ANETE VALÉRIA MASSON COIMBRA DE LIMA

UM ESTUDO SOBRE VALIDAÇÕES ALGÉBRICAS POR ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

UFMS
CAMPO GRANDE/MS
2009

ANETE VALÉRIA MASSON COIMBRA DE LIMA

UM ESTUDO SOBRE VALIDAÇÕES ALGÉBRICAS POR ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas.

UFMS
CAMPO GRANDE/MS
2009

ANETE VALÉRIA MASSON COIMBRA DE LIMA

UM ESTUDO SOBRE VALIDAÇÕES ALGÉBRICAS POR ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em ____/____/ 2009.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas - UFMS

____
Profa. Dra. Cláudia Lisete Oliveira Groenwald - ULBRA

____
Profa. Dra. Marilena Bittar - UFMS

____
Prof. Dr. Luiz Carlos Pais - UFMS

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. José Luiz, meu orientador, pelo apoio constante e ensinamentos dispensados durante a construção, desenvolvimento e conclusão desta dissertação.

À professora Dra.Marilena Bittar, coordenadora do mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, pela oportunidade de crescimento, aprendizado, realização profissional e pessoal e pela confiança em mim depositada.

Ao meu marido, José Roberto, pelo carinho, incentivo, apoio e compreensão constantes.

Aos professores do Programa em Educação Matemática, Dr. Luiz Carlos Pais, Dra. Elisabete Souza Freitas, Dra. Neuza Maria Marques de Souza, por sempre me incentivarem na busca do crescimento, sendo exemplos de competência, garra, determinação e disciplina.

À amiga Anelisa pela competência, sugestões, discussões e empenho na finalização deste trabalho.

Aos colegas da turma de 2007, Susi, Juliana, Lia, Vera, Anderson, Irio e Júnior, por tudo que vivemos e aprendemos juntos nessa etapa de nossas vidas.

Aos alunos participantes desta investigação, pela disponibilidade e significativa colaboração na experimentação desta pesquisa.

À professora Dra. Cláudia Lisete Oliveira Groenwald, pelo valioso parecer dado por ocasião do exame de qualificação, proporcionando discussões e sugestões que serviram para crescimento, aprendizado e incentivo à pesquisa.

A minha mãe Luiza Anete Masson Zuliani, pela contribuição na elaboração do texto dessa dissertação, além do estímulo para seguir em frente nesta caminhada.

Ao meu filho Guilherme que, com seu amor incondicional, deu-me forças para continuar.

RESUMO

Neste trabalho, faz-se *um estudo sobre validações algébricas por alunos da 3ª série do Ensino Médio no conjunto dos números inteiros*. Nele, foi realizada, inicialmente, uma pesquisa histórica em busca da origem e evolução das demonstrações matemáticas, fazendo um recorte na evolução das validações algébricas e aritméticas ao longo dos séculos, e do papel desempenhado pela demonstração e pelo método dedutivo neste percurso. Foram estudadas as demonstrações matemáticas ao longo da história, até pesquisas recentes de Educação Matemática no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de demonstrações. A partir da análise dessas pesquisas, desenvolveu-se um trabalho visando não apenas a identificar tipos e níveis de provas produzidos por alunos, mas também a investigar possibilidades de ampliação da aprendizagem, tanto no que pertence ao uso da linguagem matemática, quanto ao de generalidade envolvidas na produção de níveis mais elevados de provas. Para tanto, dois foram os referenciais teóricos básicos sobre os quais apoiou-se a condução deste trabalho: a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1986), e o modelo de produção de provas de Balacheff (1988). No que concerne à parte metodológica, para coleta e análise de dados sobre provas produzidas e aprendizagens realizadas pelos alunos, estruturou-se metodologicamente, na Engenharia Didática, Artigue (1988). Assim sendo, elaborou-se uma sequência didática composta de cinco sessões envolvendo os conteúdos de Paridade, Divisibilidade, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e outros tipos de sequências. Essa investigação foi desenvolvida em uma escola particular, composta por Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Os alunos que participaram das sessões de forma voluntária, integravam a 3ª série do Ensino Médio e permaneciam na escola em período integral. Por meio da análise de produções desses alunos, foram observados indícios de aprendizagem, tanto no que se refere ao domínio da linguagem, quanto aos tipos de provas que produziam. Outro fato observado, com relação à aprendizagem, foi que, diante do rico universo de conjecturas envolvendo números inteiros e durante o desenvolvimento das atividades propostas, houve um grande envolvimento dos alunos em busca de soluções. Esse envolvimento pode ser caracterizado como momentos de estudo, fundamentais para a aprendizagem matemática, por meio da utilização do conjunto dos inteiros como ferramenta de aprendizagem.

Palavras-chave: Educação matemática. Ensino médio. Validação algébrica.

ABSTRACT

In this work, it's made a study of algebraic validation by students of the 3rd grade of high school for set of integers . Firstly it was performed a historical research in search of the origin and evolution of mathematical demonstrations, making a cutting in the development of algebraic and arithmetic validations along the centuries, and the role of demonstration and deductive method in this course. We studied the mathematical demonstrations throughout history, even recent studies of mathematics education in regard to teaching and learning demonstrations. Starting from the analysis of these researches, it was developed a work designed not merely to identify types and levels of evidence produced by students, but also to investigate possibilities of extending learning, both as pertains to the use of mathematical language, and the generality involved in the production of higher levels of evidence. To do so, two were the basic theoretical referenciais on which rested the conduct of this work: the Theory of the Didactic Situations, proposed by Brousseau (1986), and the model of production of proofs of Balacheff (1988). With regard to the methodology for collecting and analyzing data on evidence produced and learning acquired by students, it was structured methodology in the Didactic Engineering, Artigue (1988). Thus, a didactic sequence composed of five sessions was elaborated involving the contents of Parity, Severability, Arithmetic Progression, Geometric Progression and other types of sequences. That research was conducted at a private school, composed of Childhood Education, Elementary and High School. The students, who participated in sessions in a voluntary way, attended the 3rd grade of high school and remained in school full time. Through the analysis of production of these students, signs of learning could be seen, both as regards the field of mastery of language, and the kinds of exams they produced. Another observed factor, in relation to learning, was that before the rich universe of assumptions involving whole numbers and for the development of proposed activities, there was a great involvement of students in search of solutions. This involvement can be characterized as moments of study, fundamental to learning mathematics through the use of all the set of integers as a learning tool.

Keywords: Mathematics education. High school. Algebraic validation.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há vinte anos, quando optei pelo curso de Licenciatura Plena em Matemática, considerava que, para ser professora do Ensino Fundamental e Médio, bastava, primeiramente, possuir "didática", "saber Matemática" e "preparar bem as aulas", relembrando o que havia estudado sobre os conteúdos matemáticos escolares. Nessa época, comecei a lecionar utilizando muito pouco os conhecimentos e saberes adquiridos em meu curso superior. Era importante cumprir o conteúdo programático exigido pela coordenação pedagógica e as minhas aulas acabavam tornando-se densas e cansativas. Muitas vezes, os alunos "aprendiam" as ferramentas matemáticas, porém não conseguiam aplicá-las.

A partir de 1994, como coordenadora pedagógica de Ensino Médio, deparei-me com as mudanças propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000) e Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) (BRASIL, 2006) entre elas, a importância dada à resolução de problemas. Os professores de Matemática, pertencentes a minha equipe, constatavam que os seus alunos possuíam dificuldades na resolução de problemas matemáticos e que tais dificuldades cresciam à medida que esses problemas tornavam-se mais elaborados, em especial aqueles que envolviam validações algébricas.

Mas como fazer para que os alunos aprendessem a resolver problemas? Que conhecimentos precisariam ser desenvolvidos para que os alunos tivessem autonomia na resolução de um problema?

Ao ingressar no Mestrado em Educação Matemática, em 2007, buscava encontrar respostas para essas questões, e elas foram ao encontro de estudos que vinham sendo realizados pelo meu orientador. Certamente, percebi que minha visão sobre o contexto ampliara-se e que as respostas seriam mais fáceis a partir das aulas de Didática de Matemática, Pesquisa em Educação Matemática e outras disciplinas.

Por este motivo optei, então, por investigar os procedimentos utilizados por alunos da 3ª série do Ensino Médio na validação algébrica de conjecturas no Conjunto dos Números Inteiros. A escolha pelo Conjunto dos Números Inteiros deu-se porque neste conjunto é possível formular uma diversidade de conjecturas, nas quais pretendo investigar os tipos e níveis de procedimentos de validação algébrica. Acredito que, com o uso da Álgebra, os alunos podem validar conjecturas baseadas em suposições aritméticas, as quais foram verificadas para números inteiros.

De acordo com o Currículo e os Padrões de Avaliação do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) para Matemática nas Escolas “a demonstração da validade lógica de conjecturas é a essência do ato criativo de fazer a matemática” (NCTM, 1989, p.81).

Por essas razões, esta pesquisa visa não apenas a identificar tipos e níveis de provas produzidos pelos alunos, mas também a investigar possibilidades de aprendizagem, tanto no que concerne ao uso da linguagem matemática quanto a evolução na produção de provas a cada atividade desenvolvida

Assim, a organização desta dissertação estrutura-se em quatro capítulos. No primeiro capítulo, é feito um estudo bibliográfico, fazendo um recorte na evolução das validações algébricas e aritméticas ao longo dos séculos, no papel desempenhado pela demonstração e pelo método dedutivo nesse percurso.

No segundo capítulo, é apresentado o objeto de estudo, bem como os referenciais teóricos básicos sobre os quais se apoia a condução desta pesquisa: a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1986), e o modelo de produção de provas defendida por Balacheff (1988). No que se refere à parte metodológica, para coleta e análise de dados sobre provas produzidas e aprendizagens realizadas pelos alunos, apoiamos- nos na Engenharia Didática, escrita por Artigue (1988). Considera-se que esses referenciais são adequados para as análises das dimensões teórica e experimental desta pesquisa, pois além de integrarem um mesmo programa epistemológico, neste caso, eles se complementam quanto às abordagens que foram feitas.

No terceiro capítulo, são analisados procedimentos utilizados por alunos do Ensino Médio durante a resolução de problemas que envolvem conjecturas no conjunto dos números inteiros.

Por fim, no quarto capítulo são apresentadas a organização, análise e discussão dos resultados obtidos, tomando como base o referencial teórico discutido nos capítulos anteriores.

Nas considerações finais, é feita uma síntese dos resultados obtidos e uma análise a respeito dos tipos de provas encontrados e das possibilidades de aprendizagem matemática, a partir de problemas que envolvem validações algébricas de conjecturas no Conjunto dos Números Inteiros por alunos do Ensino Médio.

CAPÍTULO 1

AS DEMONSTRAÇÕES ALGÉBRICAS E ARITMÉTICAS AO LONGO DOS SÉCULOS

> *O educador deve fazer a criança passar novamente por onde passaram seus antepassados; mais rapidamente, mas sem omitir etapa. Por essa razão, a história da ciência deve ser nosso primeiro guia* (POINCARÉ apud ROXO, 1930, p.6) [1].

Neste primeiro capítulo, apresentamos uma breve história das demonstrações matemáticas fazendo um recorte na evolução das validações algébricas e aritméticas ao longo dos séculos, e do papel desempenhado pela demonstração nesse percurso. Acreditamos que recorrer à história seja importante, pois segundo Miguel (2005) a partir do século XIX, tornou-se quase que prática corrente recorrer ao chamado "princípio genético" [2] como um modo aparentemente sensato e natural de se justificar a participação da história no processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar. Além disso, observarmos nesse estudo histórico alguns dos grandes progressos alcançados pela Matemática devido aos métodos de demonstração.

Nossos estudos foram embasados em uma pesquisa bibliográfica na qual pretendemos estruturar o nosso Referencial Teórico e Metodológico e utilizá-la efetivamente neste trabalho. Não temos a pretensão de esgotar o assunto nem de aprofundá-lo demasiadamente, mas apenas tentar seguir a linha do tempo e responder, se possível, as seguintes perguntas: o que é uma prova rigorosa? Por quais caminhos iniciou sua presença? Existem outros possíveis meios de argumentação sobre a validade das afirmações em Matemática? Segundo Bicudo e Garnica (2006), buscar o caminho histórico que constitui a prova rigorosa como fundamental ao estilo matemático passa, naturalmente, pela constituição da própria Matemática como ciência hipotético-dedutiva. As raízes históricas dessa constituição parecem iniciar-se na Grécia, tendo *Os Elementos* de Euclides um papel essencial nessa trajetória. Primeiramente,

---

[1] L'educateur doit faire repasser l'enfant par où ont passé ses pères; plus rapidement mais sans brûler d'étape. A ce compte, l'histoire de La science doit être notre premier guide" (POINCARE apud ROXO, 1930, p.6).

[2] A expressão "princípio genético" é utilizada para designar uma versão pedagógica da "lei biogenética" de Ernest Haeckel (1834-1919). Essa lei sugeriu que, durante o seu desenvolvimento, o embrião humano atravessaria os mais importantes estágios pelos quais teriam passado seus ancestrais adultos (RONAN, 1987, v. IV, p.79). A versão pedagógica dessa lei consiste que todo indivíduo, em sua construção particular do conhecimento, passaria pelos mesmos estágios que a humanidade teria passado na construção desse conhecimento.

formas de argumentação sobre natureza matemática podem ser encontradas em registros anteriores. Admitindo que todo o conhecimento é um acumular de esforços, chegamos à conclusão de que as manifestações argumentativas em torno das demonstrações matemáticas parecem desembocar na sistematização euclidiana. Essa sistematização pode ser vista como inspiração do formalismo moderno que, no que concerne à Geometria Euclidiana, resultará na axiomática de Hilbert.

Duas são as explicações mais frequentes dadas a essa transformação. Segundo Arsac (1987), existem duas teses que geram, por exclusões e complementações, uma terceira. A prova rigorosa, "a externalista", por não envolver diretamente a produção do conhecimento matemático – naturalmente, surgiria da aplicação, na Matemática, das regras do debate argumentativo, que governava a vida política na cidade grega. Em contrapartida, "a internalista", fundamentada na questão "qual o problema matemático que justificou a demonstração?".

1 A DEMONSTRAÇÃO ENTRE OS POVOS ANTIGOS

Segundo Domingues (2002), por vários milênios, a Matemática desenvolveu-se sem utilizar o método da demonstração. Apesar de avançadas, tanto a Matemática babilônica quanto a egípcia não se baseavam em um processo de demonstração ou em qualquer estrutura axiomática que garantisse a validade de suas regras. Tais regras eram admitidas mediante a simples concordância em que se confirmavam. Provavelmente, eram atingidas através do produto da evidência física da tentativa e erro ou até mesmo pelo método empírico.

Pitágoras de Samos (532 a.C.) e sua escola pitagórica seriam os responsáveis pela criação da Matemática pura, a qual é movida por razões intelectuais e no esteio de problemas abstratos. Porém, em sua contribuição à ciência Matemática, limitou-se a estabelecer resultados particulares tanto na Geometria como na Aritmética. Outro apontamento feito pelo autor é que, de acordo com a filosofia da escola pitagórica, todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados em termos de números inteiros positivos e suas razões. Os pitagóricos alimentavam a crença de que duas grandezas quaisquer da mesma espécie eram sempre comensuráveis. Porém, no século V a.C., o pitagórico Hipaso de Metaponto demonstrou a falsidade dessa crença. Como, exatamente, não se sabe.

Ao analisarmos Boyer (1974, p.35) e Eves (1995, p.25), podemos encontrar Tales de Mileto (600 a.C.) como o primeiro matemático preocupado com as demonstrações. Para ele "A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos" (BOYER, 1974, p.33).

Em Hefez (2005), verificamos que, para os pitagóricos, os números possuíam um poder místico adotando a aritmética como seu sistema filosófico. Possuíam, portanto, forte inclinação para a Filosofia e a Lógica, o que influenciou fortemente sua cultura e, particularmente, a Matemática. Platão (429 - 348 a.C.) sofreu grande influência dessa cultura. Apesar de não ser matemático, nela via um indispensável treinamento lógico para sua filosofia, ressaltando os processos axiomáticos e dedutivos como uma metodologia a ser seguida em todos os campos do conhecimento. A preferência de Platão pelos aspectos mais teóricos e conceituais fazia-o estabelecer uma clara diferenciação entre a ciência dos números, a qual chamava de aritmética, e a arte de calcular, a qual chamava de logística e que desprezava por ser “infantil” e “vulgar”.

Segundo Boyer (1974), Platão também esclareceu definições e reorganizou hipóteses. Entretanto, seu discípulo Aristóteles (384-322 a.C.) foi o primeiro filósofo a expor uma categoria de argumentação nos *Tópicos e Retórica.* Procurando um meio caminho entre Platão e os Sofistas, encontrou na *Retórica* uma arte que visava a descobrir os meios de persuasão possíveis para os vários argumentos. O seu objetivo foi o de obter uma comunicação mais eficaz para o saber que é pressuposto como adquirido. A *Retórica* de Aristóteles tornou-se a arte de compor discursos que primavam pela sua organização e beleza estética, sendo reconhecida como uma das primeiras formas de demonstração matemática. Aristóteles é conhecido como o criador da Lógica Matemática, o iluminador do pensamento matemático.

Domingues (2002) observa que Aristóteles confirma a hipótese do pitagórico Hipaso de Metaponto e ainda diz que a validação de tal hipótese pode ter sido por redução ao absurdo e a demonstra. Por esse método, a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis, demonstração essa que pode ter sido encontrada por Hipaso. A demonstração de Aristóteles é equivalente a que se dá hoje para provar que $\sqrt{2}$ é irracional e que apresentamos a seguir.

Demonstração: $\sqrt{2}$ é irracional

Hipótese: Existem $a, b \in Z$, tais que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Demonstração:

$\frac{a}{b}=\sqrt{2} \therefore \leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \sqrt{2^2} \leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \leftrightarrow \boldsymbol{a^2=2b^2}$ **(1)**.

De **(1)** *concluímos que a^2 é par e, consequentemente a também é par (verifique![3]).*

---

[3]Observe a demonstração do teorema: **a é par** $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{a^2}$ **é par** na página 24 deste capítulo.

$Então\ existe\ um\ k\ inteiro\ tal\ que\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{2k}\ (\boldsymbol{2}).$

$Substituindo\ (2) em\ (1) temos:$

$(2k)^2 = 2\,b^2 \leftrightarrow 4k^2 = \ 2b^2 \leftrightarrow b^2 = 2k^2,$

$e, portanto, b^2\ é\ par\ e\ b\ também\ é\ par.$

$Absurdo, pois, se\ a\ e\ b\ são\ pares, a\ fração\ \frac{a}{b}\ não\ é\ uma\ fração\ reduzida$

$(podemos\ simplificá - la\ por\ 2).$

$Logo\ \sqrt{2}\ é\ irracional.$

Esse ambiente cultural dos pensadores gregos, desde os tempos de Tales e Pitágoras, por volta de 300 a.C., proporcionou o surgimento, em Alexandria, de um tratado que se tornaria um dos marcos mais importantes da Matemática, Os Elementos de Euclides. Dos treze livros de Os Elementos de Euclides, dez são destinados ao campo geométrico e três, ao campo aritmético. Nos três livros de aritmética, Livros VII, VIII e IX, assunto de nosso interesse nesse capítulo, Euclides desenvolve a teoria dos números naturais, sempre com uma visão geométrica (para ele os números representam segmentos e os números ao quadrado representam áreas). No Livro VII, são definidos os conceitos de divisibilidade, de número primo, de números perfeitos, de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, entre outros. No mesmo livro, encontramos bem posta a chamada divisão euclidiana: divisão de um número natural por outro. Com o uso de tal divisão, Euclides estabelece o algoritmo mais eficiente até hoje conhecido para o cálculo do máximo divisor comum de dois inteiros (Proposições 1 e 2 do livro VII), conhecido como Algoritmo de Euclides. No Livro VIII, são estudadas propriedades de sequências de números em progressão geométrica. No Livro IX, Euclides mostra de forma exímia que existem infinitos números primos, como também prova que todo número natural se escreve de modo único como produto de números primos. Essa propriedade é conhecida hoje como Teorema Fundamental da Aritmética.

Segundo Coutinho (2005), Diofanto de Alexandria, que viveu por volta de 250 anos depois de Cristo, nos legou uma obra chamada Aritmética a qual foi escrita em treze volumes, mas apenas sete nos chegaram. Trata-se do primeiro tratado de Álgebra hoje conhecido, pois a abordagem de Diofanto era totalmente algébrica, haja vista que ele iniciou a utilização de símbolos na Matemática para facilitar a escrita e os cálculos. Esses símbolos eram, geralmente, abreviações que expressavam quantidades e operações. Essa maneira de representar argumentos na resolução de problemas foi denominada álgebra sincopada. A maioria dos problemas tratados por Diofanto, em Aritmética, visava a encontrar soluções em números inteiros, muitas vezes contentando-se em encontrar apenas uma solução de equações algébricas com uma ou várias incógnitas. A Aritmética de Diofanto, conforme Domingues (2002) é uma obra em que não se encontram definições, postulados e proposições (nem, portanto, demonstrações), mas é considerada um ícone da Matemática grega, especialmente pelo seu caráter inovador, tanto pelo conteúdo como pela abordagem.

2 A DEMONSTRAÇÃO NA IDADE MÉDIA

Nesse período, de aproximadamente mil anos, da queda de Roma em 476 à de Constantinopla, em 1453, o mundo ocidental foi regido pela Igreja Católica. Ele é também conhecido como período teocêntrico, uma época em que pensar ou escrever sobre a forma do Sol ou da Terra era motivo para ser condenado à fogueira. Tal fato ocasionou o declínio cultural, o adormecimento científico ocidental, e, por sua vez, a decadência do estudo da Matemática.

Durante esse período, a Matemática encontrou espaço para se desenvolver no Oriente, pois estava livre da repressão católica sofrida pelo Ocidente. Porém, enquanto os gregos tinham *Os Elementos de Euclides*, os povos do Oriente repetiam a matemática babilônica e egípcia ao colecionarem problemas específicos. Entretanto, por volta de 750, em Bagdá, foi criada uma casa da sabedoria, sendo chamados estudiosos a fim de colecionar e traduzir todas as obras gregas encontradas. Os hindus criaram nosso sistema de numeração, o qual foi utilizado e divulgado pelos árabes. Hindus e árabes realizaram muitos progressos na Aritmética, na Álgebra e na Trigonometria. Os árabes tiveram o grande mérito de conservarem os clássicos gregos e desenvolver a álgebra e a aritmética da Índia, além de levarem esses conhecimentos ao Ocidente, pela Espanha, na época das cruzadas.

Eves (1997) conta-nos, que na Índia, um dos lugares onde a Matemática conseguiu se desenvolver, afirmações geométricas eram provadas por meio de apelo à figura. Um exemplo clássico era a prova do teorema de Pitágoras, reproduzida por Bhãskara, no século XII, a qual consistia da Figura 1 acompanhada de um único comentário: “contemple-a”.

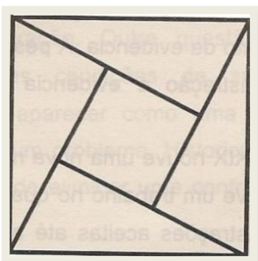


Figura 1 – Prova do Teorema de Pitágoras.
Fonte: FREITAS (1994, p.3).

> É bem conhecida, mesmo em nível médio, a demonstração de Bhãskara, por decomposição do teorema de Pitágoras (muito tempo antes essa demonstração já fora dada na China). Nessa demonstração decompõe-se o quadrado sobre a hipotenusa em quatro triângulos, cada um deles congruentes ao triângulo dado como se vê na figura 1. Facilmente se arranjam as partes de modo a obter a soma dos quadrados sobre os catetos. Bhãskara desenhou a figura e não ofereceu nenhuma explicação, mas tão somente a palavra "Veja". Com um pouco de álgebra, porém, faz-se a demonstração; pois se **c** é a hipotenusa e **a** e **b** são os catetos do triângulo, $c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = a^2 + b^2 \therefore$ (EVES, 1974, p.33).

Para Domingues (2002) a Idade Média foi um período de transição com um grande declínio cultural verificado no Ocidente. A obra Os *Elementos* tornou-se uma obra com um nível intelectual muito acima das possibilidades da época, só usada restrita e superficialmente. Nessa época, os estudos da Matemática ficaram praticamente restritos aos povos árabes e hindus, mas esses povos não priorizavam a demonstração como os helênicos o fizeram.

3 A DEMONSTRAÇÃO NO RENASCIMENTO

O conhecimento científico, no ocidente, renasceu das trevas por volta do século XV e XVI. Ele chega à Europa por dois caminhos diferentes: uma parte conservada pelas instituições religiosas e a outra, muito mais importante, proveniente da Arábia. No final do século XV e durante o séc. XVI, a Europa já possuía muitos cultivadores da Matemática, na Escola Italiana, com Leonardo da Vinci (1452-1519), que encontrou a visão estética de suas obras na Matemática e foi buscar suas raízes na Geometria de Euclides e Platão. Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576) e Ferrari (1522-1565), algebristas italianos, foram os responsáveis pela resolução das equações de terceiro e quarto graus. Ferrari também chegou à demonstração da equação de terceiro grau.

Segundo Chevallard (1985), depois do séc. XVI essa explosão de conhecimentos marcou o progresso científico matemático. Uma das causas desse progresso deu-se com a consolidação da *álgebra simbólica,* que surgiu no mesmo século, na França, mas só conseguiu impor seu estilo, em grande parte do mundo, do meio do séc. XVII em diante. François Viète (1540-1603) também foi matemático notável, apaixonado por Álgebra e passou para a História como o principal responsável pela introdução dos símbolos no mundo da Matemática. Foi ele que adotou vogais para as incógnitas e consoantes para os números conhecidos. Por isso, ficou conhecido como o Pai da Álgebra. Viète, que também simplifica as relações trigonométricas, pode ser considerado um precursor da Geometria Analítica. No final do século XVII, foi publicada a obra de Viète, mais tarde ampliada, o qual admitiu que as expressões literais pudessem tomar valores negativos. Foi ele quem, realizando numerosas simplificações na resolução das equações, abriu caminho para os trabalhos de Descartes e Newton, entre outros. O cientista René Descartes (1596-1650), que valorizava o método axiomático-dedutivo, em particular o método matemático, ao escrever *Geometria*, sua única obra matemática, não utilizou nem postulados e nem demonstrações, denegrindo assim sua própria epistemologia. O mesmo ocorreu com o Cálculo. Basta citarmos Newton, um de seus criadores, ao passar a limpo suas ideias, nenhuma delas foi convincente, duramente falando.

Segundo Domingues (2002), podemos finalizar o nosso breve estudo da Matemática, no Renascimento, com o resgate da geometria euclidiana pelos matemáticos do Ocidente, graças a sua organização lógica e ao surto de desenvolvimento muito grande da Matemática em vários setores, só comparável ao período áureo da Matemática grega. Porém, novas áreas da Matemática, como a Geometria Analítica e o Cálculo, por exemplo, provavelmente, não chegaram a satisfazer sob o ponto de vista do rigor, nem mesmo a seus criadores. A Matemática renascentista foi rica no campo das novas descobertas, porém com poucas demonstrações rigorosas, não que faltasse capacidade aos matemáticos da época. A verdade é que os fundamentos da Matemática careciam ainda de uma estruturação consistente e abrangente, a qual foi alcançada somente na segunda metade do século XIX.

Para Arsac (1987), o século XVII marca uma ruptura na concepção de demonstração. Surge na Europa uma nova geração de cientistas, muito mais preocupada com a descoberta do funcionamento dos fenômenos que de suas explicações. Apesar de admirarem os antigos textos gregos, em particular os de Euclides e Arquimedes, eles formulavam sérias críticas às suas demonstrações, tais como: ausência de um método geral, utilização de demonstrações indiretas (raciocínio por absurdo) por toda a parte e, sobretudo o fato de que esses antigos textos não apresentam nenhum método de descoberta. Observa-se que o objetivo dos gregos era muito mais convencer que de esclarecer.

4 UM PERÍODO DE TRANSIÇÃO

Nesse período, segundo Hefez (2005), ocorreu o renascimento da Aritmética, na acepção de Platão, essencialmente pela obra do jurista francês Pierre de Fermat. Na época, não era comum para os matemáticos exporem as demonstrações dos resultados que descobriam, lançando-os como desafio para outros. Os resultados de Fermat foram divulgados através de suas correspondências, principalmente com o padre Marin Mersenne. Em uma de suas cartas, de 1640, Fermat enunciou o seu Pequeno Teorema, dizendo que não escreveria a sua demonstração por ser longa demais. Descobriu vários teoremas em Teoria dos Números, mas sua contribuição mais marcante foi descobrir a sua mais famosa conjectura, que ficou conhecida como Último Teorema de Fermat. Tal fato ocorreu após ler, na *Aritmética* de Diofante, uma série de observações e problemas relativos ao Teorema de Pitágoras. Fermat olhou mais atentamente para a equação $x^2 + y^2 = z^2$, a qual tem infinitas soluções e modificou-a de modo a obter uma muito semelhante. Passou a considerar uma nova equação, em que o expoente era maior do que dois, e chegou à proposição: $x^n + y^n = z^n$, com $n > 2$ e x, y, z e n inteiros positivos, não tem soluções.

> Afirmação de Fermat
> É impossível separar um cubo em dois cubos, ou um biquadrado em dois biquadrados ou, em geral, uma potência qualquer, exceto um quadrado em duas potências com o mesmo expoente: para isso eu descobri uma prova verdadeiramente maravilhosa. Mas a margem é muito pequena para contê-la. (Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos testatem in duas ejusden nominis faz est dividere: cujus demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc margins exiguitas non caperet) (GARBI, 2007, p. 196).

Segundo Domingues (2002), quanto ao cálculo, basta citar que um de seus criadores, Isaac Newton, fez três tentativas para passar a limpo suas ideias, nenhuma convincente. Evidentemente, não faltava capacidade a esse matemático, mas a verdade é que, segundo Freitas (1986), esse é o período em que a Matemática é escrava da Física, sendo sua característica principal a falta de rigor absoluto. Os matemáticos desse período utilizavam mais a intuição que a perfeição lógica, afastando-se cada vez mais das demonstrações da matemática pura. Como consequência, no séc. XVIII desenvolvem–se o cálculo diferencial, o cálculo integral e o cálculo das variações. Também são desenvolvidas as teorias analíticas e infinitesimais de curvas e superfícies, a fim de auxiliar no avanço das ciências da natureza, quando os matemáticos estavam mais preocupados com as aplicações. Para Domingues (2002), ao iniciar o séc. XIX, a geometria de Euclides, com sua organização lógica, realmente se diferenciava das matemáticas recém-descobertas ainda à procura de seus alicerces. Mas o que predominava era a visão do filósofo Immanuel Kant (1724-1804), com sua enorme influência científica de cunho euclidiano. Kant defendia o caráter *a priori* do conhecimento geométrico e, para isso, argumentava que uma propriedade como a de que a “a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos”, não está sujeita a alterações, haja vista tratar-se de um conhecimento universal que não comporta exceção nenhuma.

5 A VOLTA DAS DEMONSTRAÇÕES NO SÉCULO XIX

No séc. XIX ocorreu a idade áurea da Matemática. Nesse século, a produção matemática superou tanto em quantidade como em qualidade toda a época precedente em conjunto. Galois (1811-1832) cria a teoria dos grupos e põe fim ao problema da resolução das equações algébricas por meio de radicais. A partir da segunda metade desse século, a Álgebra passa a tratar dos estudos das estruturas algébricas. Houve avanços no campo da Geometria, com a resolução do "problema das paralelas". Na solução desse problema, nascem as geometrias não euclidianas. Hilbert (1862-1943), com a obra "*fundamentos da geometria",* dá um tratamento axiomático rigoroso contrapondo-se ao método euclidiano. Ocorre também a chamada Aritmetização da Análise, com os matemáticos Cauchy (1789-1857), Weierstrass (1822-1901), Rieman (1826-1866), e outros. Cantor (1845-1918) e Dedekind (1831-1916) solucionaram, quase que simultaneamente, o problema da continuidade da reta em trabalhos independentes. A "Teoria dos Conjuntos" foi criada por Cantor para analisar os diversos tipos de conjuntos infinitos.

Para Domingues (2002), mediante tantas criações postas no parágrafo anterior, as demonstrações foram reformuladas, pois tornou-se necessário submeter a demonstração a uma análise mais profunda. Dentre os matemáticos que contribuíram para essa reestruturação é importante citarmos G. Frege (1848-1925). Com ele, surgiu a *demonstração formal*, a qual é formada por uma sequência de proposições tal que: (i) a primeira proposição é um axioma; (ii) cada uma das outras ou é um axioma ou é dedutível diretamente das que precedem na sequência; (iii) a última preposição é a que se pretendia demonstrar. Apesar de um grande avanço em relação aos procedimentos psicológicos precedentes, a demonstração formal carregava consigo a semente de alguns contratempos futuros para os especialistas matemáticos.

6 O CAMINHO DAS DEMONSTRAÇÕES NA PASSAGEM DO SÉC. XX PARA O SÉC. XXI

Segundo Davis (1985), a Matemática, nas primeiras décadas do séc. XX é marcada pela chamada "crise dos fundamentos". As três principais correntes que envolveram os princípios básicos dessa ciência são: logicismo, intuicionismo e formalismo. O logicismo de Bertrand Russel (1872-1970) pretendia tornar a matemática parte da lógica. A teoria dos conjuntos de Cantor parecia, a princípio, ser quase o mesmo que a lógica. A relação de inclusão da teoria dos conjuntos em que A é um subconjunto de B, pode ser sempre restrita como a relação lógica de implicação, *"se A, então B"*. Assim, parecia possível que a lógica da teoria dos conjuntos poderia servir de fundamento para toda a Matemática. No entanto, foi o próprio Russel quem descobriu que a noção que demonstrava aparência de conjunto continha armadilhas inesperadas. O paradoxo de Russel mostrou que a lógica intuitiva, longe de ser mais segura do que a matemática clássica, era mais traiçoeira, uma vez que poderia conduzir a contradições de uma maneira que nunca aconteceria na aritmética ou na geometria.

O intuicionismo é uma doutrina nascida entre os próprios matemáticos. Segundo ela, só possuem existência real aqueles objetos matemáticos que podem ser construídos a partir de certos objetos primitivos, de maneira finita. Segundo Davis (1985), os intuicionistas eram também conhecidos por construtivistas e consideravam muitas das demonstrações – padrão da matemática clássica como inválidas. Em alguns casos, fornecem uma demonstração construtiva, em outros mostram que tal demonstração é impossível. Teoremas que são considerados verdadeiros na matemática clássica são considerados falsos na matemática construtiva. Hilbert, em particular, ficou alarmado e empreendeu-se na tarefa de criticar a matemática intuicionista, dando uma demonstração da consistência da matemática clássica e fazendo surgir o formalismo.

O formalismo é a posição em que a Matemática consiste num jogo de símbolos com regras bem definidas, ou seja, axiomas, definições e teoremas, sendo que, na França, nas primeiras décadas do século passado, o Grupo Boubarki aproxima-se bastante de suas ideias.

Segundo Domingues (2002), na década de 20, Hilbert e sua escola criaram a *teoria da demonstração*, um método que objetivava estabelecer a consistência de qualquer sistema formal. Buscando evitar críticas, adotou uma lógica que se aproximava dos princípios intuicionistas. Assim, reduziu a consistência da maior parte da Matemática à da teoria dos números ou à da teoria dos conjuntos. Porém, Kurt Gödel (1906-1978) publicou resultados demonstrando que tal projeto era irrealizável, já que era impossível estabelecer a consistência de qualquer sistema matemático amplo o possível para abarcar a aritmética dos números inteiros. No entanto, o formalismo tornou-se a corrente predominante nos textos matemáticos.

Imre Lakatos (1922-1973) entrou em cena como um filósofo matematicamente educado, apresentando uma Matemática crescendo a partir de um problema e uma conjectura, com uma teoria adquirindo forma sob os nossos olhos, no calor do debate e da discordância; a dúvida cedendo lugar à certeza, e em seguida, a novas dúvidas. *Proofs and Refutations*, nome da obra-prima de Lakatos, foi, durante quinze anos, uma espécie de clássico proibido entre os matemáticos até ser publicado em forma de livro, em 1976, pela Editora da Universidade de

Oxford, três anos após sua morte. Em sua obra, ele utiliza a história para explicar a Matemática. Segundo Lakatos (1978), a Matemática, como as outras ciências, é falível, crescendo por meio a críticas e correção de suas teorias não livres de erros.

