

# O MÉTODO DE DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS

Delair Osvaldo Martinelli Júnior

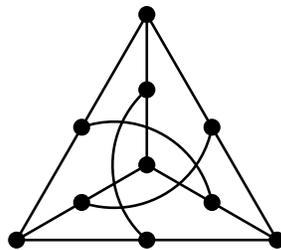
Dissertação de Mestrado

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Henriques Carvalho

Área de Concentração: Teoria dos grafos

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ciência da Computação.

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da FUNDECT.



Departamento de Computação e Estatística  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
17 de maio de 2007

## O Método de Distribuição de Cargas

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação escrita por Delair Osvaldo Martinelli Júnior devidamente apresentada à comissão julgadora e corrigida.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho - Orientador (DCT-UFMS)
- Prof. Dr. Fábio Henrique Viduani Martinez (DCT-UFMS)
- Prof. Dr. Orlando Lee - (IC-UNICAMP)

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois é o pai de todas as horas e sempre esteve presente quando precisei. Agradeço a Nossa Senhora de Aparecida que ora por todos nós. Agradeço à meu eterno amigo Dr. Marcelo Henriques de Carvalho, pois sem ele este trabalho não seria possível. Agradeço à Luz, minha esposa, por seu amor e paciência. Agradeço a toda minha família pelo apoio, mas principalmente aos meus pais por todas as oportunidades. Agradeço também aos amigos pelos momentos de apoio, descontração e devaneios.

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre o Método de Distribuição de Cargas, procurando exibir com clareza os principais aspectos desta técnica.

O principal objetivo é iniciar o leitor ao estudo deste método. Este trabalho tem como propósito ser simples e didático. Apresentamos a formulação geral, alguns exemplos bem simples, três problemas mais completos e várias referências bibliográficas relevantes em relação ao assunto. Mostramos resultados obtidos para o problema da 3-coloração de vértices relacionado à conjectura de Steinberg que ainda está em aberto, para o problema da Coloração Simultânea de Grafos Imersos e para o problema da Simetria em Grafos. Com exceção do problema da 3-coloração, os resultados apresentados são os melhores possíveis. Para o problema da 3-coloração, os melhores resultados possuem um grau de dificuldade alto, fugindo do escopo deste trabalho.

**Palavras-chave:** método, distribuição e cargas.

# Abstract

This work presents the Discharging Method in graph theory. We try to show with clarity the main aspects of this technique.

The main objective is to introduce the reader to the study of this method. This work intends to be simple and didactic. We present the general formulation, some very simple examples, three more important problems and an excellent bibliography related to the subject.

More precisely, we present the main results for the following problems: the vertex 3-coloring problem related to a conjecture of Steinberg that is still open, the simultaneous coloring of immersed graphs problem, and the symmetry of graphs problem. Except for the vertex 3-coloring problem, the presented results are the best possible. The best result for the vertex 3-coloring problem has a high degree of difficulty and is out of the scope of this work.

# Conteúdo

Conteúdo	V
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos</b>	<b>2</b>
2.1 Introdução . . . . .	2
2.2 Notações e Definições . . . . .	2
2.2.1 Coloração . . . . .	3
2.2.2 Simetria . . . . .	4
<b>3 Método de Distribuição de Cargas</b>	<b>5</b>
3.1 Visão Geral do Método . . . . .	5
3.2 Formulação . . . . .	6
3.3 Exemplos . . . . .	6
<b>4 3-Coloração de Vértices</b>	<b>8</b>
4.1 Conjectura de Steinberg . . . . .	8
4.1.1 O Caso $\{4, \dots, 11\}$ . . . . .	8
4.1.2 O Caso $\{4, \dots, 10\}$ . . . . .	10
4.1.3 O Caso $\{4, \dots, 9\}$ . . . . .	11
<b>5 Coloração Simultânea</b>	<b>15</b>
5.1 Coloração Simultânea de Grafos Imersos . . . . .	15
5.2 O Teorema Principal . . . . .	16
5.2.1 Configurações Redutíveis . . . . .	16

---

5.2.2	Distribuição . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Simetria em Grafos</b>	<b>22</b>
6.1	Grafos Planares Assimétricos . . . . .	22
6.2	Prova do Teorema 6.1.2 . . . . .	23
6.3	Prova do Teorema 6.1.3 . . . . .	28
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>34</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste trabalho enfocamos uma técnica de prova de teoremas chamada de Método de Distribuição de Cargas. A formulação geral do método, alguns exemplos simples e três problemas mais complexos que utilizam o método serão apresentados.

Em 1969, Heesch<sup>1</sup> teve a idéia do Método de Distribuição de Cargas, dizendo que a noção de redutibilidade, unido ao Método de Distribuição de Cargas, seriam as principais ferramentas necessárias para solucionar o Problema das Quatro Cores.

Appel e Haken [ApHa77], em 1977, publicaram sua prova para o Teorema das Quatro Cores. Utilizaram a noção de redutibilidade e Método de Distribuição de Cargas. Esta prova é muito complexa, possui cerca de 300 regras de distribuição de carga e 1400 configurações redutíveis. Em 1996, Robertson, Sanders, Seymour, e Thomas [Rob97], publicaram uma nova prova para o Teorema das Quatro Cores. Esta possui apenas 32 regras de distribuição de carga e 633 configurações inevitáveis. Estes exemplos mostraram o poder do método de distribuição de cargas e a partir daí muitas outras aplicações surgiram. Apresentaremos algumas delas neste trabalho.

No capítulo 2 apresentamos algumas definições de Teoria dos Grafos que serão necessárias para o entendimento da técnica e dos problemas descritos.

No capítulo 3 explicamos a formulação geral do Método de Distribuição de Cargas. Exemplos bem simples são apresentados para facilitar a compreensão da técnica.

No capítulo 4 vemos os resultados obtidos utilizando o Método de Distribuição de Cargas para a conjectura de Steinberg.

No capítulo 5 utilizaremos o Método de Distribuição de Cargas para o problema da coloração simultânea de grafos imersos.

No capítulo 6 apresentamos uma aplicação do Método de Distribuição de Cargas para o problema de simetria em grafos.

---

<sup>1</sup>Todos os textos apontam Heesch como o idealizador da técnica, porém nenhuma citação a respeito de algum texto sobre o assunto está disponível.

# Capítulo 2

## Fundamentos

### 2.1 Introdução

Neste capítulo veremos algumas definições da Teoria dos Grafos. Os conceitos básicos da teoria dos grafos podem ser encontrados em inúmeras referências, como por exemplo [Bon76, Szw83, Die97]. Algumas convenções utilizadas nas notações serão introduzidas.

### 2.2 Notações e Definições

Um grafo  $\mathbf{G}$  é definido por um conjunto de vértices  $\mathbf{V}(\mathbf{G})$  e arestas  $\mathbf{E}(\mathbf{G})$ , onde  $E(G)$  está contido no conjunto de pares não ordenados de  $V(G)$ . Denotaremos os conjuntos  $V(G)$  e  $E(G)$  simplesmente por  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{V}$ . Todos os grafos considerados são **finitos**.

O grafo  $H$  é um **subgrafo** de  $G$  (denotado por  $H \subseteq G$ ) se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ .

Um vértice  $v$  é **incidente** a uma aresta  $e$  se  $v$  é extremo de  $e$ . Dizemos que dois vértices  $u$  e  $v$  são **vizinhos** ou **adjacentes** se existe uma aresta  $e$  com extremos em  $u$  e  $v$ . Neste caso também denotaremos  $e$  por  $uv$ , ou seja,  $e = uv$ . De forma análoga, duas arestas  $e_1$  e  $e_2$  são **vizinhas** ou **adjacentes** se incidem em pelo menos um vértice em comum. Dizemos que um vértice é **isolado** caso não possua nenhum vizinho.

Chamaremos de **grau** de um vértice o número de arestas incidentes à este vértice. Denotaremos o grau do vértice  $v$  por  $d(v)$ . O **grau máximo** dentre todos os vértices de um grafo  $G$  é denotado por  $\Delta(G)$  ou simplesmente  $\Delta$  e de forma análoga, o **grau mínimo** é denotado por  $\delta(G)$  ou simplesmente  $\delta$ .

Um **passeio** entre os vértices  $u$  e  $v$  é uma seqüência alternada de vértices e arestas que começa no vértice  $u$  e termina no vértice  $v$ , onde cada aresta tem como extremos o vértice que a precede e o vértice que a sucede. Um **caminho** é um passeio que não contém vértices repetidos. Um **circuito** é um caminho fechado, ou seja, o vértice de partida é igual ao vértice de chegada. Se um circuito contém todos os vértices de um grafo, este

será chamado de **circuito hamiltoniano**.

Um grafo é **conexo** se existe um caminho entre qualquer par de vértices, caso contrário ele é chamado **desconexo**. As **componentes conexas** de um grafo são os subgrafos conexos maximais deste grafo. Uma aresta de um grafo conexo é chamada de **aresta de corte** se o subgrafo resultante da remoção desta aresta é desconexo. Um vértice de um grafo conexo é chamado de **vértice de corte** se o subgrafo resultante da remoção deste vértice é desconexo.

Um grafo  $G$  está **imerso** em uma superfície  $\Sigma$  se cada vértice de  $G$  pode ser mapeado em um ponto de  $\Sigma$  e as arestas mapeadas em curvas simples em  $\Sigma$ . Além disso, um par de arestas de  $G$  não pode compartilhar um ponto em  $\Sigma$ , com exceção dos pontos onde as arestas conectam ao vértice.

Um grafo é **planar** se pode ser imerso no plano. Em outras palavras, um grafo é planar se podemos desenhá-lo no plano sem cruzar arestas. Chamaremos a imersão de um grafo planar no plano de um **grafo plano**. Um grafo plano particiona o plano em regiões conexas, chamadas de **faces**. A face ilimitada é chamada de **face externa**.

Seja  $G$  um grafo plano e conexo. O conjunto de faces de  $G$  é denotado por  $F(G)$ , ou simplesmente  $F$ . Uma aresta  $e$  é **adjacente** a uma face  $f$  se  $e$  está no limite na face  $f$ . Um vértice  $v$  é dito **incidente** a uma face  $f$  se  $v$  é incidente a alguma aresta adjacente a  $f$ . O **tamanho** de uma face  $f$ , denotado por  $|f|$ , é o número de arestas que delimitam  $f$ , com as **pontes** (arestas de corte) contadas duas vezes. O grafo  $G$  é **triangular** se todas as faces possuem tamanho 3.

**Fórmula de Euler:** Para todo grafo conexo  $G$ , imerso em uma superfície  $\Sigma$ , com conjunto de vértices  $V$ , conjunto de arestas  $E$  e conjunto de faces  $F$ , temos que:

$$|V| + |F| - |E| = \varepsilon(\Sigma),$$

onde  $\varepsilon(\Sigma)$ , ou simplesmente,  $\varepsilon$  é chamada de **característica de Euler** e depende unicamente da superfície  $\Sigma$ . Por exemplo, para o plano temos  $\varepsilon = 2$ , para o torus e garrafa de Klein temos  $\varepsilon = 0$  e  $\varepsilon$  assume valores negativos para as demais superfícies.

### 2.2.1 Coloração

O **problema de coloração** em grafos consiste em atribuir cores aos elementos (vértices, faces e arestas), de forma que os elementos adjacentes ou incidentes possuam cores diferentes.

Existem sete problemas de coloração, que são as combinações possíveis para os elementos de um grafo. São eles: coloração de vértice, coloração de aresta, coloração de face, coloração de vértice-aresta, coloração de vértice-face, coloração de aresta-face e coloração de vértice-aresta-face.

Uma **k-coloração** de vértices de  $G$  é uma atribuição de  $k$  cores,  $1, 2, \dots, k$ , aos vértices de  $G$ , tal que vértices adjacentes possuem cores distintas. A definição de  $k$ -coloração pode

ser estendida para os outros seis problemas de forma análoga. O grafo  $G$  é  **$k$ -colorível** se admite uma  $k$ -coloração. Se o grafo  $G$  admite uma  $k$ -coloração, então também admite uma  $j$ -coloração para todo  $j \geq k$ .

O **número cromático** de vértices de  $G$ ,  $\chi_v(G)$ , é o menor  $k$  tal que  $G$  possui uma  $k$ -coloração de vértices. De forma análoga denotamos por  $\chi_v(\Sigma)$  o menor número cromático de vértices para qualquer grafo imerso em uma superfície  $\Sigma$ . Chamamos um grafo com número cromático de vértices  $k$  de  **$k$ -cromático**. Dizemos que  $G$  é **crítico** se  $\chi_v(H) < \chi_v(G)$  para todo subgrafo próprio  $H$  de  $G$ . Um grafo é  **$k$ -crítico** se é  $k$ -cromático e crítico. De forma análoga, podemos definir também  $\chi_e(G)$ ,  $\chi_f(G)$ ,  $\chi_{ve}(G)$ ,  $\chi_{vf}(G)$ ,  $\chi_{ef}(G)$  e  $\chi_{vef}(G)$ , correspondentes aos números cromáticos de aresta, face, vértice-aresta, vértice-face, aresta-face e vértice-aresta-face, respectivamente. Como o problema de coloração de vértice é o mais comum, usamos  $\chi(G)$  quando nos referimos à  $\chi_v(G)$ .

### 2.2.2 Simetria

Dois grafos  $G$  e  $H$  são **isomorfos** se existe uma função  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv \in E(G)$  se e somente se  $f(u)f(v) \in E(H)$ ,  $\forall u, v \in V(G)$ . Em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os rótulos dos vértices de um deles de modo que  $G$  e  $H$  fiquem idênticos. Um **automorfismo** de  $G$  é um isomorfismo de  $G$  em  $G$ . Um automorfismo é **trivial** se  $f(v) = v$ ,  $\forall v \in V(G)$ . Um grafo é dito **simétrico** se admite um automorfismo não trivial. Caso contrário, o grafo é **assimétrico**.

