

Decomposição em Orelhas de Grafos Cobertos por Emparelhamentos

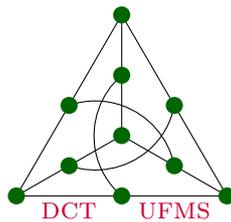
Denis Santos Silva

Dissertação de Mestrado

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho

Área de Concentração: Teoria dos Grafos

Projeto apresentado como requisito para obtenção do título de mestre em
Ciência da Computação.



Departamento de Computação e Estatística
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
11 de novembro de 2005

**Decomposição em Orelhas de Grafos Cobertos por
Emparelhamentos**

Este exemplar corresponde à relação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Denis Santos Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campo Grande / MS, 31 de outubro de 2005.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Marcelo H. de Carvalho (orientador) (DCT-UFMS)
- Prof. Dr. Fábio H. V. Martinez (DCT-UFMS)
- Prof. Dr. Cláudio L. Lucchesi (IC-UNICAMP)

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar sempre me guiando e por ter me dado forças para concluir um trabalho tão gratificante. Agradeço ao Dr. Marcelo Henriques de Carvalho, que, como meu orientador, dedicou seu tempo e conhecimento ao desenvolvimento do presente trabalho, contribuindo muito para o meu aprendizado. Agradeço ao Dr. Cláudio Lucchesi por ter contribuído com valiosas dicas para a elaboração do presente trabalho. Agradeço também aos meus familiares e amigos, que nunca deixaram de me apoiar nos momentos difíceis.

Resumo

O presente trabalho apresenta um estudo sobre emparelhamentos, grafos cobertos por emparelhamentos e decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos, procurando exibir, com a maior clareza possível, os aspectos mais importantes dos tópicos estudados.

Apresentamos um estudo sobre as barreiras maximais dos grafos elementares, que são as classes de uma partição canônica de grafos elementares. Esse estudo nos permitiu aplicar propriedades interessantes das barreiras maximais em algumas provas de resultados importantes da teoria do emparelhamento. Além disso, esse estudo é a base para o estudo de grafos cobertos por emparelhamentos e decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos, onde apresentamos um algoritmo que realiza tal decomposição em tempo $O(|V| \cdot |E|)$. Esse algoritmo é, atualmente, o mais eficiente para a decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos.

Abstract

This work deals with matchings, matching covered graphs and ear decomposition of matching covered graphs. The most important aspects of each one of these subjects are studied.

We study maximal barriers of elementary graphs, which are the classes of the canonical partition of an elementary graph. This study leads us to apply the maximal barrier properties in proofs of some important results in matching theory. Moreover, this is the basis for our study on matching covered graphs, where we present the most efficient algorithm for ear decomposition of matching covered graphs, which runs in $O(|V| \cdot |E|)$ time.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Conteúdo | 7 |
| 1 Introdução | 8 |
| 2 Conceitos Básicos de Grafos | 10 |
| 2.1 Introdução | 10 |
| 2.2 Grafos | 10 |
| 2.3 Subgrafos | 11 |
| 2.4 Caminhos e conexão | 12 |
| 2.5 Outros conceitos utilizados | 13 |
| 3 Emparelhamentos | 14 |
| 3.1 Introdução | 14 |
| 3.2 Emparelhamentos máximos | 14 |
| 3.3 Emparelhamentos em grafos bipartidos | 17 |
| 3.4 Emparelhamentos perfeitos | 18 |
| 3.5 O teorema estrutural de Gallai-Edmonds | 20 |
| 3.6 Encontrando um emparelhamento máximo | 24 |
| 4 Grafos Elementares | 31 |
| 4.1 Introdução | 31 |
| 4.2 Grafos elementares bipartidos | 32 |
| 4.3 Decomposição em orelhas de grafos elementares bipartidos | 32 |
| 4.4 Algoritmo para decomposição em orelhas de grafos elementares bipartidos | 34 |
| 4.5 Barreiras de um grafo elementar | 35 |
| 4.6 Uma importante relação de equivalência | 38 |
| 4.7 Partição canônica | 41 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Grafos Cobertos por Emparelhamentos | 43 |
| 5.1 | Introdução | 43 |
| 5.2 | Propriedades dos grafos cobertos por emparelhamentos | 43 |
| 5.3 | Decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos | 45 |
| 5.4 | O teorema de Lovász e Plummer | 46 |
| 5.5 | Algoritmo eficiente para decomposição em orelhas | 50 |
| 5.5.1 | Atualizando eficientemente uma partição canônica | 50 |
| 5.5.2 | Algoritmo de decomposição em orelhas | 51 |
| 5.5.3 | A complexidade do algoritmo | 58 |
| 6 | Considerações Finais | 60 |
| | Referências Bibliográficas | 61 |

Capítulo 1

Introdução

Emparelhamentos é um tópico de grande importância para a ciência da computação, assim como para a teoria dos grafos e otimização combinatória. O primeiro e mais evidente interesse vem de suas aplicações. Ele modela com perfeição o problema da distribuição de pessoal (veja [BM76], pg. 80) e, além disso, faz parte de um certo número de problemas importantes na teoria dos grafos [GM84].

O interesse em estudar emparelhamentos surgiu devido à grande importância do problema das quatro cores para a teoria dos grafos [Mur94]. A observação feita por Tait [Tai80] de que “provar o teorema das quatro cores é equivalente a provar que todo grafo cúbico planar, sem arestas de corte, possui três emparelhamentos perfeitos disjuntos”, tornou ainda mais interessante essa área da teoria dos grafos.

Muitas descobertas interessantes surgiram do estudo de emparelhamentos e, com certeza, muitas delas envolvem um conjunto de grafos especiais, denominados grafos cobertos por emparelhamentos.

Neste presente trabalho, apresentamos os resultados de um estudo sobre emparelhamentos em grafos, principalmente as características estruturais que tornam essa área de estudo tão atrativa. Durante o estudo, focamos grafos cobertos por emparelhamentos, decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos e, principalmente, o algoritmo apresentado em [CC05], que realiza a decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos em tempo $O(|V| \cdot |E|)$, melhorando assim o menor tempo de execução anterior, que era $O(|V| \cdot |E|^2)$ [LR89].

O Capítulo 2 é uma breve introdução aos conceitos básicos da teoria dos grafos; o Capítulo 3 descreve os conceitos básicos de emparelhamentos e ilustra alguns dos teoremas mais importantes dessa área; o Capítulo 4 descreve as propriedades fundamentais dos grafos elementares, que são a base para o estudo dos grafos cobertos por emparelhamentos; o Capítulo 5

descreve as propriedades fundamentais dos grafos cobertos por emparelhamentos, que desempenham um importante papel na teoria dos grafos; e o Capítulo 6 descreve os principais resultados do presente trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Grafos

2.1 Introdução

Este capítulo ilustra apenas os conceitos básicos da teoria dos grafos que serão empregados no presente trabalho. Uma descrição mais completa dos principais conceitos e terminologia utilizada na teoria dos grafos pode ser encontrada em qualquer texto sobre o assunto, como por exemplo em [BM76].

2.2 Grafos

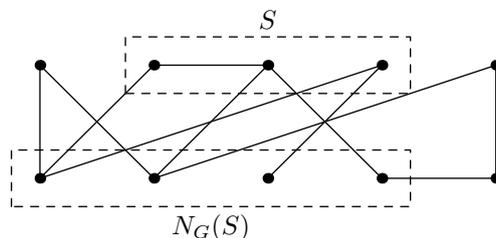
Um *grafo* G consiste de um conjunto $V(G)$ de *vértices*, um conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de *arestas*, e uma função de incidência ψ_G , que associa cada aresta de $E(G)$ a um par não ordenado de vértices de $V(G)$. Quando o nome do grafo é subentendido, utilizamos as notações E , V e ψ ao invés de $E(G)$, $V(G)$ e $\psi(G)$, respectivamente.

Seja G um grafo e $\{u, v\}$ uma aresta de G . Podemos também representar tal aresta como sendo o conjunto $\{v, u\}$. Às vezes é até mais conveniente representarmos tal aresta como uv ou vu .

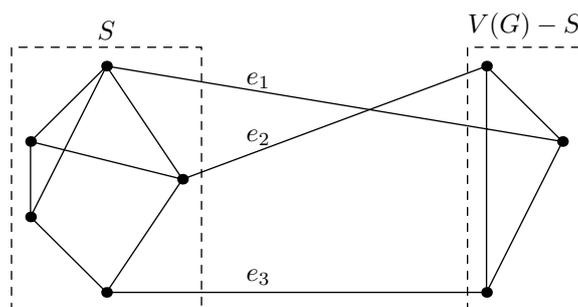
Se $e = uv$ é uma aresta de um grafo G , então u e v dão os *extremos* de e . Além disso, dizemos que e *incide* em u e v , e vice-versa. Também podemos dizer que e *conecta* u a v . Um *laço* é uma aresta que incide duas vezes no mesmo vértice. Dois vértices que incidem em uma mesma aresta são chamados *adjacentes* e duas arestas que incidem em um mesmo vértice também são chamadas *adjacentes*.

Para qualquer subconjunto S de $V(G)$, nós definimos o conjunto *vizinhança* de S em G , denotado por $N_G(S)$, ou simplesmente $N(S)$ quando o grafo G estiver subentendido, como sendo o conjunto de todos os vértices de $V(G) \setminus S$ que são adjacentes a quaisquer vértices de S , como ilustrado na

Figura 2.1.

Figura 2.1: Vizinhança de S em G .

Para qualquer subconjunto S de $V(G)$, $\partial(S)$ denota o conjunto de arestas de G que incidem em algum vértice de S e em algum vértice de $V(G) - S$, como ilustrado na Figura 2.2.

Figura 2.2: $\partial(S) = \{e_1, e_2, e_3\}$.

2.3 Subgrafos

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, e ψ_H é a restrição de ψ_G a $E(H)$. Quando H é um subgrafo de G e $H \neq G$, dizemos que H é um *subgrafo próprio* de G . Se H é um subgrafo de G e $V(H) = V(G)$, dizemos que H é um *subgrafo gerador* de G . A Figura 2.3 ilustra alguns exemplos de subgrafos.

Suponha que V' seja um subconjunto não vazio de V . O subgrafo de G , cujo conjunto de vértices é V' , e cujo conjunto de arestas tem somente as arestas que incidem em dois vértices de V' , é chamado o subgrafo de G *induzido* por V' , e é denotado por $G[V']$. O subgrafo induzido $G[V \setminus V']$ é denotado por $G - V'$ e é obtido, a partir de G , através da remoção dos vértices de V' , juntamente com as arestas que incidem em pelo menos um vértice de V' . Se $V' = \{v\}$, então nós escrevemos $G - v$ ao invés de $G - \{v\}$.

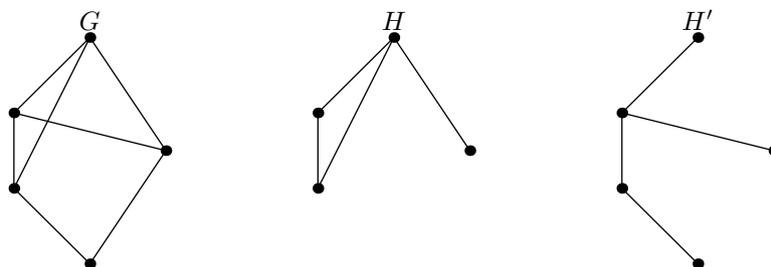


Figura 2.3: Um grafo G , um subgrafo H de G e um subgrafo gerador H' de G .

Agora suponha que E' seja um subconjunto não vazio de E . O subgrafo de G , cujo conjunto de vértices é o conjunto de vértices que incidem em ao menos uma aresta de E' , e cujo conjunto de arestas é E' , é chamado de subgrafo de G *induzido* por E' e é denotado por $G[E']$. O subgrafo induzido $G[E \setminus E']$ é denotado por $G - E'$, e é obtido, a partir de G , através da remoção das arestas de E' . Similarmente, o grafo obtido, a partir de G , através da adição de um conjunto de arestas E' , é denotado por $G + E'$. Se $E' = \{e\}$, então nós escrevemos $G - e$ e $G + e$ ao invés de $G - \{e\}$ e $G + \{e\}$, respectivamente.

2.4 Caminhos e conexão

Um *passeio* em G é uma seqüência finita não nula $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$, na qual os termos são alternadamente vértices e arestas, tal que, para $1 \leq i \leq k$, v_{i-1} e v_i são os extremos de e_i . Dizemos que W é um passeio de v_0 a v_k . Além disso, os vértices v_0 e v_k são, respectivamente, os vértices de *origem* e *término* de W e v_1, v_2, \dots, v_{k-1} são os vértices *internos* de W . O inteiro k é o *comprimento* de W . Se as arestas e_1, e_2, \dots, e_k de um passeio W são distintas, então W é dito ser uma *trilha*. Se os vértices v_0, v_1, \dots, v_k também são distintos, então W é dito ser um *caminho*.

Um passeio é *fechado* se seus vértices de origem e término são o mesmo vértice. Uma trilha fechada de comprimento positivo, na qual a origem e os vértices internos são distintos, é chamada *ciclo*. Um grafo *acíclico* é um grafo que não contém ciclos.

Dizemos que dois vértices x e y estão *conectados* em G se existe um caminho em G com origem em x e término em y . Analogamente, dizemos que um vértice x está *conectado* a um conjunto de vértices Y se x está conectado a algum vértice de Y . Dizemos também que dois conjuntos X e Y de vértices estão *conectados* se existe um vértice $x \in X$ conectado a um vértice $y \in Y$.

Conexão é uma relação de equivalência em V . Então existe uma partição de V em subconjuntos não vazios $V_1, V_2, \dots, V_\omega$ tal que dois vértices u e v estão conectados se, e somente se, ambos u e v pertencem ao mesmo conjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_\omega]$ são chamados de *componentes* de G . Se G tem exatamente um componente, então G é *conexo*, caso contrário G é *desconexo*. Denotamos por $c(G)$ o número de componentes de G .

Se dois vértices u e v estão conectados em um grafo G , então a *distância* entre u e v em G , denotada por $d_G(u, v)$, é o comprimento do menor caminho conectando u a v em G . Por outro lado, se u e v não estão conectados em G , definimos a distância $d_G(u, v)$ como sendo infinita. Se os extremos de uma aresta $e = xy$ estão conectados a um vértice w em G , então a *distância* entre e e w é o menor valor dentre $d_G(x, w)$ e $d_G(y, w)$. Por outro lado, se os extremos de e não estão conectados a w em G , então definimos a distância entre e e w como sendo infinita.

Uma *árvore* é um grafo acíclico conexo. Uma *floresta* é um grafo onde cada um de seus componentes conexos é uma árvore.

Um componente de G é *ímpar* ou *par* de acordo com seu número de vértices. Nós denotamos por $c_o(G)$ o número de componentes ímpares de G .

2.5 Outros conceitos utilizados

Um *grafo bipartido* G é um grafo no qual $V(G)$ pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y , tal que cada aresta de G incide em um vértice de X e em um vértice de Y . Os conjuntos X e Y são chamados de *partes* e (X, Y) é chamada de *bipartição* de G .

Uma aresta e de G é dita ser *contraída* se ela é removida e os dois vértices nos quais ela incidia passam a ser identificados como apenas um. A *contração de um subgrafo* é a contração de todas as arestas do subgrafo.

Denotamos por $M \triangle M'$ a diferença simétrica dos conjuntos M e M' , ou seja, $M \triangle M' := (M - M') \cup (M' - M)$.

Capítulo 3

Emparelhamentos

3.1 Introdução

Seja G um grafo. Um subconjunto M de $E(G)$ é chamado um *emparelhamento* em G se M não contém laços e nem arestas adjacentes. Um emparelhamento M *satura* um vértice v , e v é dito ser *M -saturado*, se alguma aresta de M incide em v , caso contrário, v é dito ser *M -insaturado*.

Neste capítulo exibimos, através do Teorema de Berge, condições necessárias e suficientes para que um emparelhamento tenha cardinalidade máxima. Exibimos, através do teorema de Tutte, condições necessárias e suficientes para que um emparelhamento sature todos os vértices de um grafo. Exibimos o teorema estrutural de Gallai-Edmonds, que serve de base para uma decomposição muito interessante de um grafo, e é um resultado tão importante para o estudo de emparelhamento em grafos quanto o teorema de Tutte. Exibimos também uma prova muito simples e interessante do teorema estrutural de Gallai-Edmonds. A última seção deste capítulo é dedicada ao estudo do algoritmo de Edmonds, que encontra um emparelhamento de cardinalidade máxima em um grafo.

