano é parte integrante do processo, o produto da sua atividade, mesmo visto como elemento final é transitório porque um ser humano, enquanto sujeito cognoscente, somente se cristaliza com o fim da atividade vital ou intelectual.

O que se cristaliza é o conhecimento adjetivado. O conhecimento matemático, em cada uma das suas etapas, sofre cristalização. As relações que o ser humano estabelece com esse conhecimento continuam em expansão até à cristalização do sujeito. Nessa perspectiva o interesse do pesquisador é investigar como determinado fenômeno se desenvolve, se transforma e como esse desenvolvimento se manifesta a partir das atividades propostas.

A atividade matemática conforme já exposto, quando vista sob o olhar da TAD, se constitui nas relações que os seres humanos estabelecem com o conhecimento matemático; nas relações que estabelecem entre esse conhecimento e o contexto social e entre um tema de estudo e outro da própria disciplina. Nessa perspectiva a organização didática desenvolvida em sala de aula ou fora dela, visando o estudo da matemática, se constitui numa realidade sociológica. A organização didática do professor atende aos ditames da *práxis* imposta pela sociedade através da academia, dos livros didáticos, das diretrizes curriculares e da experiência de vida de cada um. A OD do professor é uma etapa da transposição didática que transforma o saber acadêmico em saber escolar. É através dela que se orientam as relações entre professor e aluno, entre aluno e aluno, entre aluno e conhecimento e entre o aluno e a sociedade, tendo o próprio conhecimento como o principal fator.

Na continuação desse processo temos os acadêmicos de Licenciatura em Matemática como porta de entrada para a Geometria Euclidiana nas salas de aulas da Educação Básica e como mais um elo na transposição didática entre o saber acadêmico e o saber escolar.

Como na Etnografia uma realidade sociológica é a maneira padronizada de duas ou mais pessoas se comportarem em relação umas às outras, estamos denominando de realidade sociológica intelectual a uma maneira padronizada de se comportar frente ao conhecimento (um conhecimento específico).

Admitimos que a organização didática para o estudo coletivo ou individual, na qual os momentos de estudo são vivenciados, é produto de uma realidade sociológica, pois o sujeito é parte integrante de uma sociedade que traz as marcas da civilização na qual está inserida. Essa organização individual do sujeito reflete as relações que vivencia no seu contexto social, seu contexto escolar e os valores construídos a partir das relações estabelecidas nesse contexto. De igual modo a organização didática do professor é produto de sua formação, da sua experiência profissional e da sua consciência política. O que se efetiva em sala de aula é o produto das relações do aluno com o conhecimento e da organização didática do professor. É uma realidade sociológica intelectual.

Outro fator importante a destacar é: em nosso contexto de um curso para a formação de professores, estamos entendendo que a argumentação, na perspectiva com que foi tratada, cria uma realidade sociológica porque estabelece parâmetros para as relações citadas acima. Faz parte também de uma realidade sociológica intelectual porque é uma forma de cada indivíduo ou grupo relacionar-se com o conhecimento matemático. Uma realidade que se revelou possível de ser produzida em um curso de Licenciatura em Matemática. O teorema Kamyle e a resolução da oitava tarefa onde um teorema foi demonstrado sem intervenção do professor e sem consultas atestam dessa possibilidade.

Como a TAD não tem por objetivo estudar como se processa a formação de conceitos pelo sujeito, mas analisar os usos que ele faz dos conceitos, uma atividade didática pressupõe a manipulação dos objetos ostensivos como forma de trabalhar com os objetos não-ostensivos. Em virtude disso nos ocupamos de uma análise do que foi feito com os primeiros e o que foi dito sobre os segundos; como essa relação estava sendo estabeleceida.

As tarefas propostas sempre visavam proporcionar a oportunidade dos sujeitos revelarem o momento de estudo que estavam sendo vivenciados. Esse momento de estudo tornou-se evidente através dos recursos tecnológicos dominados e da busca de padrões como no caso da triangulação, or exemplo. A exposição da técnica, de forma pública permitiu avaliar e descrever a relação dos sujeitos com os objetos ostensivos e, consequentemente, com os objetos não-ostensivos.

