

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS AMBIENTAIS

ALINE CRISTINA DE SOUZA ANDRADE

DETERMINAÇÃO DE HIDROGRAMA UNITÁRIO
INSTANTÂNEO GEOMORFOLÓGICO - BACIA DO RIBEIRÃO
SALOBRA

CAMPO GRANDE
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS AMBIENTAIS

ALINE CRISTINA DE SOUZA ANDRADE

DETERMINAÇÃO DE HIDROGRAMAS UNITÁRIOS
INSTANTÂNEO GEOMORFOLÓGICO - BACIA DO RIBEIRÃO
SALOBRA

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Tecnologias Ambientais da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, na área de concentração em Saneamento Ambiental e Recursos Hídricos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jorge Luiz Steffen

Aprovada em: 26/04/2007

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Luiz Steffen
Orientador – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Silvio Bueno Pereira
Universida Federal da Grande Dourados

Prof. Dr. Teodorico Alves Sobrinho
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande, MS
2007

Ficha catalográfica preparada pela
COORDENADORIA DA BIBLIOTECA CENTRAL/UFMS



AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar presente em todos os momentos da minha vida, meus pais pelo incentivo e meu marido pelo carinho e atenção durante esse período.

Ao Prof. Dr. Jorge Luiz Steffen pela orientação fornecida durante a elaboração do trabalho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Hidráulica e Transporte pela atenção, amizade e aprendizado.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	I
LISTA DE TABELAS.....	II
RESUMO	VI
ABSTRACT	VII
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 OBJETIVOS.....	3
3 JUSTIFICATIVA DO DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO.....	4
4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	5
4.1 GEOMORFOLOGIA QUANTITATIVA	5
4.2 MÉTODO DO HIDROGRAMA UNITÁRIO	8
4.3 MÉTODO HIDROGRAMA UNITÁRIO INSTANTÂNEO (HUI).....	10
4.4 TRANSFORMAÇÃO DO HUI EM HU	11
4.5 MÉTODO HIDROGRAMA UNITÁRIO INSTANTÂNEO GEOMORFOLÓGICO (HUIG).....	14
4.6 ESTIMATIVAS PARA O CRITÉRIO DA VELOCIDADE (V) DO HUIG	35
5 METODOLOGIA.....	39
5.1 ESCOLHA DA BACIA E LEVANTAMENTO DE DADOS	39
5.2 ESCOLHA DO MODELO HIDROLÓGICO.....	42
5.3 METODOLOGIA UTILIZADA NA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA	43
5.4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO COMPUTACIONAL	47
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
6.1 BACIA DE 4ª ORDEM.....	49
6.2 BACIA DE 3ª ORDEM “D”.....	55
6.3 BACIA DE 3ª ORDEM “E”	60
6.4 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES.....	65
7 CONCLUSÕES.....	73
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	74

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 4.1 MODELO DA BACIA HIDROGRÁFICA. (DEPARTMENT OF EARTH AND ENVIRONMENTAL SCIENCE NEW MEXICO INSTITUTE OF MINING AND TECHNOLOGY, 2005).....	6
FIGURA 4.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE STRAHLER PARA ORDENAÇÃO DA REDE DE DRENAGEM.....	6
FIGURA 4.3 ESQUEMA DO HIDROGRAMA UNITÁRIO.....	9
FIGURA 4.4 REPRESENTAÇÃO DE UMA BACIA DE 4 ^A ORDEM.	31
FIGURA 4.5 ESQUEMA DE UM RESERVATÓRIO GEOMORFOLÓGICO.....	33
FIGURA 5.1 LOCALIZAÇÃO DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA (FONTE POLIZER, 2002).....	39
FIGURA 5.2 LOCALIZAÇÃO DA BACIA HIDROGRÁFICA DO MIRANDA INSERIDA NA BACIA DO ALTO PARAGUAI...	40
FIGURA 5.3 IMAGEM DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA (GOOGLE EARTH, 2007).	40
FIGURA 5.4 VISÃO DA BACIA MOSTRANDO DIVERSAS OCUPAÇÕES (CAMPO, CERRADO E MATA). (FONTE: POLIZER, 2002).....	41
FIGURA 5.5 MAPA DE PORCENTAGEM DA COBERTURA DO SOLO EM 2001. (FONTE POLIZER, 2002).....	42
FIGURA 5.6 EXUTÓRIA DO RIBEIRÃO SALOBRA, NA CONFLUÊNCIA COM O RIO AQUIDAUANA. (FONTE: POLIZER, 2002).....	44
FIGURA 5.7 - LIMITAÇÕES BACIAS 3A ORDEM D E 3A ORDEM E.	44
FIGURA 6.1 PERFIL LONGITUDINAL DO TALVEGUE PRINCIPAL - BACIA 4A ORDEM.....	50
FIGURA 6.2 CARTA DE DECLIVIDADE DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA. (FONTE POLIZER, 2002).	50
FIGURA 6.3 FOTO DA PAISAGEM, MOSTRANDO A LONGA EXTENSÃO DAS VERTENTES COM BAIXA DECLIVIDADE. (FONTE POLIZER, 2002).....	51
FIGURA 6.4 MODELO DIGITAL DE ELEVAÇÃO DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA. FONTE: POLIZER (2002).....	51
FIGURA 6.5 DIAGRAMA DE HORTON PARA A BACIA DE 4 ^a . ORDEM.....	52
FIGURA 6.6 PERFIL LONGITUDINAL – (3A ORDEM “D”).....	56
FIGURA 6.7 DIAGRAMA DE HORTON 3 ^a ORDEM “D”.....	57
FIGURA 6.8 PERFIL LONGITUDINAL - 3A ORDEM “E”.....	61
FIGURA 6.9 DIAGRAMA DE HORTON 3A ORDEM “E”.....	61
FIGURA 6.10 HIDROGRAMA BACIA 4 ^a . ORDEM: SEM AMORTECIMENTO (A), COM AMORTECIMENTO (B).....	66
FIGURA 6.11 HIDROGRAMA BACIA 4 ^a . ORDEM COM AMORTECIMENTO.	66
FIGURA 6.12 HIDROGRAMA BACIA 3A ORDEM “D” (A) E 3A ORDEM “E” (B).....	68
FIGURA 6.13 COMPARAÇÃO ENTRE OS HIDROGRAMAS DE 3A. ORDEM.	69
FIGURA 6.14 HIDROGRAMA DA BACIA DE 3A. ORDEM “D” - $v = 1,04$ M/S.....	70
FIGURA 6.15 HIDROGRAMA DA BACIA DE 3A. ORDEM “E” - $v = 0,95$ M/S.	71

LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1 TRAJETÓRIAS PERCORRIDAS PELA ÁGUA.	24
TABELA 4.2 TRAJETÓRIAS PERCORRIDAS PELA ÁGUA.	26
TABELA 6.1 PARÂMETROS FÍSICOS DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA (BACIA DE 4. ORDEM).....	49
TABELA 6.2 RAZÕES GEOMORFOLÓGICAS DE HORTON 4A. ORDEM – DIAGRAMA DE HORTON.....	53
TABELA 6.3 RAZÕES GEOMORFOLÓGICAS DE HORTON 4A. ORDEM.	53
TABELA 6.4 PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO DOS CANAIS (PI, J) 4ºORDEM.....	54
TABELA 6.5 PROBABILIDADE DE INÍCIO DE PROCESSO Θ I (4ª ORDEM).	55
TABELA 6.6 PARÂMETROS FÍSICOS DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA (BACIA DE 3. ORDEM “D”).	55
TABELA 6.7 RAZÕES GEOMORFOLÓGICAS DE HORTON 3A. ORDEM “D” – DIAGRAMA DE HORTON.....	58
TABELA 6.8 RAZÕES GEOMORFOLÓGICAS DE HORTON (3ª ORDEM “D”)......	58
TABELA 6.9 PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO DOS CANAIS (PI, J) (3ª ORDEM “D”).	59
TABELA 6.10 PROBABILIDADE DE INÍCIO DE PROCESSO Θ I (3ª ORDEM “D”).	60
TABELA 6.11 PARÂMETROS FÍSICOS DA BACIA DO RIBEIRÃO SALOBRA (BACIA DE 3ª ORDEM “E”)......	60
TABELA 6.12 RAZÕES GEOMORFOLÓGICAS DE HORTON 3A. ORDEM E – DIAGRAMA DE HORTON.....	62
TABELA 6.13 RAZÕES GEOMORFOLÓGICAS DE HORTON (3ª ORDEM “E”).	63
TABELA 6.14 PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO DOS CANAIS (PI,J) (3ª ORDEM E).....	63
TABELA 6.15 PROBABILIDADE DE INÍCIO DE PROCESSO Θ I (3ª ORDEM “E”)......	64
TABELA 6.16 VELOCIDADES DA BACIA.	64
TABELA 6.17 COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO E O VALOR DO HIDROGRAMA.....	67
TABELA 6.18 COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO E O VALOR DO HIDROGRAMA 3A ORDEM “D”.	68
TABELA 6.19 COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO E O VALOR DO HIDROGRAMA 3A ORDEM “E”.....	69
TABELA 6.20 COMPARAÇÃO ENTRE OS VALORES DE PICO 3A. ORDEM “D” E 4ª ORDEM.....	69
TABELA 6.21 COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO E O VALOR DO HIDROGRAMA (3A ORDEM “D”).	71
TABELA 6.22 COMPARAÇÃO ENTRE A FORMULAÇÃO E O VALOR DO HIDROGRAMA (3A ORDEM “E”)......	72

LISTA DE ABREVEATURAS E SIGLAS

ESD - Escoamento Superficial Direto

HU - Hidrograma Unitário

HUI - Hidrograma Unitário Instantâneo

HUIG - Hidrograma Unitário Instantâneo Geomorfológico

GIUH - Geomorphologic Instantaneous Unit Hydrograph

LISTA DE SÍMBOLOS

- A_i - área total dos caminhos i
- A_t - área total da bacia
- \bar{A}_ω - área média de todas sub-bacias de ordem ω
- c - caminho percorrido da gota no canal
- f_i - função densidade de probabilidade do tempo de percurso da gota no canal de ordem i
- $h(t)$ - hidrograma unitário instantâneo geomorfológico
- i - ordem do canal
- k - constante do reservatório ou coeficiente de armazenamento
- k_1, k_2 - constantes dos reservatórios sucessivos
- λ_i^{-1} - tempo de permanência médio da gota no estado i
- $L_{\omega,i}$ - comprimento total do i -ésimo canal de ordem ω
- \bar{L}_Ω - comprimento do canal de máxima ordem
- \bar{L}_ω - comprimento médio dos canais de ordem ω
- M - matriz probabilidade de intervalo de transição
- Λ^{-1} - matriz tempo de permanência máximo
- N_Ω - número de canais de ordem ω
- n_i - número de canais de ordem i
- n_j - número total de canais de ordem j
- n_o - número de trechos de ordem i que drenam em trechos de ordem j
- n_r - número de reservatórios
- n_T - número total de trechos
- n_1, n_2 - reservatórios lineares em série

- P - probabilidade de transição
- $P(s)$ - probabilidade da gota percorrer caminho s
- p_{ij} - probabilidade de transição da gota de estado i para o estado j
- q_p - vazão de pico do hidrograma unitário
- R_A - Lei da área de Horton
- R_B - Lei da bifurcação de Horton
- R_L - Lei do comprimento de Horton
- S - conjunto total de caminhos percorridos pela gota
- S_b - declividade da bacia
- t - tempo
- t_c - tempo de concentração
- t_p - tempo de pico no hidrograma unitário
- T_B - tempo de viagem que a gota leva até a saída da bacia
- T_{ai} - tempo de viagem na área a montante do trecho do canal
- T_{ri} - tempo de viagem no trecho de ordem i
- $\Theta(0)$ - vetor linha de probabilidade de estado inicial
- θ_i - probabilidade de início de processo
- $\Phi(0)$ - probabilidade que o processo se inicie no estado i
- τ_i - tempo de permanência da gota no estado i
- τ_{ij} - tempo de permanência que a gota permanece no estado i antes de realizar transição para o estado j
- v - velocidade
- Ω - ordem da bacia

RESUMO

ANDRADE, A.C.S. *Determinação de hidrogramas unitários geomorfológicos na Bacia do Ribeirão Salobra*. Campo Grande, 2007. 132p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

A dificuldade em determinar hidrogramas ocorre em bacias sem monitoramento, nas quais não é possível relacionar os dados de chuva com os hidrogramas observados no exutório, como é o caso da bacia do Ribeirão Salobra. No presente trabalho, foi utilizado modelos matemáticos dotados de parâmetros físicos e geomorfológicos, relativos à bacia, para obter-se hidrogramas e calcular-se a vazão de pico (q_p) e o tempo de pico (t_p) do hidrograma unitário instantâneo geomorfológicos (HUIG). No primeiro momento foram gerados os hidrogramas da bacia do Ribeirão Salobra para duas velocidades distintas, e após esse procedimento, dividiu-se a bacia em sub-bacias de ordem inferior, comparando-se os valores de modo a verificar as semelhanças usando-se as mesmas velocidades. Também foram calculadas as velocidades para cada uma das bacias com a finalidade de compará-las entre si e com bacias de ordem superior. Observou-se que as bacias de 3ª ordem “E” e “D” não apresentam semelhanças entre si, mas a bacia de 3ª. Ordem “D” apresentou características próximas a da bacia de 4ª ordem.

Palavras - chave: geomorfologia, bacia hidrográfica, hidrograma unitário instantâneo geomorfológico.

ABSTRACT

ANDRADE, A.C.S. *Determination of geomorphological instantaneous unitary hydrographs of the Ribeirão Salobra Basin*. Campo Grande, 2007. 132p. Masters Thesis – Federal University of Mato Grosso do Sul, Campo Grande – MS, Brazil.

The difficult for determinate hydrographs occur in basins, such as the Ribeirão Salobra basin, that are not monitored so that it is not possible to relate the rainfall with the exit hydrographs. The present work involved the application of mathematical models that use physical and geomorphological parameters of the basin to obtain hydrographs and to calculate the peakflow (q_p) and time of peak t_p of the Geomorphological Instantaneous Unity Hydrographs (GIUH). Initially, the hydrographs of the Ribeirão Salobra basin were generated for two distinct speeds; after this procedure, the basin was divided into sub-basins of inferior orders and the values compared to determine the similarities of the same speeds. Also calculated were the speeds for each of the basins with the purpose of making comparisons with each other, and with superior order basins. Observed that the basin of 3rd order “E” e “D” have not similarity between each other, but the 3rd order “D” basin present similar characteristics of the 4rd order basin.

Keywords: geomorphology, hydrographic basin, geomorphological instantaneous unitary hydrograph

1 Introdução

Tendo em vista a importância da água na existência e manutenção da vida na Terra, bem como meio de transporte dos mais importantes ciclos bio-geoquímicos, em diversos estudos na área ambiental torna-se necessário quantificar os volumes escoados no decorrer do tempo, bem como avaliar a sua disponibilidade espacial e temporal.

Adotando a bacia hidrográfica como a unidade básica de estudos, ou quando se pretende executar obras em um determinado ponto de um rio, torna-se necessário determinar as vazões ou os hidrogramas de projeto para aquele local.

A dificuldade encontrada na obtenção de hidrogramas de projeto ocorre em bacias sem monitoramento onde não é possível obter dados que permita correlacionar a chuva com o hidrograma de saída da bacia em estudo. Esse problema pode ser resolvido mediante a transformação da chuva observada em vazão, através de um modelo matemático de simulação em bacias com características próximas da bacia estudada.

Em regiões, tais como as do Estado de Mato Grosso do Sul, que abrangem grandes extensões territoriais e cidades distanciadas entre si, é incomum a existência de postos de monitoramento das variáveis hidrológicas e a sua implantação, operação e manutenção, por serem bastante dispendiosas, apesar dos consideráveis retornos financeiros e sociais que venham ocasionar, são ignoradas. Assim, é de suma importância o desenvolvimento e a aplicação de metodologias que possam utilizar os dados hidrológicos históricos disponíveis para os postos já implantados, como forma de obter a espacialização e a distribuição temporal de informações que possam contribuir para o gerenciamento das bacias hidrográficas que comportem atividades agrícolas e de pecuária.

Com base neste enfoque busca-se aplicar metodologias apropriadas para a determinação de hidrogramas em exutórias de bacias, através das suas características geomorfológicas e do

conceito de hidrograma unitário, empregando dados de chuva observados em postos da região de influência.

Muitos modelos conceituais têm sido apresentados para representar o HUI (Hidrograma Unitário Instantâneo) a fim de relacionar a resposta hidrológica da bacia com suas características geomorfológicas. RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979), introduziram o HUIG (Hidrograma Unitário Instantâneo Geomorfológico), que através das razões geomorfológicas de HORTON (1945) apresentam uma teoria que estabelece relação direta entre a geomorfologia da bacia e sua resposta hidrológica através de teorias da mecânica estatística.

O modelo estudado se baseia na teoria do HUIG e depende da ordenação dos rios, da determinação dos comprimentos médios de cada ordem e da área de contribuição média para cada ordem, além do cálculo da velocidade.

Neste trabalho a velocidade foi calculada através da razão do comprimento do canal pelo o tempo de concentração, sendo considerada constante em toda a bacia. Esta formulação apresenta uma vazão superestimada, mas é possível fazer a previsão do comportamento da bacia já que a mesma não dispõe de postos para obtenção de hidrogramas mais precisos.

2 Objetivos

- Determinar as características físicas e geomorfológicas da bacia em estudo para determinar o HUIG.
- Obter hidrogramas do escoamento superficial em bacias hidrográficas sem monitoramento de postos pluviométricos.
- A partir das características físicas e geomorfológicas desenvolver um modelo matemático que gere Hidrogramas Unitários para a bacia estudada.
- Comparar hidrogramas unitários de diferentes ordens e avaliar as velocidades de fluxo.

3 Justificativa do desenvolvimento do trabalho

No Estado de Mato Grosso do Sul, devido à sua grande extensão territorial, são escassas as estações pluviométricas e mais raras ainda as estações fluviométricas. Assim há necessidade de se desenvolver e aplicar técnicas que possam espacializar as informações de forma confiável. Diversas metodologias existem e podem ser aplicadas ou adaptadas para a região, estendendo para vários locais as informações das séries de dados já existentes.

O estudo proposto é indicado para áreas nas qual o monitoramento através de postos fluviométricos não exista, ou então seja, financeiramente inviável devido à larga extensão territorial, como é o caso da bacia escolhida para estudo. Utilizando o método do Hidrograma Unitário Instantâneo Geomorfológico (HUIG) inicialmente proposto por RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979), que é uma derivação do Método do Hidrograma Unitário (HU), sendo obtido através de parâmetros geomorfológicos da bacia hidrográfica, tais como a topografia e a ordem dos rios na disposição da rede de drenagem.

O modelo desenvolvido dispõe de recursos computacionais reduzidos e é de simples aplicação, utilizando-se de parâmetros geomorfológicos da bacia. É considerada uma ferramenta de baixo custo e obtém resultados bastante satisfatórios, pois já foi utilizado em bacias hidrográficas monitoradas e conduziu a resultados bem próximos aos dados medidos experimentalmente.

4 Revisão Bibliográfica

4.1 Geomorfologia Quantitativa

Os modelos geomorfológicos transformam a chuva em vazão com base na geomorfologia da bacia. Os estudos de HORTON (1932) transformaram consideravelmente a descrição quantitativa das redes naturais de drenagem nas bacias hidrográficas, propondo um método de classificação de canais por ordem, método que foi modificado posteriormente por STRAHLER (1952). HORTON (1932) estabeleceu importantes leis de composição de drenagem. O comprimento médio do canal de ordem ω é definido pela equação (1):

$$\bar{L}_{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\omega}} L_{\omega,i}}{N_{\omega}} \quad (1)$$

Onde: $L_{\omega,i}$ = comprimento do i -ésimo canal de ordem ω ;

N_{ω} = número de canais desta ordem ω .

Dado um mapa com a rede completa de canais dos rios Figura. 4.1, esta pode ser subdividida em segmentos de canais, de acordo com a hierarquia da ordem de magnitude, designando uma seqüência do número de ordem como mostrado no esquema da Figura 4.2.

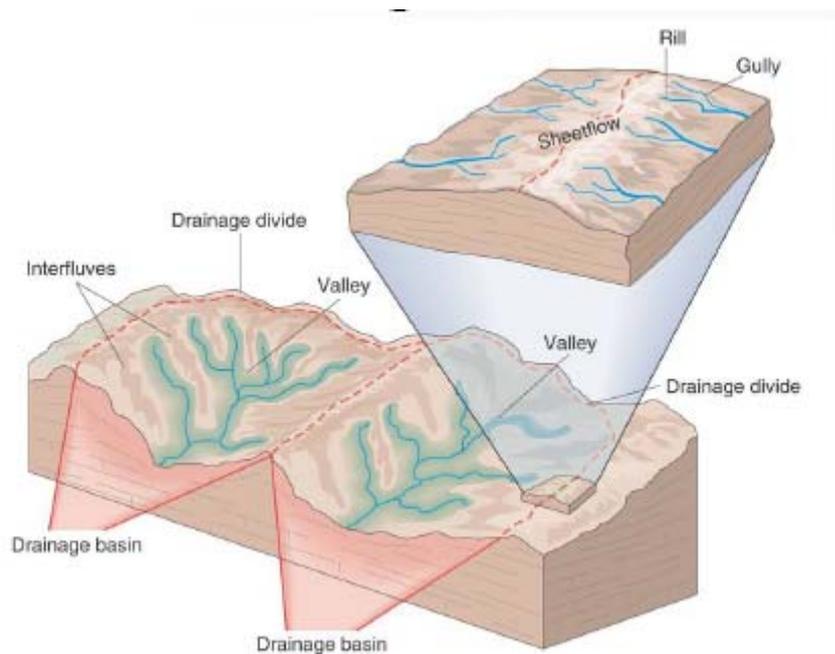


Figura 4.1 Modelo da bacia hidrográfica. (Department of Earth and Environmental Science New Mexico Institute of Mining and Technology, 2005).

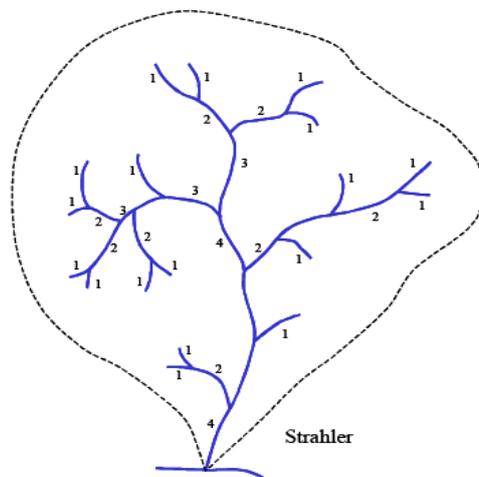


Figura 4.2 Aplicação do método de Strahler para ordenação da rede de drenagem.

A aplicação do método de Strahler para ordenação da rede de drenagem:

1. Canais que tem origem nas fontes são definidos como rios de 1ª ordem;
2. Quando dois rios de ordem ω se unem, dão origem a um rio de ordem $(\omega + 1)$;
3. Quando dois rios de ordens diferentes se unem, o canal por eles formado é considerado como continuação do canal de maior ordem entre eles;

4. A ordem da bacia Ω é dada pela mais elevada das ordens de rio.

As expressões quantitativas da lei de Horton são estabelecidas por meio da:

- Lei do número de canais (razão de bifurcação, R_B), definido pela equação (2):

$$R_B = \frac{N_{\omega-1}}{N_{\omega}} \quad (2)$$

- Lei do comprimento de canais (razão de comprimentos, R_L), definido pela equação (3):

$$R_L = \frac{\bar{L}_{\omega}}{\bar{L}_{\omega-1}} \quad (3)$$

- Lei das áreas de drenagem dos canais (razão de áreas, R_A), definido pela equação (4):

$$R_A = \frac{\bar{A}_{\omega}}{\bar{A}_{\omega-1}} \quad (4)$$

Onde: ω = a ordem do canal ($\omega = 2, \dots, 3, \dots, \Omega$);

Ω = a ordem da bacia;

\bar{A}_{ω} = a área média de todas as sub-bacias de ordem ω ;

N_{ω} = o número de canais de ordem ω ;

\bar{L}_{ω} = o comprimento médio de todos os canais de ordem ω .

STRAHLER (1958) relata que as bacias de drenagem serão similares se todas as propriedades correspondentes que têm as dimensões de comprimento forem de mesma razão, ou seja, duas redes de drenagem têm similitude geométrica estatística (similitude estatística) se todas as variáveis adimensionais (bifurcação, comprimento) correspondentes têm a mesma função de distribuição. A idéia de aplicação de similitude estatística é importante, pois é este fato que torna possível prever as regularidades no fenômeno geomorfológico.

Segundo SMART (1972), as redes de canais naturais desenvolvidas em regiões de litologia uniforme, podem ser consideradas como tendo topologia e distribuição do

comprimento das ligações, aleatórias e que a ordem é um parâmetro simples de classificação das redes e a magnitude mais recomendada, não significando, portanto, que o procedimento de ordenação de Strahler deva ser completamente abandonado. As relações R_B e R_L são características da bacia que podem ser usadas em extrapolações para baixas e altas ordens, com o intuito de obter uma boa estimativa das variáveis geomorfológicas não mensuráveis. Os modelos aleatórios têm aplicações práticas em qualquer área da hidrologia em que a geometria da rede e a topologia sejam importantes.

4.2 Método do Hidrograma Unitário

Inicialmente proposto por SHERMAN (1932), o método do Hidrograma unitário (HU) tornou-se uma ferramenta disponível e de fácil utilização para a transformação da chuva em vazão. Sua versatilidade encontra-se em suposições simplificadas de que a bacia hidrográfica comporta-se como um sistema linear e não varia no tempo, permitindo-se então, a avaliação de uma resposta constante. A função matemática mais acessível é a que resulta de uma chuva na forma de impulso unitário conhecido como (HUI).