3.2 Emparelhamentos máximos

Seja M um emparelhamento em um grafo G . Um *caminho M -alternante* em G é um caminho no qual as arestas estão alternadamente em $E \setminus M$ e M . Um *caminho M -aumentante* é um caminho M -alternante de comprimento positivo no qual os vértices de origem e de término são M -insaturados.

Dizemos que M é um emparelhamento *máximo* se G não possui um emparelhamento M' com $|M'| > |M|$. O Teorema 3.2.1, conhecido como Teorema

de Berge [Ber57], define uma forma simples para determinar se um emparelhamento é máximo.

Teorema 3.2.1 (*Teorema de Berge*) *Um emparelhamento M de um grafo G é máximo se, e somente se, G não contém um caminho M -aumentante.*

Prova: Seja M um emparelhamento em G . Suponha que G possua um caminho M -aumentante $P := v_0, v_1, \dots, v_{2m+1}$ (Figura 3.1).

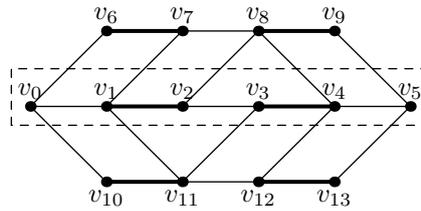


Figura 3.1: Um caminho M -aumentante em G .

Defina $M' \subseteq E$ por $M' = M \triangle E(P)$ (Figura 3.2).

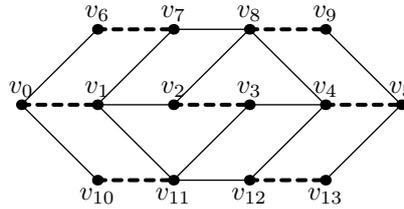


Figura 3.2: Um emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$.

Então M' é um emparelhamento em G e $|M'| = |M| + 1$. Portanto, M não é um emparelhamento máximo em G .

Por outro lado, suponha que M não seja um emparelhamento máximo em G (Figura 3.3) e seja M' um emparelhamento máximo em G (Figura 3.2). Então $|M'| > |M|$.

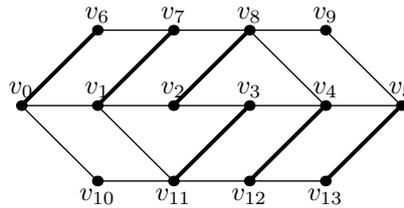


Figura 3.3: Um emparelhamento M em G .

Seja $H := G[M \triangle M']$. Cada vértice de H tem grau um ou dois, pois um vértice de H pode incidir em no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M' . Dessa forma, cada componente de H é um ciclo par com arestas alternadamente em M e M' , ou então um caminho com arestas alternadamente em M' e M (Figura 3.4).

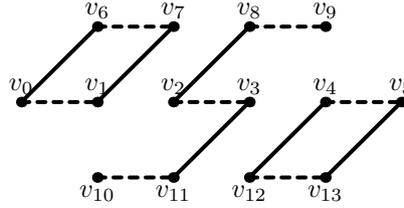


Figura 3.4: Diferença simétrica entre M e M' .

Como $|M'| > |M|$, H contém mais arestas de M' do que de M e, dessa forma, algum caminho P , que seja um componente de H , começa e termina com arestas de M' . A origem e o término de P , ambos M' -saturados em H , são M -insaturados em G . Então P é um caminho M -aumentante em G . ■

O Teorema de Berge serve de base para os algoritmos que desejam encontrar emparelhamento máximo em grafos, pois sempre que um caminho M -aumentante é encontrado, um emparelhamento M' , cuja cardinalidade é $|M| + 1$, também é encontrado.

Seja M um emparelhamento máximo de G . Denotamos por $\nu(G)$ o número de arestas de M . Denotamos por $\text{def}(G)$ (*deficiência de G*) o número de vértices M -insaturados, ou seja, $\text{def}(G) := |V(G)| - 2\nu(G)$. Dessa forma, podemos determinar o tamanho de um emparelhamento máximo de G através da expressão $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - \text{def}(G))$. A Proposição 3.2.2 define um limite inferior para $\text{def}(G)$.

Proposição 3.2.2 *Seja G um grafo. Então, para qualquer subconjunto X de $V(G)$, $\text{def}(G) \geq c_o(G - X) - |X|$.*

Prova: Escolha qualquer $X \subseteq V(G)$ e seja M um emparelhamento máximo em G . Denote por $G_1, \dots, G_i, \dots, G_k$ os componentes ímpares de $G - X$, onde $k = c_o(G - X)$ e cada subgrafo em G_1, \dots, G_i contém um vértice não coberto por M em G . Assim, para cada componente G_l em G_{i+1}, \dots, G_k , existe ao menos uma aresta de M incidindo em um vértice de X e em um vértice de G_l , ou seja, $k - i \leq |X|$. Por outro lado, $\text{def}(G) \geq i$. Daí $\text{def}(G) \geq i \geq k - |X| = c_o(G - X) - |X|$. ■

3.3 Emparelhamentos em grafos bipartidos

Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) . Em muitas aplicações desejamos encontrar um emparelhamento que satura cada vértice em X . Hall [Hal35] determinou condições necessárias e suficientes para que tal emparelhamento exista. Tais condições são ilustradas no Teorema 3.3.1, conhecido como Teorema de Hall.

Teorema 3.3.1 (*Teorema de Hall*) *Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) , então G possui um emparelhamento que satura cada vértice em X se, e somente se, $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Prova: Suponha que G contenha um emparelhamento M que satura cada vértice em X , e seja S um subconjunto de X . Como os vértices de S são emparelhados, através de M , com vértices distintos em $N(S)$, nós claramente temos $|N(S)| \geq |S|$.

Por outro lado, suponha que G seja um grafo bipartido com bipartição (X, Y) em que $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$. Por contradição, suponha que G não contenha emparelhamento que sature todos vértices de X . Seja M um emparelhamento máximo em G e seja u um vértice M -insaturado de X . Denotamos por Z o conjunto de todos vértices conectados a u por caminhos M -alternantes. Como M é máximo, pelo Teorema 3.2.1, temos que u é o único vértice M -insaturado em Z . Seja $S := Z \cap X$ e $T := Z \cap Y$. Então os vértices em $S \setminus \{u\}$ são emparelhados, através de M , com os vértices em T , ou seja, $|T| = |S| - 1$. Além disso, temos que $N(S) = T$, pois cada vértice de S está emparelhado através de M com um vértice de T e cada aresta st que incide em um vértice $s \in S$, mas não está em M , incide também em um vértice $t \in T$, pois t , por definição, está conectado a u por um caminho M -alternante (Figura 3.5).

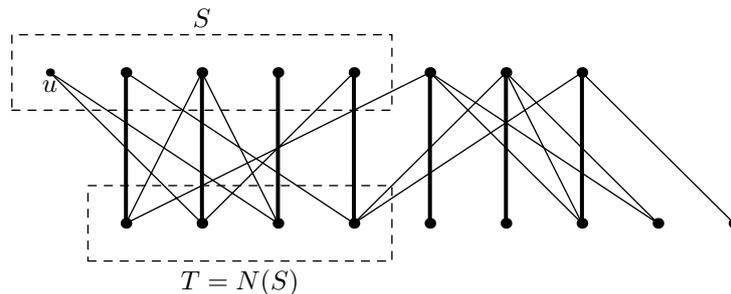


Figura 3.5: Um emparelhamento máximo M em um grafo bipartido G .

Dessa forma, temos que $N(S) = T$ e $|T| = |S| - 1$, o que é uma contradição. ■

3.4 Emparelhamentos perfeitos

Seja M um emparelhamento em um dado grafo G . Se todos os vértices de G forem M -saturados, então o emparelhamento M é *perfeito*, mas se M deixar exatamente um vértice de G insaturado, então M é *quase-perfeito*. Se M é um emparelhamento perfeito, então $|M| = \frac{1}{2}|V|$, ou seja, $\text{def}(G) = 0$. Claramente, cada emparelhamento perfeito também é máximo. Outros conceitos importantes, derivados do conceito de emparelhamento perfeito, são os conceitos de grafo crítico e subgrafo central. Um grafo é dito ser *crítico* se $G - v$ tem um emparelhamento perfeito para cada $v \in V(G)$. Um subgrafo G' de G é dito ser *central* se $G - V(G')$ possui emparelhamento perfeito. O Teorema 3.4.1, conhecido como Teorema de Tutte [Tut47], nos mostra uma condição suficiente e necessária para que um grafo tenha um emparelhamento perfeito.

Teorema 3.4.1 (*Teorema de Tutte*) *Um grafo G tem um emparelhamento perfeito se, e somente se, $c_o(G - S) \leq |S|$ para qualquer $S \subseteq V(G)$.*

Prova: Se G possui um emparelhamento perfeito, então $\text{def}(G) = 0$. Assim, pela Proposição 3.2.2, temos que $c_o(G - S) \leq |S|$ para qualquer $S \subseteq V(G)$.

Agora vamos provar, por indução em $|V(G)|$, que se $c_o(G - S) \leq |S|$, para qualquer $S \subseteq V(G)$, então G possui um emparelhamento perfeito. É fácil notar que $|V(G)|$ é par, pois se $S = \emptyset$, então $c_o(G) = c_o(G - S) \leq |S| = 0$. Seja B um subconjunto maximal de $V(G)$ tal que $c_o(G - B) = |B|$. A existência de B é garantida pelo fato do conjunto vazio, assim como qualquer conjunto formado por apenas um vértice de $V(G)$, satisfazer a condição necessária. É importante mostrar que:

1. $G - B$ não possui componentes pares. Suponha, por contradição, que C seja um componente par de $G - B$. Seja $B' := B \cup \{v\}$, onde v é um vértice qualquer de C . Como C é par, $C - v$ possui um ou mais componentes ímpares. Logo, $c_o(G - B') \geq c_o(G - B) + 1 = |B| + 1 = |B'|$. Por outro lado, como $c_o(G - S) \leq |S|$ para qualquer $S \subseteq V(G)$, temos que $c_o(G - B') = |B'|$ e $|B'| > |B|$, contrariando a afirmação de que B é maximal.
2. Cada componente (ímpar) de $G - B$ é crítico. Suponha, por contradição, que H seja um componente ímpar não crítico de $G - B$. Então existe um vértice $v \in V(H)$ tal que $H' := H - v$ não possui emparelhamento perfeito. Pela hipótese de indução, temos que existe um subconjunto $T \subseteq V(H')$ tal que $c_o(H' - T) > |T|$. Se $c_o(H' - T) = |T| + 1$, então chegamos à contradição de que $|V(H')|$ é ímpar. Assim, temos

que $c_o(H' - T) \geq |T| + 2$. Se $c_o(H' - T) > |T| + 2$, então, para o conjunto $S = B \cup T \cup \{v\}$, temos que

$$\begin{aligned} c_o(G - S) &= c_o(G - B) - 1 + c_o(H' - T) \\ &> |B| - 1 + |T| + 2 \\ &= |B| + |T| + 1 \\ &= |B \cup T \cup \{v\}| \\ &= |S|, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Por outro lado, se $c_o(H' - T) = |T| + 2$, então, para o conjunto $S = B \cup T \cup \{v\}$, temos que

$$\begin{aligned} c_o(G - S) &= c_o(G - B) - 1 + c_o(H' - T) \\ &= |B| - 1 + |T| + 2 \\ &= |B| + |T| + 1 \\ &= |B \cup T \cup \{v\}| \\ &= |S|, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois B é maximal.

Sejam H_1, H_2, \dots, H_b os componentes ímpares de $G - B$, onde $b = |B|$ (Figura 3.6).

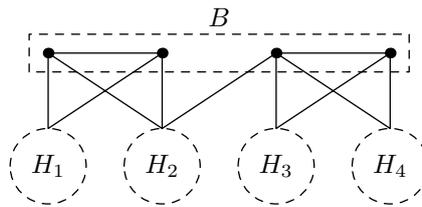


Figura 3.6: Componentes H_1, H_2, H_3 e H_4 de $G - B$.

Considere o grafo J obtido, a partir de G , através da remoção de todas as arestas que incidem em dois vértices de B , e onde cada componente ímpar H_i , $1 \leq i \leq b$, de $G - B$ foi contraído a um único vértice (Figura 3.7). É fácil ver que J é um grafo bipartido com bipartição (X, B) , onde X é o conjunto de vértices resultantes das contrações de cada H_i .

Agora podemos afirmar que J possui um emparelhamento que satura cada vértice de X , pois, caso contrário, pelo Teorema 3.3.1, temos que existe

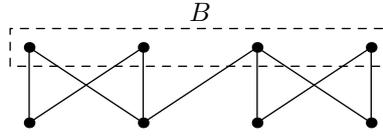


Figura 3.7: Grafo J obtido a partir de G .

um subconjunto T de X tal que $N_J(T) < |T|$. Então, para o conjunto $S = N_J(T)$, temos que $c_o(G - S) > |S|$, o que é uma contradição. Como $|X| = |B|$, temos que J possui emparelhamento perfeito.

Seja $M := \{e_1, e_2, \dots, e_b\}$ um emparelhamento perfeito de J . Note que M é um emparelhamento em G . Note também que cada aresta e_i , $1 \leq i \leq b$, incide em um componente H_i distinto de $G - B$. Fixemos a notação de tal forma que, para $1 \leq i \leq b$, e_i incide em um vértice v_i de H_i e M_i é um emparelhamento perfeito de $H_i - v_i$.

É fácil ver que $M \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_b$ é um emparelhamento perfeito de G . ■

3.5 O teorema estrutural de Gallai-Edmonds

Dentre os subconjuntos de vértices de um grafo G , existe um conjunto especial, chamado de conjunto Gallai-Edmonds, que serve de base para uma decomposição muito interessante de G . Essa decomposição particiona $V(G)$ em três subconjuntos: $D(G)$, $A(G)$ e $C(G)$, onde $D(G)$ é o conjunto de vértices que são insaturados por algum emparelhamento máximo de G , $A(G)$ denota o conjunto formado pelos vértices de $V(G) - D(G)$ adjacentes aos vértices de $D(G)$, e $C(G) = V(G) - A(G) - D(G)$, como ilustrado na Figura 3.8.

Seja $S \subseteq V(G)$. Denotaremos por $\langle G, S \rangle$ o grafo bipartido obtido, a partir de G , através da remoção dos vértices dos componentes pares de $G - S$, remoção das arestas que incidem em dois vértices de S e contração de cada componente ímpar de $G - S$. Agora, finalmente, podemos dizer que S é um conjunto *Gallai-Edmonds* de G se:

- (a) os componentes pares de $G - S$, caso existam, possuem emparelhamento perfeito;
- (b) os componentes ímpares de $G - S$, caso existam, são críticos; e
- (c) se $S \neq \emptyset$, então $|N(T)| > |T|$ em $\langle G, S \rangle$ para qualquer subconjunto não vazio T de S .

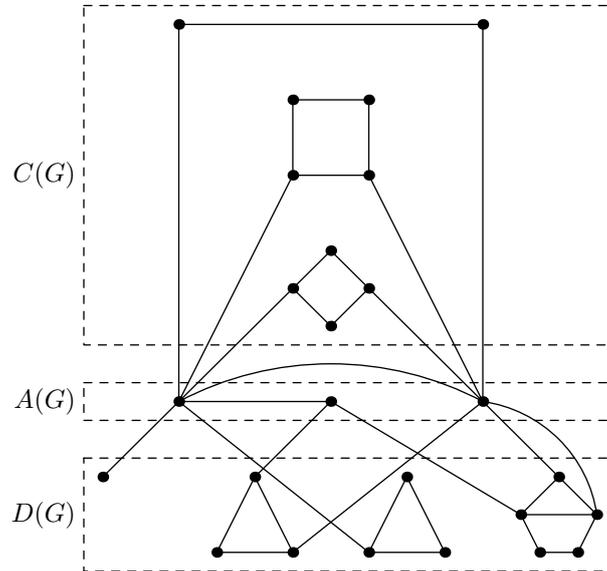


Figura 3.8: Decomposição Gallai-Edmonds S .

