UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

RICARDO AUGUSTO OLIVEIRA JOSÉ BARBOSA

ENSINO DE POTÊNCIAS E FUNÇÕES EXPONENCIAIS

TRÊS LAGOAS - MS
2016

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Ensino de Potências e Funções Exponenciais

por

RICARDO AUGUSTO OLIVEIRA JOSÉ BARBOSA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

E. Opazo

Prof. Dra. Eugenia Brunilda Opazo Uribe (Orientadora)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
UFMS/CPTL

Prof. Dra. Nair Rodrigues de Souza
IFMSTL

Dezembro de 2016

A Deus,

Aos meus pais Euclides e

Madalena,

Aos amigos de curso,

Ao meu professor orientador

Eugenia Brunilda Opazo Uribe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por ter me dado à oportunidade de desfrutar desta conquista. Agradeço a meus pais, e, aos meus amigos e companheiros de curso pelo companheirismo, ao meu professor orientador Eugenia Brunilda Opazo Uribe pela orientação, pelos conselhos e pela disposição em ajudar, aos professores ministrantes das aulas pelo conhecimento e atenção dispensada.

“A matemática do tempo é simples.
Você tem menos do que pensa e precisa
mais do que acha. ”.

Kevin Ashton[1],

---

[1] Kevin Ashton (1968) é um pesquisador britânico do *Massachusetts Institute of Technology*(MIT). É considerado o primeiro especialista a usar o termo "Internet das Coisas" (IoT, na sigla em inglês), em 1999.

RESUMO

O trabalho apresenta a parte teórica de potências, equações e inequações exponenciais e funções exponenciais, assim como outras definições que são necessárias para o entendimento do conteúdo central. Além da parte teórica o trabalho apresenta problemas, exercícios, exemplos, algumas das principais aplicações de funções exponenciais, tanto na matemática, como na física, química, biologia, astronomia e os outros campos da ciência, assim como, o jogo das potências. Uma ferramenta que pode ser muito útil no aprendizado do conceito de potências.

Palavras – chaves: potência, potenciação, exponenciais, logaritmo, jogo.

ABSTRACT

The paper presents the theoretical part of exponential powers, equations and inequalities and exponential functions, as well as other definitions that are necessary for the understanding of the central content. Besides the theoretical part, the work presents problems, exercises, examples, some of the main applications of exponential functions in mathematics, physics, chemistry, biology, astronomy and other fields of science, as well as the game of powers. A tool that can be very useful in learning the concept of powers.

Key words: power, potentiation, exponential, logarithm, game.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi dedicado ao estudo de potências e funções exponenciais e seu ensino, no interesse de desenvolver um material que sirva ao professor e ao aluno de ensino fundamental e médio como material de apoio para as aulas de Matemática, bem como apresentar atividades que possam ser utilizadas para a fixação e aprofundamento de conceitos. Iniciamos o trabalho consultando as orientações curriculares para o ensino médio para Ciências da Natureza e suas Tecnologias; assim, podemos ressaltar algumas reflexões ali apresentadas sobre a escolha de conteúdos e sobre as habilidades matemáticas esperadas de um aluno que completa o ensino médio. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio,

> Para a escolha de conteúdos é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (Brasil, 2006).

A afirmação é entendida como mostra que a introdução de problemas do quotidiano, de aplicações e de contextualização histórica não deve significar abrir mão da formalização da organização do conteúdo e sim uma complementação de teoria e aplicações, acompanhadas de contextualização histórica.

As orientações curriculares para o ensino médio voltadas ao ensino de Matemática nos desafiam a trabalhar os conteúdos de maneira diferenciada, valorizando o raciocínio matemático, tornando o aluno questionador e capaz de generalizar, abstrair, argumentar e de apresentar exemplos e contraexemplos. Portanto devemos trabalhar por “um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação, quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica” (Brasil, 2006)

As funções exponenciais têm sido base para uma série de estudos nos quais foram exploradas de diversas maneiras, seja através da formalização da teoria envolvida, do uso de softwares ou de algumas de suas aplicações. Revisando o Banco Indutor de Trabalhos do PROFMAT, encontramos vários trabalhos apresentados que abordam algumas das propostas descritas anteriormente, apresentaremos um breve relato de alguns dos trabalhos revisados. Brener (2013) faz uma revisão sobre funções exponenciais e logarítmicas com o objetivo de sugerir uma sequência didática no estudo da função logarítmica sob a forma geométrica através da utilização de objetos de aprendizagem com o GeoGebra. Roballo (2014) apresenta as funções logarítmica e exponencial e suas propriedades para posteriormente introduzir uma série de aplicações de ambas as funções. Alves (2014) discute as funções exponenciais e suas propriedades, analisa cinco livros didáticos disponibilizados pelo Ministério de Educação para as escolas públicas com o objetivo de estabelecer parâmetros de referência em relação à forma de abordagem pelos diferentes autores. O autor apresenta duas propostas para o ensino de funções exponenciais, uma delas utilizando o software GeoGebra e a outra utilizando a obtenção da definição através da generalização de multiplicações de números reais. O objetivo do trabalho de Silva (2015) foi evidenciar os principais aspectos das funções exponenciais para apontar a importância de uma nova abordagem através de suas aplicações e interdisciplinaridade.

O desafio de escrever mais um trabalho sobre funções exponenciais nos levou a pensar nas dificuldades enfrentadas pelos alunos e escolhemos unir a teoria, a contextualização histórica e as aplicações a problemas do cotidiano desde os primeiros conceitos vinculados à potenciação, que consideramos a base fundamental para o ensino de funções exponenciais. Assim, organizamos o trabalho de maneira a incluir uma breve revisão histórica, apresentação dos conceitos de potenciação, principais propriedades, incluindo aplicações e problemas do ENEM, vestibulares e OBMEP.

No capítulo 1 é feita uma breve contextualização histórica sobre a potenciação e a função exponencial e são apresentados alguns problemas clássicos. No capítulo 2 é introduzido o conceito de potências e suas propriedades e apresentamos o uso da notação científica como aplicação, tanto em problemas teóricos de ciências específicas como em situações da vida diária. No capítulo 3 é introduzido a função exponencial, seu gráfico e propriedades. No Capítulo 4, exploramos algumas aplicações, em várias áreas; cabe destacar que, por trabalhar com o sistema apostilado o autor não tem muita possibilidade de explorar muita variedade de aplicações e, por esse motivo houve interesse em resolver bastantes exemplos. No capítulo 5 apresentamos os resultados de uma experiência prática na escola, baseada numa proposta para trabalhar as potências em sala de aula utilizando um jogo de tabuleiro.

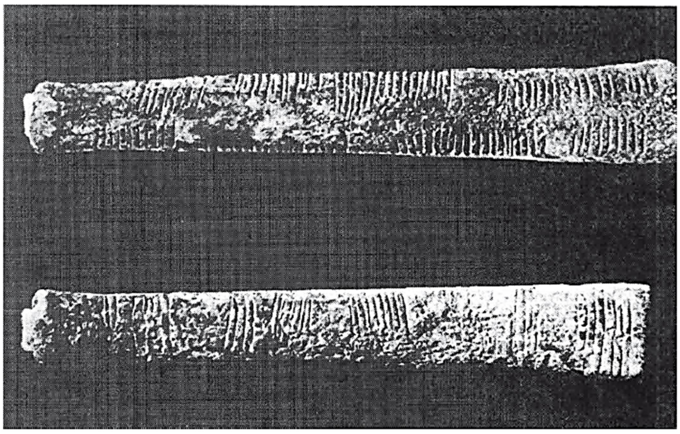
CAPÍTULO 1.

A MATEMÁTICA E AS POTÊNCIAS – UM POUCO DE HISTÓRIA

Assim como praticamente tudo que conhecemos na matemática, o uso de potências é algo que surgiu a partir da necessidade. Nesse capítulo, objetivamos reunir informações sobre esse surgimento, assim como registros e indícios de seu uso no decorrer da história detalhadas, por exemplo, por BOYER (1996) e Eves (2011).

Os números naturais surgiram para solucionar o problema de contagem. Uma hipótese bastante aplicada atualmente sugere que a contagem se iniciou utilizando-se os dedos das mãos e, sendo esses insuficientes, outras formas de registro foram criadas ao longo do tempo, desde o amontoado de pedrinhas para contar rebanhos até registros em madeira ou ossos para quantidades maiores.

Figura 1 - Osso de Ishango, datado de mais de 8000 anos de idade.



Fonte: BOYER, 1996.

Com a formação das civilizações, geralmente às margens de importantes rios (O Rio Nilo foi um deles), a agricultura forçou o homem a compreender os ciclos das estações do ano e a aprimorar sua percepção de número, inclusive para a troca de alimentos. Com a comunicação entre povos esse comércio progrediu de forma exponencial, o que exigiu, além da noção de contagem, uma forma de registro que fosse eficiente. Hoje vários sistemas que fizeram parte dessa evolução são conhecidos, dentre eles temos o egípcio, babilônico, chinês, maia, romano e o atualmente utilizado indo-arábico, cada um com suas propriedades e especificidades.

Após criados sistemas de contagem e formas de registros, os números inteiros se tornaram uma forma de diferenciar um valor que representava crédito (positivo) de um outro que representava o débito, a dívida (negativos). Como dito anteriormente, era comum que os povos se formassem às margens de grandes rios. Isso ocorria devido à grande fertilidade do solo que ficava submerso nos períodos em que os rios enchiam. Após o regresso das águas esse solo era dividido entre famílias para o cultivo de alimentos, e como o processo de divisão raramente era preciso, a ideia de fração surgiu com o objetivo de dividir quantidades onde o quociente não era um número inteiro.

Perlin (2013) relata que, a unidade de medida padrão utilizada pelos seus medidores, também chamados "estiradores de corda", para fazer as medições da terra era o cúbito ou côvado. Essa unidade era conhecida como unidade do faraó, pois o comprimento do cúbito era equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. As cordas dos estiradores possuíam diversos nós, cuja distância entre dois nós consecutivos era a medida do cúbito, o que hoje seria aproximadamente 45 cm. "A corda com vários nós compunha um instrumento de medida, uma 'régua' primitiva utilizada por agrimensores daquela época" (DIAS; MORETTI, 2011, p. 120). Para medir, os estiradores comparavam a corda com o contorno da porção de terra a ser medida, assim a medida encontrada era a quantidade de vezes que o cúbito cabia nesse contorno. Porém, nem sempre o cúbito cabia um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido e a necessidade de fazer medições com mais precisão, levou os egípcios a criarem subunidades do cúbito, ou seja, fracionar a unidade de medida.

Mas e as potências? Como e onde surgiram?

Com a evolução dos povos a matemática passou a ser um dos centros de estudo e a cerca de 1000 a. C. acredita-se que já se usavam as potências em algumas tabelas babilônicas, com cálculos de acordo com seu sistema de numeração de base 60. Também foram encontrados cálculos com potências em papiros egípcios, entre eles, demonstrando cálculos do volume de uma pirâmide, usando um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número (BOYER, 2013).

A palavra "potência" foi utilizada pela primeira vez por Hipócrates de Quios (470−410a.C.), num célebre livro em que reuniu, de modo lógico e organizado, a Geometria da época, e tal livro, considerado o primeiro em Geometria, foi precursor dos Elementos, de Euclides, no qual dizem que Euclides recolheu muitas informações importantes. Hipócrates designou o quadrado de um segmento pela palavra "dynamis", que significa precisamente, potência (Evangelista, 2014).

Alguns dizem que a palavra potência é fruto do Teorema de Pitágoras, onde, no triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos ($h^2 = c^2 + c^2$), mas na época era somente potência de expoente 2, e não de potências de números maiores, até porque desde as tabelas babilônicas encontra-se cálculos com quadrados de certos números.

Mas foi com Arquimedes de Siracusa (287−212 a.C.), o maior matemático da Antiguidade e um dos maiores de todos os tempos, que as potenciações tiveram seus cálculos mais significativos. Arquimedes foi grande tanto na Matemática quanto na Física, e tinha grande habilidade na engenharia e na construção de sofisticados mecanismos (EVES, 2011).

Entre suas obras mais conhecidas, estão: Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas, Sobre a Esfera e o Cilindro, Sobre Corpos Flutuantes, Sobre Espirais, A Quadratura da Parábola, Sobre Conóides e Esferóides, A Medida de um Círculo, O Contador de Grãos de Areia e O Método. Sabe-se que outros de seus trabalhos foram perdidos, entre eles: Sobre Alavancas, Sobre Centros de Gravidade, Sobre o Calendário e Sobre a Construção de Esferas.

Em seu trabalho, O Contador de Grãos de Areia, Arquimedes criou um sistema de numeração especialmente destinado a exprimir números muito grandes, como o dos grãos de areia necessários a preencher uma esfera de raio igual à distância entre a Terra e o Sol. Obteve a solução 10^{51}, que não podia ser escrita na numeração utilizada na altura (alfabética), umas vez que apenas permitia escrever números até 10000 (uma miríade). Arquimedes criou então um novo sistema: considerou os números de 1 a 10^8, ou seja, até uma miríade de miríade ($10000 \cdot 10000 = 10^8$), que se podiam escrever na numeração grega como sendo de primeira ordem; depois, os números de 10^8 até 10^{16} como sendo de segunda ordem, em que a unidade é 10^8, e assim sucessivamente. Arquimedes utilizou, deste modo, uma regra equivalente à propriedade da multiplicação de potências de mesma base:

$10^{51}=10^3\cdot10^8\cdot10^8\cdot10^8\cdot10^8\cdot10^8\cdot10^8$

Para facilitar os cálculos, Arquimedes construiu uma tabela e elaborou um método para escrever números grandes, utilizando as miríades, que hoje conhecemos como expoentes. Com isso, utilizava as potências de 10 na qual conhecemos hoje, principalmente em cálculos com notação científica, usados em cálculos de átomos, moléculas, elétrons e outras partículas, além de grandes distâncias assim como da Terra ao Sol. Também contribuiu para a construção das leis e propriedades das potências, na qual conhecemos hoje, como por exemplo,

- $10^1=10$; $10^2=100$; $10^3=1000$...
- $2^1=2$; $2^2=4$; $2^3=8$...