Os registros de linguagem trouxeram à tona o domínio dos recursos de comunicação e a lógica da argumentação. Esses registros, no entanto, permaneceram mesclados ao longo do processo. Ora pedominavam os de caráter temporário, gestual e comunicação oral, e ora predominavam os de caráter permanente (o geométrico, o algébrico e o escrito na língua materna). Essa "convivência" do registro geométrico com o registro gestual, do registro verbal com o registro escrito é um consequência direta do processo interacionista adotado.

O trabalho em grupo proporcionou o ambiente democrático e desafiador para o florescimento da arte de argumentar na busca do esclarecimento e do estabelecimento de uma verdade. O livre curso das idéias, uma vez que era permitido consultar qualquer pessoa ou grupo da sala, revelou a cada um as fragilidades do seu argumento e trouxe a público, na exposição da resolução da tarefa, apenas os argumentos fortes naquele nível de desenvolvimento em que se encontravam. Adotamos essa variante metodológica para provocar discursos: os grupos eram formados livremente e a participação era coletiva. Cada grupo podia opinar no grupo do outro.

Em se falando de processo cabe salientar que em princípio os acadêmicos julgavam o processo pela lógica da ciência matemática, a lógica binária: certo ou errado. O interesse consistia em saber se tanto o processo como o resultado estavam corretos ou não. Se já poderiam anotar e aplicar o modelo. Em um segundo momento nessa trajetória lhes interessava saber se haviam outras técnicas que também poderiam resolver a mesma tarefa.

O passo seguinte foi julgar a técnica utilizada pela conclusão a que conduzia, pela facilidade de ser entendida, pela sua completude/incompletude, e pela adequação à tarefa, isto é, pela possibilidade de se constituir parte de uma praxeologia.

Às vezes o processo revelava um avanço nas articulações entre a teoria e a técnica e um recuo nos registros. Outras vezes revelava um avanço nos registros mas o discurso justificatório era "folclórico". Houve uma dinamicidade entre processo e produto e procuramos descrever o fenômeno em cada contexto diferente em que o mesmo se mostrava e focalizar as suas múltiplas faces percebidas pela consciência do pesquisador.

As argumentações explicativas, inicialmente marcadas pela ausência de formalidade, revelavam que estava havendo entendimento por parte de quem as apresentava. Indicavam não se tratar de um processo memorizado, mas de apresentar formas de fazer e de justificar os passos da técnica. Passado o momento inicial em que os sujeitos esperavam simplesmente seguir a "tradição", os erros eram percebidos e corrigidos por eles próprios. Os argumentos justificatórios ultrapassaram os limites do ingênuo, do folclórico e da "tradição" e se aproximaram do racional lógico-dedutivo.

No teorema Kamyle ficou evidente o desejo de verdade e a necessidade de buscar argumentos para convencer, no sentido matemático. Os acadêmicos entraram na obra matemática. Eles assumiram a tarefa, criaram uma técncia e encontraram a solução. Este é um ponto relevante do trabalho porque a função da escola é encaminhar para a verdade científica. O processo didático em matemática se manifesta na busca dessa verdade.

Todo problema de geometria exige justificativa porque a figura induz a uma resposta. Podemos notar que no caso Kamyle os acadêmicos assumiram essa necessidade de explicar. Pela argumentação revelaram consciência do que é relevante, dos porquês das regras e da importância que atribuíram em articular elementos teóricos através de uma técnica. Esse teorema mostrou um caminhar da argumentação justificatória ingênua para a lógica e sistemática.

E para concluir, propomos algumas questões que poderão servir de parâmetro para avaliar uma organização didática. São desafios ao professor que tem a função de preparar o futuro professor de matemática.

- A organização didática é excessivamente diretiva? Há dogmatização, *a priori,* da técnica?
- Algumas tarefas com propriedades autoevidentes são exploradas?
- Permite que novas técnicas e técnicas "novas" sejam testadas?
- O conflito sócio-cognitivo é vivenciado ou estimulado?
- As diversas formas de registros são valorizadas?
- Há exploração de técnicas, argumentos justificatórios, produção de conjeturas, validação de técnicas e generalização de resultados? Produção tem o mesmo sentido atribuído à palavra criar, isto é, há diversos níveis de produção.
- Proporciona a vivência simultânea de diversos momentos didáticos?
- Evidencia a necessidade de entrar na obra matemática? Contém desafios no nível que podem resolvidos com os conhecimentos já disponilizados aos acadêmicos?