# Capítulo 3

## Método de Distribuição de Cargas

Neste capítulo introduziremos o Método de Distribuição de Cargas. Apresentaremos alguns exemplos simples para facilitar a compreensão.

### 3.1 Visão Geral do Método

Para os nossos propósitos, **carga** é um número real arbitrário.

Seja  $\mathcal{G}$  uma classe de grafos. Suponha que queremos provar que todo grafo em  $\mathcal{G}$  possui uma propriedade específica  $P$ . Uma forma é supor, por contradição, a existência de um grafo  $G$  em  $\mathcal{G}$  que não satisfaz a propriedade  $P$ . Atribua cargas aos elementos de  $G$  (vértices, arestas e faces). Esta atribuição obedece regras que variam de acordo com o problema. Usando a fórmula de Euler, mostramos que a carga total, ou seja, a soma das cargas atribuídas é alguma constante.

Em seguida, distribua as cargas de acordo com um conjunto de regras. Estas regras são definidas de acordo com características particulares do problema. Neste passo não podemos inserir nem remover nenhuma carga, apenas distribuí-las. Após a distribuição, mostramos que a carga total é diferente da carga total calculada antes da distribuição, o que é uma contradição. Concluimos daí que todo grafo de  $\mathcal{G}$  satisfaz a propriedade  $P$ .

Algumas vezes, provamos que determinadas estruturas implicam na propriedade  $P$  antes de aplicarmos o Método de Distribuição de Cargas. Por contradição, assumimos que existe um grafo em  $\mathcal{G}$  que não satisfaz a propriedade  $P$ . Partindo da suposição que  $G_0$  é um contra-exemplo mínimo, provamos que certas estruturas de vértices, arestas e faces não existem em  $G_0$ . Estas estruturas são chamadas de **configurações redutíveis**. Quando um conjunto de configurações redutíveis está definido, mostramos que é **inevitável**, ou seja, provamos que todo grafo em  $\mathcal{G}$  possui ao menos uma destas configurações. Isto prova que não existe um contra-exemplo mínimo para o problema, ou equivalentemente, todo grafo em  $\mathcal{G}$  possui a propriedade  $P$ . Este raciocínio simples é a base do método de distribuição de cargas.

Para mostrar que as configurações redutíveis são inevitáveis, recorreremos ao método de

distribuição de carga. Assumimos um grafo arbitrário  $G$  em  $\mathcal{G}$  e aplicamos cargas iniciais. Usando a fórmula de Euler mostramos que a carga total, por exemplo, é uma constante negativa. Aplicamos as regras de distribuição de carga. A carga total permanece negativa, pois as regras de distribuição de carga preserva a carga total. Conseqüentemente existe algum elemento com carga negativa em  $G$ . Provamos então que tais elementos estão próximos ou são exatamente as configurações redutíveis.

Algumas vezes não usamos nenhum conjunto de configurações redutíveis. Ao aplicar-mos cargas iniciais e regras de distribuição de cargas, derivamos a conclusão esperada.

## 3.2 Formulação

Em geral o Método de Distribuição de Cargas possui quatro passos divididos em duas partes. Primeiramente a **inicialização** seguida da **distribuição**.

Inicialização:

- Atribua cargas iniciais para certos elementos do grafo (vértices, arestas, faces, etc...);
- Compute a carga total atribuída ao grafo (normalmente utilizando a fórmula de Euler).

Distribuição:

- Distribua as cargas de acordo com as *regras de distribuição* (este é o passo principal do método, é importante que nenhuma carga seja adicionada ou perdida).
- Compute novamente a carga total e derive a conclusão.

Podemos dizer que este método é análogo á indução ou a outro método de prova matemática. Apenas descreve uma forma de provar alguma propriedade. Usualmente necessitamos de noções adicionais para podermos aplicar o método em problemas particulares. Na seção 3.3 mostramos algumas aplicações do método.

## 3.3 Exemplos

**Exemplo 3.3.1** *Todo grafo planar e simples possui um vértice de grau máximo 5.*

**Prova:** Considere uma imersão do grafo no plano. Atribuímos a cada vértice de grau  $d$  a carga  $6 - d$  e a cada face de tamanho  $|f|$  a carga  $2(3 - |f|)$ . Note que como o grafo é simples, cada face possui carga não positiva. A carga total é dada por:

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in V} (6 - d(v)) + \sum_{f \in F} 2(3 - |f|) \\ &= 6|V| - 2|E| + 6|F| - 4|E| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6(|V| - |E| + |F|) \\
&= 6 \cdot 2 \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Uma carga positiva indica a existência de algum elemento com carga maior do que zero. Como as faces possuem cargas não positivas, existe pelo menos um vértice  $v$  com carga  $6 - d_v > 0$ , e portanto  $d_v \leq 5$ . ■

Este exemplo é simples e não possui distribuição de cargas. O próximo exemplo executa distribuição de cargas.

**Exemplo 3.3.2** *Todo grafo planar simples  $G$ , com  $\delta \geq 3$ , possui um vértice de grau  $d$  incidente à uma face  $f$  de tamanho  $l$  onde  $d + l \leq 8$ .*

**Prova:** Considere uma imersão de  $G$  no plano. Chamamos a incidência vértice-face de **canto**. Para todo  $v \in V$  com grau  $d(v)$  atribua carga  $d(v) - 4$ , e para toda face  $f \in F$ , de tamanho  $|f|$ , atribua carga  $|f| - 4$ . Usando a fórmula de Euler, a carga total é:

$$\begin{aligned}
&\sum_{v \in V} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F} (|f| - 4) \\
&= 2|E| - 4|V| + 2|E| - 4|F| \\
&= 4(|E| - |V| - |F|) \\
&= -8.
\end{aligned}$$

Agora, na distribuição, todo  $v \in V$  envia  $\frac{d(v)-4}{d(v)}$  unidades de carga para os cantos do qual participa. Da mesma forma, toda  $f \in F$  envia  $\frac{|f|-4}{|f|}$  unidades de carga para os cantos que contém.

Após a distribuição, todos os vértices e faces de  $G$  possuem carga 0. Como a carga total continua negativa, há então um canto  $C$  com carga negativa. Suponha que  $C$  é incidente a  $v$ , com  $d(v) = d$ , e  $f$ , com  $|f| = l$ . A carga de  $C$  é  $\frac{d-4}{d} + \frac{l-4}{l} < 0$ . Logo,  $C$  recebe carga negativa de  $v$  ou de  $f$  (ou de ambos).

Suponha que  $C$  recebe carga negativa de  $v$ . Pela regra de distribuição, temos que  $d \leq 3$ . Mas, por hipótese,  $d \geq 3$ . Logo,  $d = 3$ . Assim, a carga de  $C$  é  $\frac{-1}{3} + \frac{l-4}{l} < 0$ , o que resulta em  $l \leq 5$ . Portanto,  $d + l \leq 8$ . O caso em que  $C$  recebe carga negativa de  $f$  é análogo. ■

# Capítulo 4

## 3-Coloração de Vértices

Neste capítulo nos referiremos a uma 3-coloração de vértices simplesmente por uma 3-coloração. Os resultados obtidos neste capítulo baseiam-se em dois artigos de autoria de M. Salavatipour [Sala02, Sala03]. Ele provou que todo grafo planar, sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 7\}$  admite uma 3-coloração dos vértices. Não provaremos este resultado devido ao seu alto grau de complexidade. O que faremos aqui é provar relaxações dele. Mais precisamente, provaremos que todo grafo planar sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, k\}$  admite uma 3-coloração pra  $k = 11, 10, 9$ .

### 4.1 Conjectura de Steinberg

Em 1976, Steinberg [Ste93, Aks74] conjecturou que todo grafo planar sem circuitos de tamanhos 4 e 5 admite uma 3-coloração.

Uma formulação equivalente desta conjectura é dada por: todo grafo planar 4-cromático possui circuitos de tamanho 4 ou 5. Este problema é discutido por Jensen e Toft [Jen95] (problema 2.9).

Erdős, em 1990, relaxou a conjectura de Steinberg, questionando a existência de um inteiro  $k \geq 5$ , onde todo grafo planar, sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, k\}$ , admite uma 3-coloração. Abbott e Zhou [Abb91] provaram que  $k = 11$  responde a questão.

#### 4.1.1 O Caso $\{4, \dots, 11\}$

**Teorema 4.1.1** ([Abb91]) *Todo grafo planar sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 11\}$  admite uma 3-coloração.*

**Prova:** Por contradição, assumimos que a hipótese é falsa e seja  $G(V, E)$  um contra-exemplo mínimo. Trivialmente  $G$  é conexo e simples. Além disso,  $G$  é 4-crítico.

Esta demonstração possui duas partes:

**Parte 1 (Configurações Redutíveis):** Mostraremos que (i) um vértice de grau no máximo 2 e (ii) um vértice de corte são configurações redutíveis.

(i) Seja  $v \in V$  um vértice de grau máximo 2. Como  $G$  é 4-crítico,  $G - \{v\}$  admite uma 3-coloração. Como  $v$  é adjacente a no máximo 2 vértices, podemos estender esta coloração ao vértice  $v$ , atribuindo a ele uma cor diferente das cores de seus vizinhos, obtendo uma 3-coloração de  $G$ , o que é uma contradição.

(ii) Seja  $v \in V$  um vértice de corte e  $C_1, \dots, C_k$  componentes conexas de  $G - v$ , com  $k \geq 2$ . Para  $1 \leq i \leq k$ , seja  $G_i$  o subgrafo de  $G$  gerado por  $V(C_i) \cup \{v\}$ . Por definição de  $G$ , todo  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , admite uma 3-coloração  $\phi_i : V(G_i) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ . Sem perda de generalidade e admitindo permutações de cores em alguns  $\phi_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , podemos assumir que  $\phi_i(v) = 1$ , para  $1 \leq i \leq k$ . A união destas colorações resulta em uma 3-coloração de  $G$ , o que é uma contradição.

Provaremos agora que este conjunto de configurações é inevitável, isto é, todo grafo planar sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 11\}$  possui ao menos um vértice de grau máximo dois ou um vértice de corte. Isto mostrará que não existe um contra-exemplo para o Teorema.

**Parte 2 (Distribuição):** Seja  $G$  um grafo planar simples sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 11\}$ . Considere uma imersão de  $G$  no plano.

Atribuamos as seguintes cargas para vértices e faces de  $G$ :

- Para cada  $v \in V$  com grau  $d(v)$  atribuimos carga  $d(v) - 6$ .
- Para cada face  $f$  de tamanho  $|f|$  atribuimos carga  $2|f| - 6$ .

A carga total é:

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2|f| - 6) = 2|E| - 6|V| + 4|E| - 6|F| = -12,$$

onde a última igualdade é obtida pela fórmula de Euler.

Como  $G$  é simples o tamanho das faces é pelo menos 3, e portanto todas as faces possuem carga não negativa. Se  $G$  possui um vértice de grau máximo 2, esta é uma configuração redutível. Caso contrário, o grau mínimo de  $G$  é pelo menos três. Por esta razão, os únicos vértices com carga negativa são os de grau 3, 4 ou 5.

Vamos agora adotar a seguinte regra de distribuição:

- Cada face  $f$  com  $|f| \geq 12$  envia  $\frac{3}{2}$  unidades de carga para cada vértice incidente.

Por hipótese  $G$  não possui circuito de tamanho 4, logo não possui duas faces de tamanho 3 com aresta em comum. Se  $G$  possui um vértice de corte, então possui uma configuração redutível. Caso contrário, todo  $v \in V$  é incidente a pelo menos  $\lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$  faces distintas com tamanho pelo menos 12. Considere um vértice  $v$  arbitrário:

- Se  $3 \leq d(v) \leq 5$  então  $v$  recebe pelo menos  $\frac{3}{2} \times \lceil \frac{3}{2} \rceil = 3$  unidades de carga. Sua carga inicial é  $d(v) - 6 \geq -3$ . Por esta razão  $v$  possui carga não negativa.
- Se  $d(v) \geq 6$ ,  $v$  possui carga inicial não negativa e não perde nenhuma carga na distribuição.

Portanto todos os vértices possuem carga não negativa após a distribuição. Vamos agora analisar as faces. Faces de tamanho 3 possuem carga inicial 0 e não perdem carga na distribuição. Não temos circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 11\}$  e portanto não existem faces de tamanho  $\{4, \dots, 11\}$ . Cada uma das demais faces possui tamanho mínimo 12 e envia um total de  $\frac{3}{2}|f|$  unidades de carga. O valor enviado não ultrapassa  $2|f| - 6$  para  $|f| \geq 12$ . Assim, todas as faces possuem carga não negativa depois da distribuição. Portanto, a carga total é não negativa. Por outro lado, já vimos anteriormente que a carga total inicial é igual a  $-12$ . Por esta contradição completamos a prova. ■

### 4.1.2 O Caso $\{4, \dots, 10\}$

Em 1996 Borodin [Bor96a] provou que a presença de circuitos de tamanho 11 também satisfaz a sentença.

**Teorema 4.1.2** ([Bor96a]) *Todo grafo planar sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 10\}$  admite uma 3-coloração.*

**Prova:** Por contradição, assumimos que a hipótese é falsa e seja  $G$  um contra-exemplo mínimo. Trivialmente  $G$  é conexo e simples. Além disso,  $G$  é 4-crítico. Considere uma imersão de  $G$  no plano.

**Parte 1 (Configurações Redutíveis):** Observe que as configurações redutíveis da prova do Teorema 4.1.1 (vértice de grau menor ou igual a 2 e vértice de corte) também são configurações redutíveis para esta prova.