SHERMAN (1932) deu origem à transformação da chuva em vazão através do método do HU, no qual propôs o conceito “Unit Graph” para calcular o hidrograma resultante de uma dada seqüência de chuva. O modelo do HU é definido como um hidrograma de Escoamento Superficial Direto (ESD), que resulta de uma chuva com duração e intensidades unitárias. A definição de chuva unitária é arbitrária, pois é utilizada para efeito de comparação entre HU's, então se mantém um padrão. Por exemplo, uma chuva com 1 mm e duração de 1h pode ser adotada como chuva unitária.

A Figura 4.3 mostra um hidrograma unitário. A curva de ascensão corresponde ao aumento da vazão e ocorre durante um tempo de crescimento que também é conhecido como

tempo de subida. A vazão máxima é conhecida como vazão de pico e após esta fase inicia-se a curva de recessão, correspondente ao tempo que a vazão sofre decréscimo até atingir um valor correspondente ao escoamento de base.

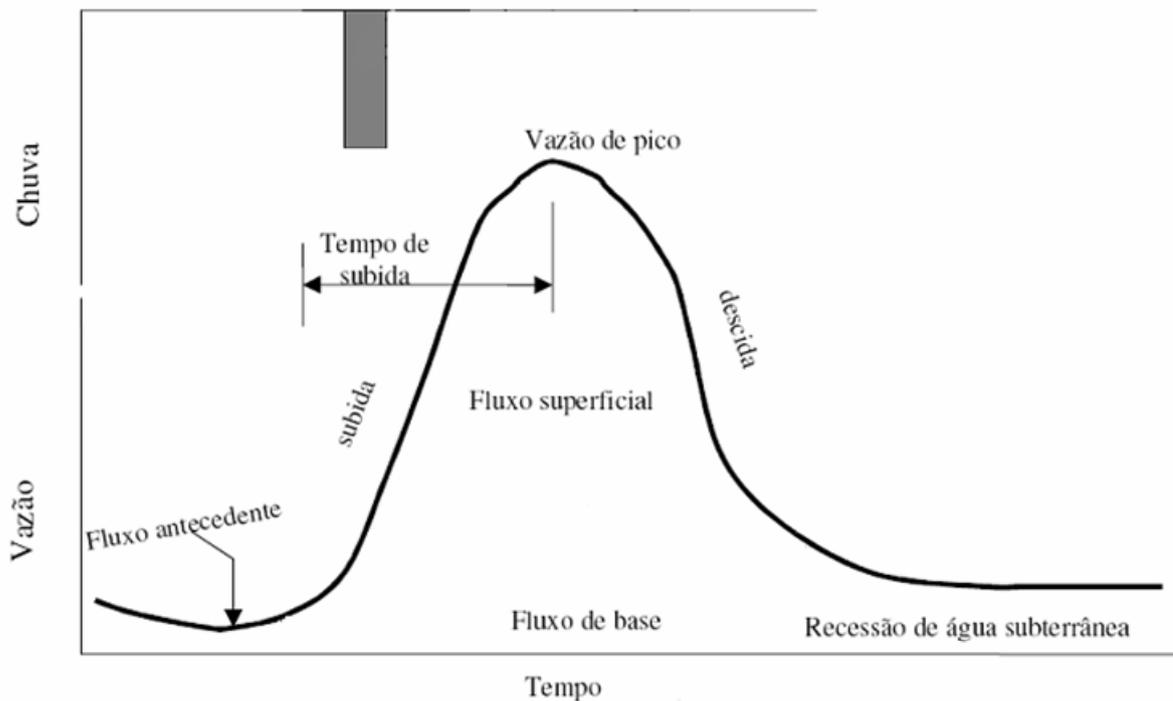


Figura 4.3 Esquema do Hidrograma Unitário.

O método do HU se baseia nos princípios da Constância do Tempo de Base, Proporcionalidade das Descargas e princípio da aditividade. No princípio da Constância do Tempo de Base, as chuvas de iguais durações originam durações de escoamentos superficiais iguais. Já no princípio Proporcionalidade das Descargas, as chuvas efetivas de mesma duração, mas com volumes de escoamento superficial diferentes, produzem em tempos correspondentes, volumes de Escoamento Superficial Direto (ESD) proporcionais às ordenadas do hidrograma e às chuvas excedentes. No princípio da Aditividade a duração do escoamento superficial de uma determinada chuva efetiva independe de precipitações anteriores. O hidrograma total referente a duas ou mais chuvas efetivas é obtido adicionando-se as ordenadas de cada um dos hidrogramas em tempos correspondentes.

O método propôs uma metodologia de previsão de cheias bastante difundida. O nome hidrograma unitário deriva do hidrograma superficial advindo de uma chuva efetiva unitária, uniformemente distribuída na área de drenagem, e com intensidade uniformemente distribuída no tempo durante o evento de chuva. Considerando o procedimento empírico de sua obtenção a partir de eventos isolados de precipitação, o HU deve ser considerado um modelo linear empírico, sendo deduzido para cada duração elementar de chuva.

4.3 Método Hidrograma Unitário Instantâneo (HUI)

O HU convencional foi substituído por CHOW (1964), ao definir que a resposta da bacia seria independente da duração, se referente a uma chuva unitária instantânea conhecida em termos matemáticos como um pulso unitário instantâneo ou função delta de Dirac.

A chuva unitária do HUI tem duração infinitesimal e intensidade infinita de tal forma que a altura pluviométrica seja unitária (RIGHETTO, 1998).

Diversos modelos conceituais têm sido propostos para representar o HUI. Os modelos podem ser de analogia física ou através de simulação matemática. Uma das primeiras tentativas em descrever o HUI de uma bacia simulada foi o modelo de NASH (1957), citado por CHOW (1964), que conceitua a bacia hidrográfica através da sucessão de reservatórios lineares. Este modelo foi representado matematicamente por uma distribuição Gama, conforme a equação (5):

$$HUI(t) = \frac{1}{k(n_r - 1)!} \frac{t^{n_r - 1}}{k} e^{-\frac{t}{k}} \quad (5)$$

Onde: k = a constante do reservatório ou coeficiente de armazenamento;

n_r = número de reservatórios considerados.

DISKIN (1964), citado por CHOW (1964), propôs um modelo que consiste basicamente em dois ramos paralelos de reservatórios lineares, sendo um ramo constituído de n_1 reservatórios lineares idênticos em série com coeficiente de armazenamento k_1 , e outro de n_2 reservatórios lineares idênticos em série com coeficiente de armazenamento k_2 . A entrada no primeiro ramo é α e no segundo é β sendo $(\alpha+\beta=1)$. A equação (6) representa esse modelo.

$$HUI(t) = \frac{\alpha}{k_1(n_1-1)!} \left(\frac{t}{k_1}\right)^{n_1-1} e^{-\frac{t}{k_1}} + \frac{\beta}{k_2(n_2-1)!} \left(\frac{t}{k_2}\right)^{n_2-1} e^{-\frac{t}{k_2}} \quad (6)$$

Onde: n_1 = reservatórios lineares idênticos em série;

k_1 = coeficiente de armazenamento (reservatório 1);

n_2 = reservatórios lineares idênticos em série;

k_2 = coeficiente de armazenamento (reservatório 1);

α = a entrada no primeiro ramo;

β = a entrada no segundo ramo.

4.4 Transformação do HUI em HU

A teoria proposta por RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) que gera um hidrograma unitário instantâneo que deve ser convertido em um hidrograma unitário, para ser comparado com dados de campo. Sendo assim, utilizam-se a relação entre o HU, HUI e a curva S. O HUI é resultado de uma chuva efetiva uniformemente distribuída sobre a bacia e que tem uma duração infinitesimal. Portanto tem-se:

$$HUI = \lim_{T_0 \rightarrow 0} HU(T_0) \quad (7)$$

Sendo T_0 a duração da chuva.

Para o HUI são válidas todas as hipóteses do HU, exceto a que relaciona a duração da chuva T_0 , pois ela é eliminada da análise do hidrograma. Quando se utiliza o princípio da superposição é possível repetir sequencialmente n vezes uma chuva efetiva de duração T e intensidade $1/T$ para que se somassem os n resultados de $HU(T)$, obtenha-se a curva $S_{1/T}(t)$. A partir desta curva S pode-se obter o HU (T_0) para qualquer chuva efetiva calculando-se:

$$HU(T_0) = \frac{T}{T_0} [S_{1/T}(t) - S_{1/T}(t - T_0)] \quad (8)$$

Nesta equação obtém-se a diferença entre as curvas S deslocadas de T_0 e divide-se por $1/T$. Sendo T_0 a duração da chuva tem-se:

$$P_e = \left(\frac{1}{T}\right) T_0 = \frac{T_0}{T} \quad (9)$$

Resultando:

$$\frac{1}{P_e} = \frac{T}{T_0} \quad (10)$$

O termo T/T_0 aparece no início da equação de HU (T_0). Se a intensidade da chuva for igual à unidade, a equação de HU (T_0) tem-se:

$$HU(T_0) = \frac{1}{T_0} [S_1(t) - S_1(t - T_0)] \quad (11)$$

Isto implica em:

$$HUI = \lim_{T_o \rightarrow 0} HU(T_o) = \lim_{T_o \rightarrow 0} [S_1(t) - S_1(t - T_o)] \frac{1}{T_o} \quad (12)$$

Considerando a definição de derivada resulta em:

$$HUI(t) = \frac{dS_1(t)}{dt} \quad (13)$$

Seja $u(0,t)$ as ordenadas do HUI e $u(T,t)$ as ordenadas do HU, então tem-se:

$$S_1(t) - S_1(t - T_o) = u(0,t)dt \quad (14)$$

Resultando:

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = u(0,t) \quad (15)$$

Supondo-se que o valor da integral possa ser estimado pela área do retângulo médio equivalente, ou seja, que a duração T_o não seja muito grande, tem-se:

$$S_1(t) - S_1(t - T_o) = \frac{1}{2} T_o [u(0,t) + u(0,t - T_o)] \quad (16)$$

Podendo ser escrita da seguinte forma:

$$S_1(t) - S_1(t - T_o) = T_o u(T_o, t) dt \quad (17)$$

Eliminando-se T_0 das equações tem-se:

$$u(T_0, t) = \frac{1}{2} [u(0, t) + u(0, t - T_0)] \quad (18)$$

Conclui-se que:

$$HU(T_0) = \frac{1}{2} [HUI(t) + HUI(t - T_0)] \quad (19)$$

4.5 Método Hidrograma Unitário Instantâneo Geomorfológico (HUIG)

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) introduziram o conceito do Hidrograma Unitário Instantâneo Geomorfológico (HUIG) que permite relacionar a forma da bacia com seu hidrograma, ligando teoricamente a geomorfologia da bacia com sua resposta hidrológica através do uso das leis de Horton.

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979), fazendo uso das leis de Horton, apresentaram uma teoria matemática que estabeleceu uma relação direta entre a estrutura geomorfológica (definida por Strahler) de uma bacia hidrográfica e as características dos hidrogramas, supondo que no caso de uma precipitação efetiva unitária, uniformemente distribuída sobre a bacia, resultava no HU.

Na busca de uma resposta para a questão fundamental se existe alguma relação entre as famosas leis empíricas de Horton para um sistema geomorfológico ordenado e as características dos hidrogramas resultantes do mesmo, os autores adotaram uma bacia hipotética, ordenada segundo a metodologia de Strahler, na qual, uma unidade de chuva

efetiva uniformemente distribuída é instantaneamente imposta. Consideraram que a chuva fosse composta por um grande número de gotas.

A descrição probabilística da rede de drenagem é produzida através da matriz de probabilidade de transição:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & \cdots & p_{2\Omega} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde: p_{ij} = a probabilidade de transição da gota do estado i para o estado j , sendo $i < j$.

A matriz dos elementos P não é suficiente para descrever o comportamento desejado da bacia, pois não considera as características que influenciam a dinâmica da trajetória da gota de água até a exutória. Assim, a matriz representa o número de transições para se chegar a certo estado e não o tempo entre as transições que é um elemento de grande importância para o processo de transformação.

O tempo de transição de uma bacia hidrográfica compreende vários intervalos de tempo, e também depende da localização da gota, pois trechos diferentes de um rio na mesma bacia têm características dinâmicas diferentes. Esta localização é o estado característico onde se encontra a gota. A permanência em estados sucessivos deste processo semi-markoviano é definido pelas probabilidades de transição de um processo de Markov. Assim, chama-se este processo de Markov Estruturado. A ordem dos canais percorridos pelas gotas de chuva durante as seguidas transições de estado, será determinada pelas probabilidades de transição P_{ij} do processo markoviano estruturado. O tempo τ_{ij} , que a gota permanecerá no estado i antes de realizar a transição para o estado j , é uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor positivo com uma função densidade de probabilidade $h_{ij}(\tau)$. O tempo de

permanência (τ_i) da gota no estado i , quando não se sabe qual será seu próximo estado, é uma variável aleatória definida por uma função densidade dos tempos de espera $f_i(\tau)$ mostrada segundo a equação (20).

$$f_i(\tau) = \sum_{j=1}^N P_{ij} \cdot h_{ij}(\tau) \quad (20)$$

Onde: $h_{ij}(\tau)$ = a função densidade de probabilidade do tempo de permanência da gota no estado i antes de passar para o estado j .

Para utilização da equação (20) deve ser considerando que:

1. Os tempos de permanência τ_{ij} sejam independentes do seu estado futuro, é representado segundo a equação (21):

$$f_i(t) = h_{ij}(t) \quad (21)$$

2. O tempo entre eventos pode ser descrito por uma função densidade exponencial, então o tempo de permanência de uma gota em um canal de ordem i será dado pela equação (22):

$$f_i(\tau) = \lambda \cdot e^{-\lambda_i \cdot \tau} \quad (22)$$

Com uma função exponencial diferente para cada ordem de canal. O tempo médio $\bar{\tau}$ é dado pela equação (23):

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \tau f_i(\tau) d\tau = \lambda_i^{-1} \quad (23)$$

Portanto, λ_i^{-1} , será o tempo médio que uma gota permanecerá no estado i levando-se em consideração seu tempo de permanência, enquanto escoamento superficial e seu tempo de permanência durante a passagem pelo canal.

A dificuldade para obter o HUI consiste em determinar o vetor de probabilidade de estado $\Theta(n)$. Portanto tem-se:

$$\Theta(n) = \Theta(0) \cdot \Phi(n) = \Theta(0) \cdot P^n \quad (24)$$

Onde: $\Theta(n)$ = vetor linha cujos elementos $\theta_i(n)$ dão as probabilidades que a gota de água se encontre no estado i no passo n ;

$\Phi(n)$ = matriz de probabilidade de transição, cujos elementos $\phi_{ij}(n)$ denotam a probabilidade de transição da gota de água do estado i para o estado j após n transições;

$\Theta(0)$ = representa o vetor linha de probabilidades de estados inicial cujos elementos

$\Phi(0)$ = a probabilidade de que o processo se inicie no estado i .

A matriz dos tempos médios de permanência é Λ^{-1} , sendo:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Definindo-se a matriz de taxa de transições por:

$$M = \Lambda(P - I) \quad (26)$$

Obtém-se:

$$M = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \sum_{j>1} P_{1j} & \lambda_1 P_{12} & \lambda_1 P_{13} \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \sum_{j>2} P_{2j} & \lambda_2 P_{23} \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Assim, a matriz de probabilidade de intervalos de transição será:

$$\Phi(t) = e^{M.t} \quad (28)$$

Sendo:

$$e^{At} = I + M.t + \frac{M^2.t^2}{2!} + \dots \quad (29)$$

O objetivo final é a matriz probabilidade do estado $\theta(t)$ cujos elementos $\theta_i(t)$ dão a probabilidade de que agora ocupe o estado i no instante “ t ”. Assim, apenas o último termo do vetor linha $\theta(t)$ que dá a probabilidade que a gota se encontre no recipiente de saída da bacia no instante “ t ”, portanto:

$$\theta(t) = \theta(0).\Phi(t) \quad (30)$$

Onde: $\theta(0)$ representa o vetor linha de probabilidades de estado inicial cujos elementos;

$\Phi_i(t)$ dão a probabilidade que o processo se inicie no estado i .

A transformada exponencial (30), mostrada por HOWARD (1971), é dada por:

$$\Phi^e(t) = [SI - M]^{-1} \quad (31)$$

Calculando-se $[SI - M]$, obtém-se:

$$[SI - M] = \begin{bmatrix} s + \lambda_1 & -\lambda_1 \cdot p_{12} & -\lambda_1 \cdot p_{13} & 0 \\ 0 & s + \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & s + \lambda_1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad (32)$$

Considerando que $p_{14} = p_{24} = 0$ e $p_{23} = p_{34} = 1$.

Calculando-se a matriz inversa $[SI - M]^{-1}$, para uma bacia de terceira ordem, e escrevendo-se na forma de expansão em frações parciais, obtém-se:

$$[SI - M]^{-1} = \frac{1}{s} [a_{ij}] + \frac{1}{s + \lambda_1} [b_{ij}] + \frac{1}{s + \lambda_2} [c_{ij}] + \frac{1}{s + \lambda_3} [d_{ij}] \quad (33)$$

Sendo a equação (33) a expressão de $\Phi^e(t)$, e o intervalo de transição da matriz de probabilidades é obtido pela transformada inversa.

$$\Phi(t) = [a_{ij}] + e^{-\lambda_1 t} [b_{ij}] + e^{-\lambda_2 t} [c_{ij}] + e^{-\lambda_3 t} [d_{ij}] \quad (34)$$

O que interessa são apenas os termos da última coluna de $\Phi(t)$, denotada por $\phi_{i4}(t)$, sendo $i = 1, 2, 3, 4$ para uma bacia de terceira ordem, e $N=4$ a saída da bacia ou seu estado de retenção.

No cálculo do HUI interessa-se nos valores de $\Phi(t)$ correspondentes a $j=4$, ou seja:

$$\phi_{14}(t) = 1 + \frac{\lambda_3[\lambda_2 - \lambda_1 p_{13}]}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_3 p_{12}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3 p_{13}}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t} \quad (35)$$

$$\phi_{24}(t) = 1 + \frac{\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)} e^{-\lambda_3 t} \quad (36)$$

$$\phi_{34}(t) = 1 - e^{-\lambda_3 t} \quad (37)$$

$$\phi_{44}(t) = 1 \quad (38)$$

Reunindo os diversos componentes de $\theta_4(t)$, tem-se:

$$\theta_4(t) = \theta_1(0)\phi_{14}(t) + \theta_2(0)\phi_{24}(t) + \theta_3(0)\phi_{34}(t) \quad (39)$$

Onde: $\theta_4(0) = 0$.

O HUI que equivale à função densidade de probabilidade da gota se encontrar no estado 4 da bacia hidrográfica é obtido derivando-se a probabilidade da equação (39):

$$h(t) = \frac{d\theta_4(t)}{dt} = \theta_1(0) \frac{d\phi_{14}(t)}{dt} + \theta_2(0) \frac{d\phi_{24}(t)}{dt} + \theta_3(0) \frac{d\phi_{34}(t)}{dt} \quad (40)$$

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) relacionaram os termos da equação (40) com os números adimensionais de Horton equações (2) e (3). Qualquer que seja a ordem da bacia, existem dois termos que intervêm em $\frac{d\phi_{iN}(t)}{dt}$ quais sejam λ_i e P_{ij} .

O modelo do HUIG é expresso em função de três parâmetros λ_i , P_{ij} e θ_i , sendo λ_i , os tempos médios de permanência de partículas e, cursos de ordem i , θ_i , a probabilidade de que o processo se inicie no estado i e P_{ij} , as probabilidades de transição do estado i para o estado j . O estado é definido como a ordem da corrente no qual se encontra a gota d' água em um momento t quando a mesma se encontra em fase de escoamento sobre o terreno. Estabeleceu-se uma relação direta entre os parâmetros λ_i , P_{ij} e θ_i e os parâmetros geomorfológicos R_A , R_B e R_L da bacia, supondo que a velocidade média do escoamento superficial seja constante em qualquer tempo para toda a bacia.

Uma questão crítica ao modelo foi quanto à hipótese assumida para o tempo de viagem, pois faltam dados para prever o valor da velocidade a ser aplicado no modelo. Outra questão é que essa velocidade não foi bem explicitada, podendo ser a velocidade de pico do hidrograma ou a velocidade média do escoamento na calha do canal ou simplesmente algum termo com unidades em metros por segundo, que leva em conta diversos fatores da bacia e não apenas a velocidade de escoamento. Para PILGRIM (1976), a velocidade de escoamento

no canal pode ser assumida constante para todos os canais de qualquer ordem, simplificando o trabalho e a aplicação do modelo.

A Probabilidade de transição de um estado para outro pode ser dada pela expressão

(41)

$$P_{ij} = \frac{n_o}{n_T} \quad (41)$$

Onde: n_o = número de trechos de ordem i que drenam em trechos de ordem j ;

n_T = número total de trechos de ordem i do rio.

Outra forma de se obter as probabilidade de transição de estado é através da formulação de RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) que estabeleceram as probabilidades de transição de estado mostradas nas expressões (42) a (46), em função das relações geomorfológicas de Horton R_B , R_L e R_A , conforme expressões (2), (3) e (4) respectivamente.

$$P_{1,2} = \frac{R_B^3 + 2R_B^2 - 2}{2R_B^3 - R_B} \quad (42)$$

$$P_{1,3} = \frac{R_B^3 - 2R_B^2 - R_B + 2}{4R_B^3 - 2R_B^2 - 2R_B + 1} \quad (43)$$

$$P_{1,4} = \frac{R_B^4 - R_B^2 - 3R_B^2}{4R_B^4 - 2R_B^3 - 2R_B^2 + R_B} \quad (44)$$

$$P_{2,3} = \frac{R_B^2 + 2R_B - 2}{2R_B^2 - R_B} \quad (45)$$

$$P_{2,4} = \frac{R_B^2 - 3R_B + 2}{2R_B^2 - R_B} \quad (46)$$

$$P_{3,4} = P_{4,5} = 1$$

Utilizando-se ainda as relações de Horton, estabeleceram-se as probabilidades de início de processo de cada ordem obtida pelas formulações (48) a (51). A formulação direta da probabilidade de início de processo, em cada ordem θ_i , pode ser obtida pela expressão (47).

$$\theta_i(0) = \frac{A_i}{A_t} \quad (47)$$

Onde: A_i = a área de drenagem total dos canais de ordem i ;

A_t é a área de drenagem total da bacia;

Transformando $\theta_i(0)$ em função das relações geomorfológicas, resultam-se:

$$\theta_1(0) = \frac{R_B^3}{R_A^3} \quad (48)$$

$$\theta_2(0) = \frac{R_B^2}{R_A^2} - \frac{R_B^2}{R_A^3} \left(\frac{R_B^3 + 2R_B^2 - 2}{R_B^2 - 1} \right) \quad (49)$$

$$\theta_3(0) = \frac{R_B}{R_A} - \frac{R_B}{R_A^2} \left(\frac{R_B^2 + 2R_B - 2}{2R_B - 1} \right) - \frac{R_B}{R_A^3} \left(\frac{R_B^5 - 2R_B^4 - R_B^3 + R_B^2}{4R_B^3 - 2R_B^2 - 2R_B + 1} \right) \quad (50)$$

$$\theta_4(0) = 1 - \frac{R_B}{R_A} - \frac{1}{R_A^2} \left(\frac{R_B^3 - 3R_B^2 + 2R_B}{2R_B - 1} \right) - \frac{1}{R_A^3} \left(\frac{R_B^6 - 3R_B^5 + R_B^4 + 3R_B^3 - 2R_B^2}{4R_B^3 - 2R_B^2 - 2R_B + 1} \right) \quad (51)$$

O número de caminhos possíveis que uma gota d'água pode percorrer em uma bacia hidrográfica é estabelecido conforme a expressão (52) que depende da ordem da bacia para se obter as trajetórias possíveis.

$$c = 2^{\text{ordem}-1} \quad (52)$$

Assim, para uma bacia de 4ª ordem, existem oito caminhos possíveis conforme a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 Trajetórias percorridas pela água.

Caminhos Possíveis	Trajetoárias percorridas				
S₁	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅
S₂	c ₁	c ₂	c ₄	c ₅	
S₃	c ₁	c ₃	c ₄	c ₅	
S₄	c ₁	c ₄	c ₅		
S₅	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	
S₆	c ₂	c ₄	c ₅		
S₇	c ₃	c ₄	c ₅		
S₈	c ₄	c ₅			

Existem, portanto, as possibilidades das parcelas de água deslocarem-se de: c₁ para c₂; c₁ para c₃; c₁ para c₄; c₂ para c₃; c₂ para c₄; c₃ para c₄; c₄ para c₅. Obedecendo-se os oito caminhos possíveis. No caminho S₁ a água deslocar-se de 1 para 2, 2 para 3, 3 para 4, 4 para 5. A trajetória percorrida determinará as probabilidades de transição que no caso de S₁ é:

$p_{1,2}$, $p_{2,3}$, $p_{3,4}$, $p_{4,5}$ e a probabilidades de início de processo é $\theta_1(0)$, pois o processo se inicia em no estado um. O mesmo processo é feito com os outros caminhos.