ANEXO A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado (a) Acadêmico (a)

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa sobre o ensino de geometria. Antes, porém, você deve decidir se quer participar ou não. Após a leitura do termo pelo professor e pesquisador Antonio Sales você terá a oportunidade de ler e tirar qualquer dúvida que você tiver. Mesmo não desejando participar do estudo, você deve participar das atividades da disciplina, a diferença reside no fato de que sua participação não será considerada para análise posterior.

A finalidade deste estudo é conhecer os processos de argumentação no desenvolvimento de atividades geométricas visando proporcionar elementos para a implementação de uma organização didática e matemática para o ensino da geometria.

A sua participação consistirá em desenvolver algumas atividades individuais ou em grupos durante as quais se evitará qualquer tipo de constrangimento.

O resultado obtido poderá ser utilizado para fins educacionais tais como elaboração de artigos para serem divulgados em revistas ou eventos da área educacional, elaboração de teses, dissertações, monografias ou elaboração de cursos e palestras sempre visando a melhoria do ensino da matemática como um todo e da geometria em particular. A sua identidade pessoal será protegida. Os que desejarem ser coautores de artigos poderão sê-lo desde que participem de todo o processo de construção do artigo.

Não haverá nenhuma compensação financeira pela a sua participação, nenhum prejuízo pela eventual não participação, portanto, a sua participação na pesquisa é inteiramente voluntária. Valerá apenas como contribuição para estudos na área de Educação Matemática.

Declaro que li e entendi este formulário de consentimento, que todas as minhas dúvidas foram esclarecidas e que sou voluntário (a) a tomar parte nessa pesquisa.

Nome do (a) acadêmico (a): ____

RGM: ___________ Data: ___/____/ 2009   Telefone:________________________

Cidade onde Reside: ____

ANEXO B

Exemplos de argumentos dedutivo, indutivo e abdutivo, em geometria na perspectiva de Pierce.

Dedução

Regra: X é um conjunto de quadriláteros

Fato: Sejam algumas figuras pertencentes a X

Conclusão: Essas figuras são quadriláteras

Indução

Fato: Temos algumas figuras retiradas do conjunto X

Conclusão: São figuras quadriláteras

Regra: X é um conjunto de quadriláteros

Abdução

Regra: X é um conjunto de quadriláteros

Conclusão: Estas figuras são quadriláteras

Fato: Estas figuras pertencem ao conjunto X

Exemplos elaborados pelo pesquisador a partir do texto do autor

ANEXO C

Ementas das disciplinas de Fundamentos da Matemática I e II conforme o Projeto Pedagógico do curso, em vigor desde 2005.

Fundamentos da Matemática I - 136 horas

Ementa: Conjuntos. Noções de Lógica. Números Inteiros, Relativos, Racionais, Irracionais e Reais. Funções.

Objetivos: Desenvolver habilidades na interpretação dos conjuntos numéricos para organizar e sistematizar o ensino de funções.

Bibliografia Básica:

IEZZI, Gelson (et al.) **Fundamentos de Matemática Elementar**.v.1 São Paulo: Atual, 1993.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Funções e Derivadas**.vol. 6 São Paulo: Atual, 1988.

NIVEN, I. **Números:** Racionais e Irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, v. 6, SBM.

MACHADO, Nilson José. **Matemática por assunto**. v.1, São Paulo: Scipione, 1988.

Fundamentos da Matemática II - 136 horas

Ementa: Teorema de Tales e Pitágoras. Relações Métricas no Triângulo Retângulo. Ciclo Trigonométrico. Funções Trigonométricas. Números Complexos.

Objetivos: Desenvolver os conceitos de funções e equações trigonométricas e suas aplicações bem como as operações com números complexos representando-os geometricamente em sua forma trigonométrica.

Bibliografia Básica:

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**.v.3. São Paulo: Atual, 1978

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**.v.6 São Paulo: Atual, 1977.

ANTUNES, F.C. **Matemática por Assunto.** v. 3. São Paulo: Scipione, 1989.

MACHADO, A.S. **Matemática, Temas e Metas**: Trigonometria, v. 2, São Paulo: Atual, 1986.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2000 (verbete: praxiologia).

ABREU, Antônio Suárez. **A Arte de Argumentar**: gerenciando razão e emoção. 11. Ed. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2006.