Por volta de 1360 o bispo francês Nicole Oresme deixou manuscritos com notações utilizando potências com expoentes racionais e irracionais e regras sistematizadas para operar com potências. Ainda na França, em 1484, o médico Nicolas Chuquet utilizou potências com expoente zero.

Com o desenvolvimento da Matemática, principalmente pelo surgimento da Álgebra, as potências foram cada vez mais utilizadas também com notações simbólicas nas variáveis das equações algébricas, introduzidas principalmente por François Viète (1540−1603).

As notações modernas que temos sobre potência teve grande contribuição com o Matemático e Filósofo René Descartes (1596−1650), com o livro “Géometrie” em 1637.

CAPÍTULO 2.

POTÊNCIAS: CONCEITO E PROPRIEDADES

Consideramos que a compreensão dos conceitos, propriedades e utilização das potências em aplicações práticas é fundamental para o entendimento e aprendizagem das funções exponenciais, por esse motivo esse capítulo será dedicado ao estudo de potências, abordando os principais conceitos e propriedades. Algumas demonstrações e deduções são apresentadas ou sugeridas para melhor compreensão do assunto abordado. Exemplos tornam mais prática a contextualização das propriedades, por isso são apresentados alguns exemplos, desde básicos para compreensão e fixação dos conceitos, como exemplos práticos em que o uso da potenciação é indispensável.

Burle Neto (2013) dedica seu trabalho à definição de potência de expoente irracional, que apresenta diferenças de acordo com os autores abordados e, no fim, apresenta uma proposta para ser aplicada no 3º ano de Ensino Médio. Neste trabalho optamos por introduzir a potência de expoente irracional de maneira intuitiva através de aproximações.

O conteúdo teórico deste capítulo é facilmente encontrado em alguns livros de ensino básico e também em alguns livros introdutórios de ensino superior. O desenvolvimento que faremos aqui está baseado nos autores Iezzi (1977), Lima (2004), Gomes (2016).

2.1. As Operações de Adição e Multiplicação em $\mathbb{R}$

Consideraremos o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, formado pelos números racionais e irracionais; nesse conjunto podemos definir duas operações básicas, adição e multiplicação, a partir das quais podemos definir as operações de subtração e divisão. Estas operações satisfazem algumas propriedades, as quais são fundamentais para a realização dos cálculos necessários à solução de problemas. Essas propriedades fundamentais, válidas para todo o conjunto $\mathbb{R}$, estão listadas a seguir:

I. Comutatividade: quaisquer que sejam dois números reais a e b, sempre se tem:

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

II. Associatividade: quaisquer que sejam os números reais a, b e c, sempre se tem:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{e} \quad a(bc) = (ab)c.$$

III. Elemento neutro: existem únicos números reais, indicados por 0 e 1, tais que, para qualquer número real a, verificam

$$a + 0 = a \quad \text{e} \quad a \cdot 1 = a.$$

IV. Elemento oposto e elemento inverso: dado um número real a, existe um único número real, indicado por $-a$, chamado oposto de a, tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Além disso, dado um número real $a \neq 0$, existe um único número real indicado por $\frac{1}{a}$ ou por a^{-1} chamado inverso multiplicativo de a, tal que

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

V. Distributividade: quaisquer que sejam a, b e c reais, sempre se tem:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{e} \quad (b + c)a = ba + ca.$$

Como uma consequência, podemos obter a definição de duas novas operações, que denominaremos subtração e divisão.

Subtração ou diferença entre b e a, indicada por $b - a$, é definida a partir da adição como

$$b - a = b + (-a).$$

Analogamente, podemos definir a divisão a partir da multiplicação da seguinte forma,

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Uma vez definidas as operações básicas, utilizaremos o conceito de multiplicação para introduzir a definição de potências, que serão exploradas a partir do tipo de expoente, iniciando pelo caso em que o expoente é um número natural, para posteriormente estender esta ideia, analisando os casos em que o expoente é um número inteiro, um número racional, para finalmente estudar o caso em que o expoente é um número real.

2.2. Potências de Expoente Natural

Sejam a um número real e n um número natural. A potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$a^0 = 1$, para $a \neq 0$

$a^n = a^{n-1} \cdot a$, $\forall\, n, n \geq 1.$

Desta definição podemos observar, por exemplo, que,

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a,$$
$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a,$$
$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a,$$

assim, de modo geral, para p natural e $p > 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

Exemplo 2.1.

a) $3^0 = 1$

b) $(-2)^0 = 1$

c) $\left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$

d) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

f) $(-0{,}1)^5 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = -0{,}00001$

Observemos que, de acordo com a definição teremos $0^n = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 1$ e estabelecemos que $a^0 = 1,$ para $a \neq 0$. Estas restrições precisam ser impostas para não termos ambiguidades. De fato, se para definir 0^0, aceitássemos $a^0 = 1,$ para qualquer número $a \in \mathbb{R}$, poderíamos concluir que $0^0 = 1$. Por outro lado, se considerássemos $0^n = 0,$ para qualquer valor de n inclusive o zero, poderíamos ser levados a pensar que $0^0 = 0$. Assim, consideraremos 0^0 uma expressão indeterminada.

Propriedades

Se $a, b \in \mathbb{R}$, e $m, n \in \mathbb{N}$, então valem as seguintes propriedades:

P_1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P_2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a \neq 0 \ e\ m \geq n$

P_3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

P_4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

P_5. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Demonstração

Apresentaremos a demonstração das propriedades P_1 e P_3, nas quais utilizaremos o Princípio de Indução sobre n, considerando m fixo.

i) Primeiro provemos P_1.

Observemos que, a propriedade é verdadeira para $n = 0$. De fato,

$$a^{m+0} = a^m = a^m.1 = a^m.a^0$$

Hipótese de Indução: Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$, Mostremos agora que a propriedade é verdadeira para $n = p + 1$, isto é,

$$a^m \cdot a^{p+1} = a^{m+p+1}$$

De fato,

$$a^m \cdot a^{p+1} = a^m \cdot (a^p \cdot a) = (a^m \cdot a^p) \cdot a = a^{m+p} \cdot a = a^{(m+p)+1} = a^{m+p+1}$$

ii) Provemos agora P_3,

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$(a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

Hipótese de Indução: Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, que $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

Mostremos agora que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $(a \cdot b)^{p+1} = a^{p+1} \cdot b^{P+1}$.

De fato,

$$(a \cdot b)^{p+1} = (a \cdot b)^p \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot b^p) \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot a) \cdot (b^p \cdot b) = a^{p+1} \cdot b^{p+1}$$

Como queríamos demonstrar.

iii) Finalmente demonstremos P_5

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m.0}$$

Para a Hipótese de Indução, suponhamos que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é,$(a^m)^p = a^{m.p}$.

Mostraremos que é verdadeira para $n = p + 1$, isto é, $(a^m)^{p+1} = a^{m.(p+1)}$.

De fato,

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \cdot a^m = a^{m.p} \cdot a^m = a^{m.p+m} = a^{m.(p+1)} \blacksquare$$

De maneira análoga podem ser demonstradas as propriedades P_2 e P_4.

Essas cinco propriedades são utilizadas com frequência ao desenvolver cálculos envolvendo potências, para citá-las no restante do trabalho utilizaremos a notação (P).

Estabelecidas essas propriedades, podemos estender o conceito de potência para casos mais gerais, considerando os casos de expoentes inteiro, racional, irracional e por último para o caso de um número real qualquer, sempre mostrando que são válidas as propriedades (P) apresentadas anteriormente.

2.3. Potências de Expoente Inteiro

A partir da definição de potências com expoente natural, podemos estender o estudo para potências de expoente inteiro ao incluirmos a definição de potências de expoente inteiro negativo. Dado um número real a, não nulo, e um número n natural, a potência a^{-n} é definida pela relação,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ,}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

Exemplo 2.2.

a) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

b) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{-\frac{1}{32}} = -\frac{32}{1} = -32$

Observemos que o conjunto de propriedades (P), definidas anteriormente, continua válido e a propriedade (P_2) passa a ser definida também para o caso $m < n$.

Com o objetivo de estender a definição de potências para expoente real, incluiremos também a definição de potências de expoente racional.

2.4. Potência de Expoente Racional

Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in Q = \{p \in \boldsymbol{Z} \text{ e } q \in \mathbb{N}^*\}$ define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ pela relação $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adotamos a seguinte definição especial $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplo 2.3.

a) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

b) $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

c) $7^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{7^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Propriedades

As propriedades (P) continuam válidas e se verificam também para as potências de expoente racional. Assim, podemos escrever:

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in R_+^*$, $\frac{p}{q} \in Q$ e $\frac{r}{s} \in Q$, valem as seguintes propriedades:

$$P_1 = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

$$P_2 = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

$$P_3 = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$$

$$P_4 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

$$P_5 = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$$

Na sequência, trabalharemos para estabelecer uma definição intuitiva de potência com expoente irracional. A definição formal de potência de expoente irracional utiliza o conceito de limite de sequência, que foge aos objetivos propostos para o trabalho.

2.5. Potência de Expoente Irracional

Consideremos um número real $a > 0$ e um número irracional α. Podemos construir, com base nas potências de expoente racional, um único numero real positivo a^{α} que é a potência de base a e expoente irracional α.

Iniciaremos o nosso trabalho tentando estabelecer um valor para potências como $3^{\sqrt{2}}$ ou $2^{\sqrt{3}}$. Lembramos que $\sqrt{2}$ é o limite de uma sequência de números racionais, de fato, $\sqrt{2}$ é o limite da sequência,

$$1{,}4; \quad 1{,}41; \quad 1{,}414; \quad 1{,}4142; \quad 1{,}41421; \quad 1{,}414213; \quad 1{,}4142135$$

de maneira análoga, temos que $\sqrt{3}$ é limite da sequência,

$$1{,}7; \quad 1{,}73; \quad 1{,}732; \quad 1{,}7320; \quad 1{,}73205; \quad 1{,}732050; \quad 1{,}7320508$$

Assim, podemos definir a potência $3^{\sqrt{2}}$ como o limite da sequência

$$3^{1{,}4}; \quad 3^{1{,}41}; \quad 3^{1{,}414}; \quad 3^{1{,}4142}; \quad 3^{1{,}41421}; \quad 3^{1{,}414213}; \quad 3^{1{,}4142135}$$

e a potência $2^{\sqrt{3}}$ como o limite da sequência

$$2^{1{,}7}; \quad 2^{1{,}73}; \quad 2^{1{,}732}; \quad 2^{1{,}7320}; \quad 2^{1{,}73205}; \quad 2^{1{,}732050}; \quad 2^{1{,}7320508}$$

Podemos prosseguir de maneira análoga para obter a potência a^α, escrevendo o número α na sua representação decimal infinita e a partir dela considerar a^α como o limite de uma sequência de números racionais.

Obtemos assim todas as condições para definirmos uma potência de expoente real, a^b, cuja base $a \in \mathbb{R}$ e cujo expoente b também pertence a $\mathbb{R}$. O conjunto de propriedades (P) continua válido.

Exemplo 2.4. Notação Científica

Ao estudarmos problemas de Física, Química e outras ciências nos deparamos com números muito grandes ou muito pequenos, que requerem a utilização de uma grande quantidade de algarismos. Para estes casos utilizamos a notação científica, que consiste em representar os números pela forma $m \times 10^n$, onde m representa um número entre 1 e 10 e o número n representa a ordem de grandeza, dada na forma de expoente (Rocha, 2014).

Por exemplo, ao resolvermos problemas de Física e Química, encontramos grandezas que escrevemos em notação científica, como a distância da Terra ao Sol de aproximadamente $d_{TS} \cong$ 149.000.000.000 m e que pode ser escrita como $d_{TS} \cong 1{,}49 \times 10^{11} m$; a velocidade da luz $c \cong$ 300.000.000 m/s, que pode ser escrita, em notação científica como, $c \cong 3 \times 10^8$; a constante de Gravitação Universal $G \cong 6{,}67 \times 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$; a distância que a luz percorre em um ano denominada ano-luz que corresponde aproximadamente a $9.460.000.000.000 km = 9{,}46 \times 10^{12} km$; a massa do elétron em repouso $m_{oe} \cong 9{,}109389 \times 10^{-31} kg$; a massa do próton em repouso $m_{op} \cong 1{,}672623 \times 10^{-2}\ kg$ e o Número de Avogadro $N_0 = 6{,}022136 \times 10^{23} mol^{-1}$ (Varella, 2009).

O Sistema Internacional de unidades (SI) utiliza prefixos que podem ser empregados com quaisquer unidades e que indica o fator pelo qual a unidade é multiplicada. No quadro 1 apresentamos uma lista dos prefixos utilizados pelo SI, em ordem decrescente.

Quadro 1: Lista dos Prefixos utilizados pelo SI

Nome do Prefixo	Símbolo	Fator
yotta	Y	$10^{24} = 1.000.000.000.000.000.000.000.000$
zetta	Z	$10^{21} = 1.000.000.000.000.000.000.000$
exa	E	$10^{18} = 1.000.000.000.000.000.000$
peta	P	$10^{15} = 1.000.000.000.000.000$
tera	T	$10^{12} = 1.000.000.000.000$
giga	G	$10^{9} = 1.000.000.000$
mega	M	$10^{6} = 1.000.000$
quilo	k	$10^{3} = 1.000$
hecto	h	$10^{2} = 100$
deca	da	10
deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$
micro	μ	$10^{-6} = 0{,}000001$
nano	n	$10^{-9} = 0{,}000000001$
pico	p	$10^{-12} = 0{,}000000000001$
femto	f	$10^{-15} = 0{,}000000000000001$
atto	a	$10^{-18} = 0{,}000000000000000001$
zepto	z	$10^{-21} = 0{,}000000000000000000001$
yocto	y	$10^{-24} = 0{,}000000000000000000000001$

Exemplo 2.5. Mil milhões ou bilhões

O uso do jornal em sala de aula como fonte de problemas para estudar Matemática é muito utilizado e as páginas de economia servem muito bem a esse objetivo. Existe um problema de notação que gera algumas confusões quando falamos em grandes fortunas ou lucros/investimentos de grandes empresas, que se refere à adoção de uma escala para definir o que chamaremos de bilhões, trilhões, etc.