Para o cálculo da probabilidade de transição para a bacia de 3ª ordem tem-se:

$$P_{1,2} = \frac{R_B^2 + 2R_B - 2}{2R_B^3 - R_B} \quad (53)$$

$$P_{1,3} = \frac{R_B^2 - 3R_B + 2}{2R_B^2 - R_B} \quad (54)$$

$$P_{2,3} = 1$$

As equações da probabilidade de início do processo para uma bacia de 3ª ordem são mostradas a seguir:

$$\theta_1(0) = \frac{R_B^2}{R_A^2} \quad (55)$$

$$\theta_2(0) = \frac{R_B}{R_A} - \left[\frac{R_B^3 + 2R_B^2}{R_A^2(2R_B - 1)} \right] \quad (56)$$

$$\theta_3(0) = 1 - \frac{R_B}{R_A} - \frac{1}{R_A^2} \left[\frac{R_B(R_B^2 - 3R_B + 2)}{2R_B - 1} \right] \quad (57)$$

Para uma bacia de 3ª ordem, existem quatro caminhos possíveis conforme a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 Trajetórias percorridas pela água.

Caminhos Possíveis	Trajetórias percorridas			
S₁	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄
S₂	c ₁	c ₂	c ₄	
S₃	c ₁	c ₃	c ₄	
S₄	c ₁	c ₄		

A convolução desses possíveis caminhos, gera o hidrograma unitário instantâneo geomorfológico da bacia.

Seguindo as definições do método de ordenação de Strahler, cada canal é designado como um segmento de 1ª ordem. Com a junção de dois outros segmentos de 1ª ordem, um canal de 2ª ordem é produzido e estendido para o ponto onde ele se une a outro de 2ª ordem e em seguida, inicia-se um segmento de 3ª ordem, e assim continuamente. Contudo, poderia um segmento de 1ª ordem unir-se a um de 2ª ordem ou de 3ª ordem, não aumentando a ordem de ocorrência nesta junção.

Existem então, N_i canais de ordem i , dos quais $2N_{i+1}$ unem-se em canais de ordem $i+1$. Os canais restantes $(N_i - 2N_{i+1})$, ou seja, canais de ordem i , drenam para os demais canais N_j . Assumindo-se que os comprimentos dos canais internos são variáveis aleatórios independentes, retirados de uma população comum, SMART (1972), na qual a distribuição do canal interior independe da ordem, da magnitude ou de qualquer outra característica topológica, pode-se, então, escrever que canais de ordem i $(N_i - 2N_{i+1})$ se unem aos canais de ordem j de acordo com:

$$(N_i - 2N_{i+1}) = \frac{n_i}{n_j} \tag{58}$$

Onde: n_i = número de canais de ordem i ;

n_j = número total de canais de ordem j .

Portanto para uma bacia de quarta ordem, como a bacia estudada, tem-se:

N_1 canais de ordem 1, dos quais: $\left\{ \begin{array}{l} 2N_2 \text{ se fundem em canais de ordem 2} \\ (N_1 - 2N_2) \text{ drenam para canais de ordem 2, 3 e 4} \end{array} \right.$

N_2 canais de ordem 2, dos quais: $\left\{ \begin{array}{l} 2N_3 \text{ se fundem em canais de ordem 3} \\ (N_2 - 2N_3) \text{ drenam para canais de ordem 3 e 4} \end{array} \right.$

N_3 canais de ordem 3, dos quais: $\left\{ \begin{array}{l} 2N_4 \text{ se fundem em canais de ordem 4} \\ (N_3 - 2N_4) \text{ drenam para canais de ordem 4} \end{array} \right.$

$N_4 = 1$

O número de canais de ordem i na rede completa segundo a suposição de SMART (1972), é dado:

$$E(i, \Omega) = N_i \prod_{j=2}^i \frac{(N_{j-1} - 1)}{(2N_j - 1)} \quad \text{Com } i = 2, 3, \dots, \Omega. \quad (59)$$

Representando-se o número médio de canais de ordem 2 pela letra A, os de ordem 3 pela letra B e os de ordem 4 pela letra C, respectivamente, tem-se:

$$A = N_2 \left(\frac{N_1 - 1}{2N_2 - 1} \right) \quad (60)$$

$$B = N_3 \left(\frac{N_1 - 1}{2N_2 - 1} \right) \left(\frac{N_2 - 1}{2N_3 - 1} \right) \quad (61)$$

$$C = N_3 \left(\frac{N_1 - 1}{2N_2 - 1} \right) \left(\frac{N_2 - 1}{2N_3 - 1} \right) (N_3 - 1) \quad (62)$$

Assim, são necessários dois canais de ordem 1 para formar um canal de ordem 2, ou seja, que $2N_2$ canais de ordem 1 unem-se em canais de ordem 2, e o restante $(N_1 - 2N_2)$, drenam para os canais de ordem 2, 3, e 4. Sendo assim, tem-se que os números de canais de ordem 1 que drenam para 2 é:

$$2N_2 + (N_1 - 2N_2) = \frac{A}{(A) + (B) + (C)} = 2N_2 (N_1 - 2N_2) \left(\frac{N_2}{2N_2 - 1} \right) \quad (63)$$

Levando-se em conta que P_{ij} representa a proporção de canais de ordem i que se unem com os canais de ordem j , sendo $i < j \leq \Omega$, tem-se a equação probabilidade de transição de estados mostrada na expressão (41).

$$P_{ij} = \frac{n_o}{n_T} \quad (41)$$

Onde: n_o = número de trechos de ordem i que drenam em trechos de ordem j ;

n_T = número total de trechos de ordem i do rio.

O HUIG é o resultado final da função da probabilidade que uma gota inicialmente caia em uma área que drena para um trecho de um canal de uma dada ordem, da probabilidade de transição de um trecho de canal de dada ordem para outro a jusante e da distribuição do tempo

de viagem da gota em trecho de certa ordem. A probabilidade inicial e a de transição são uma descrição probabilística da rede de drenagem e é a ligação entre a geomorfologia quantitativa e a hidrologia.

GUPTA et al. (1980) deduziram uma representação matemática geral para o HUI de uma bacia em termos de sua geomorfologia. Propuseram uma relação explícita para o HUI na seguinte equação:

$$HUI(t) = \sum_{s \in S} f_i * \dots * f_k(t) \cdot p(s) \quad (64)$$

Onde: f_i = a função densidade de probabilidade do estado inicial i ;

* = operação convolução;

$p(s)$ = a probabilidade de uma partícula seguir o caminho s , com $s = i, \dots, k$;

S = o conjunto de todos os caminhos possíveis.

A determinação das funções de densidade de probabilidade (f_i) dos tempos de permanência das partículas é de difícil obtenção, sendo necessário fazer suposições a respeito da forma das mesmas. Supondo-se que as funções (f_i) possuam a forma exponencial em algum parâmetro i , é possível expressar a convolução de ordem k da seguinte forma:

$$f_i * \dots * f_k(t) = \sum_{j=1}^k C_{j,k} \cdot e^{-\lambda_{xj} \cdot t} \quad (65)$$

no qual $C_{j,k}$, segundo FELLER (1978), é dado por:

$$C_{j,k} = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_k}{(\lambda_1 - \lambda_j) \dots (\lambda_{j-1} - \lambda_j) (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \dots (\lambda_k - \lambda_j)} \quad (66)$$

Neste caso o HUI é dado por:

$$HUI(t) = \sum_{s \in S} \sum_{j=1}^k C_{j,k} \cdot e^{-\lambda_j \cdot t} \cdot p(s) \quad (67)$$

$$HUI(t) = p(s_1) \sum_{j=1}^4 C_{j,4} e^{-\lambda_j t} + p(s_2) \sum_{j=1}^3 C_{j,3} e^{-\lambda_j t} + p(s_3) \sum_{j=1}^3 C_{j,3} e^{-\lambda_j t} + \quad (68)$$

$$p(s_4) \sum_{j=1}^2 C_{j,2} e^{-\lambda_j t} + p(s_5) \sum_{j=1}^3 C_{j,3} e^{-\lambda_j t} + p(s_6) \sum_{j=1}^2 C_{j,2} e^{-\lambda_j t} +$$

$$p(s_7) \sum_{j=1}^2 C_{j,2} e^{-\lambda_j t} + p(s_8) \sum_{j=1}^1 C_{j,1} e^{-\lambda_j t}$$

Segundo a representação do modelo geomorfológico sem amortecimento de GUPTA et al. (1980), a resposta de uma bacia hidrográfica é supostamente uma distribuição exponencial, podendo-se dizer que cada canal (ou estado) é representado por um reservatório de uma função linear, conforme a Figura 4.4(a). A excitação que ocorre na bacia é explicada como uma aplicação de um impulso unitário e sua resposta será uma função do tipo exponencial.

Quando ocorre uma excitação da bacia por impulso unitário, a resposta de cada canal terá uma representação do tipo exponencial, sendo a resposta da bacia igual à soma as respostas individuais. Para o modelo de GUPTA et al (1980) com amortecimento a função resposta também apresenta forma exponencial, mas com valor nulo na origem. A Figura 4.4 mostra a configuração dos modelos de GUPTA el al (1980).

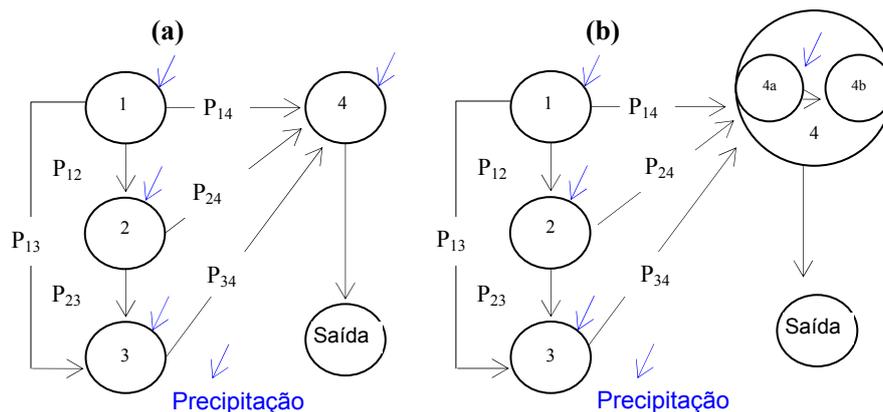


Figura 4.4 Representação de uma bacia de 4ª ordem.

O modelo geomorfológico de GUPTA et al. (1980) com amortecimento também apresenta uma distribuição exponencial para representar a resposta da bacia. Usando o princípio que a água percorre várias trajetórias até chegar à exutória da bacia, passando de um estado para outro dentro de uma mesma trajetória isto implicará na somatória das respostas exponenciais de cada trajetória, resultando em uma distribuição gama que terá valor nulo na origem.

Quando a água percorrer a última trajetória, ou seja, quando a água atingir o canal de ordem superior antes de chegar à exutória da bacia, a resposta será do tipo exponencial, com a ordenada não nula na origem, então o hidrograma da bacia será a somatória das respostas individuais e com valor não nulo na origem. RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) sugeriram que o canal de maior ordem é representado por dois reservatórios lineares em série que é representado por dois estados 4a e 4b, conforme a Figura 4.4 (b) mostrada anteriormente.

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) apresentaram o HUI da bacia modificada consistindo dos estados 1, 2, 3 e 4 através de um reservatório linear com tempo de retardo igual a metade do tempo de permanência no canal de ordem 4, ou seja $0,5\lambda_4^{-1}$.

As probabilidades existentes para que uma gota de água percorra uma determinada trajetória para uma bacia de 4ª ordem estão definidas a seguir:

$$p(s_1) = \theta_1(0) \cdot P_{1,2} \cdot P_{2,3} \cdot P_{3,4} \cdot P_{4,5} = \theta_1(0) \cdot P_{1,2} \cdot P_{2,3}$$

$$p(s_2) = \theta_1(0) \cdot P_{1,2} \cdot P_{2,4} \cdot P_{4,5} = \theta_1(0) \cdot P_{1,2} \cdot P_{2,4}$$

$$p(s_3) = \theta_1(0) \cdot P_{1,3} \cdot P_{3,4} \cdot P_{4,5} = \theta_1(0) \cdot P_{1,3}$$

$$p(s_4) = \theta_1(0) \cdot P_{1,4} \cdot P_{4,5} = \theta_1(0) \cdot P_{1,4}$$

$$p(s_5) = \theta_2(0) \cdot P_{2,3} \cdot P_{3,4} \cdot P_{4,5} = \theta_2(0) \cdot P_{2,3}$$

$$p(s_6) = \theta_2(0) \cdot P_{2,4} \cdot P_{4,5} = \theta_2(0) \cdot P_{2,4}$$

$$p(s_7) = \theta_3(0) \cdot P_{3,4} \cdot P_{4,5} = \theta_3(0)$$

$$p(s_8) = \theta_4(0) \cdot P_{4,5} = \theta_4(0)$$

$$P_{3,4} = P_{4,5} = 1$$

O esquema acima define um conjunto finito de caminhos possíveis de uma gota que cai aleatoriamente na bacia e que possa atingir a saída. Supondo uma bacia de terceira ordem, seu espaço amostral dos caminhos possíveis será : $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ sendo:

Caminho 1: $a_1 \rightarrow r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r_3 \rightarrow$ saída

Caminho 2: $a_1 \rightarrow r_1 \rightarrow r_3 \rightarrow$ saída

Caminho 3: $a_2 \rightarrow r_2 \rightarrow r_3 \rightarrow$ saída

Caminho 4: $a_3 \rightarrow r_3 \rightarrow$ saída

Conforme esquema de um reservatório geomorfológico representado na Figura 4.5, uma gota de água é sempre assumida como se caísse numa área a montante de um trecho do

canal, isto é, em um dos estados iniciais a_i dos caminhos possíveis mostrado anteriormente. Haverá sempre uma transição da área a montante de um trecho do canal de ordem a_i para o trecho do canal de ordem r_i .

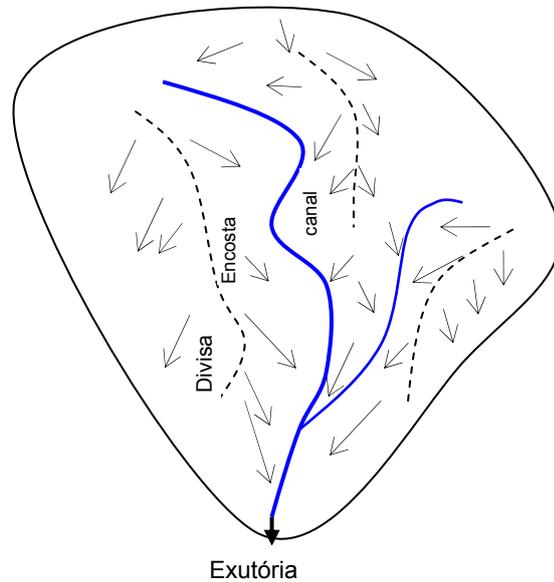


Figura 4.5 Esquema de um reservatório geomorfológico.

Para GUPTA et al. (1980), a função densidade acumulada no tempo, que leva a gota de montante à saída é dada por:

$$P(T_B \leq t) = \sum_{s \in S} P(T_s \leq t) \cdot p(s) \quad (69)$$

$$P(T_B \leq t) = \sum_{s \in S} F_1 * F_2 * \dots * F_k(t) \cdot p(s) \quad (70)$$

Onde: $S = (1 \dots k)$;

$P(\dots)$ = a probabilidade;

T_B = ao tempo viagem que a gota leva até a saída da bacia;

T_s = ao tempo de viagem no caminho s ;

$F_{1,2...K}$ = as convoluções dos caminhos.

O tempo de viagem T_s em um caminho particular é:

$a_i \rightarrow r_i \rightarrow r_j \rightarrow \dots \rightarrow r_\Omega$, sendo $i < j < \Omega$, e deve ser igual à soma dos tempos de viagem nos trechos do caminho:

$$T_s = T_{a_i} + T_{r_i} + T_{r_j} + \dots + T_{r_\Omega} \quad (71)$$

Sendo, T_{a_i} , o tempo de viagem na área a montante do trecho do canal e T_{r_i} , o tempo de viagem no trecho de ordem i , de i variando de $\{1, \dots, \Omega\}$. Tendo-se as várias áreas a montante dos trechos dos rios, e estes possuindo suas várias propriedades, os vários tempos são tomados como variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade $f_{T_{a_i}}(t)$ ou $f_{T_{r_i}}(t)$, respectivamente. Portanto, não há razão para considerar os tempos como variáveis aleatórias independentemente distribuídas. A função densidade de probabilidade do tempo de viagem de todo o caminho T_s é, portanto, a convolução das funções densidade de probabilidade $f_{T_{a_i}}(t)$ e $f_{T_{r_i}}(t)$, correspondentes aos trechos do caminho s , e dada por:

$$f_{T_s}(t) = f_{T_{a_i}}(t) * f_{T_{r_i}}(t) * f_{T_{r_j}}(t) * \dots * f_{T_{r_\Omega}}(t) \quad (72)$$

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) ignoraram o tempo de viagem nas áreas a montante dos trechos do rio em relação a todos os tempos que as gotas gastam na bacia, conforme a formulação a seguir:

$$T(s) = T_{r_i} + T_{r_j} + \dots + T_{r_\Omega} \quad (73)$$

$$f_{T_s}(t) = f_{T_{r_1}}(t) * f_{T_{r_2}}(t) * \dots * f_{T_{r_\Omega}} \quad (74)$$

Os parâmetros $\theta_i(0)$ e P_{ij} podem ser aproximados através de funções dadas por GUPTA (1980), que envolvem as relações de Horton. A função densidade de probabilidade do tempo de viagem de uma gota em uma bacia, $P(T_B \leq t)$, pode ser totalmente definida em termos das características geomorfológicas da bacia e a função probabilidade $f_{T_{r_i}}(t)$ que corresponde ao tempo de viagem de uma gota em um dado canal T_{r_i} . O HUI é definido como sendo a função densidade de probabilidade T_B sendo:

$$HUI_B(t) = \frac{d}{dt} P(T_B \leq t) = \sum f_{T_{r_1}}(t) * \dots * f_{T_{r_\Omega}}(t) \cdot p(s) \quad (75)$$

onde $f_{T_{r_i}}(t)$ é a função densidade de probabilidade de T_{r_i} .

4.6 Estimativas para o critério da velocidade (v) do HUIG

O procedimento adotado por FRANCHINI & O'CONNELL (1996) para incluir o tempo de concentração no cálculo do parâmetro velocidade (v) no HUIG foi feito conforme HENDERSON (1963) que observou que as características mais importantes do Hidrograma Unitário Instantâneo (HUI) são: a vazão de pico (q_p) e o tempo de pico (t_p).

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) recorreram a uma aproximação do HUIG, envolvendo valores de q_p e t_p obtidos de uma expressão completa do mesmo HUIG, para diferentes velocidades na faixa de 0,5 a 6,0 m/s e para diferentes ordens de bacias $\Omega = 3, 4, 5$ com comprimento \bar{L}_1 variando de 125 a 2000 m. Os cálculos foram realizados para 126 combinações de valores de R_A , R_B e R_L variando de 3,0 a 6,0; conforme SMART (1978); 3,0

a 5,0; conforme STRAHLER (1964) e 1,5 a 3,5 ; conforme SMART (1978), respectivamente, e também os devem obedecer a seqüência $R_B \leq R_L \leq R_A$. para que os valores se tenham um ajuste mais próximo ao que acontece naturalmente. Para valores fixos de R_A , R_B e R_L , \bar{L}_1 , Ω e v , foram calculados q_p e t_p e, finalmente completaram a análise de regressão obtendo duas relações entre q_p e t_p e R_A , R_B e R_L , \bar{L}_1 , Ω e v . RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) sugeriram que é adequado assumir um hidrograma unitário instantâneo triangular e apenas especificar o tempo de pico t_p e a vazão de pico q_p através das expressões:

$$q_p = \frac{1,31}{L_\Omega} R_L^{0,43} v \quad (76)$$

$$t_p = \frac{0,44}{v} L_\Omega \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^{0,55} R_L^{-0,38} \quad (77)$$

Onde: L_Ω = o comprimento do rio do maior ordem em quilômetros;

v = a velocidade em m/s;

q_p = vazão de pico será dada em (1/horas);

t_p = o tempo de pico em horas;

R_L = a relação de comprimento de rios;

R_B = a relação de bifurcação;

R_A = a relação de comprimento de áreas.

CARVALHO (2001), utilizando bacias sem dados históricos, empregou uma metodologia alternativa para obter a velocidade de escoamento como:

$$v_{\max} = \frac{L}{t_c} \quad (78)$$

Onde: v_{\max} = a velocidade máxima do fluxo do canal;

L = o maior comprimento de canal até a exultória;

t_c = o tempo de concentração.

As expressões utilizadas para o cálculo do tempo de concentração do trabalho apresentado foram as seguintes:

$$\text{KIRPICH (1940)} \quad t_c = 3,989 \frac{L^{0,77}}{S_b^{0,385}} \quad (79)$$

Onde: S_b = declividade do talvegue em m/m;

L = o comprimento do talvegue em Km.

$$\text{DOOGE (1973)} \quad t_c = 21,88 \frac{A_t^{0,41}}{S_b^{0,17}} \quad (80)$$

Onde: A_t = área Km²;

S_b = declividade do talvegue em m/m.

Outra forma de obter a velocidade de escoamento é através da seleção de várias bacias. Para cada uma delas determinam-se a velocidade e alguns parâmetros físicos, como comprimento do maior canal, curvas de nível, declividade e outros. Com esses dados, é feita uma relação entre as respectivas velocidades e os parâmetros físicos da bacia, de modo que resulte em uma fórmula que possa ser utilizada em outras bacias com mesmas características.

VILLELA (2001) testou o modelo da equação do parâmetro velocidade em sete bacias a partir de dados geomorfológicos das mesmas, e dados dos mapas na escala de 1:50.000, Obtendo o coeficiente de correlação de $R^2 = 0,9987$.

A equação de previsão do parâmetro de velocidade é a seguinte:

$$v = 2,774740 - 0,013127 * A + 0,051679 * L - 0,792506 * I_c \quad (81)$$

Onde: v = a velocidade do escoamento em m/s;

A = a área da bacia em km^2 ;

L = o comprimento do rio principal em km;

I_c índice de compacidade da bacia.

Esse procedimento não será testado no presente trabalho, pois o número de bacias estudadas é insuficiente para fazer um modelo de equação do parâmetro de velocidade.

As metodologias apresentadas são de fácil execução visto que necessita de parâmetros físicos, que são de fácil obtenção.

5 Metodologia

5.1 Escolha da Bacia e Levantamento de Dados

A Bacia Hidrográfica escolhida para o estudo pertence à Bacia do Ribeirão Salobra, que pertence a Sub-Bacia do Miranda e que está inserida na Bacia Alto Paraguai, localizada à 20° 19' S de latitude e 55 ° 15' W de longitude no município de Terenos – MS e é afluente do Rio Aquidauana, com a área total de drenagem de 535,86 km², mostrada nas Figuras 5.1 e 5.2.

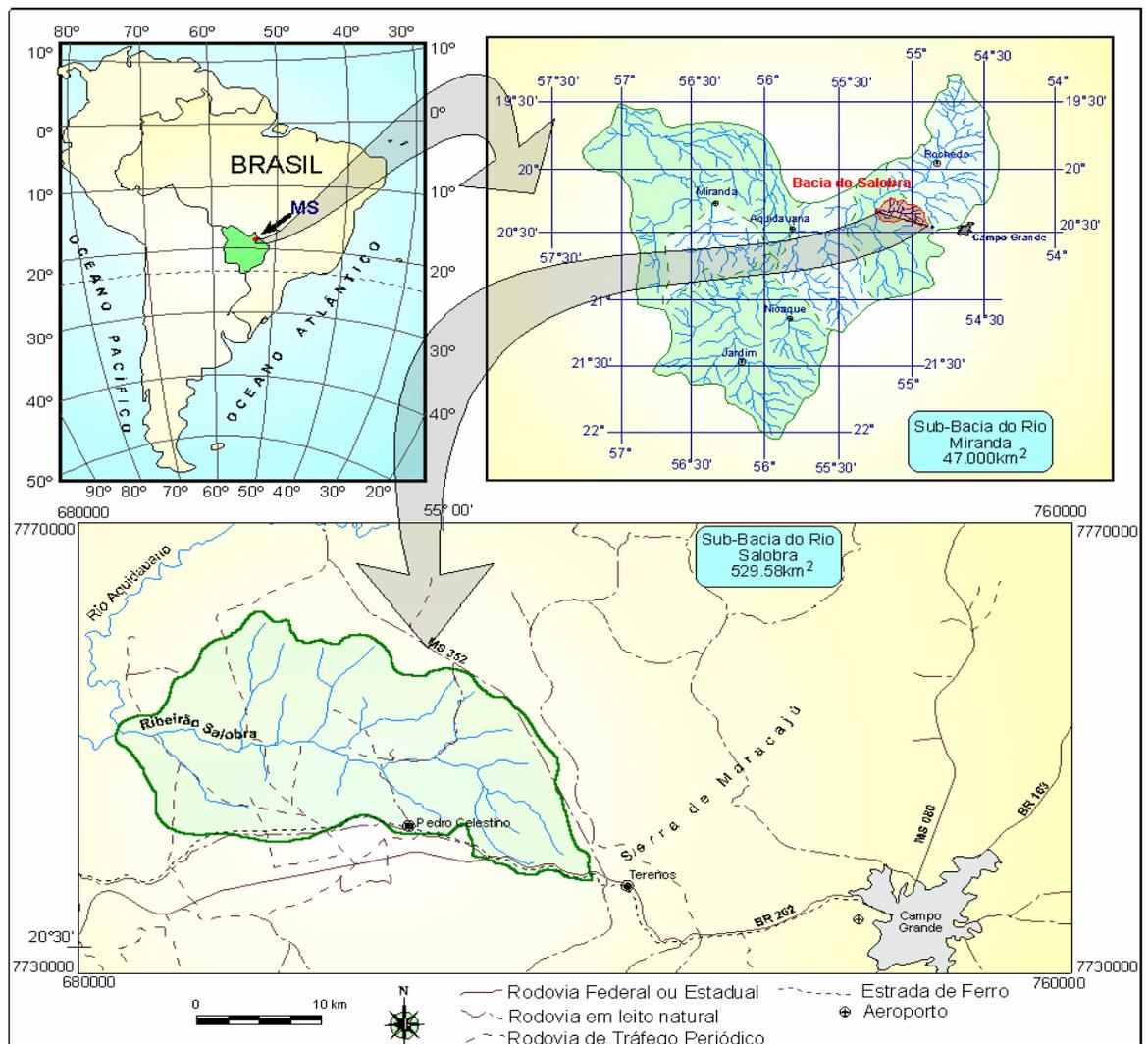


Figura 5.1 Localização da Bacia do Ribeirão Salobra (Fonte Polizer, 2002)



Figura 5.2 Localização da Bacia Hidrográfica do Miranda inserida na Bacia do Alto Paraguai.

