UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE A NOÇÃO DE LIMITE DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS INFINITAS COM ALUNOS DE ENSINO MÉDIO

Campo Grande - MS
2011

CAMILA DE OLIVEIRA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE A NOÇÃO DE LIMITE DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS INFINITAS COM ALUNOS DE ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas.

Campo Grande - MS

2011

CAMILA DE OLIVEIRA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE A NOÇÃO DE LIMITE DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS INFINITAS COM ALUNOS DE ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Aprovado em 16 de dezembro de 2011

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas – UFMS
1° Examinador/ Presidente

____

Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva – PUC/SP
2° Examinador

____

Profa. Dra. Marilena Bittar – UFMS
3° Examinador

____

Profa. Dra. Suely Scherer – UFMS
4° Examinador

DEDICATÓRIA

À minha mãe; aos meus tios
Rosália e Hélio e ao Ícaro;
pelo amor incondicional

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo amparo em todos os momentos em que o clamei, por me fortalecer nesta jornada e me conceder a graça de conquistar mais essa vitória em minha vida.

À minha família: minha mãe, pela dedicação incessante e por não medir esforços para que eu pudesse chegar até aqui. Aos meus tios Rosália e Hélio, pelo apoio independentemente das minhas razões. Aos meus avós, tios, irmãos e primos, pela compreensão nos diversos momentos em que não estive presente.

Ao Ícaro, pela paciência e amor redobrados neste período. Por ser o melhor presente que a Matemática me trouxe.

Ao prof. José Luiz, por ser um mestre para mim não só na matemática, mas na vida. Por abraçar esse trabalho e me apoiar na condução desta pesquisa.

À prof. Marilena, por ser uma das principais responsáveis por minha formação acadêmica e por contribuir significativamente na construção desta pesquisa.

À prof. Suely, pelas valiosas contribuições para este trabalho e dedicação durante as disciplinas ministradas no mestrado.

Ao professor Benedito, por aceitar fazer parte deste momento e pela leitura minuciosa desta dissertação.

Aos professores Márcio e Luiz Carlos pelos toques especiais dados a esta pesquisa durante as disciplinas de Seminário de pesquisa I e II.

Aos amigos Álvaro e Suellen, por compartilharem este momento comigo, por sempre estarem presentes e não negarem ajuda quando mais precisei.

À turma de 2010, pelos momentos de estudo e divertimento e por ter sido fonte de amizades inestimáveis.

À Capes, pelo apoio financeiro que viabilizou esta pesquisa e pelo incentivo ao conhecimento.

Por fim, a todos que também contribuíram diretamente e indiretamente para essa pesquisa: Marcos Antonio Celestino, por compartilhar valiosos materiais e a EAD, pela compreensão com a minha ausência para a conclusão desta pesquisa.

RESUMO

O principal objetivo desta pesquisa é analisar a construção da noção de limite por alunos do ensino médio, num estudo de progressões geométricas infinitas. Como suporte teórico utilizamos a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau, ao considerarmos a relação didática entre aluno e o saber num meio previamente organizado pelo professor, e a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por Vergnaud, para compreendermos a atividade cognitiva dos sujeitos em situação de aprendizagem. Também fundamentamos esse estudo em pesquisas que versam sobre dificuldades e obstáculos concernentes à noção de limite, bem como ao campo algébrico em que se insere o conteúdo de progressões geométricas infinitas. Como meio de materializar a pesquisa elaboramos e aplicamos uma sequência didática, segundo os princípios da Engenharia Didática. Os sujeitos de pesquisa foram alunos voluntários do terceiro ano do ensino médio de uma escola estadual da cidade de Campo Grande-MS. A dinâmica das aplicações constituiu-se de trabalhos em grupos, cujos dados foram coletados a partir dos protocolos contendo as produções dos alunos e das transcrições de suas falas, obtidas com uso de aparelhos gravadores. Esses elementos nos possibilitaram ter acesso às produções e discussões dos alunos, para identificar esquemas mobilizados pelos mesmos durante as resoluções das tarefas. A análise dos dados evidenciou que os alunos iniciaram o processo de construção da noção de limite manifestando uma visão intuitiva diante das situações que envolvem a noção de infinito e limite. No entanto, eles passam a mobilizar ações que evidenciam a presença do infinito potencial e ao final da experimentação, foram identificados elementos indicando que os alunos se aproximaram da noção de limite atual. Ao tomarem controle das situações com o uso da noção de limite, os alunos produzem diferentes significados ao lidar com esse conceito, associando-o ao termo “barreira” ou “ser limitado”. No estudo da soma dos termos de progressões geométricas infinitas, dificuldades em álgebra e a noção de infinito mostraram-se entraves para a passagem ao limite.