Outras características importantes de um conjunto Gallai-Edmonds são dadas pelo Teorema 3.5.1, conhecido como Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds. Esse teorema garante que qualquer grafo possui um conjunto Gallai-Edmonds e exhibe a decomposição Gallai-Edmonds a partir desse conjunto.

Teorema 3.5.1 (*Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds*)

- (i) todo grafo G possui um conjunto Gallai-Edmonds S ;
- (ii) cada emparelhamento máximo de G contém um emparelhamento quase-perfeito de cada componente ímpar de $G - S$, um emparelhamento perfeito de cada componente par de $G - S$, e conecta todos os vértices de S a vértices em componentes ímpares distintos de $G - S$; e
- (iii) $A(G) = S$. Em particular, G possui um único conjunto Gallai-Edmonds.

Prova: (Realizada por Kotlov em [Kot00]) Dentre os subconjuntos de vértices de G que maximizam $\text{df}(S)$, onde $\text{df}(S) := c_o(G - S) - |S|$, seja S o subconjunto que minimiza $\text{Df}(S)$, onde $\text{Df}(S)$ representa o número total de vértices em componentes de $G - S$ que não possuem emparelhamento perfeito. A prova a seguir, feita por indução em $|V(G)|$, mostra que S é um conjunto Gallai-Edmonds.

Suponha, por contradição, que C seja um componente par de $G - S$ e que C não possua emparelhamento perfeito. Fixe um vértice $v \in C$ e defina $S' = S \cup \{v\}$. Então $\text{df}(S') \geq \text{df}(S)$ enquanto $\text{Df}(S') < \text{Df}(S)$. Essa contradição mostra que S satisfaz (a).

Suponha, por contradição, que v seja um vértice em um componente ímpar C de $G - S$ e que $C - v$ não possua emparelhamento perfeito. Por indução, o grafo $H := C - v$ tem um conjunto Gallai-Edmonds T . Em particular, $\text{df}_H(T) \geq 2$, pois H é par e não possui emparelhamento perfeito. Defina $S' := S \cup T \cup \{v\}$. Então

$$\begin{aligned} \text{df}(S') &= c_o(G - S') - |S'| \\ &= [c_o(G - S) - 1 + c_o(H - T)] - [|S| + |T| + 1] \\ &= (c_o(G - S) - |S|) + (c_o(H - T) - |T|) - 2 \\ &= \text{df}(S) + \text{df}_H(T) - 2 \\ &\geq \text{df}(S). \end{aligned}$$

Como $\text{Df}(S') < \text{Df}(S)$, chegamos a uma contradição. Logo, S satisfaz (b).

Agora suponha, por contradição, que exista um subconjunto não vazio T de S tal que $|N(T)| \leq |T|$ em $\langle G, S \rangle$. Considere um menor conjunto T com essa propriedade. Defina $S' := S - T$. Se T consiste de um único vértice sem vizinhos em $\langle G, S \rangle$, então chegamos à contradição de que $\text{df}(S') < \text{df}(S)$ em G (Figura 3.9). Portanto, $|T| \geq 2$ ou $|T| = 1$ e T possui um único vizinho em $\langle G, S \rangle$.

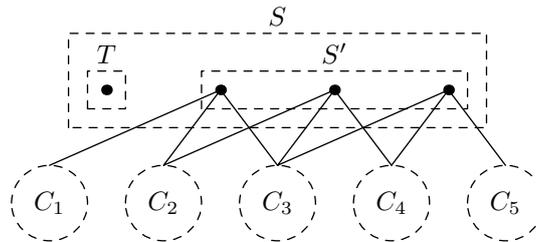


Figura 3.9: Um subconjunto unitário T de S e os componentes ímpares C_1, \dots, C_5 de $G - S$.

Agora devemos mostrar que $|N(T)| = |T|$, mesmo se $|T| \geq 2$. Suponha, por contradição, que $|N(T)| < |T|$. Então existe um subconjunto não vazio $T' := T - v$, onde v é um vértice qualquer de T , tal que $|N(T')| \leq |T'|$ e $|T'| < |T|$, o que contradiz a escolha de T (Figura 3.10).

Assim, por (b) e pelo Teorema de Hall (Teorema 3.3.1), temos que $T \cup N(T)$ é um componente par de $G - S'$ que possui emparelhamento perfeito. Conseqüentemente, $\text{df}(S') = \text{df}(S)$ e $\text{Df}(S') < \text{Df}(S)$, o que é uma contradição

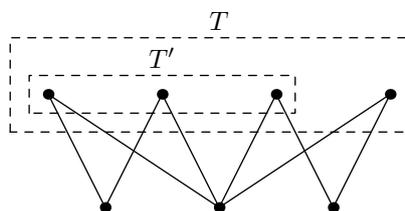


Figura 3.10: Um subconjunto T' de T em $\langle G, S \rangle$.

(Figura 3.11). Portanto, S satisfaz (c). Como S satisfaz (a), (b) e (c), então S satisfaz (i).

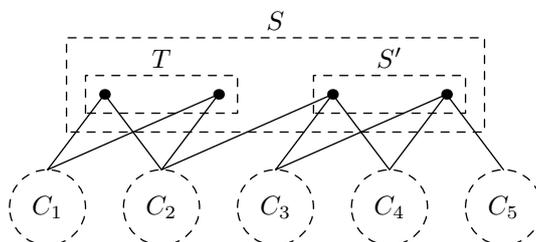


Figura 3.11: Um subconjunto T de S e os componentes ímpares C_1, \dots, C_5 de $G - S$.

Seja agora S um conjunto Gallai-Edmonds, e seja v um vértice de um componente ímpar C de $G - S$. Por (c) e pelo Teorema de Hall, S pode ser emparelhado com vértices em componentes ímpares distintos de $G - S$ diferentes de C . Por (a) e (b), esse emparelhamento pode ser aumentado por emparelhamentos perfeitos nos componentes pares de $G - S$ e emparelhamentos quase-perfeitos nos componentes ímpares de $G - S$. Dessa forma obtemos um emparelhamento M que evita v e, como M deixa $\text{df}(S)$ vértices expostos, pela Proposição 3.2.2, M é máximo. Portanto (ii) e (iii) seguem imediatamente. ■

Agora que conhecemos o Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds, podemos ilustrar facilmente uma fórmula para o cálculo de $\text{def}(G)$. Essa fórmula é conhecida como Fórmula de Berge e é descrita no Teorema 3.5.2.

Teorema 3.5.2 (*Fórmula de Berge*) $\text{def}(G) = \max\{c_o(G - X) - |X| : X \subseteq V(G)\}$.

Prova: Pelo Teorema 3.5.1, temos que existe um subconjunto $X := A(G)$ para o qual a igualdade é válida, ou seja, $\text{def}(G) = c_o(G - X) - |X|$. Agora, pela Proposição 3.2.2, temos que, para qualquer subconjunto $Y \subseteq V(G)$, $c_o(G - Y) - |Y| \leq \text{def}(G) = c_o(G - X) - |X|$. ■

3.6 Encontrando um emparelhamento máximo

O primeiro algoritmo polinomial conhecido para encontrar emparelhamento máximo em um grafo foi proposto por Edmonds [Edm65]. As idéias fundamentais desse algoritmo são: a contração de ciclos ímpares e a busca por caminhos aumentantes.

O Algoritmo de Edmonds é iniciado com um emparelhamento M , possivelmente vazio, e é fácil notar porque ele se preocupa em encontrar um caminho M -aumentante, pois a busca por caminhos M -aumentantes, como visto na Seção 3.2, nos garante:

- concluir que M é máximo, caso não exista um caminho M -aumentante; ou
- aumentar a cardinalidade de M , caso exista um caminho M -aumentante.

Podemos explicar a razão pela qual o algoritmo se preocupa em contrair certos ciclos ímpares como uma forma de facilitar a busca por caminhos aumentantes. O Lema 3.6.1 nos ajuda a entender o propósito das contrações.

Lema 3.6.1 *Seja M um emparelhamento em um dado grafo G . Seja Z um ciclo ímpar em G com $2k + 1$ arestas, sendo k arestas de M e um vértice M -insaturado em G . Construa um novo grafo G' , a partir de G , através da contração de Z a um simples vértice. Então $M' := M - E(Z)$ é um emparelhamento máximo em G' se, e somente se, M é um emparelhamento máximo em G .*

Prova: Suponha que M não seja um emparelhamento máximo em G . Então, existe um caminho M -aumentante P em G e, pelo Teorema de Berge (Teorema 3.2.1), se P é disjunto de Z , então M' não é máximo em G' , pois P também é um caminho M' -aumentante em G' . Então suponha que vértices de Z estejam em P . Ao menos um dos dois vértices finais de P , digamos x , não está em Z . Começando em x um percurso no caminho P , seja z o primeiro vértice de Z encontrado nesse percurso (Figura 3.12.a). Então o sub-caminho de P , com início em x e término em z , é um caminho M' -aumentante em G' (Figura 3.12.b). Portanto, pelo Teorema de Berge, M' não é máximo em G' .

Assuma agora que M' não seja um emparelhamento máximo em G' e seja Q' um emparelhamento em G' tal que $|Q'| > |M'|$. Então Q' corresponde

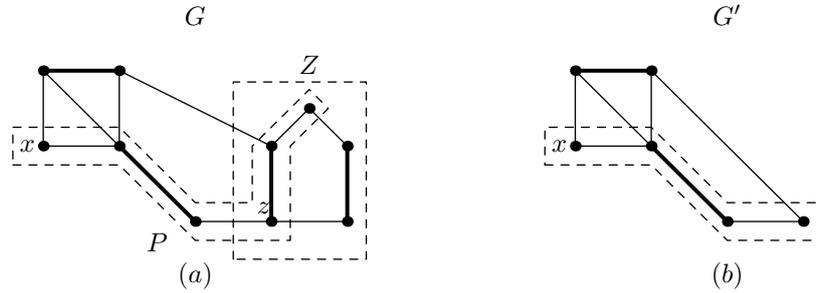


Figura 3.12: (a) um caminho M -aumentante P em G e (b) um caminho M' -aumentante em G' .

a um emparelhamento em G que satura no máximo um vértice de Z . Mas então Q' pode ser aumentado em G , usando k arestas de Z , para dar origem a um emparelhamento Q tal que $|Q| = |Q'| + k > |M'| + k = |M|$. Portanto M não é máximo em G . ■

Ainda com base no Lema 3.6.1, podemos notar que se M' não é máximo em G' , então podemos concluir que M não é máximo em G e, facilmente, encontrar um emparelhamento maior que M em G .

Descrevemos agora, de maneira informal, o Algoritmo de Emparelhamento Máximo de Edmonds. Essa descrição nos permite exibir com maior clareza suas principais características e, dessa forma, ilustrar o que já foi dito até aqui sobre o mesmo.

Suponha que temos um grafo G no qual encontramos um emparelhamento M . Se M é perfeito, então não temos nada a fazer. Então suponha que o conjunto S de vértices M -insaturados não seja vazio. Construa uma floresta F tal que cada componente conexo de F contenha exatamente um vértice de S , cada vértice de S pertença a exatamente um componente de F , e cada aresta de F , que esteja a uma distância ímpar de um vértice de S , esteja em M (Figura 3.13).

Segue então que cada vértice de F que está a uma distância ímpar de S tem grau 2 em F . Tais vértices são chamados *internos*, enquanto os demais vértices de F são chamados *externos*. Em particular, todos os vértices de S são externos. Tal floresta é chamada uma floresta M -alternante. Claramente, a floresta formada apenas pelos vértices de S , sem arestas, é uma floresta M -alternante.

A seguir, analisamos os vizinhos dos vértices externos. Se encontrarmos um vértice externo x , adjacente a um vértice y que não está em F , como ilustrado na Figura 3.14, então, como y não pertence a S , existe uma aresta $yz \in M$. Logo, a floresta $F' := F + xy + yz$ passa a ser uma floresta M -

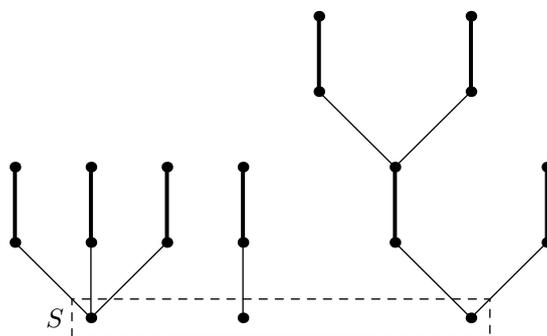


Figura 3.13: Uma floresta alternante F .

alternante maior que F , como ilustrado na Figura 3.15.

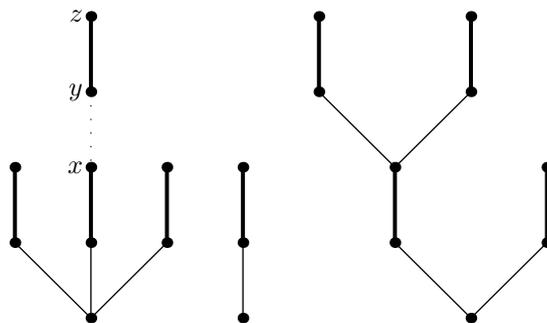


Figura 3.14: Um vértice y que não está na floresta F .

Se F tem dois vértices externos x e y , que pertencem a diferentes árvores de F , e que são adjacentes em G , então as raízes dessas duas árvores são conectadas por um caminho M -aumentante consistindo de xy e os únicos caminhos partindo de x e y com destino às raízes de cada árvore, como ilustrado na Figura 3.16.

Então o caminho M -aumentante encontrado pode ser facilmente utilizado para obter um emparelhamento M' maior que M . Agora basta recomeçarmos o algoritmo usando o emparelhamento M' .

Se F tem dois vértices externos x e y , que pertencem a mesma árvore, e que são adjacentes em G , como ilustrado na Figura 3.17, então considere o ciclo C formado pela aresta xy e pelo caminho de x a y em F . Nesse caso, podemos contrair C a um único vértice v , rotular v como externo, e continuar a construção de F .

Agora, vamos explicar o motivo pelo qual o circuito C pode ser contraído. Seja P o único caminho em F conectando C a uma raiz de F , como ilustrado na Figura 3.18. (Devemos considerar que se uma raiz está presente em C ,

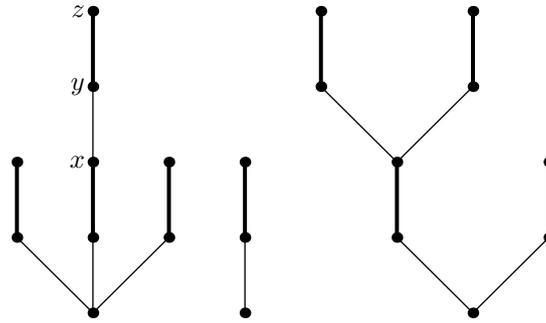


Figura 3.15: Uma floresta alternante F' .

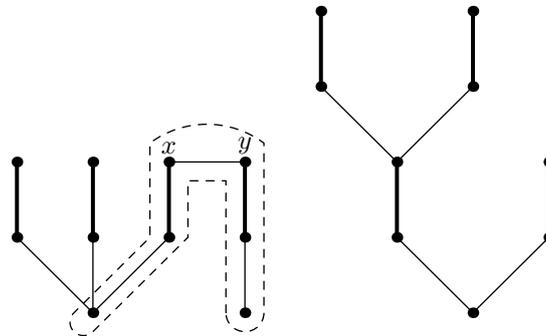


Figura 3.16: Um caminho M -aumentante encontrado a partir de F .

então P consiste de um único vértice.)

Claramente, P é um caminho M -alternante, portanto podemos retirar de M as arestas que estão em P e incluir em M as arestas de P que não faziam parte de M , assim obtemos um outro emparelhamento M_1 do mesmo tamanho de M , como ilustrado na Figura 3.19.

Mas, agora M_1 e C satisfazem as condições do Lema 3.6.1 e, se contrairmos C a um simples vértice para obter um novo grafo G' , como ilustrado na Figura 3.20, nós reduzimos a tarefa de procurar um caminho M -aumentante em G à tarefa de procurar um caminho M_2 -aumentante em G' , onde $M_2 = M_1 - E(C)$. Note que, após a contração de C , utilizamos, sem prejuízo para a execução do algoritmo, o emparelhamento $M - E(C)$ para encontrar a floresta alternante de G' , ao invés do emparelhamento M_2 .