**Parte 2 (Distribuição):** Para cada vértice  $v$  atribuímos carga  $d(v) - 6$  e para cada face  $f$  atribuímos carga  $2|f| - 6$ . Recorrendo à fórmula de Euler, temos que a carga total é  $-12$ . Mostraremos que após a aplicação das regras de distribuição teremos uma das configurações redutíveis ou carga total não negativa.

As regras de distribuição, utilizadas no Teorema 4.1.1, funcionam bem para faces de tamanho maior que 11. Em outras palavras, mostramos que temos a configuração redutível (vértice de grau dois ou vértice de corte) ou todos os vértices e as faces de tamanho mínimo 12 possuem carga não negativa.

Se adotarmos as mesmas regras de distribuição do Teorema 4.1.1, devemos mostrar que as faces de tamanho 11 terminam também com carga não negativa. Porém isto não é verdade, pois estas faces enviam  $\frac{3}{2} \times 11$  unidades de carga, este valor é maior que sua carga inicial 16.

Contornaremos este problema da seguinte forma: chamaremos de **vértice ruim** um vértice de grau 3 incidente a exatamente uma face triangular.

Alteramos as regras de distribuição para:

- Toda face  $f$  não triangular envia  $\frac{3}{2}$  unidades de carga para os vértices ruins e 1 unidade de carga para os outros vértices.

Depois da distribuição, se tivermos um vértice de grau máximo 2 ou um vértice de corte, o Teorema está provado. Por outro lado, por esta regra de distribuição, todo vértice  $v$  de grau 3 recebe pelo menos 3 unidades de carga: se  $v$  é um vértice ruim,  $v$  receberá  $\frac{3}{2}$  unidades de carga de cada face não triangular incidente, e se  $v$  não é ruim,  $v$  receberá 1 unidade de carga de cada uma das três faces incidentes. Um vértice  $v$  com  $d(v) \geq 4$  recebe ao menos 2 unidades de carga. Portanto, todo vértice possui carga não negativa após a distribuição.

Todas as faces de tamanho mínimo 12 enviam menos cargas que no Teorema 4.1.1, portanto mantêm a carga não negativa. Para uma face  $f$  de tamanho 11, é importante observar que  $f$  é incidente a no máximo 10 vértices ruins. Como  $f$  envia no máximo  $10 \times \frac{3}{2} + 1 = 16 = 2|f| - 6$ ,  $f$  terá carga não negativa, completando a prova. ■

Não obteremos sucesso ao permitindo os circuitos de tamanho 10, sem alterarmos as regras de distribuição. Note que as faces de tamanho 10 podem incidir em exatamente 10 vértices ruins e após a distribuição, cada face envia  $10 \times \frac{3}{2} > 2|f| - 6$  unidades de carga. Talvez, uma outra atribuição de cargas iniciais e outras regras de distribuição poderiam então provar a inclusão dos circuitos de tamanho 10. A figura 4.2 mostra um grafo planar sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 9\}$  e sem vértice de grau máximo 2 ou vértice de corte. Além disso, toda face de tamanho 10 incide em 10 vértices ruins. Em outras palavras, devemos olhar para um novo conjunto de configurações redutíveis.

### 4.1.3 O Caso $\{4, \dots, 9\}$

Seja  $\mathcal{G}_9$  a classe de grafos planares sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 9\}$ . O argumento do Teorema 4.1.2 falhará para alguns grafos em  $\mathcal{G}_9$ . O motivo é que uma face de tamanho 10 pode assumir carga negativa depois da distribuição, caso todos os seus 10 vértices sejam ruins. No grafo da figura 4.1.2, por exemplo, não há configurações redutíveis e qualquer face de tamanho 10 possui 10 vértices ruins.

Note que todo contra-exemplo mínimo para o Teorema 4.1.5 é um grafo  $G$  que é 4-crítico e se  $G \in \mathcal{G}_9$  então  $G - e \in \mathcal{G}_9$  para todo  $e \in E(G)$ .

**Afirmção 4.1.3** *Em um grafo planar 4-crítico toda face  $f$  com  $|f| = 2k$  ( $k \geq 2$ ) com no mínimo  $2k - 1$  vértices ruins.*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo planar 4-crítico. Considere uma imersão de  $G$  no plano. Seja  $f$  uma face de tamanho  $2k$  com os vértices denotados em sentido horário por  $v_1, \dots, v_{2k}$ . Por

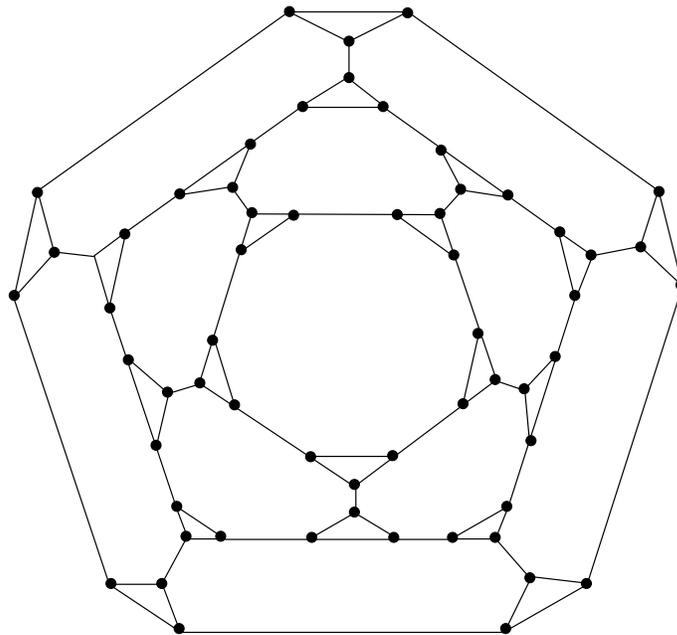


Figura 4.1: Grafo planar conexo onde  $\delta \geq 3$  e sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 9\}$ .

contradição, assumimos que  $v_1, \dots, v_{2k-1}$  são vértices ruins. Isto implica que estes vértices possuem grau 3 e cada um deles é incidente a exatamente uma face triangular. Além disso,  $v_{2k}$  é um vértice ruim ou possui grau mínimo 4.

Sem perda de generalidade, assumimos que os vértices  $v_{2i-1}$  e  $v_{2i}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) são incidentes ao mesmo triângulo. Como  $G$  é 4-crítico, existe uma 3-coloração de  $G - v_1v_{2k}$ . Chamaremos esta coloração de  $\phi$ . Como  $G$  não admite uma 3-coloração,  $\phi(v_1) = \phi(v_{2k})$ . Sem perda de generalidade, assumimos que  $v_1$  e  $v_{2k}$  possuem a cor 1.

Afirmamos agora que  $\phi(v_3) = 1$ , caso contrário, poderíamos trocar  $\phi(v_1)$  com  $\phi(v_2)$ , obtendo uma 3-coloração de  $G$ .

Usando argumentos similares, podemos mostrar que  $\phi(v_5) = 1$  e generalizar, por indução, mostrando que  $\phi(v_{2i+1}) = 1$ , para  $0 \leq i \leq k-1$ . Porém  $\phi(v_{2k-1})$  não pode ser igual a 1, pois o vértice  $v_{2k-1}$  é adjacente a  $v_{2k}$  e  $\phi(v_{2k}) = 1$ . Esta contradição completa a prova. ■

**Observação 4.1.4** *Note que a prova da Afirmação 4.1.3 mostra que qualquer 3-coloração de  $G - v_1v_{2k}$  pode ser estendida para uma 3-coloração de  $G$ .*

Agora temos um novo conjunto de configurações redutíveis. As duas primeiras foram apresentadas no Teorema 4.1.2.

Utilizando o Método de Distribuição de Carga vamos provar que todo  $G \in \mathcal{G}_9$  possui ao menos uma destas configurações.

Quando Salavatipour [Sala02] começou a trabalhar neste problema, a melhor resposta

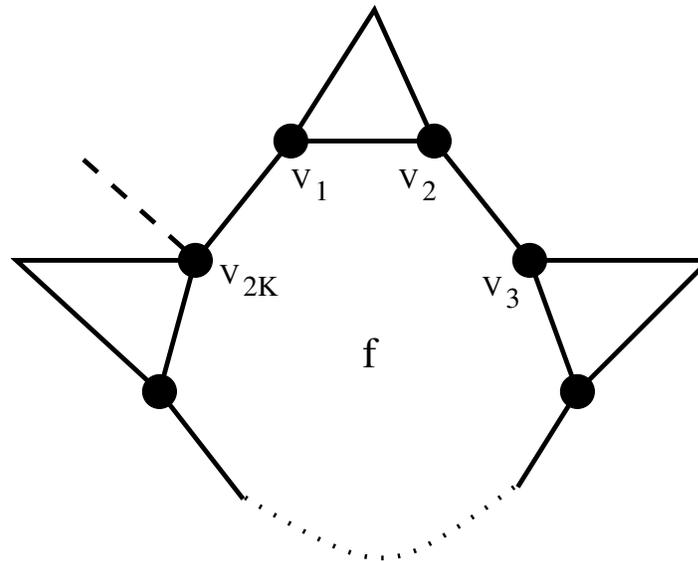


Figura 4.2: Face de tamanho  $2k$  incidente a no máximo  $2k - 1$  vértices ruins.

conhecida era  $k = 9$ , devido a Borodin [Bor96b] e de forma independente por Sanders e Zhao [Sand95].

**Teorema 4.1.5** ([Bor96b] [Sand95]) *Todo grafo planar sem circuitos de tamanho  $\{4, \dots, 9\}$  admite uma 3-coloração.*

**Prova:** Por contradição, assumimos que a hipótese é falsa e seja  $G$  um contra-exemplo mínimo. Trivialmente  $G$  é conexo e simples. Além disso,  $G$  é 4-crítico. Considere uma imersão de  $G$  no plano.

**Parte 1 (Configurações Redutíveis):**

- Vértice de grau no máximo 2;
- Vértice de corte;
- Face de tamanho  $2k$  com no mínimo  $2k - 1$  vértices ruins.

**Parte 2 (Distribuição):**

O conjunto inicial de cargas e as regras de distribuição são os mesmos do Teorema 4.1.2. Recorrendo à fórmula de Euler calculamos a carga total que é  $-12$ .

Através dos mesmos argumentos do Teorema 4.1.2 provamos a redutibilidade do vértice de corte e vértice de grau máximo 2. Se o grafo  $G \in \mathcal{G}_9$  e possui um vértice de corte ou um vértice de grau máximo 2, está provado que este admite uma 3-coloração. Pelos mesmo argumentos do Teorema 4.1.2 todo vértice e toda face de tamanho pelo menos 11

possui carga não negativa após a distribuição. Se a carga total continua negativa após a distribuição, existe alguma face  $f$  de tamanho 10 com carga negativa.

Isto implica que  $f$  deve ser incidente a no mínimo 9 vértices ruins para garantir carga negativa após a distribuição. Porém esta estrutura é reduzida pela Afirmação 4.1.3. Então  $G$  contém ao menos uma dentre estas configurações e completamos a prova. ■

Salavatipour [Sala03] conseguiu mostrar que a questão de Erdős é verdadeira para  $k = 8$  e em seguida para  $k = 7$ . Este é o melhor resultado que se conhece para o problema.

Estes resultados também utilizam o método de distribuição de cargas, mas não serão apresentados aqui por serem muito extensos e possuírem alto grau de dificuldade, o que foge do escopo do nosso trabalho.

# Capítulo 5

## Coloração Simultânea

Neste capítulo veremos resultados obtidos por D. P. Sanders e J. Maharry [Sand00]. Eles mostraram que todo grafo com grau máximo  $\Delta$  relativamente grande em relação ao gênero<sup>1</sup> do grafo, possui número cromático aresta-face no máximo  $\Delta + 1$  e número cromático vértice-aresta-face no máximo  $\Delta + 2$ .

### 5.1 Coloração Simultânea de Grafos Imersos

Por conveniência, o termo **adjacente** representará também o termo **incidente**. Por exemplo em um grafo planar 2-conexo, um vértice de grau  $k$  é adjacente a  $k$  vértices,  $k$  arestas e  $k$  faces.

Em 1977, Appel e Haken [ApHa77] provaram o Teorema das Quatro Cores. Como o grafo dual de um grafo planar também é planar, então  $\chi_v(G) = \chi_f(G)$ . Seja  $\varepsilon(\Sigma)$  a característica de Euler de uma superfície  $\Sigma$ . Tomamos então  $H(\Sigma) := \lfloor (7 + \sqrt{49 - 24\varepsilon(\Sigma)})/2 \rfloor$ , conhecido como número de Heawood. Este número aparece em vários limites superiores para números cromáticos, como veremos a seguir. Em 1890 Heawood [Hea90] provou um limite para os seguintes números cromáticos:

**Lema 5.1.1** ([Hea90]) *Para uma superfície  $\Sigma$ ,  $\chi_f(\Sigma) \leq H(\Sigma)$  e  $\chi_v(\Sigma) \leq H(\Sigma)$ .*

Em 1984, Borodin [Bor84] (veja também [Bor95]) mostrou que  $\chi_{vf}(\text{plano}) = 6$ . Um limite superior do número cromático de vértice-face em grafos imersos em uma superfície não planar foi dado por Ringel [Rin81].

**Lema 5.1.2** ([Rin81]) *Para uma superfície não planar  $\Sigma$ ,  $\chi_{vf}(\Sigma) \leq (2/\sqrt{3})H(\Sigma) + 1$ .*

Para o problema de coloração de arestas, temos um limite inferior natural, o grau máximo de  $G$ , denotado por  $\Delta(G)$ . Assim, para toda superfície  $\Sigma$  e um inteiro positivo

---

<sup>1</sup>O **gênis** de um grafo  $G$  é o menor valor  $k$  tal que  $G$  pode ser imerso no plano com  $k$  cruzamentos de arestas. Por exemplo, todo grafo planar tem gênero 0. O grafo  $K_{3,3}$  tem gênero 1.