Palavras-chave: Progressões Geométricas Infinitas. Noção de Limite. Infinito Potencial. Ensino Médio.

ABSTRACT

The main objective of this research is to analyze the construction of the limit notion by high school students in a study of infinite geometrics progressions. As theoretical support for this study we used The Theory of Didactic Situations, proposed by Brousseau, when considering the relationship between students and the knowledge process through a previously organized environment by the teacher and the Conceptual Fields Theory, developed by Vergnaud, to understand the cognitive activity of our subjects in the learning situation . We also fundament this research in studies that deal with difficulties and obstacles concerning the notion of limit, as well as the algebraic field in which the contents of infinite geometric progression are insert. As a means of materializing the research we developed and implemented an instructional sequence, according to the principles of Didactic Engineering. Our research subjects were volunteers students of the third year of a state high school in the city of Campo Grande-MS. The applications dynamics consisted of work group, and data were collected from the protocols containing the productions of the students and transcripts of their speeches, obtained with the use of a recording device. These elements enabled us to have access to student productions and discussions to identify schemes mobilized by them for the resolutions of the tasks. Data analysis showed that the students began the process of construction of the limit notion, expressing an intuitive view when faced with situations involving the notion of infinity and limit. However, they star to mobilize actions that demonstrate the presence of the infinite potential end at the end of the trial, elements indicating that students approached the current notion of limit have been identified. By taking control of situations with the use of the limit notion, students produce different meanings to deal with this concept, associating it with terms "barrier" or "being limited." In the study for the sum of the terms of infinite geometric progressions, the difficulties in algebra and the notion of the infinite proved to be obstacles to the passage to the limit.

Keywords: Infinite Geometric Progressions. Limit Notion. Infinite Potential. High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente estudo tem como temática o ensino e aprendizagem de algumas noções fundamentais do Cálculo. Se de um lado, muitos pesquisadores têm se empenhado na investigação de conceitos desse campo, com o intuito de analisar dificuldades e obstáculos inerentes à aprendizagem de alunos no Ensino Superior, por outro, a inserção dos conceitos de limite e derivada na Educação Básica tem sido alvo de discussão por diversos educadores e pesquisadores em Educação Matemática.

Estas considerações nos remetem ao campo no qual esta pesquisa se insere, por ser este um dos pontos de partida para que possamos refletir sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo na Educação Básica. Para tanto, voltamos nosso foco à investigação da **noção** de limite de funções no Ensino Médio, uma vez que consideramo-la essencial para fundamentar algumas situações matemáticas que sobressaem neste nível de escolaridade. Muitos são os conteúdos nos quais este conceito está inserido, e esta pesquisa visa analisar a construção da noção de limite por alunos num estudo de progressões geométricas infinitas, no qual não é trabalhada a definição estática de limite, bem como suas propriedades.

Da mesma forma que os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 1998) reforçam que o ensino da matemática deve resgatar seu caráter de ciência, acreditamos que este deve, sobretudo, possibilitar a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos sem privar o aluno de conhecimentos que valorizem sua intuição e o raciocínio matemático.

Nesta perspectiva, detalhamos a seguir o processo de construção e a problemática que envolve nossa investigação.

1.1 GÊNESE E PROBLEMÁTICA DESTA PESQUISA

1.1.1 Trajetória inicial

As primeiras indagações que me motivaram a buscar respostas para o ensino da matemática, o qual havia vivenciado na Educação Básica, surgiram quando cursei Licenciatura em Matemática. Lembro-me que no Ensino Médio não estava preparada para o saber-pensar matemático; aliás, um dos conteúdos que tinha pouco significado para mim era o das sequências numéricas, devido ao mesmo me forçar a raciocinar sobre algo que não me era trivial, o infinito.

Foi na graduação que comecei a perceber o quanto a matemática que eu conhecia não representava nem um pouco de tudo que esta ciência esconde em suas entrelinhas. Passei a questionar-me sobre a forma como se ensinava esta disciplina nas escolas, a refletir sobre a transposição do conhecimento matemático; o elo perdido entre o saber acadêmico e aquele ensinado nas escolas.

Foi a partir da seguinte indagação: *"1 é igual à 0,99999...?"*; proposta por um professor na universidade, que me dei conta do quanto não nos questionamos sobre os conteúdos que estudamos. Assim, com o objetivo de compreender as indagações surgidas no decorrer do curso, procurei realizar um trabalho de monografia que tivesse como tema principal o Cálculo, disciplina com a qual sempre me identifiquei durante a graduação.