Finalmente, se cada vértice externo tem somente vértices internos como vizinhos, então podemos provar que M é máximo em G . Suponha que F contenha m vértices internos e n vértices externos. Claramente, $n - m = |S|$. Além disso, se removermos todos os vértices internos de F , a partir de G , o grafo resultante conterá todos os vértices externos de F como vértices isolados. Logo $\text{def}(G) \geq n - m = |S|$. Mas M deixa exatamente $|S|$ vértices

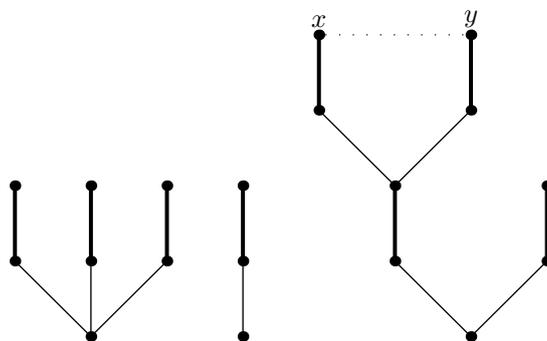


Figura 3.17: Vértices externos adjacentes de um mesmo componente de F .

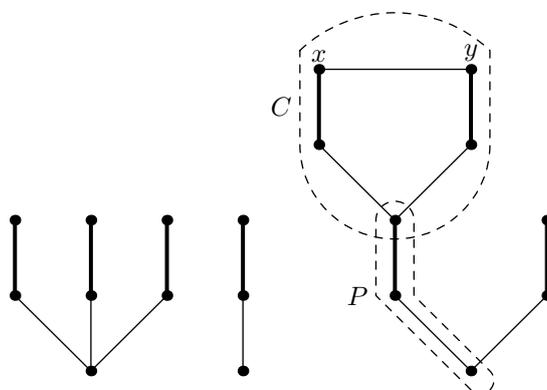


Figura 3.18: Um ciclo ímpar C encontrado a partir de F .

insaturados, portanto M é máximo.

Uma outra propriedade interessante da floresta alternante F é ilustrada na Proposição 3.6.2.

Proposição 3.6.2 *Seja G um grafo e considere uma aplicação do algoritmo de Edmonds para encontrar um emparelhamento máximo em G . Seja G' o grafo obtido no final de uma iteração qualquer do algoritmo. Então,*

- (i) *todo vértice de G' , rotulado como interno, é um vértice original de G ;*
- (ii) *todo vértice de G' corresponde a um subgrafo crítico de G .*

Prova: Como descrito anteriormente no algoritmo de Edmonds, quando um circuito ímpar é contraído a um vértice v , v é rotulado como externo. Logo, a afirmação (i) é verdadeira.

Agora, seja v um vértice de G' . Seja H o subgrafo de G correspondente a v . Vamos mostrar, por indução em $|V(H)|$, que H é crítico.

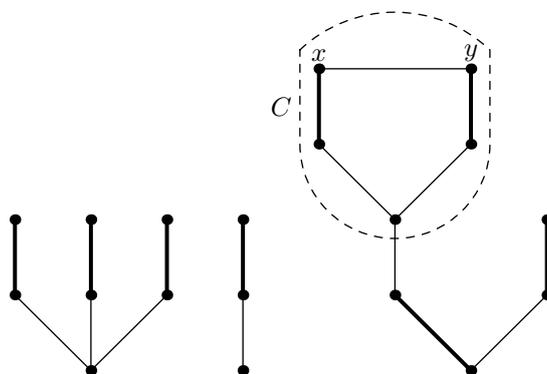


Figura 3.19: Encontrando um emparelhamento M_1 do mesmo tamanho que M .

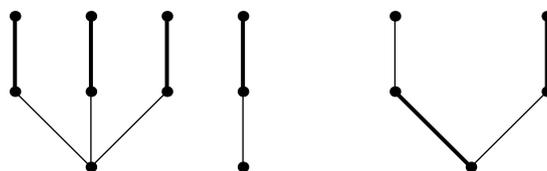


Figura 3.20: O Grafo G' obtido após a contração de C .

Se $H = v$, então, claramente, H é crítico. Então, suponha que v seja o vértice resultante da contração de um circuito ímpar $C := v_1v_2\dots v_n$. Considere também que, para $1 \leq j \leq n$, H_j seja o subgrafo de G correspondente a v_j . Pela hipótese da indução, temos que, para $1 \leq j \leq n$, H_j é crítico.

Seja u um vértice qualquer de H . Sem perda da generalidade, suponha que u pertença a H_1 . Como H_1 é crítico, $H_1 - u$ possui um emparelhamento perfeito M_1 . Seja $M := \{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-1}v_n\}$ um emparelhamento perfeito de $C - v_1$. Sejam u_2, u_3, \dots, u_n , respectivamente, os vértices de H_2, H_3, \dots, H_n que incidem nas arestas de M . Como H_j é crítico, para todo $2 \leq j \leq n$, $H_j - u_j$ possui um emparelhamento M_j . Assim, $M \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ é um emparelhamento perfeito de $H - u$. Como u é um vértice qualquer de H , temos que H é crítico. ■

A Proposição 3.6.3 nos dá um importante resultado sobre a complexidade do algoritmo de construção da floresta alternante. Para uma prova da Proposição 3.6.3, veja [Tar83].

Proposição 3.6.3 *Seja G um grafo e seja M um emparelhamento qualquer de G (M não precisa ser máximo). Então,*

- (i) *a construção da floresta alternante, pelo algoritmo de Edmonds, pode ser realizada em tempo $O(|E|)$; e*

(ii) se existe um caminho M -aumentante em G , então tal caminho pode ser encontrado em tempo $O(|E|)$.

A complexidade do Algoritmo de Edmonds, em sua versão original, é $O(|V|^4)$, mas existem versões em que a complexidade é $O(|V|^3)$. As complexidades dos algoritmos mais conhecidos para o problema de encontrar um emparelhamento máximo são ilustradas na Tabela 3.1.

| Algoritmo | Complexidade |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| Edmonds [Edm65] | $O(V ^4)$ |
| Witzgall e Zahn [WJ65] | $O(V ^3)$ |
| Balinski [Bal69] | $O(V ^3)$ |
| Gabow [Gab73] [Gab76], Lawler [Law76] | $O(V ^3)$ |
| Kameda e Munro [KM74] | $O(V \cdot E)$ |
| Even e Kariv [EK75], Kariv [Kar76] | $O(V ^{\frac{5}{2}})$ |
| Bartnik [Bar78] | $O(V ^{\frac{5}{2}})$ |
| Micali e Vazirani [MV80] | $O(V ^{\frac{1}{2}} \cdot E)$ |

Tabela 3.1: Complexidade dos algoritmos de emparelhamento máximo [LP86].

Capítulo 4

Grafos Elementares

4.1 Introdução

Seja G um grafo. Uma aresta $e \in E(G)$ é dita ser *admissível* se e pertence a um emparelhamento perfeito de G . Um grafo G é *elementar* se suas arestas admissíveis formam um subgrafo conexo.

Uma *barreira* de G é um conjunto $X \subseteq V(G)$ tal que $\text{def}(G) = c_o(G - X) - |X|$, ou seja, $c_o(G - X) = |X| + \text{def}(G)$, como ilustrado na Figura 4.1. Dizemos que uma barreira X de G é uma *barreira maximal* se não existe barreira X' de G tal que $X \subsetneq X'$.

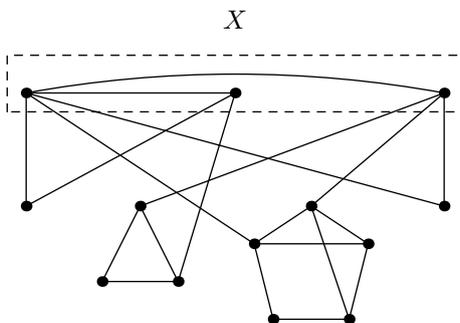


Figura 4.1: Uma barreira X .

Nesse capítulo exibimos as principais características dos grafos elementares bipartidos. Exibimos a decomposição em orelhas de grafos elementares bipartidos. Exibimos uma interessante relação de equivalência presente nos grafos elementares. Exibimos também as principais propriedades das barreiras de grafos elementares.

4.2 Grafos elementares bipartidos

Existem várias formas de caracterizarmos os grafos elementares bipartidos. O Teorema 4.2.1 ilustra algumas delas.

Teorema 4.2.1 *Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y) , então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) G é elementar;
- (ii) $|X| = |Y|$ e, para cada subconjunto próprio não vazio K de X , $N_G(K) \geq |K| + 1$; e
- (iii) para cada $x \in X, y \in Y$, $G - x - y$ possui emparelhamento perfeito.

Prova: (i) \Rightarrow (ii). Como G possui emparelhamento perfeito, claramente, $|X| = |Y|$. Suponha, por contradição, que exista um subconjunto próprio não vazio K de X tal que $N_G(K) \leq |K|$. Então $G - (K \cup N_G(K)) \neq \emptyset$. Claramente, cada emparelhamento perfeito de G conecta cada vértice de $N_G(K)$ a um vértice distinto de K , ou seja, nenhuma aresta admissível de G conecta $N_G(K)$ a $G - (K \cup N_G(K))$, contrariando a afirmação de que G é elementar.

(ii) \Rightarrow (iii). Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Seja $H := G - x - y$. Suponha, por contradição, que H não possua emparelhamento perfeito. Pelo Teorema de Hall (Teorema 3.3.1), temos que existe um subconjunto não vazio K de $X - x$ tal que $|N_H(K)| < |K|$. Por outro lado, temos que $|N_G(K)| \leq |N_H(K)| + 1 \leq |K|$, contrariando (ii).

(iii) \Rightarrow (i). Suponha, por contradição, que G não seja conexo. Seja G_1 um componente de G tal que $|V(G_1) \cap X| \leq |V(G_1) \cap Y|$. Seja $x \in V(G_1) \cap X$ e $y \in Y - V(G_1)$. Claramente, $G - x - y$ não possui emparelhamento perfeito, contradizendo (iii). Dessa forma, temos que G é conexo. Agora, seja $e := uv$ uma aresta arbitrária de G e seja M um emparelhamento perfeito de $G - u - v$. Claramente, $M \cup \{e\}$ é um emparelhamento perfeito de G contendo e . Como e é uma aresta arbitrária de G , temos que todas as arestas de G são admissíveis em G . ■

4.3 Decomposição em orelhas de grafos elementares bipartidos

Uma forma interessante de estudarmos a estrutura e as propriedades dos grafos elementares bipartidos é através de um tipo de decomposição, chamada decomposição em orelhas.

Seja G um grafo conexo. Uma *orelha simples* de G é um caminho P de comprimento ímpar em G , tal que seus vértices internos, caso existam, possuem grau dois em G . Se P é uma orelha simples de G , então denotaremos por $G - P$ o grafo obtido, a partir de G , através da remoção das arestas e dos vértices internos de P .

Seja G um grafo bipartido. Uma *decomposição em orelhas* de G é uma seqüência $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_r = G$ de subgrafos de G , onde $G_1 = K_2$ e, para $2 \leq i \leq r$, $G_{i-1} = G_i - P_i$, onde P_i é uma orelha simples de G_i , como ilustrado na Figura 4.2. Note que cada subgrafo da seqüência é um subgrafo bipartido central. Geralmente, usamos a notação $G = e + P_2 + \dots + P_r$ para denotar uma decomposição em orelhas bipartida.

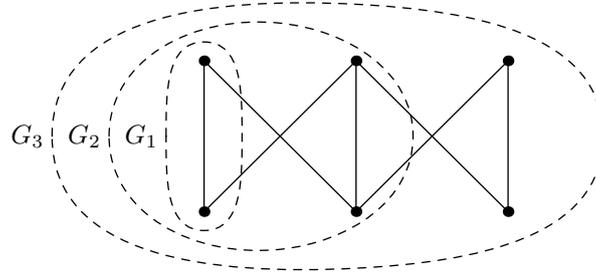


Figura 4.2: Uma decomposição em orelhas bipartida.

O Teorema 4.3.1 ilustra uma maneira interessante de caracterizarmos os grafos bipartidos elementares.

Teorema 4.3.1 *Um grafo bipartido G é elementar se, e somente se, G possui uma decomposição em orelhas bipartida.*

Prova: Primeiro assumamos que $G := e + P_2 + \dots + P_r$ seja uma decomposição em orelhas bipartida, onde e é uma aresta de G e, para $2 \leq i \leq r$, P_i é uma orelha de G_i . Devemos mostrar, por indução no número de orelhas, que G é elementar. Se $G = e$, então, claramente, G é elementar. Se $r = 2$, então G é um ciclo par e, portanto, elementar. Agora suponhamos que $G_{j-1} := e + P_2 + \dots + P_{j-1}$ seja elementar, para $j \leq r$. Devemos mostrar que $G_j := G_{j-1} + P_j$, onde $P_j := v_0v_1 \dots v_{2n+1}$, também é elementar.

Seja $f := xy$ uma aresta arbitrária de G_{j-1} . Como, pela hipótese da indução, G_{j-1} é elementar, temos, pelo Teorema 4.2.1, que $G_{j-1} - x - y$ possui emparelhamento perfeito, logo, existe um emparelhamento perfeito M de G_{j-1} tal que $f \in M$. Claramente, $M \cup \{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{2n-1}v_{2n}\}$ é um emparelhamento de G_j que contém f . Como f é uma aresta arbitrária de G_{j-1} , temos que todas as arestas de G_{j-1} são admissíveis em G_j . Como P_j é uma

orelha ímpar, seus extremos v_0 e v_{2n+1} pertencem a partes distintas de G_{j-1} . Então, novamente pelo Teorema 4.2.1, temos que $G_{j-1} - v_0 - v_{2n+1}$ possui um emparelhamento perfeito M' . Claramente, $M' \cup \{v_0v_1, v_2v_3, \dots, v_{2n}v_{2n+1}\}$ é um emparelhamento perfeito de G_j . Como todas as arestas de G_{j-1} são admissíveis em G_j e $M \cup M'$ contém todas as arestas de P_j , temos que G_j é elementar.

Por outro lado, suponha que G seja um grafo elementar bipartido. Assuma G_1 como sendo qualquer aresta e de G . Seja M_e um emparelhamento perfeito de G contendo e . Se $G_1 \neq G$, então seja f uma aresta adjacente a e e M_f um emparelhamento perfeito de G contendo f . Então, o componente de $M_e \cup M_f$, que contém e e f , é um ciclo par $C := e + P_2$. Assim, temos nossa primeira orelha e $G_2 := G_1 + P_2$ (Figura 4.3).

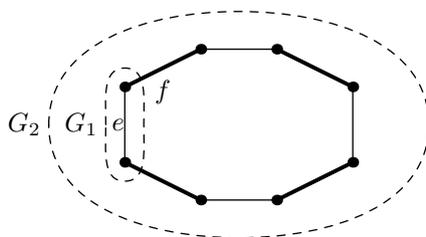


Figura 4.3: Uma orelha simples de G_2 .

Se $G_2 = G$, então não temos mais nada a fazer. Então, como G é conexo, existe ao menos uma aresta $g := xy$ em $E(G) - E(G_2)$ incidindo em um vértice, digamos x , de G_2 . Seja M_g um emparelhamento perfeito de G contendo g . Defina P_3 como sendo o caminho alternante em $M_e \cup M_g$ que começa em x , atravessa $M_e \cup M_g$, passando por g , e termina no primeiro vértice encontrado no retorno a G_2 . P_3 é nossa segunda orelha e, repetindo o processo, claramente, podemos continuar encontrando orelhas até obtermos uma decomposição em orelhas de G . ■

4.4 Algoritmo para decomposição em orelhas de grafos elementares bipartidos

A decomposição em orelhas de grafos elementares bipartidos é bastante simples, como ilustrado na Tabela 4.1. Com exceção do passo (0), este algoritmo pode ser executado em tempo $O(|E|)$ [CC05].

| |
|---|
| <p>entrada: um grafo elementar bipartido G. saída: uma decomposição P_1, \dots, P_l em orelhas de G.</p> <p>(0) encontre um emparelhamento perfeito M do grafo bipartido G com bipartição (A, B);</p> <p>(1) oriente todas arestas de M, de forma que elas fiquem com origem em A e término em B;</p> <p>(2) oriente as arestas de $E(G) - M$, de forma que elas fiquem com origem em B e término em A;</p> <p>(3) sejam e uma aresta arbitrária de M, $G_1 := G[\{e\}]$ e $i := 2$;</p> <p>(4) enquanto $G_{i-1} \neq G$, faça:</p> <p style="padding-left: 2em;">(4.1) seja P_i qualquer caminho orientado que tem somente os vértices inicial e final em G_{i-1};</p> <p style="padding-left: 2em;">(4.2) $G_i := G_{i-1} + P_i$;</p> <p style="padding-left: 2em;">(4.3) $i := i + 1$;</p> <p>(*4) fim (laço “enquanto”); PARE.</p> |
|---|

Tabela 4.1: Algoritmo para decomposição em orelhas de um grafo elementar bipartido.