Para Lakatos (1978), a demonstração, neste contexto de matemática informal, não significa um processo mecânico, que transmite as verdades em uma cadeia inquebrantável das hipóteses às conclusões. Em vez disso, significa explicações, justificações, elaborações, que tornam a conjectura mais plausível, enquanto é testada pela produção de contraexemplos. Assim, Lakatos aplicou sua análise epistemológica não ao formalismo, mas à matemática informal, do processo de crescimento à descoberta, que é, naturalmente, a Matemática conhecida dos matemáticos e dos estudantes de Matemática.

Segundo Coutinho (2005), foi a influência da filosofia grega que fez da Matemática uma ciência. De fato, os primeiros matemáticos gregos estão entre os primeiros filósofos, como é o caso de Tales e Pitágoras. A noção de que um fato matemático pode ser demonstrado é fruto da interação da Matemática e da Filosofia. Afinal, a demonstração é um argumento para esclarecer como certo fato é consequência de algo que conhecemos. Na Educação Matemática, em vez de apresentar uma fórmula e aplicá-la, devemos entender porque a mesma é verdadeira. Um fato matemático é frequentemente chamado de *teorema.* O sentido moderno de *"proposição a ser demonstrada"* é atestado a partir dos Elementos de Euclides. O enunciado de um teorema é constituído de duas partes: a *hipótese* e a *tese.* A hipótese descreve aquilo que estamos supondo ser verdade; a tese é a conclusão do teorema.

Vejamos um exemplo de demonstração:

> Demonstração: a é par $\leftrightarrow a^2$ é par
>
> Podemos dividir este teorema em duas partes e demonstrá-las separadamente:
> (1)-Tese: Se a é um número inteiro par, então a^2também é par.
> Resolução:
> -Hipótese: a é inteiro par / Tese: a^2 é par.
> A hipótese nos diz que a é inteiro par. Isto significa, por definição, que a é múltiplo de 2. Portanto deve existir um inteiro b tal que a = 2b. Elevando ao quadrado temos: $a^2 = (2.b)^2 = 4b^2 = 2.(2b^2)$. Assim a^2 também é múltiplo de 2; logo a^2 é par. Mas Isto é a tese, e, portanto o teorema está provado.
>
> (2)-Tese: Se a^2 é um número inteiro par, então a também é par.
> Resolução:
> Na verdade o que vai ser provado é a contrapositiva desta afirmação, que é : se $a\ não\ é\ par\ então\ a^2$ não é par.
> Mas se um número inteiro não é par, então tem que ser ímpar.

> Um número ímpar é sempre da forma *'$par + 1$'*. Logo se a é ímpar, tem que existir um inteiro b tal que $a = 2b + 1$. Elevando a ao quadrado obtemos
> $a^2 = (2b+1)^2 = 4b^2 + 4b + 1 = 2(2b^2 + 2b) + 1$, que é um número ímpar. Portanto a contrapositiva da afirmação que queremos provar é verdadeira. Como contrapositiva e afirmação original são equivalentes, provamos que se a^2é um número inteiro par, então a também é par.
> Por (1) e (2) temos que se a é par $\leftrightarrow a^2$ é par.

Para Braun (2007), a Matemática apresenta as demonstrações clássicas, como as do exemplo anterior, e também as *demonstrações por absurdo*[4], com base no Princípio do Terceiro Excluído, o qual afirma que uma sentença é verdadeira ou falsa. Se couber uma terceira opção, adotamos como hipótese exatamente o contrário daquilo que queremos provar. Desse modo, ao encontrarmos uma contradição durante a demonstração, se está logicamente encadeada, é porque essa contradição deve-se exatamente às hipóteses do problema e, portanto, essas hipóteses são falsas e sua negação é verdadeira.

De acordo com Bicudo e Garnica (2006), buscar o caminho histórico que constitui a prova rigorosa como fundamental ao estilo matemático, passa, naturalmente, pela constituição da própria Matemática como ciência hipotético-dedutiva. As raízes históricas dessa constituição parecem iniciar-se na Grécia, mas, certamente, formas de argumentação sobre proposições de natureza matemática podem ser encontradas em registros bem anteriores, posto que todo conhecimento é um acumular de esforços, indo da sistematização proposta por Euclides até a formalização axiomática de Hilbert. E ainda relatam-nos, que a Educação Matemática é o campo propício para o estabelecimento de uma postura crítica em relação à Matemática, contrapondo-se à esfera de produção científica da Matemática, campo de uma postura técnica com tendências conservadoras quanto ao ensino e à aprendizagem. Enaltece o destino crítico da Educação Matemática pela aceitação de metodologias alternativas, pelo vínculo de sua prática de pesquisa com a prática pedagógica, pela tendência em valorizar o processo em detrimento do produto.

7 AS DEMONSTRAÇÕES E AS NOVAS TENDÊNCIAS

Tendências atuais em Educação Matemática apontam para a necessidade de ir além do domínio da técnica, ou seja, não basta tomar uma fórmula e aplicá-la, é igualmente importante

---

[4]Para verificar a *Demonstração de Aristóteles* para a constatação de que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis, por redução ao absurdo, recomendamos a leitura da *Revista Carta na Escola*, São Paulo, SP: Editora Confiança, 14. ed. mar. 2007.

entender sua origem e por que a mesma é verdadeira. Em nosso levantamento histórico, percebemos por que a construção de provas pelos alunos é um assunto que causa angústia em alguns pesquisadores brasileiros. No Guia do PNLEM, encontramos a seguinte citação com relação à orientação quanto ao trabalho com as demonstrações nos livros didáticos do Ensino Médio no Brasil:

> O livro-texto deve valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. A respeito do método dedutivo, convém advertir para desvios freqüentes a serem afastados. O primeiro deles é o de formular uma generalização como fato provado, com base na verificação de exemplos — muitas vezes um ou dois apenas. Outros são apresentar provas muito complicadas de alguns teoremas, que podem ser deixadas para estudos posteriores, ou expor demonstrações difíceis para fatos intuitivamente evidentes. Muitas vezes, tais demonstrações podem ser dispensadas sem prejuízo da compreensão. (BRASIL, 2006, p.75).

Além da citação anterior, temos ainda as pesquisas que envolvem a trajetória da evolução do raciocínio matemático. Destacamos Pietropaolo (2009), que apresenta em sua tese a existência de muitas pesquisas, não brasileiras, envolvendo provas na Educação Básica. Esse pesquisador identificou o senso comum entre os professores de Matemática entrevistados. A prova é vista por estes professores como "conteúdo" e como recurso pedagógico bastante rico em sala de aula, mas desde que se admita um sentido maior para essa palavra e não a simples reprodução – pelo aluno e professor – das provas presentes nos livros, mas sim o "fazer matemática" em sala de aula, envolvendo assim experimentações, conjecturas e argumentações.

Encontramos também, na dissertação de Leandro (2006), o estudo diagnóstico das validações realizadas por alunos do Ensino Médio de uma escola localizada em São Paulo, no qual ele se apoiou na Tipologia de Provas de Ballacheff (1988), que é resultado de sua tese de doutorado. O pesquisador aponta as dificuldades dos alunos ao construírem e elaborarem provas matemáticas, desde as mais empíricas até as mais formais. Em seu trabalho, ao analisar uma classe particular de problemas, ele identifica a existência de diferentes tipos e níveis de prova em Matemática.

Hanna e Jahnke (1996, p. 47) procuram sintetizar a função da prova na Matemática e na Educação Matemática: "[...] enquanto na prática matemática a função da prova é a justificação e a verificação, a sua função principal na educação matemática é seguramente a da explicação".

E ainda sugere em seu trabalho que o ensino da demonstração no contexto da matemática escolar serve para esclarecer ideias que vale a pena tornar conhecidas dos alunos. Estas ideias de negociação e aceitação também são apresentadas na tese de Garnica (1996), a seguir:

> O programa de rigor sistematizado por Euclides, dizem, não é, nem nunca foi, seguido rigidamente na produção em matemática [...] donde a aceitação de um resultado, entre os que produzem matemática, ser mais um processo social de negociação de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir cego das regras impostas pela proposta formal. (GARNICA, 1996, p.37).

Healy e Hoyles (2000) realizaram um estudo sobre concepção de provas matemáticas produzidas por alunos ingleses com idades entre 14 e 15 anos. Constataram que o empirismo é muito forte e que os alunos possuem muitas dificuldades na elaboração de provas mais formais. Como resultado, chegou-se à conclusão de que tais dificuldades não se devem somente à competência dos alunos, mas também a fatores curriculares, pois as demonstrações matemáticas são pouco trabalhadas em sala de aula. Os questionários elaborados por esses pesquisadores já foram adaptados e utilizados em vários países.

Há vários estudos dedicados à passagem da Aritmética para a Álgebra. Essa passagem tem se mostrado fonte de dificuldades para um grande número de alunos, dentre elas aquelas ligadas à introdução do formalismo algébrico (CHEVALLARD, 1985, 1989; GALLARDO; ROJANO, 1988; VERGNAUD, 1988). No entanto, trabalhos sobre o aprendizado da demonstração são frequentes para conteúdos de Geometria, mas poucos são os estudos específicos sobre processos de prova na resolução de problemas de "Aritmética-Álgebra".

Como o estudo que aqui apresentamos está centrado em conjecturas e provas no Conjunto dos Inteiros e em problemas na passagem da Aritmética para a Álgebra, priorizamos a análise de trabalhos de alguns autores, cujos objetos de estudo estão mais próximos dessa temática.

No trabalho realizado por Freitas (1993), relativamente ao campo da Aritmética-Álgebra, foram identificados dois tipos de provas intelectuais: a prova por enunciados e a prova algébrica. Essa distinção foi feita levando-se em conta de um lado, a linguagem empregada (linguagem natural versus linguagem algébrica); de outro, o funcionamento mental inerente. Segundo Freitas (2007), a atividade de validação dos alunos depende tanto do domínio da linguagem quanto do conteúdo:

> Nas duas categorias de provas, “pragmáticas” e “intelectuais”, produzidas pelos alunos observamos tanto tratamentos de registros, quanto conversões entre três tipos de registros de representação: linguagem natural, numérica e algébrica. Observamos que a atividade de validação é indissociável do registro utilizado, ou seja, que a provas produzidas pelo aluno dependem tanto do seu domínio sobre registro de representação quanto do nível de conhecimento sobre o conteúdo representado (FREITAS, 2007, p.123, grifo do autor).

No tipo “prova por enunciados”, a formulação da sequência dedutiva das afirmações é apresentada em linguagem natural, enquanto que no tipo “prova algébrica” a sequência de afirmações prioriza o emprego de códigos simbólicos da linguagem algébrica para atingir relações gerais. Nesse trabalho, identificou-se que muitos alunos, de início do Ensino Médio, diante de certos problemas que exigem um nível mais elevado de abstração ou de generalização, insistiam em verificar exemplos aritméticos particulares, permanecendo no nível empírico de validação sem atingir o nível adequado.

Ainda no que concerne ao aprendizado da Álgebra, em nível dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio, constata-se que um dos principais objetivos é desenvolver a capacidade de utilização de símbolos, que inclui tanto o cálculo algébrico quanto a modelagem e o estudo de variação. Segundo Ponte (2000), o pensamento algébrico deve igualmente incluir a capacidade de lidar com estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios e, em particular, na validação algébrica de conjecturas.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) desenvolvem atividades de investigação com alunos de faixa etária entre 12 e 14 anos, para uma variedade de problemas envolvendo a produção e validação de conjecturas, alguns bastante próximos daqueles por nós trabalhados. Dentre suas conclusões, ele identifica a “partilha de conhecimentos” como um aspecto importante desse trabalho:

> Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais idéias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 41).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que em um ambiente de Investigação Matemática pode ser comparado àquele vivenciado pelos matemáticos quando estão em processo de produção do conhecimento matemático. Esse ambiente pode ser caracterizado como exploratório e de formulação de conjecturas ou hipóteses, as quais são testadas empiricamente ou racionalmente, verificando sua validade ou não. Ou seja, o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura – teste – demonstração: um ambiente especial de formulação e resolução de problemas.

Por outro lado, Pietropaulo (2005) argumenta que os motivos pelos quais as provas, rigorosas ou não, deveriam estar presentes nos currículos da Matemática em qualquer nível escolar não se resumem apenas ao fato da demonstração é o – ou está no – "coração da Matemática" e é fundamental olhar a relação prova - Educação Matemática, no que diz respeito às demonstrações, sob outras perspectivas não exclusivas, tais como cognição e práticas argumentativas.

Devemos salientar, contudo, que há estudos sobre provas com estas perspectivas – sobre os quais falaremos mais adiante, no próximo capítulo, aqueles que usam as investigações, a partir de validações de conjecturas, utilizando meios que permitam a mobilização de conhecimentos prévios de cada sujeito.

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

Neste segundo capítulo, realizamos uma breve discussão sobre Educação Matemática e Didática da Matemática, problemas matemáticos, conjecturas, mais especificamente, um estudo referente à produção de provas por meio de validações aritméticas e algébricas na Matemática, bem como relativo a aspectos da aprendizagem. Pesquisamos tanto demonstrações matemáticas, quanto outras formas de validação.

1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A área de Educação Matemática vem se consolidando há cerca de três décadas, tornando-se campo de pesquisa na Alemanha, Estados Unidos, França, Holanda, Inglaterra e em outros países. No Brasil, a partir do início da década de 1990, surgem propostas inovadoras as quais valorizam o trabalho com campos de significado tais como: contextualização, interdisciplinaridade, articulação entre os conteúdos, uso das novas tecnologias e formação continuada dos professores, entre outras.

A Educação Matemática, segundo Pais (2005), é um grande campo de pesquisa educacional, cujo objeto de estudo é a compreensão, interpretação e descrição dos fenômenos referente ao ensino e à aprendizagem da Matemática nos diversos níveis de escolaridade, quer seja em sua dimensão teórica ou prática.

Encontramos a seguinte citação a respeito de como poderiam ser trabalhadas essas novas tendências dentro da Matemática no Brasil:

> Apesar dessas tendências permearem a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o Projeto Nacional de Livros Didáticos (PNLD) e, em parte, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), elas continuam ainda distantes das práticas pedagógicas da maioria dos professores que estão atuando em sala de aula. É necessária a participação dos docentes na elaboração dessas políticas e, sobretudo, é imprescindível investir na formação continuada do professor (BITTAR; FREITAS, 2005, p.22).

A partir da leitura de textos e artigos da área de Educação Matemática, é possível perceber que a Matemática por ela proposta é aquela que funciona como um motor de progresso social, de liberdade individual e política. É um instrumento capaz de manejar situações novas e reais a partir da modelagem e formulação de problemas que, de modo geral, não estão presentes nos antigos currículos. E, sobretudo, é um fator de formação do cidadão, pois fornece subsídios para analisar e interpretar dados, preparando-o politicamente para a leitura do mundo globalizado.

Para D’Ambrósio (2005), a Educação Matemática tem sido central no pensamento dos filósofos desde a Antiguidade. Somente no início do século XX, com a importância da Matemática no intenso desenvolvimento científico e tecnológico da época, e apoiado nas novas teorias da aprendizagem, a Educação Matemática começa a tornar-se autônoma. A fundação, em 1908, da Comissão Internacional de Instrução Matemática, o ICMI, tendo o ilustre matemático Félix Klein, como seu primeiro presidente, foi o ícone do reconhecimento dessa autonomia.

Somente a partir do final da década de 60, começa a se definir a Didática da Matemática como uma das disciplinas centrais da Educação Matemática, a qual pesquisa os fatores que influenciam o ensino-aprendizagem da Matemática e o estudo das condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos.

Segundo Pais (2005), a Didática da Matemática tem como objeto de estudo a elaboração de conceitos e teorias compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em termos experimentais da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. Encontramos, no Programa Epistemológico de ensino e aprendizagem matemática, que vem sendo desenvolvido por teóricos franceses uma representação do que estamos aqui considerando como Didática da Matemática.

Dentre as teorias da Didática da Matemática, apoiamo-nos mais especificamente na Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, e no modelo de Tipologia de Provas de Balacheff. A primeira teoria nos fornece meios de investigar possibilidades de aprendizagem, tanto no que concerne ao uso da linguagem matemática quanto ao de generalidade envolvida na produção de tipos e níveis mais elevados de provas, enquanto que a segunda possibilita diagnosticar e categorizar tipos de validações algébricas produzidas por alunos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Dois foram os referenciais teóricos básicos sobre os quais nos apoiamos na condução deste trabalho: a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1986), e o modelo de produção de provas de Balacheff (1988).

Através da Tipologia de Provas de Balacheff (1988), podemos identificar os tipos de provas produzidos pelos alunos, bem como, ao lado da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986), avaliar a ocorrência de aprendizagem.

No que concerne à parte metodológica, para coleta e análise de dados sobre provas produzidas e aprendizagens realizadas pelos alunos, apoiamo-nos metodologicamente na Engenharia Didática. Artigue (1988) caracteriza a Engenharia Didática como sendo um método que dá importância tanto à dimensão teórica quanto ao experimental da pesquisa, possibilitando meios que permitam investigar a aprendizagem de conceitos matemáticos.

3 A TIPOLOGIA DE PROVAS

No modelo teórico de Ballacheff (1988), são identificados vários tipos de provas classificadas em dois níveis: a prova pragmática e a prova conceitual.[5]

São consideradas pragmáticas as provas que se apoiam em manipulações empíricas. Ao contrário disso, as provas conceituais apoiam-se em formulações de propriedades e de possíveis relações entre elas. Nesse sentido, as demonstrações são caracterizadas como um tipo de prova conceitual. Balacheff admite que o movimento das provas pragmáticas para as provas conceituais repousa inicialmente em tomar conhecimento da qualidade genérica das situações consideradas. Tal movimento exige um nível elevado de *descontextualização, despersonalização* e *destemporalização* do objeto em questão.

Balacheff (1988) considera que as palavras *explicação, prova e demonstração* aparecem frequentemente como sinônimos nos enunciados de problemas em Matemática, mas em seu modelo teórico elas possuem significados diferentes. Para esse pesquisador, explicação é um discurso que visa a tornar inteligível o caráter de verdade de uma proposição ou de um resultado que o indivíduo que o faz acredita em sua validade. Prova é uma explicação aceita por certa comunidade, num dado momento e contexto particular. Demonstração é uma prova particular, aceita pela comunidade matemática e constituída a partir de uma sequência de afirmações organizadas com regras aceitas por essa comunidade. Segundo Balacheff, a demonstração é, em Matemática, um tipo privilegiado de prova envolvendo uma prática que permite comunicação dentro da academia.

[5]Balacheff usa o termo intelectual, mas estamos chamando de conceitual, por considerarmos mais adequado ao contexto da nossa língua e porque ela é caracterizada por tratar de conceitos e propriedades.

Em sua Tipologia de Provas, Ballacheff (1988) propõe uma categorização em tipos e níveis de provas, sendo que tal categorização depende do alcance da generalidade e do conceito que estão postos em uma prova específica. Os tipos de provas são por ele categorizados como:

a) empirismo ingênuo**:** Afirma-se a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos particulares. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;
b) experimento crucial***:*** Afirma-se a verdade de uma proposição após a verificação de casos particulares, seguido da verificação de um caso especial, geralmente não familiar. A diferença principal com relação ao *empirismo ingênuo* é que o indivíduo, após verificar a validade da proposição para alguns casos particulares ainda não se dá por satisfeito e sente a necessidade de testar mais um caso "especial" para tirar a dúvida;
c) exemplo genérico: Afirma-se a verdade de uma proposição após a manipulação de um caso particular, mas de modo a considerá-la com uma característica que representa uma classe de objetos;
d) experimento mental: Afirma-se a verdade de uma proposição, de forma genérica, após conceber internamente as ações realizadas sobre as proposições em questão. Neste caso, o texto da prova indica generalidade e advém de uma tentativa de revelar propriedades de uma classe de objetos.

Segundo Balacheff (1988), são consideradas pragmáticas as provas apresentadas no nível do *empirismo ingênuo* e do *experimento crucial*. As provas apresentadas ao nível do *exemplo genérico* representam um momento de passagem entre as provas pragmáticas e as conceituais. O *experimento mental* já representa, nesse contexto, uma prova conceitual.

Além dos tipos acima identificados na Tipologia de Provas de Ballacheff (1988), Freitas (1993), em seu trabalho de doutorado, com alunos variando de idade entre 13 e 16 anos, estudando problemas situados da passagem da aritmética para a álgebra, identificou outros tipos de prova, os quais podem ser classificados em nível de experimento mental de Balacheff. Esses tipos de prova não foram analisados por Balacheff, mas podem aparecer quando se exploram problemas fora do conteúdo de Geometria Combinatória.

No campo de problemas envolvendo aritmética e álgebra, foi observado que, diante de algumas situações, para certos alunos, o *empirismo ingênuo* e a *experiência crucial* têm valor de prova (e somente nestes casos nós falamos de provas pragmáticas), enquanto que para outros esse tipo de procedimento constitui somente um meio de descoberta da conjectura. Há casos em que, após uma fase de tentativas empíricas (ensaios numéricos sucessivos), os alunos elaboram uma prova "por enunciados".

> **As provas por enunciados**: Nós designamos assim as provas de nível intelectual que consistem em organizar diversas proposições em linguagem natural, cada uma dessas proposições elementares sendo consideradas como verdadeiras pelo sujeito. São construções intelectuais fundamentadas em teorias, em geral não formalizadas e não completamente explicitadas. Na operação que consiste em organizar enunciados em linguagem natural, o raciocínio do aluno apoia-se em proposições que podem ter status e valores epistêmicos diferentes. (FREITAS, 2007, p. 119, grifo do autor).

Quando a "prova por enunciados" explicitar todos os enunciados das propriedades utilizadas, ela será chamada de *prova por enunciados completa*. Caso haja propriedades implícitas, chamá-la-emos de *prova por enunciados incompleta.* A seguir, exemplificamos tipos de provas por enunciados para o problema:

- **A soma de três números consecutivos é sempre um número múltiplo de três**?

(i) Na soma de três números consecutivos sempre podemos retirar uma unidade do maior e acrescentá-la ao menor. Ao fazermos isso, observamos que a soma equivale ao triplo do número médio, portanto a soma de três números consecutivos é sempre um número múltiplo de três.

Por exemplo,

$$4 + 5 + 6 = (4 + 1) + 5 + (6 - 1) = 3.5;$$

$$6 + 7 + 8 = (6 + 1) + 7 + (8 - 1) e\ 57 + 58 + 59 = (57 + 1) + 58 + (59 - 1) = 3.58.$$

Esse é um caso de *prova por enunciados completa*, pois o aluno apresenta os enunciados de todas as propriedades. Nesse caso, os exemplos numéricos são desnecessários, eles foram apresentados apenas com o objetivo de ilustrar as propriedades.

(ii) A soma de três números consecutivos é sempre um número múltiplo de três, pois sempre que somarmos três números consecutivos obteremos um resultado que é três vezes o número médio.

Nesta produção, temos um exemplo de *prova por enunciados incompleta*, pois o aluno observa o resultado final, porém não apresenta com detalhes os enunciados das propriedades envolvidas. Neste caso, o aluno deixou de enunciar que "dados três números consecutivos, se retirarmos uma unidade do maior e acrescentá-la ao menor, obtemos três números iguais cuja soma não foi alterada".

Há casos em que o aluno, após a realização de tentativas, ou mesmo da produção de uma prova por enunciados, não se dá por satisfeito e usa o cálculo literal e suas propriedades, atribuindo frequentemente à letra um estatuto de nível de abstração mais elevado, aquele de *número indeterminado*[6] ou de *variável*[7], o que caracterizamos como uma "prova algébrica".

Quando todos os cálculos algébricos envolvidos na prova são explicitados, nós a consideramos como uma *prova algébrica completa*. Caso nem todos os cálculos apareçam, chamaremos de *prova algébrica incompleta*. A seguir, exemplificamos tipos de provas algébricas para o problema:

- A soma de três números pares é sempre par?

(i) Todo número par é múltiplo de dois, logo a soma de três números é 2n, onde n é a soma dos quocientes de cada número por dois. Por exemplo, $2n_1 + 2n_2 + \ 2n_3 = 2n$.

Esse é um caso de *prova algébrica incompleta*, pois o aluno não apresenta todos os cálculos algébricos. Neste caso, observa-se que o aluno apresentou diretamente o resultado 2n, omitindo a passagem intermediária: $2n_1 + 2n_2 + 2n_3 = 2(n_1 + n_2 + n_3) = 2n$, onde $n = n_1 + n_2 + n_3$ é um número inteiro, pois n_1, n_2 e n_3 são números inteiros.

(ii) Sejam $2n, 2m$ e $2p$, três números pares, com n, m e p inteiros. Efetuando a soma entre eles teremos: $2n + 2m + 2p = 2\,(n + m + p)$, fazendo $n + m + p = k$, temos que $2n + 2m + 2p = 2k$, par.

Então a soma de três números pares é sempre par. Nesse exemplo, temos uma "prova algébrica completa", pois todos os cálculos algébricos envolvidos na prova são explicitados.

---

[6]Dizemos que a letra tem estatuto de *número indeterminado* quando ela pode representar vários números, ou seja, a partir do momento em que a expressão é escrita, a letra adquire autonomia com relação ao enunciado, podendo ser efetuados cálculos algébricos como se ela representasse um número qualquer.
[7]A letra tem estatuto de *variável* quando assume valores num conjunto específico e estabelece uma relação entre elementos de dois conjuntos numéricos. Nesse caso, ela é usada para representar uma função.

Consideramos as provas por enunciados e as provas algébricas como provas do tipo conceituais, porque se baseiam em formulações de propriedades e de relações entre elas.

4 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Para a análise da evolução das aprendizagens dos alunos, apoiamo-nos no modelo da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1988). Segundo ele, para que ocorra aprendizagem, é necessário que haja interação do aluno com um meio, fonte de desequilíbrios e contradições, ao qual ele deve buscar adaptar-se. É nesse processo de adaptação, de busca de novas respostas para os desafios encontrados que ele produz novos conhecimentos que confirmam o seu aprendizado:

> [...] o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios (...) este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de novas respostas, que são por sua vez provas da aprendizagem (BROUSSEAU, 1986, p. 42).

De maneira sucinta, segundo essa teoria, o professor deve procurar efetuar a devolução de bons problemas aos alunos:

> A devolução era um ato pelo qual o rei - de direito divino - desistia-se do poder para entregar a uma câmara. A “devolução" significa: não é mais por mim que quero, é vocês que devem querer, mas dou-vos este direito porque vocês não podem tomá-lo todo seu (BROUSSEAU, 1987 apud MARGOLINAS, 1993, p.37).

Esses problemas devem ser adequados para a aprendizagem de conceitos e conteúdos desejáveis. O professor deve criar condições para que ocorra a devolução da situação-problema e, consequentemente, o aparecimento de situações adidáticas de formulação[8] que possibilitem ao aluno entrar no jogo, ou seja, aceitar o problema como seu e mergulhar em momentos ou fases adidáticas. À medida que o aluno consegue agir, falar ou pensar e efetuar descobertas, ele estará construindo ou reconstruindo conhecimentos. Sobre esse papel do

---

[8]Quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. Muitas vezes, essas ações podem estar fundamentadas em modelos teóricos que o aluno pode tentar ou não explicitar. Entretanto, o essencial dessa situação não é a explicitação de nenhum argumento de natureza teórica. É o caso em que o aluno fornece uma solução, mas muitas vezes não argumenta ou explicita os mecanismos utilizados na sua elaboração. A explicitação dos modelos teóricos dos argumentos, das justificativas para as ações realizadas não é necessariamente feita pelo aluno. Na estruturação de uma dessas situações, o professor escolhe alguns dados convenientes para que o aluno tenha condições de agir e, assim, buscar a solução de um determinado problema. (FREITAS, 2008, p. 95).

professor na transferência ao aluno da responsabilidade pela busca da solução do problema, Brousseau afirma que:

> A concepção moderna de ensino vai, portanto, requerer que o professor provoque no aluno as adaptações desejadas, por meio de uma escolha cuidadosa dos problemas, de modo que o aluno possa aceitá-los, agir, falar, refletir, evoluir por si próprio. Entre o momento que o aluno aceita o problema como seu e aquele em que produz sua resposta, o professor se recusa a intervir, como alguém que propõe os conhecimentos que deseja ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para que ele possa adquirir um novo conhecimento, mas também deve saber que esse conhecimento é justificado pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo sem apelar a razões didáticas. (BROUSSEAU, 1986, p.49).

As situações adidáticas de ação consistem então nos momentos ou fases em que o aluno, diante de situações-problema, cuja solução tem um caráter mais experimental, busca encontrar alguma solução. Este é o caso, por exemplo, quando num problema de construção geométrica, o aluno contenta-se com uma solução apresentada, exclusivamente, através de um desenho utilizando régua e compasso, um tipo de demonstração aceita pelos renascentistas[9], não se preocupando com a explicitação de um resultado teórico que valide a solução.

Na situação adidática de formulação, o aluno utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos teóricos explícitos além de mostrar um trabalho com informações teóricas mais elaboradas:

> Nessas situações de formulação, o saber não tem uma função de justificação e de controle das ações. O aluno pode tentar explicitar suas justificativas, mais isso não seria essencial para caracterizar esse tipo de situação. Trata-se do caso em que o aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre a validade, embora contenham implicitamente intenções de validação. (FREITAS, 2008, p. 97).

Quando o aluno, numa situação adidática de ação, começa a buscar justificativas sobre a validade das afirmações formuladas, ele estará numa condição limite, adentrando por um novo tipo de situação didática.

Nas situações adidáticas de validação, o aluno já utiliza os mecanismos de prova e onde o saber é usado com essa finalidade. O trabalho do aluno não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas a certas afirmações, elaborações, declarações a

---

[9]Demonstração apresentada no Capítulo 1, página 18, deste texto.

propósito desse conhecimento. Nessas situações, é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que já se afirmou, de outra forma, pela ação.

No trabalho realizado por Margolinas (1993), uma característica da troca didática é a comunicação entre qualquer um que possui um saber (o mestre) e o outro que deve adquiri-lo (o aluno). O mestre tem, por conseguinte, a responsabilidade do ponto de vista do saber, que circula na sua classe; e o aluno outra, do aprender, e deve ter ocasião de mostrar o que aprendeu. Isso implica que uma parte do trabalho do aluno é necessariamente autônoma.

Durante todas as situações, nas quais o aluno deve fornecer um trabalho pessoal, existe o que chamamos de uma fase de conclusão, durante a qual o aluno recebe uma informação sobre a validade do seu trabalho. Essa informação deve ser relevante do ponto de vista do saber interessado. Na fase de conclusão, essa responsabilidade não implica emitir diretamente um julgamento sobre a atividade do aluno, e sim um necessário olhar do mestre sobre a fase de conclusão.

As possibilidades que se oferecem ao mestre, para exercer a sua responsabilidade nas fases de conclusão, são de uma importância crucial, tanto prática como teórica, pois o mestre é o responsável pela verdade em sua classe e o exercício dessa responsabilidade pode fazer-se de duas maneiras radicalmente diferentes:

a) a fase de conclusão pode ser uma fase de avaliação: diremos que a fase de conclusão é uma fase de avaliação quando a validade do trabalho do aluno é avaliada pelo mestre sob a forma de julgamento, ou seja, o aluno não é chamado à reflexão sobre seu procedimento de validação – tem apenas a resposta, se acertou ou não;
b) a fase de conclusão pode ser uma fase de validação: diremos que a fase de conclusão é uma fase de validação se o aluno é autônomo quanto à validade do seu trabalho. Para que isso ocorra, há necessidade da interação com o meio. O mestre, quando escolhe esta possibilidade, "deixa de querer" ser o juiz da situação e apenas permanece como responsável. Neste caso, o meio deve ser organizado de tal forma que permita as fases de validação ou devolução de uma situação adidática. O aluno é então responsável pela totalidade das suas ações.

Para Margolinas (1993), essas duas modalidades de fases de conclusão são as mais importantes. Não podemos dizer que elas se excluam totalmente, porque existe fase de conclusão na qual o mestre intervém, no entanto sem avaliar diretamente. Este é o caso quando se apresenta um contraexemplo ao aluno, que deve então se render à evidência. Tal fase não é uma fase de validação, porque o aluno não valida sozinho seu trabalho, ele é ajudado em uma parte crucial dele.

Se a situação de aprendizagem for organizada de forma a permitir a validação, então as conclusões provêm da interação dos alunos com o meio e o erro deve ser explorado como fator de retomada da aprendizagem nas fases de conclusão.

O aluno deve ter a ocasião de reconhecer a verdade ou a falsidade do seu resultado e não deve poder enganar-se e permanecer no erro, o que é precisamente um momento crucial. A garantia da conclusão bem sucedida pode vir apenas do meio, organizado pelo mestre, mas é necessário também ter uma teoria que permita esta confiança para deixar a situação desenrolar-se.

A assimetria professor-aluno deve restabelecer-se, porque "[...] ao professor é suposto criar condições suficientes para apropriação dos conhecimentos, e deve 'reconhecer' esta apropriação quando produz-se" (BROUSSEAU, 1986, p.51).

O professor é a autoridade acadêmica representante das instituições do saber socialmente identificável. E assim, é tipicamente nas situações de institucionalização que ele retoma abertamente a sua posição em relação ao saber matemático.

> Nas situações de institucionalização, o saber tem uma função de referência cultural a qual extrapola o contexto pessoal e localizado. Portanto, o conhecimento deverá ter para o aluno e a sociedade, um estatuto mais universal do que aquela limitação imposta pela particularidade do problema estudado. Esse conhecimento deve ser aceito pelo meio social. (FREITAS, 2008, p.101).

5 POR QUE ESTUDAR PROBLEMAS QUE ENVOLVAM VALIDAÇÕES ALGÉBRICAS DENTRO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS?

Trabalhando com Matemática nos diferentes segmentos da Educação Básica, pudemos identificar dificuldades dos alunos na resolução de problemas matemáticos e observar que elas cresciam à medida que esses problemas se tornavam mais elaborados, em especial aqueles que envolviam validações algébricas.

Diante de estudos realizados como professora e coordenadora, tais como pesquisa e planejamento, foi possível perceber a valorização dada ao estudo de problemas pelo PCN (BRASIL, 1998, p. 254):

> As finalidades do ensino de Matemática, no nível médio, indicam como objetivo levar o aluno a:

> - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> - utilizar, com confiança, procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

O matemático inglês Ian Stewart (1995) indica que os problemas têm desempenhado um papel destacado, não só como motor do desenvolvimento da Matemática, enquanto corpo de conhecimentos, mas igualmente como motivador da atividade dos matemáticos, constituindo uma expressão dessa atividade. Ele ainda define-os como a força motriz da Matemática.

Em nosso levantamento bibliográfico, exposto no capítulo 1, percebemos que as pesquisas apontam que a prova[10] é vista como "conteúdo" e como recurso pedagógico, bastante rico em sala de aula, porém pouco usado. Outros estudos constataram que o empirismo é muito forte e que os alunos encontram muita dificuldade na elaboração de provas mais formais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apoiam-se numa discussão sobre o conhecimento matemático, que é apresentado como resultado de uma construção humana, em interação com os contextos natural, social e cultural. O documento sublinha a importância de processos heurísticos, da criatividade e do sentido estético na criação do conhecimento matemático. Pondo em paralelo o caráter indutivo e dedutivo da Matemática, indica que as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas a partir da observação de casos particulares.

Desse modo, escolhemos trabalhar com o Conjunto dos Números Inteiros, pois ele permite a exploração de problemas envolvendo uma diversidade de conjecturas. Por exemplo:

- A soma de três números pares é sempre par?

Além disso, possibilita a generalização de propriedades numéricas por meio de expressões algébricas. Neste caso há a elaboração de um tipo de prova pelos alunos. Como no seguinte exemplo:

"A soma de três números pares é sempre par": Sejam $2n, 2m\ e\ 2p,$ três números pares, com n, m e p inteiros. Efetuando a soma entre eles teremos: $2n + 2m + 2p = 2\ (n +$

[10]Neste caso a prova se refere a um procedimento de validação do aluno e não pode ser confundida como um instrumento de avaliação elaborado pelo professor.

$m + p)$, logo $2n + 2m + 2p = 2k$, que é par, com $n + m + p = k$. Então a soma de três números pares é sempre par.

Assim sendo, colocamos as seguintes questões:

- Quais são os principais tipos de problemas que apresentam conjecturas no conjunto dos números inteiros em livros didáticos? Qual é o desempenho dos alunos na resolução de problemas que envolvam conjecturas dentro do conjunto dos números inteiros?