Relembrando as dificuldades enfrentadas por colegas de curso com relação ao conteúdo de sequências numéricas, optei por efetuar uma investigação sobre a convergência das mesmas com alunos do curso de licenciatura em Matemática, pois acredito que uma das possíveis dificuldades nesse conteúdo deriva da equivocada formulação do conceito de limite e algumas noções do cálculo infinitesimal; equívocos que pude observar quando meus colegas e eu estudávamos em grupo.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho dei continuidade à investigação em torno deste tema, porém, sob um novo enfoque. Aprovada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática minha intenção de pesquisa centrava-se em resgatar a noção de função e suas peculiaridades muitas vezes esquecidas no estudo de sequências numéricas. Contudo, alguns recortes foram feitos e começamos[1] a repensar sobre qual abordagem poderia ser aplicada para que os alunos fossem capazes de dar significado ao tema estudado, bem como para que pudéssemos resgatar ideias fundamentais da matemática, as quais acreditamos serem importantes para instigar a curiosidade e o espírito de investigação nos alunos. Diante disso, decidimos então focar nosso **objeto de pesquisa na aprendizagem da noção de limite por meio do estudo de progressões geométricas infinitas**. Essa decisão se firmou devido a alguns fatores que consideramos relevantes, razão pela qual os apresentaremos a seguir.

[1] Passamos a usar o plural, pois a pesquisa é realizada junto ao professor orientador.

1.1.2 Algumas considerações sobre a escolha do objeto

Primeiramente, cabe ressaltar que, para esse estudo, tratamos a **noção de limite** de forma intuitiva, o que nos permite analisar o comportamento dos termos de uma sequência (x_n), à medida que seus índices crescem infinitamente. Isto é, quando n tende ao infinito os termos de x_n tendem a ficar tão próximos quanto se queira do número real *a, limite* da sequência. Para institucionalizar esta noção, fazemos uso do seguinte significante[2]: $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. No entanto, não podemos fazer menção à noção de limite sem considerar a análise de seu desenvolvimento na história da matemática, uma vez que resgatar aspectos da história, como é o caso dos paradoxos de Zenão[3] e as dificuldades que os gregos antigos tinham ao lidar com o infinito, tornam-se essenciais tanto para o trabalho didático a ser considerado quanto à compreensão do campo conceitual no qual a noção de limite está inserida.

De acordo com Cornu (1983, p.54) "a história do limite está ligada à história do infinito [...] e não se pode conceber a noção de limite sem uma concepção adequada do infinito". É nesse sentido que consideramos para este estudo a imbricação existente entre o **infinito potencial e atual** na aprendizagem da noção de limite, uma vez que o infinito potencial ou dinâmico é visto como um processo, que nunca acaba, ao contrário do infinito atual que está voltado a uma noção estática, "uma totalidade completa", como explicita Ortiz (1994). A noção do infinito potencial tem sua base apoiada na intuição, e isto permite um estudo que explore as concepções prévias dos alunos frente a situações que lidam com esses conceitos. Deste modo, podemos nos direcionar para o infinito atual, no qual é possível compreender alguns processos matemáticos que muitas vezes não correspondem a nossa intuição. Porém, é o conflito existente entre a intuição e o rigor matemático que consiste num desafio para a aprendizagem da noção de limite. Em sua tese, Reis (2001) busca compreender a relação entre intuição e rigor que se manifesta num curso universitário. Compartilhamos da ideia do autor, quando afirma que intuição e rigor caminham juntos e que o nível entre eles deve variar conforme o contexto no qual um conceito esteja inserido, o que nos leva a considerar o tratamento dado ao limite em diferentes níveis de escolaridade.

---

[2] "São as formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento" (VERGNAUD,1996, p.166).
[3] Pensador grego que pode ter sido o primeiro a problematizar a noção de limite na história da Matemática, conforme explicita Celestino (2008, p.79).

Ao voltarmos nossa atenção para algumas pesquisas desenvolvidas em torno do ensino e a aprendizagem da noção de limite, observamos que naquelas realizadas fora do Brasil, a noção de limite é abordada tanto no ensino básico quanto no ensino superior. Um exemplo é a pesquisa de Cornu (1983), na França, cuja investigação se dá com alunos de "Seconde"[4] e "1ère A"[5] e de Sierpinska (1985), que detecta dificuldades e obstáculos em relação a este conceito no nível universitário, levando em conta o limite de sucessões numéricas. Contudo, no Brasil, as pesquisas sobre a noção de limite se restringem quase que exclusivamente ao ensino superior, nível no qual os alunos são introduzidos ao estudo deste conceito. Em tais pesquisas, Nunes (2001), Santos (2005) e Celestino (2008) versam sobre a convergência de sequências numéricas.