$\Delta$ , tome  $\chi_e(\Sigma, \Delta)$  como o número mínimo  $k$  onde todo grafo de grau máximo pelo menos  $\Delta$  imerso em  $\Sigma$  é  $k$ -aresta colorível. Defina  $\chi_{ve}(\Sigma, \Delta)$ ,  $\chi_{ef}(\Sigma, \Delta)$  e  $\chi_{vef}(\Sigma, \Delta)$  similarmente.

Em 1964, Vizing [Viz64] provou o seguinte teorema de coloração de arestas. Sanders e Maharry [Sand00] reescreveu este teorema para superfícies.

**Lema 5.1.3** ([Viz64]) *Toda superfície  $\Sigma$  e todo inteiro positivo  $\Delta$  satisfaz  $\chi_e(\Sigma, \Delta) \leq \Delta + 1$ .*

Ele também conjecturou que  $\chi_{ve}(\Sigma, \Delta) \leq \Delta + 2$ . Esta conjectura ainda não foi provada. Porém, houve muitos progressos para este problema. Note que um limite inferior natural para esta questão é  $\Delta + 1$ , considerando um vértice de grau máximo e as arestas adjacentes a ele.

Em 1975, Melnikov [Mel75] conjecturou que  $\chi_{ef}(\text{plano}, \Delta) \leq \Delta + 3$ . Esta conjectura foi provada por Sanders e Zhao [Sand].

Em 1972, Kronk and Mitchem [Kro73] conjecturaram que  $\chi_{vef}(\text{plano}, \Delta) \leq \Delta + 4$ . Borodin [Bor95] provou esta conjectura para  $\Delta \geq 7$ .

Borodin (veja a página 53 de [Jen95]) provou que  $\chi_{vef}(\text{plano}, \Delta) = \Delta + 2$  para  $\Delta \geq 12$  e  $\chi_{ef}(\text{plano}, \Delta) = \Delta + 1$  para  $\Delta \geq 10$ . O resultado obtido por Sanders e Maharry [Sand00] é uma extensão deste resultado para outras superfícies.

## 5.2 O Teorema Principal

Veremos então a prova descrita por Sanders e Maharry [Sand00]. Nesta prova o método de distribuição de cargas é usado para provar que  $\chi_{ef}(\Sigma, \Delta) = \Delta + 1$  e  $\chi_{vef}(\Sigma, \Delta) = \Delta + 2$ , onde  $\Delta$  é “grande” em relação a característica de Euler  $\varepsilon$  da superfície  $\Sigma$ .

Seja  $G$  um grafo imerso em uma superfície  $\Sigma$  com característica de Euler  $\varepsilon \leq 0$ . Sem perda de generalidade assumamos que  $G$  é conexo.

### 5.2.1 Configurações Redutíveis

O grafo  $G$  possui ao menos uma das seguintes configurações:

1. Vértice de grau no máximo 1;
2. Face  $f$  com  $|f| \leq 18 - 18\varepsilon$  adjacente a uma aresta  $e$ , onde  $e$  é adjacente a dois vértices de grau no máximo  $12 - 12\varepsilon$ ;
3. Vértice de grau 2 adjacente a duas faces de tamanho no máximo 17;
4. Vértice de grau 2 adjacente a dois vértices de grau 2.

Se  $\sigma \in \{v, e, f, ve, vf, ef, vef\}$  então  $G$  admite uma  $(\sigma, n)$ -coloração se  $\chi_\sigma \leq n$ . Seja  $G$  um grafo conexo imerso em uma superfície  $\Sigma$ . Dizemos que  $G$  é  $(\sigma, n)$ -minimal se não admite uma  $(\sigma, n)$ -coloração e todo grafo conexo  $H$  imerso em  $\Sigma$ , com menos arestas do que  $G$  e  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , admite uma  $(\sigma, n)$ -coloração. Um elemento é  $(\sigma, k)$ -reduzível se está presente em um grafo não  $(\sigma, n)$ -minimal para qualquer  $n \geq k$ . Note que se um elemento é  $(\sigma, k)$ -reduzível então também é  $(\sigma, j)$ -reduzível para todo  $j > k$ .

Encontraremos valores de  $k$  para provar que as configurações acima são reduzíveis. Mostraremos que estes elementos são  $(\sigma, k)$ -reduzível para vários valores de  $\sigma$ .

**Lema 5.2.1** *Seja  $v$  um vértice de  $G$  com  $d(v) \leq 1$ , então  $v$  é  $(vef, MAX(\Delta + 2, 4))$ -reduzível,  $(ef, MAX(\Delta + 1, 3))$ -reduzível,  $(ve, MAX(\Delta + 1, 3))$ -reduzível e  $(vf, 3)$ -reduzível.*

**Prova:** Provaremos que  $v$  é  $(vef, MAX(\Delta + 2, 4))$ -reduzível. Os outros três casos são provados de forma similar.

Para  $n \geq MAX(\Delta + 2, 4)$ , suponha que  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal. Seja  $e \in E(G)$  a aresta adjacente a  $v$ . Claramente  $G$  possui no mínimo 2 vértices. Seja  $H = G - \{v\}$ . Como  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal,  $H$  conexo e  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ ,  $H$  admite uma  $(vef, n)$ -coloração. Isto induz em uma coloração parcial de  $G$ . Vamos agora estende-la para uma  $(vef, n)$ -coloração de  $G$ , atribuindo cores à aresta  $e$  e ao vértice  $v$ .

Para colorir a aresta  $e$ , precisamos de no máximo  $\Delta + 2$  cores, pois  $e$  é adjacente a no máximo  $\Delta - 1$  arestas, uma face e um vértice ( $v$  ainda não possui coloração). Temos então alguma cor disponível para a aresta  $e$ . Coloriremos esta aresta.

Como  $v$  é adjacente a um vértice, uma aresta e uma face, precisaremos apenas de quatro cores para colorir o vértice  $v$ . Podemos colorir o vértice  $v$ . Isto implica uma  $(vef, n)$ -coloração de  $G$ , o que é uma contradição. ■

Para os lemas a seguir é possível que alguma aresta  $e$ , removida do grafo  $G$ , seja uma aresta de corte. Assim o grafo  $H = G - \{e\}$  é desconexo e esta aresta é adjacente duas vezes a uma face  $f$  em  $G$ . Neste caso não será possível colorir diretamente por indução o grafo  $H$ . Para contornarmos este problema, coloriremos as componentes de  $H$  imersas em  $\Sigma$  individualmente de forma que a face externa comum a ambas as componentes possuam a mesma cor e os extremos de  $e$  possuam cores distintas. Esta coloração pode então ser combinada para formar uma coloração de  $G$ , atribuindo à face  $f$  de  $G$  a cor da face compartilhada pelas duas componentes. Sem perda de generalidade, suponha que a aresta a ser removida nos lemas a seguir não é de corte.

**Lema 5.2.2** *Seja  $f$  uma face de  $G$  com  $|f| \leq 18 - 18\varepsilon$  adjacente a uma aresta  $e$ , onde  $e$  é adjacente a dois vértices  $x$  e  $y$  de grau máximo  $12 - 12\varepsilon$ , então  $f$  é  $(vef, 53 - 54\varepsilon)$ -reduzível,  $(ef, 36 - 36\varepsilon)$ -reduzível,  $(ve, 25 - 24\varepsilon)$ -reduzível e  $(vf, 36 - 36\varepsilon)$ -reduzível.*

**Prova:** Provaremos que  $f$  é  $(vef, 53 - 54\varepsilon)$ -reduzível. Os outros três casos são provados de forma similar.

Para  $n \geq 53 - 54\varepsilon$ , suponha que  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal. Seja  $f'$  a outra face adjacente a  $e$ . Seja  $H = G - \{e\}$ . Como  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal e  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ , então  $H$  admite uma  $(vef, n)$ -coloração. Isto induz uma  $(vef, n)$ -coloração parcial de  $G$ , onde assumimos que  $f'$  recebe a cor da face de  $H$  que não está presente em  $G$  (face formada pela remoção da aresta  $e$ ). A cor dos vértices  $x$  e  $y$  pode ser a mesma, pois estes não são adjacentes em  $H$ . Por conveniência, removemos a cor do vértice  $x$ .

Assim  $G$  possui três elementos sem cor:  $x, e$  e  $f$ . Como  $|f| \leq 18 - 18\varepsilon$ ,  $f$  é adjacente a no máximo  $18 - 18\varepsilon$  vértices,  $18 - 18\varepsilon$  arestas e  $18 - 18\varepsilon$  faces. Como  $x$  e  $e$  não possuem coloração então os elementos já coloridos e adjacentes a  $f$  utilizam no máximo  $52 - 54\varepsilon$  cores. Temos então alguma cor disponível para colorir a face  $f$ . Coloriremos  $f$  com esta cor.

Considere agora o vértice  $x$ . Como  $d(x) \leq 12 - 12\varepsilon$  existem então no máximo  $12 - 12\varepsilon$  arestas,  $12 - 12\varepsilon$  faces e  $12 - 12\varepsilon$  vértices adjacentes a  $x$ . A aresta  $e$  permanece não colorida, então  $x$  é adjacente à no máximo  $35 - 36\varepsilon$  elementos já coloridos. Existe então uma cor disponível para colorir o vértice  $x$ . Coloriremos então  $x$  com esta cor.

Finalmente, considerando a aresta  $e$ . Como  $e$  é adjacente a no máximo  $22 - 24\varepsilon$  arestas, dois vértices e duas faces, então  $e$  é adjacente à no máximo  $26 - 24\varepsilon$  elementos já coloridos. Assim a aresta  $e$  pode ser colorida completando a  $(vef, n)$ -coloração de  $G$ , o que é uma contradição. ■

**Lema 5.2.3** *Seja  $v$  um vértice de  $G$  com  $d(v) = 2$  adjacente a duas faces  $f$  e  $f'$  de tamanho máximo 17, então  $v$  é  $(vef, MAX(\Delta + 2, 50))$ -reduzível,  $(ef, MAX(\Delta + 1, 34))$ -reduzível,  $(ve, MAX(\Delta + 2, 5))$ -reduzível e  $(vf, 33)$ -reduzível.*

**Prova:** Provaremos que  $v$  é  $(vef, MAX(\Delta + 2, 50))$ -reduzível. Os outros três casos são provados de forma similar.

Para  $n \geq MAX(\Delta + 2, 50)$ , suponha que  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal. Sejam  $y$  e  $z$  os vértices adjacentes a  $v$ . Sejam  $vy$  e  $vz$  as arestas adjacentes a  $v$ . Seja  $H = G - \{v\}$ . Como  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal e  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ ,  $H$  admite uma  $(vef, n)$ -coloração. Isto induz uma  $(vef, n)$ -coloração parcial de  $G$  onde  $v, vy, vz, f$  e  $f'$  não possuem coloração.

A aresta  $vz$  possui como elementos adjacentes já coloridos no máximo  $\Delta - 1$  arestas e o vértice  $z$ . Existe então uma cor extra para  $vz$ . A aresta  $vy$  possui como elementos adjacentes já coloridos no máximo  $\Delta$  arestas e o vértice  $y$ . Então existe uma cor disponível para  $vy$ .

A face  $f$  possui no máximo 15 faces, 17 arestas e 16 vértices adjacentes já coloridos, totalizando 48 cores. Podemos então colorir  $f$ . A face  $f'$  possui no máximo 16 faces, 17 arestas e 16 vértices adjacentes já coloridos, totalizando 49 cores. Podemos então colorir  $f'$ .

Finalmente o vértice  $v$  possui seis elementos adjacentes já coloridos  $(y, z, vy, vz, f$  e  $f')$ . Podemos então colorir este elemento. Temos então uma  $(vef, n)$ -coloração de  $G$ , o que é uma contradição. ■

**Lema 5.2.4** *Seja  $v$  um vértice de  $G$  com  $d(v) = 2$  adjacente a dois vértices  $y$  e  $z$  de grau 2, então  $v$  é  $(vef, 7)$ -reduzível,  $(ef, 5)$ -reduzível,  $(ve, 5)$ -reduzível e  $(vf, 5)$ -reduzível.*

**Prova:** Provaremos que  $v$  é  $(vef, 7)$ -reduzível. Os outros três casos são provados de forma similar.

Para  $n \geq 7$ , suponha que  $G$  é  $(vef, n)$ -minimal. Sejam  $f$  e  $f'$  as duas faces adjacentes ao vértice  $v$ . Seja  $H$  o grafo obtido a partir da contração da aresta  $vy$ . Contraíndo  $vy$  não criamos arestas paralelas em  $H$ , a menos que  $y$  e  $z$  sejam adjacentes. Neste caso  $G$  seria um triângulo e poderíamos colorir  $G$  trivialmente. A contração de  $vy$  mantém  $H$  conexo e  $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ . Como  $G$  é  $(vef)$ -minimal, temos que  $H$  admite uma  $(vef, n)$ -coloração. Isto induz uma  $(vef, n)$ -coloração parcial de  $G$ , onde o vértice  $y$  assume a cor do vértice de  $H$  obtido pela contração da aresta  $vy$ .

A aresta  $vy$  possui adjacência com 2 arestas, 2 faces e o vértice  $y$ , todos já coloridos. Temos uma cor disponível para a aresta  $vy$ . Podemos colorir  $vy$  com segurança.

Finalmente o vértice  $v$  possui adjacência com dois vértices, duas arestas e duas faces, todos já coloridos. Podemos facilmente colorir  $v$ . Assim  $G$  admite uma  $(vef, n)$ -coloração, o que é uma contradição. ■

## 5.2.2 Distribuição

Provaremos agora que estas configurações são inevitáveis, isto é, todo grafo  $G$  imerso em uma superfície  $\Sigma$ , com característica de Euler  $\varepsilon \leq 0$ , possui uma das quatro configurações reduzíveis.