Mediante tais fatos, encontramos alguns problemas que requerem soluções e decisões. Alguns desses problemas possuem fatos matemáticos relativamente simples, envolvendo conceitos de Matemática elementar; porém outros, “simulados” em uma determinada questão, necessitam de uma investigação mais apurada das variáveis envolvidas, que devem culminar na produção de alguma prova, como é o caso da conjectura exposta no último parágrafo da página anterior.

Para realizar as provas algébricas em conjecturas matemáticas, recorreremos ao processo que obtém o denominado “Modelagem Algébrica”. Estamos considerando como o processo que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou situação - problema real, por meio de um conjunto de símbolos e relações matemáticas criando uma formulação matemática adequada.

A elaboração de um modelo depende do conhecimento matemático que se tem. Se o conhecimento restringe-se a uma matemática elementar, como Aritmética, o modelo pode ficar limitado a esses conceitos. Quanto maior o conhecimento matemático e de modelagem algébrica, melhores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma Matemática de nível mais elevado.

Assim sendo, analisamos problemas algébricos mais simples, como outros de diferentes níveis de dificuldade. Foi diante desse universo que nos dedicamos à busca de uma coletânea de atividades que acreditamos permitir investigar possibilidades de validações algébricas das conjecturas nelas envolvidas.

6 CARACTERIZAÇÃO DO OBJETO E OBJETIVO DE ESTUDO

Segundo Ponte e Santos (1996), a aula de Matemática, para muitos professores, comporta um momento de explicação mais teórico e uma parte prática, que consiste na resolução de exercícios. Eles assinalam ainda que a explicação teórica, em alguns casos, limita-se à reprodução do que é apresentado no livro didático.

Eles apontam ainda para o uso do livro didático pelos professores, o qual, na maioria das vezes, se constitui como “a principal fonte de organização das aulas e chega a assumir o papel de indicador oficial das expectativas relativamente aos conhecimentos prévios dos alunos” (PONTES; SANTOS, 1996, p.3).

Para Mansutti (1993), o livro didático, que é visto, muitas vezes, como instrumento de trabalho para o professor ou como material de estudo para os alunos, tem muito mais a nos mostrar historicamente, pois esteve presente em vários momentos importantes para o ensino, com todas as mudanças e adaptações, sejam essas mudanças pelo interesse de grupos, seja por modismos ou fatores políticos. Sendo fundamental no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, o livro didático pode se constituir na mais forte referência para a prática docente.

Desse modo, investigamos inicialmente alguns tipos de problemas que apresentavam conjecturas no Conjunto dos Números Inteiros. Buscamos nos livros didáticos problemas que proporcionavam conjecturas e faziam parte do currículo escolar. Esses dados coletados serviram de base para a estruturação da sequência didática.

Para encontrar respostas para algumas das questões que formulamos no percurso, realizamos um trabalho de pesquisa cujos objetivos são apresentados a seguir.

6.1 Objetivo geral

Estudar os procedimentos utilizados por alunos da 3ª série do Ensino Médio na validação algébrica de conjecturas no Conjunto dos Números Inteiros.

6.2 Objetivos específicos

Investigar nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio problemas matemáticos que levem o aluno a formular de conjecturas.

Elaborar uma sequência didática com o fim de investigar identificar tipos de provas produzidos pelos alunos.

Verificar indícios de aprendizagem da prova matemática pelos alunos, através de uma possível evolução entre os tipos de provas, caracterizadas segundo nosso referencial teórico.

7 CONSTRUÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Escolhemos o tema "estudo de conjecturas e provas no Campo da Álgebra", o qual convergiu para o nosso objeto que é um estudo sobre validações algébricas em Conjecturas no Conjunto dos Inteiros por alunos da 3º série do Ensino Médio em Campo Grande, MS, local onde essa pesquisa foi desenvolvida. No que concerne à parte metodológica, para coleta e análise de dados sobre provas produzidas e aprendizagens realizadas pelos alunos, nos apoiamos na Engenharia Didática proposta por Artigue (1988).

Segundo Artigue (1988), a Engenharia Didática pode ser considerada "[...] como um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino" (ARTIGUE, 1988 apud MACHADO, 2008, p.235). A metodologia da Engenharia Didática é composta das seguintes fases - análises prévias; análise *a priori*; experimentação e a análise *a posteriori*/avaliação.

Na Engenharia Didática, analisa-se um conteúdo do sistema de ensino cujo funcionamento parece, por algum motivo, pouco satisfatório, e faz-se uma análise dele com a intenção de propor mudanças para um possível funcionamento mais satisfatório.

Ela diferencia-se de outros métodos pelo tipo de registro das ações e pela validação, pois, em geral, outras metodologias realizam uma validação externa, muitas vezes através da confrontação e comparação entre grupos experimentais e grupos testemunhas. Na metodologia da Engenharia Didática, faz-se uma validação interna que consiste na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

No primeiro momento da Engenharia, referente às análises prévias, realizamos a revisão de literatura. A qual forneceu subsídios à elaboração das atividades e ao desenvolvimento da análise *a priori*, e investigamos, em livros didáticos, tipos de problemas que apresentavam conjecturas no conjunto dos números inteiros.

Bueno (1986) define conjectura como uma suposição que se faz acerca de uma coisa possível ou não e de que se tira uma consequência matemática. Imenes e Lellis (1998) definem conjectura como: "Quando se suspeita de que uma certa propriedade é válida, mas não se tem certeza disso, diz-se que se trata de uma conjectura".

Em nosso trabalho consideramos uma conjectura a afirmação, a qual não foi provada ser verdadeira ou falsa, pelo aluno ou para o aluno. Estamos assim considerando como conjecturas aqueles enunciados de propriedades, que surgem diante do aluno, mas que ele ainda não sabe dizer se são verdadeiras ou falsas. É claro que, do ponto de vista da Matemática ou ainda do professor que conhece justificativa matemática, pode não se tratar de uma conjectura, mas de um enunciado que ele sabe mostrar se é verdadeiro ou falso. Nesse caso, as conjecturas podem servir para o aluno descobrir e construir "novos" conhecimentos matemáticos, ligando o que está tentando aprender a conhecimentos anteriores. Desse modo, nesta pesquisa as conjecturas foram geradas a partir das atividades por nós selecionadas, dentro do Conjunto dos Números Inteiros.

Para Machado (2008), a partir das análises preliminares o pesquisador escolhe o número de variáveis relacionadas ao sistema sobre o qual o sistema pode agir. Essas variáveis são denominadas *variáveis de comando*[11]*:*

> [...] essas variáveis podem ser tanto de ordem geral como específica, i.é., depender do conteúdo didático a ser ensinado. Por exemplo, caso a variável seja do tipo microdidático, tem-se as variáveis intrínsecas ao problema, que são de ordem geral e as variáveis que dependem da situação, ligadas à organização e à gestão do meio, que são específicas. (MACHADO, 2008, p.).

Assim sendo, delimitamos as *variáveis de comando*, no nosso caso do tipo microdidático, concernentes à organização local da engenharia. Elas foram utilizadas durante a aplicação da sequência didática, a fim de explorar o conteúdo em questão por meio da sequência proposta, desenvolvendo a apreensão dos conceitos. No nosso caso, as validações algébricas no conjunto dos números inteiros.

Ao finalizarmos as análises preliminares elaboramos *a priori* com base no modelo de Tipologia de Provas de Ballacheff (1988), portanto a nossa sequência didática visava diagnosticar tipos de provas que cada aluno poderia ser capaz de produzir, bem como verificar a aprendizagem dos mesmos através da evolução de um tipo de prova para outro. A justificativa e a descrição das escolhas integraram essa análise de tal forma que possibilitaram a previsão de respostas dos alunos, falsas ou verdadeiras, proporcionando-nos meios de organizar e estruturar a sequência didática mediante a previsão do comportamento do aluno de tal forma que possibilitasse a ocorrência de algum tipo de aprendizagem.

As conjecturas foram elaboradas mediante os assuntos por nós selecionados dentro desse conjunto. Os conteúdos escolhidos foram Paridade, Divisibilidade, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e outros tipos de sequências. Tal recorte se fez necessário devido à ausência de nosso objeto de estudo nos demais conteúdos apresentados nos livros didáticos pesquisados, e ao apontamento de pesquisas indicando a importância de tais assuntos, como, por exemplo, a de Leandro (2006).

---

[11]Artigue (1988) caracteriza as variáveis de comando como variáveis macrodidáticas, concernentes à organização global da engenharia e as variáveis microdidáticas, concernentes à organização local da engenharia, ou de uma sessão ou de uma fase.

Na fase da experimentação, aplicamos a sequência didática elaborada, composta de atividades diversificadas, acompanhadas da avaliação dos dados obtidos. Durante a aplicação da sequência, verificamos possibilidades de proporcionar aos alunos condições para melhor compreensão da validação algébrica de conjecturas. Nas sessões finais da sequência, aplicamos atividades visando a identificar indícios de alguma possível aprendizagem das “provas” matemáticas pelos alunos.

Com base na metodologia da Engenharia Didática, a análise *a posteriori* das atividades foi desenvolvida a partir dos resultados obtidos em cada sessão, confrontando-os com os da análise *a priori*. Esta avaliação interna possibilitou-nos a reformulação da sessão seguinte. É o que apresentamos no próximo capítulo, com a descrição da construção e a aplicação de nossa sequência didática.

CAPÍTULO 3

O DESENVOLVIMENTO EXPERIMENTAL

Neste capítulo, analisamos procedimentos utilizados por alunos do Ensino Médio, durante a resolução de problemas que envolvem conjecturas no conjunto dos números inteiros. Nele são estudadas formulações e validações, bem como tipos e níveis de provas que os alunos produzem, durante as atividades a eles apresentadas.

Desde o início, nossa intenção era realizar essa pesquisa na escola[12] em que trabalhávamos, pois possuíamos um "histórico" dos alunos que participariam desse trabalho, ou seja, tínhamos um conhecimento preliminar dos conteúdos que esses alunos provavelmente adquiriram ao longo das duas primeiras séries do Ensino Médio. Esse conhecimento preliminar foi levado em consideração no preparo das atividades da sequência didática, nas escolhas dos conteúdos matemáticos a serem utilizados na nossa investigação.

Deste modo, entramos em contato com a direção da escola, que prontamente apoiou-nos para a realização deste trabalho. Conversamos também com os alunos das terceiras séries, explicando os, objetivos e a importância de suas participações na pesquisa. Após os alunos concordarem em participar da pesquisa de forma voluntária, entramos em contato com seus pais ou responsáveis, solicitando a autorização dos mesmos, garantindo que manteríamos o anonimato dos alunos ao descrever os resultados da pesquisa.

Assim sendo, essa pesquisa teve a participação de sete alunos, de faixa etária entre 16 e 17 anos, da 3ª série do Ensino Médio e um de 15 anos, da 2ª série do Ensino Médio, os quais permaneciam na escola em período integral. No período matutino, de segunda a sexta-feira e no período vespertino, às terças e quintas feiras eles tinham aulas normais; cursinho nas segundas, quartas e sextas-feiras. O cursinho era subdividido em Humanas, Biológicas e Exatas, e tinha por objetivo principal um aprofundamento na área de interesse do aluno e um preparo direcionado para o vestibular.

Apresentamos a seguir um breve perfil dos alunos[13] que participaram da pesquisa:

---

[12] Colégio particular, composto por Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio em Campo Grande, MS.

[13] Atualmente, BR cursa Engenharia Mecânica na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP); AE é aluno de Engenharia Civil na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); CB foi aprovado em Ciências da Computação na Universidade Estadual de Maringá (UEM), em Engenharia Ambiental na UFMS, 1º lugar entre os aprovados; também passou no vestibular da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) e de Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), escolhendo esta última como sua universidade; KK cursa Engenharia Civil na Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal (UNIDERP); LN foi aprovado na Engenharia Civil da UFMS; MF cursa Engenharia Mecatrônica na UNIDERP, tendo sido aprovado em 2° lugar; e RT cursa Engenharia Civil na UFMS.

a) **AE** estudou na escola desde a 1ª série do Ensino Fundamental. Sempre teve uma conduta exemplar, ocupando um local de destaque nas turmas pelas quais passou. Possui um embasamento satisfatório em todas as disciplinas, mas não participa das olimpíadas;

b) **BR** estudou desde a antiga 5ª série, atual 6º ano do Ensino Fundamental, na escola em que realizamos este trabalho. É uma pessoa muito educada e querida, inicialmente tímida, mas de um grande senso de humor. Possui uma base curricular de Matemática mais consistente, demonstrada em simulados e olimpíadas, além do grande interesse na ampliação dos seus conhecimentos em Matemática;

c) **CB** estudou em uma escola autodenominada construtivista até a 8ª série, atual 9º ano do Ensino Fundamental. Na 1ª série do Ensino Médio ingressou na escola. Muito estudioso desde então, a partir da 2ª série do Ensino Médio, começou a ocupar as primeiras colocações nas provas e simulados. A partir da 3ª série, destacou-se ocupando sempre o 1º lugar entre todos os alunos das três salas de terceiro ano. Muito cortês e um pouco introvertido, mas com uma característica primordial: a dedicação aos estudos;

d) **LN** começou a estudar na escola na 2ª série do Ensino Médio e pudemos perceber, neste curto período, sua inclinação para a área da Matemática. Muito pertinente em suas intervenções, porém pouco empenhado no aprofundamento dos conteúdos e nos momentos de estudo;

e) **MF** estudou na escola desde a 5ª série do Ensino Fundamental, atual 6º ano. Possuía uma habilidade de raciocinar impressionante, porém não tinha o hábito de se dedicar aos estudos. Quando participava das olimpíadas no Ensino Fundamental, saía-se muito bem. Já no Ensino Médio, não possuía o mesmo rendimento;

f) **KK** estudou na escola desde a 1ª série do Ensino Fundamental. Possuía uma conduta disciplinada em sala de aula. Sempre apresentou dificuldades na aprendizagem dos conteúdos escolares, mas sempre mostrou interesse na área da Matemática. Ficamos muito felizes com seu interesse voluntário na participação de nossa pesquisa, pois não esperávamos por esta adesão, já que KK sempre foi muito tímida;

g) **RT** estudou em São Paulo até a oitava série, atual nono do Ensino Fundamental quando ingressou na escola na 1ª série do Ensino Médio. Comportamento exemplar, extrovertido e com grande liderança perante seus colegas. Possui um bom embasamento em todas as disciplinas, porém não tem preferência por uma matéria específica;

h) **TR** estudou desde a antiga 4ª série, atual 5º ano do Ensino Fundamental, na escola em que realizamos este trabalho. Por manifestar um grande interesse pela área da Matemática, foi convidado, no 2º ano do Ensino Médio, a participar desta pesquisa.

Depois de formado o grupo de voluntários, passamos para a aplicação da sequência didática (Apêndice A a Apêndice E). Elaboramos e aplicamos dez sessões, porém analisamos neste trabalho apenas as cinco primeiras, pois as mesmas nos forneceram dados suficientes para responder aos nossos questionamentos. Para facilitar a observação dos alunos, as atividades foram previstas para serem realizadas em duplas ou individualmente, possibilitando a gravação das conversas e comentários sobre as questões e a melhor percepção do raciocínio utilizado nas soluções encontradas.

Após a realização de cada SESSÃO, foi feita a descrição dos resultados e a análise *a posteriori* local, confrontando-a com a análise *a priori*, sendo apresentada a conclusão parcial.

As atividades e os desafios das sessões foram aplicados com o auxílio de lápis e papel. Cada SESSÃO da experimentação teve duração de aproximadamente duas horas, pois previmos ser esse o tempo suficiente para se aplicar as atividades. Foi realizada uma vez por semana, fora do período normal de aulas, caracterizando-se como atividade extraclasse. Em cada SESSÃO, ao término de cada atividade, num tempo variável de 5 a 10 minutos, realizamos, com a turma, uma breve discussão sobre suas produções e dificuldades encontradas e, em seguida, promovemos uma fase de institucionalização dos principais conceitos matemáticos relativos a cada SESSÃO.

Esperamos que, a partir da primeira atividade, seja possível identificar algumas validações realizadas pelos alunos sobre as conjecturas propostas, segundo a Tipologia de Provas que apresentamos no capítulo 2.

1 VARIÁVEIS DIDÁTICAS

Para a elaboração e análise *a priori* das atividades da sequência didática da pesquisa, levamos em consideração o estudo das variáveis didáticas, articulando-as com possíveis estratégias de solução, possibilitando assim controlar o grau de dificuldade de cada questão.

Na fase da concepção e da análise *a priori* da sequência didática, orientada pelas análises preliminares, pudemos delimitar um conjunto de variáveis pertinentes, considerando a escolha do instrumento de coleta de dados da pesquisa, buscando atividades que apresentassem diferentes níveis de dificuldade, de modo a motivar e estimular o aluno a encontrar uma solução, bem como as estratégias de resolução previstas.

Segundo Artigue (1990), uma variável didática ou *variável de comando* pode influenciar, pela sua escolha, uma situação de aprendizagem. Essas variáveis podem ser fixadas pelo pesquisador e podem ser independentes ou dependentes do conteúdo didático enfocado. Assim sendo, delimitamos no Capítulo II as nossas *variáveis de comando*, no nosso caso do tipo microdidático, concernentes à organização local da engenharia. Elas foram utilizadas durante a aplicação da sequência didática, a fim de explorar o conteúdo em questão por meio da sequência proposta, desenvolvendo a apreensão dos conceitos. No nosso caso, as validações algébricas no conjunto dos números inteiros.

A seguir, exemplificamos tipos de variáveis didáticas que podem aparecer em nossas sessões:

a) **variável 1** - A presença de letras representando números desconhecidos nos enunciados das atividades contendo conjecturas: A presença de letras representando números desconhecidos poderá ou não aparecer no enunciado da atividade. A sua ausência nos enunciados poderá favorecer o aparecimento de provas do tipo empirismo ingênuo; e a presença de incógnitas nos enunciados poderá favorecer a produção de provas algébricas pelos alunos;
b) **variável 2** - Quantidade de números: Pode influenciar nos tipos de provas desenvolvidas pelos alunos, podendo favorecer o aparecimento de provas conceituais;
c) **variável 3** - Caráter típico e caráter atípico da questão: Esta variável refere-se à origem da questão. As questões típicas podem ser encontradas facilmente em livros didáticos. Já as questões atípicas são aquelas pouco usuais ou até mesmo adaptadas para fazer aparecer determinado conhecimento, como os desafios propostos para cada final de SESSÃO.

2 SESSÃO 1

2.1 Análise *a priori*

Vejamos, primeiro, os aspectos especificamente matemáticos. Ao analisar possibilidades de uso das novas tecnologias para o ensino e aprendizagem desta disciplina, os PCN (1998) indicam que estas possibilitam “o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem". Apresentam, ainda, um exemplo concreto de uma situação exploratória e de investigação – a divisão sucessiva de um número por 2.

Podemos dizer que, no currículo brasileiro, as atividades de investigação e exploração merecem um grande destaque, tanto no estudo dos conteúdos matemáticos respeitantes ao estudo dos números e de suas propriedades, bem como na sua utilização em contextos da vida real, em estreita associação com a Estatística e a Análise de dados.

Assim sendo, elaboramos as atividades e os desafios desta SESSÃO com problemas caracterizados por conjecturas, permitindo ao aluno utilizar os conceitos de números pares, ímpares e divisibilidade, bem como suas propriedades. A partir desses conhecimentos, pretendemos que o aluno valide as conjecturas propostas. Esperamos que grande parte dos alunos apresente soluções do tipo *empirismo ingênuo*, pelo fato de que a representação geral de um número par qualquer na forma $2k$, $k \in Z$ e de um número ímpar na forma, $2k+1$, $k \in Z$ não ter sido muito trabalhada em sala de aula. Uma das justificativas para isso é o fato de os alunos serem pouco estimulados, pelos professores e pela escola, a produzirem justificativas matemáticas formais, uma vez que as mesmas quase não são cobradas nos exames vestibulares.

Provavelmente, outro motivo para o aparecimento de provas do tipo *empirismo ingênuo* é a presença da *variável didática 1*[14] na **atividade 1**, no que diz respeito a falta de incógnitas conjecturas.

Apresentamos a seguir nossas análises da 1ª SESSÃO das atividades da sequência didática aplicada.

2.2 Atividade 1

ALUNO: ____

SESSÃO 1

Atividade 1. Observe as afirmações abaixo. Verifique se são verdadeiras e apresente justificativas matemáticas para cada uma das respostas.

1. A soma de dois números inteiros pares é sempre par.
2. A soma de três números inteiros pares é sempre par.
3. A soma de **n** números inteiros pares é sempre um número par.

[14] Verificar a definição de *variável didática 1* na página 47 deste capítulo.

• **Forma de condução da atividade 1:** Entregamos a folha contendo a atividade 1 e explicamos que a mesma é composta por problemas formados por conjecturas, as quais podem ser verdadeiras ou falsas. Os alunos, individualmente, devem averiguar a veracidade ou a falsidade de cada uma delas através de provas matemáticas. Após a produção dos alunos, realizamos uma breve institucionalização.

Nesse desenvolvimento experimental, dentre outros elementos, analisamos as possíveis validações[15] a serem realizadas pelos alunos[16]:

a) A soma de dois números pares é sempre par.

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) A soma de dois números pares é par, pois $2 + 2 = 4$ *e* $2 + 4 = 6$

Esta prova é do tipo *empirismo ingênuo*, pois a certeza provém da realização sobre poucos casos particulares.

(ii) A soma de dois números é sempre par, pois ao somarmos dois números terminados em par o resultado será sempre par, por exemplo: $12 + 14 = 26$; $16 + 18 = 34$; $12 + 26 = 38$.

De acordo com Freitas (1993), apesar de o aluno ter efetuado cálculos sobre alguns números particulares, esse tipo de prova pode ser considerado como *prova por enunciados incompleta*, pois ele explicita o uso de uma propriedade e observa o resultado final, porém não apresenta com detalhes os enunciados das propriedades envolvidas. Nessa prova, ele não enuncia que "um número é par quando seu último algarismo é par" e nem tampouco que neste caso é possível facilmente verificar que para todos os casos possíveis o resultado da soma tem o último algarismo par.

(iii) *A soma de dois números pares é par, pois* $2 + 2 = 4$*;* $2 + 4 = 6$*;* $4 + 6 = 10$*;* $4 + 8 = 12$*;* $5432 + 9998 = 15430$.

---

[15]Todas as provas produzidas pelos alunos serão categorizadas segundo o nosso referencial teórico.

[16]Consideramos os seguintes tipos de validações tomando como base a pré-experimentação apresentada na dissertação de Leandro (2006), bem como no texto apresentado por Freitas (2007).

Após verificar numericamente para alguns números particulares, o aluno ainda duvida da conjectura proposta, se perguntando: - *Mas será que a soma de dois números pares é sempre par?*

Para eliminar a dúvida ele efetua a soma para números bem maiores e fica satisfeito. Nesse caso, consideramos que essa prova é do tipo *experimento crucial*.

(iv) *Sejam* $2n$ *e* $2m$*, dois números pares, com* n *e* m *inteiros, efetuando a soma entre eles teremos:* $2n + 2m = 2\,(n + m)$*, fazendo* $n + m = k$*, temos que* $2n + 2m = 2k$*, que é par, com k inteiro. Logo a soma de dois números pares é sempre par.*

A prova desenvolvida pelo aluno é categorizada como *prova algébrica completa*, pois o aluno generaliza e usa a linguagem algébrica corretamente.

b) A soma de três números pares é sempre par.

Para esta atividade esperamos encontrar respostas construídas pelos alunos, como as seguintes:

i) *A soma de três números pares é par, pois* $2 + 2 + 2 = 8$; $2 + 4 + 6 = 12$; $4 + 6 + 8 = 18$.

Categorizamos essa prova como *empirismo ingênuo,* conforme o modelo de Balacheff.

(ii) *A soma de três números pares é sempre par, pois ao somarmos três números terminados em par o resultado será sempre par:* $12 + 12 + 12 = 36$; $12 + 14 + 16 = 42$; $14 + 16 + 18 = 48$.

Nesta prova foi utilizado o mesmo raciocínio que já analisamos para o caso da soma de dois números pares, portanto esse tipo de prova pode ser considerado como *prova por enunciados incompleta*.

(iii) *A soma de três números pares é par, pois* $2 + 2 + 2 = 8$; $2 + 4 + 6 = 12$; $4 + 6 + 8 = 18$; $5432 + 9998 + 15430 = 30860$.

Após manipular numericamente, o aluno ainda pode duvidar da conjectura proposta, se questionando: - *Mas será que a soma de três números pares é sempre par?* Testa então para um caso envolvendo números grandes e satisfaz. Nesse caso a prova é categorizada como *experimento crucial*.

(iv) *Sejam* $2n, 2m$ *e* $2p$*, três números pares, com* n, m *e* p *inteiros. Efetuando a soma entre eles teremos:* $2n + 2m + 2p = 2\,(n + m + p)$*, fazendo:* $n + m + p = k$*, temos que* $2n + 2m + 2p = 2k$*, par. Então a soma de três números pares é sempre par.*

A prova desenvolvida pelo aluno é categorizada como *prova algébrica completa*, conforme foi descrita anteriormente.

c) A soma de n números pares é sempre par.

É provável que encontremos as seguintes respostas dadas pelos alunos:

(i) $Se\, n = 2, temos\, 2 + 2 = 4$; $2 + 4 = 6$ *e* $4 + 6 = 10$*, a soma é par; se* $n = 3$*, temos* $2 + 2 + 2 = 8$*; a soma também é par, então a soma de n números pares é par.*

Categorizamos a prova acima como *empirismo ingênuo*.

(ii) *A soma de* n *números pares é sempre par, pois ao somarmos* n *números terminados em par o resultado será sempre par, pois* $se\, n = 2, temos\, 2 + 2 = 4$; $2 + 4 = 6$ *e* $4 + 6 = 10$*, a soma é par; se* $n = 3$*, temos* $4 + 6 + 8 = 18$*, que é um número par.*

Caracterizamos a prova acima como uma *prova por enunciados incompleta*, pois foi omitido o enunciado de que se o último algarismo é par então o número é par. Observa-se que os casos particulares apresentados indicam apenas que eles serviram para a descoberta da propriedade geral.

(iii) *O aluno pode chegar ao seguinte raciocínio*:

- *se* $n = 2, temos\, 2 + 2 = 4$; $2 + 4 = 6$ *e* $4 + 6 = 10$*, a soma é par;*
- *se* $n = 3$*, temos* $2 + 2 + 2 = 6$*; a soma é par;*
- *se* $n = 6, temos\, 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$*; logo a soma de* n *números pares é par, seja para uma quantidade par ou para uma quantidade ímpar de números somados.*

Acreditamos que, nesta prova, após realizar as manipulações numéricas, o aluno ainda pode ter ficado em dúvida se a soma de n números pares é sempre par, pelo fato de ter efetuado cálculos com uma quantidade relativamente grande de números. Logo podemos categorizar essa prova como *experimento crucial*.

(iv) *Seja* S *a soma dos* n *números pares, tomemos* $m_1, \ldots, m_{p,} \cdot \ldots, m_{n,}$ *números inteiros onde* $m_1 = 2\,k_1 \cdot$, $m_p = 2\,k_{\,p}$ *e* $m_n = 2\,k_n$, *com* $k_1, \ldots, k_p, \ldots, k_n$ *números inteiros. Logo* $S = m_{\,1} + \ldots + m_p + \ldots + m_n$, *então:* $S = 2\,k_1 + \ldots + 2\,k_p + \ldots + 2\,k_n$, *segue que* $S = 2\big(k_1 + \ldots + k_p + \ldots + k_n\big)$, *Fazendo* $s = k_1 + \ldots + k_p + \ldots + k_n$, *temos que* $S = 2s$. *Logo a soma de* n *números pares é sempre par.*

Observa-se, na prova desenvolvida pelo aluno, o uso adequado de letras para representar números desconhecidos, por isso ela é categorizada como *prova algébrica completa*.

2.3 Atividade 2

ALUNO:____

SESSÃO 1

Atividade 2. Resolva os problemas abaixo e apresente justificativa matemática para cada uma de suas respostas.

1. A soma de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de três?
2. A soma de quatro números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de quatro?
3. A soma de cinco números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de cinco?

- **Forma de condução da atividade 2:** Entregamos a folha contendo a atividade 2 e os alunos, individualmente, deverão verificar a veracidade ou a falsidade de cada uma delas através de provas matemáticas. Após a produção dos alunos, realizamos uma breve institucionalização.
- **Possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:**

a) A soma de três números consecutivos é sempre múltiplo de três?

É possível que encontremos respostas apresentadas pelos alunos como as seguintes:

(i) *A soma de 3 números consecutivos é múltiplo de três, pois* $1 + 2 + 3 = 6$; $2 + 3 + 4 = 9$ *e* $3 + 4 + 5 = 12$.

Categorizamos a prova acima como *empirismo ingênuo*, conforme já foi descrito anteriormente.

(ii) *A soma de* 3 *números consecutivos é múltiplo de três, pois* $1 + 2 + 3 = 6$*;* $3 + 4 + 5 = 12$ *e* $241 + 242 + 243 = 726$.

Os cálculos mostram que, mesmo tendo realizado várias tentativas, o aluno ainda duvida que a soma de 3 números consecutivos é sempre múltiplo de três e realiza um cálculo com números bem maiores para se convencer. Por esse motivo, categorizamos esse tipo de prova como *experimento crucial*.

(iii) *Sejam* $m, m + 1$ *e* $m + 2$*, três números consecutivos, com m inteiro. Efetuando a soma entre eles teremos:* $m + m + 1 + m + 2 = 3m + 3 = 3(m + 1)$*, fazendo* $m + 1 = k$*, com k inteiro. Temos que* $3(m + 1) = 3k$*, que é múltiplo de 3, logo a soma de 3 números consecutivos é sempre múltiplo de três.*

A prova é categorizada como *prova algébrica completa*, conforme descrição já apresentada.

b) A soma de quatro números consecutivos é sempre múltiplo de quatro?

(i) *A soma de 4 números consecutivos não é múltiplo de quatro, pois basta um contra exemplo para provar que a conjectura é falsa:* $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

A prova acima não pode ser classificada segundo o nosso referencial teórico, pois há apenas apresentação de um contraexemplo. No entanto, essa é uma maneira muito utilizada para se provar a falsidade de uma conjectura.

(ii) *Sejam quatro números inteiros e consecutivos:* $n, n + 1, n + 2, n + 3$*; ao somarmos esses números teremos* $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 4n + 6 \neq 4k, com\ k \in Z$*, logo a soma de quatro números consecutivos não é sempre múltiplo de quatro.*

Conforme o que já observamos anteriormente, esse tipo de prova pode ser considerado como prova algébrica completa.

c) A soma de cinco números consecutivos é sempre múltiplo de cinco?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) *A soma de* 5 *números consecutivos é múltiplo de cinco, pois* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$; $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$; $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$.

Essa prova é do tipo *empirismo ingênuo*, pois após a verificação sobre apenas três casos ele se deu por satisfeito.

(ii) *A soma de 5 números consecutivos é múltiplo de 5, pois* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$; $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$; $3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25$ *e* $2001 + 2002 + 2003 + 2004 + 2005 = 2015$.

Neste caso, após algumas tentativas pode ainda ter ficado com a dúvida: - Mas será que a soma de 5 números consecutivos é sempre múltiplo de 5?

Os cálculos mostram que, mesmo tendo realizado várias tentativas, o aluno ainda duvida que *a soma de 5 números consecutivos é múltiplo de 5* e realiza um cálculo com números bem maiores para se convencer, por esse motivo categorizamos esse tipo de prova como *experimento crucial*.

(iii) *Sejam* $m, m + 1, m + 2, m + 3$ *e* $m + 4$ *cinco números consecutivos, com m inteiro. Efetuando a soma entre eles teremos:* $m + m + 1 + m + 2 + m + 3 + m + 4 = 5m + 10 = 5(m + 2)$, *fazendo* $m + 2 = k$, *com* k *inteiro.*

Temos que $5(m + 2) = 5k$, que é múltiplo de 5, logo a soma de 5 números consecutivos é sempre múltiplo de cinco.

A prova acima é categorizada como prova algébrica completa.

2.4 Desafios

ALUNO:____

SESSÃO 1

DESAFIOS: Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa matemática para cada resposta.

1) A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre um número ímpar.

2) A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é par.

3) A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é ímpar**.**

- **Forma de condução dos desafios:** Entregamos a folha com os desafios aos alunos que, individualmente, verificar a veracidade ou a falsidade de cada uma delas através de provas matemáticas. Após o trabalho dos alunos, realizamos a institucionalização.

- **Possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:**

a) A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre um número ímpar.

Apresentamos a seguir as seguintes respostas que possivelmente seriam construídas pelos alunos:

(i) A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é um número ímpar, pois $1+3+5=\ 9;\ \ 1+3+5+7+9=25$ e $1+3+5+7+9+11+13=49.$
Categorizamos essa prova como empirismo ingênuo.

(ii) *A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é um número ímpar, pois* $1+3+5=\ 9;\ 1+3+5+7+9=25\ 1+3+5+7+9+11+13=49$ e $1+3+5+7+9+11+13+15+19=211.$

Após manipular os números, o aluno ainda pode duvidar da conjectura sobre o fato de a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares ser um número ímpar, por isso ele testou para uma quantidade maior de números ímpares. Identificamos nesse caso uma prova do tipo experimento crucial.

(iii) Sejam $2a_1+\ 1,\dots,2a_p+\ 1,\dots,2a_n+\ 1$, (com n = 2k +1, k ∈ Z), n números ímpares existentes no Conjunto dos Números Inteiros. Somando $2a_1+\ 1,\dots,2a_p+\ 1,\dots,2a_n+\ 1$ teremos: $2a_1+\ 1+\cdots+\ 2a_p+\ 1+\cdots+2a_n+1=\left[2\left(\ a_1+\cdots+a_p+\cdots a_n\right)\right]+[n.1]=2t+n\ \ e\ t\ inteiro, como\ n$ é $ímpar, n=2k\ +1, logo\ \ 2t+n=2t+2k+1=2(t+k)+\ 1=\ 2m+1, com\ m\ inteiro,$ logo a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre um número ímpar.

Essa prova é categorizada prova algébrica completa, pois há o uso de letras, inclusive com a generalidade adequada, onde t varia no conjunto Z.

b) A soma de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de n, se n é par.

É provável que encontremos as seguintes respostas dadas pelos alunos:

(i) $Se\ n\ =2, temos\ 2\ +\ 3\ =\ 5;\ e\ 5\ não$ é $múltiplo\ de\ 2;$

se $n = 4, temos$ 2 + 3 + 4 + 5 = 14; e 14 *não é múltiplo de 4; logo a soma de n números inteiros consecutivos não é um múltiplo de n, se n é par.*

Não podemos categorizar a prova anterior segundo o nosso referencial teórico, como observamos anteriormente.

(ii*) Sejam n números inteiros consecutivos. Ao somarmos esses números teremos:* $n + n + 1 + \ n + 2 + \ n + 3 + \cdots + \ n + (n-1) = nn + (\ 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1) =$ $n^2 + \frac{(\ 1 + n - 1)}{2}\ (n-1)$ = $2n^2 + \frac{(n)}{2}(n-1)$, *que não é múltiplo de n, pois só será múltiplo de n se n-1 for par, ou seja, quando n for ímpar. Como* n *é par,* $n-1$ *é ímpar, logo a soma de n números inteiros consecutivos não é um múltiplo de* n*, se* n *for par.*

Esse tipo de prova pode ser considerado como *prova algébrica completa*.

c) A soma de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de n, se n é ímpar.

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) *A soma de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de n, se n é ímpar, pois ao tomarmos três números consecutivos teremos* $1 + 2 + 3 = \ 6, 6$ *é múltiplo de* $3,$ *ao tomarmos cinco números consecutivos teremos* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \ 15, \ 15$ *é múltiplo de* 5 *e ao tomarmos sete números consecutivos teremos* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \ 28, 28$ *é múltiplo de* 7.

A prova apresentada acima é do tipo *empirismo ingênuo.*

(ii) *A soma de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de n, se n é ímpar, pois ao tomarmos três números consecutivos teremos* $1 + 2 + 3 = \ 6, 6$ *é múltiplo de*3*; ao tomarmos cinco números consecutivos teremos* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \ 15, 15$ *é múltiplo de* 5 *e ao tomarmos onze números consecutivos teremos* $1001 + 1002 + 1003 + 1004 + 1005 + 1006 + 1007 + 1008 + 1009 + 1010 + 1011 = 1066,$ *1066 é múltiplo de* 11.

Após realizar diversas tentativas numéricas, o aluno ainda pode duvidar da conjectura proposta se colocando a questão: - *mas será que a soma de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de n, se n é ímpar?*

Por isso, esse tipo de prova é categorizado como *experimento crucial*.