Atualmente, existe a adoção de uma escala curta no Brasil, Estados Unidos e alguns outros países e a escala longa adotada na maioria dos países de Europa e em muitos países da América Latina. Esta situação curiosa está explicada de maneira muito didática no Portal Física Interessante e no Portal Língua e Números. Resumimos as diferenças entre ambas as escalas no quadro 2, usando notação convencional e notação científica.

Quadro 2: Diferenças entre ambas as escalas

Escala Curta	Escala Longa		Notação Científica
um	um	1	10^0
mil	mil	1.000	10^3
milhão	milhão	1.000.000	10^6
bilhão	mil milhões	1.000.000.000	10^9
trilião	bilião	1.000.000.000.000	10^{12}
quatrilhão	mil biliões	1.000.000.000.000.000	10^{15}
quintilhão	trilião	1.000.000.000.000.000.000	10^{18}
sextilhão	mil triliões	1.000.000.000.000.000.000.000	10^{21}

O Portal Física Interessante pergunta, como se lê o número 1.863.005.000.000.000.000.000? A resposta é diferente dependendo do país em que você estiver. Por exemplo,

- em Portugal: mil, oitocentos e sessenta e três triliões e cinco mil biliões
- no Brasil: um sextilhão, oitocentos e sessenta e três quintilhões e cinco quatrilhões.

Exemplo 2.6. Exercícios de Potenciação da OBMEP

Inicialmente, consideraremos dois problemas de nível básico:

a) A metade de 4^{10} é: i) 2^{19} ii) 2^{10} iii) 2^5 iv) 4^5 v) 4^8

Observemos que “a metade de 4^{10}” é escrita simbolicamente como

$$\frac{4^{10}}{2} = \frac{(2^2)^{10}}{2} = \frac{2^{20}}{2} = 2^{20-1} = 2^{19}$$

mostrando assim que a alternativa correta é (i).

b) Um livro de física tem 800 páginas e 4 cm. de espessura. A espessura de uma página do livro vale, em milímetros:

i) $2{,}5 \times 10^{-2}$ ii) 5×10^{-2} iii) 1×10^{-1} iv) $1{,}5 \times 10^{-1}$ v) $2{,}0 \times 10^{-1}$

Consideraremos que a capa do livro está dentro das 80 páginas. Sabendo que $1cm = 10mm,$ temos $4cm = 40mm$. Portanto,

$$\frac{40}{800} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5 \times 10^{-2}$$

e, portanto, a alternativa correta é (ii).

Agora, consideraremos uma questão de nível intermediário.

c) a expressão $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9$ equivale a:

i) 6^{26} ii) 6^{13} iii) 13^{13} iv) 26^6 v) 6^{36}

Podemos iniciar rescrevendo cada uma das potências que aparecem como fatores do produto,

$4^4 = (2^2)^4 = 2^8$

$9^4 = (3^2)^4 = 3^8$

$4^9 = (2^2)^9 = 2^{18}$

$9^9 = (3^2)^9 = 3^{18}$

Assim, o produto apresentado pode ser escrito como,

$$4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9 = 2^8 \cdot 3^8 \cdot 2^{18} \cdot 3^{18} = 2^8 \cdot 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 3^{18} = 2^{26} \cdot 3^{26} = 6^{26}$$

mostrando que a alternativa correta é a (i).

Finalmente consideremos uma questão de nível avançado.

d) Seja $a > 1$ um número real tal que $a^{2a^6} = 3$. Determine o valor numérico de $\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}}$.

Observemos que, se $a^{2a^6} = 3,$ então $(a^{2a^6})^3 = 3^3$. Logo, podemos afirmar que $a^{6a^6} = 3^3$. Mas, $a^{6a^6} = (a^6)^{a^6}$ e assim, podemos escrever que $(a^6)^{a^6} = 3^3$, concluindo que $a^6 = 3$.

Esse resultado permite simplificar a expressão cujo valor queremos determinar,

$$\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(a^{a^3}\right)^{\sqrt{3}}. \qquad (*)$$

Por outro lado, sabendo que $a^6 = 3$ e aplicando raiz quadrada de ambos os lados, obtemos que, $\sqrt{a^6} = \sqrt{3}$ e portanto,

$$a^3 = \sqrt{3} \qquad (**)$$

De (*) e (**) obtemos,

$$\left(a^{a^{a^6}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(a^{a^3}\right)^{\sqrt{3}} = \left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = a^3 = \sqrt{3}.$$

CAPÍTULO 3.

FUNÇÃO EXPONENCIAL E EQUAÇÕES

O estudo de funções exponenciais é muito importante para modelar problemas aplicados em diversas áreas, por esse motivo deve estar presente nos conhecimentos matemáticos que todo aluno do ensino básico tem contato. Nesse capítulo estudaremos a função exponencial com ênfase nas suas aplicações, explorando problemas do ENEM, vestibulares e olímpiadas.

3.1. Definição

Dado um número real a, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a, a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número real a^x.

Em símbolos, podemos escrever,

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

Por exemplo, são funções exponenciais,

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
- $h(x) = 3^x$
- $p(x) = 10^x$
- $r(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

3.2. Propriedades

1. Na função exponencial dada por $f\ (x) = a^x$, temos que $x = 0 \Longrightarrow f(0) = a^0 = 1$, isto é, o par ordenado $(0,1)$ pertence ao gráfico da função para todo $a\ \in\ \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

2. A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente se, e somente se, $a > 1$ e decrescente se, e somente se, $(0 < a < 1)$. Portanto, dados os números reais x_1 e x_2, temos

a) Quando $a > 1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f((x_2))$
b) Quando $0 < a < 1, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3. A função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetora, pois dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo, consideremos $x_1 < x_2$)

a) Se a > 1, temos que $f(x_1) < f(x_2))$
b) Se $0 < a < 1$, temos que $f(x_1) > f(x_2)$

e, portanto, em ambos os casos concluímos que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3.3. Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função f dada por $f(x) = a^x$, podemos dizer que a curva representativa está toda acima do eixo dos x, pois $a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O gráfico corta o eixo Oy no ponto de ordenada 1 e não corta o eixo Ox, além disso o gráfico toma um dos aspectos da figura abaixo, de acordo com o valor de a.

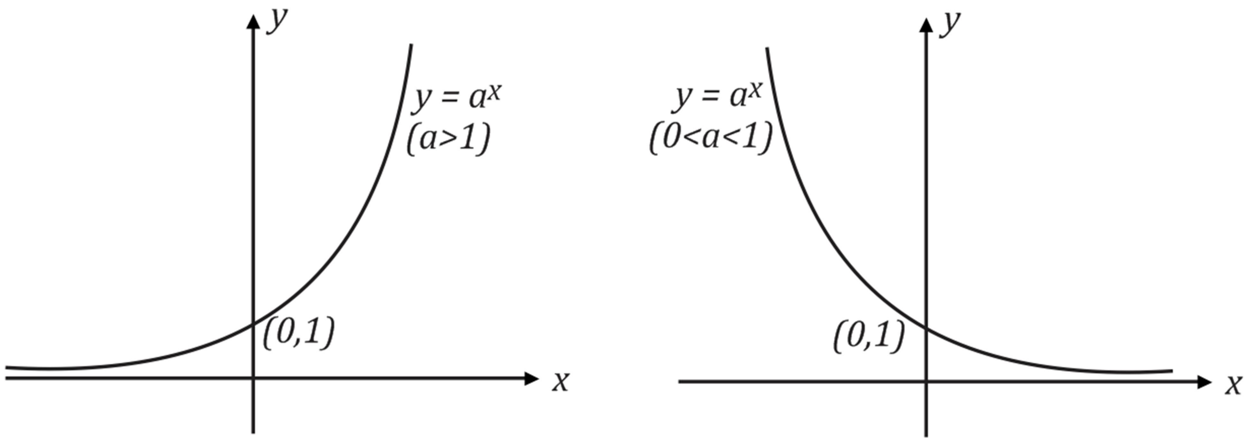


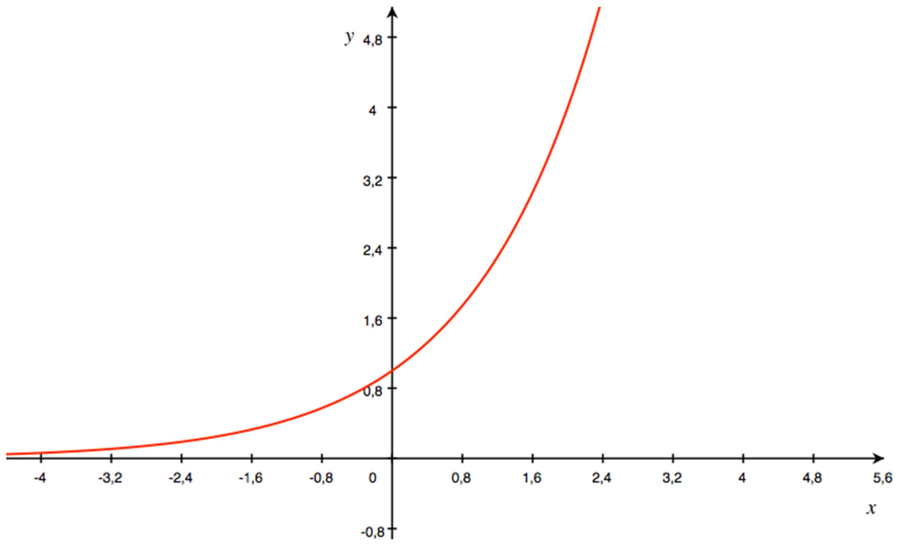
Figura 2 - Gráficos de $y = a^x$. Fonte: Autor

Exemplo 3.1. Algumas Funções Exponenciais

a) Construir o gráfico da função exponencial de base 2, $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Figura 3 – gráfico de y=2^x

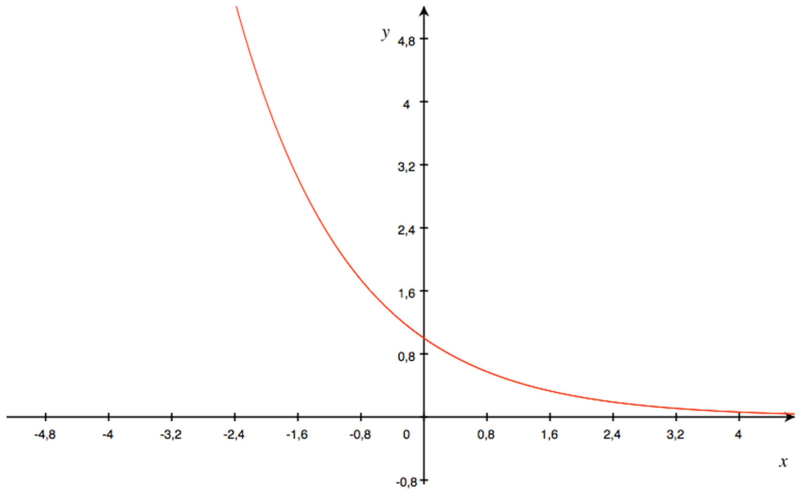


Fonte: Autor.

c) Construir o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$, dada por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Figura 4 - Gráfico de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

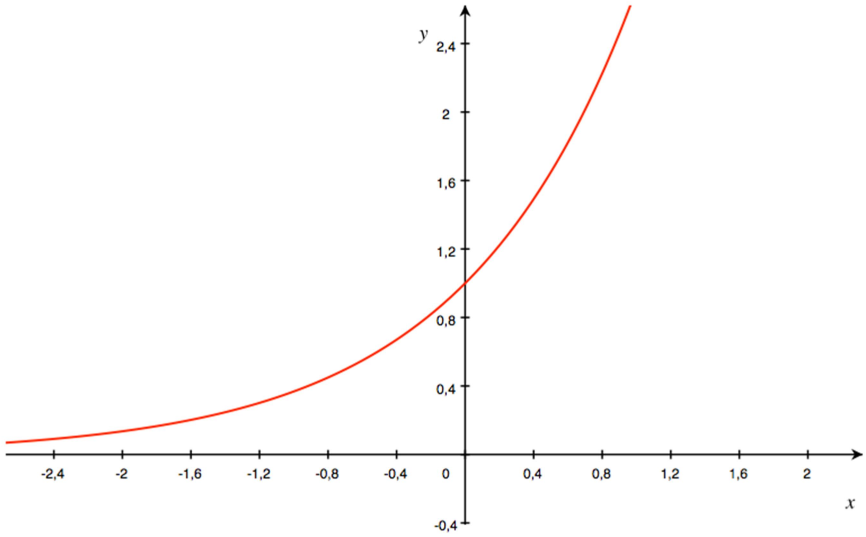


Fonte: Autor

c) Construir o gráfico da função exponencial f utilizando como base o número irracional e, de tal maneira que $f(x) = e^x$. (Consideraremos o valor aproximado $e \cong 2{,}7183$).

Figura 5 – Gráfico de $y = e^x$.

x	e^x
-3	$0{,}05$
$-2{,}5$	$0{,}08$
-2	$0{,}14$
$-1{,}5$	$0{,}22$
-1	$0{,}36$
$-0{,}5$	$0{,}60$
0	1
$0{,}5$	$1{,}65$
1	$2{,}72$
$1{,}5$	$4{,}48$
2	$7{,}39$
$2{,}5$	$12{,}18$
3	$20{,}80$



Fonte: Autor

Associado ao estudo de funções exponenciais e suas aplicações encontramos inúmeros problemas de diversas ciências e, para resolvermos eles precisamos trabalhar com equações exponenciais.

3.4. Equações Exponenciais

Chamaremos de equações exponenciais aquelas equações com incógnita no expoente. Por exemplo,

$$2^x = 64, \qquad \left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}, \qquad 4^x - 2^x = 2.$$

são equações exponenciais.

Basicamente utilizaremos dois métodos para a resolução das equações exponenciais, o primeiro consiste em reorganizar a equação para trabalhar com uma base comum e o segundo utiliza logaritmos.