ALEKSANDROV, A.D. et al. **La matemática**: su contenido, métodos y significado. vol.1. Madrid: Alianza Universidad,1985.

ALMOULOUD, Saddo Ag et. al. **A geometria no ensino fundamental**: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**. Set/Out/Nov/Dez 2004 N°27. Disponível em < http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf > Acesso em: 25 out 2009.

ANDRÉ, Marli Eliza D.A.; LÜDKE, Menga. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: EDUSP, 1986.

ANDRÉ, Marli Eliza D.A. **Etnografia da Prática Escolar**. 14. ed. Campinas, SP: Papirus, 2008.

ARSAC, Gilbert. **Initiation au Raisonnement Déductif au Collège**. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

BALACHEFF, Nicolas. **Une étude des processus de preuve em mathématique chez des élèves de Collège**.Université Joseph Fourier-Grenoble I, INPG, 1988. Tese (doutorado).

BALANHUK, Salmita. **A argumentação como uma etapa das demonstrações matemáticas no ensino fundamental**. Curitiba: UFPR, 2003. Dissertação (mestrado)

BANNELL, Ralph Ings. **Habermas & Educação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BARROSO, Juliane Matsubara (Ed.). **Projeto Araribá**: matemática. São Paulo: Moderna, 2006 (7ª série).

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p.79-90. Rio Claro: UNESP, 2002.

BICUDO, Irineu. História da Matemática: o pensamento da filosofia grega antiga e seus reflexos na educação matemática do mundo ocidental. In: BICUDO, M.A.V.

(org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. Autores e editores de compêndios e livros de leitura (1810-1910). **Educ. Pesqui**. vol. 30 no. 3, São Paulo, Sept./Dec. 2004.

BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves . Ostensifs et Sensibilité aux Ostensifs dans l'activité Mathématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 19/1, 77-124, 1999.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph. Organizer l´Etude. 2... Theories & Empires. In: DORIER, J.L et al.(eds). Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques-corps 21 -30 Août 2001, p.23-40.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Las Prácticas Docentes del Profesor de Matemáticas.** Versão provisória apresentada XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques que se celebró en Agosto de 2001. Disponível em < www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF **>** Acesso: 31 mai 2010.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. **Decreto nº 1.331A de 17 de Fevereiro e 1854**. Approva o Regulamento para a reforma do ensino primario e secundario do Municipio da Corte. Disponível em < http://www.camara.gov.br/Internet/InfDoc/conteudo/colecoes/Legislacao/1854%20pronto/leis%201854/dec%20n°1325%20à%201331A-pg12-p11.pdf> Acesso: 21 dez. 2009. (artigo 7º, parágrafo primeiro)

BRASIL. Decreto n.º 91.542 de 19 de Agosto de 1985. Institui o Programa Nacional do Livro Didático, dispõe sobre sua execução e dá outras providências. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, p. 12178, 20 ago. 1985, Seç. I.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Escolha do livro didático**. Brasília: Ministério da Educação, 2009a. Disponível em< http://portal.mec.gov.br/index.php?option= com_content&view=article&id=index.php?option=com_content&view=article&id=13658 > Acesso: 8 dez. 2009.

BRASIL. FNDE. **Livro Didático**. Brasília: Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, 2009b. Disponível em: < http://www.fnde. gov.br/index.php/programas-livro-didatico > Acesso: 8 dez. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008**: Matemática. Brasília: MEC, 2007.

CALLAHAN, Gene. **Economia praxeológica e Economia matemática**. London School of Economics, U.K., 2008 Disponível em <http://www.mises.org.br/Article.aspx?id=95> Acesso em 20 ago 2008.

CASABÓ, Marianna Bosch. **Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática**. Quarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. Disponível em < http://www.seiem.es/publicaciones/ archivos publicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf > Acesso em 11 de jun de 2009.