(iii) – *Sejam n números inteiros consecutivos. Ao somarmos esses números teremos:* $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + \cdots + n + (n - 1) = nn + (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1) = n^2 + \frac{(1 + n - 1)}{2}(n - 1) = 2n^2 + \frac{(n)}{2}(n - 1)$, *que é múltiplo de* n, *pois* n *é ímpar, então* $n - 1$ *é par. Logo a soma de n números inteiros consecutivos é um múltiplo de* n, *se* n *for ímpar.*

Classificamos esse tipo de prova pode ser considerada como *prova algébrica completa*.

2.5 Descrição e análise *a posteriori*

Inicialmente, aplicamos a atividade 1 explicando apenas que se tratava de problemas compostos por conjecturas matemáticas as quais deveriam ser validadas. Propusemos aos alunos que tentassem verificar a veracidade das mesmas, com a descrição do raciocínio no papel. Após a resolução individual, recolhemos a produção e fizemos uma institucionalização dos principais conceitos e propriedades envolvidos na atividade. Nessa institucionalização, definimos números pares, números ímpares, como sendo aqueles que podem ser expressos na forma $2k$ e $2k + 1$ respectivamente e apresentamos a idéia do que é uma demonstração matemática. Pudemos identificar neste momento que o *empirismo ingênuo* foi o tipo de prova que mais apareceu nas primeiras validações, um dos motivos foi o fato dos alunos serem pouco estimulados, pelos professores e pela escola, a produzirem justificativas matemáticas formais, ao lado da presença da *variável didática 1*.

Apenas dois alunos utilizaram letras, na tentativa de produzirem provas usando notações simbólicas. Além disso, a letra utilizada no discurso matemático do aluno TR não pode ser caracterizada, como aquela possui o nível de generalidade adequado, mas como uma vontade de representar por meio da escrita simbólica da matemática. Como ilustração, apresentamos, na Figura 2, a solução produzida[17] por TR para o item 2 da **atividade 1**.

BR foi o único aluno que produziu uma *prova algébrica completa*, usando a letra com alto nível de generalidade. Como ilustração, apresentamos, na Figura 3, a solução produzida por BR para o mesmo item 2 da **atividade 1**.

O aluno BR teve o cuidado de usar índices diferentes, mostrando que percebeu que os números pares podem ser distintos. Nas demais atividades da SESSÃO, ele manteve o mesmo

[17] O aluno TR explicou oralmente que $n = x + y + z$, com x, y, z $\in Z$, ou seja, verificou que n é a soma de três números inteiros quaisquer e verificou que a palavra *quociente* havia sido utilizada erroneamente.

padrão de respostas, mostrando que possui maior nível de conhecimento matemático sobre esse tipo de conteúdo.

2. A soma de três números pares é sempre par. Verdadeiro

Todo número par é múltiplo de 2, logo, a soma de três números é $2 \cdot n$, onde n é a soma dos quocientes de X, Y e Z por 2.

Figura 2 – Produção de TR na Sessão 1.

Verdadeiro

2. A soma de três números pares é sempre par.

Se um número n inteiro é par, ele pode ser escrito na forma $n=2a$, onde $a=\frac{n}{2}$ e $a \in \mathbb{Z}$.

$$n_1+n_2+n_3=2a_1+2a_2+2a_3=2\cdot(a_1+a_2+a_3)$$

Par

Figura 3 – Produção de BR na Sessão 1.

Para esta **atividade 1** a maioria dos alunos apresentou respostas do tipo sim ou não seguidas de exemplos, apresentando tipos de provas categorizadas como *empirismo ingênuo*, conforme excerto de produção apresentado na Figura 4.

2. A soma de três números pares é sempre par.

Essa conjectura é verdadeira pois 3 números pares somados sempre será par pois o resultado será múltiplo de 2.

$2+2+2=6$

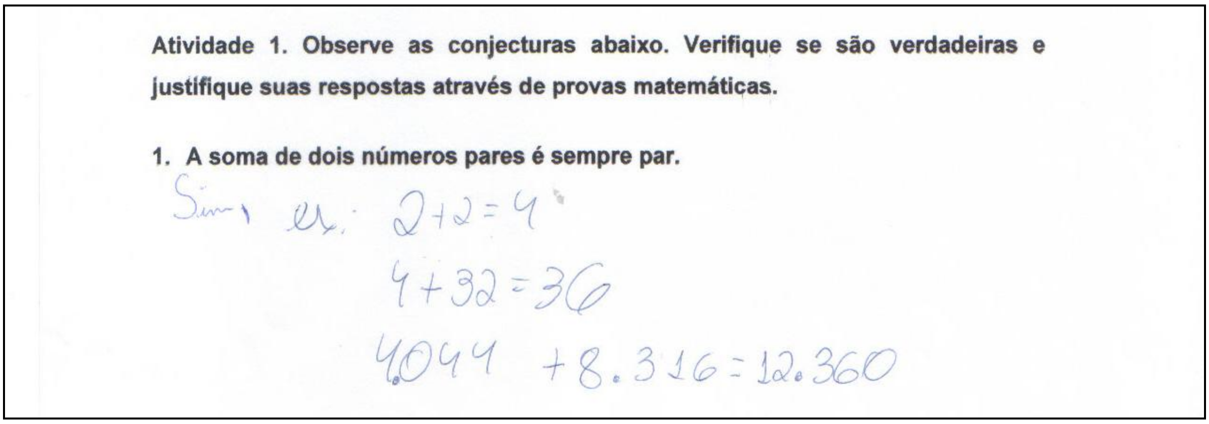
$2.3=6$

Figura 4 – Produção de KK na Sessão 1 – atividade 1**.**

Neste caso, o aluno apresentou apenas um exemplo, e enunciou outros exemplos oralmente. Há outros casos em que, apesar de apresentarem apenas três exemplos, é possível interpretar que o aluno não permaneceu no tipo *empirismo ingênuo*, mas que chegou ao tipo *experimento crucial*.

É o caso do aluno LN, no item 1 da **atividade 1** que apresentamos na Figura 5.

Neste exemplo, podemos observar que ele fez dois cálculos com a soma de dois números relativamente pequenos e, em seguida, fez o cálculo com dois números muito maiores. Isso pode ser interpretado como sua dúvida - se a propriedade seria sempre válida - resolveu então fazer mais um teste para a soma dos números 4.044 + 8.316. Essa adição pode ser caracterizada como uma *"experimento crucial",* segundo Ballacheff (1988).


Atividade 1. Observe as conjecturas abaixo. Verifique se são verdadeiras e justifique suas respostas através de provas matemáticas.

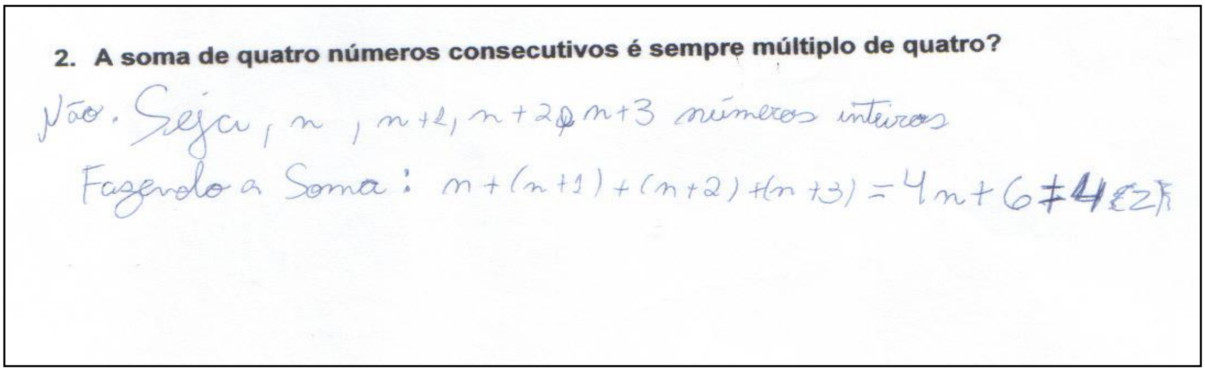
1. A soma de dois números pares é sempre par.

Sim, ex: 2+2=4
4+32=36
4.044 +8.316=12.360

Figura 5 – Produção de LN na Sessão 1 – atividade 1.

Como dissemos anteriormente, ao final da atividade 1 desta SESSÃO 1, foram recolhidas as folhas com as produções de cada aluno e, em seguida, realizadas discussões sobre as soluções por eles apresentadas. Ao final, houve um pequeno momento de institucionalização, incluindo a análise das soluções produzidas por BR, as quais observamos que foram as mais valorizadas por todos. Esse momento foi de grande importância, pois, para Brousseau (1986), a situação de institucionalização visa a estabelecer a objetividade e a universalidade do conhecimento, cabendo ao professor organizar uma síntese do trabalho matemático, procurando elevá-lo a um estatuto do saber que não dependa dos aspectos subjetivos e particulares, a fim de que o aluno se aproprie dessa valoração a ser incorporada como patrimônio cultural.

Em seguida, distribuímos outra folha a cada aluno, a qual continha a **atividade 2**. Observamos que, para esta **atividade 2**, a quantidade de alunos a qual buscou soluções algébricas aumentou significativamente. Desde o início, quase todos procuraram encontrar a solução por meio do uso de registros algébricos. Como as atividades apresentavam baixo nível de dificuldade e, como já tinham participado da institucionalização das soluções dos problemas da atividade 1, todos os alunos acertaram os itens desta atividade. Outro fato ocorrido foi que, mesmo para o item 2, que trazia a seguinte pergunta: “A soma de quatro números consecutivos é sempre múltiplo de 4?”, a metade dos alunos respondeu usando cálculos algébricos, em vez de apresentar um simples contraexemplo. Ao institucionalizarmos o contraexemplo, os alunos mostraram interesse, porém observamos que eles passaram a valorizar muito mais as soluções que utilizavam símbolos algébricos. Como ilustração, apresentamos na Figura 6 a resposta do aluno LN.


2. A soma de quatro números consecutivos é sempre múltiplo de quatro?

Não. Seja, n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$ números inteiros

Fazendo a Soma: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3) = 4n+6 \neq 4k \in \mathbb{Z}$

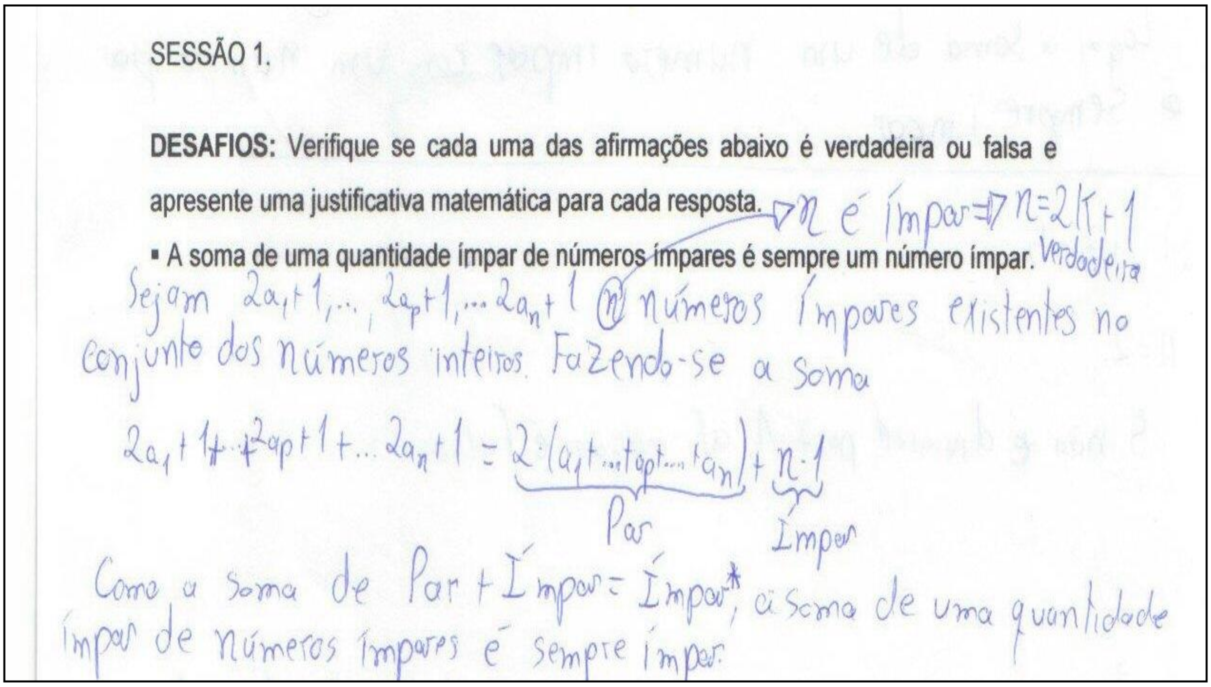
Figura 6 – Produção de LN na Sessão 1 – atividade 2**.**

As respostas dos outros quatro alunos que produziram soluções algébricas também foram parecidas à do aluno LN.

Com relação à última parte da SESSÃO, a qual contém alguns desafios num nível mais elevado de generalidade, observamos que eles se envolveram na busca de soluções, mas a maioria teve dificuldade em atingir o nível de generalidade dos problemas propostos. Dessa forma, a institucionalização dos desafios foi realizada com a participação dos alunos, permitindo que falassem a respeito da veracidade de cada conjectura e de como haviam chegado à *“prova”* no papel.

A partir dessa discussão, observamos que muitos tiveram dificuldade em atingir o nível de generalidade dos problemas propostos. Esperávamos que, pelo menos uma parte dos alunos apresentasse soluções de nível elevado por meio do uso de simbologia algébrica adequada, pelo fato deles já terem participado da institucionalização das soluções dos problemas da **atividade 1** e da **atividade 2**.

Muitos buscaram soluções algébricas para o item 1 dos **desafios,** porém não conseguiram realizar a demonstração. Apenas o aluno BR produziu uma prova algébrica, usando a letra com alto nível de generalidade. Como ilustração, apresentamos na Figura 7 a solução produzida[18] por BR para o item 1 dos **desafios**.


SESSÃO 1.

DESAFIOS: Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa matemática para cada resposta. $\Rightarrow n$ é ímpar $\Rightarrow n = 2k+1$

▪ A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre um número ímpar. Verdadeira

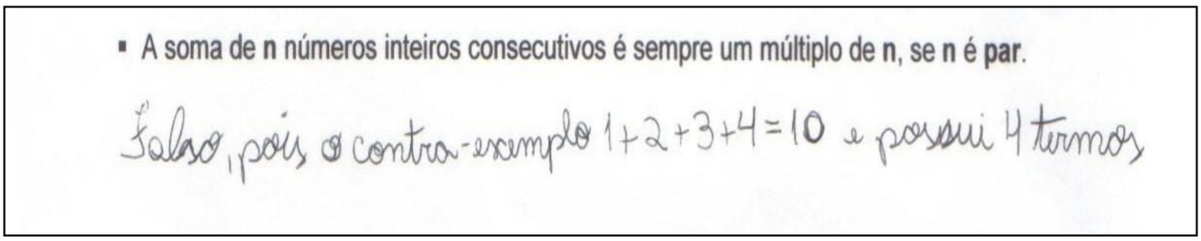
Sejam $2a_1+1, \ldots, 2a_p+1, \ldots 2a_n+1$ (n) números ímpares existentes no conjunto dos números inteiros. Fazendo-se a soma

$$2a_1+1+\ldots+2a_p+1+\ldots 2a_n+1 = \underbrace{2\cdot(a_1+\ldots+a_p+\ldots+a_n)}_{\text{Par}} + \underbrace{n\cdot 1}_{\text{Ímpar}}$$

Como a soma de Par + Ímpar = Ímpar*, a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre ímpar.

Figura 7 – Produção de BR na Sessão 1 – Desafios (item 1).

Para **desafio 2**, que trazia a seguinte pergunta: *“A soma de n números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de n, se n é par”*. Esperávamos que os alunos respondessem usando um simples contraexemplo, pois já havíamos institucionalizado o item 2 da **atividade 2** que se tratava de uma conjectura falsa. A previsão confirmou-se. Apresentamos, na Figura 8, a solução produzida[19] por RT para o mesmo item 2 da **atividade 2.**


▪ A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é **par**.

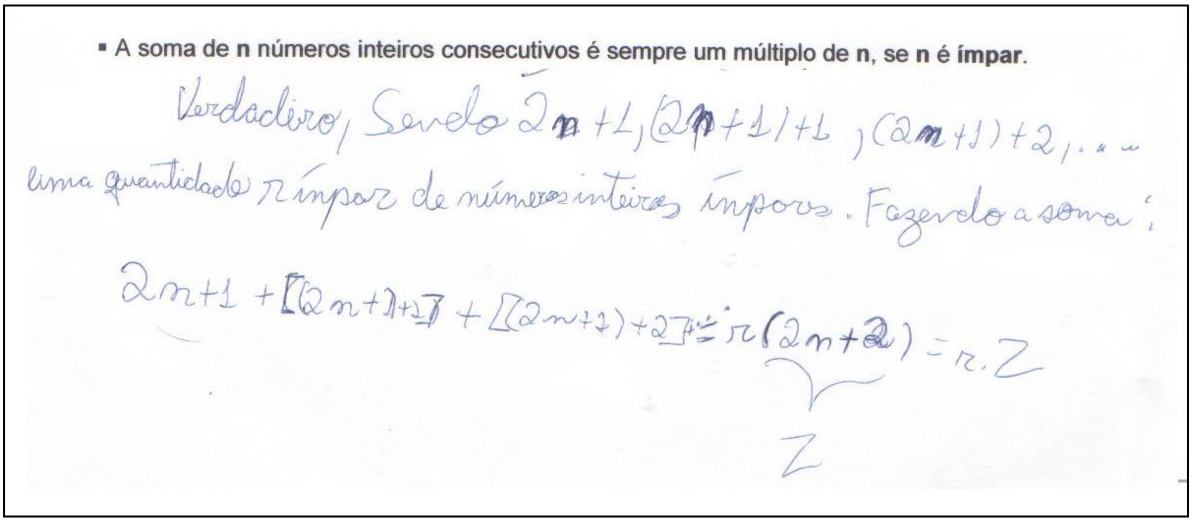
Falso, pois o contra-exemplo $1+2+3+4=10$ e possui 4 termos

Figura 8 – Produção de RT na Sessão 1 – Desafios (item 2).

[18]Produção prevista na análise *a priori*.
[19]Apesar do contraexemplo não ter sido bem detalhado, percebemos que o aluno compreendeu a falsidade da conjectura ao discutir a validade da afirmação em voz alta testando outros exemplos numéricos.

Com relação ao item 3 dos desafios "*A soma de* n *números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de* n*, se* n *é ímpar*", observamos que eles se envolveram na busca de soluções. A seguir, exemplificamos as produções dos alunos para o item 3 dos desafios:

a) Produção de LN: O aluno inicia a "prova" corretamente, porém iguala a soma $[2n+1]+[(2n+1)+1\,]+[(2n+1)+2]$ a $r(2n+2)$, erra a validação (Figura 9).



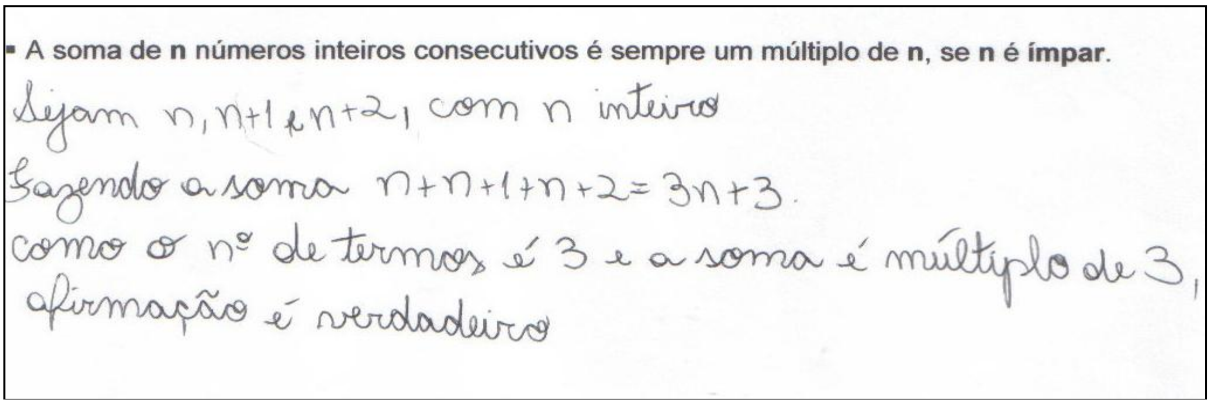
▪ A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é **ímpar**.

Verdadeiro, Sendo $2n+1, (2n+1)+1, (2n+1)+2, \ldots$ uma quantidade n ímpar de números inteiros ímpares. Fazendo a soma:

$$2n+1+[(2n+1)+1]+[(2n+1)+2] = n\underbrace{(2n+2)}_{Z} = n.Z$$

Figura 9 – Produção de LN na Sessão 1 – Desafios (item 3).

b) Produção de RT: O aluno produz um tipo de prova denominado *empirismo ingênuo*, apesar de já ter produzido prova algébrica anteriormente (Figura 10).



▪ A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é **ímpar**.

Sejam $n, n+1$ e $n+2$, com n inteiro

Fazendo a soma $n+n+1+n+2=3n+3$.

como o nº de termos é 3 e a soma é múltiplo de 3, afirmação é verdadeiro

Figura 10 – Produção de RT na Sessão 1 – Desafios (item 3).

Ao institucionalizarmos este último problema, pudemos observar que nenhum aluno atingiu a generalização devido ao alto nível de dificuldade que o problema exigia, pois além do uso de letras, com a generalidade adequada, n varia no conjunto Z.

3 SESSÃO 2

3.1 Análise *a priori*

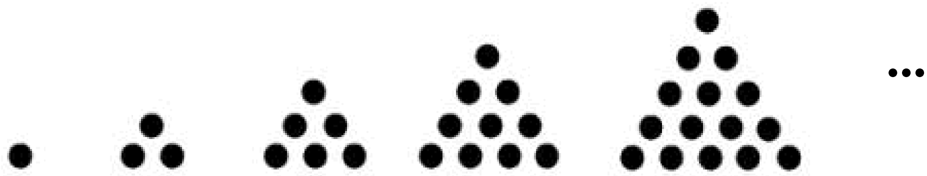
A atividade desta SESSÃO é composta por problemas com conjecturas envolvendo os Números Figurados. As conjecturas foram elaboradas de forma que os alunos utilizem conhecimentos adquiridos nas atividades 1, 2 e 3 da 1ª SESSÃO. Pelo tipo de dificuldade que esta atividade apresenta, não esperamos que os alunos produzam provas por enunciados e nem tampouco provas algébricas incompletas apesar de se tratar da SESSÃO 2. Nesta SESSÃO há a presença da *variável didática 3*[20], deste modo, os alunos devem envolver-se na busca de soluções, podendo gerar fases adidáticas.

3.2 Atividade 1

ALUNO: ____

SESSÃO 2

Atividade 1. (PUC – SP – ADAPTADA) Os números $3, 6, 10, 15, \ldots$ chamam-se números triangulares, pois podem ser representados pelas figuras:



A soma de dois termos consecutivos da sequência formada pelos números triangulares resulta sempre em um quadrado perfeito?

• **Forma de condução da atividade 1:** A atividade desta SESSÃO será conduzida da mesma forma que conduzimos as atividades da SESSÃO 1. Nesse desenvolvimento experimental, dentre outros elementos, analisamos as possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:

a) A soma de dois termos consecutivos da sequência formada pelos números triangulares representa sempre um quadrado perfeito?

[20] Verificar a definição de *variável didática 3* na página 48 deste capítulo.

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Sim, a soma de dois termos consecutivos da sequência formada pelos números triangulares representa um quadrado perfeito, pois $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = 4^2$, $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2$ e $T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$.

A prova acima é categorizada como *empirismo ingênuo*.

(ii) Sabemos que a soma de dois termos consecutivos da sequência formada pelos números triangulares representa sempre um quadrado perfeito, pois, $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = 4^2$, $T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$ e $T_{20} + T_{21} = 253 + 231 = 22^2$. Após calcular com números maiores, consideramos que ele duvidou sobre a propriedade a soma de dois termos consecutivos da sequência formada pelos números triangulares representa sempre um quadrado perfeito. Nesse caso, a categorizamos como uma prova do tipo experimento crucial.

(iii) Tomemos os seguintes números triangulares:

- *Para* $k = 1$, *podemos representar* T_1 *pelo número 1;*
- *Para* $k = 2$, *podemos representar* T_2 *pelo número 3;*
- *Para* $k = 3$, *podemos representar* T_3 *pelo número 6;*
- *Para* $k = 4$, *podemos representar* T_4 *pelo número 10;*
- ...
- *Para k termos, temos podemos representar* $T_k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (k + 1)$. *Então teremos* $T_k = 1 + 2 + \ldots + k + (k + 1)$ *e* $T_k = (k + 1) + k + \ldots + 2 + 1$. *Somando as duas igualdades teremos:*

$$2T_k = \underbrace{(\mathrm{k} + 1 + 1) + (\mathrm{k} + 2) + \ldots + (\mathrm{k} + 2)(\mathrm{k} + 1 + 1)}_{(k + 1)\ \textit{vezes}},$$

Assim sendo, $2T_k = (k + 1)\,(k + 2)$, logo $T_k = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2}$, então $T_{k-1} = \frac{k\,(k+1)}{2}\cdot$, somando os consecutivos teremos: $T_k + T_{k-1} = \frac{(k+1)\,(k+2)}{2} + \frac{k\,(k+1)}{2} = \frac{(k+1)\,(k+2+k+1)}{2} =$ (k+1) (k+1) = $(k + 1)^{2}\cdot$, portanto a soma de dois termos consecutivos da sequência formada pelos números triangulares representa sempre um quadrado perfeito.

A prova desenvolvida pelo aluno é categorizada como prova algébrica completa.

3.3 Descrição e análise *a posteriori*

Propusemos aos alunos a atividade 1 da SESSÃO 2. Inicialmente, observamos que o envolvimento dos alunos com o problema seria intenso por ter como proposta o trabalho com números figurados e tratar de uma questão adaptada de vestibular. À medida que o tempo passava o envolvimento também aumentava e percebemos que a maioria dos alunos não possuía familiaridade com os números figurados.

O aluno MJ indagou se a solução do problema consistia apenas na elaboração de uma "fórmula". Pedimos-lhe que lesse e interpretasse o problema novamente, quando então concluiu a veracidade da conjectura, somente com a verificação para alguns números, permanecendo, portanto no *empirismo ingênuo*. Os outros alunos também começaram a testar com os números, então pedimos a eles que passassem a relatar, no papel, a forma como estavam raciocinando.

De acordo com nossa análise *a priori*, não acreditávamos que os alunos, produziriam a prova algébrica. Esse fato ocorreu, pois para esta atividade 1 da SESSÃO 2, de modo geral, os alunos não apresentaram respostas. Apenas o aluno RT verificou a validade da conjectura através do *empirismo ingênuo*, conforme exemplificamos na Figura 11.

Analisamos a solução dessa atividade com a participação dos alunos, permitindo que falassem a respeito da conjectura proposta. A partir dessa discussão, observamos que muitos deles tiveram dificuldade em provar, mesmo que empiricamente, a veracidade da afirmação. O grupo, em geral, não conhecia os números triangulares e mostrou grande interesse durante a discussão.

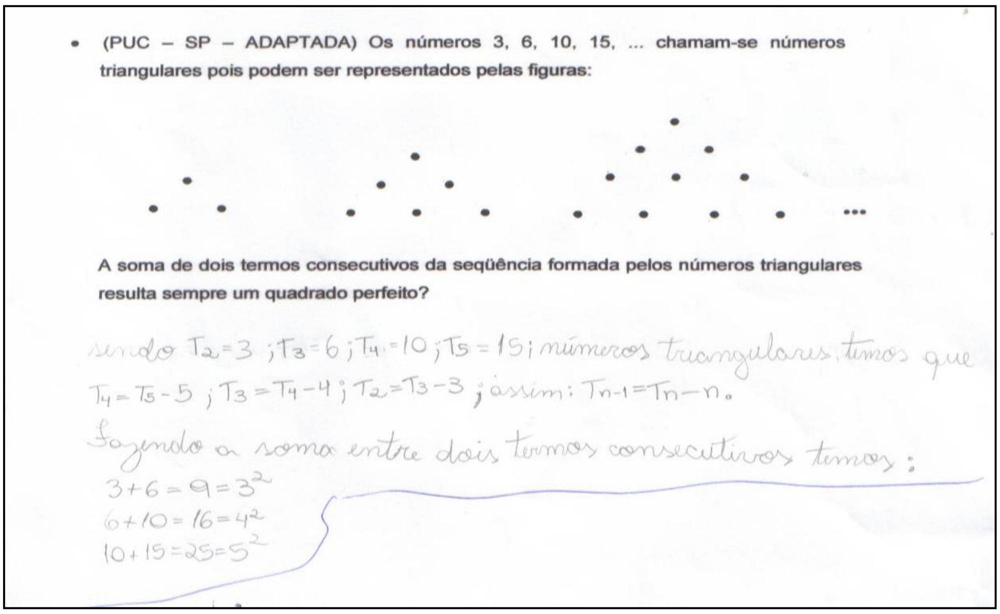


Figura 11 – Produção de RT na Sessão 2 – atividade 1.

Após a **atividade 1** da SESSÃO 2, conforme previmos, verificamos que, para esse problema envolvendo os números figurados, motivou os alunos a buscarem soluções empíricas ou até mesmo algébricas. Como o aluno BR acabou produzindo uma prova algébrica, usando a letra com alto nível de generalidade, concluímos que os demais também poderiam atingir nível de produção semelhante. Como ilustração, apresentamos, na Figura 12, a solução produzida por BR para esta **atividade 1** da SESSÃO 2.

Ao explicar, oralmente, pudemos verificar que o aluno BR utilizou, no protocolo (Figura 12), a seguinte fórmula recursiva:

$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 3 \rightarrow T_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$T_3 = 6 \rightarrow T_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$T_4 = 10 \rightarrow T_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$\ldots$$

$\boldsymbol{T_{n+1} = T_n + (n+1)}$**,** e finalizou a demonstração como previmos no item (iii) [21] da análise *a priori* desta SESSÃO.

Na produção de BR podemos observar que ele obteve tanto a expressão do termo geral $\boldsymbol{T_n}$ ·, como a da soma de $\boldsymbol{T_n}$ com $\boldsymbol{T_{n+1}}$ após a realização de cálculos numéricos com casos particulares, os quais se evidenciaram fundamentais para a generalização e produção da *prova algébrica*.

[21]Na página 66 verifique a previsão do item (iii) da análise *a priori* da **Atividade 1 –** SESSÃO 2,

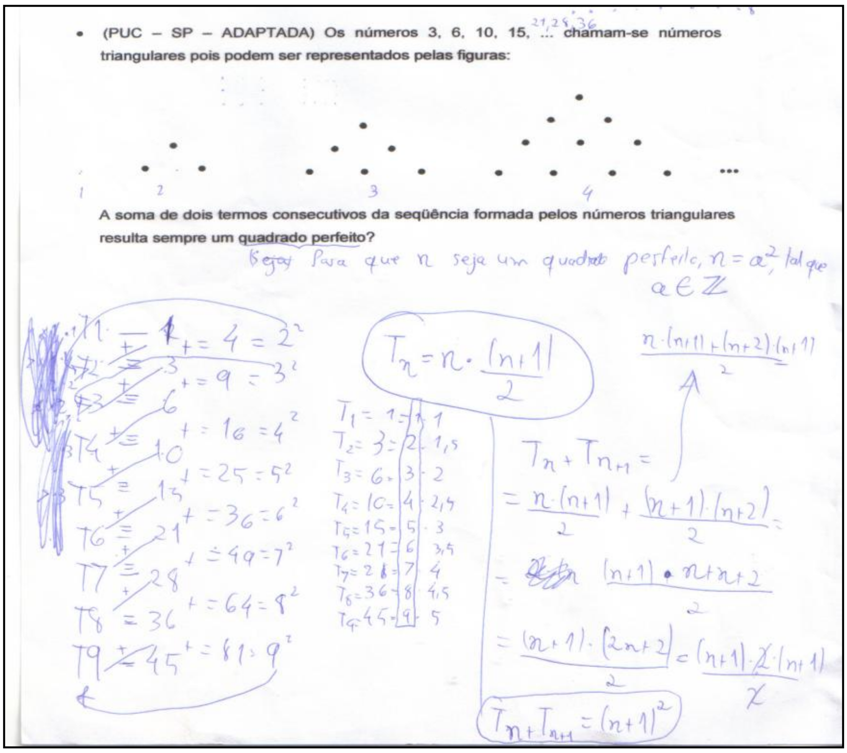


Figura 12 – Produção de BR na Sessão 2 – atividade 1.

4 SESSÃO 3

4.1 Análise *a priori*

No Guia do PCN+[22] (BRASIL, 2002, p.121) encontramos a seguinte referência à orientação ao trabalho pedagógico com as sequências numéricas:

> Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. [...] Essas idéias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades.

Assim sendo, estruturamos esta SESSÃO com duas atividades. Sendo que a atividade 1 é composta por um problema com conjectura envolvendo o conteúdo de Paridade[23] e Soma dos Termos da PA, enquanto que a segunda, por considerarmos um pouco mais difícil, como um desafio.

Para a **atividade 1**, que traz a seguinte pergunta: - *A soma dos **k** primeiros números naturais ímpares* ***(1, 3, 5,..., 2k - 1)*** *é sempre igual a* $\boldsymbol{k^2}$*?* Esperamos que pelo menos a metade dos alunos apresentem soluções algébricas, pois esse conteúdo já foi explorado na **SESSÃO**

[22]PCN$^+$ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.
[23]Na Sessão 1 descrevemos a importância do trabalho com o conteúdo de Paridade.

1. Provavelmente, outro motivo para o aparecimento de provas do tipo algébricas é a presença da *variável didática 1*[24], no que diz respeito a presença de incógnitas conjecturas.

Com relação à Atividade 2, que propõe o seguinte desafio “Galileu, matemático do renascimento, observou que: $\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$ =... Continuando essa sequência, as frações seguintes continuarão iguais a $\frac{1}{3}$·?”, contatamos o aparecimento variável didática 3[25], acreditamos assim, que os alunos se envolvam na busca de soluções.

Para resolver este problema, o aluno deverá usar a propriedade de que a soma dos k primeiros números ímpares é k^2, utilizada na **atividade 1.** A estratégia é somar e subtrair a soma que aparece no denominador às parcelas que estão no denominador. Desse modo o denominador transformar-se-á, podendo ser escrito como a diferença entre a soma dos 2k primeiros ímpares e os k primeiros ímpares.

Por se tratar de um problema de elevado nível de dificuldade que, além de exigir a percepção da conveniência de somar e subtrair ao denominador, a soma que aparece no numerador exige que se analise a soma dos termos de uma sequência infinita. Por isso, acreditamos que provavelmente a maioria dos alunos permanecerá no *empirismo ingênuo* ou *experimento crucial*, mas espera-se que algum aluno perceba a regularidade e produza uma solução algébrica.

4.2 Atividade 1

ALUNO:____

SESSÃO 3

Atividade 1. A soma dos k primeiros números naturais ímpares (1, 3, 5,..., 2k - 1) é sempre igual a k^2?

- **Forma de condução da atividade 1:** Conduziremos a atividades desta SESSÃO da mesma forma que conduzimos a atividades da SESSÃO 1.
- **Possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:**

a) A soma dos k primeiros números naturais ímpares (1, 3, 5,..., 2k - 1) é sempre igual a k^2?

[24]Verificar a definição de *variável didática 1* na página 48 deste capítulo.
[25]Verificar a definição de *variável didática 3* na página 48 deste capítulo.

Esperamos encontrar os seguintes tipos de soluções construídas pelos alunos:

(i) Sim, a soma dos k primeiros números naturais ímpares $(1, 3, 5, \dots, 2k - 1)$ é igual a k^2, pois, para $k = 2$, temos $1 + 3 = 4 = 2^2$, para $k = 3$, temos $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, para $k = 4$, temos $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Esse tipo de prova pode ser categorizado como *empirismo ingênuo*.

(ii) *Sabemos que para* $k = 2$, temos $1 + 3 = 4 = 2^2$; para $k = 3$, temos $1 + 3 + 5 = 3^2$ e para $k = 4$, temos $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2 e$ para $k = 10$, temos $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100 = 10^2$.