3.5. Método da redução a uma base comum

Este método é utilizado quando podemos transformar ambos os membros da equação de maneira a obtermos potências de mesma base a com $a > 0$ e $a \neq 1$. Utilizaremos o fato da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ ser injetora, para concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é,

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c \quad (0a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Exemplo 3.2. Diversas equações resolvidas por redução à base comum

a) $2^x = 64$

Considerando que, $2^x = 64 \Leftrightarrow 2^x = 2^6 \Leftrightarrow x = 6$, temos que a solução é $S = \{6\}$.

b) $8^x = \frac{1}{32}$

De maneira análoga à resolução do exemplo anterior, podemos escrever,

$$8^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-5} \Leftrightarrow 3x - 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

O que permite concluir que, $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

c) $\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81}$

Rescrevemos a equação, reduzindo a uma base comum,

$$\left(\sqrt{3}\right)^x = \sqrt[3]{81} \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{3^4} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

e concluímos que, $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

d) $(2^x)^{x-1} = 4$

Novamente, rescrevemos a equação,

$$(2^x)^{x-1} = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1.$$

e encontramos, $S = \{2, -1\}$.

e) $3^{2x-1}.9^{3x+4} = 27^{x+1}$

Todas as potências são escritas para deixarmos a base comum 3, assim,

$$3^{2x-1}.9^{3x+4} = 27^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1}.(3^2)^{3x+4} = (3^3)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{2x-1}.3^{6x+8} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 3^{8x+7} = 3^{3x+3} \Leftrightarrow 8x + 7 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}.$$

O conjunto solução encontrado será $S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$.

f) $\sqrt{5^{x-2}}.\sqrt[x]{25^{2x-5}} - \sqrt[2x]{5^{3x-2}} = 0$

Iniciamos o trabalho escrevendo a expressão que contêm radicais como uma expressão equivalente envolvendo potências de expoente racional,

$$\sqrt{5^{x-2}}.\sqrt[x]{25^{2x-5}} = \sqrt[2x]{5^{3x-2}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}}.(5^2)^{\frac{2x-5}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}+\frac{4x-10}{x}} = 5^{\frac{3x-2}{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{2} + \frac{4x-10}{x} = \frac{3x-2}{2x} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \; ou \; x = -6$$

obtendo finalmente o conjunto solução $S = \{3, -6\}$.

g) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120$

A equação apresentada pode ser resolvida pelo método de redução á base comum, após um processo de fatoração, colocando 2^{x-1} em evidência, podemos escrever,

$$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} = 120 \Leftrightarrow 2^{x-1}(1 + 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4) = 120$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1}.15 = 120 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$$

Encontrando, finalmente que o conjunto solução é $S = \{4\}$.

h) $4^x - 2^x = 56$

Inicialmente rescrevemos todas as potências utilizando base 2 e em seguida trabalharemos com mudança de variável, escolhendo uma incógnita auxiliar.

$$4^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow (2^2)^x - 2^x - 56 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 56 = 0$$

Fazendo $2^x = y$, temos,

$$y^2 - y - 56 = 0 \iff y = 8 \text{ ou } y = -7.$$

Observemos que a solução $y = -7$ deve ser descartada, pois $y = 2^x > 0$.

Assim, teremos $y = 8$, portanto,

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3,$$

encontrando finalmente que $S = \{3\}$.

i) $x^{x^2-5x+6} = 1$

Examinamos inicialmente se 0 ou 1 são soluções da equação, substituindo $x = 0$ na equação proposta, temos: $0^6 + 1$ (falso). Logo, 0 não é solução.

Substituindo $x = 1$ na equação, temos: $1^2 = 1$ (verdadeiro). Logo, 1 é solução da equação.

Supondo agora $x > 0$ e $x \neq 1$, temos,

$$x^{x^2-5x+6} = 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Os valores $x = 2,\ x = 3$ são soluções, pois satisfazem a condição $x > 0$ e $x \neq 1$ .Portanto, $S = \{1, 2, 3\}$.

j) $x^{2x^2-7x+4} = x$

Novamente, examinamos se 0 ou 1 são soluções da equação proposta e obtemos,

$$0^4 = 0\ (verdadeiro) \Rightarrow x = 0 \text{ é } solução.$$

$$1^{-1} = 1\ (verdadeiro) \Rightarrow x = 1 \text{ é } solução.$$

Agora, supondo $x > 0$ e $x \neq 1$, temos,

$$x^{2x^2-7x+4} = x \Rightarrow 2x^2 - 7x + 4 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Os valores $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$ são soluções, pois satisfazem a condição $x > 0$ e $x \neq 1$. Portanto o conjunto solução será $S = \left\{0, 1, 3, \frac{1}{2}\right\}$.

3.6. Método da Resolução através do uso de Logaritmos

No estudo de equações exponenciais, feito anteriormente, só tratamos dos casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base. Se queremos resolver, por exemplo, a equação $2^x = 3$, sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$, mas com os conceitos abordados até aqui não temos condições de determinara esse valor.

Com introduziremos a definição e algumas propriedades de logaritmos (sem demonstração), bem como algumas equações que se resolvem por esse método.

Definição

Sendo a e b números reais positivos com $a \neq 1$, chamaremos logaritmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Simbolicamente, se $a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{a} > 0,\ a \neq 1$ e $b > 0$, então

$$log_a b = x \iff a^x = b.$$

Notação: a é a base do logaritmo, b é o logaritmando, x é o logaritmo.

Exemplo 3.3.

a) $log_3 \frac{1}{9} = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$

b) $log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$

c) $log_4 8 = \frac{3}{2}$, pois $4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

d) $log_{0,2} 25 = -2$, pois $(0,2)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$

Observemos que, com as restrições impostas ($a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{a} > 0,\ a \neq 1$ e $b > 0$), dados a e b existe um único $x = log_a b$.

Propriedades dos Logaritmos

Vejamos agora as propriedades que tornam vantajoso o emprego de logaritmos nos cálculos.

Propriedade 1: Logaritmo do produto.

"Em qualquer base a, ($\mathrm{a} > 0,\ a \neq 1$), o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores". Isto é,

Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então $log_a(b.c) = log_a b + log_a c$

Demonstração.

Fazendo $log_a b = x, log_a c = y$ e $log_a(b \cdot c) = z$, provemos que $z = x + y$. De fato,

$$\left.\begin{array}{r} log_a b = x \Longrightarrow a^x = b \\ log_a c = y \Longrightarrow a^y = c \\ log_a(b \cdot c) = z \Longrightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Longrightarrow a^z = a^x . a^y \Longrightarrow a^z = a^{x+y} \Longrightarrow z = x + y_{\blacksquare}$$

Observações:

i) Esta propriedade pode ser estendida para o caso do logaritmo do produto de $n(n \geq 2)$ fatores reais e positivos, isto é,

Se a $> 0,\ a \neq 1\ e\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, então,

$$log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot\ \dots \cdot) = log_a b_1 + log_a b_2 + log_a b_3 + \cdots + log_a b_n.$$

Demonstração.

Faremos a demonstração por indução sobre n.

Para $n = 2$, a afirmação é verdadeira, pois $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

Suponhamos agora, que a propriedade seja válida para $p \geq 2$ fatores, isto é, $log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot\ \dots \cdot b_p) = log_a b_1 + log_a b_2 + \cdots + log_a b_p$ e, mostremos que a propriedade é válida para $(p + 1)$ fatores, isto é,

$$log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = log_a b_1 + log_a b_2 + \cdots + log_a b_p + log_a b_{p+1}$$

Temos que,

$$log_a(b_1 \cdot b_2 .\cdot \dots \cdot b_p \cdot b_{p+1}) = log_a[(b_1 \cdot b_2 \cdot\ \dots \cdot b_p) \cdot b_{p+1}] =$$

$$log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot\ \dots \cdot b_p) + log_a b_{p+1} =$$

$$= log_a b_1 + log_a b_2 + \cdots + log_a b_p + log_a b_{p+1}{}_{\blacksquare}$$

Exemplo 3.4.

i) Se $x > 0$ então $log_2[x.(x + 1)] = log_2 x + log_2(x + 1)$

ii) $log_3[x.(x - 2)] = log_3 x + log_3(x - 2)$ se, e somente se, $x > 0$ e $x - 2 > 0$, isto é, se $x > 2$.

Propriedade 2: Logaritmo do quociente.

"Em qualquer base $a, (< a \neq 1)$, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual a diferença entre logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor". Simbolicamente,

$$Se\ \mathrm{a} > 0, a \neq 1, b > 0 \text{ e } c > 0, \text{então } \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

A demonstração, assim como a da propriedade 1, se baseia nas propriedades das potências.

Um caso particular desta propriedade é a seguinte, no caso em que $b = 1$, teremos,

$$log_a \frac{1}{c} = log_a 1 - log_a c \Rightarrow log_a \frac{1}{c} - log_a c.$$

Exemplo 3.5.

i) Se $x > 0$, então $log_2\left(\frac{x}{x+1}\right) = log_2(x+1)$

ii) $log_3 \frac{x+1}{x-1} = log_3(x+1) - log_3(x-1)$ se, e somente se, $x + 1 > 0$ e $x - 1 > 0$, isto é, $x > 1$.

Propriedade 3: Logaritmo da potência.

"Em qualquer base $a, (\mathrm{a} > 0, a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência". Simbolicamente,

$$Se\ \mathrm{a} > 0, a \neq 1, b > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então } log_a b^\alpha = \alpha . log_a b.$$

<u>Demonstração</u>.

Fazendo $log_a b = x$ e $log_a b^\alpha = y$, provemos que $y = \alpha . x$. De fato,

$$\left.\begin{array}{r} log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ log_a b^\alpha = y \Rightarrow a^y = b^\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^\alpha \Rightarrow a^y = a^{\alpha . x} \Rightarrow y = \alpha . x \blacksquare$$

Exemplo 3.6.

$log(x-1)^4 = 4 . log(x-1)$ se, e somente se, $x - 1 > 0$, isto é $x > 1$

Notemos a impossibilidade de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença, por meio de regras análogas as dadas. Assim para encontrarmos $log_a(b+c)$ e $log_a(b-c)$ devemos, respectivamente, calcular $(b+c)$ e $(b-c)$.

Propriedade 4: Mudança de base

Há ocasiões em que logaritmos em bases diferentes necessitam serem transformados para uma única base conveniente. Por exemplo, na aplicação das propriedades operatórias os logaritmos devem estar todos numa mesma base.

Se a, b e c são números reais positivos e $a \neq 1,\ c \neq 1$, então temos,

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

<u>Demonstração</u>.

Consideremos $log_a b = x,\ log_c b = y$ e $log_c a = z$ e notemos que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$.

Provemos que $x = \frac{y}{z}$. De fato,

$$\left.\begin{array}{r} log_a b = x \Longrightarrow a^x = b \\ log_c b = y \Longrightarrow c^y = b \\ log_c a = z \Longrightarrow c^z = a \end{array}\right\} \Longrightarrow (c^z)^x = a^x = b = c^y \Longrightarrow zx = y \Longrightarrow x = \frac{y}{z} \blacksquare$$

Exemplo 3.7.

i) $log_3 5$ transformado para a base 2 fica, $\quad log_3 5 = \frac{log_2 5}{log_2 3}$

ii) $log_2 7$ transformado para a base 10 fica, $\quad log_2 7 = \frac{log_{10} 7}{log_{10} 2}$

iii) $log_{100} 3 = \frac{log_{10} 3}{log_{10} 100} = \frac{log_{10} 3}{2} = \frac{1}{2}\, log_{10} 3.$

Agora podemos introduzir um segundo método de resolver equações exponenciais, através do uso de logaritmos, que utilizaremos com aquelas equações que não podem ser resolvidas pelo método de redução à base comum.

Exemplo 3.8.

$2^x = 3$

Aplicamos logaritmo de base 2 de ambos os lados para obtermos

$$log_2 \, 2^x = log_2 3 \implies x \cdot log_2 2 = log_2 3$$

CAPÍTULO 4.

APLICAÇÕES

As funções exponenciais possuem uma diversidade de aplicações no cotidiano, e estão presentes em diversas áreas da ciência. Na Matemática financeira é utilizada na capitalização de capitais pelo método do juro composto, na Geografia está relacionada a expressões responsáveis por explicar os crescimentos populacionais, na Química é utilizada em situações envolvendo decaimento radioativo, na Biologia está ligada ao desenvolvimento de bactérias em culturas e crescimentos de determinadas plantas, na Psicologia expressa as curvas de aprendizagem, entre outras inúmeras aplicações. Algumas dessas aplicações serão apresentadas nesse capítulo, assim como utilização na datação por carbono radioativo, lei do resfriamento de Newton e a Escala Richter, utilizada na observação e estudo de terremotos. Utilizamos exemplos presentes em provas de vestibulares, ENEM, PROFMAT e também alguns exemplos obtidos na página Super Professor, disponível no endereço www.sprweb.com.br.

4.1. Juros Compostos

Empréstimos, financiamentos, juros e descontos são termos que ouvimos e temos contato diariamente e em várias situações. Nesse estudo de matemática financeira vários conteúdos são aplicáveis e as exponenciais e logaritmos são fundamentais nos desenvolvimentos. Vamos resolver alguns exercícios sobre o assunto utilizando as propriedades e definições já estudadas nesse trabalho.

Exemplo 4.1.

Calcule o montante de um capital de R$6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês.

Utilizaremos a expressão

$$M = C.(1+i)^t$$

conhecida no ensino médio e na qual, M indica o montante, C representa o capital investido, i indica a taxa de juros aplicada e t representa o tempo.

Pelo enunciado, temos que $C = 6000,\ i = 3{,}5\%\text{ ao mês ou }0{,}035$ e $t = 1\text{ ano ou }12\text{ meses}$. Então,

$$M = 6000.(1 + 0{,}035)^{12} \text{ ou } M = 6000 \cdot 1{,}509.$$

Encontramos assim, que o montante é de $R\$\ 9\ 054{,}00$.

Exemplo 4.2.

Por quanto tempo devo aplicar um capital de R$ 800,00 a uma taxa de juros de 3% ao mês para que produza um montante de R$ 1.444,89?