Assumimos, por contradição, que  $G$  não possui nenhuma das configurações reduzíveis. Atribuímos as seguintes cargas iniciais:

- Para todo vértice  $v \in V(G)$ , atribuímos  $6 - 2d(v)$  unidades de carga;
- Para toda face  $f \in F(G)$ , atribuímos  $6 - |f|$  unidades de carga;

Denotaremos por  $\mu(x)$  a carga inicial de  $x$ , onde  $x \in V(G) \cup F(G)$ . Lembre-se de que a fórmula geral de Euler é  $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = \varepsilon$ . Como a soma dos graus dos vértices (ou tamanho das faces) é igual a duas vezes o número de arestas, temos que:

$$\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \mu(x) = 6\varepsilon. \quad (5.1)$$

Segue as regras de distribuição de cargas:

1. Cada face  $f$  com  $|f| \leq 5$  envia  $\frac{3}{2}$  unidades de carga para cada vértice adjacente  $v$  com  $d(v) \geq 12$ ;

2. Cada vértice  $v$  com grau igual a 2 envia 1 unidade de carga para cada face adjacente  $f$  com  $|f| \geq 18$ ;
3. Cada vértice  $v$  com grau igual a 2 adjacente a uma face  $f$  com  $|f| \geq 18$  envia  $\frac{1}{2}$  unidade de carga para cada vértice  $w$  onde  $d(w) \geq 13 - 12\varepsilon$  e  $w$  adjacente a  $f$  e a  $v$ .

Denotaremos por  $\mu'(x)$  a carga de  $x$  após a distribuição, onde  $x \in V(G) \cup F(G)$ .

Mostraremos que todas as faces e vértices de  $G$  possui carga não positiva após a distribuição.

Considere a carga, após a distribuição, de uma face  $f \in F(G)$  com  $|f| \geq 18$ . A única carga enviada à  $f$  é originária da regra de distribuição 2, enviada por um vértice  $v$ , onde  $d(v) = 2$  e  $v$  adjacente a  $f$ . Supondo que não exista três vértices, de grau 2, consecutivos em torno de  $f$  (nesse caso consideraríamos uma configuração redutível do tipo 4), teremos no máximo  $\lfloor 2\frac{|f|}{3} \rfloor$  vértices de grau 2 adjacentes a  $f$ . Portanto a  $\mu'(f) \leq 6 - |f| + \lfloor 2\frac{|f|}{3} \rfloor \leq 0$ .

A carga de uma face  $f$  com  $6 \leq |f| \leq 17$  não é alterada na distribuição de cargas, portanto  $\mu'(f) = \mu(f) \leq 0$ .

Considere a carga de uma face  $f \in F(G)$  após a distribuição, com  $|f| \leq 5$ . Pela ausência da configuração redutível 2 e o fato que  $\varepsilon \leq 0$ , não existe aresta  $e$  adjacente a  $f$  e a dois vértices de grau menor do que 12. Temos então pelo menos dois vértices de grau mínimo 12 adjacentes a  $f$ . Pela regra de distribuição 1,  $f$  envia no mínimo 3 unidades de carga para estes dois vértices. Como  $\mu(f) \leq 3$ , então  $\mu'(f) \leq 0$ . Terminamos assim a análise das faces. Vamos agora analisar os vértices.

Considere a carga do vértice  $v$  de grau 2, vizinho dos vértices  $y$  e  $z$ . Pela ausência da configuração redutível 3, pelo menos uma das faces  $f$  adjacentes a  $v$  possui  $|f| \geq 18$ . Pela regra de distribuição 2, se ambas as faces adjacentes a  $v$  possuem tamanho pelo menos 18,  $v$  envia pelo menos 2 unidades de carga e não recebe carga alguma. Assim  $\mu'(v) \leq \mu(v) - 2 \leq 0$ . Por outro lado, se uma das faces adjacentes a  $v$  possui tamanho menor do que 18, então pela ausência da configuração redutível 2,  $y$  e  $z$  possuem grau pelo menos  $13 - 12\varepsilon$ . Assim  $v$  envia, pela regra 3,  $\frac{1}{2}$  unidade de carga para  $y$ ,  $\frac{1}{2}$  unidade de carga para  $z$  e 1 unidade de carga para  $f$  pela regra 2. Como  $v$  não recebe nenhuma carga, então  $\mu'(v) \leq \mu(x) - 2 \leq 0$ .

Considerando a carga do vértice  $v$  com  $3 \leq d(v) \leq 11$ . A carga inicial de  $v$  é no máximo 0 e nenhuma carga é recebida por  $v$  durante a distribuição.

Considere a carga do vértice  $v$  após a distribuição, onde  $d(v) \geq 12$ . Cada face  $f$ , adjacente a  $v$ , envia  $\frac{3}{2}$  unidades de carga pela regra 1 (se  $|f| \leq 5$ ), ou os dois vértices adjacentes à  $f$  e a  $v$  envia, cada um, no máximo  $\frac{1}{2}$  unidade de carga através da aplicações da regra 3 (se  $|f| \geq 18$ ). A regra 2 não é aplicada nesse caso. Temos que  $\mu'(v) \leq 6 - 2d(v) + \frac{3}{2}d(v) \leq 0$ .

Assim, temos que todos os elementos de  $G$  possuem carga não positiva.

Se toda face de  $G$  possui tamanho menor do que  $19 - 18\varepsilon$  e todo vértice de  $G$  possui grau menor do que  $13 - 12\varepsilon$ , então  $G$  possui a configuração redutível 2. Conseqüentemente,

assumimos que temos um vértice  $v$  com  $d(v) \geq 13 - 12\varepsilon$  ou uma face  $f$  com  $|f| \geq 19 - 18\varepsilon$ . Se um tal  $v$  existe, temos que  $\mu'(v) \leq \mu(v) + \frac{3}{2}d(v) = 6 - \frac{1}{2}d(v) = 6 - \frac{1}{2}(13 - 12\varepsilon) < 6\varepsilon$ . Por outro lado, se  $f$  existe, temos que  $\mu'(f) \leq \mu + \frac{2}{3}|f| = 6 - \frac{1}{3}|f| = 6 - \frac{1}{3}(19 - 18\varepsilon) < 6\varepsilon$ .

Como todos os elementos possuem carga não positiva, após a distribuição, e desde que um elemento possua carga menor que  $6\varepsilon$ , após a distribuição, segue que  $\sum_{x \in V(G) \cup F(G)} < 6\varepsilon$ . Como a soma das cargas iniciais é diferente da soma das cargas após a distribuição, temos uma contradição sobre a equação 5.1.

**Teorema 5.2.5** *Seja  $G$  um grafo imerso em uma superfície  $\Sigma$  com característica de Euler  $\varepsilon \leq 0$ .*

- Para  $\Delta \geq 51 - 54\varepsilon$ ,  $\chi_{vef}(\Sigma, \Delta) = \Delta + 2$ ;
- Para  $\Delta \geq 35 - 36\varepsilon$ ,  $\chi_{ef}(\Sigma, \Delta) = \Delta + 1$ ;
- Para  $\Delta \geq 23 - 24\varepsilon$ ,  $\chi_{ve}(\Sigma, \Delta) = \Delta + 2$ .

**Prova:** Mostraremos que  $G$ , com  $\Delta \geq 51 - 54\varepsilon$ , possui  $\chi_{vef}(\Sigma, \Delta) = \Delta + 2$ . Os outros dois casos podem ser demonstrados de forma análoga.

Suponha por absurdo que  $G$  é um contra-exemplo mínimo, possui  $\Delta \geq 51 - 54\varepsilon$  e é  $(vef, \Delta + 2)$ -minimal. Como demonstramos no início desta seção, o grafo  $G$  possui ao menos uma das configurações a seguir:

1. Vértice de grau máximo 1;
2. Face  $f$  com  $|f| \leq 18 - 18\varepsilon$  adjacente a uma aresta  $e$ , onde  $e$  é adjacente a dois vértices de grau máximo  $12 - 12\varepsilon$ ;
3. Vértice de grau igual a 2 adjacente a duas faces de tamanho máximo 17;
4. Vértice de grau 2 adjacente a dois vértices de grau igual a 2.

Pelos Lemas 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 e 5.2.4 temos que estas configurações são  $(vef, \Delta + 2)$ -reduzíveis, logo  $G$  não é um contra-exemplo mínimo, o que é uma contradição. ■

Estes argumentos têm o propósito de serem simples. Com argumentos de distribuição (regra de distribuição e configurações reduzíveis) mais complexos, podemos reduzir este limite para  $\Delta$  nos argumentos do Teorema 5.2.5.

# Capítulo 6

## Simetria em Grafos

Neste capítulo veremos resultados obtidos em 2005 por V. A. Aksionov, O. V. Borodin, *et al.* [Aks01]. Eles mostraram que removendo no máximo cinco arestas de qualquer grafo planar simples, geramos um grafo que possui um automorfismo não trivial. Além disso, o limite de cinco arestas não pode ser reduzido para quatro arestas.

### 6.1 Grafos Planares Assimétricos

Em 1963, Erdős e Rényi [Erd63] provaram que a maioria dos grafos são assimétricos. Mais precisamente, provaram que se  $s(n)$  é o número mínimo de arestas que devem ser adicionadas e/ou removidas de um grafo com  $n$  vértices a fim de produzir um grafo com automorfismo não trivial, então  $s(n) = \frac{(n-1)}{2}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(n)}{n} = \frac{1}{2}$ . Em 2001, V. A. Aksionov, O. V. Borodin, *et al.* [Aks01] provaram o Teorema a seguir, onde uma *transposição* entre dois vértices  $x$  e  $y$  é um automorfismo que leva  $x$  em  $y$ ,  $y$  em  $x$ , e é idêntico para os demais vértices.

**Teorema 6.1.1** ([Aks01]) *Todo grafo planar, com ao menos dois vértices, contém um conjunto  $A$  de no máximo cinco arestas que se removidas produz um grafo que possui um automorfismo não trivial. Mais precisamente,  $A$  pode ser escolhido de forma que o grafo  $H := G - A$  possui um par de vértices  $x, y$  tal que a transposição entre  $x$  e  $y$  é um automorfismo de  $H$ .*

Todos os grafos considerados são finitos, não dirigidos e simples. Seja  $G$  um grafo plano. Uma aresta  $e$  é chamada de **fraca** se  $e$  é incidente a duas faces triangulares. Se  $e$  é incidente à apenas uma face triangular, chamaremos  $e$  de **semi-fraca**. O **peso** de uma aresta  $e$  é a soma dos graus dos vértices nos quais  $e$  incide. Em 1955 Kotzig [Kot55] provou que todo grafo planar 3-conexo possui uma aresta com peso no máximo 13 e este limite é o melhor possível. Em 1993, Borodin [Bor93] provou que todo grafo planar possui ao menos uma aresta fraca de peso no máximo 13, ou uma aresta semi-fraca de peso máximo 10, ou alguma aresta de peso máximo 8 e estes três limites são os melhores possíveis. Seguindo a mesma linha, Aksionov mostrou o seguinte resultado:

**Teorema 6.1.2** ([Aks01]) *Todo grafo planar, simples e conexo com ao menos dois vértices possui uma aresta fraca de peso no máximo 11 ou uma aresta semi-fraca de peso no máximo 9, ou dois vértices onde a soma de seus graus é no máximo 5, ou dois vértices com distância um ou dois, onde a soma de seus graus é no máximo 7.*

A prova deste Teorema é o foco principal deste capítulo. Primeiramente veremos como o Teorema 6.1.1 segue do Teorema 6.1.2.

**Prova do Teorema 6.1.1:** Seja  $G$  um grafo planar com pelo menos 2 vértices. Se  $G$  possui dois vértices isolados, o Teorema obviamente é verdadeiro. Caso contrário,  $G$  possui uma componente conexa com pelo menos dois vértices. Pelo Teorema 6.1.2 segue que, em seus quatro casos, existe um conjunto  $A$ , de no máximo cinco arestas, onde  $H := G - A$  possui um par  $P$  de vértices  $x$  e  $y$  com vizinhança idêntica fora de  $P$ . Consequentemente  $H$  contém uma transposição entre  $x$  e  $y$ . ■

Aksinov [Aks01] também mostrou que o Teorema 6.1.1 não é verdadeiro se substituirmos cinco arestas por quatro arestas.

**Teorema 6.1.3** ([Aks01]) *Existe uma infinidade de grafos planares assimétricos que mantêm-se assimétricos quando removemos qualquer conjunto de no máximo quatro arestas.*

A prova deste Teorema será abordada na seção 6.3.

## 6.2 Prova do Teorema 6.1.2

A prova do Teorema 6.1.2 é baseada no método de distribuição de cargas. Tome  $G$  como um possível contra-exemplo, ou seja, um grafo  $G$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- a.  $G$  é plano, simples e conexo com um conjunto de vértices  $V$ , conjunto de arestas  $E$  e conjunto de faces  $F$ , onde  $|V| \geq 2$ ;
- b. Toda aresta fraca de  $G$  possui peso no mínimo 12, e toda aresta semi-fraca possui peso no mínimo 10;
- c. Se  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$ , então:
  - a soma dos graus de  $x$  e  $y$  é no mínimo 6;
  - se a distância de  $x$  à  $y$  é no máximo 2 a soma dos graus de  $x$  e  $y$  é no mínimo 8.

Um vértice com grau  $k$  será chamado de  **$k$ -vértice** e uma face de tamanho  $k$  de  **$k$ -face**. As três propriedades a seguir são conseqüências imediatas das propriedades (a) e (c).