CASSIANO, Célia Cristina de Figueiredo. **O mercado do livro didático no Brasil: da criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) a entrada do capital internacional espanhol (1985-2007).** São Paulo: PUCSP, 2007. Tese (doutorado)

CAVALCANTE, Luiz G. et al. **Para saber Matemática**, 7ª série. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

CENTURIÓN, Marília Ramos; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Novo Matemática na Medida Certa**: 7ª série. 10. ed. São Paulo: Scipione, 2008.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Sociedade**, 2, 1990, p. 177-229.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol 19, nº 2, p. 221-266, 1999.(Versão em espanhol não paginada)

CHEVALLARD, Yves. Notes sur l'individualisation de la formation. Communication orale faite le 2 septembre 1994 dans le cadre des Journées de formation dês formateurs organisées par l'IUFM d'Aix-Marseille sur le thême Individualisation de la formation et différenciation de la formation dans les groupes de formation professionnelle (Digne, 2 & 3 septembre 1994). **Paru dans Didaskalia**, no 6, p. 115-131. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article. php3?id_article=69 > Acesso em :17 fev 2009.

CHEVALLARD, Yves. **Organizer L´Etude**. 1. Strutures & Fonctions. In: DORIER, J.L et al.(eds). Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques-corps 21 -30 Août 2001, p. 3-22.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Yves. **Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),** Escuela de Magisterio de Huesca, Universidad de Zaragoza, 1 de abril de 2001.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didactica**.3.ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. *In:*LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (orgs.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática a história de uma ciência em tudo por tudo fascinante**. 3.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DEWEY, John. **Cómo Pensamos**. Madrid: Ediciones de la Lectura, 1928.

DOMINGUES, Hygino H.. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **BOLEMA:** Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p. 55-67. Rio Claro: UNESP, 2002.

DUVAL, Raymond. Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive? "**Petit X" nº 31,** p. 37-61, 1992-1993.

ECO, Umberto. **A Estrutura Ausente**: uma introdução à pesquisa semiológica. 7.ed. São Paulo: Perspectiva, 2003.

FARIA FILHO, Luciano Mendes de et al. **A cultura escolar como categoria de análise e como campo de investigação na história da educação**. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 30, n.1, p. 139-159, jan./abr. 2004. Disponível em < http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n1/ a08v30 n1. pdf> Acesso em: 18 maio 2008.

FERNANDES, Francisco, LUFT, Celso Pedro, GUIMARÃES, F. Marques. **Dicionário Brasileiro Globo**. 56.ed. São Paulo: Globo, 2003.

FETISSOV, A. **A Demonstração em Geometria**. Moscou: Editora Mir, 1985.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2.ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. **L´ativité de validation lors du passage de l´arithmétique à l´algèbre: une étude des types de preuves produites par les élèves de collège/lycée**. Université Montpelier II, 1993. Tese (doutorado).

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática**. Rio Claro, SP: UNESP-Instituto de Geociência e Ciência Exatas, 1995. Tese (doutorado).

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. As Demonstrações em Matemática: um ensaio **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p. 91-99. Rio Claro: UNESP, 2002.

GASCÓN, Josep. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, julio, año/vol.4, número 002. Comité Latinoamericando de Matemática Educativa. Distrito Federal, México, 2001, p. 129-159. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/IndArtRev.jsp?iCveNumRev=4169&iCveEntRev=335> Acesso em: 9 nov. 2009.

GASCÓN, Josep. **A necessidade de utilizar modelos em didática das Matemáticas**. XI JAEM (Jornada de aprendizagem e ensino das Matemáticas), Tenerife e Gran Canárias, julho de 2003.

GONÇALVES JÚNIOR, Oscar. **Matemática por assunto**: geometria plana e espacial. São Paulo: Scipione, 1995.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** Porto Alegre: Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação/UFRGS, 2001. Tese (doutorado).

GURGEL, Célia Margutti do Amaral. Pesquisa etnográfica e educação matemática: processo, contextualização e construção. **Linhas** - Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação de Universidade do Estado de Santa Catarina. Vol. 6, N° 1 (2005). Disponível em: <http://www.periodicos.udesc.br/ linhas/ojs/viewarticle. php?id= 68 > Acesso em: 29 de mai de 2009.

HABERMAS, Jürgen. **Conhecimento e Interesse**. São Paulo: Abril S.A., 1975 (Col. Pensadores, XLVIII).

HARIKI, Seiji. **La ambiguedad en el discurso matemático**. Epsilon nº 22, 1992a, p. 99-103.