Nesse caso, temos $C = 800, i = 3\%\text{ ao mês ou }0{,}03$ e $M = 1444{,}89$. Assim, substituindo na fórmula utilizada no exercício anterior temos,

$$1444{,}89 = 800.(1 + 0{,}03)^t$$

ou

$$\frac{1444{,}89}{800} = 1{,}03^t$$

para encontrarmos finalmente que,

$$1{,}03^t = 1{,}806.$$

Obtemos assim uma equação exponencial na qual não é possível reduzirmos os dois membros a potencias de mesma base, então precisamos aplicar logaritmo em ambos os membros e utilizar suas propriedades.

$$log1{,}03^t = log1{,}806$$

$$t.log1{,}03 = log1{,}806$$

$$t.0{,}013 = 0{,}257$$

$$t = \frac{0{,}257}{0{,}013} = 20$$

Portanto, o capital deve ser aplicado por um período de 20 anos.

Exemplo 4.3.

(Enem PPL 2015) - O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1.800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s) em função do tempo de serviço (t) em anos, é $(s) = 1800.(1{,}03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

a) 7.416,00

b) 3.819,24

c) 3.709,62

d) 3.708,00

e) 1909,62

Aplicando a expressão fornecida pelo enunciado, podemos encontrar o resultado.

$$s(t) = 1800.(1{,}03)^t$$

$$s(2) = 1800.(1{,}03)^2$$

$$s(2) = 1909{,}62.$$

O que mostra que a alternativa correta é a quinta opção: E.

4.2 Exponenciais e Logaritmos na Biologia

Um exemplo clássico de aplicação de funções exponenciais é o estudo do crescimento de populações, assim a cultura de bactérias é um bom exemplo e é um assunto bastante utilizado em questões de grandes vestibulares quando se procura avaliar o conhecimento dos alunos nos conteúdos de exponenciais e logaritmos.

Exemplo 4.4.

Em certas condições, o número de bactérias B de uma cultura, é dado pela função exponencial $B(t) = 2^{\frac{t}{12}}$. Sabendo que o número de bactérias cresce em função do tempo t, qual o número de bactérias após 96 horas?
Para sua resolução tomamos $t = 96$. Obtemos então,

$$B(96) = 2^{\frac{96}{12}} = 256.$$

Portanto, o número de bactérias após 96 horas será de 256.

Exemplo 4.5.

(UPE-SSA 1 2016) Os técnicos de um laboratório observaram que uma população de certo tipo de bactérias cresce segundo a função $B(t) = 10^9 . 4^{3t}$ com "t" sendo medido em horas. Qual o tempo necessário para que ocorra uma reprodução de $6{,}4 \cdot 10^{10}$ bactérias?

a) 1h

b) 3h

c) 4h

d) 6h

e) 16h

Considerando $B(t) = 6{,}4 \cdot 10^{10}$, obtemos,

$$6{,}4 \cdot 10^{10} = 10^9 \cdot 4^{3t}$$

da qual resulta,

$$4^{3t} = \frac{6{,}4 \cdot 10^{10}}{10^9}$$

obtendo finalmente,

$$t = 1.$$

O que significa que a população atingirá o número de $6{,}4 \cdot 10^{10}$ após 1 hora.

Exemplo 4.6.

Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

Altura: $H(t) = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2(t + 1)$

Diâmetro do tronco: $D(t) = (0{,}1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$, com $H(t)$ e $D(t)$ em metros e t em anos.

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.

b) A altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.

Consideraremos o momento em que são plantadas como o momento inicial e por isso, temos $t = 0$. Substituindo em cada uma das fórmulas:

$$H(0) = 1 + (0,8) \cdot \log_2(1+1)$$

$$H(0) = 1 + (0,8) \cdot \log_2(2) = 1,8.$$

$$D(0) = (0,1) \cdot 2^{\frac{0}{2}} = 0,1.$$

No momento do plantio a muda tem 1,8 metros de altura e 10 cm de diâmetro. Para obtermos o diâmetro aproximado do tronco da árvore, temos a informação sobre a altura da árvore: 3,4 m. Com esses dados podemos obter o tempo e, na sequência, o diâmetro da árvore.

$$3,4 = 1 + (0,8) \cdot \log_2(t+1)$$

$$0,8 \cdot \log_2(t+1) = 2,4$$

$$\log_2(t+1) = 3$$

donde,

$$2^3 = t + 1$$

o que mostra que $t = 7$.

Logo, aos 7 anos a árvore terá 20 cm de diâmetro, já que

$$D(7) = (0,1).\, 2^{\frac{7}{7}} = 0,2$$

4.3 Exponenciais e Logaritmos na Química

Aqui apresentamos alguns exemplos sobre decaimento radioativo e “meia-vida” de algumas substâncias, isto é, o tempo decorrente para que a massa de uma determinada substância seja metade da massa anterior.

Exemplo 4.7.

(Enem 2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{k \cdot t}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27

b) 36

c) 50

d) 54

e) 100

Nosso objetivo é calcular t para o qual se tem $M(t) = 0,1 \cdot A$. Sabendo que a meia-vida do césio-137 é 30 anos, teremos $M(30) = \frac{A}{2}$, o que nos permite escrever

$$A \cdot (2,7)^{k \cdot 30} = \frac{A}{2}$$

$$(2,7)^{k} = 2^{-\frac{1}{30}}$$

Assim, tomando 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$ vem:

$$M(t) = 0,1 \cdot A$$

$$A \cdot [(2,7)^{k}]^{t} = 0,1 . A$$

$$\left(2^{-\frac{1}{30}}\right)^{t} = 10^{-1}$$

$$\log 2^{-\frac{t}{30}} = \log 10^{-1}$$

$$-\frac{t}{30} . 0,3 \cong -1$$

$$t \cong 100$$

ou seja, o resultado procurado é, aproximadamente, 100 anos.

Exemplo 4.8.

(FUVEST 2012) Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = c . a^{-k.t}$, em que a é um número real positivo, t é dado em anos, $m(t)$ a massa da substância em gramas e c, k são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a

20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

a) 10%

b) 5%

c) 4%

d) 3%

e) 2%

Determinaremos m_0 a partir da relação indicada pelo enunciado, assim, $m_0 = c \cdot a^{-k.0}$, obtendo $m_0 = c$.

Como em 10 anos m_0 foi reduzido para $2{,}0 \cdot m_0$, temos

$$0{,}2 \cdot m_0 = m_0 \cdot a^{-10k}$$

$$a^{-1\ \cdot k} = \frac{1}{5}$$

Assim, podemos escrever,

$$m(20) = m_0 \cdot a^{-20 \cdot k} = m_0 \cdot (a^{-10 \cdot k})^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0{,}04 \cdot m_0$$

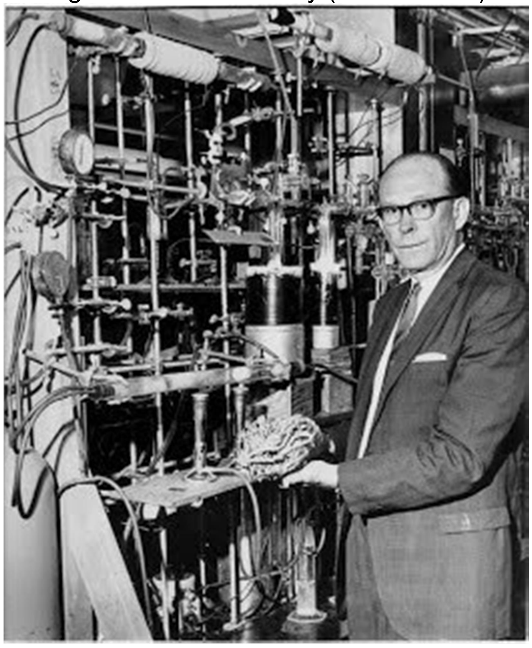
Correspondendo a 4% de m_0.

4.4. Datação por Carbono Radioativo

Utilizada para determinar a idade de restos de madeiras, plantas e ossos de animais (inclusive homem), ou de artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. Sua utilização se resume a restos orgânicos, portanto, não é aplicável na determinação da idade de ouro, por exemplo.

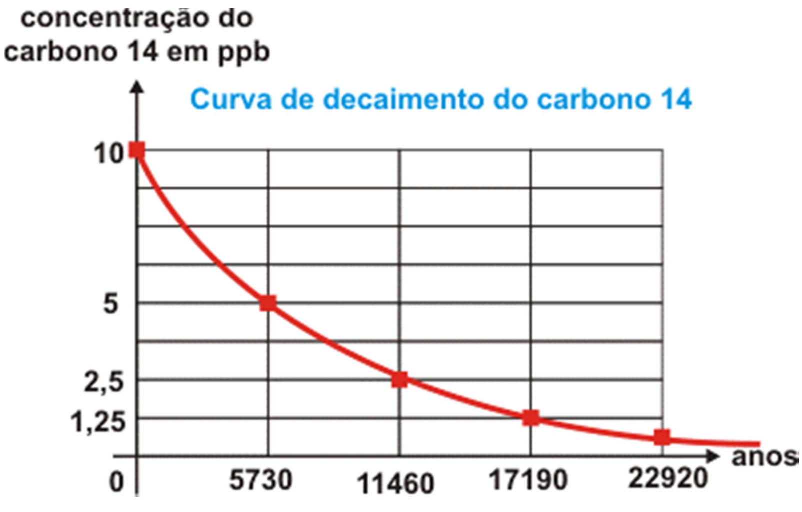
O procedimento foi desenvolvido pelo químico americano Williard Libby (1908 – 1980) no início da década de 50, pelo qual recebeu o primeiro prêmio Nobel de química em 1960. A datação por carbono radioativo é baseada no fato de que algumas madeiras ou plantas contém quantidades residuais de carbono – 14, um isótopo radioativo de carbono. Esse isótopo é acumulado durante a vida da planta e começa a decair após sua morte. Como a meia vida do carbono é longa, aproximadamente 5730 anos, podem ser medidas quantidades remanescentes de carbono – 14 após muitos milhares de anos. Libby mostrou que, mesmo que a fração da quantidade original de carbono – 14 ainda presente seja muito pequena a, ainda pode se determinar precisamente a proporção da quantidade original de carbono – 14. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono – 14 no instante t e se $Q(0)$ é a quantidade original, então $Q(t)/Q(0)$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais permitem a utilização desse método para períodos de tempo até em torno de 50.000 anos, após o qual a quantidade de carbono – 14 remanescente é aproximadamente 0,00236 da quantidade local, (MATOS, 2014).

Figura 3 - Willard Libby (1908 - 1980)



Fonte: Disponível em http://nobel.universityofcalifornia.edu/profiles.html, acessado em 20/11/2016.

Figura 4 - Gráfico do decaimento do carbono – 14.



Fonte: http://radioatividadeturmaa.blogspot.com.br/

Exemplo 4.9.

Suponha que são descobertos certos restos de plantas nos quais a quantidade residual de carbono – 14 é 20% da quantidade original. Determine a idade de seus restos.

Solução:

Consideraremos a equação $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-r \cdot t}$, e iniciaremos calculando a constante de decaimento r para o carbono – 14.

Como a meia vida do carbono – 14 é de aproximadamente de 5730 anos, temos

$$\tfrac{1}{2}.Q_0 = Q_0 \cdot e^{-r.5730}.$$

Aplicamos logaritmo natural em ambos os membros,

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\, e^{-r.5730},$$

assim,

$$ln\, 1 - ln\, 2 = -r \cdot 5730 \cdot ln\, e$$

o que permite encontrar,

$$-\, ln\, 2 = -r \cdot 5730$$

$$r = \frac{ln\, 2}{5730} = 0{,}00012097.$$

Como $Q(t) = 0{,}2 \cdot Q_0$,

$$0{,}2 \cdot Q_0 = Q_0 \cdot e^{-0{,}00012097t}$$

$$ln\, 0{,}2 = ln\, e^{-0{,}00012097}$$

$$-1{,}609437912 = -0{,}00012097 \cdot t \cdot ln\, e$$

$$t = \tfrac{1{,}609437912}{0{,}00012097} \cong 13.304\, anos.$$

4.5. Lei do Resfriamento de Newton

(PROFMAT – EQ 2012-1) Um corpo está contido em um ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo t (em minutos), seja $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a lei de resfriamento de

Newton, $D(t)$ é uma função decrescente de t, com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$$

no intervalo $[t, t+h]$ de tempo depende apenas da duração h desse intervalo, mas não do momento em que essa observação se iniciou. Isto posto, responda à pergunta:

Num certo dia a temperatura ambiente era de 30°C. A água, que fervia a 100°C numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60°C. Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

Solução:

Pela lei do resfriamento de Newton, a função $D(t)$, em que $t = 0$ é o momento em que o fogo foi apagado, cumpre as hipóteses do Teorema de Caracterização das funções do tipo exponencial. Logo existe uma constante a, com $0 < a < 1$, tal que $D(t) = D_0 \cdot a^t$, onde $D_0 = D(0)$. Temos $D(0) = 100 - 30 = 70$. Logo, $D(t) = 70 \cdot a^t$. O enunciado nos informa que $D(5) = 60 - 30 = 30$. Portanto, $70 \cdot a^5 = 30$ e $a^5 = \frac{3}{7}$. Como queremos calcular $D(15)$, temos:

$$D(15) = 70.a^{15} \quad \text{ou} \quad D(15) = 70.(a^5)^3$$

Assim,

$$D(15) = 70.\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{270}{49} \cong 5{,}5.$$

Portanto, 15 minutos após o fogo ter sido apagado a temperatura da água era de, aproximadamente, $30 + 5{,}5 = 35{,}5$ graus.