4.5 Barreiras de um grafo elementar

Algumas das principais características de um grafo elementar (provavelmente as mais interessantes) estão relacionadas às suas barreiras.

A Proposição 4.5.1 e o Corolário 4.5.2 nos dão uma importante caracterização das arestas admissíveis de um grafo elementar G .

Proposição 4.5.1 *Seja G um grafo elementar e sejam u e v dois vértices de G . O grafo $G - u - v$ não possui emparelhamento perfeito se, e somente se, existe barreira em G contendo u e v .*

Prova: Seja B uma barreira em G contendo u e v . Considere $G' := G - u - v$ e $B' := B - u - v$. Assim, $c_o(G' - B') = c_o(G - B) = |B| > |B'|$, então, pelo Teorema de Tutte (Teorema 3.4.1), temos que $G - u - v$ não possui emparelhamento perfeito.

Por outro lado, se $G' = G - u - v$ não possui emparelhamento perfeito, então, como G possui emparelhamento perfeito, temos que $\text{def}(G') = 2$. Pela

Fórmula de Berge (Teorema 3.5.2), temos que existe um conjunto B' em G' tal que $c_o(G' - B') - |B'| = 2$. Logo, $B' \cup \{u, v\}$ é uma barreira em G contendo u e v . ■

Corolário 4.5.2 *Seja G um grafo elementar. Uma aresta $e := uv$ de G não é admissível em G se, e somente se, existe barreira em G contendo u e v .*

Prova: Se e não é admissível em G , então $G - u - v$ não possui emparelhamento perfeito, assim, pela Proposição 4.5.1, temos que existe barreira em G contendo u e v .

Por outro lado, se existe barreira em G contendo u e v , então, pela Proposição 4.5.1, temos que $G - u - v$ não possui emparelhamento perfeito, ou seja, e não é admissível em G . ■

Outras características interessantes das barreiras de um grafo elementar são ilustradas nas proposições 4.5.3 e 4.5.4, e nos lemas 4.5.5 e 4.5.6.

Proposição 4.5.3 *Seja G um grafo elementar e B uma barreira de G . Então cada componente de $G - B$ é ímpar.*

Prova: Suponha, por contradição, que exista um componente par C em $G - B$. Como G é elementar, temos que $\text{def}(G) = 0$. Por outro lado, como B é uma barreira de G , temos que $\text{def}(G) = c_o(G - B) - |B|$. Então, como $c_o(G - B) = |B|$, claramente, temos que todo emparelhamento perfeito de G conecta um vértice de B a um componente ímpar distinto de $G - B$. Assim, temos que nenhuma aresta admissível de G conecta C a B . Logo, as arestas admissíveis de G não formam um subgrafo conexo, contrariando a afirmação de que G é elementar. ■

Proposição 4.5.4 *Se B é uma barreira em um grafo elementar G , então $H := \langle G, B \rangle$ é elementar.*

Prova: Seja (B, Y) a bipartição de H . Pela Proposição 4.5.3, temos que cada emparelhamento perfeito de G conecta cada vértice de B a um componente distinto de $G - B$. Então, claramente, $|B| = |Y|$ e H possui emparelhamento perfeito. Agora, pelo item (ii) do Teorema 4.2.1, basta mostrarmos que $|N_H(K)| \geq |K| + 1$ para cada subconjunto próprio não vazio K de B .

Suponha, por contradição, que exista um subconjunto próprio não vazio K de B tal que $|N_H(K)| \leq |K|$. Como H possui emparelhamento perfeito, temos, pelo Teorema de Tutte (Teorema 3.4.1), que $|N_H(K)| \geq |K|$. Logo,

$|N_H(K)| = |K|$. Claramente, cada emparelhamento perfeito de H conecta cada vértice de K a um vértice distinto de $N_H(K)$. Assim, nenhuma aresta conectando $N_H(K)$ a $G - (K \cup N_H(K))$ é admissível em H . Como cada vértice de $N_H(K)$ representa a contração de um componente ímpar de $G - B$, temos que nenhuma aresta conectando tais componentes a $(B - K) \neq \emptyset$ é admissível em G . Logo, as arestas admissíveis de G não formam um subgrafo conexo, contrariando a afirmação de que G é elementar. ■

Lema 4.5.5 *Uma barreira B , de um grafo elementar G , é maximal se, e somente se, todos componentes de $G - B$ são críticos.*

Prova: A prova do Teorema de Tutte (Teorema 3.4.1) contém uma demonstração de que se B é uma barreira maximal, então todos os componentes de $G - B$ são críticos.

Por outro lado, suponha que todos os componentes de $G - B$ sejam críticos. Sejam x e y vértices arbitrários de B e $G - B$, respectivamente. Pela Proposição 4.5.4, temos que o grafo $H := \langle G, B \rangle$ é elementar. Seja Y o componente de $G - B$ que contém y e $z \in V(H)$ o vértice correspondente à contração de Y . Pelo Teorema 4.2.1, temos que $H - x - z$ possui um emparelhamento perfeito M . Seja M' um emparelhamento perfeito de $Y - y$. Claramente, o emparelhamento $M \cup M'$ pode ser aumentado por emparelhamentos quase-perfeitos nos componentes críticos de $G - B - Y$ para formar um emparelhamento perfeito em $G - x - y$. Então, pela Proposição 4.5.1, temos que não existe barreira em G contendo x e y , para quaisquer vértices x de B e y de $G - B$. Logo B é maximal. ■

Lema 4.5.6 *Seja G um grafo elementar. Sejam X e Y barreiras de G tais que $X \cap Y \neq \emptyset$. Se não existem arestas de G conectando $X - Y$ a $Y - X$, então $X \cap Y$ e $X \cup Y$ são barreiras em G .*

A única demonstração que conhecemos para o Lema 4.5.6 é apresentada em [LP86]. Como ela é um pouco extensa e envolvente, decidimos por não descrevê-la. Uma demonstração mais direta para este lema seria muito útil. O Corolário 4.5.7 generaliza o Lema 4.5.6.

Corolário 4.5.7 *Seja G um grafo elementar. Sejam S_1, S_2, \dots, S_r barreiras em G tais que $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_r \neq \emptyset$. Se, para quaisquer i e j tais que $1 \leq i < j \leq r$, nenhuma aresta de G conecta $S_i - S_j$ a $S_j - S_i$, então $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_r$ e $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r$ são barreiras em G .*

Prova: Pelo Lema 4.5.6, temos que $S_1 \cap S_2$ e $S_1 \cup S_2$ são barreiras em G . Agora, temos as barreiras $S_1 \cap S_2$ e S_3 . Novamente pelo Lema 4.5.6, temos que $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ e $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ também são barreiras em G . Similarmente, concluímos que $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_r$ e $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r$ são barreiras em G . ■

4.6 Uma importante relação de equivalência

Seja M um emparelhamento perfeito fixo em um grafo G . Um caminho M -alternante P é dito ser M -iniciado se sua aresta inicial está em M . Se sua aresta final também estiver em M , então P é dito ser M -terminado. Com base nesses conceitos, podemos ilustrar lemas 4.6.1 e 4.6.2 e, dessa forma, exibir algumas propriedades interessantes dos grafos elementares.

Lema 4.6.1 *Seja v um vértice de um grafo elementar G e M um emparelhamento perfeito de G . Então, para qualquer outro vértice $t \in V$, existe um caminho M -iniciado conectando v a t .*

Prova: Seja S o conjunto de vértices que inclui v e todos vértices que estão conectados a v através de caminhos M -iniciados. Suponha, por contradição, que $\bar{S} = V - S \neq \emptyset$. Então, como G é conexo, $\partial(S) \neq \emptyset$. Pela definição de S , temos que $\partial(S) \cap M = \emptyset$. Como G é elementar, existe um emparelhamento perfeito M' que contém uma aresta $e = st$ tal que $s \in S$ e $t \in \bar{S}$.

Seja C um ciclo que contém e e é subconjunto de $M \Delta M'$ (Figura 4.4). Como $\partial(S) \cap M = \emptyset$, temos que $\partial(S) \cap C \subseteq M'$. Como C possui vértices em S , temos que existe um caminho M -iniciado que conecta v a C . Seja P o menor desses caminhos (Figura 4.5).

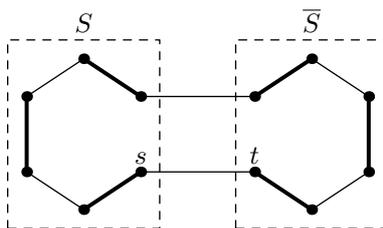


Figura 4.4: Um ciclo C de $M \Delta M'$ contendo a aresta $e = st$.

Logo chegamos a uma contradição, pois claramente $C \cup P$ possui um caminho M -iniciado que conecta v a algum vértice de \bar{S} (Figura 4.6). ■

Lema 4.6.2 *Sejam u e w quaisquer dois vértices de um grafo elementar G . Então $G - u - w$ tem um emparelhamento perfeito se, e somente se, existe um caminho M -terminado que conecta u a w .*

Prova: Se existe um caminho M -terminado P conectando u a w , então $M \triangle P$ é um emparelhamento perfeito em $G - u - w$.

Por outro lado, suponha que M' seja um emparelhamento perfeito de $G - u - w$. Então u e w são M' -insaturados em G . Seja $H := M \triangle M'$. Os componentes conexos de H são circuitos e caminhos com arestas alternadamente em M e M' . Como u e w são os únicos vértices M' -insaturados, o componente conexo de H que contém u é um caminho M -terminado que liga u a w . ■

Agora podemos apresentar o Teorema 4.6.3, que ilustra uma importante relação de equivalência presente nos grafos elementares.

Teorema 4.6.3 *Seja G um grafo elementar, e seja \sim uma relação binária em V , onde $u \sim v$ se $G - u - v$ não possui emparelhamento perfeito. Então a relação \sim é uma relação de equivalência em V .*

Prova: Claramente \sim é reflexiva e simétrica, então necessitamos apenas mostrar que \sim é transitiva. Suponha, por contradição, que $u \sim v$, $v \sim w$ e $u \not\sim w$, então, pelo Lema 4.6.2, existe um caminho M -terminado P que conecta u a w . Pelo Lema 4.6.1, temos que existe um caminho M -iniciado que conecta u a P . Seja Q o menor desses caminhos (Figura 4.7).

A partir de $P \cup Q$, podemos, claramente, encontrar um caminho M -terminado que conecta v a u ou v a w , mas como $u \sim v$ e $v \sim w$, pelo Lema 4.6.2, chegamos a uma contradição. ■

A Proposição 4.6.4 mostra que as classes de equivalência da relação \sim de um grafo elementar G são as barreiras maximais de G . A grande importância dessa proposição pode ser notada nas provas de alguns teoremas subsequentes, onde a utilizamos na criação de provas simples e diretas.

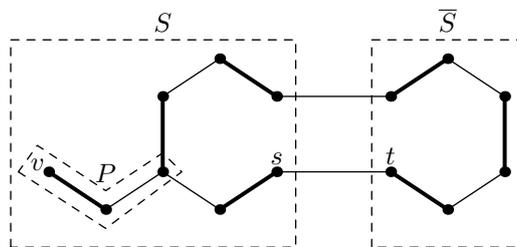


Figura 4.5: Um caminho M -iniciado conectando v a C .

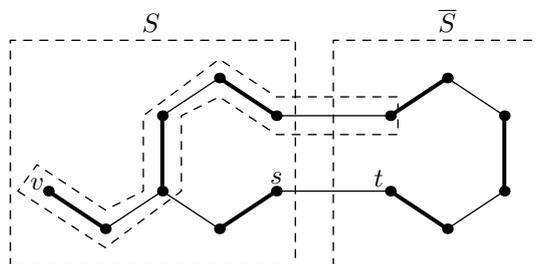


Figura 4.6: Um caminho M -iniciado conectando v a algum vértice de \bar{S} .

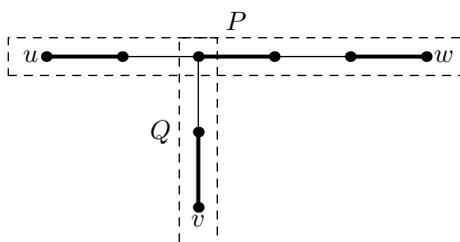


Figura 4.7: Um caminho M -iniciado Q ligando v ao caminho M -terminado P .

Proposição 4.6.4 *As classes de equivalência da relação \sim , em um grafo elementar G , são as barreiras maximais de G .*

Prova: Seja B uma barreira maximal de G . Pela Proposição 4.5.1 e pelo Teorema 4.6.3, $B \subseteq S$, para alguma classe de equivalência S da relação \sim .

Considere agora uma classe de equivalência S da relação \sim , e seja x um elemento de S . Então $\{x\}$ é uma barreira de G . Logo, existe uma barreira maximal B de G que contém x . Vamos mostrar que $S \subseteq B$. Para isto, é suficiente mostrar que $x \approx y$, para todo $y \in V(G) - B$.

Seja $y \in V(G) - B$. Então y pertence a algum componente Y de $G - B$. Pelo Lema 4.5.5, todos os componentes de $G - B$ são críticos. Logo, $Y - y$ possui um emparelhamento perfeito M_1 . Pela Proposição 4.5.4, o grafo bipartido $H := \langle G, B \rangle$ é elementar e, pelo Teorema 4.2.1, $H - x - z$ possui um emparelhamento perfeito M , onde z denota o vértice de H correspondente à contração do componente Y . O emparelhamento $M \cup M_1$ pode ser estendido por emparelhamentos quase-perfeitos dos demais componentes críticos de $G - B$ para formar um emparelhamento perfeito de $G - x - y$, o que significa que $x \approx y$, como queríamos demonstrar. ■

4.7 Partição canônica

A partição canônica de grafos elementares é uma importante ferramenta no estudo desse tipo de grafo. Nós definimos a *partição canônica* de um grafo elementar G como sendo $P(G) := \{S_1, \dots, S_k\}$, onde S_1, \dots, S_k são as barreiras maximais em G .

Algumas propriedades interessantes de uma partição canônica são ilustradas nas proposições 4.7.1 e 4.7.2.

Proposição 4.7.1 *Seja G um grafo elementar e e uma aresta que não está em G , mas que incide em dois vértices de G . Então $P(G + e)$ é um refinamento de $P(G)$, ou seja, para cada classe S' de $P(G + e)$, existe uma classe S de $P(G)$ tal que $S' \subseteq S$.*

Prova: Seja S' uma classe de $P(G + e)$. Se $|S'| = 1$, então S' é uma barreira de G e, claramente, S' está contida em uma barreira maximal S de $P(G)$. Então suponha que $|S'| > 1$. Sejam u e v dois vértices de S' . Pela Proposição 4.5.1, temos que $(G + e) - u - v$ não possui emparelhamento perfeito, então $G - u - v$ também não possui emparelhamento perfeito. Novamente pela Proposição 4.5.1, temos que u e v pertencem a uma mesma classe S de $P(G)$. Assim, pelo Teorema 4.6.3, temos que $S' \subseteq S$. ■

Proposição 4.7.2 *Seja G um grafo elementar distinto de K_2 e $e = xy$ uma aresta admissível de G . Se obtivermos um novo grafo G' , a partir da subdivisão de e , através da inserção de dois novos vértices u e v , tais que o caminho resultante, correspondente à subdivisão de e , seja $xuvy$, então as classes de $P(G')$ são as mesmas de $P(G)$, com exceção que u passará a fazer parte da classe de y e v passará a fazer parte da classe de x .*

Prova: Sejam w e z vértices de $V(G)$. Primeiro devemos provar que $w \sim z$ em G' se $w \sim z$ em G . Suponha, por contradição, que $w \sim z$ em G e $w \not\sim z$ em G' . Pelo Teorema 4.6.3, temos que existe um emparelhamento perfeito M em $G' - w - z$. Se $uv \in M$, então $M - \{uv\}$ é um emparelhamento perfeito de $G - w - z$, ou seja, chegamos à contradição de que $w \not\sim z$ em G . Então, suponha que $uv \notin M$. Conseqüentemente, as arestas xu e vy , claramente, estão em M . Então $M - \{xu, vy\} \cup \{e\}$ é um emparelhamento perfeito de $G - w - z$, o que, novamente, é uma contradição.