HARIKI, Seiji. **Analysis of Mathematical Discourse**: Multiple Perspectives. University of Southampton: Faculty of Mathematical Studies, 1992b.Tese (doutorado)

HUSSERL, Edmund. **Investigações lógicas**: sexta investigação: elementos de uma elucidação fenomenológica do conhecimento. São Paulo: Nova Cultural, 2000.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**: 7ª série. 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

KALEFF, A. M. Tomando o Ensino de Geometria em Nossas Mãos... **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, Ano I, nº 2, p. 19-25, 1994.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LACROIX, S.F. **Élémens de Géométrie a l´usage de l´Ecole Centrale des quatre-nations.** 7.ed. Paris, Fr: Courcier, 1808. Disponível em: < www.gallica.bnf.fr> Acesso em 2008.

LAKATOS, Imre. **A Lógica do Descobrimento Matemática**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEANDRO, Ednaldo José. **Um panorama de argumentação de alunos de educação básica: o caso do fatorial**. Dissertação de Mestrado Profissional. São Paulo: PUC-SP, 2006. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca /arquivo.php? codArquivo=5067 > Acesso em: 11 outubro 2007.

LEGENDRE, A.M. **Éléments de Géométrie, avec des notes**.11. ed. Paris, Fr: Firmin Didot, 1817. Disponível em: < www.gallica.bnf.fr> Acesso em 2008.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994

MALINOWSKI, Bronislaw. **Argonautas do pacífico ocidental**. São Paulo: Abril S.A. Cultural e Industrial, 1976. (Col. Pensadores)

MALINOWSKI, Bronislaw. **Uma teoria científica da cultura**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

MARTZLOFF, Jean-Claude. As chaves do cálculo. In: **Correio da UNESCO**: Viagem ao País da Matemática. O Correio, Rio de Janeiro, Ano 18, nº 1, p. 21-28, Fundação Getúlio Vargas, 1990.

MATOS, João Felipe. **Estudos etnográficos em educação matemática: implicações da análise de estudos realizados em Portugal**. O trabalho está disponível na internet desde 1996. Disponível em < http://www.spce.org.pt/ sem/96matos.pdf.> Acesso em: 1º de jun de 2009. Não paginado.

MERLEAU-PONTY, Maurice. **Fenomenologia da Percepção**. Rio de Janeiro: Feitas Bastos, 1971.

MOREIRA, José dos Santos. **Elementos de Estatística**. 9.ed. São Paulo: Atlas, 1982.

MOYSÉS, Lucia Maria Moraes. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. 6.ed. Campinas, SP: Papirus, 2004.

OLÉRON, Pierre. **L´Argumentation**. 2 ed. Paris: PUF, 1987.

OLÉRON, Pierre. **Le raisonnement**. Paris: Presses Universitaires de France, 1977.

OSÓRIO, Victor Larios. "**Las Conjeturas en los Procesos de Validación Matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática"**. Querétero, México: Universidad Autónoma de Querétaro, 2000. Tese de maestria. Disponível<http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.htm > Acesso em: 23 maio 2008.

OSÓRIO, Victor Larios. Demostraciones y conjeturas en la escuela media. **Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas**. Año 2, num.3. Enero, 2002. Disponível em: < http://www.uaq.mx/matematicas/redm/> Acesso em: ago 2007.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática**: uma introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2000.

PAIS, Luiz Carlos. **Notas de aula sobre níveis de argumentação**. Campo Grande, MS: 2008. Não publicado. Não paginado.

PASTOR, J. Rey; ADAM, P. Puig. **Metodologia de la matemática elemental**. 2. ed. Buenos Aires: Editorial Ibero-Americano, 1948.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, Campinas, Faculdade de Educação da UNICAMP, Ano I, nº 1, 1993.

PEDEMONTE, Bettina. **Etude didactique et cognitive des rapportes de l´argumentation et de la démosntration dans l´aprentissagem des mathetmatiques**. Grenoble,Fr:Université Joseph Fourier-Grenoble I; Gênova, It: Université de Genova, 2002.Tese (doutorado).

PEIRCE, Charles Sanders. **Escritos coligidos**. 3.ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983.(Coleção Pensadores)

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. 3.ed. São Paulo: Perspectiva, 2003.

PEREZ, Geraldo. **Pressupostos e Reflexões Teóricas e Metodológicas da Pesquisa Participante no Ensino de Geometria para as Camadas Populares**. Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 1991. Tese (doutorado).