4.6. Terremotos e a Escala Richter

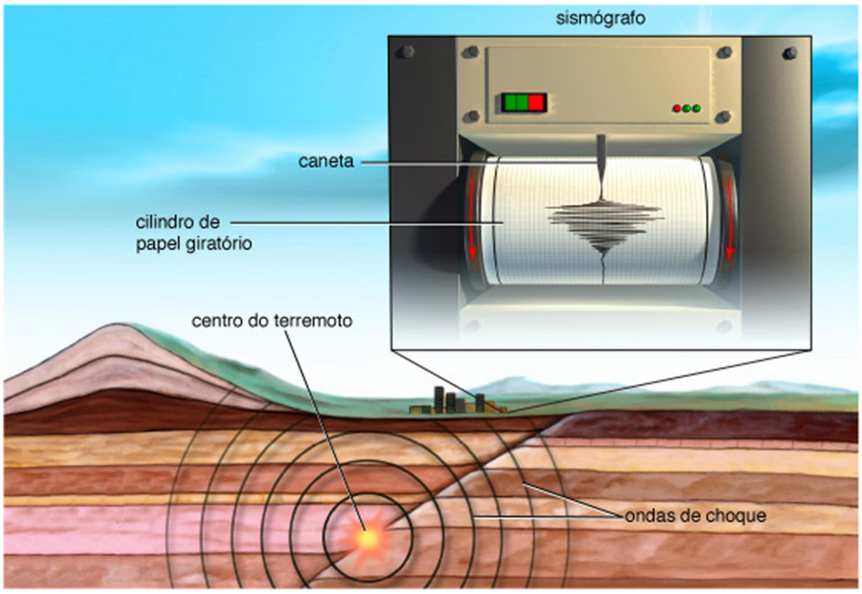
A escala Richter foi desenvolvida por Charles Richter e Beno Gutenberg, no intuito de medir a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas.

As ondas produzidas pela liberação de energia do movimento das placas podem causar desastres de grandes proporções. Os estudos de Charles e Beno resultaram em uma escala logarítmica denominada Richter, que possui pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto.

Figura 5 - Sismógrafo simples.

Fonte: https://eco4u.wordpress.com

Figura 6 - Sismógrafo moderno.



Fonte: http://escola.britannica.com.br

.

Trata-se de uma escala construída a partir de logaritmos decimais e as variações se dão por meio de potências de base dez. Terremotos até magnitude 2 na escala Richter são considerados microterremotos e praticamente não são sentidos, já entre magnitudes 4 e 5 podem ser medidos em vários locais do planeta devido à grande quantidade de energia mecânica liberada.

Quadro 3: A escala Richter e seus efeitos

A escala Richter e seus efeitos								
0 a 1,9	**2 a 2,9**	**3 a 3,9**	**4 a 4,9**	**5 a 5,9**	**6 a 6,9**	**7 a 7,9**	**8 a 8,9**	**9 ou mais**
Tremor detectado apenas por um sismógrafo.	Oscilações de objetos suspensos.	Vibração parecida com a passagem de um caminhão.	Vidros quebrados, queda de pequenos objetos.	Móveis são deslocados, fendas nas paredes.	Danos nas construções, destruição das casas frágeis.	Danos maiores, fissuras no subsolo, canos se rompem.	Pontes destruídas, maioria das construções desaba.	Destruição quase total das construções, tremor de terra visível a olho nu.

Basicamente são aplicadas duas fórmulas nas medições. A primeira delas é utilizada para comparar a quantidade de energia liberada por dois eventos distintos, enquanto que a segunda aplica-se quando pretende-se determinar a quantidade de energia liberada em um único evento, porém podem também ser utilizadas de outras formas.

$$M = \log A - \log A_0$$

onde M é magnitude, A é amplitude máxima e A_0 é uma amplitude de referência, geralmente de outro episódio.

$$I = \frac{2}{3} \cdot log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde I varia de 0 a 9, E é a energia liberada em kw/h e $E_0 = 7.10^{-3} kw/h$.

Exemplo 4.10.

Em 1986, um terremoto em João Câmara (RN) atingiu 5 graus na escala Richter. Já o terremoto causado por um tsunami na Ásia atingiu 9 graus.

$$M_1 - M_2 = log\, A_1 - log\, A_2$$

$$5 - 9 = log\frac{A_1}{A_2}$$

$$10^{-4} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{1}{10000} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$A_2 = 10000 \cdot A_1$$

O que significa que a amplitude do terremoto que atingiu a Ásia foi 10000 vezes a amplitude do terremoto em João Câmara.

Exemplo 4.11.

Qual a quantidade de energia liberada em um terremoto de grau 6?

Utilizando a expressão $I = \frac{2}{3} \cdot log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, que permite determinar a quantidade de energia liberada, podemos obter

$$6 = \frac{2}{3} \cdot log_{10}\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

mostrando que $10^9 = \frac{E}{7.10^{-3}}$ e assim,

$E = 7.10^6$.

Então, um terremoto de grau 6 na escala Richter libera $7.10^6\ kw/h$ de energia.

Exemplo 4.12.

(ENEM – 2016) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}.log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

sendo E a energia, em Kw/h, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 de agosto de 2013 (adaptado)

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $\mathrm{E_1 = E_2 + 2}$

b) $\mathrm{E_1 = 10^2 . E_2}$

c) $\mathrm{E_1 = 10^3 . E_2}$

d) $\mathrm{E_1 = 10^{\frac{9}{7}} . E_2}$

e) $\mathrm{E_1 = \frac{9}{7} . E_2}$

Aplicando a fórmula dada em cada um dos casos, temos, no primeiro caso,

$$9 = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$$

e portanto,

$$10^{\frac{27}{2}} = \frac{E_1}{E_0} \text{ ou } E_1 = 10^{\frac{27}{2}} \cdot E_0.$$

Para o segundo caso,

$$7 = \frac{2}{3} \cdot log\left(\frac{E_2}{E_0}\right)$$

Obtendo

$$10^{\frac{21}{2}} = \frac{E_2}{E_0} \text{ ou } E_2 = 10^{\frac{21}{2}} \cdot E_0.$$

Fazendo $\frac{E_1}{E_2}$, chegamos à relação

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{\frac{27}{2}} \cdot E_0}{10^{\frac{21}{2}} \cdot E_0}$$

que permite obter,

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^3 \text{ ou } E_1 = 10^3 \cdot E_2.$$

Portanto, a alternativa C indica a relação entre E_1 e E_2.

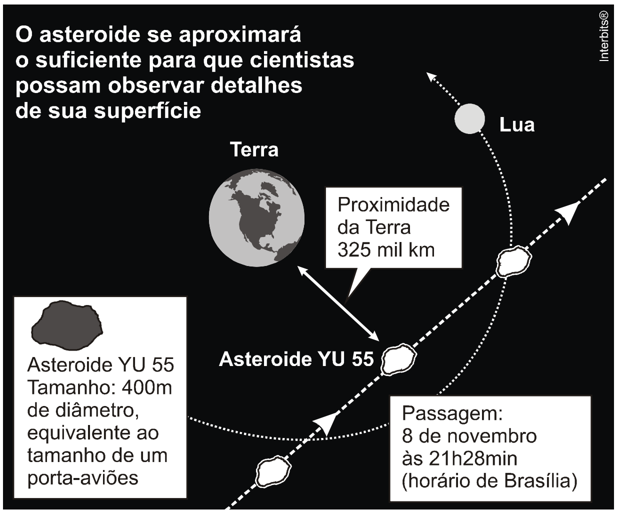
4.7. Outras Aplicações

Além das aplicações destacadas, existe ainda uma extensa lista de funcionalidades para exponenciais e logaritmos. Frequentemente é necessário utilizar escritas de números extremamente grandes ou pequenos na astronomia, física, química, etc. Para isso, utilizamos a notação científica, que consiste em um coeficiente representado por um número entre 0 e 10, seguido de uma potência de base decimal. A medição do PH (potencial hidrogeniônico) de uma substância também utiliza conceitos aqui estudados. A seguir alguns exemplos das variadas aplicações desse conteúdo, que foram aplicados em série do ensino médio.

Exemplo 4.13.

(Enem 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

Figura 9: Proximidade do asteroide em relação à Terra



Fonte: ENEM, 2012

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a:

a) $3{,}25 \times 10^2$ km.

b) $3{,}25 \times 10^3$ km.

c) $3{,}25 \times 10^4$ km.

d) $3{,}25 \times 10^5$ km.

e) $3{,}25 \times 10^6$ km.

Utilizando a ideia de notação científica, temos que,

$$325\,000 = 325 \cdot 10^3 = 3{,}25 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 3{,}25 \cdot 10^5$$

obtendo que a alternativa correta é a D.

Exemplo 4.14.

(Enem 2009) Suponha que o modelo exponencial $y = 363 \cdot e^{0{,}03.x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0{,}3} = 1{,}35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

a) 490 e 510 milhões.

b) 550 e 620 milhões.

c) 780 e 800 milhões.

d) 810 e 860 milhões.

e) 870 e 910 milhões.

Baseados no modelo exponencial fornecido pelo enunciado temos,

$$y = 363 \cdot e^{0{,}03.30}$$

ou

$$y = 363 \cdot (e^{0{,}3})^3$$

obtendo,

$$y \cong 363 \cdot 1{,}35^3 \cong 893$$

Portanto, alternativa E.

Exemplo 4.15.

(UPE-SSA 2 2016) Se um ano-luz corresponde à distância percorrida pela luz em um ano, qual é a ordem de grandeza, em metros, da distância percorrida pela luz em 2 anos, levando-se em consideração um ano tendo 365 dias e a velocidade da luz igual a $300.000km/s$?

a) 10^8

b) 10^{10}

c) 10^{13}

d) 10^{15}

e) 10^{16}

A distância percorrida é dada por

$$2 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 \cong 1{,}89 \cdot 10^{13} = 1{,}89 \cdot 10^{16}\ m$$

Em consequência, como $1{,}89 < \sqrt{10} \cong 3{,}16$ segue que a resposta é 10^{16}.

Exemplo 4.16.

(UFMG 2001) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão

$$pH = -\ log[H^+],$$

em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/l, de íons de Hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de Hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4.10^{-8}\ mol/l$.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para $log\ 2$, e de 0,48, para $log\ 3$.

Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi

a) 7,26

b) 7,32

c) 7,58

d) 7,74

Utilizando a expressão fornecida pelo enunciado do problema, podemos escrever,

$$pH = -\log(5{,}4 \cdot 10^{-8})$$

$$pH = -\log(54 \cdot 10^{-9})$$

$$pH = -\log(2 \cdot 3^3 \cdot 10^{-9})$$

$$pH = -(log\,2 + log\,3^3 + log\,10^{-9})$$

$$pH = -(log\,2 + 3 \cdot log\,3 - 9 \cdot log\,10)$$

$$pH = -(0{,}3 + 3 \cdot 0{,}48 - 9)$$

$$pH = -(0{,}3 + 1{,}44 - 9) = -(-7{,}26) = 7{,}26.$$

Confirmando que a alternativa correta é A.

CAPÍTULO 5.

O JOGO DAS POTÊNCIAS

Devido às dificuldades apresentadas em todas as séries, esse jogo pode ser aplicado em todas as séries, tanto do ensino fundamental II como do ensino médio. No nosso caso, o público alvo foi uma turma do 1º ano do ensino médio, como forma de rever o conteúdo e tornar o seu uso mais prático.

É importante que, antes de pôr o jogo em prática, o professor retome o conteúdo para que os alunos estejam preparados para os cálculos que precisarão realizar. Além disso, as regras que ditam o andamento das partidas devem ser expostas de forma clara, para que não haja distrações durante o jogo. Pode ser que 50 minutos (uma hora-aula) seja suficiente em turmas mais receptíveis a atividades diferenciadas, porém em algumas turmas pode ser necessário um tempo maior para retomada do conteúdo, apresentação do jogo e a aplicação do mesmo.

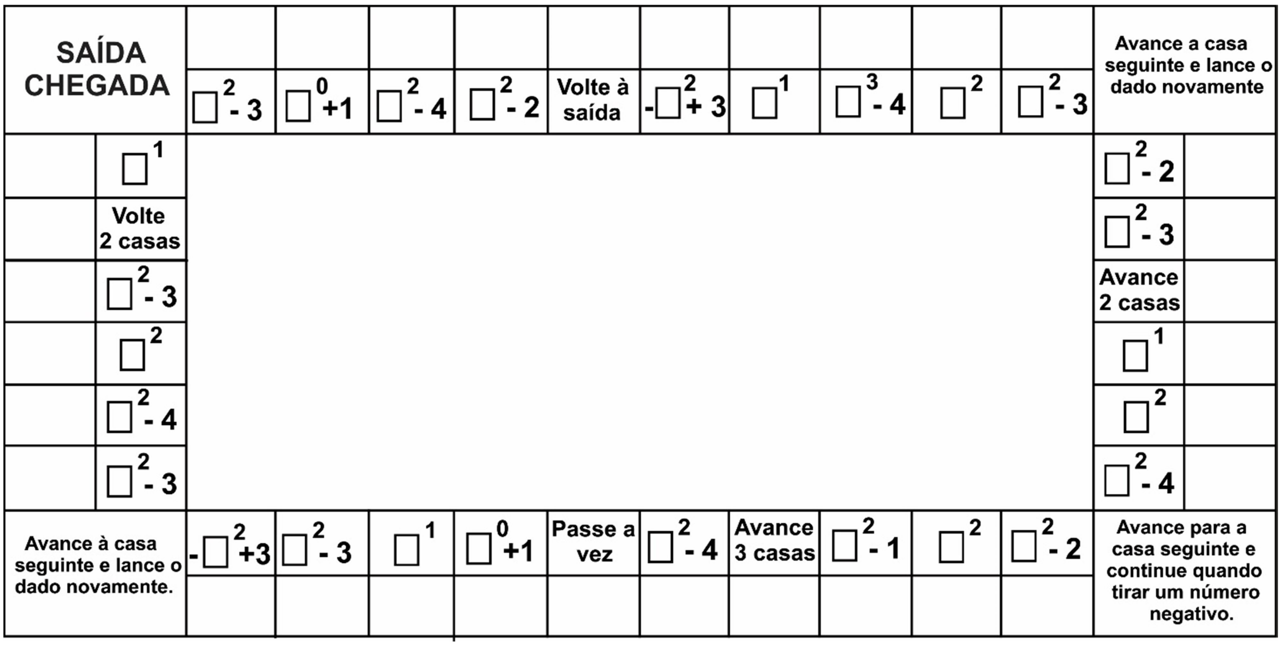
Esse jogo denominado “jogo das potências” foi criado pelos alunos de matemática Adelson Carlos Madruga e Elizangela Mario da Silva, ambos da Universidade Federal da Paraíba, em 2011, e apresentado em forma de artigo elaborado para o III Encontro Regional de Educação Matemática: Diálogo de Educação Matemática e outros saberes, realizada no mesmo ano, na UERN.