Para obtenção dos dados do levantamento da bacia, utilizou-se as cartas topográficas do Ministério do Exército – Departamento de Engenharia e Comunicações – Região Centro Oeste do Brasil, na escala de 1: 100.000.

A imagem e a foto aérea da bacia do Ribeirão Salobra com suas diversas ocupações podem ser visualizadas nas Figuras 5.3 e 5.4 respectivamente.



Figura 5.3 Imagem da bacia do Ribeirão Salobra (Google Earth, 2007).



Figura 5.4 Visão da bacia mostrando diversas ocupações (campo, cerrado e mata). (Fonte: Polizer, 2002)

Os dados físicos são parâmetros naturais da bacia tais como perímetro, forma da bacia, área da bacia, relevo, rede de drenagem, características do solo, cobertura vegetal e formação geológica.

A Figura 5.5. mostra o mapa da cobertura do solo e a porcentagem da cobertura do solo em 2001.

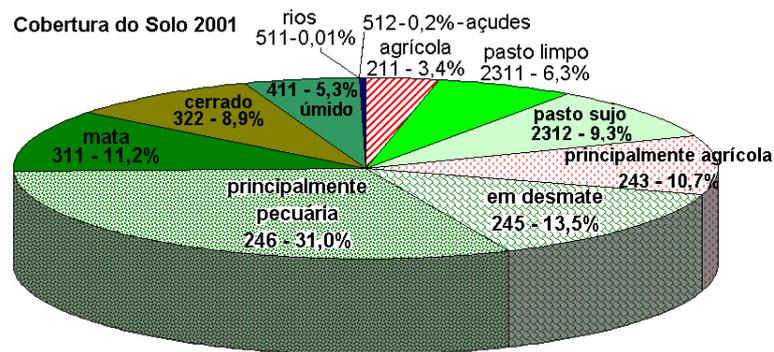
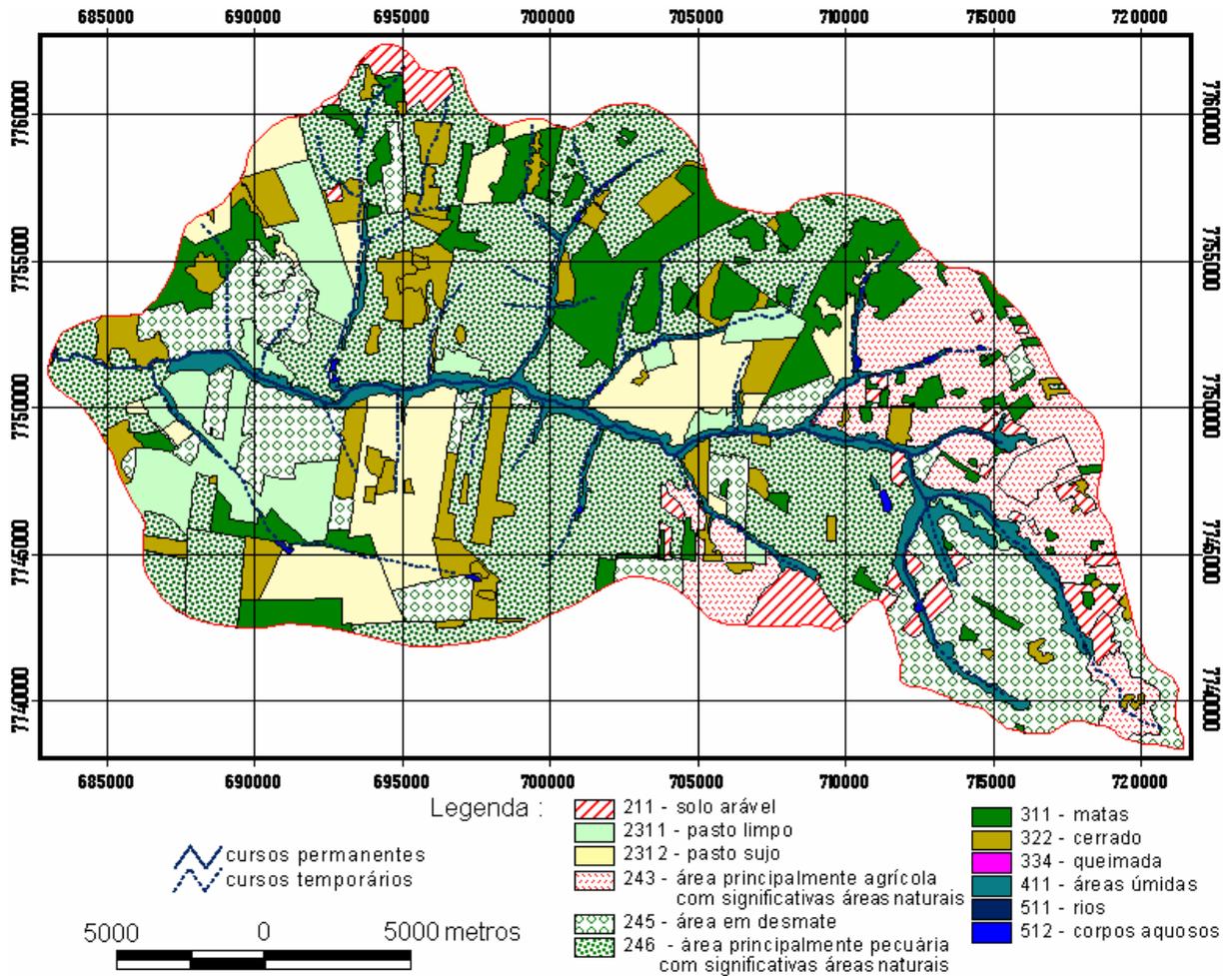


Figura 5.5 Mapa de Porcentagem da cobertura do solo em 2001. (Fonte Polizer, 2002).

5.2 Escolha do Modelo Hidrológico

Escolhida a bacia, foram determinadas as suas características físicas e suas relações geomorfológicas necessárias para a determinação das probabilidades de transição entre os

trechos do rio e probabilidades para que uma gota inicie sua viagem numa área à montante de um dado trecho do rio, até que chegue a exutória do rio.

Os dados necessários para caracterização física da bacia são obtidos manualmente com os aparelhos curvímetro e planímetro conforme feito no presente trabalho, ou via software de vetorização e extração de dados. O uso do curvímetro e planímetro é preferido por alguns autores por ser um método simples e direto, embora novas tecnologias como TRACER, ARC-INFO e outros, permitirão a determinação de dados de forma rápida e automática via softwares computacionais.

Utiliza-se o HU para que, com os dados pluviométricos, se obtenha os dados de vazão como é o caso da bacia estudada, que não dispõe dos dados fluviométricos.

O Método do Hidrograma Unitário Instantâneo Geomorfológico permite a partir de dados geomorfológicos, como topografia e ordem dos canais de drenagem, gerar hidrogramas unitários para a bacia.

A seqüência dos passos do levantamento de dados geomorfológicos é dada a seguir: traçado da rede hídrica e das sub-bacias, ordenação dos rios, determinação das áreas da sub-bacias, cálculo da área média e das sub-bacias de cada, cálculo do comprimento médio dos rios dos trechos e número de rios, cálculo da probabilidade de transição dos rios, cálculo da probabilidade de início do processo de cada ordem e o cálculo da velocidade. A partir destes dados calculados, dar entrada no modelo computacional desenvolvido e obter os hidrogramas unitários. Após a obtenção dos HUIG, determinar a vazão de pico e o tempo de pico, das bacias.

5.3 Metodologia utilizada na Bacia do Ribeirão Salobra

A bacia do Ribeirão Salobra até a confluência com o Rio Aquidauana mostrada na Figura 5.6, foi dividida em diversas sub-bacias de acordo com a ordem dos cursos d'água que formam sua rede de drenagem.

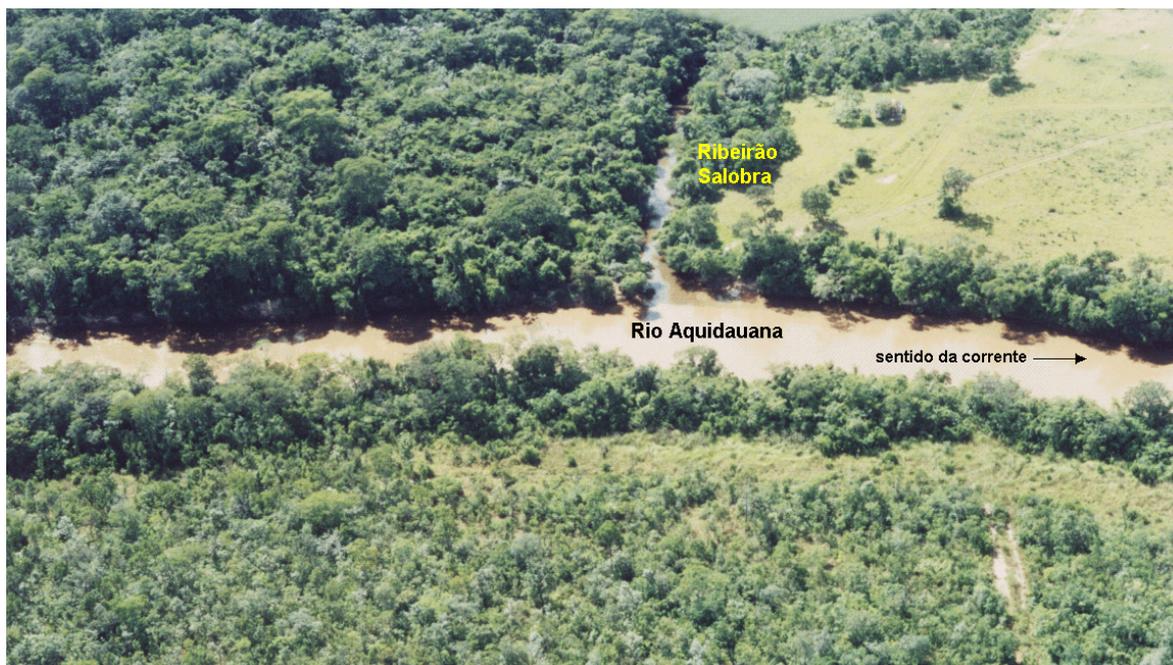


Figura 5.6 Exutória do Ribeirão Salobra, na confluência com o Rio Aquidauana. (Fonte: Polizer, 2002)

Dividiu-se a bacia de 4ª ordem em duas sub-bacias de 3ª ordem e as nomeou, como 3ª ordem “D” (representada pela delimitação de maior área) e 3ª ordem “E”, conforme a Figura 5.7 mostrada a seguir.

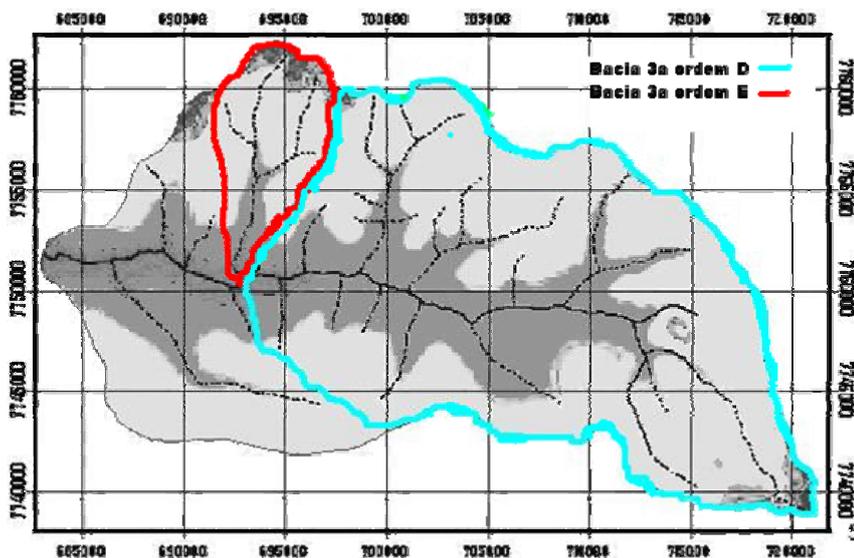


Figura 5.7 - Limitações Bacias 3a ordem D e 3a ordem E.

Assim, foi possível efetuar todas as medidas de comprimento dos rios, áreas de drenagem e declividades. A seguir procedeu-se a determinação dos índices geomorfológicos: razão de bifurcação, razão de comprimentos de rios, razão de áreas, conforme as expressões:

$$R_B = \frac{N_{\omega-1}}{N_{\omega}} \quad (2)$$

$$R_L = \frac{\bar{L}_{\omega}}{\bar{L}_{\omega-1}} \quad (3)$$

$$R_A = \frac{\bar{A}_{\omega}}{\bar{A}_{\omega-1}} \quad (4)$$

Após o levantamento dos dados geomorfológicos da bacia como relação de área, relação de bifurcação e relação de comprimento dos canais calculou-se as probabilidades de transição dos rios, expressas por:

$$P_{1,2} = \frac{R_B^3 + 2R_B^2 - 2}{2R_B^3 - R_B} \quad (42)$$

$$P_{1,3} = \frac{R_B^3 - 2R_B^2 - R_B + 2}{4R_B^3 - 2R_B^2 - 2R_B + 1} \quad (43)$$

$$P_{1,4} = \frac{R_B^4 - R_B^2 - 3R_B^2}{4R_B^4 - 2R_B^3 - 2R_B^2 + R_B} \quad (44)$$

$$P_{2,3} = \frac{R_B^2 + 2R_B - 2}{2R_B^2 - R_B} \quad (45)$$

$$P_{2,4} = \frac{R_B^2 - 3R_B + 2}{2R_B^2 - R_B} \quad (46)$$

$$P_{3,4} = P_{4,5} = 1$$

E a probabilidade de início do processo de cada ordem, dada por..

$$\theta_1(0) = \frac{R_B^3}{R_A^3} \quad (48)$$

$$\theta_2(0) = \frac{R_B^2}{R_A^2} - \frac{R_B^2}{R_A^3} \left(\frac{R_B^3 + 2R_B^2 - 2}{R_B^2 - 1} \right) \quad (49)$$

$$\theta_3(0) = \frac{R_B}{R_A} - \frac{R_B}{R_A^2} \left(\frac{R_B^2 + 2R_B - 2}{2R_B - 1} \right) - \frac{R_B}{R_A^3} \left(\frac{R_B^5 - 2R_B^4 - R_B^3 + R_B^2}{4R_B^3 - 2R_B^2 - 2R_B + 1} \right) \quad (50)$$

$$\theta_4(0) = 1 - \frac{R_B}{R_A} - \frac{1}{R_A^2} \left(\frac{R_B^3 - 3R_B^2 + 2R_B}{2R_B - 1} \right) - \frac{1}{R_A^3} \left(\frac{R_B^6 - 3R_B^5 + R_B^4 + 3R_B^3 - 2R_B^2}{4R_B^3 - 2R_B^2 - 2R_B + 1} \right) \quad (51)$$

Neste trabalho a velocidade foi calculada através da razão do comprimento do canal pelo o tempo de concentração, sendo considerada constante em toda a bacia. Este formulação apresenta uma vazão superestimada, mas é possível fazer a previsão do comportamento da bacia já que a mesma não dispõe de postos para obtenção de hidrogramas mais precisos.

Para obtenção do HUI é feita a convolução com base nos dados obtidos, tais como as probabilidades de início de processo, probabilidade de transição de estado, comprimento dos rios, velocidade, tempo médio de permanência da gota no estado.

$$HUI(t) = \sum_{s \in S} \sum_{j=1}^k C_{j,k} \cdot e^{-\lambda_j \cdot t} \cdot p(s) \quad (67)$$

$$HUI(t) = p(s_1) \sum_{j=1}^4 C_{j,4} e^{-\lambda_j t} + p(s_2) \sum_{j=1}^3 C_{j,3} e^{-\lambda_j t} + p(s_3) \sum_{j=1}^3 C_{j,3} e^{-\lambda_j t} + \quad (68)$$

$$p(s_4) \sum_{j=1}^2 C_{j,2} e^{-\lambda_j t} + p(s_5) \sum_{j=1}^3 C_{j,3} e^{-\lambda_j t} + p(s_6) \sum_{j=1}^2 C_{j,2} e^{-\lambda_j t} +$$

$$p(s_7) \sum_{j=1}^2 C_{j,2} e^{-\lambda_j t} + p(s_8) \sum_{j=1}^1 C_{j,1} e^{-\lambda_j t}$$

Supondo que uma gota de água passe de um estado para outro seguindo a sequência de 1 para 2, 2 para 3, 3 para 4, de acordo com o esquema assinalado na expressão (68) anterior, tem-se:

$$p(s_1) \sum_{j=1}^4 C_{j,4} e^{-\lambda_j t} = \theta_1 p_{12} p_{23} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \right] +$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)} \right] + \left[\frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)} \right] +$$

$$\left[\frac{e^{-\lambda_4 t}}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_4)} \right]$$

5.4 Desenvolvimento do Modelo Computacional

Foram aplicados três modelos para a bacia do Ribeirão Salobra no programa Maple 7. Os modelos computacionais foram desenvolvidos com base nos modelos geomorfológicos de GUPTA et al (1980), com amortecimento e sem amortecimento que é representado por uma distribuição exponencial que simula a resposta da bacia. O modelo com amortecimento se diferencia do sem amortecimento, pois em sua última trajetória quando a gota de água percorre o canal de maior ordem, ele é representado artificialmente por dois reservatórios

lineares em série fazendo que ocorra um retardo pela metade do tempo de permanência no canal. Então é gerado um amortecimento na resposta hidrológica o que faz com que o tempo de pico gerado se atrase para alcançar o tempo pico observado.

Após obtenção dos dados foram realizadas as simulações. As primeiras simulações foram feitas para toda a bacia de 4ª ordem com o modelo sem amortecimento e depois com amortecimento. Outro procedimento adotado foi subdividir a bacia e simular para as duas bacias de ordem três para ver se havia semelhança entre elas e entre a bacia de 4ª ordem.

Através das expressões (76) e (77) é possível determinar a vazão de pico e o tempo de pico, mostradas a seguir:

$$q_p = \frac{1,31}{L_\Omega} R_L^{0,43} V \quad (76)$$

$$t_p = \frac{0,44}{V} L_\Omega \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^{0,55} R_L^{-0,38} \quad (77)$$

Foi possível comparar os valores q_p e t_p da formulação com o obtido pelo HUIG, da bacia.

6 Resultados e discussões

6.1 Bacia de 4ª Ordem

A bacia do Ribeirão Salobra é classificada segundo a metodologia de Strahler como de quarta ordem. A bacia em estudo possui 29 segmentos de primeira ordem, 7 de segunda ordem, 2 de terceira ordem e 1 de quarta ordem. Sendo que os de primeira ordem possuem um comprimento médio de 6382,76 metros, os de segunda ordem 3435,75 metros, os de terceira ordem 11250,00 metros e os de quarta ordem 11100,00 metros, os parâmetros físicos foram obtidos de cartas topográficas e foram organizados, conforme a Tabela 6.1.

Tabela 6.1 Parâmetros físicos da bacia do Ribeirão Salobra (Bacia de 4. Ordem)

Ordem	Nºcanais	Áreas	\bar{A}_i	Comp.Total	\bar{L}_i (km)
	N_i	ΣA_i (km²)	(km²)	ΣL_i (km)	(km)
1	29	385,24	13,28	185,10	6,38
2	7	56,54	8,08	24,08	3,44
3	2	60,31	30,16	22,50	11,25
4	1	33,77	33,77	11,10	11,10

O comprimento do talvegue principal é de 46,9 km e a densidade de drenagem é de 0,4143km/km², que é considerado uma bacia de drenagem pobre, segundo VILLELA (1980) a densidade de drenagem varia de 0,5 km/km² para bacias com drenagem pobre a 3,5 km/km² para bacias bem drenadas.

O perfil longitudinal do talvegue principal é mostrado conforme a Figura 6.1.

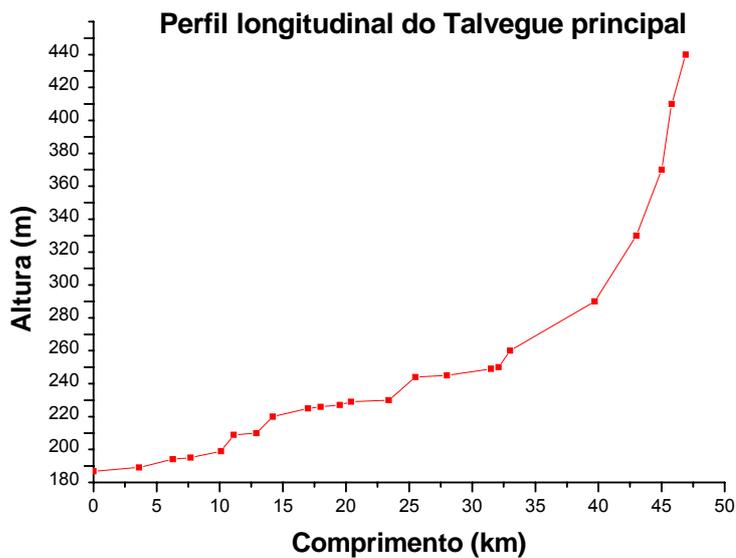


Figura 6.1 Perfil Longitudinal do Talvegue Principal - Bacia 4a ordem.

A bacia do Ribeirão Salobra possui baixa declividade conforme pode ser observado na carta de declividade da Bacia do Ribeirão Salobra na Figuras 6.2 e na foto da paisagem da Figura 6.3.

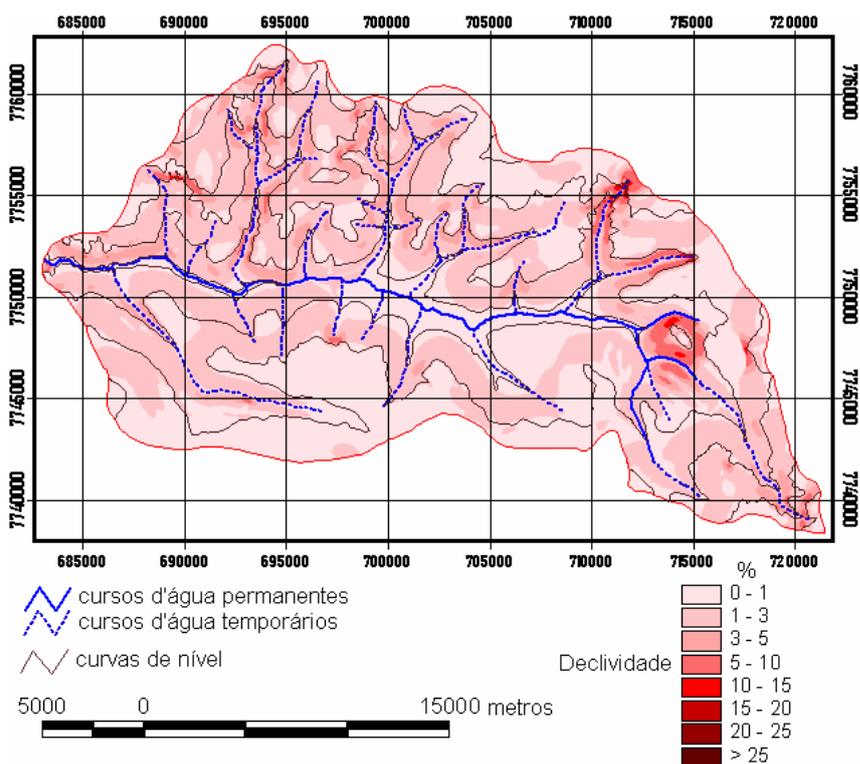


Figura 6.2 Carta de declividade da Bacia do Ribeirão Salobra. (Fonte Polizer, 2002).



Figura 6.3 Foto da paisagem, mostrando a longa extensão das vertentes com baixa declividade. (Fonte Polizer, 2002).

A Figura 6.4 apresenta os valores em metros da elevação da Bacia do Ribeirão Salobra obtidos pelo Modelo Digital de Elevação.