Agora devemos provar que $w \sim z$ em G' somente se $w \sim z$ em G . Se $w \not\sim z$ em G , então, pelo Teorema 4.6.3, temos que existe um emparelhamento perfeito M' de $G - w - z$. Se $e \in M'$, então, claramente, $w \not\sim z$ em G' , pois $(M' - \{e\}) \cup \{xu, vy\}$ é um emparelhamento perfeito de $G' - w - z$.

Por outro lado, se $e \notin M'$, então, claramente, $w \approx z$ em G' , pois $M' \cup \{uv\}$ é um emparelhamento perfeito de $G' - w - z$.

Agora vamos provar que u e v estão nas mesmas classes de y e x , respectivamente. Temos que $G' - x - v$ não possui emparelhamento perfeito, pois nenhuma aresta de $G' - x - v$ incide em u , ou seja, pelo Teorema 4.6.3, temos que $x \sim v$. Analogamente, temos que $y \sim u$. ■

Capítulo 5

Grafos Cobertos por Emparelhamentos

5.1 Introdução

Seja G um grafo. Se G é conexo e todas as suas arestas são admissíveis, G é dito ser *coberto por emparelhamentos*.

É fácil notar que todo grafo coberto por emparelhamentos é elementar. O inverso é sempre válido para grafos bipartidos, mas nem sempre é válido para grafos não bipartidos.

Nesse capítulo exibimos propriedades interessantes dos grafos cobertos por emparelhamentos. Exibimos a decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos. Encerramos esse capítulo com uma descrição detalhada sobre o algoritmo mais eficiente para decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos.

5.2 Propriedades dos grafos cobertos por emparelhamentos

Uma propriedade interessante dos grafos cobertos por emparelhamentos é ilustrada na Proposição 5.2.1.

Proposição 5.2.1 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos, $K \subseteq V(G)$ e G_1 e G_2 os grafos obtidos, a partir de G , através das contrações de K e $V(G) - K$ a vértices v_1 e v_2 , respectivamente. Se $|M \cap \partial(K)| = 1$, para cada emparelhamento perfeito M de G , então G_1 e G_2 são cobertos por emparelhamentos.*

Prova: Seja e uma aresta de G_1 . Como G é coberto por emparelhamentos, então existe um emparelhamento perfeito M de G contendo e . Como $|M \cap \partial(K)| = 1$, temos que $M \cap E(G_1)$ é um emparelhamento perfeito de G_1 contendo e . Portanto e é admissível em G_1 . Como e é uma aresta qualquer de G_1 , segue que G_1 é coberto por emparelhamentos. Analogamente, G_2 é coberto por emparelhamentos. ■

A Proposição 5.2.1 também serve de base para a introdução de outras características dos grafos cobertos por emparelhamentos, como as ilustradas no Lema 5.2.2.

Lema 5.2.2 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Seja $S \in P(G)$ e B uma barreira não trivial de G , tal que $B \subseteq S$. Seja K um componente de $G - B$ e G_1 e G_2 os grafos obtidos, a partir de G , através das contrações de $V(K)$ e $V(G) - V(K)$ a simples vértices v_1 e v_2 , respectivamente. Então:*

- (i) G_1 e G_2 são cobertos por emparelhamentos; e
- (ii) B é uma barreira de G_1 e $S \cap V(G_1)$ é a barreira maximal de G_1 que contém B .

Prova: Seja $C = \partial(V(K))$. Como B é uma barreira de G , é claro que $|M \cap C| = 1$ para cada emparelhamento perfeito M de G . Pela proposição 5.2.1, temos que G_1 e G_2 são cobertos por emparelhamentos, satisfazendo (i).

Cada componente de $G - B - V(K)$ é também um componente de $G_1 - B$. Além disso, o vértice v_1 é um componente trivial de $G_1 - B$. Dessa forma, $G_1 - B$ tem precisamente $|B|$ componentes ímpares. Logo, B é uma barreira em G_1 . Seja B_1 a barreira maximal de G_1 que contém B . Devemos mostrar que $B_1 = S \cap V(G_1)$.

É fácil verificar que v_1 não pertence a B_1 , pois, caso contrário, pela Proposição 4.5.1, as arestas de G_1 que conectam v_1 a vértices de B não seriam admissíveis em G_1 , contrariando a afirmação de que G_1 é coberto por emparelhamentos.

Seja u um vértice de B . Então $u \in S \cap B_1$. Agora mostraremos que $B_1 \subseteq (S \cap V(G_1))$. Suponha que exista um vértice $w \in B_1$ que não esteja em S . Como $v_1 \notin B_1$, u e w são distintos de v_1 (Figura 5.1).

Sejam $G' = G - u - w$ e $B'_1 = B_1 - \{u, w\}$. Então $G' - B'_1$ possui $|B_1| > |B'_1|$ componentes ímpares. Assim, pelo Teorema 3.4.1, temos que G' não possui emparelhamento perfeito. Por outro lado, como $u \in S$ e $w \notin S$, temos que G' possui emparelhamento perfeito, o que é uma contradição. Portanto, $B_1 \subseteq (S \cap V(G_1))$.

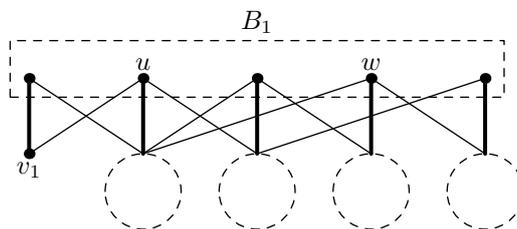


Figura 5.1: Vértices u, w e v_1 em G_1 .

Agora assumamos que $w \in ((S \cap V(G_1)) - B_1)$. Então, como $u \in B_1$ e $w \notin B_1$, temos, pelo Teorema 4.6.3, que $G_1 - u - w$ possui um emparelhamento perfeito M_1 . Denote por e a aresta de M_1 que incide em v_1 . Como G_2 é coberto por emparelhamentos, denote por M_2 um emparelhamento perfeito de G_2 que contém e . Então $M_1 \cup M_2$ é um emparelhamento perfeito de $G - u - w$. Por outro lado, como $\{u, w\} \subseteq S$, temos, pelo Teorema 4.6.3, que $G - u - w$ não possui emparelhamento perfeito, o que é uma contradição. Logo $((S \cap V(G_1)) - B_1) = \emptyset$ e, portanto, $B_1 = S \cap V(G_1)$. ■

5.3 Decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos

Decomposições em orelhas de grafos não bipartidos cobertos por emparelhamentos são mais complicadas que as similares em grafos bipartidos. A diferença básica é que, em grafos não bipartidos, não temos a garantia de que a adição de uma orelha simples, a cada passo, irá gerar grafos intermediários centrais cobertos por emparelhamentos. Apesar disso, enunciaremos o conceito de orelha dupla e, dessa forma, poderemos enunciar um tipo de decomposição em orelhas de grafos não bipartidos cobertos por emparelhamentos, onde cada grafo intermediário é central coberto por emparelhamentos.

Uma *orelha dupla* de um grafo não bipartido coberto por emparelhamentos é um par (P_1, P_2) , onde P_1 e P_2 são duas orelhas simples de G que são disjuntas nos vértices. Uma *orelha* de G é uma orelha simples ou uma orelha dupla de G . Se R é uma orelha de G , então denotaremos por $G - R$ o grafo obtido, a partir de G , através da remoção das arestas e dos vértices internos da(s) orelha(s) simples de R .

Uma *decomposição em orelhas* de um grafo coberto por emparelhamentos G é uma seqüência $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_r = G$ de subgrafos cobertos por emparelhamentos de G , onde $G_1 = K_2$ e, para $2 \leq i \leq r$, $G_{i-1} = G_i - R_i$, onde

R_i é uma orelha (simples ou dupla) de G_i , como ilustrado na Figura 5.2.

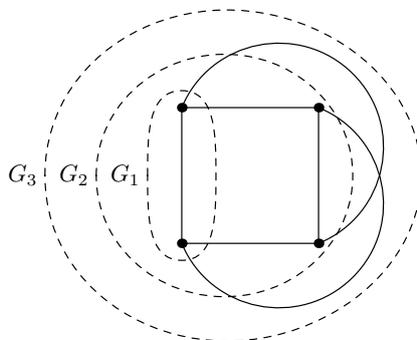


Figura 5.2: Uma decomposição em orelhas.

5.4 O teorema de Lovász e Plummer

Todo grafo G coberto por emparelhamentos admite uma decomposição em orelhas. Essa importante caracterização de grafos cobertos por emparelhamentos, ilustrada no Teorema 5.4.6, foi demonstrada por Lovász e Plummer em [LP86]. A prova que apresentamos aqui, de autoria de Carvalho e Cheriyan [CC05], serve como base para o algoritmo que descrevemos na Seção 5.5. A principal característica dessa prova é a ilustração do processo necessário para encontrar uma orelha dupla que pode ser adicionada a um grafo intermediário G_i , quando nenhuma orelha simples puder ser adicionada a G_i .

Agora descreveremos os conceitos básicos para a realização de uma busca por uma orelha dupla, mas antes é bom notar que um grafo $H + P_1 + \dots + P_k$ é coberto por emparelhamentos se, e somente se, $H + e_1 + \dots + e_k$ é coberto por emparelhamentos, onde $P_1 + \dots + P_k$ são orelhas que podem ser adicionadas a H e cada aresta e_i ($1 \leq i \leq k$) é uma aresta que incide nos vértices inicial e final de P_i .

Seja H um grafo coberto por emparelhamentos. Seja $R = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, onde $k > 2$, o conjunto de arestas que não estão em H , mas que incidem somente em vértices de H , e que $G = H + R$ é coberto por emparelhamentos. Suponha que não seja possível adicionar uma orelha simples a H , ou seja, não existe emparelhamento perfeito em $H + e_i$ contendo e_i . Pela Proposição 4.5.1, temos que cada aresta e_i de R incide em dois vértices que pertencem à mesma barreira maximal de H . Agora podemos enunciar o Lema 5.4.1, que é de grande importância na busca por uma orelha dupla.

Lema 5.4.1 *Seja $S \in P(H)$. Suponha que exista precisamente uma aresta $e_k = xy$ em R , tal que x e y sejam vértices de S . Então existe uma aresta $e_i \in R - e_k$ tal que $H + e_i + e_k$ é coberto por emparelhamentos.*

Prova: Suponha, por contradição, que, para cada $i = 1, 2, \dots, k-1$, não exista emparelhamento perfeito contendo e_k em $H + e_i + e_k$. Assim, pelo Teorema 4.6.3, temos que x e y pertencem à mesma classe $S_i \in P(H + e_i)$. Como $\{x, y\} \subseteq S$, temos, pela Proposição 4.7.1, que $S_i \subseteq S$. Além disso, como e_k é a única aresta de R que incide em dois vértices de S_i , e S_i é uma barreira de $H + e_i$, a aresta e_i incide em vértices de um mesmo componente de $H - S_i$ (Figura 5.3). Portanto, S_i é uma barreira de H .

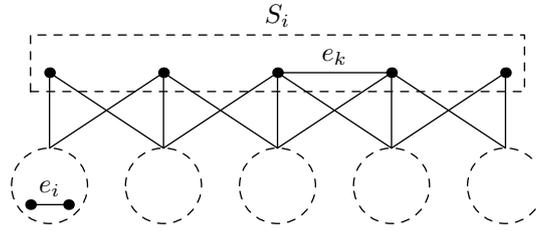


Figura 5.3: Arestas e_i e e_k e a barreira S_i em $H + e_i + e_k$.

Agora, seja $I = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{k-1}$. Como $\{x, y\} \subseteq S_i$, para qualquer $1 \leq i \leq k-1$, temos que $\{x, y\} \subseteq I$. Assim, $I \neq \emptyset$. Como e_k é a única aresta de G que incide em dois vértices de S , temos que nenhuma aresta de G conecta $S_i - S_j$ a $S_j - S_i$ para quaisquer $1 \leq i < j \leq k-1$. Assim, pelo Corolário 4.5.7, temos que I é uma barreira em H . Como e_i incide em dois vértices de um mesmo componente de $H - S_i$ e $I \subseteq S_i$, temos que e_i incide em dois vértices de um mesmo componente de $H - I$. Assim, os componentes de $G - I$ possuem os mesmos conjuntos de vértices dos componentes de $H - I$. Portanto, I é uma barreira de G . Logo, e_k não é admissível em G , o que é uma contradição. ■

Agora analisaremos o caso em que existem duas ou mais arestas de R que incidem somente em vértices de uma classe $S \subseteq P(G)$. Mostraremos que é possível reduzir esse caso ao caso em que há precisamente uma aresta com seus dois vértices em S . Seja $T \subseteq R$ o conjunto de arestas que incidem somente em vértices de S . Considere o grafo $J = G - T = H + R - T$. Observe que H é um subgrafo gerador coberto por emparelhamento de J . As proposições 5.4.2 e 5.4.3 ilustram uma boa maneira de se encontrar a aresta certa de T que é parte de uma orelha dupla.

Proposição 5.4.2 *Se $e \in T$ é admissível no grafo $J + e$, então e faz parte de uma orelha dupla que pode ser adicionada a H .*

Prova: Observe que, no grafo $J + e$, e é a única aresta de T que incide em dois vértices de S . Seja M um emparelhamento perfeito de $J + e$ contendo e . Seja $R' = M \cap R$. Então $H + R'$ é coberto por emparelhamento e e é a única aresta de R' que incide em dois vértices de S . Assim, pelo Lema 5.4.1, temos que existe uma orelha dupla contendo e , e tal orelha pode ser adicionada a H . ■

Proposição 5.4.3 *Seja $e \in T$ uma aresta não admissível em $J + e$. Seja B a barreira maximal B de J que contém e . Então existe uma outra aresta em T que incide em dois vértices de componentes distintos de $J - B$, e que faz parte de uma orelha dupla que pode ser adicionada a H .*

Prova: Como e é admissível em G , então, claramente, existe uma outra aresta $f = xy$ de T tal que x e y estão em componentes distintos de $J - B$. Observe que $\{x, y\} \subseteq S$, pois cada aresta em T , incluindo f , possui ambos extremos em S . Além disso, como e possui ambos extremos em B e e também possui ambos extremos em S , temos, pela Proposição 4.7.1, que $B \subseteq S$.

Seja K o componente de $J - B$ que contém x . Pelo Lema 4.5.5, temos que K é crítico. Logo, $K - x$ possui um emparelhamento perfeito M'' . Seja H' o grafo obtido, a partir de H , através da contração de $V(K)$ a um único vértice w . Pelo Lema 5.2.2, temos que H' é coberto por emparelhamentos e $B' = S \cap V(H') = S - V(K)$ é a barreira maximal de H' que contém B . Assim, como $y \in S$ e $y \notin V(K)$, temos que $y \in B'$. Além disso, como $w \notin B'$, temos, pela Proposição 4.5.1, que $H' - y - w$ possui um emparelhamento perfeito M' . Agora, $M' \cup M'' \cup \{f\}$ é um emparelhamento perfeito de $J + f$ contendo f . Assim, pela Proposição 5.4.2, temos que f faz parte de uma orelha dupla que pode ser adicionada a H . ■

O Teorema 5.4.4 generaliza alguns conceitos da busca por uma orelha dupla, tornando-se a base para a busca por uma aresta que faça parte de uma orelha dupla.

Teorema 5.4.4 *Seja $S \in P(H)$ e seja T o conjunto de arestas de R que incidem somente em vértices de S . Se $T \neq \emptyset$, então existe uma aresta de T que faz parte de uma orelha dupla a ser adicionada a H .*

Prova: Se $|T| = 1$, então, pelo Lema 5.4.1, existe uma aresta de T que faz parte de uma orelha dupla a ser adicionada a H . Então suponha que $|T| > 1$. Agora considere o grafo $J = G + R - T$ e e uma aresta de R . Se e é admissível em $J + e$, então, pela Proposição 5.4.2, chegamos novamente à conclusão de que existe uma aresta de T que faz parte de uma orelha dupla que pode ser

adicionada a H . Então suponha que e não é admissível em $J + e$, mas, pela Proposição 5.4.3, temos que existe uma outra aresta de T que faz parte de uma orelha dupla a ser adicionada a H . ■

A busca por uma segunda aresta, de uma orelha dupla, é ilustrada no Lema 5.4.5.