Mesmo efetuando os cálculos com alguns números, o aluno ainda duvida que a soma dos k primeiros números naturais ímpares $(1, 3, 5, \dots, 2\text{k} - 1)$ é sempre igual a k^2 e calcula o valor da soma para mais um caso especial, k = 10. A verificação de mais esse caso foi crucial para a aceitação da validade pelo aluno.

A prova desenvolvida pelo aluno pode ser categorizada como experimento crucial, conforme tipo já descrito anteriormente.

(iii) Tomemos a seguinte soma $S_k = 1 + 3 + \dots + (2k - 3) + (2k - 1)$, a soma dos k primeiros números ímpares em ordem crescente e $S_k = (2k - 1) + (2k - 3) + \dots + 3 + 1$, a soma dos números ímpares em ordem decrescente. Somando as duas igualdades, teremos:

$$2\,Sk = \underbrace{2k + 2k + \dots + 2k + 2k}_{\text{k vezes}}.$$

$S_k = \frac{2k.k}{2}$ então $\boldsymbol{S_k = k^2}$, portanto a soma dos k primeiros números naturais ímpares é sempre igual a k^2.

O aluno desenvolveu acima uma prova que pode ser considerada como prova algébrica completa.

(iv) *A sequência formada pelos k primeiros números naturais ímpares* (1, 3, 5,..., 2k - 1) formam uma PA de razão 2 e primeiro termo $a_1 = 1$, cujo termo geral desta PA é dado por: $a_n = a_1 + (n - 1)r$ e então $a_k = 1 + (k - 1)2$, logo $a_k = 2k - 1$.

Como a soma do termo geral de uma PA é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos que:

$S_k = \frac{(1 + 2k - 1)k}{2} \rightarrow S_k = \frac{(2k)k}{2} \rightarrow S_k = \frac{2k^2}{2} \rightarrow S_k = k^2$, logo a soma dos k primeiros números naturais ímpares (1, 3, 5,..., 2k - 1) é sempre igual a k^2.

Esta prova é do mesmo tipo da prova (iii), embora tenham sido utilizados conteúdos e propriedades diferentes para a produção desta solução. Em ambas, foram utilizadas propriedades matemáticas verdadeiras e o emprego da linguagem algébrica.

4.3 Atividade 2

ALUNO: ____

SESSÃO 3

Atividade 2 - DESAFIO: Galileu, matemático do Renascimento, observou que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} == \ldots$$

Continuando essa sequência, as frações seguintes continuarão iguais a $\frac{1}{3}$·?

- **Forma de condução da atividade 2**: Conduziremos as atividades desta SESSÃO da mesma forma que conduzimos as atividades da SESSÃO 1.
- **Possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:**

  É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Sim, as frações seguintes continuarão iguais a $\frac{1}{3}$, pois $\frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$·, $\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ e $\frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$

Podemos observar que a prova desenvolvida acima é do tipo *empirismo ingênuo*.

(ii) *Sabemos que*, $\frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$·, $\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$·, e $\frac{1+3+5+7+9+11+13}{15+17+19+21+23+25+27} = \frac{49}{147} = \frac{1}{3}$·.

Como o aluno realiza cálculo com números maiores, no caso a análise da fração $\frac{1+3+5+7+9+11+13}{15+17+19+21+23+25+27}$, para obter certeza da veracidade da conjectura, concluímos que essa prova, acima desenvolvida, pode ser classificada como experimento crucial.

(iii) Podemos escrever essa sequência de frações da seguinte forma:

$$\frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{1+3+5+7+9}{11+13+15+17+19} = \ldots = \frac{I}{II}$$

Em (I) temos que $S_n = 1+3+5+7+9+\ldots$ essa soma é formada pelos primeiros números ímpares, que formam a seguinte PA (1, 3, 5, 7, 9,...), sendo $a_1 = 1$ e $r = 2$. Como vimos anteriormente, a soma dos n primeiros termos de uma PA é dada pela fórmula: $S_n = \frac{(a_1+a_{n)}n}{2} \rightarrow S_n = \frac{[1+1+(n-1)2]n}{2} \rightarrow S_n = \frac{[2+2n-2]n}{2} \rightarrow S_n = \frac{[2n]n}{2} \rightarrow S_n = \frac{2n^2}{2} \rightarrow S_n =$

n^2. Na expressão (ii), correspondente ao denominador das frações, somamos e subtraímos dela a expressão (i), soma dos n primeiros naturais. Assim, observamos que a expressão (ii) corresponde à soma S, calculada abaixo:

$$S = S_{2n} - S_n = \frac{[1+1+(2n-1)2]2n}{2} - \frac{[1+1+(n-1)2]n}{2} = \frac{[2+4n-2]2n}{2} - \frac{[2+2n-2]n}{2} =$$

$4n^2 - 4n^2 = 3n^2$, que é a diferença entre a soma dos 2n primeiros ímpares e os n primeiros ímpares, então $\frac{I}{II} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$, portanto as frações seguintes continuarão sempre iguais a $\frac{1}{3}$.

O tipo de prova apresentado pelo aluno em (iii) pode ser categorizado como *prova algébrica completa*.

4.4 Descrição e análise *a posteriori*

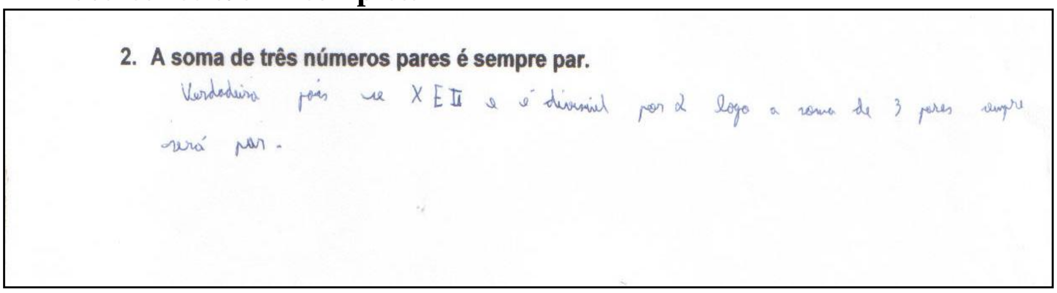
Para a **atividade 1**, que trazia a seguinte pergunta: - *A soma dos **k** primeiros números naturais ímpares* ***(1, 3, 5,..., 2k - 1)*** *é sempre igual a k^2?* A previsão confirmou-se: a maioria dos alunos utilizou as provas algébricas para provar a veracidade da conjectura. Um dos motivos deve-se à presença da *variável didática 1*.

Ao compararmos as provas produzidas nesta SESSÃO com as produções dos mesmos alunos nas atividades da SESSÃO 1**,** pudemos observar que suas produções evoluíram do *empirismo ingênuo* para *provas conceituais do tipo algébrico*, indicando sinais de aprendizagem conforme previsto na análise *a priori*.

Comparamos, a seguir, algumas produções de alunos que apresentaram evolução nos tipos de produção de provas das atividades da SESSÃO 1**,** para a produção de provas da **Atividade 1** da SESSÃO 3.

- MF produziu na SESSÃO 1 – **Atividade 2** uma *prova conceitual incompleta* e passou para uma *prova algébrica completa* nesta atividade, conforme podemos observar nas Figuras 13 e 14.

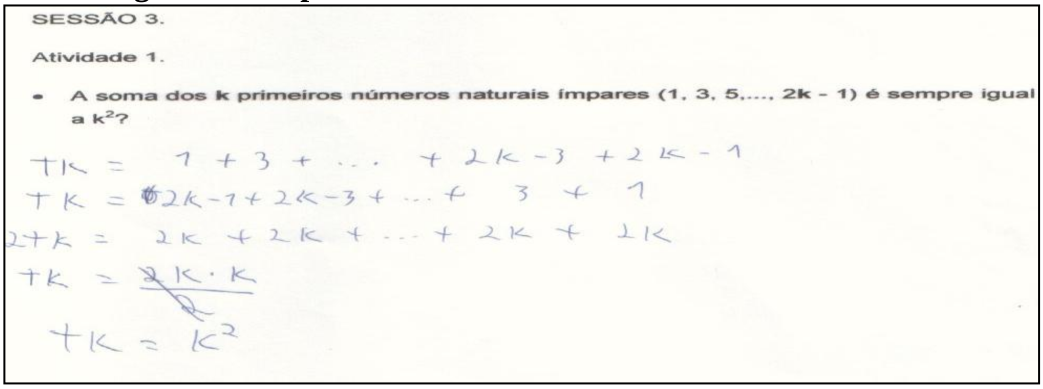
- Prova conceitual incompleta


2. A soma de três números pares é sempre par.

Verdadeira pois se X E Π e é divisível por 2 logo a soma de 3 pares sempre será par.

Figura 13 – Produção de MF na Sessão 1 – atividade 1.

- Prova algébrica completa


SESSÃO 3.

Atividade 1.

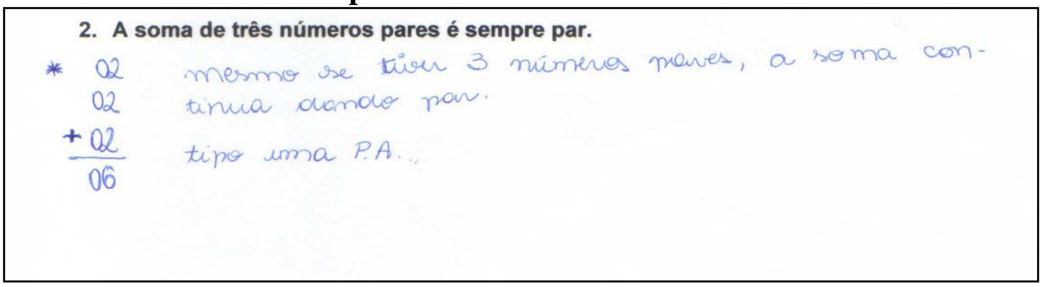
- A soma dos **k** primeiros números naturais ímpares (1, 3, 5,..., 2k - 1) é sempre igual a k^2?

$+k = 1 + 3 + \dots + 2k-3 + 2k-1$
$+k = 2k-1 + 2k-3 + \dots + 3 + 1$
$2+k = 2k + 2k + \dots + 2k + 2k$
$+k = \frac{\cancel{2}k \cdot k}{\cancel{2}}$
$+k = k^2$

Figura 14 – Produção de MF na Sessão 3 – atividade 1.

• KK produziu na SESSÃO 1 – **Atividade 1** uma *prova conceitual incompleta* e passou para uma *prova algébrica completa nesta* atividade, conforme podemos observar nas Figuras 15 e 16.

- Prova conceitual incompleta


2. A soma de três números pares é sempre par.

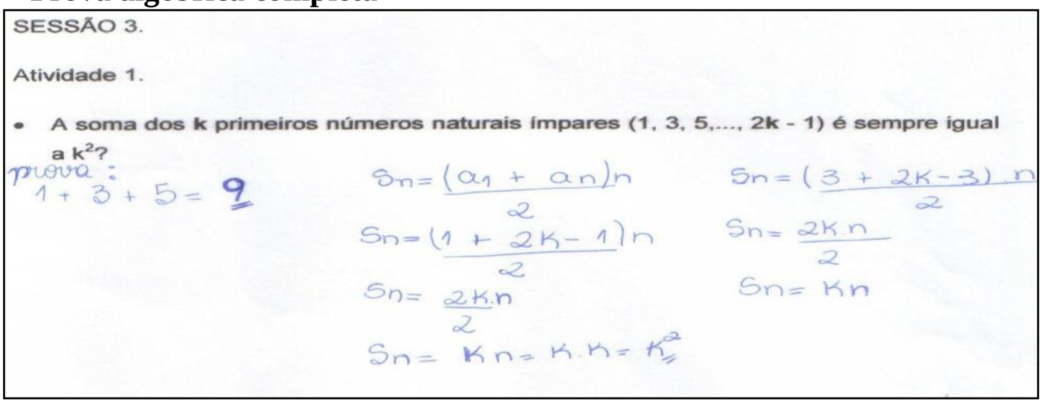
* 02 + 02 + 02 = 06

mesmo se tiver 3 números pares, a soma continua dando par.

tipo uma P.A...

Figura 15 – Produção de KK na Sessão 1 – atividade 1.

- Prova algébrica completa


SESSÃO 3.

Atividade 1.

- A soma dos **k** primeiros números naturais ímpares (1, 3, 5,..., 2k - 1) é sempre igual a k^2?

prova: $1 + 3 + 5 = 9$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$
$S_n = \frac{(1 + 2K - 1)n}{2}$
$S_n = \frac{2K.n}{2}$
$S_n = Kn = K.K = K^2$

$S_n = \frac{(3 + 2K - 3)n}{2}$
$S_n = \frac{2Kn}{2}$
$S_n = Kn$

Figura 16 – Produção de KK na Sessão 3 – atividade 1.

Com relação à **Atividade 2**, que propunha o seguinte desafio "Galileu, matemático do Renascimento, observou que: $\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}$==... Continuando essa sequência, as frações seguintes continuarão iguais a $\frac{1}{3}$.?" A previsão se confirmou parcialmente. Observamos que eles se envolveram na busca de soluções, mas nenhum aluno conseguiu atingir o nível de generalidade do problema proposto.

Então propusemos aos alunos uma reflexão desse desafio, analisando o nível de dificuldade que o problema exigia. Nessa análise apresentamos a solução por meio de diálogos e questionamentos, que culminaram na apresentação da solução em linguagem algébrica, caracterizando-se não propriamente como uma institucionalização no sentido de Brousseau (1986), mas algo próximo do discurso institucional. Os alunos compreenderam e gostaram da forma como a solução foi apresentada.

A presença de questões atípicas, ou as pouco usuais, acenderam um maior envolvimento dos alunos, provocando discussões e debates entre os mesmos, gerando fases adidáticas.

5 SESSÃO 4

5.1 Análise *a priori*

Esta SESSÃO é composta de duas atividades, a primeira constituída de três perguntas sobre relações entre números inteiros e a segunda apresenta duas questões, cujo nível de complexidade consideramos um pouco mais elevado e, por esse motivo, caracterizamo-las como desafios. As atividades são compostas por problemas com conjecturas envolvendo os conteúdos[26] estudados nas sessões anteriores, tais como paridade e divisão entre números inteiros. As atividades foram elaboradas de tal forma que os alunos não só pudessem utilizar seus conhecimentos anteriores na validação das conjecturas propostas, como também aqueles adquiridos até o momento.

Para a atividade 1, que traz a seguinte pergunta: - É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois? Esperamos que a maioria dos alunos apresentem soluções algébricas, pois esse conteúdo já foi explorado na SESSÃO 1 e na SESSÃO 3.

[26]Nas sessões anteriores descrevemos a importância do trabalho com o conteúdo de Paridade e Divisão entre Números Inteiros.

No problema 2 da Atividade 1 que apresenta a seguinte conjectura: *Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.* Esperamos que a maioria dos alunos valide a primeira parte da conjectura, pois já trabalhamos com o conteúdo de divisibilidade na SESSÃO 1 e eles mostraram razoável domínio sobre o tema. Quanto à segunda parte da conjectura, acreditamos que, pelo menos, os alunos BR e CB consigam validá-la, já que tiveram contato com questões da OBM[27] as quais envolvem o algoritmo da divisão dos números inteiros.

Quanto ao primeiro desafio da Atividade 2: a) Se a representa o produto do segundo número pelo terceiro e P representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir P em função de a? Esperamos que o grupo não encontre dificuldade para resolver o primeiro desafio, pois este tipo de problema foi trabalhado na 1ª série do Ensino Médio, bem como neste ano, na 3ª série do Ensino Médio, na revisão para o vestibular. Sendo assim, esperamos que os alunos reinvistam esse conhecimento, como ocorreu nas provas e simulados nos quais esse conteúdo foi abordado.

O outro item desta atividade, que contém o segundo desafio: b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro? Acreditamos que os alunos não terão dificuldades de validá-lo pelos mesmos motivos do item anterior.

5.2 Atividade 1

ALUNO: ____
SESSÃO 4
Atividade 1

01. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

02. Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.

03. Considere quatro números inteiros consecutivos. Nesse caso, o produto do segundo número pelo terceiro é sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades?

• **Forma de condução da atividade 1.** Conduzimos as atividades desta SESSÃO da mesma forma que conduzimos as atividades da SESSÃO 1. Nesse desenvolvimento

[27] OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática.

experimental, dentre outros elementos, analisamos as possíveis validações[28] a serem realizadas pelos alunos:

a) É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Sejam três números inteiros consecutivos 1, 2 e 3 temos que $2^2 \neq 1.3$, 2,3 e 4 temos que $3^2 \neq 2.4$ e 3,4 e 5 temos que $4^2 \neq 3.5$, logo não é possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois.

Podemos categorizar a prova acima como *empirismo ingênuo*, pois com apenas três exemplos, o aluno deu-se por satisfeito da impossibilidade da conjectura.

(ii) Sejam $m, m + 1$ e $m + 2$, três números consecutivos, com m inteiro. Elevando $(m+1)^{2} = m^2 + 2m + 1$, multiplicando $m\ por\ (m+2)\ temos\ m^2 + 2m.$ Observa-se então que o quadrado termo médio supera de uma unidade o produto dos outros dois. Logo, não é possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois.

Encontramos na prova desenvolvida pelo aluno, o uso adequado de letras para representar números desconhecidos, por isso ela é identificada como *prova algébrica completa*. Além do mais, a observação feita após os cálculos mostra que o aluno tem domínio e compreende bem a generalidade das expressões obtidas.

b) Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Sim, um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de 4 e de 8, pois $(3)^2 - 1 = 8 = 4.2.$ e $8 = 8.1$ e $(5)^2 - 1 = 24 = 4.6$ ou 24 = 8. 3.

[28]As provas produzidas pelos alunos serão categorizadas segundo o nosso referencial teórico.

A prova acima é um exemplo de *empirismo ingênuo*, conforme descrevemos anteriormente.

(ii) Sim, um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro, pois $(5)^2 - 1 = 24 = 4.6$ ou 24 = 8. 3, $(7)^2 - 1 = 48 = 4.12$ ou $48 = 8.6$, $(9)^2 - 1 = 80 = 4.20$ ou $80 = 8.10$ ... $(1083)^2 - 1 = \frac{4173848}{4} = 1043462$ ou $\frac{4173848}{8} = 521731$.

Após efetuar numericamente e observar a validade para alguns casos particulares, o aluno ainda duvida da propriedade do resultado final ser sempre *múltiplo de 4 ou múltiplo de 8*, caso contrário ele, provavelmente, não verificaria através daquele número grande, ou seja, a prova desenvolvida é caracterizada como *experimento crucial*, pois a aceitação vem somente após testar para um número particular especial, no caso 1083.

(iii) *Sim, um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro, pois* $(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 2n + 1 - 1 = 4n(n+1)$, *logo um dos fatores n ou n+1 sempre vai ser par, ou seja, vai conter o fator 2. Logo essa expressão contém, além do fator 4, também o fator 2 e, portanto, o resultado é sempre múltiplo de 8.*

A prova apresentada acima é uma *prova algébrica completa*.

Outra prova, menos sucinta, dessa conjectura é a que está apresentada abaixo.

Vamos verificar se um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de oito:

Todo número inteiro quando dividido por oito deixa resto 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Podemos escrever como n é ímpar, temos que $n = 8k + 1$ ou $n = 8k + 3$ ou $n = 8k + 5$ ou $n = 8k + 7$.

Assim:

Para $n = 8k + 1$, temos que $(8k+1)^2 - 1 = 64k^2 + 16k^2 + 1 - 1 = 8(8k^2) + 8(2k^2) = 8(8k^2 + 2k^2) = 8t, com\ t \in Z$.

Para $n = 8k + 3$, temos que $(8k+3)^2 - 1 = 64k^2 + 48k + 9 - 1 = 8 = 8(8k^2 + 6k + 1) = 8t, com\ t \in Z$.

Para $n = 8k + 5$, temos que $(8k+5)^2 - 1 = 64k^2 + 80k + 25 - 1 = 8(8k^2 + 10k + 3) = 8t, com\ t \in Z$.

Para $n = 8k + 7$, temos que $(8k + 7)^2 - 1 = 64k^2 + 112k + 49 - 1 = 8(8k^2 + 14k + 6) = 8t, com\ t \in Z$. Logo um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de oito.

Esse tipo de prova pode ser classificado como *prova algébrica completa*, mostrando bom domínio de cálculos algébricos como ferramenta.

c) Considere quatro números inteiros consecutivos. Nesse caso, o produto do segundo número pelo terceiro é sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades?

(i) Sim, pois considerando quatro números consecutivos 1, 2, 3 e 4 temos que 2.3 = 1.4 + 2 = 6 e considerando outros quatro números consecutivos 2, 3, 4 e 5 temos que 3.4 = 2.5 + 2, logo para quaisquer quatro números inteiros consecutivos temos que o produto do segundo número pelo terceiro é sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades.

A prova acima é do tipo *empirismo ingênuo*, uma vez que o aluno conclui com apenas dois exemplos.

(ii) Considerando quatro números inteiros consecutivos temos que o produto do segundo número pelo terceiro é sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades, pois para os consecutivos 1, 2, 3 e 4 temos que 2.3 = 1.4 + 2, para os consecutivos 2, 3, 4 e 5 temos que 3.4 = 2.5 + 2 e para os consecutivos 78 953, 78 954, 78955 e 78 956 temos que 78 954.78 955 = 78953.78956 + 2 = 6 233 813 070.

Vamos admitir que o aluno tenha recorrido à calculadora para realizar esses últimos cálculos com números grandes. Nesse caso, podemos supor que, após realizar algumas tentativas numéricas, o aluno ainda permanece com a dúvida se para quaisquer *"quatro números inteiros consecutivos, teremos o produto do segundo número pelo terceiro sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades?"* Por isso é que ele testou, com auxílio da calculadora, para quatro números consecutivos suficientemente grandes antes de se dar por satisfeito.

Conforme descrições anteriores, a prova acima desenvolvida pelo aluno é do tipo *experimento crucial*.

(iii) Sejam quatro números inteiros consecutivos $n, n + 1, n + 2\ e\ n + 3$, com $n \in Z$, temos que $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2 = n(n + 3) + 2$, logo ao considerarmos quatro números inteiros consecutivos teremos o produto do segundo número pelo terceiro sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades.

Esse tipo de prova pode ser classificado como *prova algébrica completa*.

5.3 Atividade 2

SESSÃO 4 **ATIVIDADE 2** **DESAFIO:** Dados quatro números inteiros consecutivos, pergunta-se: a) Se **a** representa o produto do segundo número pelo terceiro e **P** representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir **P** em função de **a**? b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

- **Forma de condução da atividade 2**[29].
- **Possíveis validações a serem realizadas pelos alunos**:

a) Se a representa o produto do segundo número pelo terceiro e P representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir P em função de a?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Tomemos 1, 2, 3 e 4, quatro números inteiros e consecutivos, então $a = 2.3 = 6\, e\, P = 1.2.3.4 = 24$, então $P = 4a$ e tomemos 2, 3, 4 e 5, quatro números inteiros e consecutivos, então $a = 3.4 = 12\, e\, P = 2\,.3.4\,.5 = 120$, então $P = 10a$, logo é possível exprimir P em função de a.

Podemos caracterizar o tipo de prova acima como *empirismo ingênuo*, pois a certeza do aluno na veracidade da conjectura foi obtida a partir da verificação com apenas dois exemplos.

(ii) Tomemos 1, 2, 3 e 4, quatro números inteiros e consecutivos, então $a = 2.3 = 6$ e $P = 1.2.3.4 = 24$, então $P = 4a$ e tomemos 2, 3, 4 e 5, quatro números inteiros e

[29]Conduzimos a atividade 2 – SESSÃO 4 da mesma forma que regemos a atividade 1 da mesma sessão.

consecutivos, então $a = 3.4 = 12 \, e \, P = 2.3.4.5 = 120$, então $P = 10a$, tomemos 2002, 2003, 2004 e 2005, quatro números inteiros e consecutivos, então $a = 2002.2003 = 4010006$ e $P = 2002.2003.2004.2005 = 16096204184060$, ao dividirmos 1609620418406 por 4010006, teremos $\frac{16096204184060}{4010006} = 4014010$, segue que $\frac{P}{a} = 4014010$, então $P = 4014010a$.

Observa-se que, após realizar várias tentativas numéricas, o aluno ainda duvida, ou seja, ele certamente sentiu necessidade de verificar em determinado caso especial, a fim de ter certeza. Concluímos que esse tipo de prova pode ser categorizado como *experimento crucial*. Nesse caso podemos admitir que o aluno tenha feito uso da calculadora para efetuar os cálculos com números grandes.

(iii) Sejam quatro números inteiros consecutivos $n,\ n+1,\ n+2 \, e \, n+3,\ com \, n \in Z$, então $a = (n+1)(n+2) = n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2$,

$P = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Logo P= $a[n(n+3)] = a\,(a-2)$ ou P = $a^2 - 2a$, portanto é possível exprimir P em função de a.

A utilização adequada de cálculos algébricos permite-nos afirmar que a prova desenvolvida acima pode ser categorizada como *prova algébrica completa*.

b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Tomemos 1, 2, 3 e 4, quatro números inteiros e consecutivos, então $1.2.3.4 + 1 = 25 = 5^2$ = 25, 2.3.4.5 + 1 = 120 +1 = 11^2 logo o produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro.

O tipo de prova desenvolvido acima pode ser considerado como *empirismo ingênuo.*

(ii) Tomemos 1, 2, 3 e 4, quatro números inteiros e consecutivos, então $1.2.3.4 + 1 = 25 = 5^2$ = 25, 2.3.4.5 + 1 = 121 = 11^2, 3.4.5.6 + 1 = 361 =19^2, mas será que o produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

Podemos considerar que o último cálculo tenha sido realizado para tirar a dúvida se o produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade, é sempre igual ao quadrado de um número inteiro. Sendo assim, podemos identificar esta prova como *experimento crucial*.

(iii) Sejam quatro números inteiros consecutivos $n,\ n\ +\ 1,\ n+2\ e\ n+3,\ com\ n \in Z,$ chamaremos de $P\ =\ n(\ n\ +\ 1)(\ n+2)(\ n+3)$ e $a = (\ n\ +\ 1)(n+2),$ exprimindo P em função de a, temos que P= $an(n+3)\ =\ a\ (a-2)$ ou P= $a^2 -\ 2a,$ então $n(\ n\ +\ 1)(\ n+2)(\ n+3) +\ 1 =\ a^2 -\ 2a+1 =\ \ (a-1)^{\ 2}$. Logo o produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro.

Como vimos, esse tipo de prova pode ser identificado como *prova algébrica completa*.

(iv) Sejam quatro números inteiros consecutivos $n,\ n\ +\ 1,\ n+2\ e\ n+3,\ com\ n \in Z,$ chamaremos de $P\ =\ n(\ n\ +\ 1)(\ n+2)(\ n+3), segue\ que$ que $P\ =\ (n^2 +\ 3n)\ (\ n^2\ +\ 3n+2)$ e $a = (\ n\ +\ 1)(n+2) = n^2 +\ 3n,$ exprimindo P em função de a, temos que $P\ =\ (a)\ (\ a+2),$ então $P\ +\ 1\ =\ a^2 -\ 2a+1 =\ \ (a-1)^{\ 2}\cdot$. Logo o produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro.

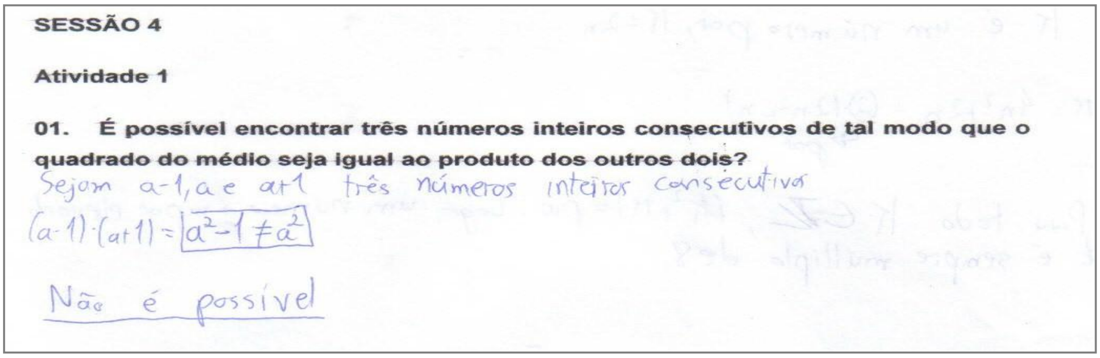
Esta prova pode ser classificada como a prova (iii), embora tenha solução diferente. Em ambas, foram utilizadas propriedades matemáticas verdadeiras e foi usada linguagem algébrica.

5.4 Descrição e análise *a posteriori*

Para a atividade 1, que trazia a seguinte pergunta: é possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois? A previsão ocorreu, pois a maioria dos alunos utilizou cálculos algébricos para resolver o problema, possivelmente por termos enfatizado com maior frequência as validações algébricas.

A seguir seguem algumas das produções realizadas nesta SESSÃO (Figuras 17 a 19).

a) Produção de BR


SESSÃO 4

Atividade 1

01. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

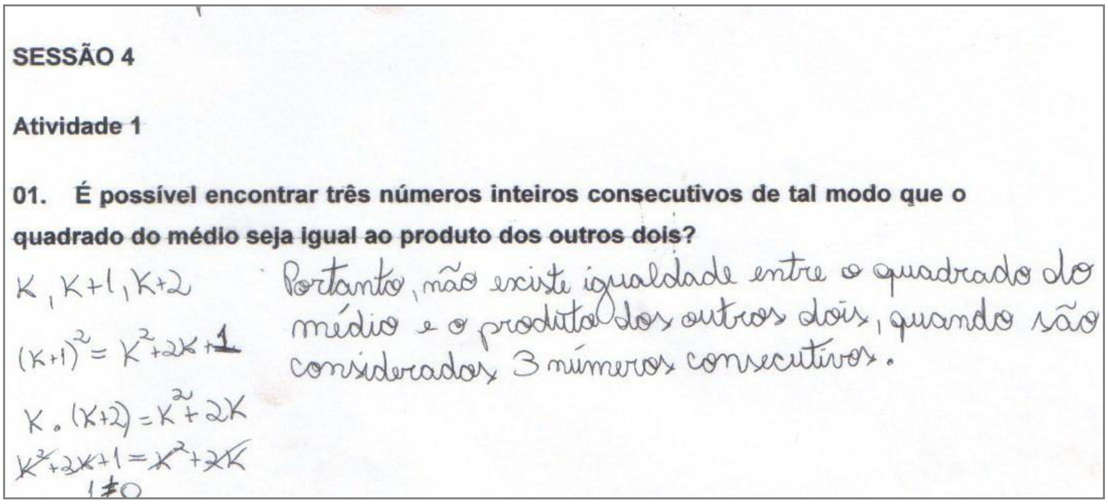
Sejam a-1, a e a+1 três números inteiros consecutivos

$(a-1)\cdot(a+1)=\boxed{a^2-1\neq a^2}$

Não é possível

Figura 17 – Produção de BR na Sessão 4 – atividade 1.

b) Produção de RT


SESSÃO 4

Atividade 1

01. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

$K, K+1, K+2$

$(K+1)^2 = K^2+2K+1$

$K\cdot(K+2) = K^2+2K$

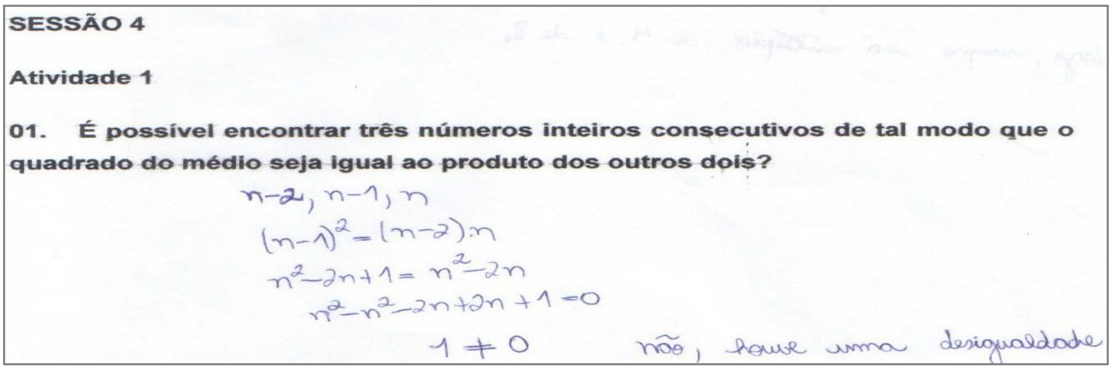
$\cancel{K^2}+\cancel{2K}+1=\cancel{K^2}+\cancel{2K}$

$1\neq 0$

Portanto, não excite igualdade entre o quadrado do médio e o produto dos outros dois, quando são considerados 3 números consecutivos.

Figura 18 – Produção de RT na Sessão 4 – atividade 1.

c) Produção de GB


SESSÃO 4

Atividade 1

01. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

$n-2, n-1, n$

$(n-1)^2=(n-2)\cdot n$

$n^2-2n+1=n^2-2n$

$n^2-n^2-2n+2n+1=0$

$1\neq 0$ não, houve uma desigualdade

Figura 19 – Produção de GB na Sessão 4 – atividade 1.

No problema 2 da **Atividade 1** que apresentava a seguinte conjectura: Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.

A maioria dos alunos conseguiu validar a primeira parte da conjectura. A previsão confirmou-se.

Já para a segunda parte da conjectura, a previsão não foi confirmada, pois nem os alunos BR e CB, que já haviam resolvido questões nas provas da OBM, conseguiram validar a conjectura algebricamente, mostrando que eles não se apropriaram suficientemente desse conteúdo.

Em seguida, foi feita uma institucionalização enfatizando propriedades da fatoração, do resto da divisão e de divisibilidade. Após o término da discussão, foi distribuída outra folha a cada aluno, a qual continha a **Atividade 2** com o primeiro desafio: a) *Se a representa o produto do segundo número pelo terceiro e P representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir P em função de a*?

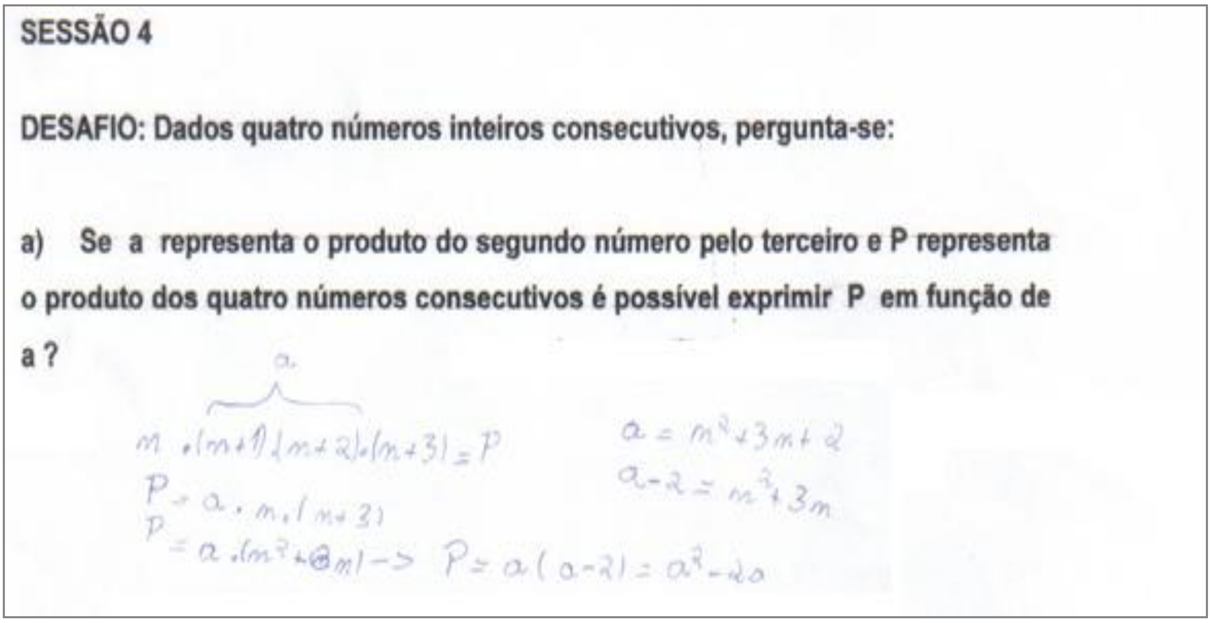
Neste caso ocorreu o que era esperado, ou seja, praticamente todos os alunos resolveram com certa facilidade o problema.