PETRUSZEWYCZ, Micheline. **A propos de la praxéolgie**. **Matethématiques et sciences humaines,** tome 11 (1965), p. 11-18. Disponível em < http://archive .numdam.org/ARCHIVE/MSH/MSH_1965__11_/MSH_1965__11__11_0/MSH_1965__11__11_0.pdf > Acesso em: 21 ago 2009.

PIETROPAOLO, Rui César. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. São Paulo: PUC/SP, 2005. Tese (doutorado).

PLANTIN, Christian. **A argumentação**. São Paulo: Parábola Editorial, 2008.

RAMIRES, Mario Marques. **O sofista, a comunicação e a cultura**. Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS, 1993. (Monografia não publicada).

ROBOTTI, Elisabetta. **Le Role de la Verbalization entre les Aspects Figuarux et Théorique dans le Processus de Démonstration d´un Probléme de Géometrie Plane**. Grenoble,Fr:Université Joseph Fourier-Grenoble I; Gênova, It: Université de Genova, 2002. Tese (doutorado).

ROLKOUSKI, Emerson. **Demonstrações em Geometria**: uma descrição do seu processo de construção, por alunos de licenciatura em Matemática, em ambiente informatizado. Curitiba: UFPR, 2002. Dissertação (mestrado)

SALES, Antonio. A demonstração e o Ensino da Matemática. **Ensaios e Ciência**. Campo Grande, MS, v.2, n.3, p. 145-152, 1998.

SALES, Antonio, et. al. A Escolha do Livro Didático pelo Professor de Matemática. In: MACHADO, Ilma Ferreira. **Revista da Faculdade de Educação/ Universidade Estadual de Mato Grosso**: multitemática. Ano VI, nº 9 (jan./jun. 2008), p. 73-90. Cáceres–MT: Unemat, 2008.

SALES, Antonio. **Diário de Bordo**. Nova Andradina-MS: UEMS, 2009.

SANTOS, Marcilene Moreira dos; SALES, Antonio. **A demonstração, prova e argumentação no ensino da matemática.** Nova Andradina, MS: Simpósio de Educação Matemática de Nova Andradina, 21 a 24 de outubro de 2009.

SAKATE, Maria Massae. **Concepções de Professores sobre Possibilidades Didáticas no Ensino da Geometria Decorrentes do uso da Informática**. Campo Grande, MS:PPGEDU/UFMS, 2003. Dissertação (mestrado)

SCHUBRING, Gert. **Análise Histórica de Livros de Matemática**: notas de aula. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático.In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et al. **Educação Matemática**: uma introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2000.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, Jairo José. Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p. 68-78. Rio Claro: UNESP, 2002.

SILVA, Teresinha Maria Nelli. **A trajetória da inovação em uma escola: uma leitura através da interdisciplinaridade**. São Paulo: PUC/SP, 1994. Tese (doutorado)

SOUZA, Tarcisio Luiz Leão e; HIANE, Pedro. Exames de Preparatórios em Matemática: o passaporte do ensino secundário ao ensino superior (1854–1903). In: **Seminário Educação 2009**: Políticas Educacionais: Cenários e Projetos Sociais (17.:2009: Cuiabá, MT). 17º Seminário Educação. Cuiabá:UFMT, 2009.

SNAPPER, Ernest. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. **Humanidades**. Brasília: 2(8), Jul/set. 1984.

SWIATKIEWICZ, Olgierd. **Por que não uma abordagem praxeológica?! Análise Psicológica (1997)**, 4 (XV): 637-644. Disponível em < http://www.scielo. oces.mctes.pt/pdf/aps/v15n4/v15n4a10.pdf > Acesso em: 02 Nov de 2009

TARDIF, Maurice; LESSARD, Claude. **O trabalho docente: elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2005.

TOULMIN, Stephen Edelston. **Os usos do argumento**. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL. Disponível em: http://www.uems.br/portal > Acesso em: 23 jun 2009.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil In: VALENTE, Wagner Rodrigues (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: SBEM, 2003.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

VIGO, Verônica Molfino. **Lugares Geométricos: cual es su rol en la ensenanza de la demonstración em geometria?** México, DF: IPNCICATA, 2006. Dissertação de mestrado. Disponível em < http://itzamna.bnct.ipn.mx:8080/dspace/bitstream /123456789/1567/1/1462_2006_CICATA-LEGARIA_MAESTRIA_molfino_vigo _veronica. pdf >Acesso em: 19 jul 2009.