Por hipótese,  $G$  é conexo. Se  $|V| = 2$  então a soma dos graus dos dois vértices de  $G$  é 2. Se  $G$  tem dois vértices de grau máximo 2 então a soma dos graus desses vértices é no máximo 4, ou seja,  $G$  possui as seguintes propriedades:

- d. O grafo  $G$  possui ao menos três vértices, nenhum vértice isolado e no máximo um vértice de grau 1 ou 2.
- e. Se  $f \in F$  é uma  $k$ -face, então  $k \geq 3$  e para  $k = 3$  e  $k = 4$ ,  $f$  é limitada por um circuito.
- f. Se  $f \in F$  é uma 4-face e incidente a um 3-vértice, então os três vértices restantes de  $f$  possuem grau pelo menos 5.

Definiremos as cargas iniciais  $\mu$  de  $G$  como:

- Atribua carga  $d(v) - 6$  para todo vértice  $v$  de  $G$ ;
- Atribua carga  $2|f| - 6$  para toda face  $f$  de  $G$ .

Recorrendo a fórmula de Eüler, calculamos a carga total:

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu(x) = 2|E| - 6|V| + 4|E| - 6|F| = -12.$$

Definiremos a nova carga  $\mu'$  que será uma modificação da carga  $\mu$  de acordo com as seguintes regras de distribuição:

1. Seja  $f = (v_1, \dots, v_k) \in F$  uma  $k$ -face onde  $k \geq 4$ :
  - 1.1 Se  $k \geq 5$  ou  $k = 4$  e  $f$  não incidente a um 3-vértice então a face  $f$  envia:
    - 1 unidade de carga para cada vértice  $v_i$  com  $d(v_i) = 3$ ;
    - $\frac{1}{2}$  unidade de carga para os vértices restantes.
  - 1.2 Se  $k = 4$  e  $f$  é incidente a um 3-vértice, pela propriedade (f), exatamente um vértice possui grau 3, que chamaremos de  $v_1$ . Então  $f$  envia:
    - 1 unidade de carga para  $v_1$ ;
    - $\frac{2}{5}$  unidades de carga para  $v_3$ ;
    - $\frac{3}{10}$  unidades de carga para  $v_2$  e  $v_4$ .

Um 5-vértice  $v \in V$  é chamado de **faminto** se a soma das cargas recebidas por  $v$ , pela regra de distribuição 1, é um valor menor do que 1.

2. Tome uma aresta  $e = uv \in E$ ,  $u, v \in V$  com  $d(u) \geq 6$ .
  - 2.1 Se  $e$  é uma aresta fraca, então  $u$  envia para  $v$ :
    - 1 unidade de carga se  $v$  é um 3-vértice;
    - $\frac{1}{2}$  unidades de carga se  $v$  é um 4-vértice;
    - $\frac{1}{5}$  unidades de carga se  $v$  é um 5-vértice faminto.

2.2 Se  $e$  é semi-fraca, então  $u$  envia para  $v$ :

- $\frac{1}{2}$  unidades de carga se  $v$  é um 3-vértice;
- $\frac{1}{4}$  unidades de carga se  $v$  é um 4-vértice.

Para  $x \in V \cup F$ , consideramos a nova carga  $\mu'(x)$  obtida pelas regras de distribuição. Como as cargas são apenas movidas, temos que a carga total não é afetada, logo,

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) = \sum_{x \in V \cup F} \mu(x) = -12. \quad (6.1)$$

Nosso objetivo é provar a seguinte propriedade:

g. Se  $x \in V \cup F$  é um vértice com  $d(x) \geq 3$  ou uma face, então  $\mu'(x) \geq 0$ .

Pela propriedade (d), existe no máximo um vértice, digamos  $y$ , de grau 1 ou 2. Pelas regras de distribuição, vértices de grau 1 ou 2 não perdem carga durante a distribuição. Assumindo a propriedade (g), temos então que  $\mu'(y) \geq \mu(y) \geq -5$  e  $\mu'(x) \geq 0$  para os demais vértices e faces, o que nos leva a uma contradição da equação 6.1. Portanto, para completarmos a prova do Teorema 6.1.2 é suficiente provarmos (g).

**Prova da propriedade (g).** Consideremos primeiramente uma  $k$ -face  $f$ . Pela propriedade (e),  $k \geq 3$ .

- Se  $k = 3$  então  $\mu'(f) = \mu(f) = 0$ , pois faces de grau 3 não envia carga para vértices.

Seja  $\rho(f)$  a soma de todas as cargas transferidas de  $f$  para seus vértices adjacentes pelas regras de distribuição 1. Concluimos então que:

- Se  $k = 4$  e  $f$  é incidente a um 3-vértice então  $\rho(f) = 1 + \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} = 2 = \mu(f)$ ;
- Se  $k = 4$  e  $f$  não é incidente a um 3-vértice então  $\rho(f) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 = \mu(f)$ ;
- Se  $k = 5$  então, pela propriedade (c),  $f$  é incidente a no máximo um 3-vértice. Logo,  $\rho(f) \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} < 4 = \mu(f)$ ;
- Se  $k \geq 6$  então  $\rho(f) \leq k \leq 2k - 6 \leq \mu(f)$ .

Em qualquer caso acima temos que  $\rho(f) \leq \mu(f)$ . Portanto,  $\mu'(f) \geq 0$  para toda face  $f$ .

Consideremos agora um  $k$ -vértice  $v$ , onde  $k \geq 3$ . Denotaremos por  $v_1, \dots, v_k$  a enumeração dos vértices adjacentes a  $v$  em sentido horário. Para  $1 \leq i \leq k$ , seja  $f_i$  a face incidente a  $v$  com vértices  $v, v_i, v_{i+1}$ , com índices módulo  $k$ . Pela regra de distribuição (1), cada face  $f_i$  transfere carga para  $v$ . Seja  $\rho$  a soma de todas estas cargas. Mostraremos que  $\mu'(v) \geq 0$ . Temos dois casos distintos:

**Caso 1** – Considere  $3 \leq k \leq 5$ . Neste caso,  $v$  apenas recebe carga. Seja  $\sigma$  a soma das cargas enviadas por  $v_1, \dots, v_k$  para  $v$  pela regra de distribuição (2). Logo,  $\mu' = \mu(v) + \rho + \sigma$  e nosso objetivo é mostrar que  $\mu'(v) \geq 0$ .

Seja  $m$  o número de 3-faces incidentes a  $v$ . Note que estas são as faces que não enviam cargas para  $v$ . Portanto, o número de faces que enviam alguma carga para  $v$  é  $k - m$ . Observe que se  $f_i$  é uma 3-face, a aresta  $vv_i$  é fraca ou semi-fraca.

Se  $k = 3$  então  $\rho = 3 - m$ . Analisando os casos onde  $m = 0, 1, 2, 3$  baseados na regra de distribuição (2) temos que  $\sigma = m$ . Portanto,  $\mu'(v) = -3 + (3 - m) + m = 0$ .

Se  $k = 4$ , pela propriedade (f), não existe uma 4-face incidente a  $v$  que incida em um 3-vértice. Conseqüentemente  $\rho = (4 - m) \cdot \frac{1}{2}$ . Analisando os casos onde  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  baseados na regra de distribuição (2), temos que  $\sigma = m \cdot \frac{1}{2}$ . Segue que  $\rho + \sigma = 2 = -\mu(v)$ .

Agora assuma que  $k = 5$ . Se  $v$  não é faminto, por definição  $\rho \geq 1$  e portanto  $\rho + \sigma \geq 1 = -\mu(v)$ . Consideraremos agora o caso em que  $v$  é faminto.

**Lema 6.2.1** *Seja  $v$  um vértice faminto e seja  $m$  o número de 3-faces incidentes a  $v$ , então  $m \geq 3$ .*

**Prova:** Se  $v$  é faminto, temos que  $\rho < 1$ . Uma face  $f_i$  com  $|f_i| \geq 4$  transfere carga  $s$  para  $v$  onde  $s \geq \frac{3}{10}$  se  $v_i$  ou  $v_{i+1}$  é um 3-vértice e  $s \geq \frac{2}{5}$  caso contrário. Note que pela propriedade (c), teremos no máximo um 3-vértice adjacente a  $v$ . Conseqüentemente  $m \geq 3$ , senão pelo menos três faces enviaram carga para  $v$  e teríamos  $\rho \geq 2 \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = 1$ , o que é uma contradição. ■

Pela propriedade (b), segue que  $d(v_i) \geq 7$  se a aresta  $vv_i$  é fraca e  $d(v_i) \geq 5$  se  $vv_i$  é semi-fraca. Seja  $p$  o número de arestas fracas incidentes a  $v$ . Então  $\sigma = \frac{p}{5}$ .

Pelo Lema 6.2.1,  $m \geq 3$ . Tome  $m = 3$ . Se todas as três 3-faces incidentes a  $v$  são consecutivas, então  $p = 2$  e  $\sigma = \frac{2}{5}$ . Temos que  $\rho \geq 2 \cdot \frac{3}{10}$ , logo  $\rho + \sigma = 1 = -\mu(v)$ . Por outro lado, se apenas duas faces, de grau 3, incidentes a  $v$  são consecutivas, então  $p = 1$ ,  $\sigma = \frac{1}{5}$  e todos os vértices adjacentes a  $v$  possuem grau no mínimo 5. Segue que  $\rho \geq 2 \cdot \frac{2}{5}$  e  $\rho + \sigma \geq 2 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 1 = -\mu(v)$ .

Tome  $m = 4$ , então  $p = 3$  e  $\sigma = \frac{3}{5}$ . Temos que todos os vértices adjacentes a  $v$  possuem grau no mínimo 5, logo  $\rho \geq \frac{2}{5}$ , logo  $\rho + \sigma \geq \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 = -\mu(v)$ .

Se  $m = 5$ , então  $p = 5$  e  $\sigma = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ . Por este motivo temos que  $\rho + \sigma \geq 1 = -\mu(v)$ . Completando a prova para o caso 1.

**Caso 2** – Considere agora  $k \geq 6$ . Neste caso  $v$  pode enviar carga para algum de seus vizinhos e, além disso,  $v$  não recebe carga de nenhum vértice. Chamaremos de vértice **ativo** todo vértice  $v_i$  que recebe alguma carga do vértice  $v$ . Se  $v_i$  é ativo, pela regra de distribuição 2,  $v_i$  possui grau 3, 4 ou 5 e a aresta  $vv_i$  é fraca ou semi-fraca. Seja  $\tau$  a soma das cargas que  $v$  transfere para os vértices ativos. Note que neste caso  $v$  não recebe carga de nenhum outro vértice. Temos que  $\mu'(v) = \mu(v) + \rho - \tau$ .

Considere  $k = 6$ . Se  $v_i$  é ativo, pela regra de distribuição (2)  $vv_i$  é fraca ou semi-fraca e  $3 \leq d(v_i) \leq 5$ . Usando agora a propriedade (b), temos que, se  $vv_i$  é fraca, deveríamos

ter  $d(v_i) \geq 6$ , o que não ocorre. Portanto  $vv_i$  é semi-fracas. Novamente pela propriedade (b), temos que  $d(v_i) = 4$ . Por este motivo  $v$  transfere  $\frac{1}{4}$  unidades de carga para  $v_i$ . Segue que existe uma face  $f \in \{f_{i-1}, f_i\}$  de grau no mínimo 4. Pelas propriedades (b) e (c), concluímos que  $|f| \geq 5$  ou  $f$  é uma 4-face não incidente a um 3-vértice. Pela regra de distribuição (1)  $f$  transfere  $\frac{1}{2}$  unidades de carga para  $v$ . Isto implica que  $\mu'(v) \geq \mu(v) = 0$ .

Para  $q = 3, 4, 5$ , seja  $a_q$  o número de  $q$ -vértices ativos.

Considere agora  $k = 7$ . Primeiramente assumiremos que temos cinco 5-vértices consecutivos  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  que são ativos. Pela regra de distribuição (2), estes vértices são famintos e as arestas  $vv_1, vv_2, vv_3, vv_4, vv_5$  são fracas. Segue que  $f_7, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  são 3-faces e  $v_2, v_3, v_4$  são cada um incidentes a no mínimo três 3-faces, pelo Lema 6.2.1. Pela propriedade (b) as arestas  $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5$  não são fracas e todos os vértices adjacentes a  $v_2, v_3, v_4$  possuem grau no mínimo 5. Isto implica que  $v_3$  é incidente a exatamente três 3-faces e se existe uma 4-face  $f$  incidente a  $v_3$ ,  $f$  não é incidente a nenhum 3-vértice. Conseqüentemente as faces incidentes a  $v_3$  transferem um total de  $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  unidade de carga para  $v_3$ . Este fato é uma contradição em relação à hipótese de que  $v_3$  é faminto. Isto implica que  $a_5 \leq 5$ .

Se  $a_5 = 5$  então pelo parágrafo anterior, os cinco vértices ativos não podem ser consecutivos. Vamos então supor, sem perda de generalidade, que  $v_1, v_2, v_3, v_4$  e  $v_6$  são 5-vértices ativos. Pela regra de distribuição (2), estes vértices são famintos e as arestas  $vv_1, vv_2, vv_3, vv_4$  e  $vv_6$  são fracas. Isto implica que as faces adjacentes a  $v$  são todas triangulares. Logo  $\rho = 0$  e pela propriedade (b),  $a_3 = a_4 = 0$ . Logo  $\tau = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ , portanto  $\mu'(v) = \mu(v) - \tau = \mu(v) - 1 \geq 0$ .