Lema 5.4.5 *Seja e uma aresta de T , que é parte de uma orelha dupla que pode ser adicionada a H , e seja $f = vw$ uma aresta de $R - e$. Então o par $\{e, f\}$ é uma orelha dupla que pode ser adicionada a H se, e somente se, v e w estão em classes distintas de $P(H + e)$.*

Prova: Seja $Q = \{e, f\}$ uma orelha dupla que pode ser adicionada a H . Então o grafo $H + Q$ é coberto por emparelhamentos e, dessa forma, como f é admissível em $H + Q$, temos, pela Proposição 4.5.1, que v e w estão em classes distintas de $P(H + e)$. Por outro lado, se v e w estão em diferentes classes de $P(H + e)$, então f é admissível em $H + \{e, f\}$. Mas f não pode ser admissível em $H + f$, pois assumimos que não é possível adicionar uma única orelha simples ao grafo H . Similarmente, e não é admissível em $H + e$. Dessa forma, cada emparelhamento perfeito de $H + \{e, f\}$, que contém uma das arestas e ou f , também contém a outra. Então $\{e, f\}$ é uma orelha dupla que pode ser adicionada a H . ■

Agora podemos ilustrar o Teorema 5.4.6, que descreve formalmente o teorema de Lovász e Plummer.

Teorema 5.4.6 *Todo grafo G coberto por emparelhamentos admite uma decomposição em orelhas.*

Prova: Seja H um subgrafo central coberto por emparelhamentos de G . A existência de H é garantida pelo fato de que qualquer aresta arbitrária de G satisfaz as condições necessárias. Se $H = G$, então não temos nada a fazer, portanto, suponha que $H \neq G$. Agora basta mostrarmos que existe uma orelha que pode ser adicionada a H , ou seja, devemos mostrar que existe um subconjunto não vazio R de $E(G - H)$ tal que $H + R$ seja coberto por emparelhamentos, pois, se alguma aresta e de R é admissível em $H + e$, então e é uma orelha simples de $H + e$, caso contrário, pelo Teorema 5.4.4, temos que existe uma orelha dupla que pode ser adicionada a H .

Se H é um subgrafo gerador de G , então definimos $R = E(G) \setminus E(H)$ e, dessa forma, a prova está completa. Caso contrário, como H é um subgrafo central coberto por emparelhamentos, G possui um emparelhamento perfeito M , tal que $M \cap E(H)$ é um emparelhamento perfeito de H . Seja e uma aresta

que possui um extremo em $V(H)$ e o outro em $V(G) - V(H)$, e seja M' um emparelhamento perfeito de G contendo e . O componente de $M \Delta M'$ que contém e é um circuito M -alternado C . Não é difícil verificar que $H \cup C$ é coberto por emparelhamentos. Logo, as arestas de C que não estão em H formam uma ou mais orelhas P_1, P_2, \dots, P_q de $H + P_1, P_2, \dots, P_q$. Se algum P_j , $1 \leq j \leq q$, possui vértices internos, como, por exemplo, $P_j = v_0 v_1 \dots v_l$, então trocamos P_j por uma simples aresta $e_j = v_0 v_l$, caso contrário, definimos $e_j = P_j$. Assim, teremos $R = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$. Como $H + C$ é coberto por emparelhamentos, temos que $H + R$ também é coberto por emparelhamentos. Além disso, se quaisquer arestas e_i e e_j de R formam uma orelha dupla que pode ser adicionada a H , então as respectivas orelhas P_i e P_j também formam uma orelha dupla que pode ser adicionada a H . ■

5.5 Algoritmo eficiente para decomposição em orelhas

Agora podemos descrever o melhor algoritmo conhecido para decomposição em orelhas de grafos não bipartidos cobertos por emparelhamentos, cuja complexidade é de $O(|V| \cdot |E|)$. O algoritmo foi apresentado em [CC05], melhorando o melhor tempo anterior de $O(|V| \cdot |E|^2)$ apresentado em [LR89].

5.5.1 Atualizando eficientemente uma partição canônica

O ponto chave do algoritmo é a atualização da partição canônica de um grafo intermediário G_i após a adição de cada orelha.

Vamos considerar, por exemplo, a atualização da partição canônica $P(G_i) = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ quando uma orelha simples e é adicionada a G_i . O procedimento é análogo se um conjunto R' , contendo duas ou mais orelhas de G_i , é adicionado ao grafo G_i .

O primeiro passo é testar se cada classe S de $P(G_i)$ é uma barreira em $G_{i+1} = G_i + e$. Pela Proposição 4.7.1, temos que a nova partição canônica $P(G_{i+1})$ é um refinamento de $P(G_i)$, ou seja, para cada classe S' de $P(G_{i+1})$, existe uma classe S de $P(G_i)$ tal que $S' \subseteq S$. Observe que, para cada classe S de $P(G_i)$, S é uma barreira de G_{i+1} se, e somente se, e não incide em vértices de dois componentes distintos de $G_i - S$. Essa verificação pode ser realizada em tempo constante, desde que armazenemos os componentes de $G_i - S$.

Além disso, para cada classe S de $P(G_i)$, que não é uma classe de $P(G_{i+1})$, devemos encontrar as classes de $P(G_{i+1})$ que são refinamentos de S . Nesse caso, escolhamos arbitrariamente um vértice v de S e encontramos a classe S' de $P(G_{i+1})$ que contém v . A seguir, repetimos o processo com $S \setminus S'$ no lugar de S , enquanto $(S \setminus S') \neq \emptyset$. Dessa forma, claramente, conseguimos encontrar todas as classes de $P(G_{i+1})$ derivadas a partir de uma classe S de $P(G)$.

A Proposição 5.5.1 nos garante que é possível encontrar a classe de $P(G_{i+1})$, que contém um determinado vértice v , em tempo $O(|E|)$.

Proposição 5.5.1 *Seja G um grafo elementar, v um vértice qualquer de G , e seja M um emparelhamento perfeito de G . Então, a classe da partição canônica $P(G)$, que contém v , pode ser encontrada em tempo $O(|E|)$.*

Prova: Primeiro, utilizamos o processo descrito na Seção 3.6 para obter uma floresta M' -alternante F no grafo $G - v$, onde $M' = M - vw$ e $vw \in M$. Pela Proposição 3.6.3, a construção de F é realizada em tempo $O(|E|)$. Seja S o conjunto de vértices rotulados como internos em F . Pela Proposição 3.6.2, temos que os vértices de S são vértices originais de G e que os componentes de $G - v - S$ são todos críticos. Pelo Lema 4.5.5, temos que $S \cup \{v\}$ é uma barreira maximal em G . Logo, pela Proposição 4.6.4, $S \cup \{v\}$ é a classe de $P(G)$ que contém v . ■

5.5.2 Algoritmo de decomposição em orelhas

A entrada do algoritmo consiste de um grafo G coberto por emparelhamentos. O primeiro passo do algoritmo consiste em encontrar um emparelhamento perfeito M de G , como ilustrado na Figura 5.4.

No passo seguinte, G_1 é definido como sendo uma aresta $e = xy$ de M e $P(G_1) = \{\{x\}, \{y\}\}$ passa a ser a partição canônica de G_1 . Note que, durante todo o processo de decomposição em orelhas, apenas $P(G_1)$ não é um refinamento obtido a partir de outra partição canônica. Para um melhor entendimento sobre os refinamentos de partições canônicas, realizados durante a execução do algoritmo de decomposição em orelhas, em cada exemplo de um grafo G_i , ilustramos também o grafo $T(G_i)$, onde cada classe S , encontrada durante a execução do algoritmo de decomposição em orelhas, corresponde a um vértice de $T(G_i)$. Além disso, se uma classe S' é obtida através da adição dos vértices internos de uma orelha R_{i+1} de G_{i+1} a S , então S e S' são representadas pelo mesmo vértice de $T(G_i)$. Sejam s e s' vértices de $T(G_i)$. Uma aresta ss' está presente em $T(G_i)$ quando uma classe representada por s' é um refinamento de uma classe representada por s . Além

disso, para que $T(G_i)$ seja uma árvore, $T(G_i)$ possui um vértice r , que não corresponde a nenhuma classe, e as arestas rx e ry , onde x e y representam as classes de $P(G_1)$. Denotamos um vértice s' de $T(G_i)$ como sendo um *filho* de um outro vértice s de $T(G_i)$ se, e somente se, $S' \subset S$, onde S e S' são classes representadas por s e s' , respectivamente. Denotamos também um vértice v de $T(G_i)$ como sendo um vértice *folha* se, e somente se, v não possui filhos. A Figura 5.5 ilustra G_1 e $T(G_1)$.

Nos passos seguintes, temos sempre um grafo coberto por emparelhamentos G_i e a tarefa de encontrar um conjunto R de arestas tal que $G_i + R$ é coberto por emparelhamentos. A busca por R , enquanto $G_i \neq G$, pode ocorrer em duas situações distintas:

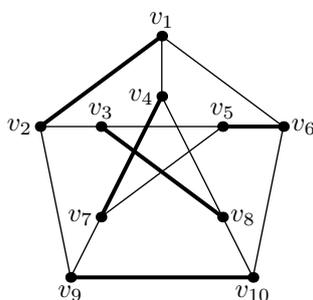


Figura 5.4: Um emparelhamento perfeito do grafo de Petersen.

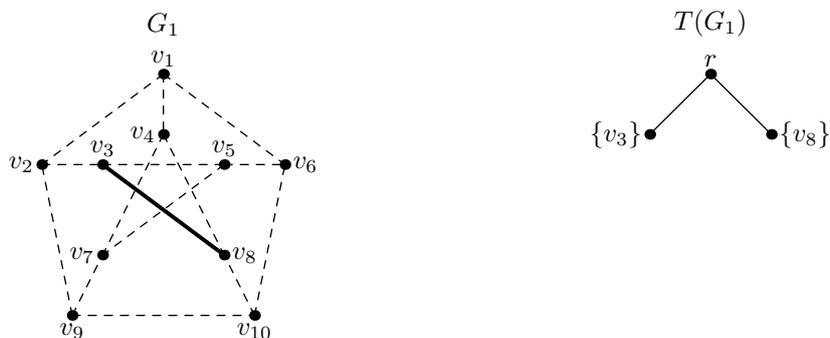


Figura 5.5: Um grafo inicial G_1 .

- G_i é um subgrafo gerador de G . Nesse caso, definimos $R = E(G) \setminus E(G_i)$; ou
- G_i não é um subgrafo gerador de G . Nesse caso, encontramos um ciclo M -alternante C que conecta um vértice de $V(G) - V(G_i)$ a um vértice de $V(G_i)$, como ilustrado na Figura 5.6. A Proposição 5.5.2 mostra

que C pode ser encontrado em tempo $O(|E|)$. As arestas de C , que não estão em G_i , formam uma ou mais orelhas P_1, P_2, \dots, P_q de G_{i+1} . Se algum P_j , $1 \leq j \leq q$, possui vértices internos, como por exemplo $P_j = v_0v_1\dots v_l$, então trocamos P_j por uma simples aresta $e_j = v_0v_l$, caso contrário, definimos $e_j = P_j$. Assim, teremos $R = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$.

Proposição 5.5.2 *Seja G um grafo coberto por emparelhamentos, Seja H um subgrafo central próprio de G . Se M é um emparelhamento perfeito de G , tal que $M \cap E(H)$ é um emparelhamento perfeito de H , então um ciclo M -alternante C , que conecta um vértice de $V(G) - V(H)$ a um vértice de $V(H)$, pode ser encontrado em tempo $O(|E|)$.*

Prova: Tome qualquer aresta vw , onde $v \in V(H)$ e $w \in V(G - H)$. Sejam vv' e ww' arestas de M e seja P um caminho M -alternante conectando v' a w' em $G - v - w$. Pela Proposição 3.6.3, P pode ser encontrado em tempo $O(|E|)$. Logo, $C = P + v'v + vw + ww'$ é um ciclo M -alternante em G que contém a aresta vw . ■

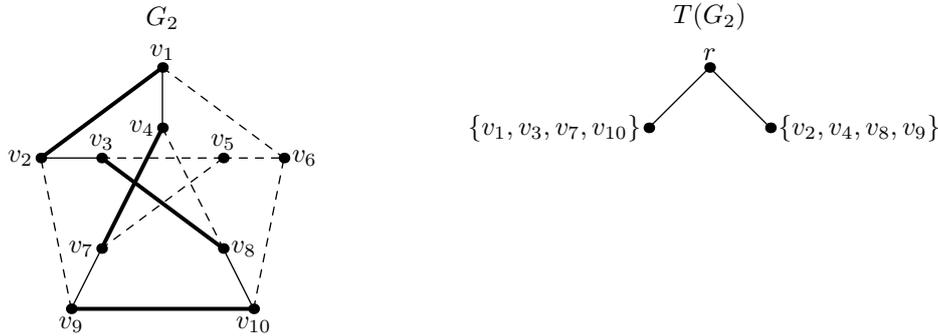


Figura 5.6: Um ciclo, que contém a aresta v_2v_3 , dando origem ao grafo G_2 .

Após encontrarmos R , definimos R' como sendo o conjunto de arestas de R que incidem em vértices de classes distintas de $P(G_i)$. Depois de computarmos R' , podemos chegar a duas situações distintas:

- $R' \neq \emptyset$. Nesse caso, removemos, uma a uma, as arestas de R' e as adicionamos a G_i como orelhas simples; ou
- $R' = \emptyset$. Então não é possível adicionar uma aresta simples a G_i . Nesse caso, devemos encontrar e adicionar uma orelha dupla a G_i , como ilustrado na Figura 5.7. A proposição 5.5.3 nos garante que tal orelha dupla pode ser encontrada em tempo $O(|E|)$

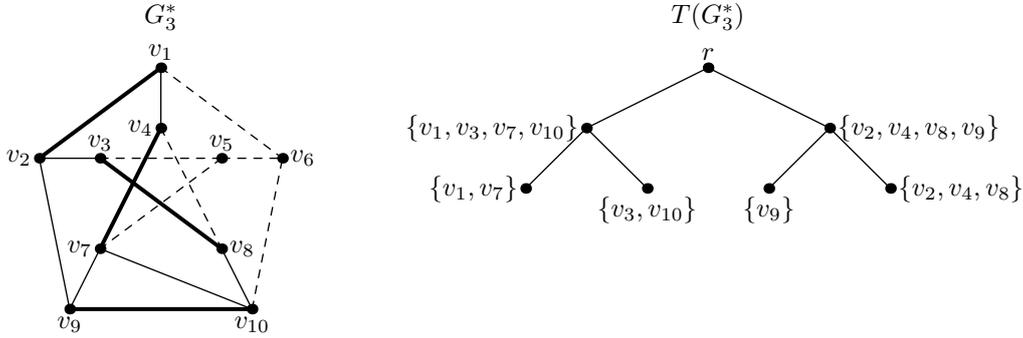


Figura 5.7: Grafo $G_3^* = G_2 + v_2v_9 + v_7v_{10}$.

Proposição 5.5.3 *Se R não possui orelha simples que pode ser adicionada ao grafo G_i , então uma orelha dupla do grafo G_{i+1} pode ser encontrada em tempo $O(|E|)$.*

Prova: Primeiro, escolhemos arbitrariamente uma aresta e de R e computamos o conjunto R^* formado por todas as arestas de R que incidem em vértices de S , onde S é a classe de $P(G_i)$ que contém os vértices x e y nos quais e incide. Isso pode ser feito em tempo $O(|E|)$. Se $|R^*| = 1$, então, como demonstrado no Lema 5.4.1, e faz parte de uma orelha dupla, caso contrário, necessitamos encontrar a classe S' de $P(H)$ que contém x , onde $H := G_i + (R - R^*)$. Pela Proposição 5.5.1, S' é encontrada em tempo $O(|E|)$.