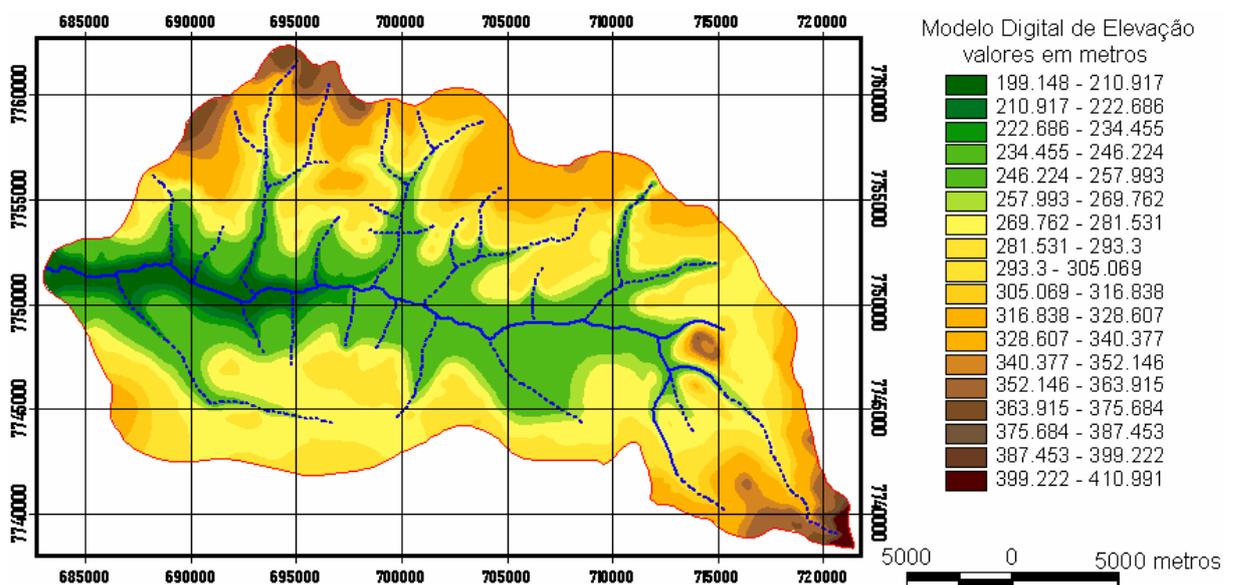


Figura 6.4 Modelo Digital de Elevação da Bacia do Ribeirão Salobra. Fonte: Polizer (2002).

A Figura 6.5, a seguir, mostra que é possível calcular as relações de Horton através das retas de ajuste feitas para a área média de cada ordem, comprimento médio de cada ordem e número de canais através do coeficiente linear da reta.

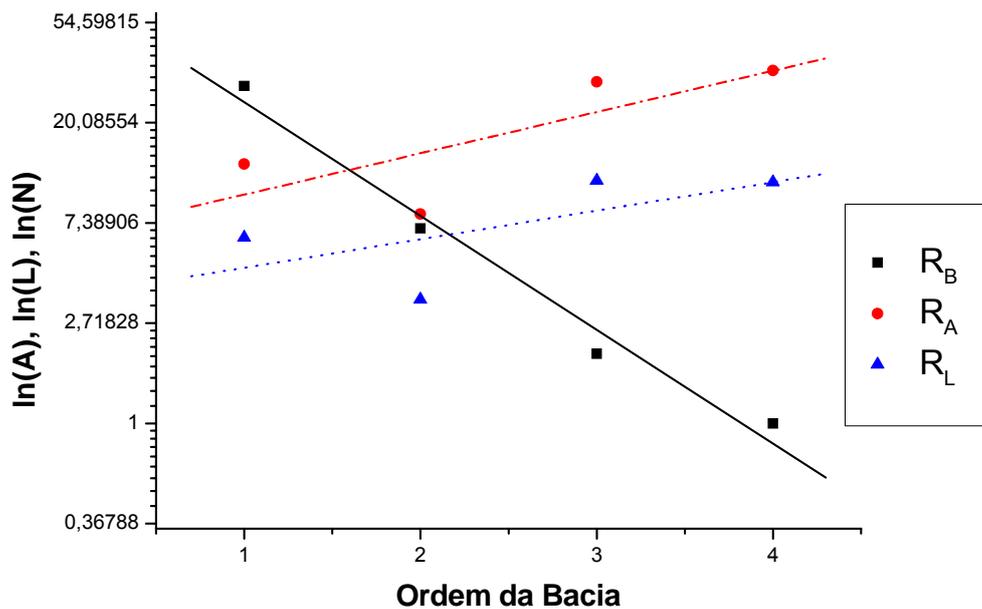


Figura 6.5 Diagrama de Horton para a Bacia de 4ª. Ordem

A equação de ajuste do Diagrama de Horton é expressa pela equação da reta $y = a + bx$:

Onde: $y = \ln(N), \ln(A), \ln(L)$; ($N =$ número de canais, $A =$ área; $L =$ comprimento);
 $a = R_B, R_A$ e R_L .

As relações do diagrama de Horton apresentaram os seguintes coeficientes de correlação:

- $R_B = 0,99;$
- $R_A = 0,78;$
- $R_L = 0,65;$

Os valores dos coeficientes de correlação de R_A e R_L não apresentaram um bom ajuste de curva, mas apresentaram uma boa aproximação quando comparados aos valores calculados pelas expressões quantitativas de Horton das razões geomorfológicas observados na Tabela 6.3.

Já o valor do coeficiente de correlação de R_B apresentou um bom ajuste de curva, mas apresentou diferença quando comparado às expressões quantitativas de Horton das razões geomorfológicas.

Os resultados obtidos pelo ajuste linear podem ser observados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2 Razões geomorfológicas de Horton 4a. ordem – Diagrama de Horton.

Razão de Bifurcação R_B	Razão de área R_A	Razão de Comprimento R_L
4,34	1,87	1,27

Conforme os resultados apresentados na Tabela 6.3, o cálculo das razões geomorfológicas também podem ser calculados por meio das expressões quantitativas de Horton.

Tabela 6.3 Razões geomorfológicas de Horton 4a. ordem.

Razão de Bifurcação R_B	Razão de área R_A	Razão de Comprimento R_L
3,21	1,82	1,60

Comparando-se os parâmetros obtidos com os parâmetros observados, os valores de R_B encontraram-se dentro da média obtida por STRAHLER (1964) entre 3 e 5. Os valores de R_A ficaram um pouco a baixo da média, segundo SMART (1978) entre 3 e 6. Já o valor de R_L , obtido pelas expressões quantitativas de Horton, teve seu valor dentro da média, e o valor obtido pelo Diagrama de Horton, teve seu valor um pouco abaixo da média obtida por SMART(1978) entre 1,5 e 3,5.

As probabilidades de transições dos canais é outro parâmetro a ser obtido para o cálculo do HUIG e pode ser obtido pela formulação de RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) que utiliza as razões geomorfológicas de Horton (R_L , R_B e R_A) ou pela forma direta.

Na qual cada probabilidade de estado depende do número de canais de ordem i que drenam nos canais de ordem j pelo número total dos trechos de ordem i do canal.

A comparação entre os valores calculados pela formulação e obtidos pela forma direta pode ser observada na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 Probabilidade de transição dos canais ($P_{i,j}$) 4ª ordem.

	Formulação	Direto
$P_{1,2}$	0,821138	0,6897
$P_{1,3}$	0,105931	0,2069
$P_{1,4}$	0,072931	0,1034
$P_{2,3}$	0,8463	0,8571
$P_{2,4}$	0,1537	0,1429
$P_{3,4}$	1	1

Os valores observados começam a apresentar maior semelhança a partir da probabilidade $P_{1,4}$.

Semelhante ao processo das Probabilidades de Transições de estado, é feito com as Probabilidades de início de Processo: o cálculo da formulação e o cálculo da forma direta, mas para a bacia de 4ª ordem não foi possível calcular pela formulação, pois R_B é maior que R_A sendo assim as probabilidades seria superiores a 1 (100%) o que não seria verdade, pois a soma de todas as probabilidades é 1 (100%). As somas das probabilidades de início de processo são: $\theta_1(0) + \theta_2(0) + \theta_3(0) + \theta_4(0) = 1$ e quando se observa as expressões (48) e (49) percebe-se que a soma das probabilidades de início de processo não é verdadeira.

$$\theta_1(0) = \frac{R_B^3}{R_A^3} \quad (48)$$

$$\theta_2(0) = \frac{R_B^2}{R_A^2} - \frac{R_B^2}{R_A^3} \left(\frac{R_B^3 + 2R_B^2 - 2}{R_B^2 - 1} \right) \quad (49)$$

As probabilidades de início de processo estão apresentadas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 Probabilidade de Início de Processo θ_i (4ª ordem).

Probabilidade de início de processo	Formulação	Direto
θ_1	-	0,718919
θ_2	-	0,105513
θ_3	-	0,112548
θ_4	-	0,06302

6.2 Bacia de 3ª Ordem “D”

A bacia 3ª ordem “D” possui 18 segmentos de primeira ordem, 7 de segunda ordem, 1 de terceira ordem. Sendo que os de primeira ordem possuem um comprimento médio de 6294,74 metros, os de segunda ordem 2742,86 metros, os de terceira ordem 16900,00 metros. Os parâmetros físicos foram obtidos de cartas topográficas e foram organizados, conforme a Tabela 6.6.

Tabela 6.6 Parâmetros físicos da bacia do Ribeirão Salobra (Bacia de 3. Ordem “D”).

Ordem	Nºcanais	Áreas	\bar{A}_i	Comp.Total	\bar{L}_i (km)
	N_i	ΣA_i (km ²)	(km ²)	ΣL_i (km)	(km)
1	18	256,85	14,27	119,60	6,29
2	7	49,49	7,07	19,20	2,74
3	1	45,21	45,21	16,90	16,90

O comprimento do talvegue principal é de 35,80 km e a densidade de drenagem é de 0,44 km/km², que é considerado uma bacia de drenagem pobre, segundo VILLELA (1980) a densidade de drenagem varia de 0,5 km/km² para bacias com drenagem pobre a 3,5 km/km² para bacias bem drenadas.

O perfil longitudinal do talvegue principal é mostrado conforme a Figura 6.6.

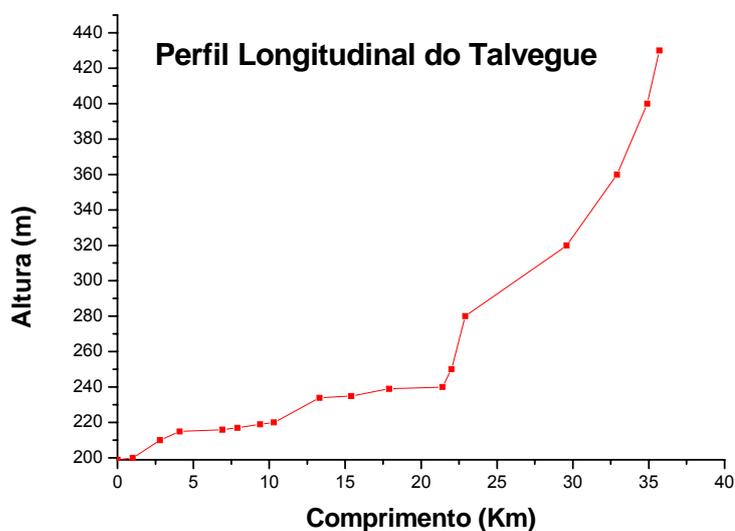


Figura 6.6 Perfil Longitudinal – (3a ordem “D”).

A Figura 6.7, a seguir, mostra que é possível calcular as relações de Horton através das retas de ajuste feitas para a área média de cada ordem, comprimento médio de cada ordem e número de canais através do coeficiente linear da reta.

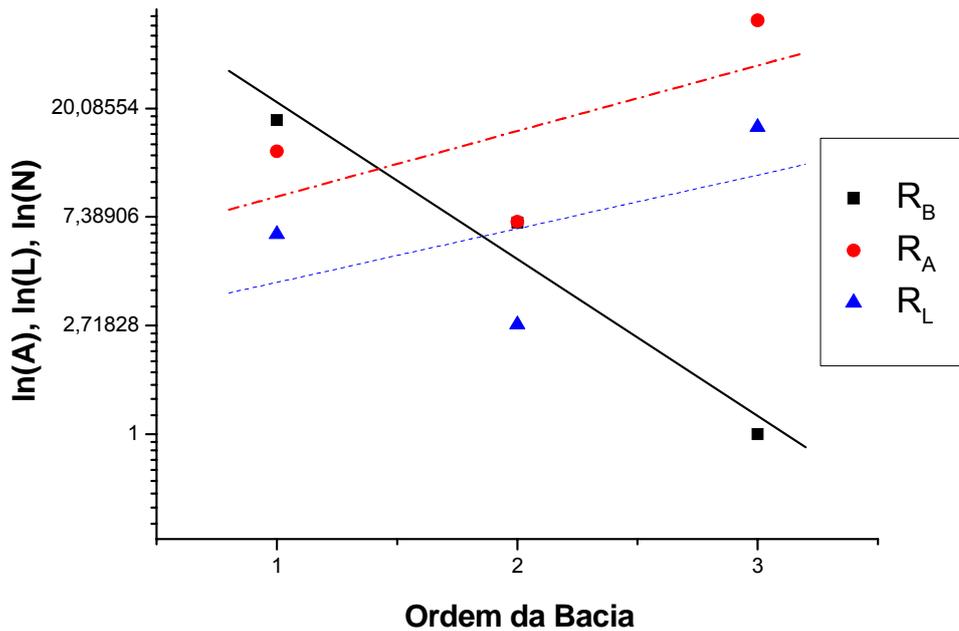


Figura 6.7 Diagrama de Horton 3ª ordem “D”.

A equação de ajuste do Diagrama de Horton é expressa pela equação da reta $y = a + bx$:

Onde: $y = \ln(N)$, $\ln(A)$, $\ln(L)$; (N = número de canais, A = área; L = comprimento);
 $a = R_B, R_A$ e R_L .

As relações do diagrama de Horton apresentaram os seguintes coeficientes de correlação:

$$R_B = 0,98;$$

$$R_A = 0,64;$$

$$R_L = 0,54;$$

Os valores dos coeficientes de correlação de R_A e R_L não apresentaram um bom ajuste de curva, e nem apresentaram uma boa aproximação quando comparados aos valores calculados pelas expressões quantitativas de Horton das razões geomorfológicas observados na Tabela 6.8.

Já o valor do coeficiente de correlação de R_B apresentou um bom ajuste de curva, e uma boa aproximação quando comparado às expressões quantitativas de Horton das razões geomorfológicas.

Os resultados obtidos pelo ajuste linear podem ser observados na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 Razões geomorfológicas de Horton 3a. ordem “D” – Diagrama de Horton.

Razão de Bifurcação R_B	Razão de área R_A	Razão de Comprimento R_L
4,50	1,58	0,90

Conforme os resultados apresentados na Tabela 6.8, o cálculo das razões geomorfológicas também podem ser calculados por meio das expressões quantitativas de Horton.

Tabela 6.8 Razões geomorfológicas de Horton (3ª ordem “D”).

Razão de Bifurcação R_B	Razão de área R_A	Razão de Comprimento R_L
4,78	3,29	3,46

Comparando-se os parâmetros obtidos com os parâmetros observados por STRAHLER (1964) entre 3 e 5, os valores de R_B encontraram-se dentro da média. Já o valor de R_A , obtido pelas expressões quantitativas de Horton, teve seu valor dentro da média, e o valor obtido pelo Diagrama de Horton, teve seu valor abaixo da média obtida por SMART (1978) entre 3 e 6. O valor de R_L , obtido pelas expressões quantitativas de Horton, teve seu valor dentro da média, e o valor obtido pelo Diagrama de Horton, teve seu valor bem abaixo da média obtida por SMART (1978), entre 1,5 e 3,5.

As probabilidades de transições dos canais é outro parâmetro a ser obtido para o cálculo do HUIG e pode ser obtido pela formulação de RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS

(1979) que utiliza as razões geomorfológicas de Horton (R_L , R_B e R_A) ou pela forma direta. Na qual cada probabilidade de estado depende do número de canais de ordem i que drenam nos canais de ordem j pelo número total dos trechos de ordem i do canal.

A comparação entre os valores calculados pela formulação e obtidos pela forma direta pode ser observada na Tabela 6.9.

Tabela 6.9 Probabilidade de transição dos canais ($P_{i,j}$) (3ª ordem “D”).

	Formulação	Direto
$P_{1,2}$	0,7395	0,6667
$P_{1,3}$	0,2605	0,3333
$P_{2,3}$	1	1

Os valores obtidos pela formulação e os valores obtidos pela forma direta obtiveram valores próximos.

Semelhante ao processo das Probabilidades de Transições de estado, é feito com as Probabilidades de início de Processo, o cálculo da formulação e o cálculo da forma direta. Para a bacia de 3ª ordem “D”, como a de 4ª ordem, não foi possível calcular pela formulação, pois R_B é maior que R_A sendo assim as probabilidades seriam superiores a 1 (100%) o que não seria verdade, pois a soma de todas as probabilidades é 1 (100%). As somas das probabilidades de início de processo são: $\theta_1(0) + \theta_2(0) + \theta_3(0) = 1$ e quando se observa as expressões (48) e (49) percebe-se que a soma das probabilidades de início de processo não é verdadeira.

$$\theta_1(0) = \frac{R_B^3}{R_A^3} \quad (48)$$

$$\theta_2(0) = \frac{R_B^2}{R_A^2} - \frac{R_B^2}{R_A^3} \left(\frac{R_B^3 + 2R_B^2 - 2}{R_B^2 - 1} \right) \quad (49)$$

As probabilidades de início de processo estão apresentadas na Tabela 6.10.

Tabela 6.10 Probabilidade de início de Processo θ_i (3ª ordem “D”).

	Formulação	Direto
θ_1	-	0,7333
θ_2	-	0,1394
θ_3	-	0,1273

6.3 Bacia de 3ª Ordem “E”

A bacia 3ª ordem “E” possui 4 segmentos de primeira ordem, 2 de segunda ordem, 1 de terceira ordem. Sendo que os de primeira ordem possuem um comprimento médio de 16550,00 metros, os de segunda ordem 3750,00 metros, os de terceira ordem 5600,00 metros, Os parâmetros físicos foram obtidos de cartas topográficas e foram organizados, conforme a Tabela 6.11.

Tabela 6.11 Parâmetros físicos da bacia do Ribeirão Salobra (Bacia de 3ª Ordem “E”)

Ordem	Nºcanais	Áreas	\bar{A}_i	Comp.Total	\bar{L}_i (km)
	N_i	ΣA_i (km²)	(km²)	ΣL_i (km)	(km)
1	4	27,36	6,84	16,55	4,14
2	2	5,52	2,76	3,75	1,88
3	1	15,10	15,10	5,60	5,60

O comprimento do talvegue principal é de 12,4 km e a densidade de drenagem é de 0,54 km/km².

O perfil longitudinal do talvegue principal é mostrado conforme a Figura 6.8:

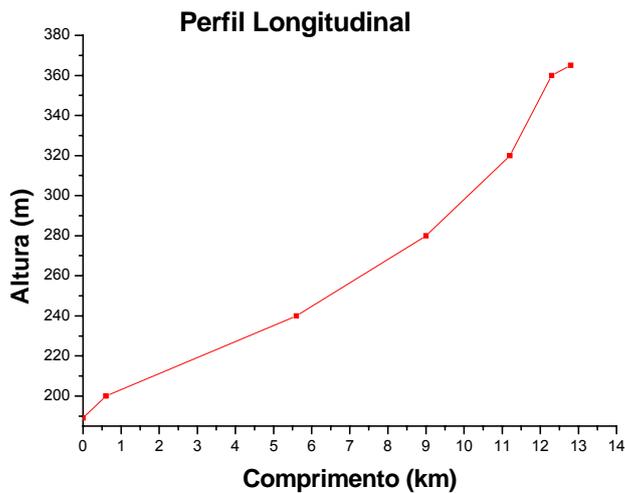


Figura 6.8 Perfil Longitudinal - 3a ordem “E”.

A Figura 6.9, a seguir, mostra que é possível calcular as relações de Horton através das retas de ajuste feitas para a área média de cada ordem, comprimento médio de cada ordem e número de canais através do coeficiente linear da reta.

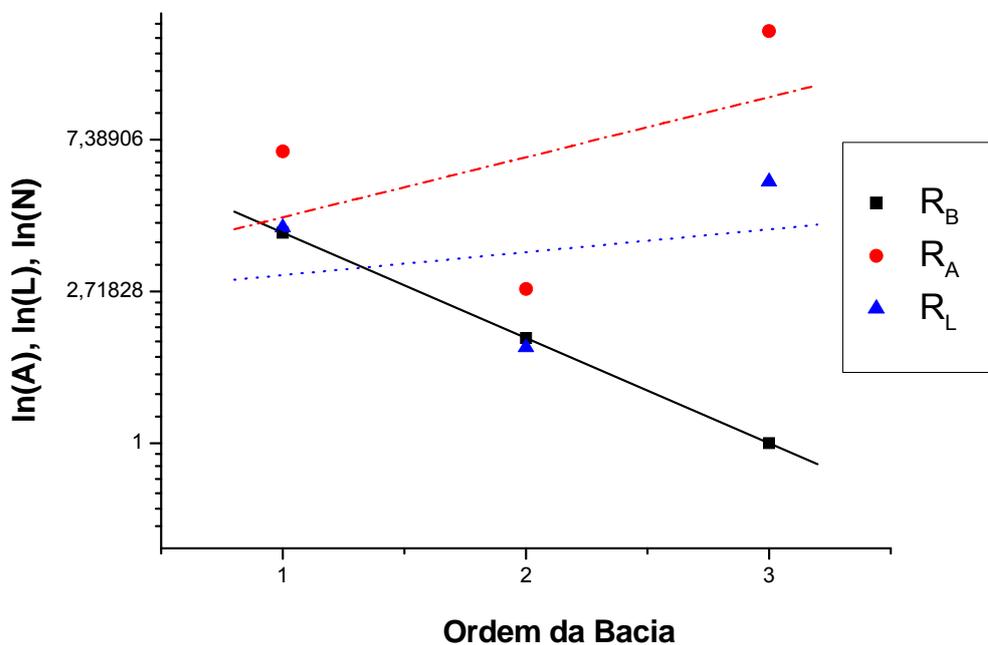


Figura 6.9 Diagrama de Horton 3a ordem “E”.

A equação de ajuste do Diagrama de Horton é expressa pela equação da reta $y = a + bx$:

Onde: $y = \ln(N)$, $\ln(A)$, $\ln(L)$; (N = número de canais, A = área; L = comprimento);

$$a = R_B, R_A \text{ e } R_L.$$

As relações do diagrama de Horton apresentaram os seguintes coeficientes de correlação:

$$R_B = 1,00;$$

$$R_A = 0,46;$$

$$R_L = 0,26;$$

Os valores dos coeficientes de correlação de R_A e R_L não apresentaram um bom ajuste de curva, e nem apresentaram uma boa aproximação quando comparados aos valores calculados pelas expressões quantitativas de Horton das razões geomorfológicas observados na Tabela 6.13.

Já o valor do coeficiente de correlação de R_B apresentou um bom ajuste de curva, e uma boa aproximação quando comparado às expressões quantitativas de Horton das razões geomorfológicas.

Os resultados obtidos pelo ajuste linear podem ser observados na Tabela 6.12.

Tabela 6.12 Razões geomorfológicas de Horton 3a. ordem E – Diagrama de Horton.

Razão de Bifurcação R_B	Razão de área R_A	Razão de Comprimento R_L
2,08	1,09	0,95

Conforme os resultados apresentados na Tabela 6.13, o cálculo das razões geomorfológicas também podem ser calculados por meio das expressões quantitativas de Horton.

Tabela 6.13 Razões geomorfológicas de Horton (3ª ordem “E”).

Razão de Bifurcação R_B	Razão de área R_A	Razão de Comprimento R_L
2,00	2,94	1,72

Comparando-se os parâmetros obtidos com os parâmetros observados por SHREVE (1966), os valores de R_B encontraram-se dentro da média entre 3 e 5, e um pouco abaixo segundo STRAHLER (1964) os valores de R_B encontraram-se dentro da média. Já o valor de R_A , obtido pelas expressões quantitativas de Horton, teve seu valor dentro da média, e o valor obtido pelo Diagrama de Horton, teve seu valor abaixo da média obtida por SMART (1978) entre 3 e 6. O valor de R_L , obtido pelas expressões quantitativas de Horton, teve seu valor dentro da média, e o valor obtido pelo Diagrama de Horton, teve seu valor bem abaixo da média obtida por SMART (1978), entre 1,5 e 3,5.

As probabilidades de transições dos canais é outro parâmetro a ser obtido para o cálculo do HUIG e pode ser obtido pela formulação de RODRIGUEZ-ITURBE & VALDÉS (1979) que utiliza as razões geomorfológicas de Horton (R_L , R_B e R_A) ou pela forma direta. Na qual cada probabilidade de estado depende do número de canais de ordem i que drenam nos canais de ordem j pelo número total dos trechos de ordem i do canal.

A comparação entre os valores calculados pela formulação e obtidos pela forma direta pode ser observada na Tabela 6.14.

Tabela 6.14 Probabilidade de transição dos canais ($P_{i,j}$) (3ª ordem E)

	Formulação	Direto
$P_{1,2}$	0,7395	0,6667
$P_{1,3}$	0,2605	0,3333
$P_{2,3}$	1	1

Os valores obtidos pela formulação e os valores obtidos pela forma direta obtiveram valores próximos.

Semelhante ao processo das Probabilidades de Transições de estado, é também realizado com as Probabilidades de início de Processo, o cálculo da formulação e o cálculo da forma direta.

As probabilidades de início de processo estão apresentadas na Tabela 6.15.

Tabela 6.15 Probabilidade de início de Processo θ_i (3ª ordem “E”).

	Formulação	Direto
θ_1	0,4628	0,5702
θ_2	0,2175	0,1151
θ_3	0,3197	0,3147

Os valores da probabilidade de início de processo apresentam semelhança entre os valores obtidos

Finalmente para iniciar o cálculo do HUIG, foram determinadas as velocidades por meio da formulação de KIRPICH (1940) e DOOGE (1973) mostradas na Tabela 6.16, obtidas a partir do tempo de concentração.

Tabela 6.16 Velocidades da bacia.

Velocidade (m/s)	
Bacia do Ribeirão Salobra	
KIRPICH (1940)	DOOGE (1973)
1,32	1,10

Os valores calculados através da formulação apresentam valores próximos. O cálculo da velocidade no canal foi feito através da formulação:

$$v_{\max} = \frac{L}{t_c} \quad (78)$$

Onde: v = velocidade no canal;

L = comprimento do canal até a exutória;

t_c = o tempo de concentração que é obtido em função de parâmetros físicos tais como comprimento do talvegue, área da bacia e declividade da bacia.