Apresentamos a seguir dois excertos para ilustrar a produção de alunos nessa atividade (Figuras 20 e 21).

A previsão também foi confirmada para o outro item desta atividade, que continha o segundo desafio: b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

Desde o início, quase todos procuraram encontrar a solução por meio do uso de registros algébricos, porém o aluno BR errou a resolução do problema, afirmando que a conjectura era falsa. Ele indagou se estava raciocinando corretamente, nós o questionamos se já havia testado a conjectura através de exemplos e ele afirmou que sim: *"[...] fiz de cabeça!"*.

a) Produção de CB


SESSÃO 4

DESAFIO: Dados quatro números inteiros consecutivos, pergunta-se:

a) Se a representa o produto do segundo número pelo terceiro e P representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir P em função de a ?

$n \cdot \underbrace{(n+1)(n+2)}_{a} \cdot (n+3) = P$

$a = n^2+3n+2$

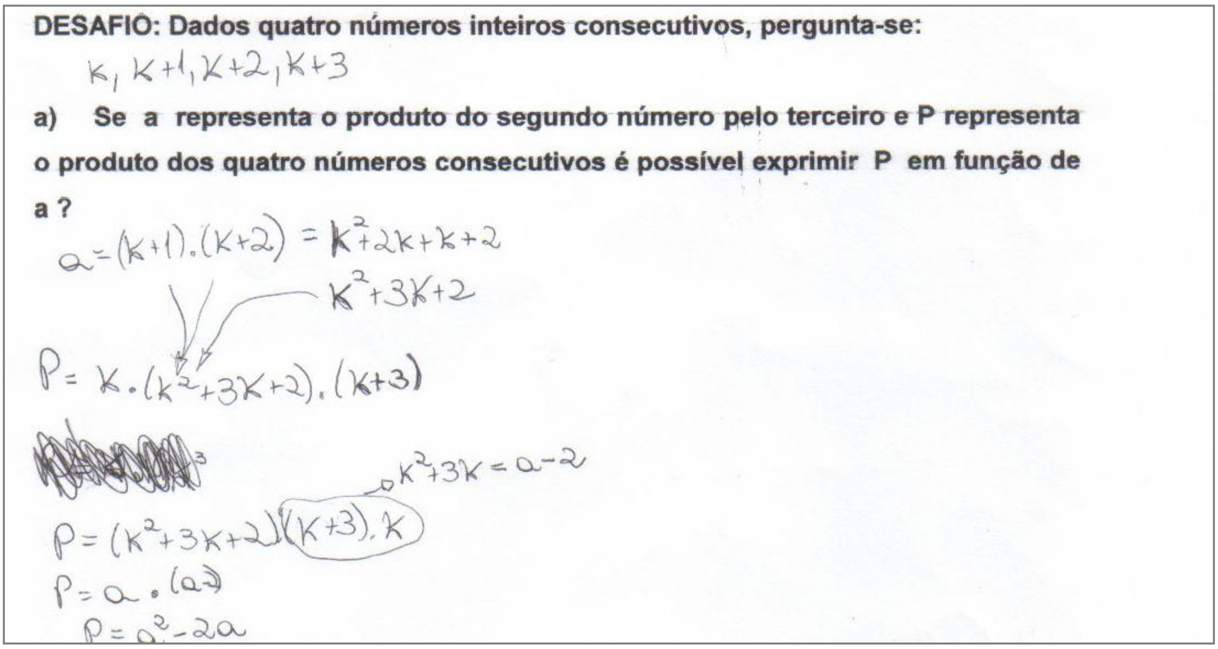
$a-2 = n^2+3n$

$P = a \cdot n \cdot (n+3)$

$P = a \cdot (n^2+3n) \rightarrow P = a(a-2) = a^2-2a$

Figura 20 – Produção de CB na Sessão 4 – atividade 2**.**

b) Produção de RT


DESAFIO: Dados quatro números inteiros consecutivos, pergunta-se:

$k, k+1, k+2, k+3$

a) Se a representa o produto do segundo número pelo terceiro e P representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir P em função de a ?

$a = (k+1).(k+2) = k^2+2k+k+2$

k^2+3k+2

$P = k.(k^2+3k+2).(k+3)$

$k^2+3k = a-2$

$P = (k^2+3k+2)(k+3).k$

$P = a.(a-2)$

$P = a^2-2a$

Figura 21 – Produção de RT na Sessão 4 – atividade 2**.**

No excerto apresentado a seguir podemos observar que ele inicia a “prova” por meio do uso de notações adequadas: sejam $n,\ n+1,\ n+2\ e\ n+3$ quatro números inteiros consecutivos, e P o produto dos quatro números: $P = n(n+1)(n+2)(n+3)$, aplica a propriedade distributiva, tendo que $P = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6$n, porém não considera o produto dos três números consecutivos aumentado de uma unidade e comete uma sucessão de deslizes: aplica raiz quadrada no 1º membro e comete o erro de aplicar raiz quadrada em cada termo do segundo membro separadamente. Além disso, completa erroneamente que $n\sqrt{11}$ tem que ser inteiro, então $n = 11$, e ainda afirma que se $n = 11$, logo $6n = 66$, então $\sqrt{66}$ não pertence a Z, concluindo que P nunca é um quadrado perfeito.

Pedimos-lhe que analisasse sua produção escrita (Figura 22).

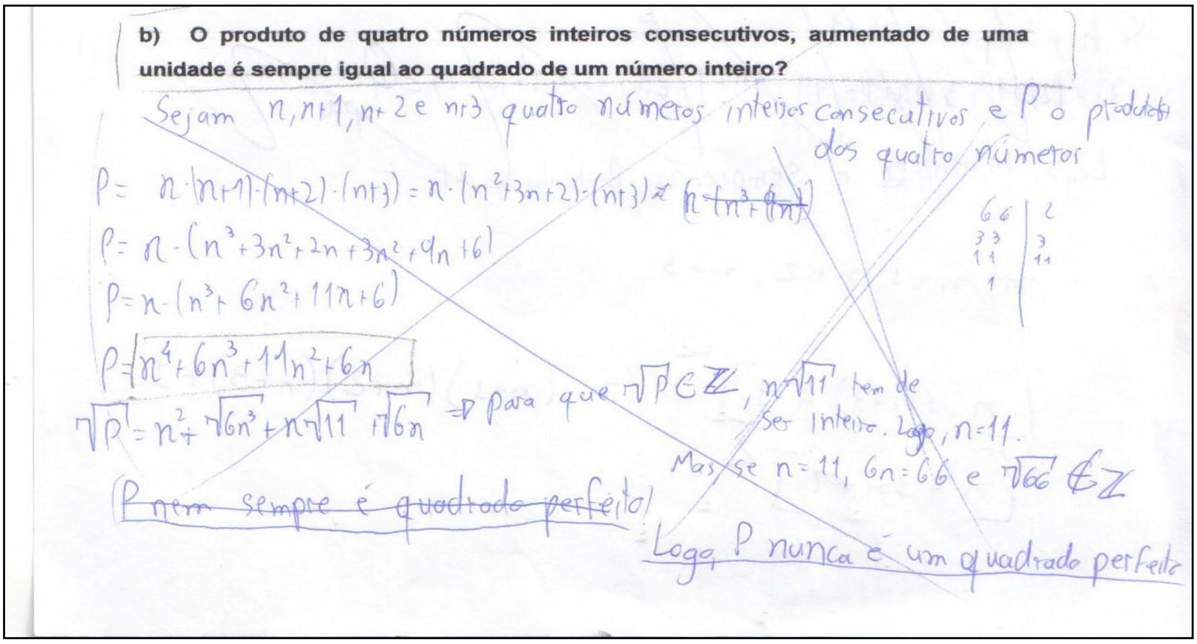
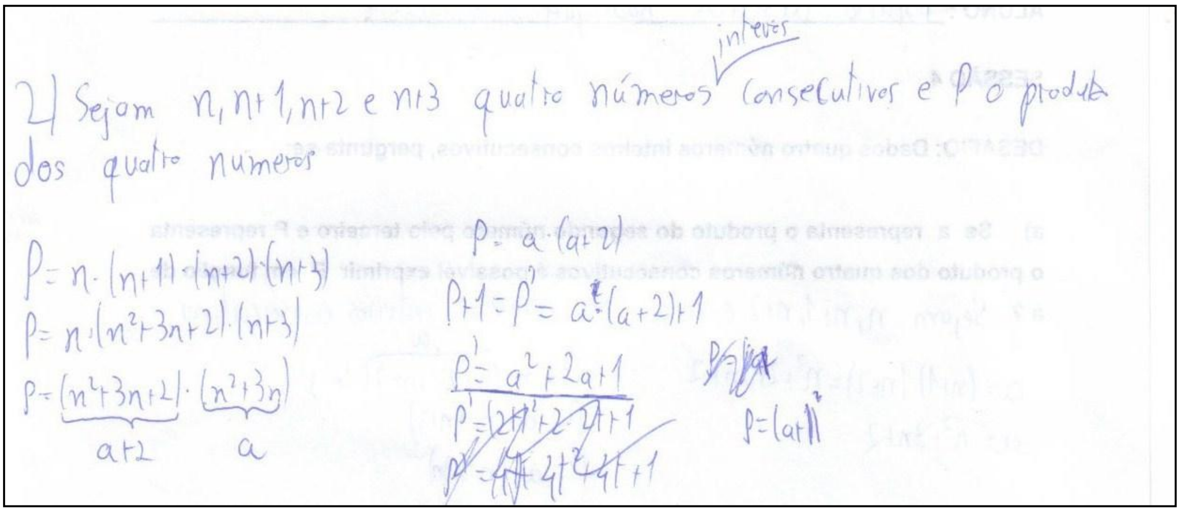


Figura 22 – Produção de BR na Sessão 4 – atividade 2**.**

Em seguida, ele aponta o seu erro em voz alta: “[..]. mas é claro que estou errado, eu não estava somando um ao produto: um vezes dois vezes três vezes quatro mais um é vinte e cinco, um quadrado perfeito!”.

Assim, após observar o equívoco, ele constrói uma validação algébrica correta, produzindo uma prova com elevado índice de generalidade.

Na produção que apresentamos na Figura 23, observa-se que o aluno prova a veracidade da conjectura com produção algébrica semelhante a *(iv)* da análise *a priori*.



2) Sejam $n, n+1, n+2$ e $n+3$ quatro números inteiros consecutivos e P o produto dos quatro números

$P = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$

$P = n \cdot (n^2+3n+2) \cdot (n+3)$

$P = \underbrace{(n^2+3n+2)}_{a+2} \cdot \underbrace{(n^2+3n)}_{a}$

$P = a\,(a+2)$

$P+1 = P' = a^2(a+2)+1$

$P' = a^2+2a+1$

$P' = (2t)^2+2 \cdot 2t+1$

$P' = 4t^2+4t+1$

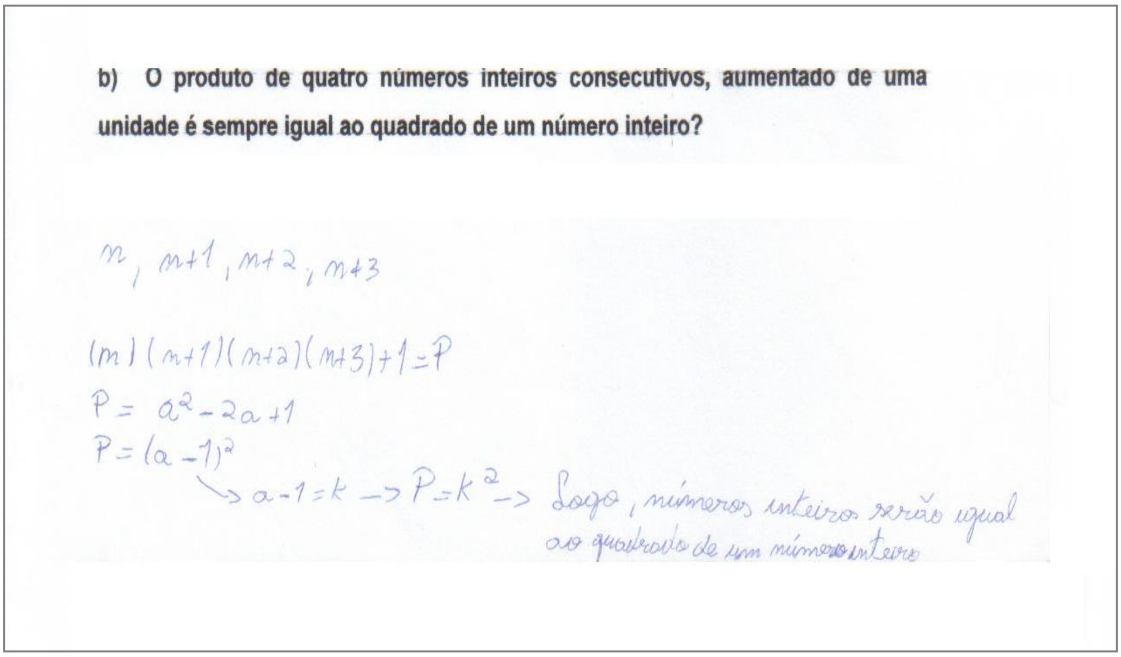
$P = (a+1)^2$

Figura 23 – Produção correta de BR na Sessão 4 – atividade 2**.**

Quase todos os demais alunos acertaram essa questão desta **Atividade 2** com *prova algébrica* semelhante à da análise *a priori*.

Apresentamos nas Figuras 24 e 25, dois outros exemplos dessa prova.

a) Com produção algébrica semelhante a (iii) da análise *a priori*.



b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

$n, n+1, n+2, n+3$

$(n)(n+1)(n+2)(n+3)+1 = P$

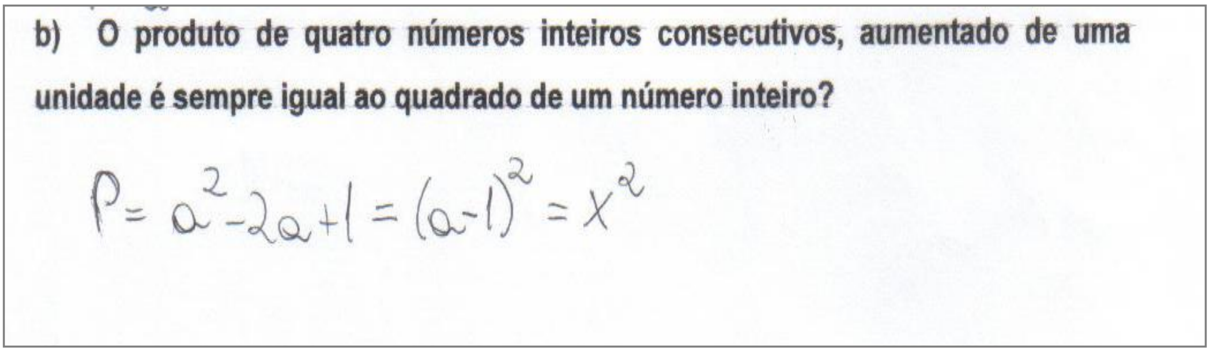
$P = a^2-2a+1$

$P = (a-1)^2$

$\rightarrow a-1 = k \rightarrow P = k^2 \rightarrow$ Logo, números inteiros serão igual ao quadrado de um número inteiro

Figura 24 – Produção de CB na Sessão 4 – atividade 2**.**

b) Com produção algébrica semelhante a (iii) da análise *a priori*.



b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

$P = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 = x^2$

Figura 25 – Produção de RT na Sessão 4 – atividade 2.

Ao finalizarmos a SESSÃO 4**,** realizamos a institucionalização, evidenciando as provas algébricas produzidas pelos alunos.

6 SESSÃO 5

6.1 Análise *a priori*

Elaboramos as atividades e os desafios desta SESSÃO com problemas caracterizados por conjecturas, permitindo ao aluno utilizar os conceitos de Produtos Notáveis, Fatoração, Progressões Aritméticas, Geométricas e regularidades em sequências. As novas conjecturas buscam o envolvimento dos alunos de tal forma que eles utilizem seus conhecimentos matemáticos anteriores, em particular aqueles adquiridos nas primeiras sessões e reinvistam na validação das conjecturas propostas, como também adquiram novos conhecimentos.

Para a **atividade 1- 1ª folha**, que traz a seguinte pergunta: [...] Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

Esperamos que a maioria dos alunos resolva o problema, pois já trabalhamos com problema semelhante na SESSÃO 2.

No problema 2 da **atividade 1- 1ª folha** que apresenta a seguinte questão: *Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4? Qual a quantidade dos menores triângulos da figura n?* Aguardamos que a maioria dos alunos consiga encontrar a resposta da 1ª parte do problema. Quanto à generalização pedida na segunda parte, acreditamos que nem todos os alunos obtenham a generalização solicitada. Apesar de já havermos trabalhado com sequências e progressões nas atividades anteriores, nesta atividade o nível de dificuldade é bem maior, pois envolve a relação entre uma progressão geométrica de uma grandeza linear e o cálculo de área de um tipo de figura não muito comum. Em seguida, pretendemos fazer uma breve institucionalização, enfatizando o conteúdo – Progressões Geométricas.

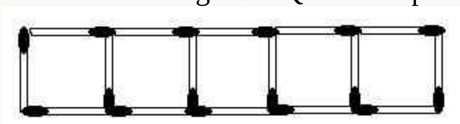
Acreditamos que, pelo menos a metade dos alunos, encontre a solução numérica do desafio 3 da **atividade 1- 2ª folha**, pois já trabalhamos com o assunto Progressões Geométricas. Outro item desta atividade que contém o desafio 4 da **atividade 1- 2ª folha**, acreditamos que nem todos os alunos possam resolvê-lo pelos mesmos motivos da 2ª parte do problema 2. Pretendemos institucionalizar os conceitos matemáticos presentes nos desafios assim que os alunos terminarem a produção, já que se trata da última SESSÃO.

Apresentamos a seguir nossas análises da última SESSÃO de atividades da sequência didática aplicada.

6.2 Atividade 1 – 1ª folha

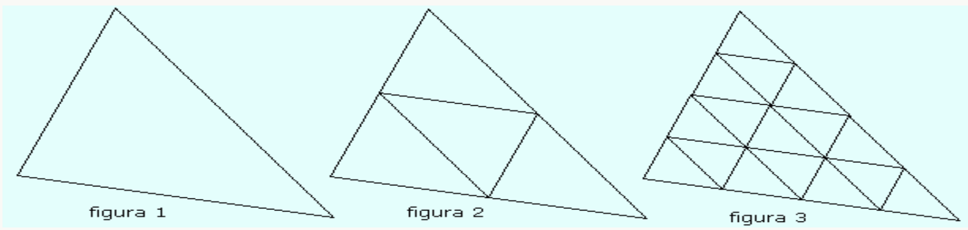
ALUNO: ____
SESSÃO 5
Atividades

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir. Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados?



E para fazer **n** quadrados?

2) <u>(BACEN)</u> Observe a sequência de figuras abaixo (figura 1, figura 2, figura 3, e assim por diante).



Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4? Qual a quantidade dos menores triângulos da figura **n**?

- **Forma de condução da atividade 1 – 1ª Folha:** Entregamos a 1ª folha contendo a atividade 1 e explicamos que a mesma é composta por problemas formados por conjecturas, as quais podem ser verdadeiras ou falsas. Os alunos, individualmente, devem averiguar a veracidade ou a falsidade de cada uma delas através de provas matemáticas. Após a produção dos alunos, realizamos uma breve institucionalização.

Nesse desenvolvimento experimental, dentre outros elementos, analisamos as possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir[30].

Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Para fazer um quadrado serão necessários quatro palitos; para fazer dois quadrados serão necessários sete palitos; para fazer três quadrados serão necessários dez palitos; para fazer quatro quadrados serão necessários treze palitos; para fazer cinco quadrados serão necessários dezesseis palitos; então, para fazer seis quadrados, serão necessários dezenove palitos.

Neste caso, o aluno solucionará apenas a primeira parte do problema, por meio de cálculos empíricos, analisando caso a caso.

(ii) O aluno pode desenvolver o seguinte raciocínio:

- *1 Quadrado* $\rightarrow 4$;
- *2 Quadrados* $\rightarrow 4 + 3.1$;
- *3 Quadrados* $\rightarrow 4 + 3.2$;
- *4 Quadrados* $\rightarrow 4 + 3.3$;
- ...
- *n Quadrados* $\rightarrow 4 + 3(n - 1)$;

Esse é um caso de prova algébrica incompleta, pois o aluno não apresenta todos os cálculos algébricos para chegar à generalização. Neste caso, apesar de o aluno ter identificado a regularidade e expressado o número de palitos em função do número de lados, ele não justifica os passos dados para chegar à expressão geral, embora apresente uma sequência de cálculos que permitem identificar os passos realizados para chegar até à lei de formação.

[30]Verificar ilustração do enunciado 1 da SESSÃO 5, na página 90.

(iii) Para fazer um quadrado serão necessários quatro palitos; para fazer dois quadrados serão necessários sete palitos; para fazer três quadrados serão necessários dez palitos;

Então teremos a seguinte PA (4, 7,...), com $a_1 = 4$ (primeiro termo) e r = 3 (razão), utilizando a fórmula do termo geral (a_n) da PA $a_n = a_1 + (n-1)r,$ sendo n o número de termos da mesma, encontraremos $a_n = 4 + (n-1)3$ =3n $+ 1$, então para fazer n quadrados necessitaremos de $(3n+1)$ palitos.

O aluno utiliza as letras com alto nível de generalidade e, portanto, este tipo de prova é identificado como prova algébrica completa.

2) <u>(BACEN)</u> Observe a sequência de figuras abaixo (figura 1, figura 2, figura 3, e assim por diante) [31].

Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4? Qual a quantidade dos menores triângulos da figura n?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) Para a figura, teremos um triângulo; $(4^{1-1} = 4^0)$, para a figura 2, teremos quatro triângulos; $(4^{2-1} = 4^1)$, para a figura 3, teremos dezesseis triângulos $(4^{3-1} = 4^2)$ e para a figura 4 teremos sessenta e quatro triângulos.

Acreditamos que nesse momento, o aluno esteja analisando casos particulares, buscando identificar a regularidade da sequência e enunciar a conjectura correspondente a ela.

Neste caso, o aluno solucionará apenas a primeira parte do problema, através de cálculos empíricos, analisando caso a caso.

(ii) Para a figura 1 teremos um triângulo; $(4^{1-1} = 4^0)$, para a figura 2 teremos quatro triângulos; $(4^{2-1} = 4^1)$, para a figura 3 teremos dezesseis triângulos $(4^{3-1} = 4^2)$ e para a figura 4 teremos sessenta e quatro triângulos.

Após realizar essas tentativas numéricas, o aluno enuncia a conjectura: - Então o número de triângulos da figura dada será sempre igual à potência de base quatro com expoente igual ao número da mesma menos um. A partir do momento que o aluno identifica a conjectura faz sentido pensar em prova, ele passa da situação de formulação para a de validação, pois a partir daí ele está consciente do enunciado a ser provado. Neste caso, trata-se

[31] Verificar ilustração do enunciado 2 da SESSÃO 5 na página 90.

da conjectura de que o número de triângulos da figura de ordem n é 4^{n-1}. É essa conjectura que o aluno identifica e parte em busca de algum tipo de prova. A prova que o aluno desenvolve é caracterizada como empirismo ingênuo, pois o aluno descobre a conjectura que representa a regularidade da sequência e, em seguida, conclui a sua validade com a observação de apenas quatro casos particulares.

(iii) O aluno pode chegar ao seguinte raciocínio, construindo a tabela a seguir:

Figura (n)	*Nº de triângulos*	*Nº de triângulos sob forma de potência*
1º→n=1	1	$4^{1-1} = 4^0$
2º→n=2	4	$4^{2-1} = 4^1$
3º→n=3	16	$4^{3-1} = 4^2$
4º→n=4	64	$4^{4-1} = 4^3$
...	...	...
n ª→ n	***?***	$\boldsymbol{4^{n-1}}$

Para a figura 1, teremos um triângulo; para a figura 2, teremos quatro triângulos; para a figura 3, teremos dezesseis triângulos, para a figura 4, teremos sessenta e quatro triângulos; o número de triângulos por figura forma a seguinte sequência (1, 4, 16, 64,...), ou seja, $(4^0, 4^1, 4^2, 4^3, \dots\cdot, 4^{n-1})$. Podemos observar que esta sequência é uma Progressão Geométrica, a qual possui a seguinte lei de formação: o quociente do termo posterior pelo anterior é sempre uma constante q denominada razão, ou seja, $\frac{4^1}{4^0} = \frac{4^2}{4^1} = \frac{4^3}{4^2} = \frac{4^4}{4^3} = \cdots = \frac{4^{n-1}}{4^{n-2}} = 4 = q$. O primeiro termo é chamado de $a_1 = 1$ e a razão é igual a q, sendo a fórmula do termo geral (a_n) da PG infinita igual $a_n = a_1 . q^{n-1}$, temos que $a_n = 1 . 4^{n-1}$. Logo, o número de triângulos da figura dada será sempre igual à potência de base quatro com expoente igual ao número da mesma menos um.

Neste caso, a expressão geral da conjectura foi construída e provada algebricamente ao mesmo tempo, assim sendo podemos categorizar a prova acima como *prova algébrica*.

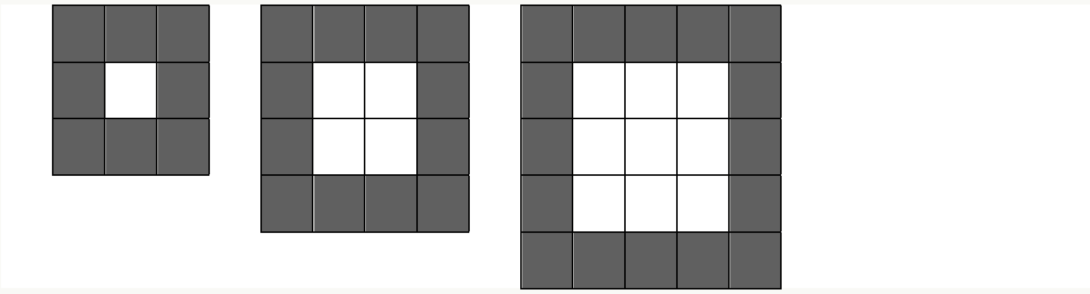
(iv) O aluno utiliza a propriedade de que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão linear. Neste caso, como a razão linear (entre os lados de dois triângulos consecutivos da figura) é igual a 2 então a razão entre as áreas é 4 (2^2). Logo a razão da PG é 4 e conclui que o número de triângulos para a figura n é $\mathbf{4^{n-1}}$.

6.3 Desafios

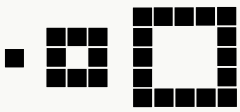
ALUNO: ____________________

SESSÃO 5

3. Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente, como indica a figura. Nos dois primeiros elementos da sequência apresentam 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se numa sequência de mosaicos formados de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



4. Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo:



Quantas pastilhas foram empregadas em toda a decoração considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas? Na sequência acima é apresentada uma sequência até ordem 3. Se essa sequência fosse até a ordem **n** quantas pastilhas seriam utilizadas?

• **Forma de condução da atividade 1 – 2ª Folha:** Conduziremos os desafios da mesma forma que conduzimos a **atividade 1** desta SESSÃO. Nesse desenvolvimento experimental, dentre outros elementos, analisamos as possíveis validações a serem realizadas pelos alunos:

3) Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por

um azulejo branco cercado por azulejos pretos; o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos; e assim sucessivamente como indica a figura. Para construir os dois primeiros elementos da sequência foram usados 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados[32]?

(i) O aluno pode chegar ao seguinte raciocínio, construindo a tabela abaixo:

Ordem do quadrado (n)	*Nº de azulejos brancos*	*Soma de azulejos brancos*	*Nº de azulejos pretos*	*Soma de azulejos pretos*
1º→n=1	1.1 → *1*	*1*	*8*	*8*
2º→n=2	2.2 → *4*	*5*	*(8 +4) = 12*	*20*
3º→n=3	3.3 → *9*	*14*	*(12 +4) = 16*	*36*
4º→n=4	4.4 → *16*	*30*	*(16 +4) = 20*	*56*
5º→n=5	5.5 →*25*	**55**	*(20 +4) = 24*	***80***

- *No quinto quadrado encontramos 25 azulejos brancos e 24 azulejos pretos; então, se forem usados 80 azulejos pretos, serão usados 55 brancos.*

Neste caso, o aluno solucionará apenas a primeira parte do problema, através de cálculos empíricos, particularizando cada caso.

(ii) O aluno pode chegar ao seguinte raciocínio, construindo a tabela abaixo:

Ordem do quadrado(n)	*Nº de azulejos brancos*	*Soma de azulejos brancos*	*Número de azulejos pretos*	*Soma de azulejos pretos*
1º→n=1	1.1 → *1*	*1*	*8*	*8*
2º→n=2	2.2 → *4*	*5*	*(8 +4) = 12*	*20*
3º→n=3	3.3 → *9*	*14*	*(12 +4) = 16*	*36*
4º→n=4	4.4 → *16*	*30*	*(16 +4) = 20*	*56*
5º→n=5	5.5 →*25*	*55*	*(20 +4) = 24*	*80*

Então a sequência de azulejos pretos forma a seguinte $PA\ (8, 12, 16, 20, 24\ldots)$, com $a_1 = 8$ (primeiro termo) e $r = 4$ (razão), pois a cada termo o número de quadrados

[32]Verificar ilustração do enunciado 3 da SESSÃO 5 na página 94.

acrescentados corresponde à quantidade de vértices do quadrado, ou seja, 4. Utilizando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$, sendo n o número de ordem da sequência e a_n a quantidade de azulejos pretos correspondente. Encontraremos assim, $a_n = 8 + (n-1)4$, logo $a_n = 8 + 4n - 4$, $a_n = 4 + 4n$. Logo, o número de azulejos pretos para fazer n mosaicos quadrados é dado pela soma dos termos da PA finita dada por $S_{n=} \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$., onde S_n é a soma dos termos da PA finita, sendo a_1 é o primeiro termo e a_n é o termo geral da PA, então $S_{n=} = \frac{(8+4+4n)n}{2} = \frac{12n+4n^2}{2} = 6n + 2n^2$ e a sequência de azulejos brancos é dada por $({n_1}^2, {n_2}^2, {n_3}^2,...)$ então o número de azulejos brancos para fazer n mosaicos quadrados é dado pela soma $S_{n=}\ {n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2 ...$

Podemos categorizar a prova acima como prova algébrica, na qual o aluno constrói a expressão geral da conjectura e a prova algebricamente. Apresentamos a seguir a última atividade desenvolvida nesta 5ª SESSÃO, cujo enunciado é o seguinte:

4. Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo.

..FIGURA[33]..

Quantas pastilhas foram empregadas em toda a decoração, considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas?

Na sequência acima é apresentada uma sequência até ordem 3. Se essa sequência fosse até a ordem n, quantas pastilhas seriam utilizadas?

É possível que encontremos as seguintes respostas construídas pelos alunos:

(i) O azulejo de ordem 2 é formado por 8 pastilhas pretas; o azulejo ordem de 3 é formado por 16 pastilhas pretas; o de ordem 4 é formado por 24 pastilhas pretas; azulejo de ordem 5 é formado por 32 pastilhas pretas; o azulejo de ordem 6 é formado por 40 pastilhas pretas; somando as pastilhas pretas dispostas na sequência: $1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 = 121$.

Desse modo, o aluno solucionará apenas a primeira parte do problema, através de cálculos empíricos, analisando caso a caso.

(ii) Inicialmente, o aluno resolve a primeira parte do problema de maneira semelhante à proposição (i) em seguida observa: - A sequência formada pelo número de pastilhas a partir dos azulejos de ordem 2 é (8, 16, 24, 32, 40,...).

---

[33]Verificar ilustração do enunciado 4 da SESSÃO 5 na página 94.

Ordem	*Nº de pastilhas por azulejo*	*Soma das pastilhas da sequência menos o azulejo de ordem 1*	*Soma das pastilhas da sequência*
2º→n=2	$8.(2-1) \to 8$	$8.(2-1) = 8$	$8 + 1 = 9$
3º→n=3	$8.(3-1) \to 16$	$8.(2-1) + 8.(3-1) = 24$	$24 + 1 = 25$
4º→n=4	$8.(4-1) \to$ *24*	$8.(2-1) + \ldots + 8.(4-1) = 48$	$48 + 1 = 49$
5º→n=5	$8.(5-1) \to 32$	$8.(2-1) + \ldots + 8.(5-1) = 80$	*80*$+ 1 = 81$
6º→n=6	$8.(6-1) \to 40$	$8.(2-1) + \ldots + 8.(6-1) = 120$	$120 + 1 = 121$
...	...	...	...
$\boldsymbol{n}$ ª→ $\boldsymbol{n}$	$8.(n-1) \to$ $\mathbf{8n-8}$	$8[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] =$ $8(S_n) =$ $8\frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 8\frac{(1+ n-1)(n-1)}{2} =$ $8\frac{(n)(n-1)}{2}$ $= \mathbf{4n^2 - 4n}$	$\mathbf{4n^2 - 4n + 1}$

Generalizando os dados da 2ª coluna, encontramos o número de pastilhas para o azulejo de **ordem n** → $\mathbf{8n - 8}$, fazendo o mesmo na 3ª coluna, encontramos a soma das pastilhas dos azulejos de ordem 2 até os azulejos de ordem n menos o azulejo de ordem 1→ $\mathbf{4n^2 - 4n}$. Assim, verificamos, na última coluna, que a soma das pastilhas dos azulejos da sequência é $\mathbf{4n^2 - 4n + 1}$.

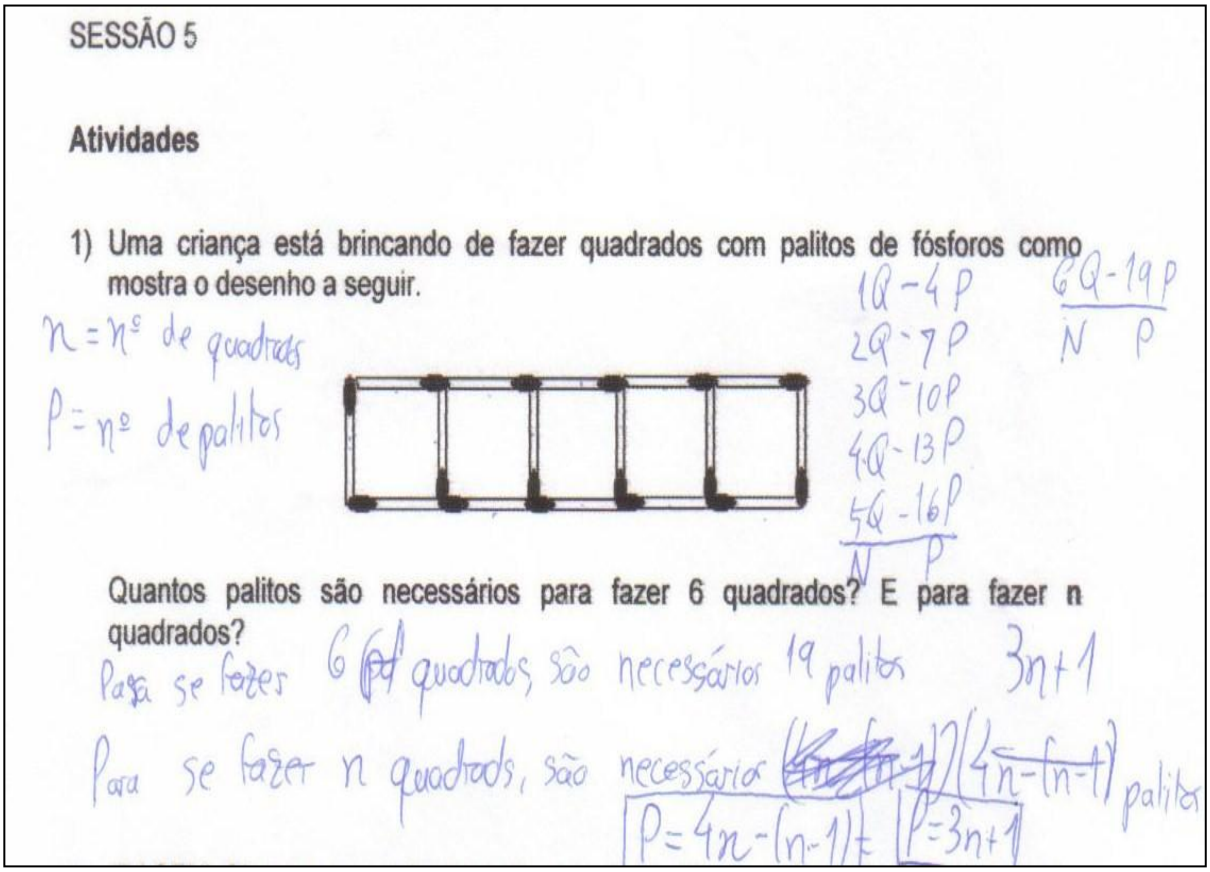
Podemos considerar a prova construída pelo aluno como prova algébrica completa sendo que a expressão geral da conjectura foi construída e provada algebricamente ao mesmo tempo.