5.1. Confecção do Material

Para construirmos o jogo, utilizamos papel sulfite, computador, impressora, retalhos de E.V.A., cola e tesoura, para a confecção de tabuleiros (como mostrado

na figura 12); quatro marcadores para cada grupo de jogadores e dados (com faces -1, -2, -3, 1, 2 e 3), porém alguns itens, como os marcadores, podem ser substituídos por peças de jogos já existentes, como peças de xadrez.

Figura 11: Tabuleiro



Fonte: Autor.

5.2. Características e regras do jogo

O jogo tem como objetivo desenvolver o cálculo mental abrangendo substituição de valores numéricos em expressões com potências de números inteiros e compreender a potência com expoente inteiro positivo como produto de fatores iguais.

Números de participantes: de 2 a 4 alunos;

Material: marcadores e dados;

Como jogar: 1) os participantes devem colocar seus marcadores na casa de saída e lançar o dado uma vez para ver a ordem de início do jogo;

2) Em seguida, o participante deve lançar o dado e substituir o valor obtido com o dado na primeira expressão. Se o resultado for um número positivo, o jogador avança tantas casas de acordo com o resultado da expressão. Caso o resultado for um número negativo deve voltar a quantidade de casa do módulo do resultado.

3) A partir da segunda jogada o jogador deve lançar o dado e substituir a lacuna da casa, em que seu marcador está parado, pelo valor obtido na dado.

4) Exemplo: se o marcador está na casa "$[\ ]^2 - 4$", e o resultado no dado for 3, o jogador avançaria 5 casas, pois $(3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$; caso o número encontrado fosse - 2, não avançaria nenhuma casa, pois $(-2)^2 - 4 = 0$ e, se fosse o número 1, voltaria 3 casas, pois $(1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$.

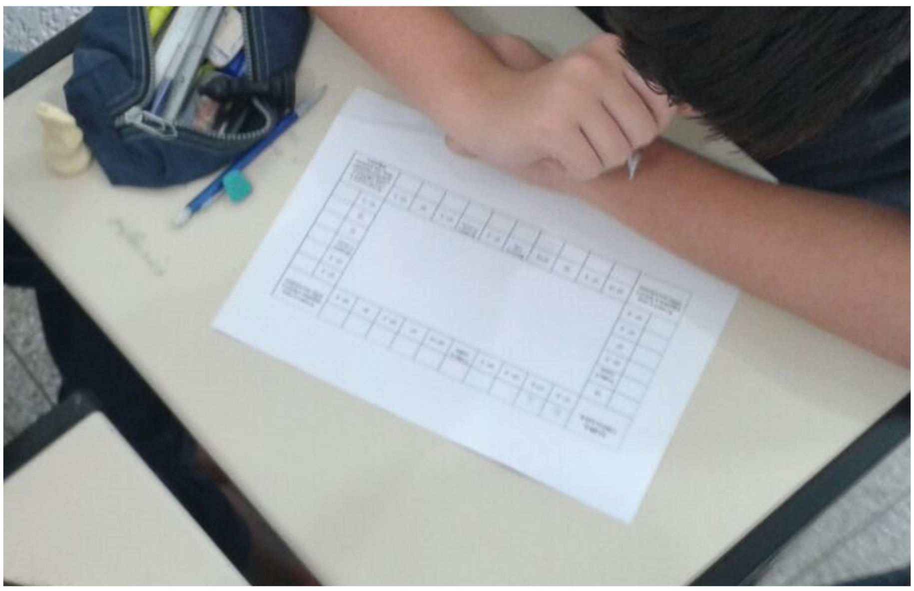
5) Por fim, ganha o jogo aquele que primeiro alcançar a casa de chegada, respeitando as informações que existem durante o trajeto.

5.3. Aplicação do jogo

A turma foi dividida em grupos de 4 alunos. Cada grupo recebeu um tabuleiro, um dado e quatro marcadores, que são utilizados para “andar” pelas casas. Como foi aconselhado anteriormente, o conteúdo foi retomado e, durante essa retomada, foram resolvidas expressões que seguem o mesmo modelo das expressões impressas no tabuleiro. Alguns exemplos de jogadas e simulações foram realizadas para que os alunos assimilassem melhor as regras e como seria o andamento do jogo.

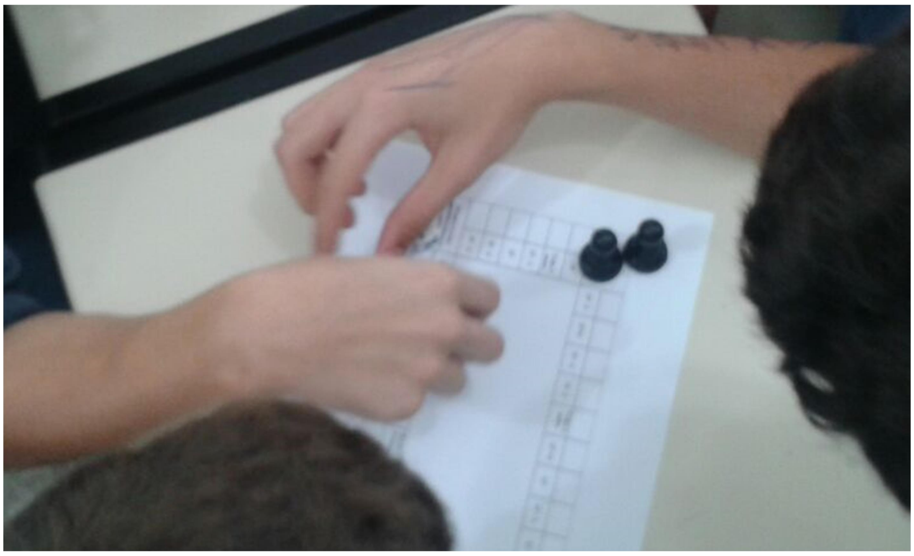
Como alguns alunos apresentaram dificuldade no assunto, por várias vezes o professor foi chamado para sanar dúvidas, porém em pouco tempo os próprios alunos estavam discutindo e se ajudando nas operações necessárias, e conforme foram se familiarizando com o jogo, as partidas foram fluindo mais rapidamente.

Figura 12 - Aplicação do jogo das potências.



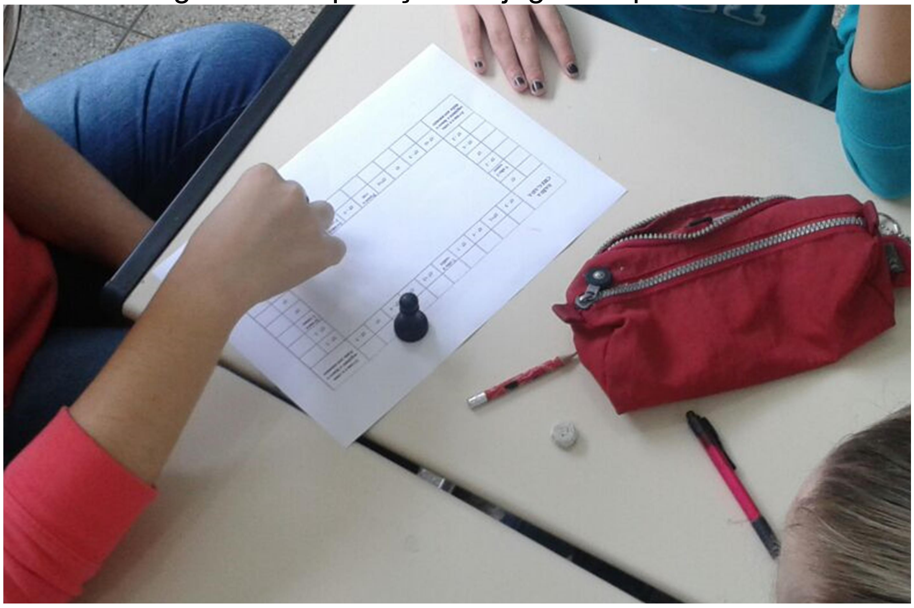
Fonte: Autor

Figura 13 - Aplicação do jogo das potências.



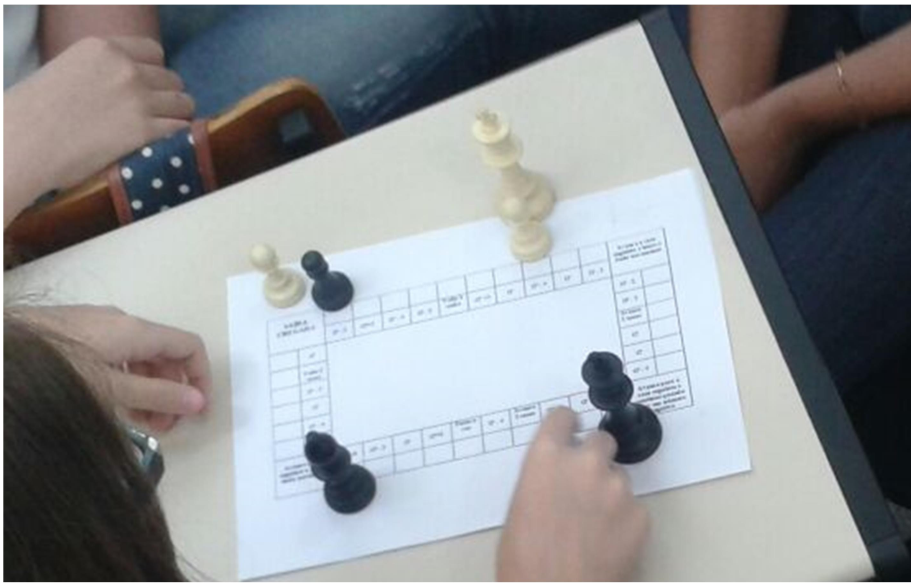
Fonte: Autor

Figura 14 - Aplicação do jogo das potências.



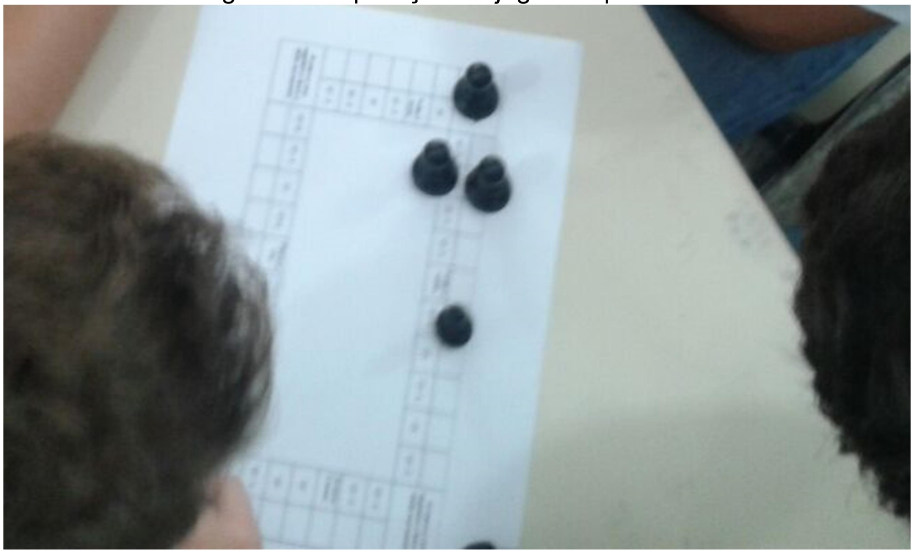
Fonte: Autor

Figura 15 - Aplicação do jogo das potências.



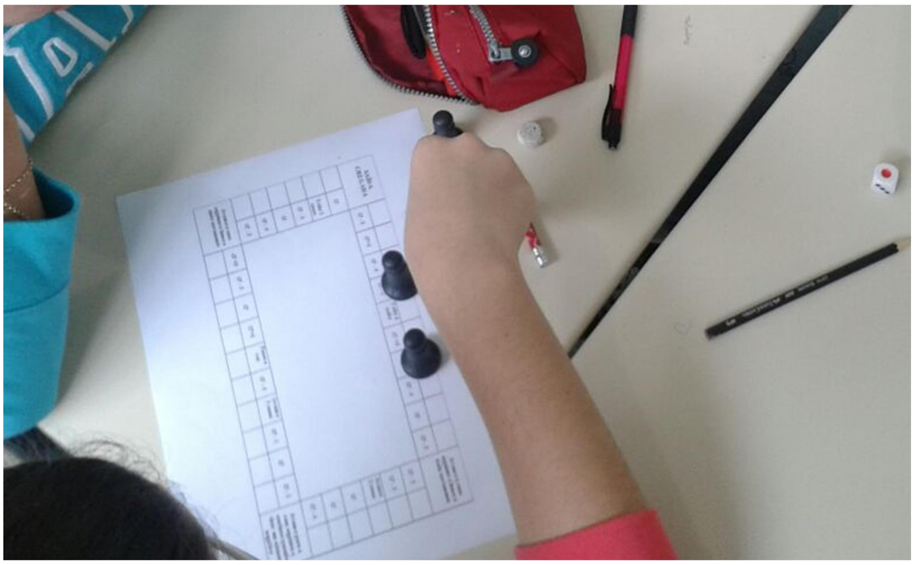
Fonte: Autor

Figura 16 - Aplicação do jogo das potências.