Por outro lado, se  $a_5 \leq 4$  argumentamos da seguinte forma: seja  $v_i$  um vértice ativo de grau 3 ou 4. Pela propriedade (b) e pela regra de distribuição (2), a aresta  $vv_i$  não é fraca, porém é semi-fracas e existe uma face  $f \in \{f_{i-1}, f_i\}$  de tamanho no mínimo 4. Segue que:

- A face  $f$  transfere no mínimo  $\frac{3}{10}$  unidades de carga para  $v$ ;
- Se  $v_i$  é um 4-vértice então, pela propriedade (f), não existe uma 4-face incidente a  $v_i$  e incidente a um 3-vértice. Logo,  $f$  transfere  $\frac{1}{2}$  unidades de carga para  $v$ ;
- O vértice  $v$  transfere  $\frac{1}{2}$  unidade de carga a  $v_i$  se  $d(v_i) = 3$  e  $\frac{1}{4}$  unidade de carga se  $d(v_i) = 4$ .

Conseqüentemente, se  $a_3 = 0$  então analisando cada um dos dos casos,  $a_4 = 1$ ,  $a_4 = 2$  e  $a_4 = 3$  temos  $\rho - \tau \geq -a_5 \cdot \frac{1}{5} \geq -\frac{4}{5}$ , logo  $\mu'(v) \geq 0$ .

Se  $a_3 \geq 1$ , pela propriedade (c) temos que  $a_3 = 1$  e  $a_4 = 0$ . Assim  $\tau \leq \frac{1}{2} + a_5 \cdot \frac{1}{5} \leq \frac{13}{10}$  e  $\rho \geq \frac{3}{10}$  e portanto  $\mu'(v) \geq 0$ .

Finalmente considere  $k \geq 8$ . Se  $a_3 \geq 1$  então, pela propriedade (c),  $a_3 = 1$  e  $a_4 = 0$ . Seja  $v_1$  um 3-vértice ativo. Se  $v_k$  ou  $v_2$  é um 5-vértice ativo, pela regra de distribuição 2, temos que a aresta  $v_kv_1$  ou  $v_1v_2$  é uma contradição sobre a propriedade (b). Conseqüentemente  $a_5 \leq k - 3$  e portanto  $\tau \leq 1 + (k - 3) \cdot \frac{1}{5} \leq k - 6 = \mu(v)$ . Se  $a_3 = a_4 = 0$ ,

então  $\tau \leq k \cdot \frac{1}{5} \leq k - 6 = \mu(v)$ . Neste caso  $\mu'(v) \geq \mu(v) - \tau \geq 0$ . Por outro lado, podemos ter  $a_3 = 0$  e  $a_4 \geq 1$ . Seja  $a$  o número de 4-vértices ativos  $v_i$  onde a aresta  $vv_i$  é fraca. Pela propriedade (b), temos que  $v_{i-1}$  e  $v_{i+1}$  não são ativos e concluimos que  $\tau \leq a \cdot \frac{1}{2} + (k - 2a) \frac{1}{4} = \frac{k}{4} \leq k - 6 = \mu(v)$ . Logo  $\mu'(v) \geq \mu(v) - \tau \geq 0$ .

Completando a prova para a propriedade (g) e também para o Teorema 6.1.2. ■

### 6.3 Prova do Teorema 6.1.3

O número de arestas a ser removidas de um grafo planar a fim de gerarmos um grafo simétrico não pode ser reduzido de cinco para quatro. Em outras palavras, existe uma infinidade de grafos onde a remoção de quatro arestas não os tornam simétricos. Chamaremos de grafo **profundamente assimétrico** os grafos com tal propriedade. Estes grafos possuem um conjunto de vértices grande (o menor possui 607 vértices) e todas as faces, exceto a face externa, são triangulares. Por este motivo não temos uma prova relativamente simples para este problema.

Seja  $n$  um inteiro positivo e considere o grafo **disco**  $D$  obtido a partir do grafo da figura 6.1 identificando-se os vértices  $a_i$  e  $a'_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  como indicado na figura. O grafo  $D$  é planar e suas faces são triangulares, com exceção da face limitada pelo circuito  $C$  de tamanho  $n$  resultante do caminho que parte do vértice  $a_4$  para o vértice  $a'_4$ . Com exceção do vértice  $p$ , todos os vértices possuem grau 5 ou 6.

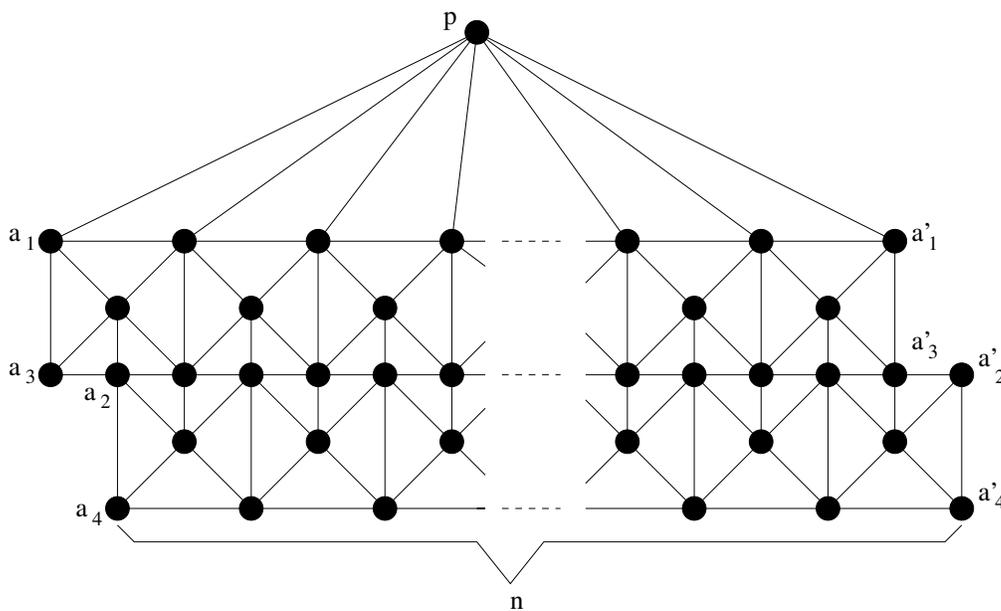


Figura 6.1: Grafo Disco.

Seja  $d_1, \dots, d_5$  inteiros onde:

$$d_1 \geq 11, \text{ e } d_{i+1} \geq d_i + 5, \text{ para } i = 1, \dots, 4. \quad (6.2)$$

e considere

$$n = d_1 + \dots + d_5 - 5. \quad (6.3)$$

Seja  $T$  uma árvore plana formada por um vértice central  $c$  com vizinhos  $c_1, \dots, c_5$  e para  $i = 1, \dots, 5$  um leque de  $d_i - 1$  vértices folha vinculados à  $c_i$  (veja a figura 6.2). Denotaremos este conjunto de vértices por  $F_i$ .

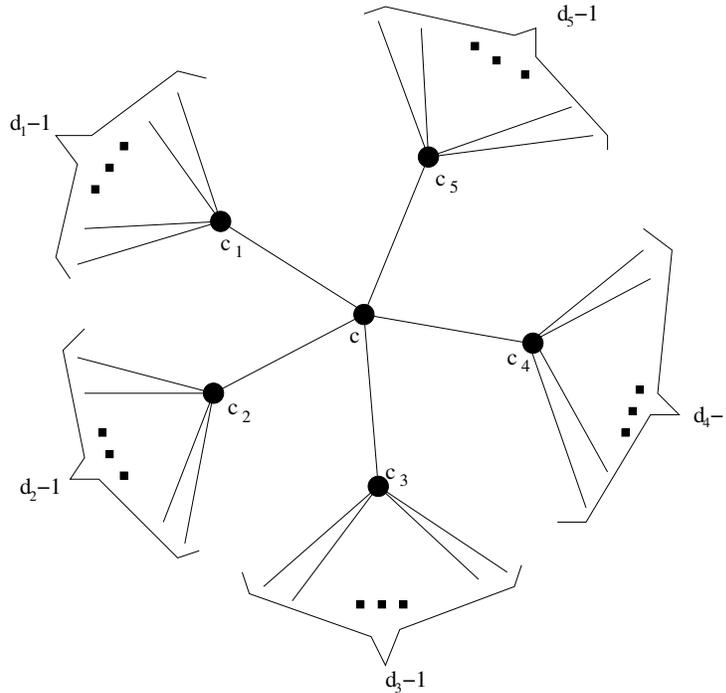


Figura 6.2: Árvore  $T$ .

Os graus dos vértices não folhas de  $T$  são  $d_T(c) = 5$ ,  $d_T(c_i) = d_i$  para  $i = 1, \dots, 5$ , e o número de vértices folhas é  $n$ . O menor valor possível para  $n$  (considerando a equação 6.2) é 100.

Podemos agora gerar o grafo  $G$  (usando o valor  $n$  da equação 6.3) identificando os vértices do circuito  $C$  do grafo  $D$  como vértices folha de  $T$  em ordem cíclica tomada pela imersão de  $T$  no plano. Temos que  $G$  é planar;  $p$  e  $c$  devem ser mapeados nos pólos norte e sul (respectivamente) em uma imersão de  $G$  em uma esfera. Todas as faces de  $G$  são triângulos com exceção das cinco faces de grau 5 localizada no pólo sul da esfera. Os vértices de  $G$  possuem algum grau igual ao que possuem em  $D$  e  $T$ , com exceção dos vértices em  $C$  que possuem grau 6. Note que não existe dois  $5$ -vértices adjacentes em  $G$ .

**Proposição 6.3.1** ([Aks01]) *O grafo  $G$  é profundamente assimétrico.*

Tome algum conjunto  $A$  de no máximo quatro arestas do grafo  $G$  e considere o grafo  $G_A := G - A$ . Para provarmos a Proposição 6.3.1, necessitamos de duas propriedades em  $G_A$ , concentradas em seu automorfismo.

**Proposição 6.3.2** ([Aks01]) *Não existe um par  $P$  de vértices onde os vértices vizinhos, fora de  $P$ , são idênticos em  $G_A$ . Isto implica, em particular, a não existência de uma transposição que é um automorfismo de  $G_A$ .*

**Prova:** Suponha por contradição que existe um par  $P = (x, y)$  de vértices com a mesma vizinhança fora de  $P$  em  $G_A$ . Seja  $m$  o número de vizinhos comuns de  $x$  e  $y$  em  $G_A$ . Em  $G$ , qualquer par de vértices possui no máximo dois vizinhos em comum. Conseqüentemente  $m \leq 1$  ou  $m = 2$ . No primeiro caso, o grau de  $x$  e  $y$  é no máximo 2 em  $G_A$ , porém, em  $G$  o grau de  $x$  e  $y$  é no mínimo 5, o que é uma contradição sobre  $|A| \leq 4$ . No segundo caso, o grau dos vértices  $x$  e  $y$  é no máximo 3 em  $G_A$ . Por este motivo  $x$  e  $y$  são adjacentes e possuem grau 5 em  $G$ , o que é uma contradição, pois já vimos anteriormente que não existem dois 5-vértices adjacentes em  $G$ . ■

**Definição 6.3.3** ([Aks01]) *Seja  $H$  algum grafo e  $\Delta$  um triângulo contido em  $H$ . Um vértice  $x$  em  $H$  é chamado de **acessível** por  $\Delta$  se existe uma seqüência de triângulos  $\Delta_0, \dots, \Delta_r$  em  $H$  onde  $\Delta_0 = \Delta$ ,  $x \in \Delta_r$  e  $\Delta_i$  possui alguma aresta em comum à  $\Delta_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, r - 1$ . Dizemos que a seqüência  $\Delta_0, \dots, \Delta_r$  **conecta**  $x$  à  $\Delta$ .*

**Proposição 6.3.4** ([Aks01]) *Suponha que o grafo  $H$  contenha um triângulo  $\Delta$  e não existe aresta de  $H$  que pertence a mais do que dois triângulos. Seja  $\pi$  um automorfismo de  $H$  que fixa os três vértices de  $\Delta$ . Então  $\pi$  fixa todos os vértices de  $H$  que são acessíveis por  $\Delta$ .*

**Prova:** Por indução sobre o tamanho da seqüência que conecta os vértices acessíveis a  $\Delta$ . Tome  $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_r$  uma seqüência que conecta o vértice  $x$  ao triângulo  $\Delta$  e suponha que os vértices de  $\Delta_{r-1}$  são fixados por  $\pi$ . Se  $r = 0$  então  $x$  é um vértice de  $\Delta$  e a Proposição é claramente verdadeira já que, por hipótese,  $\phi$  fixa os vértices de  $\Delta$ . Suponha então que  $r \geq 1$  e que os vértices de  $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{r-1}$  são fixados por  $\phi$ . Em particular,  $\pi$  fixa os vértices incidentes à aresta comum de  $\Delta_{r-1}$  e  $\Delta_r$ . Naturalmente  $\Delta_r$  é o único triângulo de  $G$  que compartilha esta aresta com  $\Delta_{r-1}$ . Isto implica que  $\pi$  fixa o vértice  $x$ . ■

**Prova da Proposição 6.3.1:** Tome  $\pi$  um automorfismo arbitrário de  $G_A$  e seja  $F$  o conjunto de todos os vértices de  $G_A$  fixados por  $\pi$ . Provaremos então que todos os vértices de  $G_A$  pertencem a  $F$ .

Pela equação 6.2 e como  $|A| \leq 4$  segue que os vértices de  $G_A$  possuem grau no máximo 6 com exceção dos vértices  $p, c_1, \dots, c_5$  que possuem graus diferentes e no mínimo 7. Todos os outros vértices possuem grau máximo 6 em  $G_A$ . Temos que os vértices  $p, c_1, \dots, c_5 \in F$ . Isto implica que  $c \in F$ . Em outras palavras os vértices  $p, c, c_1, \dots, c_5 \in F$ .

Seja  $D' := D - p$  e seja  $V'$  o conjunto de vértices de  $D'$ . Logo é suficiente mostrarmos que  $V' \subseteq F$ .