6.4 Descrição e análise *a posteriori*

Para a atividade 1, que trazia a seguinte pergunta: [...] Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

Esperávamos que a maioria dos alunos conseguisse resolver o problema, pois havíamos trabalhado com problema semelhante na SESSÃO 2. A previsão se confirmou, a maioria dos alunos utilizou cálculos algébricos para resolver o problema (Figuras 26 a 28).

a)



SESSÃO 5

Atividades

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir.

n = nº de quadrados

P = nº de palitos

1Q - 4P
2Q - 7P
3Q - 10P
4Q - 13P
5Q - 16P
N P

6Q - 19P
N P

Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

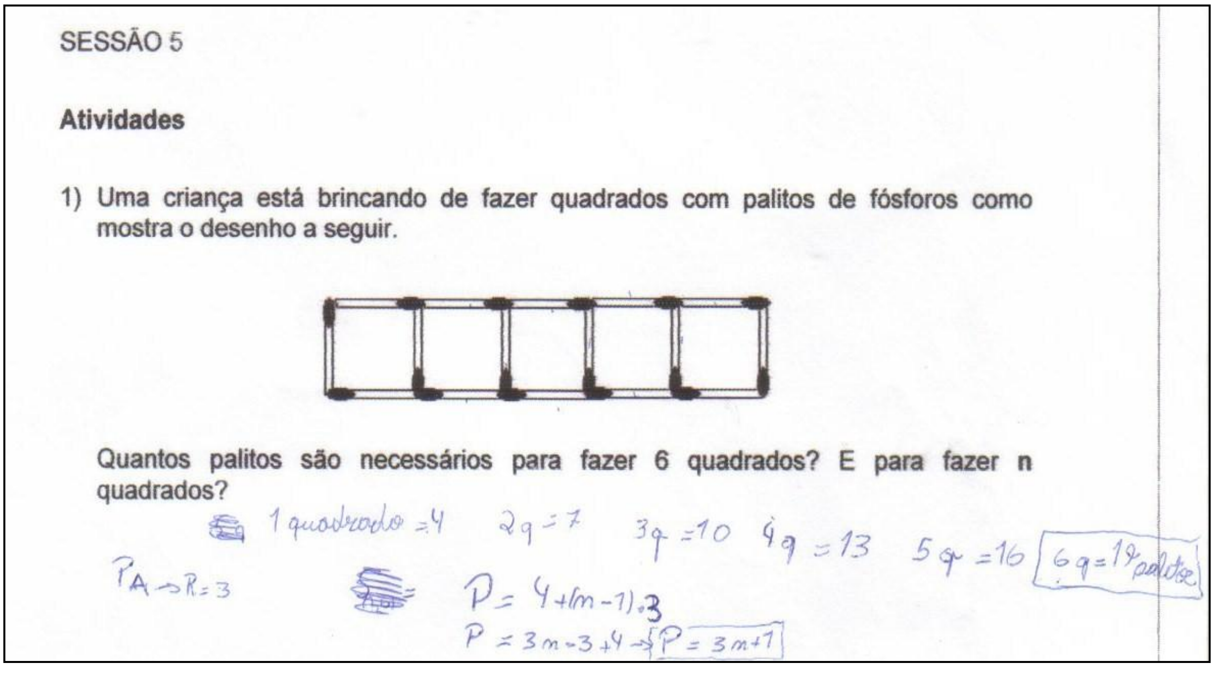
Para se fazer 6 quadrados, são necessários 19 palitos   3n+1

Para se fazer n quadrados, são necessários (4n-(n-1)) palitos

$\boxed{P=4n-(n-1)}$ $\boxed{P=3n+1}$

Figura 26 – Produção de BR na Sessão 5 – atividade 1.

b)



SESSÃO 5

Atividades

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir.

Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

1 quadrado = 4   2q = 7   3q = 10   4q = 13   5q = 16 $\boxed{6q = 19 \text{ palitos}}$

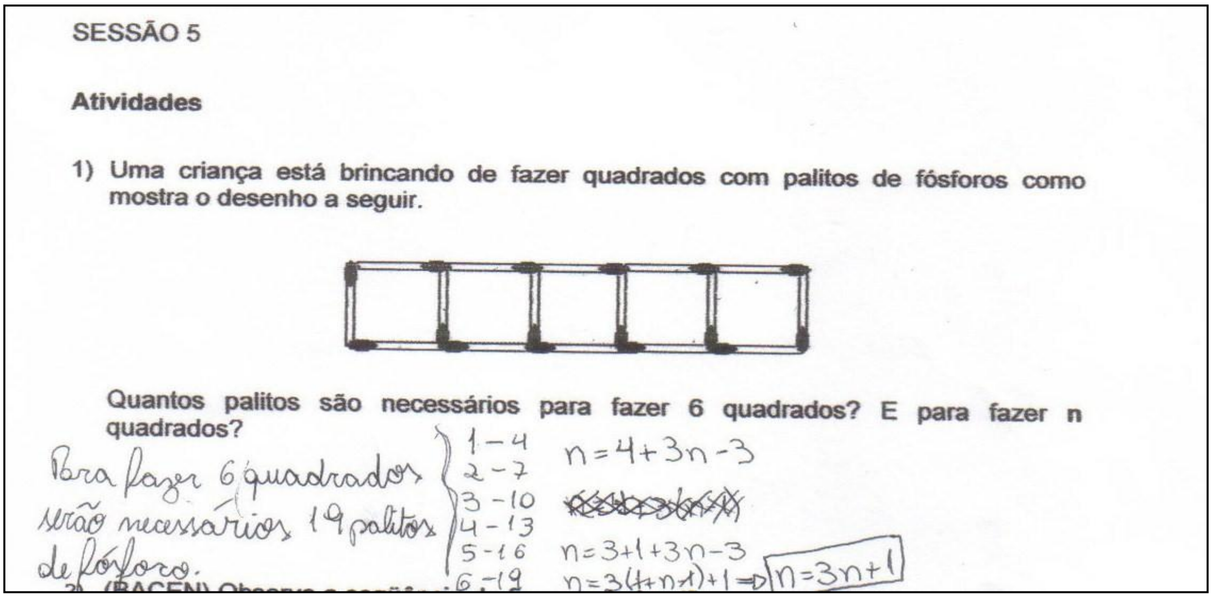
$P_A \to R = 3$

$P = 4 + (m-1) \cdot 3$

$P = 3m - 3 + 4 \to \boxed{P = 3m+1}$

Figura 27 – Produção de CB na Sessão 5 – atividade 1.

c)


SESSÃO 5

Atividades

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir.

Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

Para fazer 6 quadrados serão necessários 19 palitos de fósforo.

1 – 4
2 – 7
3 – 10
4 – 13
5 – 16
6 – 19

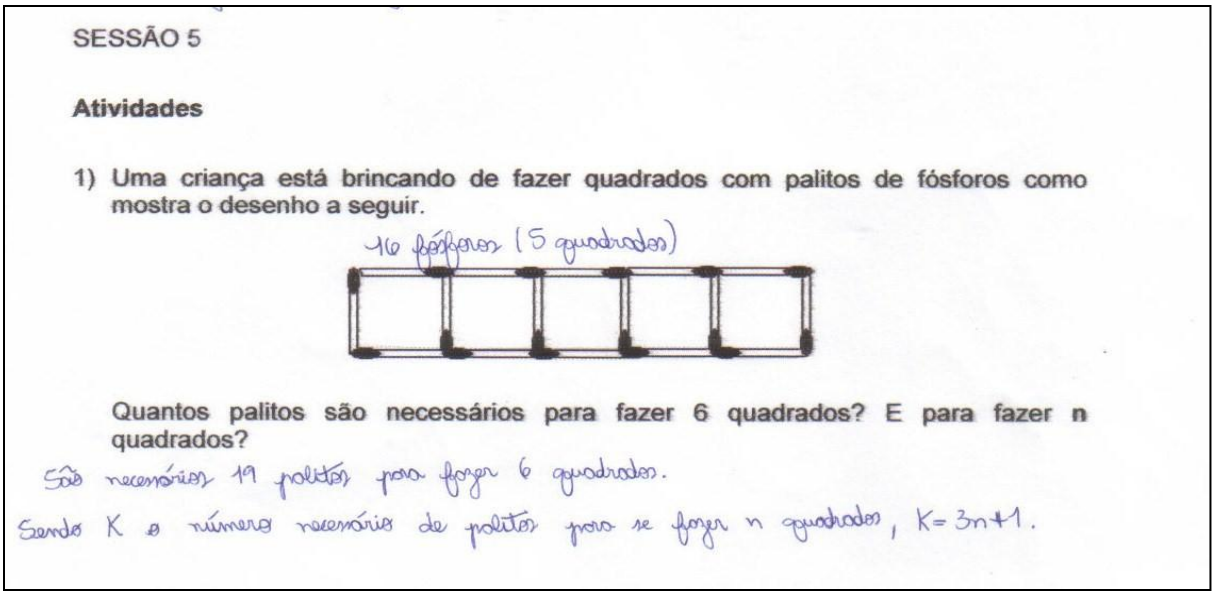
$n = 4 + 3n - 3$

$n = 3 + 1 + 3n - 3$

$n = 3(4 + n - 1) + 1 \Rightarrow \boxed{n = 3n + 1}$

Figura 28 – Produção de RT na Sessão 5 – atividade 1.

O aluno GB produziu uma *prova algébrica incompleta*, pois, embora encontrando a resposta, não apresentou todos os cálculos algébricos necessários para chegar até ela, como mostramos na Figura 29.


SESSÃO 5

Atividades

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir.

16 fósforos (5 quadrados)

Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer n quadrados?

São necessários 19 palitos para fazer 6 quadrados.

Sendo K o número necessário de palitos para se fazer n quadrados, $K = 3n + 1$.

Figura 29 – Produção de GB na Sessão 5 – atividade 1.

No problema 2 da **atividade 1**, que apresentava a seguinte pergunta: *Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4? Qual a quantidade dos menores triângulos da figura n?* A previsão foi confirmada, pois a maioria dos alunos conseguiu encontrar a resposta da 1ª parte do problema, já que neste caso, o aluno solucionou o problema através de cálculos empíricos analisando caso a caso.

Apenas metade dos alunos solucionou a 2ª parte do problema encontrando a generalização. Os alunos encontraram muita dificuldade e um exemplo disso foi a produção da aluna KK que, apesar de evoluir das provas pragmáticas para as provas conceituais na SESSÃO 4, permaneceu no *empirismo ingênuo* para o problema 2 (Figura 30).

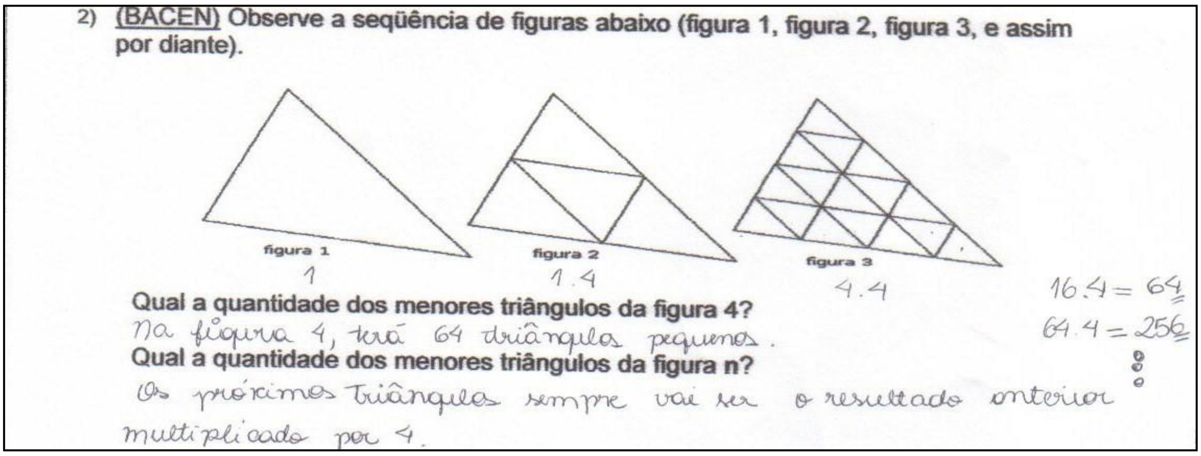

2) (BACEN) Observe a seqüência de figuras abaixo (figura 1, figura 2, figura 3, e assim por diante).

figura 1 figura 2 figura 3

1 $1 . 4$ $4 . 4$

$16 . 4 = 64$

$64 . 4 = 256$

Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4?

Na figura 4, terá 64 triângulos pequenos.

Qual a quantidade dos menores triângulos da figura n?

Os próximos triângulos sempre vai ser o resultado anterior multiplicado por 4.

Figura 30 – Produção de KK na Sessão 5 – atividade 1.

O mesmo ocorreu com o aluno LN, que desenvolveu uma prova por enunciados incompleta (Figura 31).

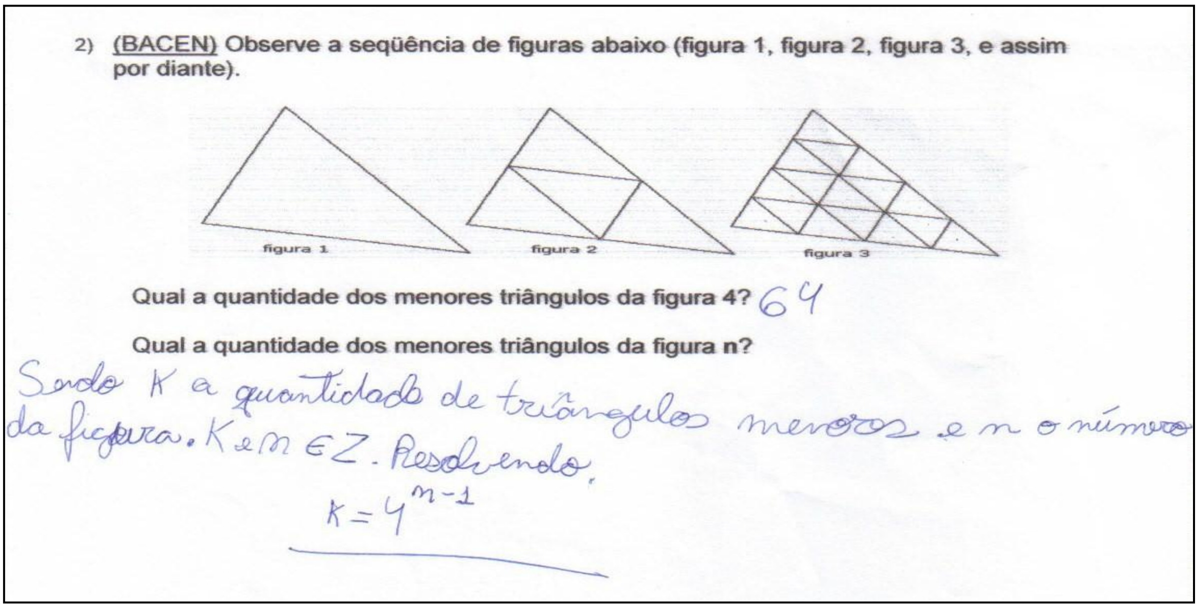

2) (BACEN) Observe a seqüência de figuras abaixo (figura 1, figura 2, figura 3, e assim por diante).

figura 1 figura 2 figura 3

Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4? 64

Qual a quantidade dos menores triângulos da figura n?

Sendo K a quantidade de triângulos menores e n o número da figura. K e $n \in Z$. Resolvendo,

$K = 4^{n-1}$

Figura 31 – Produção de LN na Sessão 5 – atividade 1.

Em seguida, foi feita uma breve institucionalização enfatizando o conteúdo - Progressões Geométricas. Após o término da discussão, foi distribuída a 2ª folha a cada aluno, a qual continha mais dois desafios. Acreditávamos que, pelo menos a metade dos alunos encontraria, pelo menos, a solução numérica do desafio 3, pois já havíamos trabalhado com o assunto Progressões Geométricas, fato esse que não ocorreu já que apenas dois alunos GB e BR encontraram a resposta correta(Figuras 32 e 33).

a)

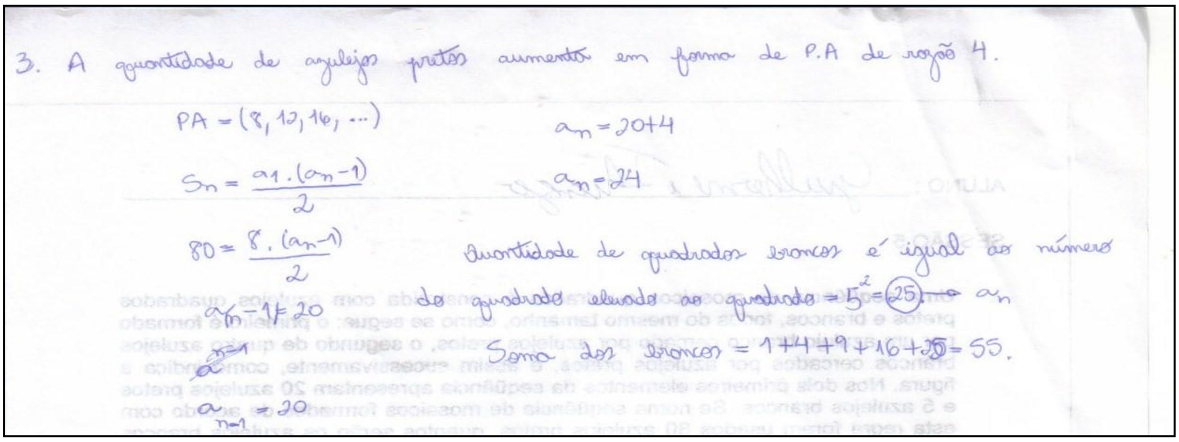
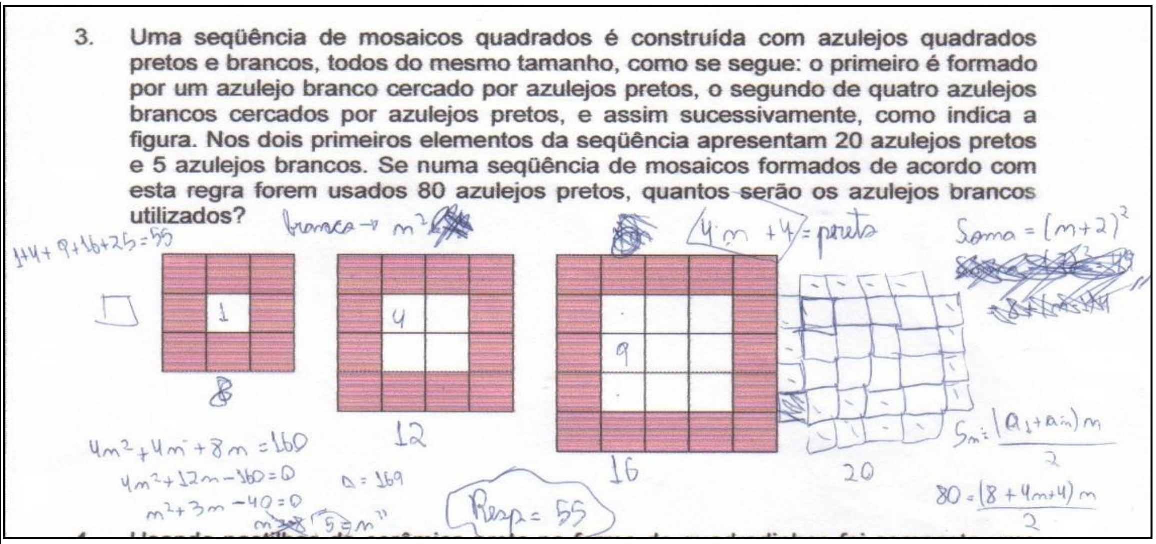


Figura 32 – Produção de GB na Sessão 5 – Desafios.


3. Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente, como indica a figura. Nos dois primeiros elementos da seqüência apresentam 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se numa seqüência de mosaicos formados de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?

b)

Figura 33 – Produção de BR na Sessão 5 – Desafios.

O outro item desta atividade, que continha o desafio 4, não foi resolvido por nenhum aluno. Ao institucionalizarmos esta atividade, pudemos perceber que os alunos não têm o hábito de construir tabelas para perceber a regularidade de uma sequência, provavelmente, por nunca terem visto problema semelhante em sala de aula.

Assim que a tabela foi elaborada, muito deles conseguiram modelar o padrão da sequência proposta, sobretudo, pudemos verificar mais uma vez a importância da discussão entre os pares durante a aplicação de cada SESSÃO.

7 AVALIAÇÃO FINAL DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para discutirmos as prováveis evoluções dos alunos nos níveis de prova, escolhemos BR, RT e KK. Como vimos, anteriormente, na SESSÃO 1, BR possui uma base curricular de Matemática mais consistente e grande interesse na ampliação dos seus conhecimentos; RT tem um bom embasamento em todas as disciplinas; KK sempre apresentou dificuldades na aprendizagem dos conteúdos escolares, mas mostrava interesse na área de Matemática.

Escolhemos esses alunos, a partir da avaliação interna de cada SESSÃO, e percebermos que eles apresentaram diferentes tipos de provas, bem como evolução entre as mesmas, desse modo acreditamos que eles podem representar o grupo de alunos pesquisado.

Podemos verificar, nos gráficos a seguir, a evolução dos alunos nas sessões de nossa sequência didática, considerando a seguinte equivalência[34].

- 0 – Ausência de prova;
- $]0,1]$ - *Empirismo Ingênuo*;
- 2 – *Experimento Crucial*;
- 3 - *Prova Conceitual Incompleta*;
- 4 - *Prova Conceitual Completa*;
- 5 – *Prova Algébrica Incompleta*;
- 6 – *Prova Algébrica Completa*.

7.1 Análise da sessão 1

Na avaliação interna da SESSÃO 1, observamos que, para as três atividades, BR permaneceu na *prova algébrica completa* (Figuras 34). Para a **atividade 1**, o aluno RT produziu uma *prova algébrica incompleta* (Figuras 35) e a aluna KK produziu uma *prova do tipo empirismo ingênuo* (Figuras 36).

Já na **atividade 2**, ambos evoluíram quanto ao tipo de prova, pois construíram uma *prova algébrica completa*. No entanto, na **atividade 3**, a aluna KK não produziu nenhum tipo

[34] Essa escala foi criada por nós, para facilitar a visualização da evolução desses alunos.

de prova, enquanto que o aluno RT voltou a produzir uma prova do *tipo empirismo ingênuo*. Nossa interpretação é que provavelmente esse fato ocorreu porque a **atividade 2** era muito parecida com a **atividade 1**, mas a **atividade 3** possuía um nível de dificuldade mais elevado.

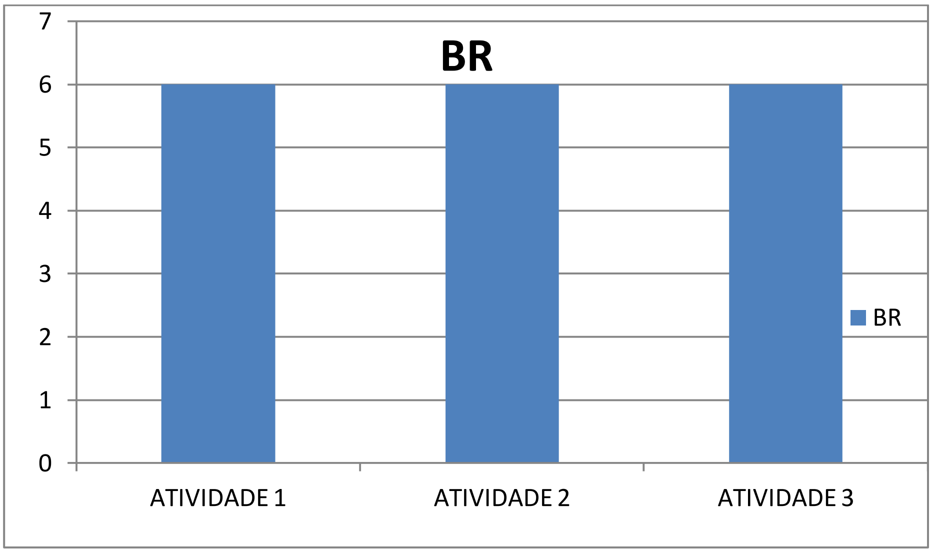


Figura 34 - “Provas de BR na Sessão 1”.

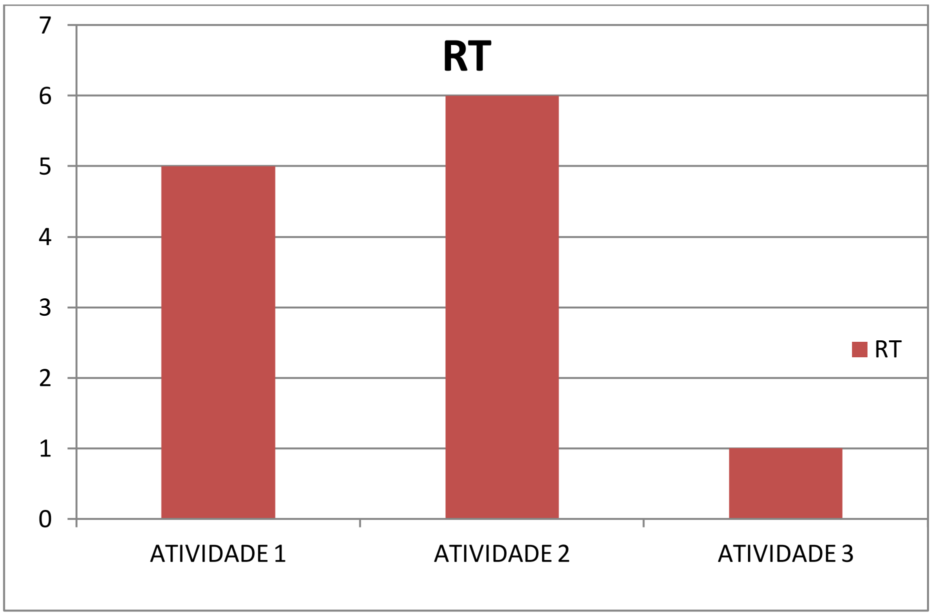


Figura 35 - “Provas de RT na Sessão 1”.

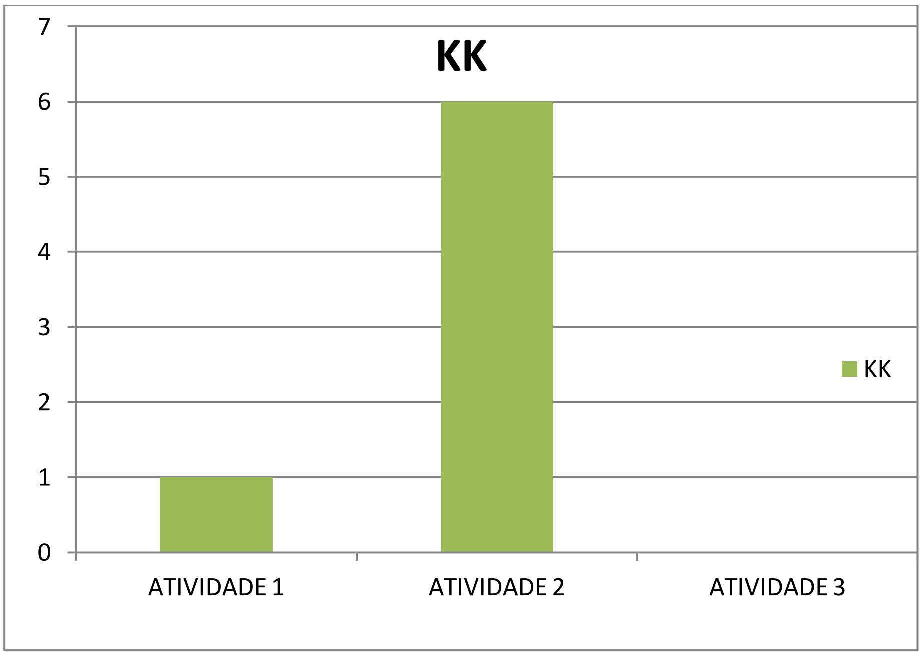


Figura 36 - “Provas de KK na Sessão 1”.

7.2 Análise da sessão 2

A conjectura a ser validada na SESSÃO 2 causou muita discussão, pois a maioria dos alunos não conhecia os números triangulares. Apenas o aluno BR construiu uma *prova algébrica completa* (Figura 37); o aluno RT manteve a prova do *tipo empirismo ingênuo* (Figura 38); a aluna KK não desenvolveu nenhum tipo de prova (Figura 39).

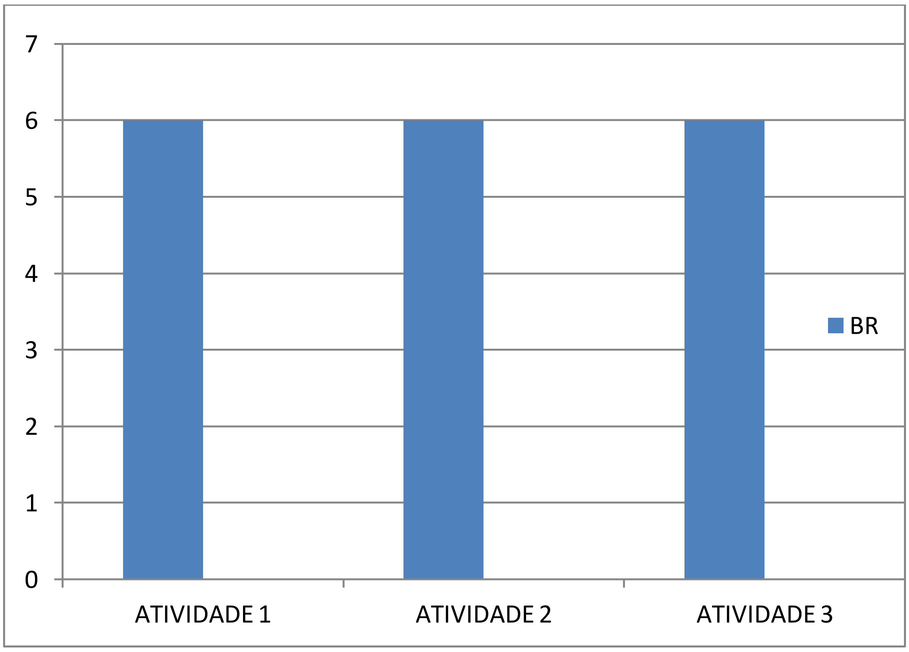


Figura 37 - “Provas de BR na Sessão 2”.

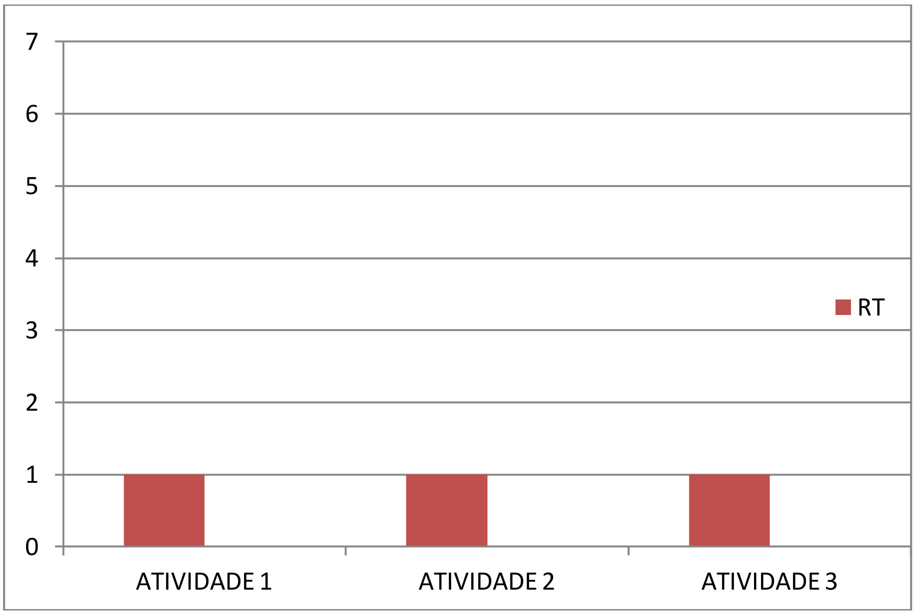


Figura 38 - “Provas de RT na Sessão 2”.

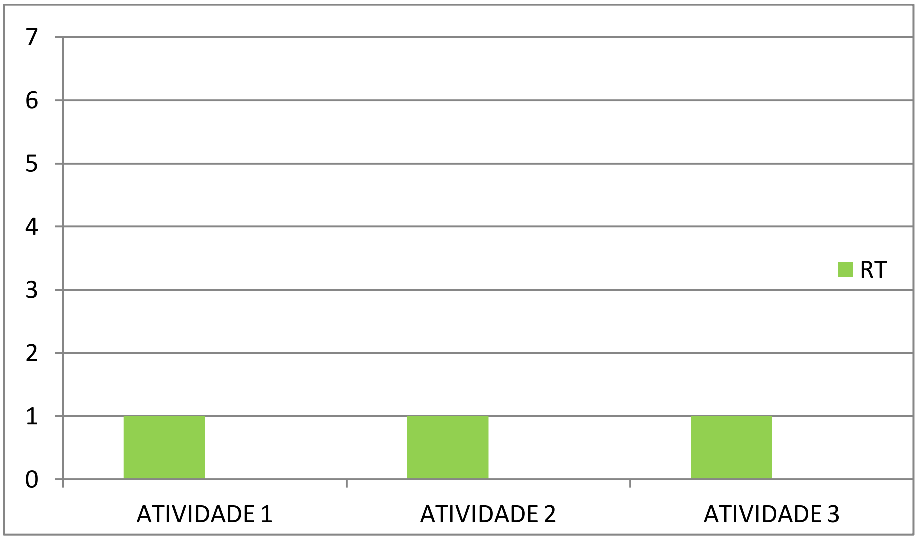


Figura 39 - “Provas de KK na Sessão 2”.

7.3 Análise da sessão 3

Essa primeira atividade foi preparada para verificarmos se haviam indícios de que os alunos haviam se apropriado do conhecimento adquirido na SESSÃO 1. Possivelmente, esse fato ocorreu, pois KK produziu uma *prova algébrica completa* (Figura 40). Assim, ela evoluiu, pois na SESSÃO 2 ela não havia desenvolvido nenhum tipo de prova.

RT evoluiu de uma prova do tipo *empirismo ingênuo* da SESSÃO 2 para uma *prova algébrica completa* (Figura 41) e BR, mais uma vez, permaneceu na *prova conceitual* (Figura 42).

Para a atividade 2, os três alunos desenvolveram uma prova do tipo *empirismo ingênuo*, provavelmente devido ao nível de dificuldade exigida pelo desafio proposto.

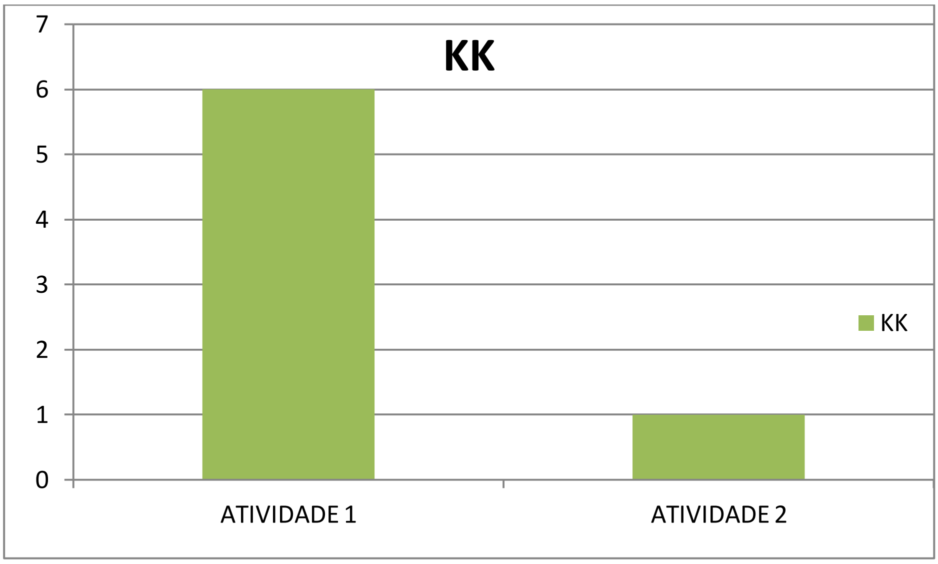


Figura 40 - "Provas de KK na Sessão 3".