A equação (78) é utilizada na previsão de vazões máximas, no presente trabalho utilizou-se a formulação acima, pois não se dispõe de dados históricos de vazão. Uma metodologia mais precisa para a obtenção da velocidade é feita através de parâmetros físicos da bacia tais como área, comprimento do rio índice de compacidade, etc. e em seguida faz-se uma relação desses parâmetros de forma a criar uma fórmula geral para outras bacias.

Esse procedimento não será testado no presente trabalho, pois o número de bacias estudadas é insuficiente para fazer um modelo de equação do parâmetro de velocidade preciso.

6.4 Resultados das Simulações

A primeira simulação foi feita com base no modelo geomorfológico de GUPTA et al. (1980), sem amortecimento, que não gerou um hidrograma com valor nulo na origem conforme a figura 6.10, então foi feito um outro programa para o modelo geomorfológico de GUPTA et al. (1980), com amortecimento, que é mais adequado para bacias maiores, pois divide o último estado em dois fazendo que o modelo absorva as ordens superiores da bacia, propiciando um amortecimento na resposta hidrológica. Os hidrogramas analisados foram

feitos com base no modelo com amortecimento. O hidrograma com amortecimento da bacia de 4ª ordem está representado na figura 6.11.

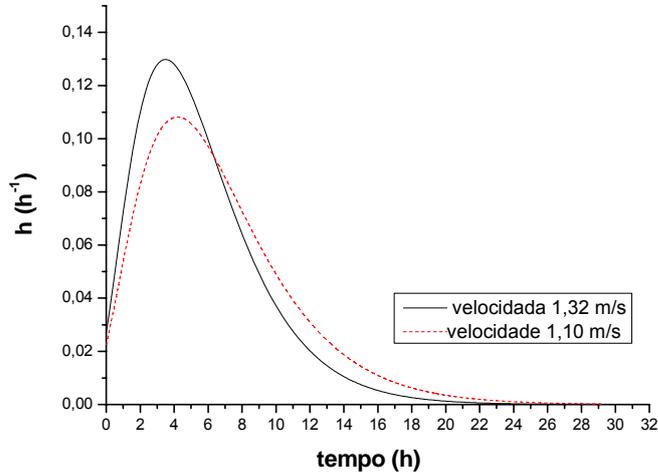


Figura 6.10 Hidrograma Bacia 4ª. Ordem: sem amortecimento (a), com amortecimento (b).

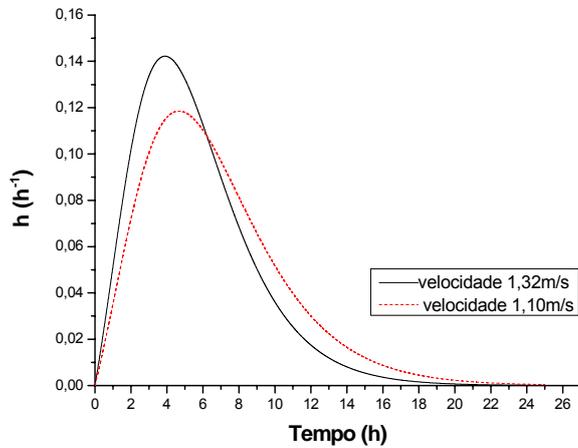


Figura 6.11 Hidrograma Bacia 4ª. Ordem com amortecimento.

Foram feitas as simulações para duas velocidades e observou-se que quanto maior a velocidade, maior a vazão de pico e menor o tempo de base, ou seja, q_p depende diretamente da velocidade e t_p inversamente da mesma.

RODRIGUEZ-ITURBE & VALDES (1979) sugeriram que a formulação utilizada para encontrar a vazão de pico e o tempo de pico no cálculo do hidrograma triangular fosse adequadas para o cálculo de o hidrograma unitário instantâneo triangular, com base nos parâmetros geomorfológicos da bacia.

A tabela 6.17 mostra a comparação da vazão de pico e do tempo de pico entre a formulação equações (76) e (77), e os valores máximos do HUIG da bacia de 4ª Ordem.

$$q_p = \frac{1,31}{L_\Omega} R_L^{0,43} V \quad (76)$$

$$t_p = \frac{0,44}{V} L_\Omega \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^{0,55} R_L^{-0,38} \quad (77)$$

Tabela 6.17 Comparação entre a formulação e o valor do hidrograma.

Bacia 4ª Ordem	Formulação		Gráfico	
	1,32	1,10	1,32	1,10
Velocidade – v (m/s)	1,32	1,10	1,32	1,10
Vazão de pico - q _p (h ⁻¹)	0,1907	0,1589	0,1422	0,1185
Tempo de pico - t _p (h)	4,22	5,07	3,91	4,65

Neste trabalho foi feito o HUIG para a bacia de 4ª ordem e posteriormente calculou-se o HUIG para as sub-bacias de 3ª ordem desta mesma bacia de modo a compará-las entre si e entre a bacia de 4ª ordem.

Inicialmente considerou-se a velocidade da bacia de 4ª ordem para as bacias de 3ª ordem “D” e 3ª ordem “E” de modo a compará-las e foram feitos os hidrogramas das Figuras 6.12.

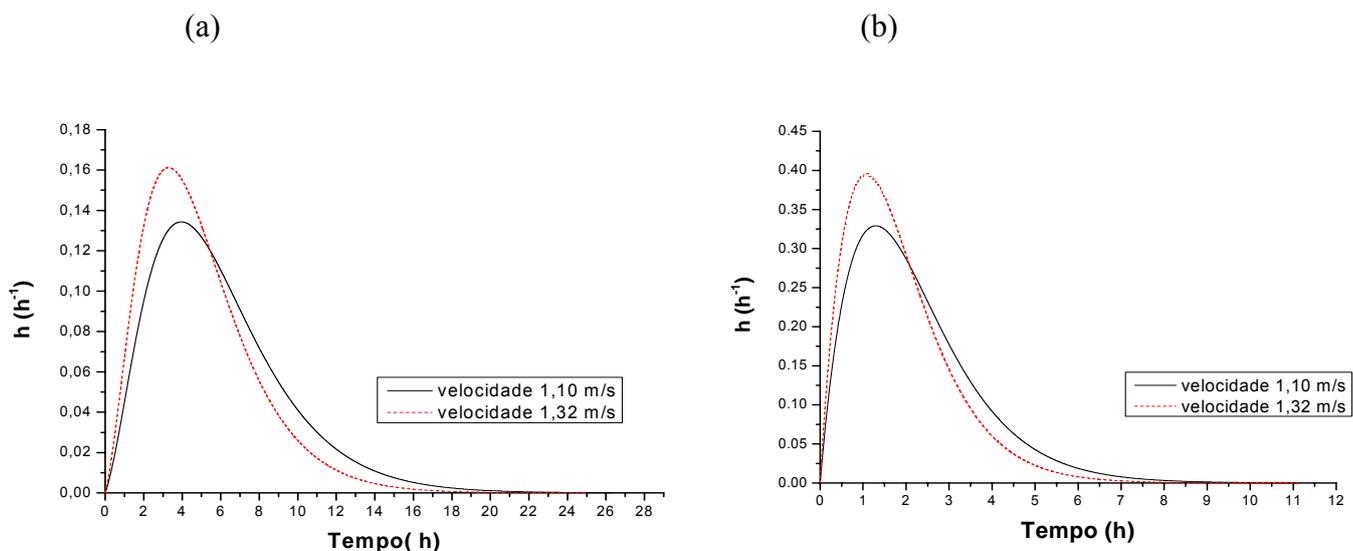


Figura 6.12 Hidrograma Bacia 3ª Ordem “D” (a) e 3ª Ordem “E” (b).

Comparando os dois hidrogramas observou-se que os hidrogramas de 3ª ordem não apresentam semelhanças entre si. Mas observando o hidrograma 3ª ordem “D” ele apresenta características próximas ao hidrograma de 4ª ordem, como o tempo de base, vazão de pico e tempo de pico. A tabela 6-24 mostra a comparação da vazão de pico e tempo de pico das bacias de 4ª ordem e 3ª ordem “D”.

As Tabelas 6.18 e 6.19 mostram a comparação dos dados da bacia de 3ª ordem “D” e dados da bacia de 3ª ordem “E”.

Tabela 6.18 Comparação entre a formulação e o valor do hidrograma 3ª ordem “D”.

Bacia 3ª Ordem “D”	Formulação		Gráfico	
	1,32	1,10	1,32	1,10
Velocidade – v (m/s)	1,32	1,10	1,32	1,10
Vazão de pico - q_p (h^{-1})	0,1707	0,1423	0,1612	0,1343
Tempo de pico - t_p (h)	4,31	5,18	3,29	4,00

Tabela 6.19 Comparação entre a formulação e o valor do hidrograma 3a ordem “E”.

Bacia 3ª Ordem “E”	Formulação		Gráfico	
Velocidade – v (m/s)	1,32	1,10	1,32	1,10
Vazão de pico - q_p (h^{-1})	0,389	0,3249	0,396	0,329
Tempo de pico - t_p (h)	1,23	1,47	1,03	1,31

Comparando-se os dados da Tabela 6.20 observa-se que a vazão de pico e tempo de pico das bacias de 3ª ordem “D” e 4ª ordem apresentam valores próximos, mas quando se compara a bacia de 3ª ordem “D” com a bacia de 3ª ordem “E” não apresentam semelhanças.

Tabela 6.20 Comparação entre os valores de pico 3a. ordem “D” e 4ª ordem.

	Formulação (3ª ordem “D”)		Formulação (4ª ordem)	
Velocidade – v (m/s)	1,32	1,10	1,32	1,10
Vazão de pico - q_p (h^{-1})	0,1707	0,1423	0,1907	0,1589
Tempo de pico - t_p (h)	4,31	5,18	4,22	5,07

A Figura 6.13 mostra a discrepância dos hidrogramas das de bacia de 3ª ordem “D” e 3ª ordem “E” quando sobrepostos.

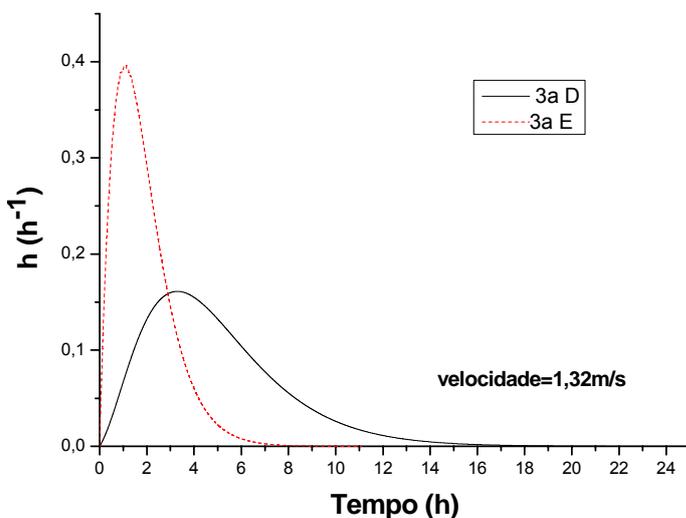


Figura 6.13 Comparação entre os hidrogramas de 3a. ordem.

A diferença entre os hidrogramas ocorre, pois quando R_A , R_B e R_L são diferentes, a vazão de pico é mais alta e o comportamento do HUIG é completamente diferente principalmente devido ao decréscimo de R_L . A bacia de 3ª ordem D apresenta $R_L=3,46$ e a bacia de 3ª ordem “E” $R_L=1,72$.

Outra justificativa apresentada é que quando canais de ordem Ω são muito curtos como:

L_{Ω} (3ª ordem E) = 12,4 km comparado ao L_{Ω} (3ª ordem D) = 35,80 km, a vazão de pico é mais alta e o tempo de pico é menor.

Outra análise foi feita calculando-se a velocidade para cada bacia na qual se obteve os valores de 1,04 m/s para a bacia 3ª ordem “D” e 0,95 m/s para a bacia 3ª ordem “E” e os hidrogramas gerados foram os da Figuras 6.14 e 6.15.

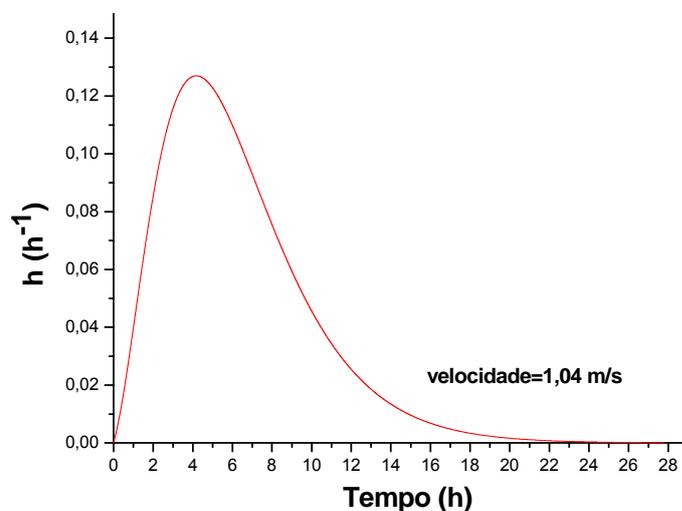


Figura 6.14 Hidrograma da Bacia de 3ª. ordem “D” - $v = 1,04$ m/s.

Os valores da vazão de pico e tempo de pico obtidos pela formulação e obtidos pelo hidrograma podem ser observados na Tabela 6.21.

Tabela 6.21 Comparação entre a formulação e o valor do hidrograma (3ª ordem “D”).

Bacia 3ª Ordem “D”	Formulação	Gráfico
Velocidade – v (m/s)	1,04	1,04
Vazão de pico - q_p (h^{-1})	0,1375	0,1270
Tempo de pico - t_p (h)	5,47	4,15

Observou-se que quando realizou o cálculo da velocidade para cada bacia, o valor da velocidade apresentou um decréscimo, conseqüentemente diminuiu a vazão de pico e aumentou-se o tempo de pico.

Quando se observou os valores da formulação com os valores obtidos pelo gráfico, eles apresentaram valores próximos.

O mesmo processo foi feito para a bacia de 3ª ordem “E”. A Figura 6.15 representa o hidrograma da bacia de 3ª ordem “E” com velocidade de 0,95 m/s.

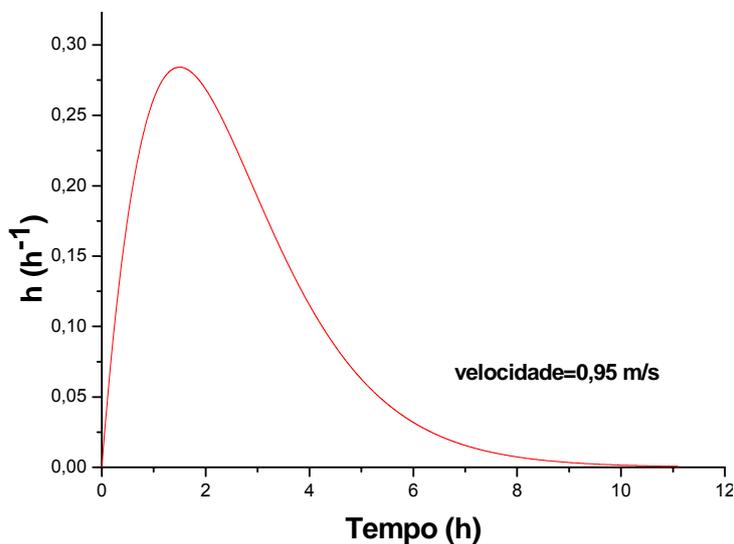


Figura 6.15 Hidrograma da Bacia de 3ª ordem “E” - v = 0,95 m/s.

Observou-se que a bacia de 3ª ordem “E” também apresentou um decréscimo da velocidade, e conseqüentemente diminuiu a vazão de pico e aumentou-se o tempo de pico.

Os valores da formulação quando comparados com os valores obtidos pelo gráfico, também apresentaram valores próximos. A Tabela 6.22 mostra a comparação dos valores obtidos pela formulação e obtidos pelo graficamente (pelo hidrograma).

Tabela 6.22 Comparação entre a formulação e o valor do hidrograma (3a ordem “E”).

Bacia 3ª Ordem “E”	Formulação	Gráfico
Velocidade – v (m/s)	0,95	0,95
Vazão de pico - q_p (h^{-1})	0,2842	0,2806
Tempo de pico - t_p (h)	1,525	1,72

7 Conclusões

Como a bacia hidrográfica do Ribeirão Salobra não dispõe de postos pluviométricos, é difícil correlacionar a chuva com o hidrograma de saída. Uma forma para solucionar esta questão foi utilizar o método do HUIG que é uma metodologia de simples aplicação.

A primeira simulação foi feita considerando a mesma velocidade da bacia de 4ª ordem para as sub-bacias de 3ª ordem “D” e “E”, e depois considerando as velocidades de cada sub-bacia de 3ª ordem. Observou-se que com o decréscimo da velocidade, diminui-se a vazão de pico e aumentou o tempo de pico. Notou-se que a velocidade da bacia de 3ª ordem “E” é inferior ao valor da 3ª ordem “D”, e que os valores da vazão de pico da sub-bacia de 3ª ordem “E” é aproximadamente o dobro dos valores da sub-bacia de 3ª ordem “D”. Quando se comparou o tempo de pico das sub-bacias observou-se que a sub-bacia de 3ª ordem “D” apresentou cerca de 3 vezes o valor da sub-bacia 3ª ordem “E”. Conclui-se que embora sejam bacias de mesma ordem, elas apresentam características bem distintas.

Entretanto quando se comparou o tempo de pico e a vazão de pico dos hidrogramas da bacia de 3ª ordem “D”, os valores obtidos foram próximos aos da bacia de 4ª ordem.

O modelo utilizado é importante principalmente para regiões sem monitoramento através de postos pluviométricos, pois utilizando recursos computacionais reduzidos e praticamente sem custo algum foi possível prever os dados de vazão.

Os modelos obtidos apresentaram boas aproximações quando comparados aos valores obtidos pelas formulações, mas para que se possa fazer uma calibração mais precisa é necessário obter dados experimentais.

8 Referências Bibliográficas

CARVALHO, M.A. Aplicação de hidrogramas unitários geomorfológicos na previsão de respostas hidrológicas. São Carlos, 1995. 200p. Dissertação (Mestrado em Hidráulica e Saneamento) - Escola de Engenharia São Carlos, Universidade de São Paulo.

CARVALHO, M.A. Aplicação de hidrogramas unitários geomorfológicos na previsão de respostas hidrológicas. Revista Brasileira de Recursos Hídricos, v. 6, n. 4, p. 5-17, dez. 2001.

Cartas topográficas do Ministério do Exército – Departamento de Engenharia e Comunicações. Região Centro Oeste do Brasil, na escala de 1: 100.000.

CHOW, V.T. Handbook of Applied Hydrology. New York: McGraw-Hill, 1964

DOOGE, J.C.I. The linear theory of hydrologic systems. Technical Bulletin. U.S. Depart. of Agric., Washington: US. Gov. Print. off. n. 1468, 1973.

FELLER, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. New York: John Wiley. v. 2, p. 704, 1971.

FRANCHINI, M., O'CONNELL, P.E. An analysis of the dynamic component of the geomorphologic instantaneous unit hydrograph. Journal of Hydrology, v.175, p.407-428, 1996.

GUPTA, V.K.; WAYMIRE, E.; WANG, C.T. A representation of an instantaneous unit hydrograph from geomorphology. *Water Resource Research*, Washington, v.16, n.5, p.855-62, oct. 1980.

HENDERSON, F.M. Some properties of the unit hydrograph, *J. Geophys. Res.* v. 68, p. 4785-4793, 1963

HORTON, R.E. Drainage basin characteristics. *Trans Am.Geophys. Union Trans.* v. 13, p. 350-361, 1932.

HORTON, R.E. Erosional development of stream and their drainage basin: hydrophysical approach to quantitative morphology. *Bull. Geol. Soc. Am.* v. 56, p. 275-370, 1945.

HOWARD, A. D., Simulation of stream networks by headward growth and branching, *Geograph. Anal.* v. 3, p. 29-50, 1971.

KIRPICH, Z.P.. "Time of concentration of small agricultural watersheds". *Civil Engineering* v.10, n. 6, p.362, 1940.

PILGRIM, D.H. Travel times and nonlinearity of flood runoff from tracer measurements on small watershed. *Water Resource Research*, Washington, v.12, n.3, p.487-96, 1976.

POLIZER, M. Avaliação Multitemporal da cobertura do solo na bacia do Ribeirão Salobra – MS. Campo Grande, 2002. Dissertação (Mestrado em Tecnologias Ambientais) – UFMS – Mato Grosso do Sul.

RIGHETTO, A.M. Hidrologia e Recursos Hídricos. Publicação EESC-USP, São Carlos, SP. 1998, 819p.

RODRIGUEZ-ITURBE, I.; VALDÉS, J. B. The geomorphologic structure of hydrologic response. Water Resource Research, Washington, v.15, n.6, p.1409-1420, dez. 1979.

SHERMAN, L.K. Streamflow from rainfall by unit-graph method. Engineering News-Record. v. 108 p. 501-505, abr. 1932.

SMART, J.S. Channel networks. Advances in Hydroscience. V.8, p. 305-346, 1972.

SMART, J.S., The analysis of drainage network composition, Earth Surf. Processes, v. 3, p. 129-171, 1978.

STRAHLER, A.N. Equilibrium theory of erosional slopes approached by frequency distribution analysis. Am. J. Sci., v. 248, p. 673-696, 1950.

STRAHLER, A.N. Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography. Geol. Soc. Am. Bull. v. 63, p. 1117-1121, 1952.

STRAHLER, A.N. Dimensional analysis applied to fluvially eroded landforms. Geol. Soc. Amer. Bull. v. 69, p. 279- 300, 1958.

VILLELA, M.C.C. Análise do Hidrograma Unitário Geomorfológico e regionalização do parâmetro de velocidade. Campinas, 2001,78p. (Tese de Doutorado – Universidade de Campinas – Unicamp).

VILLELA, S. M.; MATTOS, A. Hidrologia Aplicada. São Paulo: McGraw-Hill, 1980.