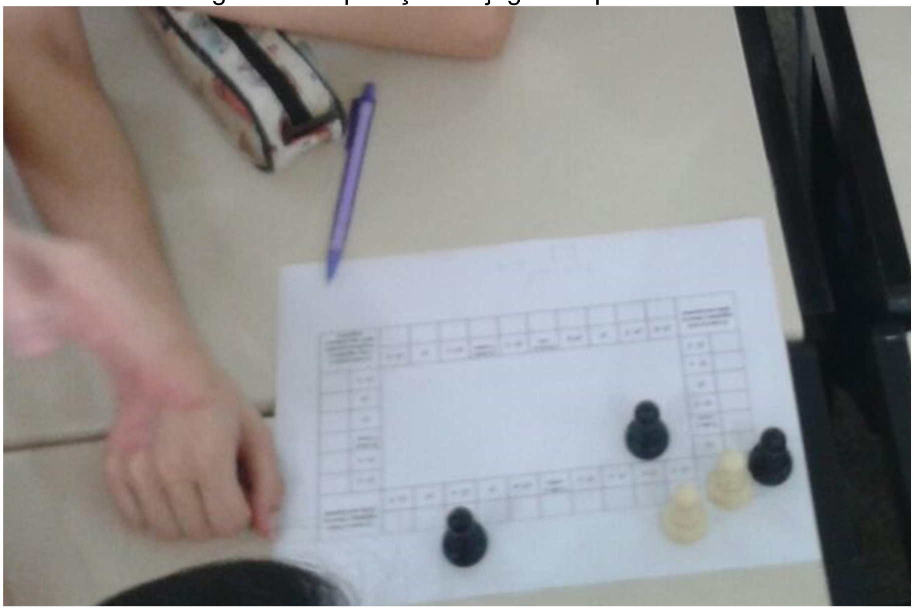
Fonte: Autor

Figura 17 - Aplicação do jogo das potências.



Fonte: Autor

Figura 18 - Aplicação do jogo das potências.

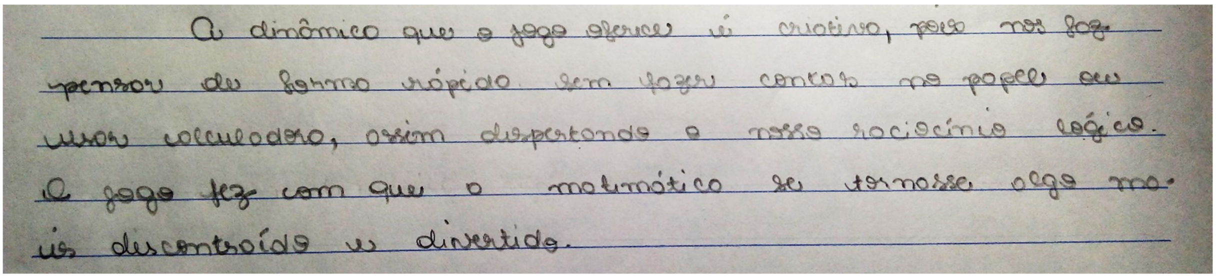


Fonte: Autor

5.4. Resultados

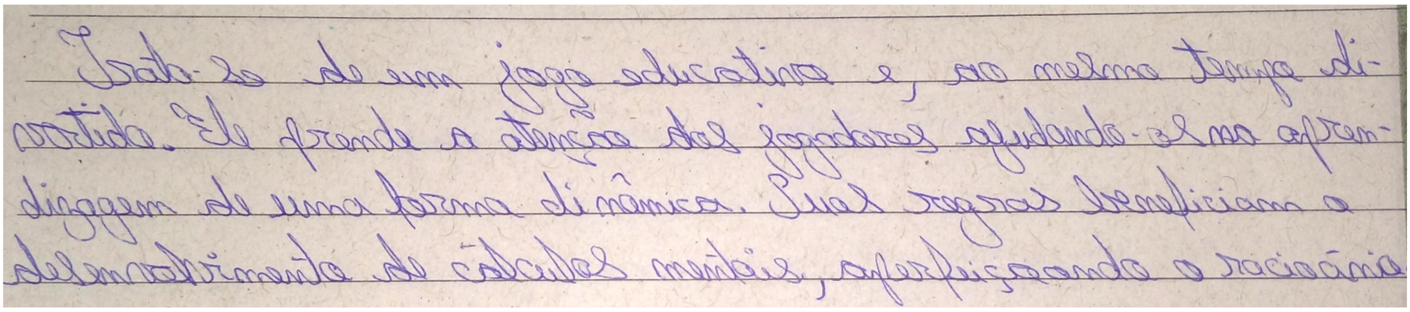
O jogo despertou, nos alunos, a curiosidade das descobertas e a motivação para poder compreender de forma dinâmica o cálculo da potência. Foi perceptível que, com o andamento das partidas, os alunos passaram a ajudar uns aos outros e acabaram por adquirir prática nas resoluções das expressões, raciocinando e chegando aos resultados mais rapidamente. Alguns alunos se propuseram a descrever de forma escrita como enxergaram essa experiência de aprender a realizar cálculos com potências envolvidos em uma atividade lúdica.

Figura 19: Relato de aluno participante.


A dinâmica que o jogo oferece é criativa, pois nos faz pensar de forma rápida sem fazer contas no papel ou usar calculadora, assim despertando o nosso raciocínio lógico. O jogo fez com que a matemática se tornasse algo mais descontraído e divertido.

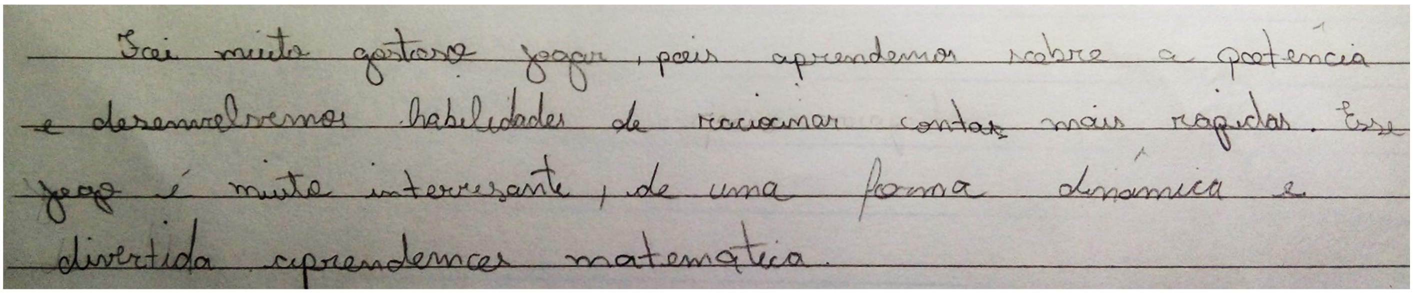
Fonte: Autor.

Figura 20: Relato de aluno participante


Trata-se de um jogo educativo e, ao mesmo tempo divertido. Ele prende a atenção dos jogadores ajudando-os na aprendizagem de uma forma dinâmica. Suas regras beneficiam o desenvolvimento de cálculos mentais, aperfeiçoando o raciocínio

Fonte: Autor

Figura 21 - Relato de aluno participante.


Foi muito gostoso jogar, pois aprendemos sobre a potência e desenvolvemos habilidades de raciocinar contas mais rápidas. Esse jogo é muito interessante, de uma forma dinâmica e divertida aprendemos matemática.

Fonte: Autor

A observação dos alunos durante a atividade e a própria opinião dos alunos nos mostra que a experiência foi bastante proveitosa, pois constatamos que ele proporcionou aos alunos uma compreensão significativa, provocando o interesse e o encanto em aprender matemática, estimulando a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento lógico-cognitivo dos mesmos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A elaboração do trabalho foi feita de forma que um aluno, professor ou qualquer interessado no conteúdo possa utilizar esse trabalho como uma ferramenta útil para obter informações necessárias para um entendimento substancial do assunto. Por isso, foram apresentados, desde a parte teórica e fundamental do assunto, até algumas de suas principais aplicações, exemplos e exercícios de grandes vestibulares sobre o tema abordado.

O assunto se inicia em séries do ensino fundamental II, porém suas aplicações se estendem ao ensino médio e várias áreas do ensino superior, daí a importância de se ter uma base sólida sobre o tema abordado.

Neste sentido, o trabalho apresenta uma sugestão de abordagem do conteúdo aos alunos do ensino médio em forma de um simples jogo que visa uma retomada do conteúdo de forma prática e significativa. Além disso, equação, inequação e função também são apresentadas de forma detalhada, inclusive com demonstrações e gráficos que auxiliam no entendimento dos conceitos e propriedades apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, C. S. **As funções exponencial e logarítmica: uma abordagem para o professor do ensino básico.** Dissertação (mestrado em educação matemática) PROFMAT – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino da matemática: uma prática possível**. 4 ed. Papiros Editora, Campinas, 2007.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. Editora Edgard Blucher, São Paulo,1996.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio** – Volume 2. Brasília, DF: 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf Consultado em: 12/12/2016

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRENER, C. L. S. **Objetos de aprendizagem para o ensino de logaritmos e exponenciais.** Dissertação (mestrado em educação matemática) PROFMAT – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

BURLE NETO, A. F. **Potência de Expoente Irracional: Uma aula para os alunos da 3ª. Série do Ensino Médio**. 51f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática-SBM e Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF, Juiz de Fora, 2013.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias - Secretaria de Educação Básica. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2), 2006.

Como funciona a datação por Carbono 14?. Disponível em: <https://esquadraodoconhecimento.wordpress.com/ciencias-da-natureza/quim/como-funciona-a-datacao-por-carbono-14/> Acesso em 13 de novembro de 2016.

DATAÇÃO POR CARBONO – 14. Disponível em: <http://radioatividadeturmaa.blogspot.com.br/2014/07/datacao-por-carbono-14_26.html> Acesso em 12 de novembro de 2016.

DIAS, M. S; MORETTI, V. D. **Números e operações: elementos lógicos – históricos para a aprendizagem.** Ibpex (Série Matemática em Sala de Aula), Curitiba, 2011.

ENEM. **Exame Nacional do Ensino Médio.** INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acessado em novembro de 2016.

Estudos relacionados às funções exponenciais. Disponível em: <http://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/estudos-relacionados-as-funcoes-exponenciais-estudos-.htm> Acesso em 12 de novembro de 2016.

EVANGELISTA, A.D.G. Regras Matemáticas e suas Justificativas: Breve Histórico sobre o Ensino de Matemática no Brasil e uma Reflexão Acerca da Inclusão de Demonstrações na Prática Docente. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática-SBM e Universidade Federal do Ceará - UFCE, Juazeiro do Norte, 2014.

EVES, Howard. **Introdução à historia da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

GARBI, G. Geraldo. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. Livraria da Física, São Paulo, 2006.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática, pensar e descobrir:** o + novo. Ed. FTD, São Paulo, 2002.

GOMES, F. M. **Matemática Básica. Vol. 1. Operações, Equações, Funções e Sequências**. IMECC-UNICAMP. 2016. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091>. Consultado em: 04/09/2016.

GROENWALD, C. L. O. e TIMM, U. T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula.** [Base de dados na internet]. Portal "Só Matemática". Disponível em <http://www.somatematica.com.br/artigos/a1>. Acesso em 23 julho 2012.

IEZZI, G.; DOLCE, O.;MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar. Vol 2**. Editora Atual. 3ªed. São Paulo – SP, 1977.

Japão prepara sistema para monitorar o país sobre tsunamis. Disponível em: < https://eco4u.wordpress.com/tag/sismografo/> Acesso em 12 de outubro de 2016

Jogo as potências – Alunos de Matemática Adelson Carlos Madruga e Elizangela Mário da Silva – Universidade Federal da Paraíba, 2011

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio, Vol.1**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2004.

MADRUGA, A. C; SILVA, E. M. **O jogo do ensino de Potências de Números Inteiros: um relato de Experiência.** II Encontro Regional em Educação Matemática – Diálogos de Educação Matemática e Outros Saberes – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

MATOS, M. P. **Funções Exponenciais e Logarítmicas**. 64 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - UFMS, Campo Grande - MS, 2014.

MOISÉS, R. P.; LIMA, L. C. **Pedagogia & Comunicação**, UOL Lição de Casa, p.3, São Paulo – SP, 2007.

PERLIN, P.; LOPES. A.R.L.V. A Necessidade Histórica da Criação das Frações e a Organização do Ensino do Professor dos Anos Iniciais. VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. ULBRA – Canoas – RS, 2013.

PORTAL FÍSICA INTERESSANTE, **Matemática Divertida: Ordens, classes e múltiplos.** disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/matematica-divertida-ordens-classes-multiplos.html>. Consultado em: 08/12/2016.

PORTAL LÍNGUAS E NÚMEROS, **Escalas Numéricas curtas e longas.** Disponível em: <http://www.languagesandnumbers.com/artigos/pt/escalas-numericas-curtas-e-longas/>. Consultado em: 08/12/2016

ROBALLO, M. S. **Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas.** Dissertação (mestrado em educação matemática) PROFMAT – Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2014

ROCHA, F. S. **Notas de aula da disciplina Cálculo e Estatística Aplicada**. Universidade Federal de Pelotas. 2014. Disponível em: <http://wp.ufpel.edu.br/matest/files/2014/08/2014-2_Revis%C3%A3o.pdf>. Consultado em: 06/12/2016.

SEIDENBERG, A. **"The ritual origin of counting", Archive for History of Exact Sciences**, no 2, 1962.

SELVA, K. R. e CAMARGO, M. **O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento**. 10º EGEM, Encontro Gaúcho de Educação Matemática, Ijuí, RS, 2009.

SHANKS, D. **Solved and Unsolved Problems in Number Theory**, Chelsea Publishing Company, Nova Iorque, vol.1, pp. 1993.

SILVA, J. F. **Transformações gráficas em funções elementares.** Dissertação (mestrado em educação matemática) PROFMAT – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

SILVA, M. S. **Clube de Matemática:** jogos educativos. 3 ed. Papiros, Campinas, 2007.

Sismógrafo. Disponível em: < http://escola.britannica.com.br/assembly/188669/Os-cientistas-gravam-as-ondas-de-choque-produzidas-por-um> Acesso em 20 de outubro de 2016.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Ed. Record, Campinas, 1968.

VARELLA, I.G; OLIVEIRA, P.D.C.F. **Tabelas e Dados Astronômicos. Uranometria** Nova. 2009. Disponível em: <http://www.uranometrianova.pro.br/tabelas/Gerais/fisica.htm>. Consultado em: 06/12/2016