Os  $6n$  vértices de  $D'$  são arranjados em  $2n$  triplas verticais de vértices (veja a figura 6.3). Os vértices contidos em uma mesma tripla formam um caminho  $(x, y, z)$  onde podemos fixar a notação tal que  $x$  ou está em  $C$  ou é vizinho de  $p$  em  $G$ . Veja que apenas



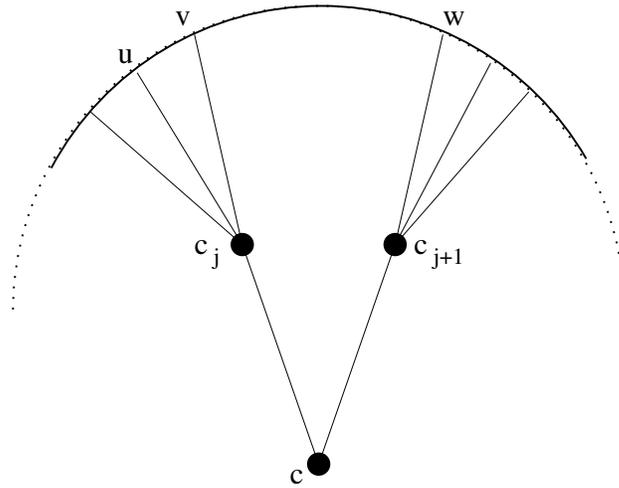


Figura 6.4: Definição de  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

por  $\Delta$  em  $G_A$ . Pela Proposição 6.3.4 temos que  $\pi$  fixa todos os vértices de  $W$ . Assim  $W \subseteq F$ .

Para o restante da prova, assuma que  $U = V' - F$  é não vazio. Por  $W$  percorremos os dois circuitos hamiltonianos  $C_1$  e  $C_2$  de acordo com sua orientação. Para  $i = 1, 2$ , seja  $x_i$  o primeiro vértice de  $U$  em  $C_i$  e seja  $P_i$  o conjunto de vértices encontrados após  $x_i$  no caminho  $C_i$ . Seja  $Q_i = P_i \cup \{p, c_1, c_2, c_3, c_3, c_4, c_5\}$ . Então  $W \subseteq P_i \subseteq Q_i$  e  $Q_i \subseteq F$  e  $\phi$  fixa todos os vértices de  $Q_i$ . Vértices distintos  $x_i$  e  $\pi(x_i)$  estão contidos em  $U$  e possuem em  $G_A$  alguns vizinhos em  $F$  e por conseqüência em  $Q_i$ . Em  $G$  o vértice  $x_i$ :

- Possui exatamente três vizinhos em  $Q_i$ , porem não possui dois vértices distintos de  $V' - P_1 - P_2$  e conseqüentemente em  $U$ ;
- Possui também ao menos um vizinho em comum em  $Q_i$ .

Conseqüentemente, se  $S_i$  é o conjunto de vértices de  $Q_i$  que possuem vizinhos de  $x_i$  em  $G$  e não possui vizinhos em  $G_A$ , então  $|S_i| \geq 2$  para  $i = 1, 2$ . Assim temos que  $A$  contém apenas duas arestas ligando  $x_1$  a  $Q_1$  e similarmente duas arestas ligando  $x_2$  a  $Q_2$ . Temos então dois casos distintos.

Primeiramente, consideramos  $x_1 = x_2$ . Temos que este vértice está contido em uma tripla  $(x, y, z)$  de  $D'$  e  $U \subseteq \{x, y, z\}$ . Pela Proposição 6.3.2 o automorfismo  $\pi$  não é uma transposição, isto implica que  $U = \{x, y, z\}$ ,  $x = x_1 = x_2$  e os três vértices de  $U$  formam um circuito em  $\pi$ . Conseqüentemente os vértices de  $U$  possuem algum grau  $d$  em  $G_A$ . Como  $|S_i| \geq 2$  e  $x$  possui grau 6 em  $G$ , temos então  $d \leq 4$ . Porém em  $G$  o vértice  $y$  possui grau 6 e o vértice  $z$  possui grau 5, o que é uma contradição sobre a desigualdade  $|A| \leq 4$ .

Em seguida, considere  $x_1 \neq x_2$ . Temos que  $x_1$  e  $x_2$  pertencem a diferentes triplas em  $D'$ . Como  $|A| \leq 4$  e  $|S_i| \geq 2$  para  $i = 1, 2$ , isto implica que  $|S_1| = |S_2| = 2$  e  $|A| = 4$ , onde  $A$  contém duas arestas ligando  $x_1$  a  $Q_1$  e duas arestas ligando  $x_2$  a  $Q_2$ . Assim

os vértices  $x_1$  e  $x_2$  possuem grau no máximo 4 em  $G_A$  e todos os outros vértices de  $U$  possuem grau  $\geq 5$  em  $G_A$ . Conseqüentemente,  $\pi(x_1) = x_2$  e  $\pi(x_2) = x_1$  e portanto estes vértices possuem em  $G_A$  o mesmo grau que em  $G$ . Então,  $x_1$  e  $x_2$  possuem em  $G_A$  uma vizinhança contida em  $F$ . Em  $G_A$  o vértice  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) possui exatamente um vizinho  $q_i \in Q_i$ . Como  $Q_i \subseteq F$  então  $q_i$  é o vizinho comum entre  $x_1$  e  $x_2$  em  $G_A$ .

Se  $q_1$  ou  $q_2$  pertence a  $\{p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$  então  $x_1$  e  $x_2$  pertencem à  $C$  ou são vizinhos de  $p$ , assim, existem duas triplas em  $D'$  na forma  $(x_1, y_1, z_1)$  e  $(x_2, y_2, z_2)$ . Porém em  $G_A$  o vértice  $y_i$  possui dois vizinhos em  $P_i \subseteq F$  e como não existe outro vértice como este em  $U$ , concluímos que  $y_i \in F$  para  $i = 1, 2$ . Assim  $y_1 \in F$  é vizinho de  $x_1$  em  $G_A$  que também é vizinho de  $x_2 = \pi(x_1)$ , o que é uma contradição.

Se ambos os vértices  $q_1$  e  $q_2$  não pertencem a  $\{p, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ , então  $q_i \in P_i$  para  $i = 1, 2$ , e portanto  $q_1 \neq q_2$ . Assim,  $x_1$  e  $x_2$  são dois vértices em  $G$ , pertencem a diferentes triplas de  $D'$  e possuem exatamente dois vizinhos em comum, onde um pertence a  $P_1$  e outro pertencente a  $P_2$ . Isto implica que  $x_1$  e  $x_2$  são vértices de grau 5 em  $G$  e pertencem a triplas consecutivas de  $D'$ . Então  $U = \{x_1, x_2\}$  e assim  $\pi$  é uma transposição, o que é uma contradição da Proposição 6.3.2.

Como nos dois casos temos uma contradição, provamos então a Proposição 6.3.1 e conseqüentemente o Teorema 6.1.3. ■

Podemos facilmente encontrar um conjunto de arestas  $A$ , com  $|A| \leq 5$ , onde  $G_A$  é simétrico. Tome uma aresta  $xy$  de peso 11 e remova todas as arestas incidentes a  $x$  ou a  $y$  que não pertençam a uma face que contenha a aresta  $xy$ . Todos os vértices de  $G_A$  com exceção de  $x$  e  $y$  são fixados por todos os automorfismos de  $G_A$ . Esta é a única forma de conseguir um automorfismo em  $G_A$  onde  $|A| \leq 5$ .

# Referências Bibliográficas

- [Abb91] Abbott, H. L., Zhou, B. (1991). On small faces in 4-critical graphs. *Ars Combinatoria*. vol.32 p.203-207
- [Agn00] Agnarsson, G., Halldórsson, M. M. (2000). Coloring powers of planar graphs. *In Proceedings of Symposium on Discrete Algorithms*. p. 654-662.
- [Aks74] Aksinov, V. A., Melnikov, L. S. (1978). Essay on the theme: the three-color problem. *Combinatorics*. vol.18 p.23-34
- [Aks01] Aksinov, V. A., Melnikov, L. S., Borodin, O. V., Sabidussi, G., Stiebitz, M., Toft, B. (2001). Deeply asymmetric planar graphs. *J. of Graph Theory*. vol.95 p.68-78
- [ApHa77] Appel, K., Haken, W. (1977). Every planar map is four colourable. Part I. Discharging. *Illinois J. Math.* vol.21 p.429-490
- [Birk13] Birkhoff, G. D. (1913). The reducibility of maps. *Amer. Math. J.* vol.35 p.114-128
- [Bon76] Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications*. Elsevier, USA
- [Bor84] Borodin, O. V. (1984). Solution of Ringels problem on vertex-face coloring of plane graphs and coloring of 1-planar graphs. *Method Diskret. Analiz, Russia*. vol.41 p.12-26
- [Bor93] Borodin, O. V. (1993). Joint extension of two theorems of Kotzig on 3-polytopes. *Combinatorica*. vol.13 p.121-125
- [Bor95] Borodin, O. V. (1995). A new proof of the 6 color theorem. *J. of Graph Theory*. vol.19 p.507-521
- [Bor96a] Borodin, O. V. (1996). No Artigo: “On small faces in 4-critical planar graphs”. *Ars Combinatoria*. vol.43 p.191-192
- [Bor96b] Borodin, O. V. (1996). Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings. *J. of Graph Theory*. vol.21 p.183-186
- [Bor02a] Borodin, O. V. , Broersma, H.J., Glebov, A., Van den Heuvel, J. (2002). Stars and bunches in planar graphs (Part I: Triangulations). *CDAM Research Report LSE-SDAM-2002-04*

- [Bor02b] Borodin, O. V., Broersma, H.J., Glebov, A., Van den Heuvel, J. (2002). Stars and bunches in planar graphs (Part II: General planar graphs and colourings). *CDAM Research Report LSE-SDAM-2002-05*
- [Die97] Diestel, R. (2005). Graph Theory. *Springer*
- [Erd63] Erdős, P., Rényi, A. (1962). Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* vol.14 p. 295-315
- [Gut57] Guthrie, F. (1880). Note on the colouring of maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburg.* vol.10 p.727-728
- [Hea90] Heawood, P.J. (1890). Map-color theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.* vol.24 p.332-338
- [Jen95] Jensen, T. R., Toft, B. (1995). Graph Coloring Problems. *Wiley, New York*
- [Jon93] Jonas, T. K. (1993). Graph coloring analogues with a condition at distance two:  $L(2,1)$ -labelings and list  $\lambda$ -labelings *Ph.D. Thesis, University of South Carolina*
- [Kot55] Kotzig, A. (1955). Contribution to the theory of Eulerian polyhedra. *Mat.-Fyz. Casopis.* vol. 5 p. 101-113
- [Kro73] Kronk, H. V., Mitchem, J. (1975). A seven-color theorem on sphere. *Discrete Math.* vol. 5 p. 153-260
- [Mol01] Molloy, M., Salavatipour, M. R. (2001). A Bound on the Chromatic Number of the Square of a Planar Graph. *Submitted to J. of Combinatorial Theory(B)*
- [Mol02] Molloy, M., Salavatipour, M. R. (2002). Frequency Channel Assignment on Planar Networks. *In Proceedings of 10th Annual European Symposium on Algorithms(ESA), LNCS.* vol. 2461 p. 736-747
- [Mel75] Melnikov, L. S.(1975). Problem 9. *Recent Advances in Graph Theory, Academic Praha.* vol. 543
- [Rin68] Ringel, G., Youngs, J. W. T. (1968). Solution of de Heawood map-coloring problem. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* vol.60 p.438-445
- [Rin81] Ringel, G.(1981). A nice color theorem for torus and Klein bottle. *The Theory and Applications of Graphs(Kalamazoo, Michigan), Wiley, New York .* p.507-515
- [Rob97] Robertson, N., Sanders, D. P., Seymour, P. D., Thomas, R. (1997). The Four Color Theorem. *J. of Combinatorial Theory (B).* vol.70 p.2-44
- [Sala02] Salavatipour, M. R. (2002). The three color problem for planar graphs. Technical Report CSRG-458, Department of Computer Science, University of Toronto. *Submitted to J. of Graph Theory.*
- [Sala03] Salavatipour, M. R. (2003). Graph colouring via the discharging method. *Doctor of Philosophy thesis U. of Toronto.* p.5-130

- [Sand] Sanders, D. P., Zhao, Y. On Simultaneous edge-face colorings of plane graphs. *Submitted for publication.*
- [Sand95] Sanders, D. P., Zhao, Y. (1995). A note on the three color problem. *Graphs and Combinatorics*. vol.11 p.91-94
- [Sand00] Sanders, D. P., Maharry, J. (2000). On simultaneous colorings of embedded graphs. *Discrete Mathematics*. vol.224 p.207-214
- [Ste93] Steinberg, R. (1993). The state of three color problem. *Ovo Vadis. Graph Theory*. vol.55 p.211-248
- [Szw83] Szwarcfiter, J. L. (1983). Grafos e algoritmos computacionais. *Campus*, Brasil
- [Tho01] Thomassen, C. (2001). Applications of Tutte cycles. *Technical report, Department of Mathematics, Technical University of Denmark*
- [Van99] Van den Heuvel, J., McGuinness, S. (1999). Colouring the Square of Planar Graph. *Technical report*
- [Viz64] Vizing, V. G.(1964). On as estimate of the chromatic index of a  $p$ -graph. *Metody Diskret. Analiz..* vol.3 p.25-30
- [Weg77] Wegner, G. (1977). Graphs with given diameter and a color problem. *Technical report, University of Dortmund*
- [Won96] Wong, S. A. (1996). Colouring Graphs with Respect to Distance. *M.Sc.Thesis, Department of Combinatorics and Optimizations, University of Waterloo*