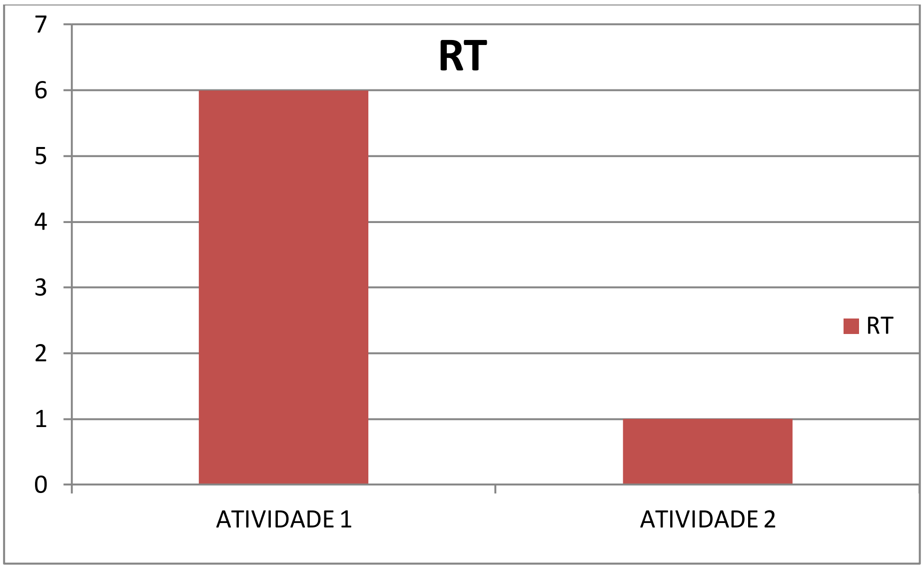


Figura 41 - "Provas de RT na Sessão 3".

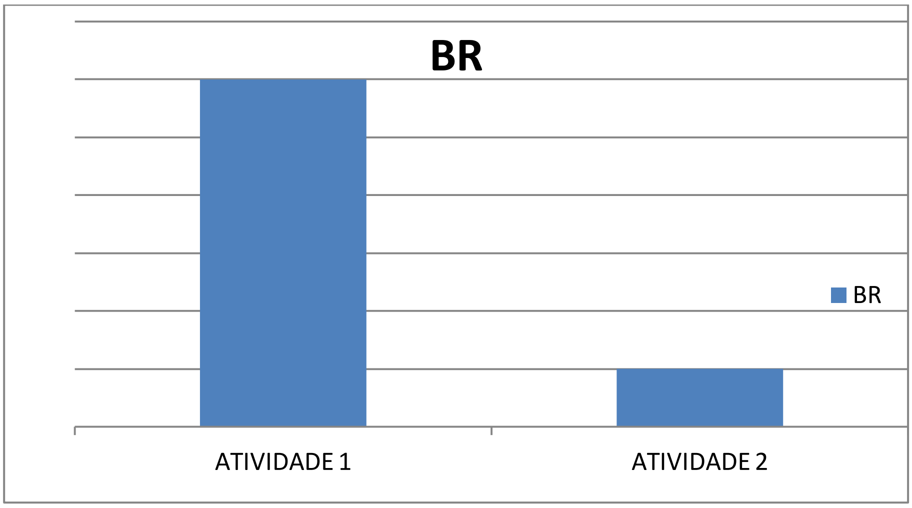


Figura 42 - “Provas de BR na Sessão 3”.

7.4 Análise da sessão 4

Ao analisarmos os gráficos desta SESSÃO, percebemos que os três alunos evoluíram do *empirismo ingênuo* para a *prova algébrica completa*.

Neste caso, avaliamos que, provavelmente, houve reinvestimento do conhecimento adquirido por BR, RT e KK (Figuras 43, 44 e 45, respectivamente) em relação ao conteúdo matemático explorado nas sessões 1 e 3.

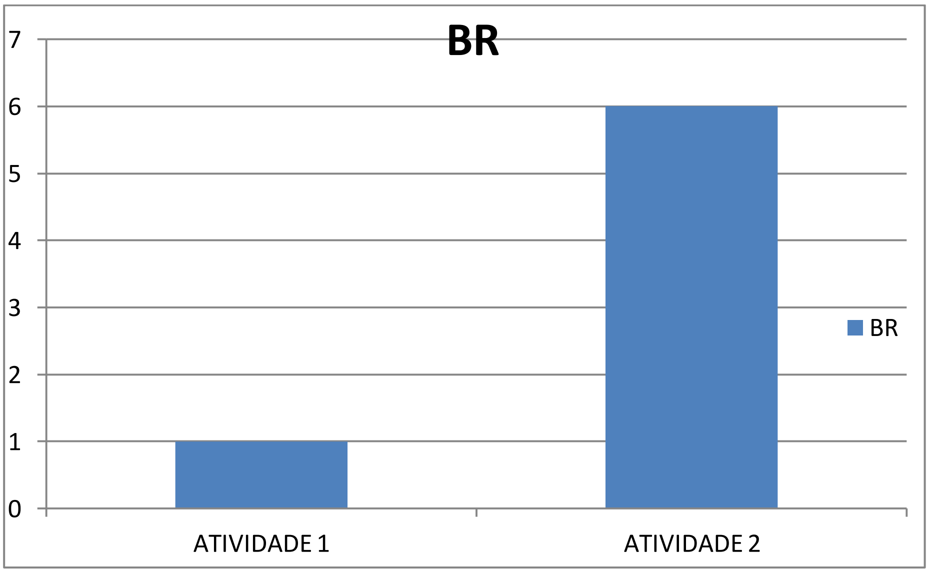


Figura 43 - “Provas de BR na Sessão 4”.

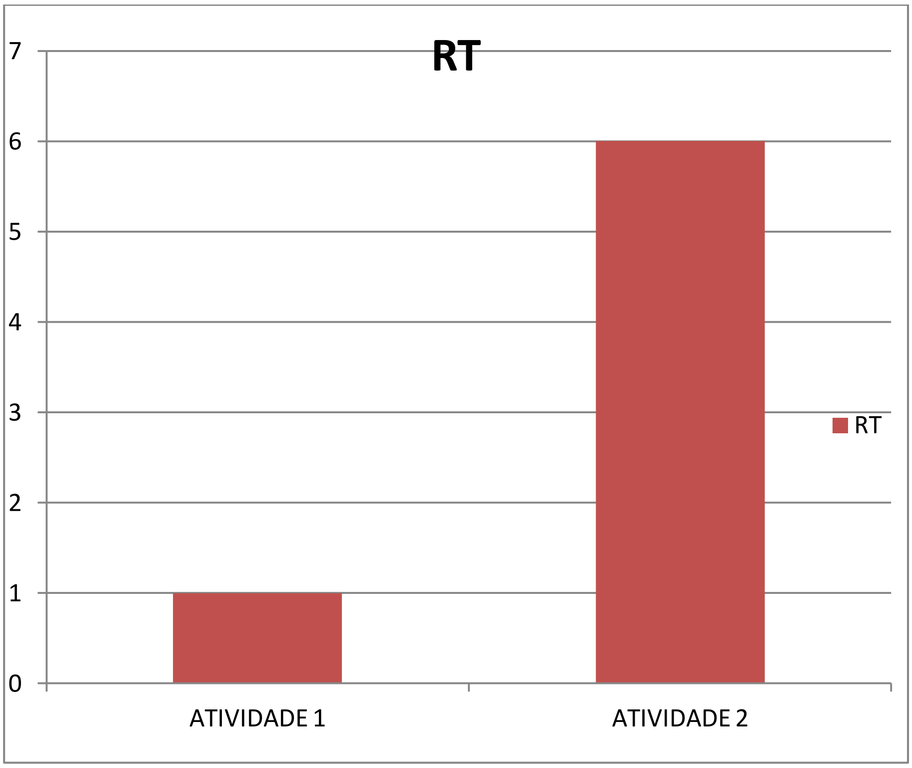


Figura 44- “Provas de RT na Sessão 4”.

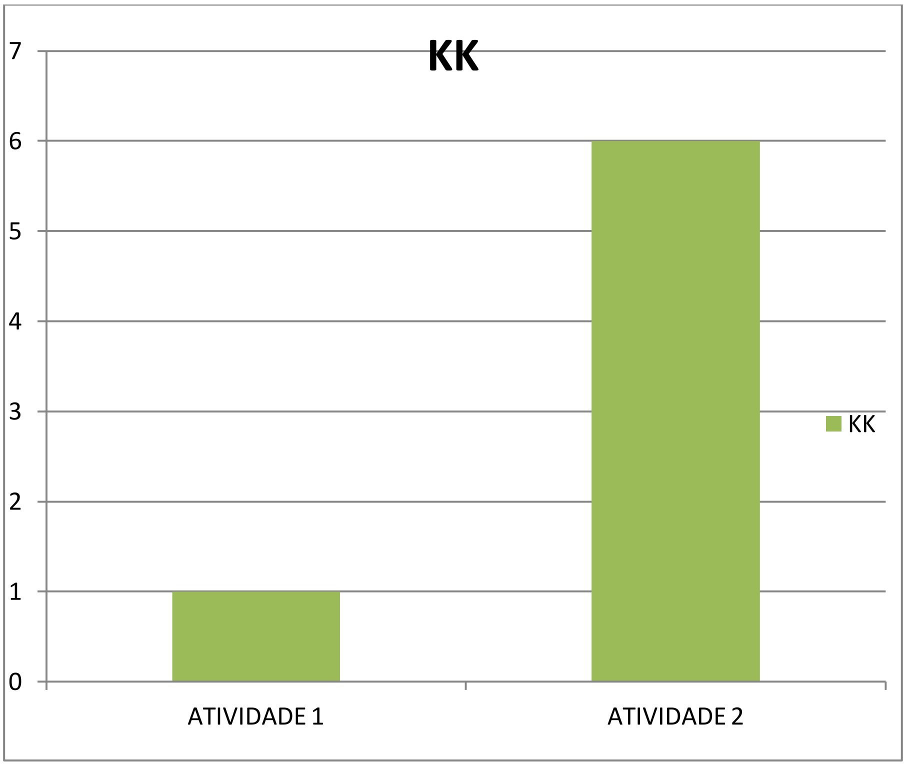


Figura 45 - “Provas de KK na Sessão 4”.

7.5 Análise da sessão 5

Na atividade 1, observamos que os alunos, exceto KK , reinvestiram o conhecimento adquirido da SESSÃO 2, uma vez que os alunos BR (Figura 46) e RT (Figura 47) produziram uma *prova do tipo algébrica completa*, porém KK não produziu nenhuma prova. Para a atividade 2, vimos que novamente o nível de dificuldade havia aumentado, assim não houve produção de prova.

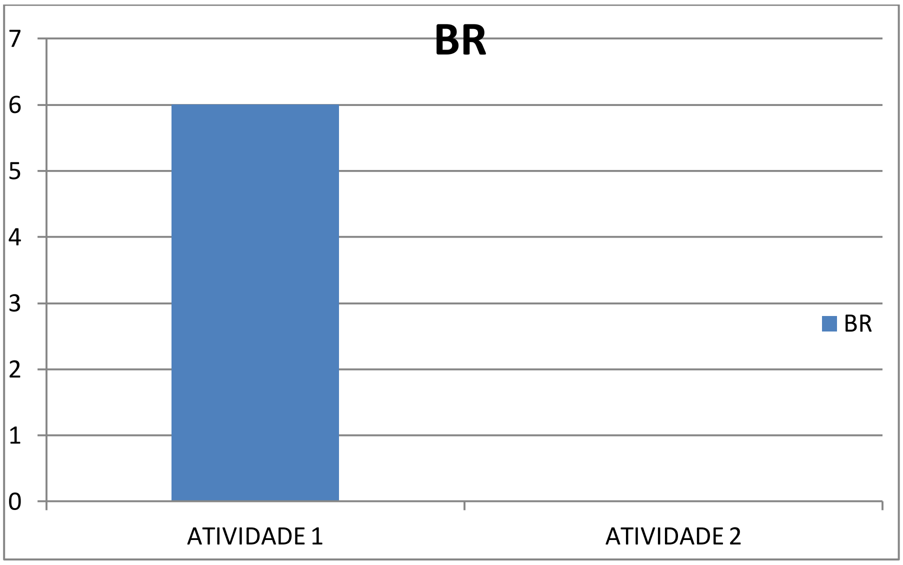


Figura 46 - “Provas de BR na Sessão 5”.

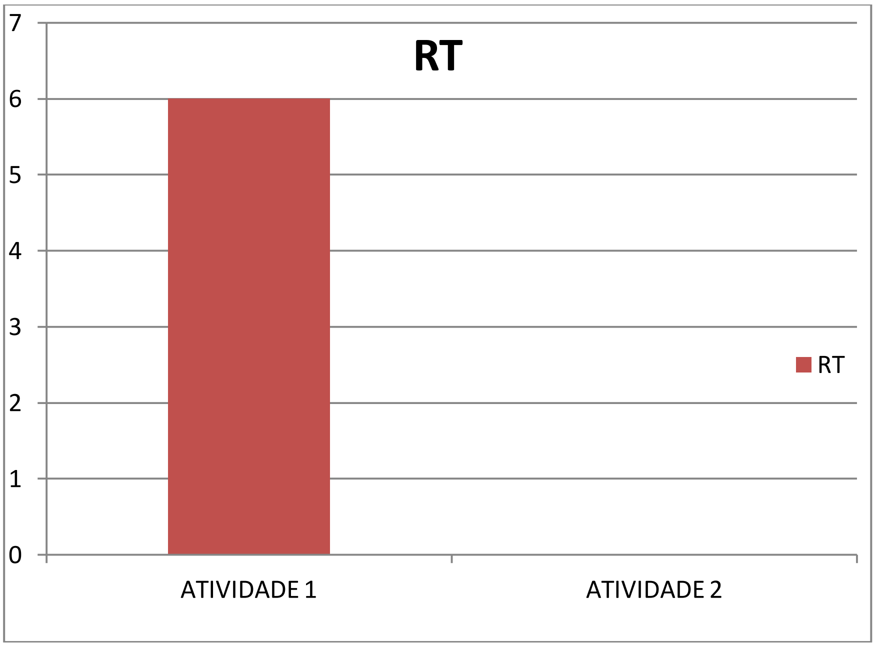


Figura 47 - “Provas de RT na Sessão 5”.

8 CONSIDERAÇÕES SOBRE A EVOLUÇÃO DOS ALUNOS APÓS A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Ao analisarmos o desempenho dos alunos nessas sessões, consideramos que houve alguma evolução entre os tipos de provas categorizados por Balacheff (1988), assim como as provas categorizadas por Freitas (1993). Muitas vezes, no decorrer de suas atividades, os alunos evoluíam na elaboração de uma prova, mas não chegavam a atingir um nível mais elevado. No entanto, para Balacheff (1988), esta produção mostra indícios de uma demonstração matemática.

Em relação à aprendizagem, para Brousseau (1988), é necessário que haja interação do aluno com o meio, fonte de desequilíbrios e contradições, ao qual ele deve buscar adaptar-se. É nesse processo de adaptação, de busca de novas respostas para os desafios encontrados, que ele produz novos conhecimentos que confirmam o seu aprendizado.

Essas ideias foram confirmadas a partir de nossa sequência didática, logo na 1ª SESSÃO. Durante a aplicação das atividades, observamos que os alunos mostraram-se muito mais interessados do que nas aulas habituais. Eles ficavam ansiosos para descobrir quais eram os problemas da próxima SESSÃO, como também não se limitavam ao tempo de aplicação das atividades. Éramos questionados nos corredores do colégio a respeito dos desafios e das novas conjecturas que eles elaboravam.

Ao institucionalizarmos os conteúdos das sessões, apresentávamos a solução por meio de diálogos e questionamentos, os quais culminavam na apresentação da solução em linguagem algébrica e, a partir das novas sessões, observávamos que os alunos reinvestiam esses conhecimentos nas novas atividades por nós elaboradas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma parte desta pesquisa consistiu na realização de um breve estudo da história das demonstrações matemáticas, fazendo um recorte na evolução das validações algébricas e aritméticas ao longo dos séculos, e do papel desempenhado pela demonstração e pelo método dedutivo nesse percurso, chegando às pesquisas recentes em Educação Matemática. Nesse estudo, percebemos que o enfrentamento de situações-problema envolvendo conjecturas e provas permeou o desenvolvimento da Matemática desde tempos remotos até nossos dias.

A análise de pesquisas recentes de Educação Matemática no que diz respeito às demonstrações, como a realizada por Pietropaulo (2009), mostra que a prova pode ser vista como "conteúdo" e também como recurso pedagógico bastante rico para o trabalho em sala de aula. No entanto, para isso é preciso que se admita um sentido maior para essa palavra e não a simples reprodução – pelo aluno e professor – das provas presentes nos livros. Pietropaulo (2009) propõe "fazer matemática" em sala de aula, envolvendo experimentações, conjecturas e argumentações. Ele sugere ainda que a demonstração não só valide um teorema, mas também explique as etapas envolvidas no processo - se o processo de demonstração valida o teorema, é o processo de explicação que esclarece para os alunos o porquê desse fato. Nesse sentido, há pesquisadores, como Ballacheff (1998), que consideram a demonstração um instrumento de negociação da verdade em sala de aula, um instrumento de validação social apoiado nos resultados experimentais dos alunos, resultados esses que lhes são devolvidos para que apresentem a sua validação. Healy e Hoyles (2000) também realizaram estudos sobre o tema concluindo que o empirismo é muito forte e que os alunos possuem muitas dificuldades na elaboração de provas mais formais. Um resultado importante que encontraram foi o de que tais dificuldades não se devem somente à competência dos alunos, mas também a fatores curriculares, pois as demonstrações matemáticas são pouco trabalhadas em sala de aula.

A partir da análise dos trabalhos anteriormente mencionados, desenvolvemos esta pesquisa que buscou identificar tipos e níveis de provas produzidos, bem como investigar possibilidades de ampliação da aprendizagem, tanto no que concerne ao uso da linguagem matemática, quanto ao nível de generalidade envolvido na produção de provas.

Ela foi estruturada metodologicamente na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988). Escolheu-se esse referencial devido ao fato de se tratar de um método que dá importância tanto à dimensão teórica quanto ao experimental da pesquisa, possibilitando meios que conduzam à aprendizagem. Nossa escolha metodológica revelou-se adequada também pelo fato de proporcionar ao pesquisador possibilidades de ampliar ou reduzir as atividades previstas na sequência didática após confrontar os dados obtidos aos previstos na análise *a priori*. Desse modo, diferentemente de outras metodologias de pesquisa, essa validação interna permitiu que algumas retomadas fossem feitas.

No primeiro momento da Engenharia, referente às análises prévias, além dos estudos mencionados acima, realizamos uma investigação em livros didáticos de tipos de problemas que apresentam conjecturas no Conjunto dos Números Inteiros. Observamos que esses problemas aparecem nos conteúdos de Paridade, Divisibilidade, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica e outros tipos de regularidades em sequências numéricas. O objetivo dessas análises foi fornecer subsídios para a elaboração da nossa sequência didática. Tal sequência foi construída a fim de verificar como os alunos interpretam as conjecturas apresentadas em forma de problemas, no Conjunto dos Números Inteiros, e propor a aprendizagem das provas matemáticas. As atividades envolvendo conjecturas foram elaboradas a partir dos assuntos por nós selecionados neste conjunto e do desenvolvimento da análise *a priori*. Tal análise *a priori* foi elaborada com base no modelo de Tipologia de Provas de Ballacheff (1988) e dos resultados da pesquisa realizada por Freitas (1993), já que nossa sequência didática visou a diagnosticar níveis de provas que os alunos poderiam produzir, bem como verificar a ocorrência de alguma aprendizagem dos mesmos, por meio da evolução de um nível de prova para outro.

Freitas (2007) observou que, de modo geral, diante de problemas semelhantes aos desta nossa pesquisa, os alunos iniciam a resolução operando com registros numéricos. Após alguma descoberta, tentam prová-la por meio de uma validação mais elaborada, seja em linguagem natural ou usando simbologia algébrica. É o que constatamos no início da aplicação da sequência, na avaliação da 1ª SESSÃO**,** na qual pudemos identificar que o *empirismo ingênuo* foi o tipo de prova que mais apareceu nas primeiras validações produzidas pelos alunos. Verificamos ainda que a ausência de incógnitas nos enunciados favoreceu o aparecimento de provas do *tipo empirismo ingênuo*, enquanto que enunciados contendo letras para representar números desconhecidos induziu os alunos a produzirem maior quantidade de provas algébricas. Observamos também que a quantidade de números influencia nos tipos de provas desenvolvidos pelos alunos, favorecendo a produção de provas conceituais. No entanto, a quantidade de variáveis, pode inferir no aparecimento de provas algébricas. Na 3ª SESSÃO, constatou-se que a presença de letras nos enunciados, para representar números induz à produção de provas algébricas pelos alunos.

Observamos que questões atípicas, ou as pouco usuais, podem provocar o envolvimento dos alunos, gerando fases adidáticas. Um exemplo disso foi o problema apresentado na 2ª SESSÃO**,** assim como o desafio da 3ª SESSÃO, que teve como proposta o trabalho com números triangulares em que a maioria dos alunos não apresentou familiaridade com esses números, ocasionando trocas de conhecimento entre os pares e desencadeando a aprendizagem do conhecimento previsto. Além de verificarmos também que os trabalhos em grupo permitiram a expressão da oralidade e da escrita, troca de informações, discussão sobre os procedimentos e escolhas de estratégias, levantando conjecturas e hipóteses estimulando a elaboração de validações até se obter uma conclusão.

Portanto, nas investigações matemáticas há possibilidade da construção de uma nova dinâmica e atitude de alunos e professores em sala de aula. Sobretudo, a utilização de tarefas exploratório-investigativas no ensino de álgebra contribui de forma expressiva no desenvolvimento do pensamento algébrico e da linguagem algébrica dos alunos. Essa proposta busca mobilizar o aluno para a construção de conjecturas, bem como para testá-las e validá-las (ou refutá-las, se necessário). Essas ideias vão ao encontro da proposta de Lakatos.

Já em nosso trabalho nas 2ª, 3ª, 4ª e 5ª sessões, pudemos observar que a exploração de sequências com números figurados é uma excelente atividade de investigação matemática, portanto, com o estudo dos números figurados podemos ter o aparecimento da generalização, da formalização, da abstração, da comunicação de ideias matemáticas, da modelagem e da demonstração, as quais necessitam ser evidenciadas para que o aluno se conscientize de sua aprendizagem. Deste modo, acreditamos que a exploração dos números figurados pode ser levada para a sala de aula desde as séries iniciais do ensino fundamental.

Quanto aos tipos de prova produzidos pelos alunos, foi possível identificar alguns da tipologia de provas proposta por Balacheff (1988), bem como outros, encontradas no trabalho de Freitas (1993), como os que fazem uso da linguagem algébrica ou que utilizam outros tipos de registros. No entanto, após as primeiras institucionalizações feitas, ao perceberem a potencialidade do uso adequado de registros algébricos para modelarem problemas dessa natureza, os alunos puderam restringir a utilização de registros numéricos. Acreditamos que essa ocorrência pode se caracterizar como um fator positivo para o aprendizado de técnicas de modelagem algébrica. Entretanto, é necessário que o professor insista em que a utilização de contraexemplos é um importante instrumento na produção de provas. Não o fazendo, os alunos poderão abandonar quase por completo esse tipo de recurso.

Ainda com relação à aprendizagem, presenciamos, durante o desenvolvimento das atividades propostas, grande envolvimento dos alunos na busca de soluções em relação às situações adidáticas que, com certeza, colaboram para a construção de conhecimentos relativos ao objeto de pesquisa deste trabalho. Com isso, pudemos observar a eficiência da produção de sequência didática visando à aprendizagem de demonstrações matemáticas a partir de conjecturas.

Acreditamos na importância das atividades didáticas com números para a ampliação da Ciência Matemática e podemos observar que as conjecturas contribuem, com certeza, para a formação do pensamento matemático do aluno. Assim, como confirmamos em nossa pesquisa, a exploração de conjecturas pode ser um recurso didático importante, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, pois as mesmas se mostraram eficientes para aumentar o interesse e a compreensão dos alunos sobre conteúdos algébricos de elevado nível de abstração.

Portanto, parece importante para o desenvolvimento de um currículo escolar que se tenha isso como meta, como objetivo. As sequências didáticas organizadas para tanto são fundamentais e, sobretudo, a investigação numérica contribui para o desenvolvimento de diversas capacidades matemáticas, dentre elas a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações. Contudo, percebemos a necessidade de dar mais ênfase às atividades que enfoquem a exploração de sequências numéricas, pois o descobrimento de relações numéricas também pode auxiliar no desenvolvimento da noção de variável.

Os estudos teóricos e as experimentações realizadas indicam que a devolução de situações-problema contendo conjecturas, no Conjunto dos Números Inteiros, pode ser facilmente realizada com alunos do Ensino Médio não só da rede de escolas particulares, como também na rede das escolas públicas.

Assim, o envolvimento dos alunos na busca de soluções para conjecturas desse tipo pode ser caracterizado como momentos de estudo fundamentais para a aprendizagem matemática, ao lado da utilização do Conjunto dos Números Inteiros como ferramenta de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ARSAC, G. L'origine de la démonstration: essai d'epistemologie didactique**. Récherches em Didactique des Mathématiques**, v. 8, n. 3, p. , 1987.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathémaques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

______..Ingénierie didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-307, 1990.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.** Thèse. Grenoble: Université J. Fourier Grenoble, 1988.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental.** 2. ed. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2005.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

______. ______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + ensino médio**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC/SEMTEC, 2002.

______. ______. Secretaria de Educação Fundamental. **PNLEM/2006**: catálogo do programa nacional do livro para o ensino médio. Brasília, DF: MEC/SEF, 2006.

BRAUN, D. O enigma impregnado do humano. Carta na Escola, São Paulo, n. 14, mar. 2007.

BROUSSEAU, G. Fondements et methodes de la didactique des mathématiques. ***Recherches en Didactiques des Mathématiques***, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BUENO, F. S. **Dicionário escolar da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: MEC/FAE, 1986.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiqques au collège**.** Première partie: l'évolution de la transposition didactique. **Petit x,** Grenoble, n. 5, p. 51-94, 1985.

COUTINHO, s. c. Números inteiros e criptografia. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura, 2005. (Série de Computação e Matemática).

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio da edição brasileira. In: D' AMORE, B. Epistemologia e didática da matemática. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A experiência matemática. Rio de Janeiro: Francisco Alves Editora, 1985.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. Bolema, Rio Claro, ano 15, n. 18, 2002.

EVES, H. **Introdução à historia da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Ed. UNICAMP, 1995.

FREITAS, J. L. M. **______.** A demonstração matemática: origem e evolução**. Revista do Lema**, Campo Grande, MS, 1994.

______. A evolução do pensamento matemático. **Integração - Estudos em Matemática, Estatística, Matemática Aplicada e Computacional**, Campo Grande, MS, n. 3, 1986. Mimeografado.

______. L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des élèves de collège et lycée. Thèse. Montpellier: Université Montpellier II, 1993.

______. Registros de representação na produção de provas na passagem da aritmética para a álgebra**.** In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**. Campinas: Papirus, 2007.

______. Teoria das situações didáticas**.** In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

GALLARDO, A.; ROJANO, T. Areas de dificuldades en la aquisiocón del lenguaje aritmetico-algebraico. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 2, p. 155-188, 1988.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**.** 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

GARNICA, A. V. M. Da literatura sobre a prova rigorosa em educação matemática: um levantamento**. Quadrante**, v. 5, n. 1, p. 29-60, 1996.

HANNA, G.; JAHNKE, H. N. Proof and proving. In: BISHOP, A. J. et al. **International handbook of mathematics education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.

HEALY, L.; HOYLES, C**.** A study of proof conceptions in algebra. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n. 4, p. 396-428, 2000.

HEFEZ, A. **Elementos da aritmética**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2005. (Coleção Textos Universitários).

IMENES, L. M. P. **Microdicionário de matemática.** São Paulo: Scipione, 2007.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático:** provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LEANDRO, E. J. **Um panorama de argumentação de alunos da educação básica:** o caso do fatorial. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática**.** In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

MANSUTTI, M. A. Concepção e produção de materiais instrucionais em educação matemática. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo: SBEM-SP, ano 1, n.1, p.17-29, 1993.

MARGOLINAS, C. **De l'importance du vrai et du faux**. Grenoble; La Pensée Sauvage Editions, 1993.

NCTM-NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics.** Reston, VA: Autor, Local: editora, 1989.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PIETROPAULO, R. C. Demonstração e provas e educação matemática**:** uma análise de pesquisa recente. In: MARANHÃO, C. (Org.). **Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio**. São Paulo: Musa Editora, 2009.

______. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2005.

PONTE, J. P. **Números e algebra no currículo escolar.** Lisboa: Centro de Investigação em Educação/Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2000.

PONTE, J. P.; BROCARDO J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; SANTOS, L. Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. ***Quadrante***, Lisboa: APM, n. 7, p. 3-32, 1996. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/curso_rio_claro.htm> Acesso em: 11 ago. 2008.

RONAN, C. A. **História ilustrada da ciência.** São Paulo: Círculo do Livro, 1987.

ROXO, E. **Curso de mathemática elementar.** Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1930.

VERGNAUD, G. Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre**.** In: LABORDE, C. (Ed.), **Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique**. Paris: La Pensée Sauvage, 1988. p. 189-199.

STEWART, I. **Os problemas da matemática**. Lisboa: Editora Gradiva, 1995.

APÊNDICES

APÊNDICE A

ALUNO: ____

SESSÃO 1.

Atividade 1. Observe as afirmações abaixo. Verifique se são verdadeiras e apresente justificativas matemáticas para cada uma das respostas.

1. A soma de dois números inteiros pares é sempre par.

2. A soma de três números inteiros pares é sempre par.

3. A soma de **n** números inteiros pares é sempre um número par.

ALUNO: ____

SESSÃO 1.

Atividade 2. Resolva os problemas abaixo e apresente justificativa matemática para cada uma de suas respostas.

1. A soma de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de três?

2. A soma de quatro números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de quatro?

3. A soma de cinco números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de cinco?

ALUNO: ____

SESSÃO 1.

DESAFIOS: Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa matemática para cada resposta.

- A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre um número ímpar.

- A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é **par**.

- A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é **ímpar**.

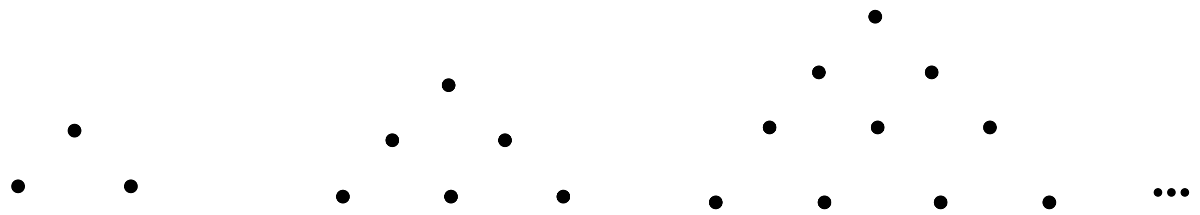
APÊNDICE B

ALUNO: ____

SESSÃO 2.

Atividade 1.

- (PUC – SP – ADAPTADA) Os números 3, 6, 10, 15, ... chamam-se números triangulares pois podem ser representados pelas figuras:



A soma de dois termos consecutivos da seqüência formada pelos números triangulares resulta sempre um quadrado perfeito?

APÊNDICE C

ALUNO: ____

SESSÃO 4

Atividade 1

01. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

02. Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.

03. Considere quatro números inteiros consecutivos. Nesse caso, o produto do segundo número pelo terceiro é sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades?

DESAFIO: Dados quatro números inteiros consecutivos, pergunta-se:

a) Se **a** representa o produto do segundo número pelo terceiro e **P** representa o produto dos quatro números consecutivos é possível exprimir **P** em função de **a** ?

b) O produto de quatro números inteiros consecutivos, aumentado de uma unidade é sempre igual ao quadrado de um número inteiro?

APÊNDICE D – Título.

ALUNO: ____

SESSÃO 4

Atividade 1

01. É possível encontrar três números inteiros consecutivos de tal modo que o quadrado do médio seja igual ao produto dos outros dois?

02. Um número ímpar elevado ao quadrado, subtraído de uma unidade é sempre múltiplo de quatro? E de oito? Justifique sua resposta.

03. Considere quatro números inteiros consecutivos. Nesse caso, o produto do segundo número pelo terceiro é sempre igual ao produto do primeiro pelo último acrescentado de duas unidades?

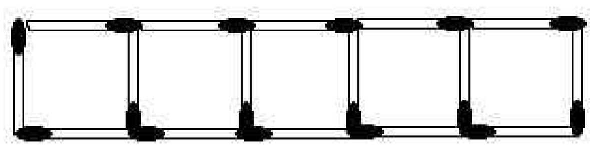
APÊNDICE E – Título.

ALUNO: ____

SESSÃO 5

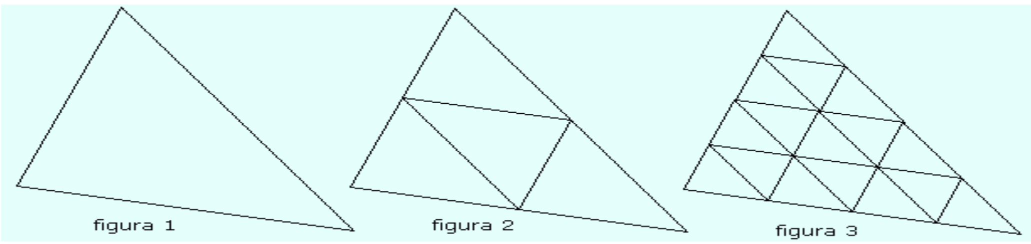
Atividades

1) Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra o desenho a seguir.



Quantos palitos são necessários para fazer 6 quadrados? E para fazer **n** quadrados?

2) <u>(BACEN)</u> Observe a seqüência de figuras abaixo (figura 1, figura 2, figura 3, e assim por diante).



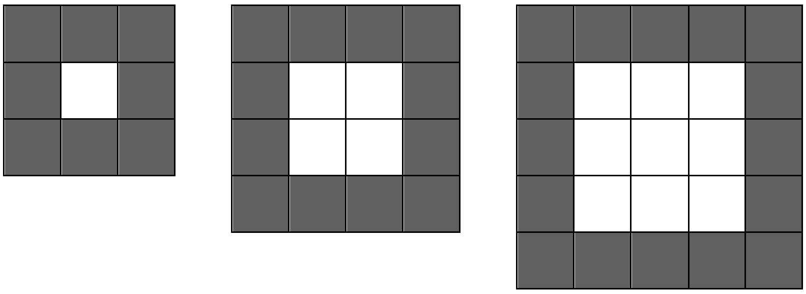
Qual a quantidade dos menores triângulos da figura 4?

Qual a quantidade dos menores triângulos da figura **n**?

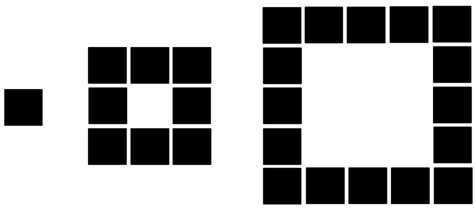
ALUNO : ____

SESSÃO 5

3. Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente, como indica a figura. Nos dois primeiros elementos da seqüência apresentam 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se numa seqüência de mosaicos formados de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



4. Usando pastilhas de cerâmica preta na forma de quadradinhos foi composta uma decoração numa parede, mostrada parcialmente abaixo:



Quantas pastilhas foram empregadas em toda a decoração considerando-se que na última peça montada foram utilizadas 40 pastilhas?

Na seqüência apresentada acima é apresentada uma seqüência até ordem 3. Se essa seqüência fosse até a ordem **n** quantas pastilhas seriam utilizadas?