Anexo A

Programa HUIG 4ª Ordem sem amortecimento

Procedures

> **restart;**

Procedure trajeto

```
trajeto:= proc(lambda_1, lambda_2);  
    1/(lambda_1-lambda_2);  
end proc;
```

```
dens_prob:=proc(C, lambda);  
    C*exp(-lambda*t);  
end proc;
```

Entrada de dados

Entrada das probabilidades de transição

```
for i from 1 to 3 do  
    for j from 2 by 1 to 4 do  
        if (i<>j) then  
            printf("\n Para P[%d,%d] \n",i,j);  
            P[i,j]:= readstat("Digite a probabilidade de transição:");  
        else  
            P[i,j]:=0;  
        end if;  
    end do;  
end do;
```

```
V:=readstat("Entre com o valor da velocidade (em m/s):");
```

Entrada com os valores de lambda

```
for k from 1 to 4 do  
    printf("\n Para L[%d] \n",k);  
    L[k]:= readstat("Digite o comprimento médio dos rios de cada  
ordem:");  
    lambda[k]:=V/L[k];  
    printf("\n Para Teta[%d] \n",k);  
    theta[k]:=readstat("Digite a probabilidade de início do  
processo:");  
end do;  
  
for l from 1 to 4 do  
    for l from 1 to 4 do  
        T[l,l]:=1;  
    end do;  
end do;
```

Para P[1,2]

Digite a probabilidade de transição:0.6897;

Para P[1,3]

Digite a probabilidade de transição:.2089;

Para P[1,4]

Digite a probabilidade de transição:.1034;

Para P[2,3]

Digite a probabilidade de transição:0.8571;

Para P[2,4]

Digite a probabilidade de transição:0.1429;

Para P[3,2]

Digite a probabilidade de transição:0;

Para P[3,4]

Digite a probabilidade de transição:1;

Entre com o valor da velocidade (em m/s):1.32;

Para L[1]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:6382.76;

$$L_1 := 6382.76$$

$$\lambda_1 := .0002068070866$$

Para Teta[1]

Digite a probabilidade de início do processo:0.718919;

$$\theta_1 := .718919$$

Para L[2]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:3435.71;

$$L_2 := 3435.71$$

$$\lambda_2 := .0003842000635$$

Para Teta[2]

Digite a probabilidade de início do processo:0.105513;

$$\theta_2 := .105513$$

Para L[3]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:11250;

$$L_3 := 11250$$

$$\lambda_3 := .0001173333333$$

Para Teta[3]

Digite a probabilidade de início do processo:0.112548;

$$\theta_3 := .112548$$

Para L[4]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:11100;

$$L_4 := 11100$$

$$\lambda_4 := .0001189189189$$

Para Teta[4]

Digite a probabilidade de início do processo: 0.06302;

$$\theta_4 := .06302$$

Calcula os valores dos índices Ci,j

Trajetos c1->c2->c3->c4

```
> unassingn('k'):
k:=1:

for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=1..4);
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=1..4));

  if (l<>1) then
    T[1,1]:=trajeto(lambda[1], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>2) then
    T[2,1]:=trajeto(lambda[2], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>3) then
    T[3,1]:=trajeto(lambda[3], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
  end if;

  C[l,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
  C:=C[l,4]:
  f[l,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));

end do;

unassingn('C, l', 'k'):

f1:=prod_lambda*(f[1,1]+f[2,1]+f[3,1]+f[4,1]);

p_s(1):= theta[1]*P[1,2]*P[2,3]*f1;
```

$$\begin{aligned}
Prod_lambda &:= \prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \\
prod_lambda &:= .110865191110^{-14} \\
C_{1,4} &:= .716865222710^{12} \\
C &:= .716865222710^{12} \\
f_{1,1} &:= .716865222710^{12} e^{(-.0002068070866t)} \\
\\
Prod_lambda &:= \prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \\
prod_lambda &:= .110865191110^{-14} \\
C_{2,4} &:= -.796274413710^{11} \\
C &:= -.796274413710^{11} \\
f_{2,1} &:= -.796274413710^{11} e^{(-.0003842000635t)} \\
\\
Prod_lambda &:= \prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \\
prod_lambda &:= .110865191110^{-14} \\
C_{3,4} &:= .264131511610^{14} \\
C &:= .264131511610^{14} \\
f_{3,1} &:= .264131511610^{14} e^{(-.0001173333333t)} \\
\\
Prod_lambda &:= \prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \\
prod_lambda &:= .110865191110^{-14} \\
C_{4,4} &:= -.270503889310^{14} \\
C &:= -.270503889310^{14} \\
f_{4,1} &:= -.270503889310^{14} e^{(-.0001189189189t)} \\
fI &:= .0007947539991e^{(-.0002068070866t)} - .00008827911504e^{(-.0003842000635t)} \\
&\quad + .02928299051e^{(-.0001173333333t)} - .02998946538e^{(-.0001189189189t)} \\
p_s(1) &:= .0003377570358e^{(-.0002068070866t)} - .00003751713392e^{(-.0003842000635t)} \\
&\quad + .01244477673e^{(-.0001173333333t)} - .01274501662e^{(-.0001189189189t)}
\end{aligned}$$

Trajeto c2->c3->c4

> **k:=2:**

```

for r from 2 to 4 do
  for b from 2 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for l from 2 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=2..4);
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=2..4));

  if (l<>2) then

```

```

    T[2,1]:=trajeto(lambda[2], lambda[1]);
end if;

if (l<>3) then
    T[3,1]:=trajeto(lambda[3], lambda[1]);
end if;

if (l<>4) then
    T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
end if;

C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=2..4);
C:=C[1,4]:
f[1,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));

end do;

unassingn('C', 'l', 'k'):

f2:=prod_lambda*(f[2,2]+f[3,2]+f[4,2]);

p_s(2):= theta[2]*P[2,3]*f2;

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .5360802325 10-11
C2,4 := .1412534887 108
C := .1412534887 108
f2,2 := .1412534887 108 e(-0.0003842000635t)

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .5360802325 10-11
C3,4 := .2363283771 1010
C := .2363283771 1010
f3,2 := .2363283771 1010 e(-0.0001173333333t)

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .5360802325 10-11
C4,4 := -.2377409119 1010
C := -.2377409119 1010
f4,2 := -.2377409119 1010 e(-0.0001189189189t)
f2 := .00007572320306 e(-0.0003842000635t) + .01266909713 e(-0.0001173333333t)
- .01274482033 e(-0.0001189189189t)

```

$$p_s(2) := .6848042430 10^{-5} e^{(-.0003842000635t)} + .001145732235 e^{(-.0001173333333t)} - .001152580277 e^{(-.0001189189189t)}$$

Trajeto c3->c4

> k:=3:

```
for r from 3 to 4 do
  for b from 3 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 3 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=3..4);
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=3..4));

  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
  end if;

  C[l,4]:=product(T[l_1,l], l_1=3..4);
  C:=C[l,4];
  f[l,k]:=(dens_prob(C, lambda[l]));

end do;
```

unassingn('C, l', 'k');

f3:=prod_lambda*(f[3,3]+f[4,3]);

p_s(3):= theta[3]*f3;

$$Prod_lambda := \prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a}$$

$$prod_lambda := .1395315315 10^{-7}$$

$$C_{3,4} := 630681.8124$$

$$C := 630681.8124$$

$$f_{3,3} := 630681.8124 e^{(-.0001173333333t)}$$

$$Prod_lambda := \prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a}$$

$$prod_lambda := .1395315315 10^{-7}$$

$$C_{4,4} := -630681.8124$$

$$C := -630681.8124$$

$$f_{4,3} := -630681.8124 e^{(-.0001189189189t)}$$

$$f3 := .008799999917 e^{(-.0001173333333t)} - .008799999917 e^{(-.0001189189189t)}$$

$p_s(3) := .0009904223907e^{(-.0001173333333t)} - .0009904223907e^{(-.0001189189189t)}$

Trajeto c1->c3->c4

```
> k:=4:
```

```
for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for d from 2 to 2 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=1..4)/lambda[2];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=1..4))/lambda[2];
```

```
  if (l<>1) then
    T[1,1]:=trajeto(lambda[1], lambda[1]);
  end if;
```

```
  if (l<>3) then
    T[3,1]:=trajeto(lambda[3], lambda[1]);
  end if;
```

```
  if (l<>4) then
    T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
  end if;
```

```
  C[2,4]:=0:
  C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
  C:=C[1,4]:
```

```
  f[2,4]:=0:
  f[1,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));
```

```
end do;
```

```
unassingn('C, l', 'k');
```

```
f4:=prod_lambda*(f[1,4]+f[3,4]+f[4,4]);
```

```
p_s(4):= theta[1]*P[1,3]*f4;
```

$$\begin{aligned}
Prod_lambda &:= 2602.810606 \left(\prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right) \\
prod_lambda &:= .2885610952 10^{-11} \\
C_{2,4} &:= 0 \\
C_{1,4} &:= .1271668559 10^9 \\
C &:= .1271668559 10^9 \\
f_{2,4} &:= 0 \\
f_{1,4} &:= .1271668559 10^9 e^{(-.0002068070866t)} \\
\\
Prod_lambda &:= 2602.810606 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right) \\
prod_lambda &:= .2885610952 10^{-11} \\
C_{2,4} &:= 0 \\
C_{2,4} &:= -.7962744137 10^{11} \\
C &:= -.7962744137 10^{11} \\
f_{2,4} &:= 0 \\
f_{2,4} &:= -.7962744137 10^{11} e^{(-.0003842000635t)} \\
\\
Prod_lambda &:= 2602.810606 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right) \\
prod_lambda &:= .2885610952 10^{-11} \\
C_{2,4} &:= 0 \\
C_{3,4} &:= .7048791285 10^{10} \\
C &:= .7048791285 10^{10} \\
f_{2,4} &:= 0 \\
f_{3,4} &:= .7048791285 10^{10} e^{(-.0001173333333t)} \\
\\
Prod_lambda &:= 2602.810606 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right) \\
prod_lambda &:= .2885610952 10^{-11} \\
C_{2,4} &:= 0 \\
C_{4,4} &:= -.7175958138 10^{10} \\
C &:= -.7175958138 10^{10} \\
f_{2,4} &:= 0 \\
f_{4,4} &:= -.7175958138 10^{10} e^{(-.0001189189189t)} \\
f4 &:= .0003669540721 e^{(-.0002068070866t)} + .02034006933 e^{(-.0001173333333t)} \\
&\quad - .02070702339 e^{(-.0001189189189t)} \\
p_s(4) &:= .00005510996218 e^{(-.0002068070866t)} + .003054715935 e^{(-.0001173333333t)} \\
&\quad - .003109825895 e^{(-.0001189189189t)}
\end{aligned}$$

Trajeto c1-> c2 -> c4

```

> k:=5:

for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for d from 3 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=1..4)/lambda[3];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=1..4))/lambda[3];

  if (l<>1) then
    T[1,1]:=trajeto(lambda[1], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>2) then
    T[2,1]:=trajeto(lambda[2], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
  end if;

  C[3,4]:=0:
  C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
  C:=C[1,4]:

  f[3,5]:=0;
  f[1,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));

end do;

unassignn('C, l', 'k'):

f5:=prod_lambda*(f[1,5]+f[2,5]+f[4,5]);

p_s(5):= theta[1]*P[1,2]*P[2,4]*f5;

```

$$Prod_lambda := 8522.727275 \left(\prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .9448737881 \cdot 10^{-11}$$

$$C_{3,4} := 0$$

```

C1,4 := -.6414062207108
C := -.6414062207108
f3,5 := 0
f1,5 := -.6414062207108 e(-.0002068070866t)

Prod_lambda := 8522.727275  $\left( \prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .9448737881 10-11
C3,4 := 0
C2,4 := .2124991491 108
C := .2124991491 108
f3,5 := 0
f2,5 := .2124991491 108 e(-.0003842000635t)

Prod_lambda := 8522.727275  $\left( \prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .9448737881 10-11
C3,4 := 0
C3,4 := .2641315116 1014
C := .2641315116 1014
f3,5 := 0
f3,5 := .2641315116 1014 e(-.0001173333333t)

Prod_lambda := 8522.727275  $\left( \prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .9448737881 10-11
C3,4 := 0
C4,4 := .4289070716 108
C := .4289070716 108
f3,5 := 0
f4,5 := .4289070716 108 e(-.0001189189189t)
f5 := -.0006060479255 e(-.0002068070866t) + .0002007848760 e(-.0003842000635t)
      + .0004052630495 e(-.0001189189189t)
p_s(5) := -.00004294171501 e(-.0002068070866t) + .00001422667509 e(-.0003842000635t)
      + .00002871503992 e(-.0001189189189t)

```

Trajeto c1 -> c4

> k:=6:

```

for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

```

```

for d from 2 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a],
l_a=1..4)/(lambda[3]*lambda[2]);
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a],
l_a=1..4))/(lambda[3]*lambda[2]);

  if (l<>1) then
    T[1,l]:=trajeto(lambda[1], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
  end if;

  C[2,4]:=0:
  C[3,4]:=0:
  C[1,4]:=product(T[l_1,l], l_1=1..4);
  C:=C[1,4]:

  f[2,6]:=0:
  f[3,6]:=0;
  f[1,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));

end do;

unassignn('C, l', 'k'):

f6:=prod_lambda*(f[1,6]+f[4,6]);

p_s(6):= theta[1]*P[1,4]*f6;

```

```

Prod_lambda := .2218304494 108  $\left( \prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .2459327517 10-7
C2,4 := 0
C3,4 := 0
C1,4 := -11378.09589
C := -11378.09589
f2,6 := 0
f3,6 := 0
f1,6 := -11378.09589 e(-.0002068070866t)
Prod_lambda := .2218304494 108  $\left( \prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 

```

```

prod_lambda := .245932751710-7
C2,4 := 0
C3,4 := 0
C2,4 := .2124991491 108
C := .2124991491 108
f2,6 := 0
f3,6 := 0
f2,6 := .2124991491 108 e(-0.0003842000635t)

Prod_lambda := .2218304494 108  $\left( \prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .245932751710-7
C2,4 := 0
C3,4 := 0
C3,4 := .7048791285 1010
C := .7048791285 1010
f2,6 := 0
f3,6 := 0
f3,6 := .7048791285 1010 e(-0.0001173333333t)

Prod_lambda := .2218304494 108  $\left( \prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .245932751710-7
C2,4 := 0
C3,4 := 0
C4,4 := 11378.09589
C := 11378.09589
f2,6 := 0
f3,6 := 0
f4,6 := 11378.09589 e(-0.0001189189189t)
f6 := -.0002798246431 e(-0.0002068070866t) + .0002798246431 e(-0.0001189189189t)
p_s(6) := -.00002080110752 e(-0.0002068070866t) + .00002080110752 e(-0.0001189189189t)

```

Trajeto c2 -> c4

> k:=7:

```

for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

```

```

for d from 1 to 1 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for d from 3 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 2 to 4 do

  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=2..4)/(lambda[3])
prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=2..4))/(lambda[3]);

  if (l<>2) then
    T[2,1]:=trajeto(lambda[2], lambda[1]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
  end if;

  C[3,4]:=0;
  C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
  C:=C[1,4];

  f[3,7]:=0;
  f[1,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));

end do;

unassingn('C, l', 'k');

f7:=prod_lambda*(f[2,7]+f[4,7]);

p_s(7):= theta[2]*P[2,4]*f7;

```

```

Prod_lambda := 8522.727275  $\left( \prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .456886561910-7
C3,4 := 0
C2,4 := -3769.585665
C := -3769.585665
f3,7 := 0
f2,7 := -3769.585665 e(-0.0003842000635t)
Prod_lambda := 8522.727275  $\left( \prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 

```

```

prod_lambda := .456886561910-7
C3,4 := 0
C3,4 := .2363283771 1010
C := .2363283771 1010
f3,7 := 0
f3,7 := .2363283771 1010 e(-0.0001173333333t)

Prod_lambda := 8522.727275  $\left( \prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .456886561910-7
C3,4 := 0
C4,4 := 3769.585665
C := 3769.585665
f3,7 := 0
f4,7 := 3769.585665 e(-0.0001189189189t)
f7 := -.0001722273034 e(-0.0003842000635t) + .0001722273034 e(-0.0001189189189t)
p_s(7) := -.2596810161 10-5 e(-0.0003842000635t) + .2596810161 10-5 e(-0.0001189189189t)

```

Trajeto c4

> k:=8:

```

for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for d from 1 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=4..4);
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=4..4));

  if (l>4) then
    T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
  end if;

  C[l,4]:=product(T[l_1,l], l_1=4..4);
  C:=C[l,4]:

```

```

    f[1,k]:=(dens_prob(C, lambda[1]));
end do;
unassingn('C, l', 'k'):
f8:=prod_lambda*(f[4,8]);
p_s(8):= theta[4]*f8;

```

```

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .0001189189189
C1,4 := -11378.09589
C := -11378.09589
f1,8 := -11378.09589 e(-0.0002068070866t)

```

```

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .0001189189189
C2,4 := -3769.585665
C := -3769.585665
f2,8 := -3769.585665 e(-0.0003842000635t)

```

```

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .0001189189189
C3,4 := 630681.8124
C := 630681.8124
f3,8 := 630681.8124 e(-0.0001173333333t)

```

```

Prod_lambda :=  $\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a}$ 
prod_lambda := .0001189189189
C4,4 := 1
C := 1
f4,8 := e(-0.0001189189189t)
f8 := .0001189189189 e(-0.0001189189189t)
p_s(8) := .7494270269 10-5 e(-0.0001189189189t)

```

>

```

HUIG:=( (p_s(1)+p_s(2)+p_s(3)+p_s(4)+p_s(5)+p_s(6)+p_s(7)+p_s(8)) );

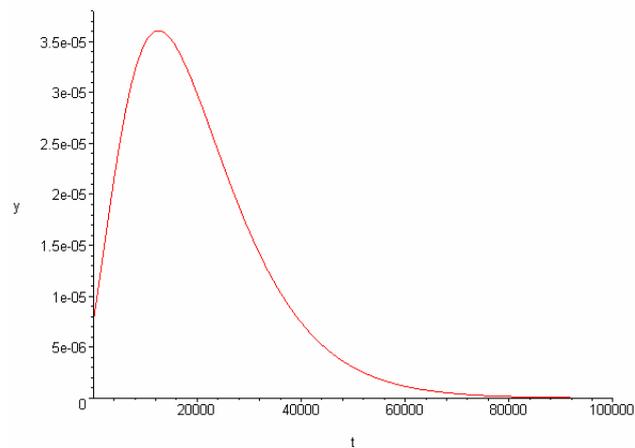
```

```

HUIG := .0003291241755 e(-0.0002068070866t) - .00001903922656 e(-0.0003842000635t)
+ .01763564728 e(-0.0001173333333t) - .01793823795 e(-0.0001189189189t)

```

```
> plot(HUIG, t=0..100000, y=0..0.000038);
```



```
> func:=t->HUIG;
```

```
fd:= fopen(ordem4,WRITE,TEXT);
```

```
for t from 0 by 10 to 90000 do  
  y:=func(t):  
  fprintf(fd, "%d %g\n", t, y):  
end do:  
fclose(fd);
```

```
restart;
```

```
func := t → HUIG  
fd := 1
```

Anexo B

Programa HUIG 4ª Ordem com amortecimento

Procedures

```
> restart;
```

Procedure trajeto

```
trajeto:= proc(lambda_1, lambda_2);  
    1/(lambda_1-lambda_2);  
end proc;  
  
dens_prob_1:=proc( lambda_1, lambda_4);  
    (exp(-lambda_1*t)-exp(-lambda_4*t));  
end proc;  
  
dens_prob_2:=proc( lambda_2,lambda_4);  
    (exp(-lambda_2*t)-exp(-lambda_4*t));  
end proc;  
  
dens_prob_3:=proc( lambda_3,lambda_4);  
    (exp(-lambda_3*t)-exp(-lambda_4*t));  
end proc;  
  
dens_prob_4:=proc(lambda_4);  
    (t*exp(-lambda_4*t));  
end proc;
```

Entrada de dados

Entrada das probabilidades de transição

```
for i from 1 to 3 do  
    for j from 2 by 1 to 4 do  
        if (i<>j) then  
            printf("\n Para P[%d,%d] \n",i,j);  
            P[i,j]:= readstat("Digite a probabilidade de transição:");  
        else  
            P[i,j]:=0;  
        end if;  
    end do;  
end do;
```

```
V:=readstat("Entre com o valor da velocidade (em m/s):");
```

Entrada com os valores de lambda

```
for k from 1 to 4 do  
    printf("\n Para L[%d] \n",k);  
    L[k]:= readstat("Digite o comprimento médio dos rios de cada  
ordem:");  
    lambda[k]:=V/L[k];  
    printf("\n Para Teta[%d] \n",k);
```

```
theta[k]:=readstat("Digite a probabilidade de início do processo:");  
end do;
```

```
lambda[4]:=2*lambda[4]:  
lambda[4];
```

Para P[1,2]

Digite a probabilidade de transição:0.6897;

Para P[1,3]

Digite a probabilidade de transição:0.2089;

Para P[1,4]

Digite a probabilidade de transição:0.1034;

Para P[2,3]

Digite a probabilidade de transição:0.8571;

Para P[2,4]

Digite a probabilidade de transição:0.1429;

Para P[3,2]

Digite a probabilidade de transição:0;

Para P[3,4]

Digite a probabilidade de transição:1;

Entre com o valor da velocidade (em m/s):1.32;

Para L[1]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:6382.76;

$$L_1 := 6382.76$$

$$\lambda_1 := .0002068070866$$

Para Teta[1]

Digite a probabilidade de início do processo:0.718919;

$$\theta_1 := .718919$$

Para L[2]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:3435.71;

$$L_2 := 3435.71$$

$$\lambda_2 := .0003842000635$$

Para Teta[2]

Digite a probabilidade de início do processo:0.105513;

$$\theta_2 := .105513$$

Para L[3]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:11250;

$$L_3 := 11250$$

$$\lambda_3 := .0001173333333$$

Para Teta[3]

Digite a probabilidade de início do processo:0.112548;

$$\theta_3 := .112548$$

Para L[4]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:11100;

$$L_4 := 11100$$

$$\lambda_4 := .0001189189189$$

Para Teta[4]

Digite a probabilidade de início do processo:0.0632;

$$\theta_4 := .0632$$

$$.0002378378378$$

>

Calcula os valores dos índices Ci,j

Trajetos c1->c2->c3->c4

```
> unassignn('k');
```

```
k:=1:
```

```
for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=1..4)*lambda[4];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=1..4)*lambda[4]);
```

```
  if (l<>1) then
    T[1,l]:=trajeto(lambda[1], lambda[1]);
  end if;
```

```
  if (l<>2) then
    T[2,l]:=trajeto(lambda[2], lambda[1]);
  end if;
```

```
  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[1]);
  end if;
```

```

    if (l<>4) then
      T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
    end if;

    C[1,4]:=product(T[1_1,1], 1_1=1..4);
    C:=C[1,4];

end do;

N_1:=(T[2,1]*T[3,1]*(T[4,1]*T[4,1])):
N_2:=(T[1,2]*T[3,2]*(T[4,2]*T[4,2])):
N_3:=(T[1,3]*T[2,3]*(T[4,3]*T[4,3])):
N_4:=(T[1,4]*T[2,4]*T[3,4]):

unassingn('N_1','N_2','N_3','N_4','C','l','k'):

  f[1,k]:=(dens_prob_1(lambda[1],lambda[4]));
  f[2,k]:=(dens_prob_2(lambda[2],lambda[4]));
  f[3,k]:=(dens_prob_3(lambda[3],lambda[4]));
  f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

f1:=
prod_lambda*(f[1,1]*(N_1)+f[2,1]*(N_2)+f[3,1]*(N_3)+f[4,1]*(N_4));

p_s(1):= theta[1]*P[1,2]*P[2,3]*f1;

```

>

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5273587465 10^{-18}$$

$$C_{1,4} := -.2030372082 10^{13}$$

$$C := -.2030372082 10^{13}$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5273587465 10^{-18}$$

$$C_{2,4} := -.1443245256 10^{12}$$

$$C := -.1443245256 10^{12}$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5273587465 10^{-18}$$

$$C_{3,4} := .3475414659 10^{12}$$

$$C := .3475414659 10^{12}$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5273587465 10^{-18}$$

$$C_{4,4} := .1827155142 10^{13}$$

$$C := .1827155142 10^{13}$$

$$f_{1,1} := e^{(-.0002068070866t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{2,1} := e^{(-.0003842000635t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{3,1} := e^{(-.0001173333333t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,1} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f1 := -.03450559317 e^{(-.0002068070866t)} + .03246464551 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .0005200166951 e^{(-.0003842000635t)} + .001520930960 e^{(-.0001173333333t)} \\ + .9635662453 10^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(1) := -.01466429471 e^{(-.0002068070866t)} + .01379692640 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .0002209983186 e^{(-.0003842000635t)} + .0006463699877 e^{(-.0001173333333t)} \\ + .4094993912 10^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c2->c3->c4

> **k:=2:**

```
for r from 2 to 4 do
  for b from 2 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 2 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=2..4)*lambda[4];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=2..4)*lambda[4]);

  if (l<>2) then
    T[2,l]:=trajeto(lambda[2], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[l]);
  end if;
```

```

    if (l<>4) then
      T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
    end if;

    C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
    C:=C[1,4]:

  end do;

N_2:=(T[3,2]*(T[4,2]*T[4,2])):
N_3:=(T[2,3]*(T[4,3]*T[4,3])):
N_4:=(T[2,4]*T[3,4]):

unassingn('N_2','N_3','N_4','C', 'l', 'k'):

  f[2,k]:=(dens_prob_1(lambda[2],lambda[4]));
  f[3,k]:=(dens_prob_3(lambda[3],lambda[4]));
  f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

f2:=prod_lambda*(f[2,2]*(N_2)+f[3,2]*(N_3)+f[4,2]*(N_4));

p_s(2):= theta[2]*P[2,3]*f2;

```

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2550003268 10^{-14}$$

$$C_{2,4} := -.1443245256 10^{12}$$

$$C := -.1443245256 10^{12}$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2550003268 10^{-14}$$

$$C_{3,4} := .3475414659 10^{12}$$

$$C := .3475414659 10^{12}$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2550003268 10^{-14}$$

$$C_{4,4} := .1827155142 10^{13}$$

$$C := .1827155142 10^{13}$$

$$f_{2,2} := e^{(-.0003842000635t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{3,2} := e^{(-.0001173333333t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,2} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f2 := -.0004460548773 e^{(-.0003842000635t)} - .0002119661016 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .0006580209789 e^{(-.0001173333333t)} - .144580076610^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(2) := -.00004033905860 e^{(-.0003842000635t)} - .00001916919516 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .00005950825376 e^{(-.0001173333333t)} - .130751270310^{-7} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c3->c4

> k:=3:

```

for r from 3 to 4 do
  for b from 3 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for l from 3 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=3..4)*lambda[4];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=3..4)*lambda[4]);

  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
  end if;

  C[l,4]:=product(T[l_1,l], l_1=3..4):
  C:=C[l,4]:

end do;

N_3:=(T[4,3]*T[4,3]):

N_4:=(T[3,4]):

unassingn('N_3','N_4','C', 'l', 'k'):

f[3,k]:=(dens_prob_3(lambda[3],lambda[4]));
f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

```

```
f3:=prod_lambda*(f[3,3]*(N_3)+f[4,3]*(N_4));
```

```
p_s(3):= theta[3]*P[3,4]*f3;
```

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .6637175549 10^{-11}$$

$$C_{3,4} := 8298.444976$$

$$C := 8298.444976$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .6637175549 10^{-11}$$

$$C_{4,4} := -8298.444976$$

$$C := -8298.444976$$

$$f_{3,3} := e^{(-.0001173333333t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,3} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f\beta := .0004570637116 e^{(-.0001173333333t)} - .0004570637116 e^{(-.0002378378378t)} \\ - .5507823609 10^{-7} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(3) := .00005144160661 e^{(-.0001173333333t)} - .00005144160661 e^{(-.0002378378378t)} \\ - .6198945315 10^{-8} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c1->c3->c4

```
> k:=4:
```

```
for r from 1 to 4 do  
  for b from 1 to 4 do  
    T[r,b]:=1;  
  end do;  
end do;
```

```
for d from 2 to 2 do  
  for h from 1 to 4 do  
    T[d,h]:=1;  
  end do;  
end do;
```

```
for l from 1 to 4 do
```

```

    Prod_lambda:=Product(lambda[l_a],
l_a=1..4)*lambda[4]/lambda[2];
    prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a],
l_a=1..4)*lambda[4]/lambda[2]);

    if (l<>1) then
        T[1,1]:=trajeto(lambda[1], lambda[1]);
    end if;

    if (l<>3) then
        T[3,1]:=trajeto(lambda[3], lambda[1]);
    end if;

    if (l<>4) then
        T[4,1]:=trajeto(lambda[4], lambda[1]);
    end if;

    C[2,4]:=0:
    C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
    C:=C[1,4]:

N_1:=(T[3,1]*(T[4,1])*T[4,1]):
N_3:=(T[1,3]*(T[4,3])*T[4,3]):
N_4:=(T[1,4]*T[3,4]):

    end do;

unassingn('N_1','N_3','N_4','C, l', 'k'):

    f[2,4]:=0:
    f[1,k]:=(dens_prob_1(lambda[1],lambda[4]));
    f[3,k]:=(dens_prob_3(lambda[3],lambda[4]));
    f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

f4:=prod_lambda*(f[1,4]*(N_1)+f[3,4]*(N_3)+f[4,4]*(N_4));

p_s(4):= theta[1]*P[1,3]*f4;

Prod_lambda := .6190468467  $\left( \prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
prod_lambda := .1372614938 10-14
C2,4 := 0
C1,4 := -.3601737479 109
C := -.3601737479 109
N1 := -.1160699416 1014
N3 := 1