Se $y \notin S'$, então, como demonstrado na Proposição 5.4.2, e faz parte de uma orelha dupla, caso contrário, como demonstrado na Proposição 5.4.3, basta encontrarmos uma outra aresta de R^* que incide em dois componentes distintos de $H - S'$. Isso pode ser realizado em tempo $O(|E|)$, pois podemos verificar em tempo constante se uma aresta incide em componentes distintos. Então adicionamos a aresta encontrada, digamos e , a G_i , computamos, em tempo $O(|E|)$, $P(G_i + e)$, e procuramos, em tempo $O(|E|)$, uma aresta $f \in (R - e)$, que incide em vértices de classes distintas de $P(G_i + e)$. Pelo Lema 5.4.5, temos que $\{e, f\}$ é uma orelha dupla que pode ser adicionada a G_i . ■

Note que cada orelha P_j foi substituída por uma simples aresta e_j , formada pelos vértices inicial e final de P_j , então temos que substituir as arestas adicionadas a G_i pelos caminhos correspondentes. Seja $e_j = v_0v_l$ uma aresta adicionada a G_i , que corresponde ao caminho $P_j = v_0v_1\dots v_l$. Então, caso P_j possua vértices internos, substituímos e_j por P_j e atualizamos a partição canônica do grafo resultante, como ilustrado na Figura 5.8. Pela Proposição 4.7.2, temos que os vértices v_2, v_4, \dots, v_{l-1} ficarão na mesma classe de v_0 e os vértices v_3, v_5, \dots, v_{l-2} ficarão na mesma classe de v_l .

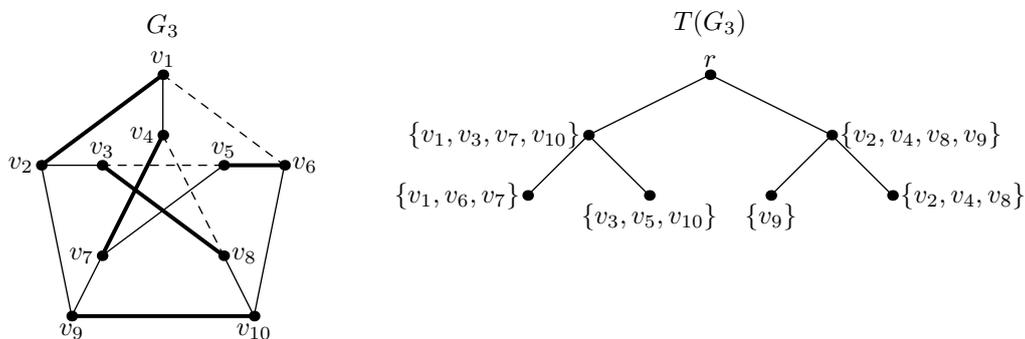


Figura 5.8: Grafo G_3 , obtido após a substituição da aresta v_7v_{10} pelo caminho correspondente $(v_7v_5v_6v_{10})$.

Finalmente, as figuras 5.9 e 5.10 ilustram a conclusão da decomposição em orelhas do grafo de Petersen.

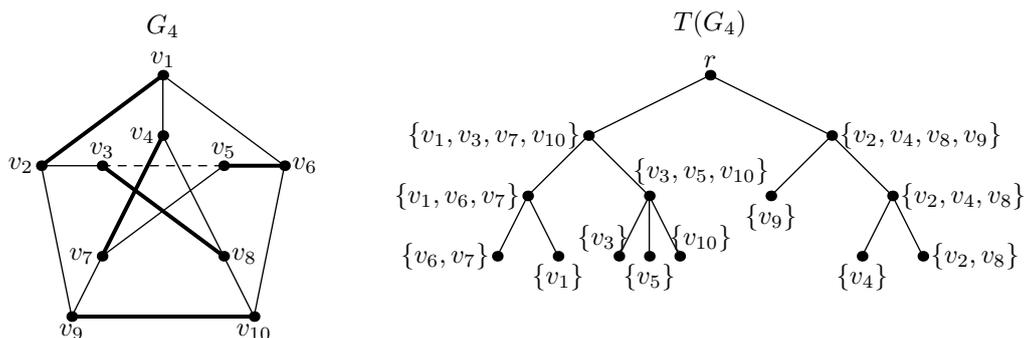


Figura 5.9: Grafo $G_4 = G_3 + v_1v_6 + v_4v_8$.

A Tabela 5.1 ilustra formalmente o algoritmo de decomposição em orelhas apresentado nessa seção.

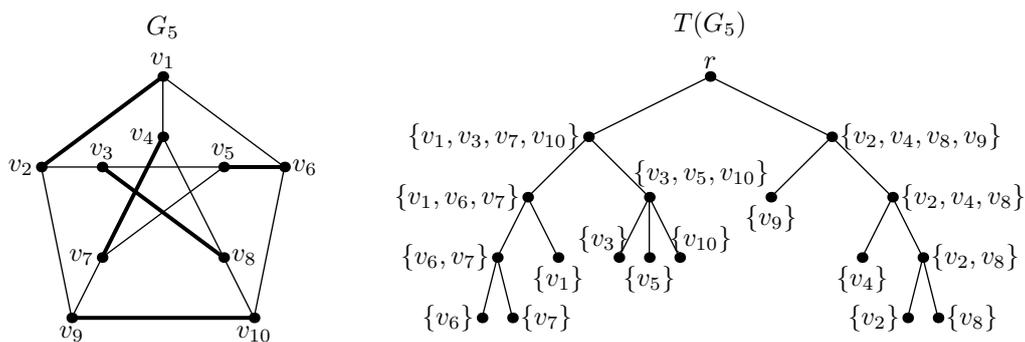


Figura 5.10: Grafo $G_5 = G_4 + v_3v_5$.

| |
|---|
| <p>entrada: um grafo coberto por emparelhamentos $G = (V, E)$. saída: uma decomposição em orelhas de G e a partição canônica $P(G)$.</p> <p>(0) encontre um emparelhamento perfeito M de G;</p> <p>(1) seja xy uma aresta arbitrária de M, assuma que o subgrafo H seja correspondente a xy, e assuma também que $P(H) := \{\{x\}, \{y\}\}$;</p> <p>(2) enquanto $H \neq G$ faça</p> <p style="padding-left: 2em;">(2.1) se H é um subgrafo gerador de G, então defina $R := E(G) - E(H)$, senão inicie com $R = \emptyset$, encontre um ciclo M-alternante C conectando um vértice de $V(H)$ a um vértice de $V(G) - V(H)$ e, para cada caminho maximal P_j de C, que não esteja em H, adicione uma aresta correspondente e_j a R; finalmente, seja $R_0 := R$;</p> <p style="padding-left: 2em;">(2.2) repita</p> <p style="padding-left: 4em;">(2.2.1) seja $H_0 := H$ e seja $p_0 := P(H_0)$; seja R' o conjunto de arestas em R que incidem em vértices de classes distintas de $P(H)$; troque R por $R - R'$;</p> <p style="padding-left: 4em;">(2.2.2) analise seqüencialmente as arestas de R' e adicione cada aresta a H como uma orelha simples; atualize $P(H_0)$ com o mesmo valor de $P(H)$;</p> <p style="padding-left: 4em;">(2.2.3) se $p_0 = P(H)$ e $R \neq \emptyset$, então encontre uma orelha dupla $\{e, f\} \subseteq R$ através do método descrito no Teorema 5.4.4; remova as arestas e e f de R e adicione-as a H; atualize $P(H)$;</p> <p style="padding-left: 2em;">(*2.2) até $R = \emptyset$;</p> <p style="padding-left: 2em;">(2.3) para cada aresta $e_j \in R_0$ tome o caminho correspondente P_j de G (veja o passo (2.1)), e insira os vértices internos de P_j (se existirem) nas classes apropriadas de $P(H)$ (veja Proposição 4.7.2);</p> <p>(*2) fim (laço “enquanto”); PARE.</p> |
|---|

Tabela 5.1: Algoritmo de decomposição em orelhas [CC05].

5.5.3 A complexidade do algoritmo

Agora podemos realizar uma análise detalhada sobre a complexidade $O(|V| \cdot |E|)$ do algoritmo mais eficiente de decomposição em orelhas. A nossa análise, ilustrada a seguir, é realizada sobre os passos mais importantes do algoritmo, pois os demais passos desse algoritmo podem ser, claramente, executados em tempo $O(|E|)$.

Encontrando um emparelhamento perfeito

No passo (0) necessitamos encontrar um emparelhamento perfeito do grafo G . Esse passo pode ser executado pelo algoritmo de Micali-Vazirani [MV80] em tempo $O(|V|^{\frac{1}{2}} \cdot |E|)$.

Encontrando um ciclo M -alternante

No passo (2.1), necessitamos encontrar um ciclo M -alternante contendo uma aresta $e = vw$. Pela Proposição 5.5.2, tal ciclo pode ser encontrado em tempo $O(|E|)$. Note também que esse passo é executado $O(|V|)$ vezes, pois, sempre que um ciclo M -alternante é encontrado, ao menos dois vértices são adicionados ao grafo G_{i-1} . Logo, o tempo total de execução contribuído por esse passo é $O(|V| \cdot |E|)$.

Atualizando uma partição canônica

No passo (2.2.2), para verificarmos se uma aresta incide em dois componentes distintos de $G_{i-1} - S$, necessitamos armazenar todos os componentes de $G_{i-1} - S$, assim gastamos apenas tempo constante durante a verificação. Além disso, para cada classe S de $P(G_{i-1})$, se uma aresta que deve ser adicionada a G_{i-1} incide em dois componentes distintos de $G_{i-1} - S$, então utilizamos repetidamente um algoritmo para encontrar as classes resultantes do refinamento de S . Pela Proposição 5.5.1, esse algoritmo pode ser executado em tempo $O(|E|)$. Agora devemos mostrar que, durante a execução do algoritmo de decomposição em orelhas, o algoritmo, que encontra a classe de $P(G_i)$ que contém um determinado vértice, é executado $O(|V|)$ vezes. É fácil verificar que $T(G)$ possui, no máximo, $|V|$ vértices folhas (Figura 5.10). Além disso, como cada vértice não-folha de $T(G)$ possui ao menos dois vértices filhos, temos que $T(G)$ possui, no máximo, $|V| - 1$ vértices não-folhas e $2 \cdot |V|$ arestas. Como cada aresta de $T(G)$ corresponde a uma execução do algoritmo que encontra a classe de $P(G_i)$ que contém um determinado vértice, temos que esse algoritmo é executado $O(|V|)$ vezes. Logo, o tempo total de execução contribuído por esse passo é $O(|V| \cdot |E|)$.

Encontrando uma aresta que faz parte de uma orelha dupla

Pela Proposição 5.5.3, o passo (2.2.3) pode ser executado em tempo $O(|E|)$. Note também que esse passo é executado $O(|V|)$ vezes, pois, o número máximo de classes em $P(G)$ é $|V(G)|$ e, sempre que uma orelha dupla é adicionada a G_{i-1} , o número de classes da partição canônica do grafo resultante é incrementado em ao menos duas unidades. Esse fato pode ser facilmente notado, pois cada orelha simples conecta dois vértices de uma mesma classe de $P(G_{i-1})$, mas conecta vértices de classes distintas de $P(G_i)$. Logo, o tempo total de execução contribuído por esse passo é $O(|V| \cdot |E|)$.

Capítulo 6

Considerações Finais

O presente trabalho apresentou um estudo sobre as principais características de emparelhamentos, grafos cobertos por emparelhamentos e decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos, tornando-se um material de estudo sobre os assuntos abordados, principalmente por exibir os resultados mais importantes da teoria de emparelhamento. As provas exibidas para os lemas, proposições, teoremas e corolários foram pesquisadas, estudadas e, quando possível, descritas de forma facilmente assimiláveis.

Além disso, apresentamos uma análise detalhada sobre o melhor algoritmo de decomposição em orelhas de grafos cobertos por emparelhamentos. Essa análise permite uma melhor compreensão sobre o algoritmo e, principalmente, sobre sua complexidade.

Infelizmente, nosso trabalho não pôde abordar todos os assuntos interessantes da teoria de emparelhamentos em grafos. Alguns assuntos interessantes, encontrados na literatura sobre emparelhamentos, não foram estudados, mas podem ser vistos como contribuições futuras para o presente trabalho. Dentre esses assuntos, podemos destacar:

- algoritmos eficientes para encontrar emparelhamentos máximos;
- número de emparelhamentos perfeitos distintos em um grafo; e
- decomposição em cortes justos de grafos cobertos por emparelhamentos.

Referências Bibliográficas

- [Bal69] M. L. Balinski. *Combinatorial Mathematics and its Applications*. Chapel Hill, 1969.
- [Bar78] G. W. Bartnik. *Algorithmes de Couplages dans le Graphes*. Tese de Doutorado, Université Paris, février 1978.
- [Ber57] C. Berge. Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 43:842–844, 1957.
- [BM76] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press LTD, 1976.
- [CC05] M. H. Carvalho e J. Cheriyan. An $O(|V| \cdot |E|)$ algorithm for ear decompositions of matching covered graphs. *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms*, páginas 415–423, 2005.
- [Edm65] J. Edmonds. Paths, trees and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17:449–467, 1965.
- [EK75] S. Even e O. Kariv. An $O(n^{\frac{5}{2}})$ algorithm for maximum matching in general graphs. *IEEE Computer Society Press*, páginas 100–112, 1975.
- [Gab73] H. N. Gabow. *Implementation of Algorithms for Maximum Matching on Non-Bipartite Graphs*. Tese de Doutorado, Stanford University Dept. Comput. Sci., 1973.
- [Gab76] H. N. Gabow. An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum matching on graphs. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 23:221–234, 1976.
- [GM84] M. Gondran e M. Minoux. *Graphs and Algorithms*. Wiley, 1984.

- [Hal35] P. Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.
- [Kar76] O. Kariv. *An $O(n^{\frac{5}{2}})$ Algorithm for Finding a Maximum Matching in a General Graph*. Tese de Doutorado, Weizmann Institute of Science, 1976.
- [KM74] T. Kameda e I. Munro. An $O(|V| \cdot |E|)$ algorithm for maximum matching of graphs. *Computing*, 12:91–98, 1974.
- [Kot00] Andrei Kotlov. Short proof of the Gallai-Edmonds structure theorem. 2000.
- [Law76] E. L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Rinehart and Winston, 1976.
- [LP86] L. Lovász e M. D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, 1986.
- [LR89] C. H. C. Little e F. Rendl. An algorithm for the ear decomposition of a 1-factor covered graph. *J. Austral. Math. Soc. (Series A)*, 46:296–301, 1989.
- [Mur94] U. S. R. Murty. The matching lattice and related topics, Setembro 1994. Versão Preliminar.
- [MV80] S. Micali e V. V. Vazirani. An $O(|V|^{\frac{1}{2}}|E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. *IEEE Computer Society Press*, páginas 17–27, 1980.
- [Tai80] P. G. Tait. Remarks on colourings of maps. *Proc. Royal Soc.*, 10, 1880.
- [Tar83] R. E. Tarjan. *Data Structures and Network Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983.
- [Tut47] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.
- [WJ65] C. Witzgall e C. Zahn Jr. Modification of Edmonds' maximum matching algorithm. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B*, 69B:91–98, 1965.

Índice Remissivo

- árvore, 12
- arestas, 9
 - adjacência, 9
 - admissíveis, 30
 - contração, 12
 - extremos, 9
 - incidência, 9
 - laço, 9
- barreira, 30
 - maximal, 30
- caminho, 11
 - alternante, 13
 - aumentante, 13
- ciclo, 11
- conexão, 9, 11, 12
- distância, 12
- emparelhamento, 13
 - máximo, 13
 - perfeito, 17
 - quase-perfeito, 17
- floresta, 12
 - alternante, 24
- grafo, 9
 - acíclico, 11
 - bipartido, 12
 - bipartição, 12
 - central, 17
 - coberto por emparelhamentos, 42
- crítico, 17
- deficiência, 15
- desconexo, 12
- elementar, 30
 - partição canônica, 40
- orelha, 44
 - decomposição em orelhas, 32, 44
 - dupla, 44
 - simples, 32
- passeio, 11
 - comprimento, 11
 - fechado, 11
 - origem, 11
 - término, 11
- subgrafo, 10
 - componentes, 12
 - ímpar, 12
 - par, 12
 - contração, 12
 - gerador, 10
 - induzido, 10
 - próprio, 10
- trilha, 11
- vértices, 9
 - adjacência, 9
 - externos
 - floresta alternante, 24
 - filhos, 51
 - folhas, 51

- incidência, 9
- insaturados, 13
- internos
 - floresta alternante, 24
 - passeio, 11
 - saturados, 13
- vizinhança, 9