```

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := .6190468467 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1372614938 10^{-14}$$

$$C_{2,4} := 0$$

$$C_{2,4} := -.1443245256 10^{12}$$

$$C := -.1443245256 10^{12}$$

$$N_1 := -.1160699416 10^{14}$$

$$N_3 := 1$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := .6190468467 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1372614938 10^{-14}$$

$$C_{2,4} := 0$$

$$C_{3,4} := .9274725460 10^8$$

$$C := .9274725460 10^8$$

$$N_1 := -.1160699416 10^{14}$$

$$N_3 := .7696579890 10^{12}$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := .6190468467 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1372614938 10^{-14}$$

$$C_{2,4} := 0$$

$$C_{4,4} := .2674264932 10^9$$

$$C := .2674264932 10^9$$

$$N_1 := -.1160699416 10^{14}$$

$$N_3 := .7696579890 10^{12}$$

$$N_4 := .2674264932 10^9$$

$$f_{1,4} := e^{(-.0002068070866t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{3,4} := e^{(-.0001173333333t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,4} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f4 := -.01593193357 e^{(-.0002068070866t)} + .01487548952 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .001056444053 e^{(-.0001173333333t)} + .3670735994 10^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(4) := -.002392692501 e^{(-.0002068070866t)} + .002234033431 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .0001586590700 e^{(-.0001173333333t)} + .5512791305 10^{-7} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c1-> c2 -> c4

> k:=5:

```

for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for d from 3 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a],
l_a=1..4)*lambda[4]/lambda[3];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a],
l_a=1..4)*lambda[4]/lambda[3]);

  if (l<>1) then
    T[1,l]:=trajeto(lambda[1], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>2) then
    T[2,l]:=trajeto(lambda[2], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>4) then
    T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
  end if;

  C[3,4]:=0;
  C[1,4]:=product(T[l_1,1], l_1=1..4);
  C:=C[l,4]:

  N_1:=(T[2,1]*((T[4,1])*T[4,1])):
  N_2:=(T[1,2]*(T[4,2]*T[4,2])):

```

```

N_4:=(T[1,4]*T[2,4]):

end do;

unassignn('N_1','N_2','N_4','C', 'l', 'k'):

f[3,5]:=0;
f[1,k]:=(dens_prob_3(lambda[1],lambda[4]));
f[2,k]:=(dens_prob_3(lambda[2],lambda[4]));
f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

f5:=prod_lambda*(f[1,5]*(N_1)+f[2,5]*(N_2)+f[4,5]*(N_4));

p_s(5):= theta[1]*P[1,2]*P[2,4]*f5;

```

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4494534773 \cdot 10^{-14}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{1,4} := .1816650108 \cdot 10^9$$

$$C := .1816650108 \cdot 10^9$$

$$N_1 := .5854354271 \cdot 10^{13}$$

$$N_2 := 1$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4494534773 \cdot 10^{-14}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{2,4} := .3851541423 \cdot 10^8$$

$$C := .3851541423 \cdot 10^8$$

$$N_1 := .5854354271 \cdot 10^{13}$$

$$N_2 := -.2631513291 \cdot 10^{12}$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4494534773 \cdot 10^{-14}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{3,4} := .3475414659 10^{12}$$

$$C := .3475414659 10^{12}$$

$$N_1 := .5854354271 10^{13}$$

$$N_2 := -.2631513291 10^{12}$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4494534773 10^{-14}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{4,4} := -.2201804250 10^9$$

$$C := -.2201804250 10^9$$

$$N_1 := .5854354271 10^{13}$$

$$N_2 := -.2631513291 10^{12}$$

$$N_4 := -.2201804250 10^9$$

$$f_{3,5} := 0$$

$$f_{1,5} := e^{(-.0002068070866t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{2,5} := e^{(-.0003842000635t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,5} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f5 := .02631259884 e^{(-.0002068070866t)} - .02512985605 e^{(-.0002378378378t)} \\ - .001182742799 e^{(-.0003842000635t)} - .9896085765 10^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(5) := .001864387407 e^{(-.0002068070866t)} - .001780583797 e^{(-.0002378378378t)} \\ - .00008380361035 e^{(-.0003842000635t)} - .7011902470 10^{-7} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c1 -> c4

> **k:=6:**

```
for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for d from 2 to 3 do
```

```

    for h from 1 to 4 do
      T[d,h]:=1;
    end do;
  end do;

  for l from 1 to 4 do
    Prod_lambda:=Product(lambda[l_a],
      l_a=1..4)*lambda[4]/(lambda[3]*lambda[2]);
    prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a],
      l_a=1..4)*lambda[4]/(lambda[3]*lambda[2]));

    if (l<>1) then
      T[1,l]:=trajeto(lambda[1], lambda[l]);
    end if;

    if (l<>4) then
      T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
    end if;

    C[2,4]:=0:
    C[3,4]:=0:
    C[1,4]:=product(T[l_1,l], l_1=1..4);
    C:=C[1,4]:

    N_1:=(T[4,1]*(T[4,1])):

    N_4:=(T[1,4]):

  end do;

  unassingn('N_1','N_4','C', l', 'k'):

  f[2,6]:=0:
  f[3,6]:=0:
  f[1,k]:=(dens_prob_1(lambda[1],lambda[4]));
  f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

  f6:=prod_lambda*(f[1,6]*(N_1)+f[4,6]*(N_4));

  p_s(6):= theta[1]*P[1,4]*f6;

>
  Prod_lambda := 5275.967444  $\left( \prod_{l_a=1}^4 \lambda_{l_a} \right)$ 
  prod_lambda := .1169842277 10-10
  C2,4 := 0
  C3,4 := 0
  C1,4 := 32226.09706

```

$$C := 32226.09706$$

$$N_1 := .1038521332 \cdot 10^{10}$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 5275.967444 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1169842277 \cdot 10^{-10}$$

$$C_{2,4} := 0$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{2,4} := .3851541423 \cdot 10^8$$

$$C := .3851541423 \cdot 10^8$$

$$N_1 := .1038521332 \cdot 10^{10}$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 5275.967444 \left(\prod_{l_a=3}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1169842277 \cdot 10^{-10}$$

$$C_{2,4} := 0$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{3,4} := .9274725460 \cdot 10^8$$

$$C := .9274725460 \cdot 10^8$$

$$N_1 := .1038521332 \cdot 10^{10}$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 5275.967444 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1169842277 \cdot 10^{-10}$$

$$C_{2,4} := 0$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{4,4} := -32226.09706$$

$$C := -32226.09706$$

$$N_1 := .1038521332 \cdot 10^{10}$$

$$N_4 := -32226.09706$$

$$f_{3,6} := 0$$

$$f_{1,6} := e^{(-.0002068070866t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,6} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_6 := .01214906160 e^{(-.0002068070866t)} - .01214906160 e^{(-.0002378378378t)} \\ - .376994507610^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(6) := .0009031153718 e^{(-.0002068070866t)} - .0009031153718 e^{(-.0002378378378t)} \\ - .280243483910^{-7} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c2 -> c4

> k:=7:

```
for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for d from 1 to 1 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for d from 3 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 2 to 4 do
```

```
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a],
l_a=2..4)*lambda[4]/(lambda[3]);
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a],
l_a=2..4)*lambda[4]/(lambda[3]));
```

```
  if (l<>2) then
    T[2,l]:=trajeto(lambda[2], lambda[l]);
  end if;
```

```
  if (l<>4) then
    T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
  end if;
```

```
C[3,4]:=0;
C[1,4]:=product(T[l_1,l], l_1=1..4);
C:=C[1,4]:
```

```

N_2:=(T[4,2]*(T[4,2])):

N_4:=(T[2,4]):

end do;

unassignn('N_2','N_4','C, 1', 'k'):

f[3,7]:=0;
f[2,k]:=(dens_prob_3(lambda[2],lambda[4]));
f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));

f7:=prod_lambda*((f[2,7]*(N_2))+(f[4,7]*(N_4)));

p_s(7):= theta[2]*P[2,4]*f7;

```

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2173298240 10^{-10}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{2,4} := -6832.363987$$

$$C := -6832.363987$$

$$N_2 := .4668119765 10^8$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2173298240 10^{-10}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{3,4} := .3109583937 10^8$$

$$C := .3109583937 10^8$$

$$N_2 := .4668119765 10^8$$

$$N_4 := 1$$

$$Prod_lambda := 2.027027027 \left(\prod_{l_a=2}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2173298240 10^{-10}$$

$$C_{3,4} := 0$$

$$C_{4,4} := 6832.363987$$

$$C := 6832.363987$$

$$N_2 := .4668119765 10^8$$

$$N_4 := 6832.363987$$

$$f_{3,7} := 0$$

$$f_{2,7} := e^{(-.0003842000635t)} - e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f_{4,7} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f7 := .001014521647 e^{(-.0003842000635t)} - .001014521647 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .1484876463 10^{-6} t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$p_s(7) := .00001529676230 e^{(-.0003842000635t)} - .00001529676230 e^{(-.0002378378378t)} \\ + .2238868177 10^{-8} t e^{(-.0002378378378t)}$$

Trajeto c4

> k:=8:

```
for r from 1 to 4 do
  for b from 1 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for d from 1 to 3 do
  for h from 1 to 4 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 1 to 4 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=4..4)*lambda[4];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=4..4)*lambda[4]);
```

```
if (l<>4) then
  T[4,l]:=trajeto(lambda[4], lambda[l]);
end if;
```

```
C[l,4]:=product(T[l_1,l], l_1=4..4);
C:=C[l,4]:
```

```
end do;
```

```
unassignn('C, l', 'k');
```

```
f[4,k]:=(dens_prob_4(lambda[4]));
```

```
f8:=(prod_lambda*(f[4,8]));
```

p_s(8) := theta[4]*f8;

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5656683709 10^{-7}$$

$$C_{1,4} := 32226.09706$$

$$C := 32226.09706$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5656683709 10^{-7}$$

$$C_{2,4} := -6832.363987$$

$$C := -6832.363987$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5656683709 10^{-7}$$

$$C_{3,4} := 8298.444976$$

$$C := 8298.444976$$

$$Prod_lambda := .0002378378378 \left(\prod_{l_a=4}^4 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .5656683709 10^{-7}$$

$$C_{4,4} := 1$$

$$C := 1$$

$$f_{4,8} := t e^{(-.0002378378378t)}$$

$$f8 := .5656683709 10^{-7} t e^{(-.0002378378378t)}$$

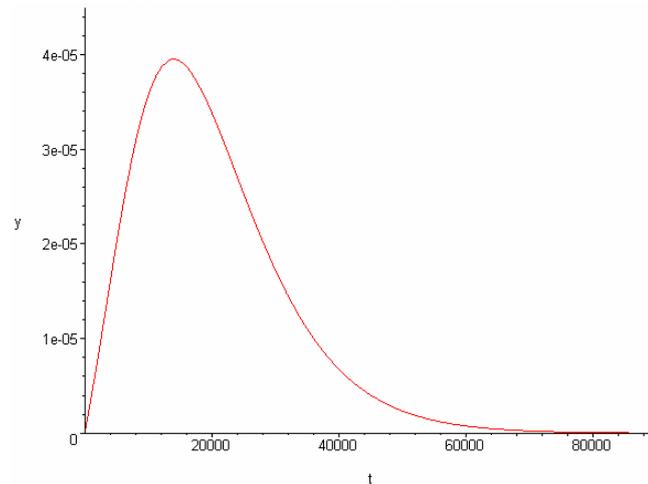
$$p_s(8) := .3575024104 10^{-8} t e^{(-.0002378378378t)}$$

>

HUIG := ((p_s(1)+p_s(2)+p_s(3)+p_s(4)+p_s(5)+p_s(6)+p_s(7)+p_s(8)));

$$\begin{aligned} HUIG := & .01326135309 e^{(-.0002378378378t)} - .01428948443 e^{(-.0002068070866t)} \\ & + .0001121524120 e^{(-.0003842000635t)} + .0009159789181 e^{(-.0001173333333t)} \\ & + .3530237511 10^{-6} t e^{(-.0002378378378t)} \end{aligned}$$

```
> plot(HUIG, t=0..90000,y=0..0.000045);
```



```
> func:=t->HUIG;
```

```
fd:= fopen(amort4,WRITE,TEXT);
```

```
for t from 0 by 10 to 90000 do  
  y:=func(t):  
  fprintf(fd, "%d  %g\n", t, y):  
end do:  
fclose(fd);
```

func := t → HUIG

fd := 1

```
> restart;
```

Anexo C

Programa HUIG 3ª Ordem com amortecimento

Procedures

```
> restart;
```

Procedure trajeto

```
trajeto:= proc(lambda_1, lambda_2);  
    1/(lambda_1-lambda_2);  
end proc;  
  
dens_prob_1:=proc( lambda_1, lambda_3);  
    (exp(-lambda_1*t)-exp(-lambda_3*t));  
end proc;  
  
dens_prob_2:=proc(lambda_3);  
    (t*exp(-lambda_3*t));  
end proc;
```

Entrada de dados

Entrada das probabilidades de transição

```
for i from 1 to 3 do  
    for j from 2 by 1 to 3 do  
        if (i<>j) then  
            printf("\n Para P[%d,%d] \n",i,j);  
            P[i,j]:= readstat("Digite a probabilidade de transição:");  
        else  
            P[i,j]:=0;  
        end if;  
    end do;  
end do;
```

```
V:=readstat("Entre com o valor da velocidade (em m/s):");
```

Entrada com os valores de lambda

```
for k from 1 to 3 do  
    printf("\n Para L[%d] \n",k);  
    L[k]:= readstat("Digite o comprimento médio dos rios de cada  
ordem:");  
    lambda[k]:=V/L[k];  
    printf("\n Para Teta[%d] \n",k);  
    theta[k]:=readstat("Digite a probabilidade de início do  
processo:");  
end do;  
  
lambda[3]:=2*lambda[3];  
lambda[3];
```

Para P[1,2]

Digite a probabilidade de transição:0.6667;

Para P[1,3]

Digite a probabilidade de transição:0.3333;

Para P[2,3]

Digite a probabilidade de transição:1;

Para P[3,2]

Digite a probabilidade de transição:0;

Entre com o valor da velocidade (em m/s):1.32;

Para L[1]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:6510.53;

$$L_1 := 6510.53$$

$$\lambda_1 := .0002027484706$$

Para Teta[1]

Digite a probabilidade de início do processo:0.7333;

$$\theta_1 := .7333$$

Para L[2]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:2742.86;

$$L_2 := 2742.86$$

$$\lambda_2 := .0004812494987$$

Para Teta[2]

Digite a probabilidade de início do processo:0.1394;

$$\theta_2 := .1394$$

Para L[3]

Digite o comprimento médio dos rios de cada ordem:16900;

$$L_3 := 16900$$

$$\lambda_3 := .00007810650888$$

Para Teta[3]

Digite a probabilidade de início do processo:0.1273;

$$\theta_3 := .1273$$

$$.0001562130178$$

Calcula os valores dos índices $C_{i,j}$

Trajetos $c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3$

```
> unassingn('k'):
k:=1:

for r from 1 to 3 do
  for b from 1 to 3 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 3 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=1..3)*lambda[3];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=1..3)*lambda[3]);

  if (l<>1) then
    T[1,l]:=trajeto(lambda[1], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>2) then
    T[2,l]:=trajeto(lambda[2], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[l]);
  end if;

  C[1,3]:=product(T[1_1,l], l_1=1..3);
  C:=C[1,3];

end do;

N_1:=(T[2,1]*(T[3,1]*T[3,1])):
N_2:=(T[1,2]*(T[3,2]*T[3,2])):
N_3:=(T[1,3]*T[2,3]):

unassingn('N_1','N_2','N_3','C','l', 'k'):

f[1,k]:=(dens_prob_1(lambda[1],lambda[3]));
f[2,k]:=(dens_prob_1(lambda[2],lambda[3]));
f[3,k]:=(dens_prob_2(lambda[3]));

f1:= prod_lambda*(f[1,1]*(N_1)+f[2,1]*(N_2)+f[3,1]*(N_3));

p_s(1):= theta[1]*P[1,2]*P[2,3]*f1;
```

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=1}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2381016044 10^{-14}$$

$$C_{1,3} := -.7715947308 10^8$$

$$C := -.7715947308 10^8$$

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=2}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2381016044 10^{-14}$$

$$C_{2,3} := .1104691697 10^8$$

$$C := .1104691697 10^8$$

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=3}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2381016044 10^{-14}$$

$$C_{3,3} := .6611255610 10^8$$

$$C := .6611255610 10^8$$

$$f_{1,1} := e^{(-.0002027484706t)} - e^{(-.0001562130178t)}$$

$$f_{2,1} := e^{(-.0004812494987t)} - e^{(-.0001562130178t)}$$

$$f_{3,1} := t e^{(-.0001562130178t)}$$

$$fI := .003947913523 e^{(-.0002027484706t)} - .003866990647 e^{(-.0001562130178t)} \\ - .00008092287510 e^{(-.0004812494987t)} + .1574150568 10^{-6} t e^{(-.0001562130178t)}$$

$$p_s(1) := .001930099824 e^{(-.0002027484706t)} - .001890537350 e^{(-.0001562130178t)} \\ - .00003956247423 e^{(-.0004812494987t)} + .7695882185 10^{-7} t e^{(-.0001562130178t)}$$

Trajeto c2->c3

>

k:=2:

```
for r from 2 to 2 do
  for b from 2 to 4 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;
```

```
for l from 2 to 3 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=2..3)*lambda[3];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=2..3)*lambda[3]);
```

```

    if (l<>2) then
      T[2,1]:=trajeto(lambda[2], lambda[1]);
    end if;

    if (l<>3) then
      T[3,1]:=trajeto(lambda[3], lambda[1]);
    end if;

    C[1,3]:=product(T[l_1,1], l_1=1..3);
    C:=C[1,3]:

  end do;

N_2:=(T[3,2]*T[3,2]):

N_3:=(T[2,3]):

unassignn('N_2','N_3','C', 'l', 'k'):

  f[2,k]:=(dens_prob_1(lambda[2],lambda[3]));
  f[3,k]:=(dens_prob_2(lambda[3]));

f2:=prod_lambda*(f[2,2]*(N_2)+f[3,2]*(N_3));

p_s(2):= theta[2]*P[2,3]*f2;

```

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=2}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1174369423 10^{-10}$$

$$C_{2,3} := .1104691697 10^8$$

$$C := .1104691697 10^8$$

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=2}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .1174369423 10^{-10}$$

$$C_{3,3} := .6611255610 10^8$$

$$C := .6611255610 10^8$$

$$f_{2,2} := e^{(-.0004812494987t)} - e^{(-.0001562130178t)}$$

$$f_{3,2} := t e^{(-.0001562130178t)}$$

$$f2 := .0001111579478 e^{(-.0004812494987t)} - .0001111579478 e^{(-.0001562130178t)} \\ + .3613038818 10^{-7} t e^{(-.0001562130178t)}$$

$$p_s(2) := .00001549541792e^{(-.0004812494987t)} - .00001549541792e^{(-.0001562130178t)} + .503657611210^{-8} t e^{(-.0001562130178t)}$$

Trajeto c1->c3

```

> k:=3:

for r from 1 to 3 do
  for b from 1 to 3 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for d from 2 to 2 do
  for h from 1 to 3 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 3 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a],
  l_a=1..3)*lambda[3]/lambda[2];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a],
  l_a=1..3)*lambda[3]/lambda[2]);

  if (l<>1) then
    T[1,l]:=trajeto(lambda[1], lambda[l]);
  end if;

  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[l]);
  end if;

  C[2,3]:=0:
  C[1,3]:=product(T[l_1,1], l_1=1..3);
  C:=C[1,3]:

N_1:=(T[3,1]*T[3,1]):

N_3:=(T[1,3]):

  end do;

unassingn('N_1','N_3','C, l', 'k'):

  f[2,3]:=0:
  f[1,k]:=(dens_prob_1(lambda[1],lambda[3]));
  f[3,k]:=(dens_prob_2(lambda[3]));

f3:=prod_lambda*(f[1,3]*(N_1)+f[3,3]*(N_3));

p_s(3):= theta[1]*P[1,3]*f3;

```

$$Prod_lambda := .3245988167 \left(\prod_{l_a=1}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4947570959 10^{-11}$$

$$C_{2,3} := 0$$

$$C_{1,3} := -21488.99258$$

$$C := -21488.99258$$

$$N_1 := .4617768021 10^9$$

$$N_3 := 1$$

$$Prod_lambda := .3245988167 \left(\prod_{l_a=2}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4947570959 10^{-11}$$

$$C_{2,3} := 0$$

$$C_{2,3} := .1104691697 10^8$$

$$C := .1104691697 10^8$$

$$N_1 := .4617768021 10^9$$

$$N_3 := 1$$

$$Prod_lambda := .3245988167 \left(\prod_{l_a=3}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .4947570959 10^{-11}$$

$$C_{2,3} := 0$$

$$C_{3,3} := 21488.99258$$

$$C := 21488.99258$$

$$N_1 := .4617768021 10^9$$

$$N_3 := 21488.99258$$

$$f_{1,3} := e^{(-.0002027484706t)} - e^{(-.0001562130178t)}$$

$$f_{3,3} := t e^{(-.0001562130178t)}$$

$$f\beta := .002284673496 e^{(-.0002027484706t)} - .002284673496 e^{(-.0001562130178t)} \\ + .1063183156 10^{-6} t e^{(-.0001562130178t)}$$

$$p_s(3) := .0005583945132 e^{(-.0002027484706t)} - .0005583945132 e^{(-.0001562130178t)} \\ + .2598514150 10^{-7} t e^{(-.0001562130178t)}$$

Trajeto c4

```

> k:=4:

for r from 1 to 3 do
  for b from 1 to 3 do
    T[r,b]:=1;
  end do;
end do;

for d from 1 to 3 do
  for h from 1 to 3 do
    T[d,h]:=1;
  end do;
end do;

for l from 1 to 3 do
  Prod_lambda:=Product(lambda[l_a], l_a=3..3)*lambda[3];
  prod_lambda:=evalf( product(lambda[l_a], l_a=3..3)*lambda[3]);

  if (l<>3) then
    T[3,l]:=trajeto(lambda[3], lambda[l]);
  end if;

  C[1,3]:=product(T[l_1,l], l_1=3..3);
  C:=C[1,3]:

end do;

unassingn('C, l', 'k'):

f[3,k]:=(dens_prob_2(lambda[3]));

f4:=(prod_lambda*(f[3,4]));

p_s(4):= theta[3]*f4;

```

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=3}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2440250693 \cdot 10^{-7}$$

$$C_{1,3} := -21488.99258$$

$$C := -21488.99258$$

$$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=3}^3 \lambda_{l_a} \right)$$

$$prod_lambda := .2440250693 \cdot 10^{-7}$$

$C_{2,3} := -3076.577734$

$C := -3076.577734$

$Prod_lambda := .0001562130178 \left(\prod_{l_a=3}^3 \lambda_{l_a} \right)$

$prod_lambda := .2440250693 \cdot 10^{-7}$

$C_{3,3} := 1$

$C := 1$

$f_{3,4} := t e^{(-.0001562130178t)}$

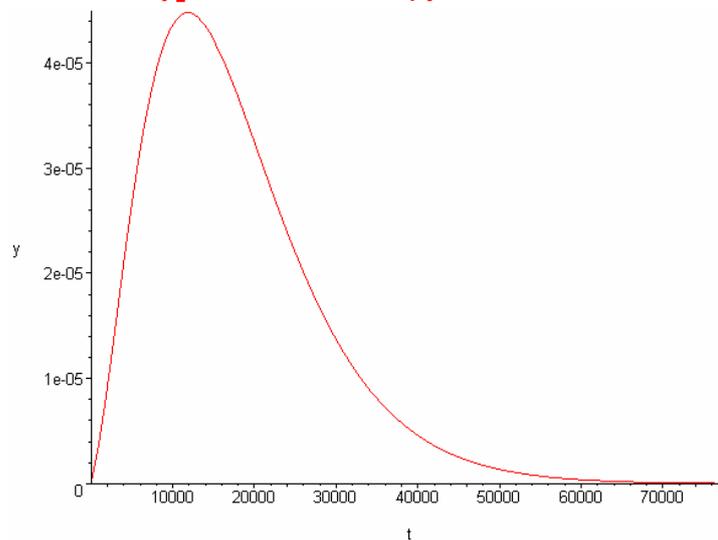
$f4 := .2440250693 \cdot 10^{-7} t e^{(-.0001562130178t)}$

$p_s(4) := .3106439132 \cdot 10^{-8} t e^{(-.0001562130178t)}$

> HUIG:=(p_s(1)+p_s(2)+p_s(3)+p_s(4));

$HUIG := .002488494337 e^{(-.0002027484706t)} - .002464427281 e^{(-.0001562130178t)}$
 $- .00002406705631 e^{(-.0004812494987t)} + .1110869786 \cdot 10^{-6} t e^{(-.0001562130178t)}$

> plot(HUIG, t=0..78000,y=0..0.000045);



func:=t->HUIG;

fd:= fopen(b3d1,WRITE,TEXT);

for t from 0 by 10 to 90000 do
 y:=func(t):
 fprintf(fd, "%d %g\n", t, y):
end do:
fclose(fd);
restart;

$func := t \rightarrow HUIG$
 $fd := 1$

>