Santos (2005) ressalta que o ensino do Cálculo enfatiza apenas as técnicas e não os significados dos conceitos trabalhados, tornando evidentes as dificuldades dos alunos no estudo do tema. Isso corrobora com as dificuldades no aprendizado da noção de limite listadas por Cornu (1983), quando o mesmo aponta que um dos fatores que causam tais dificuldades, está no fato de os alunos estarem acostumados apenas a lidar com cálculos algébricos. Isso por que o trabalho com noções que quase não são discutidas no ensino básico, como é o caso do infinito, é uma novidade para eles.

Esta constatação leva-nos a refletir sobre os conhecimentos de nossos alunos quando chegam à universidade, bem como as dificuldades que apresentam acerca de noções fundamentais do Cálculo; por isso, acreditamos que este contexto poderia ser repensado em termos das escolhas metodológicas na educação básica.

Alguns desses conceitos são abordados superficialmente na educação básica apenas por meio de um modelo algébrico, como é o caso das dízimas periódicas. Ao determinar a fração geratriz correspondente a uma dada representação decimal infinita, realiza-se a mesma operação usada ao se trabalhar com grandezas finitas, o que acaba desconsiderando a especificidade do resultado obtido, como identifica Monteiro (2003). Acreditamos que esse contexto poderia ser mais bem trabalhado, já que estão inerentes a ele tanto as noções de infinito quanto a ideia de limite, as quais requerem uma exploração que deve ir além de uma mera aplicação de técnicas e fórmulas.

Tais considerações indicam a necessidade de um estudo que tenha como foco a noção de limite no contexto da educação básica brasileira. Entre outros autores que refletem sobre a

---

[4] Correspondente à primeira série do ensino médio brasileiro
[5] Correspondente à segunda série do ensino médio brasileiro

abordagem do tema na educação básica está Ghedamsi (2003), que analisa o ensino da noção de limite em duas instituições. Conforme explicita Celestino (2008, p.61), Ghedamsi verifica que a noção de limite apresentada no Liceu[6] é utilizada como ferramenta e esta abordagem reduz o trabalho de conceitualização, já que é apenas na Universidade que a noção de limite passa a ser estudada sob condição de objeto[7].

As justificativas apresentadas e as dificuldades dos alunos com o tema sustentam nossa expectativa de analisar os conhecimentos que os alunos possuem e constroem diante de uma abordagem com situações-problema no ensino básico, sendo este o momento em que podem ter um primeiro contato com a noção de limite, ao lidar com o infinito.

Por esta razão, optamos por realizar nosso estudo no ensino médio, visto que é nele que se propõe, inicialmente, o estudo de sequências numéricas e, como ressalta Nunes (2001), não há como analisar uma sequência sem considerá-la em termos da convergência.

> Bour observa que é difícil isolar o conceito de seqüência da noção de seqüência convergente, na história da matemática. As sequências aritmética e geométrica são usadas desde a antigüidade grega, e a seqüência de Fibonacci mencionada no século XIII. Mas sua utilização era ligada aos cálculos de aproximações. A convergência de seqüência só será estudada no século XVIII e início do século XIX, e assim mesmo na convergência de séries. (NUNES, 2001, p.19)

Segundo o Guia do PNLD[8] 2012, os conceitos como limite e derivada são tópicos considerados opcionais no Ensino Médio. O mesmo guia ressalta que “isso não significa que não sejam feitas experiências de sua inclusão nos livros didáticos” (BRASIL, 2011, p.23). Contudo, o PNLD 2012 aponta que **o conceito de limite de uma sequência “é estudado em todas as coleções aprovadas, pelo menos no caso de uma progressão geométrica infinita**” (Id., Ibid., p. 23, grifo nosso), proposição que direciona nossa investigação em torno da noção de limite de PGs.

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio também apontam que:

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as idéias de convergência e infinito. Essas idéias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL a, 1998, p.122)

---

[6] Correspondente ao Ensino Médio Brasileiro

[7] Um conceito tem estatuto de ferramenta quando utilizamo-lo para resolver um problema, enquanto o conceito como condição de objeto é quando este passa a ser construído como saber científico, isto é, o conceito é objeto da aprendizagem. Esta denominação é usada conforme a dialética ferramenta-objeto proposta por Douady (1986)

[8] Parâmetro Nacional do Livro Didático

De acordo com essas premissas e, por acreditarmos que o ensino deve valorizar a essência do conhecimento matemático, assim como o professor deve buscar meios que levem os alunos à descoberta e construção de conceitos, levantamos o seguinte questionamento: **De que forma um estudo de progressões geométricas infinitas pode contribuir para que alunos do ensino médio construam a noção de limite?**

Ao direcionar nossa atenção a este estudo, acreditamos que ele possa contribuir para despertar a curiosidade dos alunos ao lidarem com quantidades infinitas, identificarem regularidades e buscarem significados para as expressões e fórmulas algébricas que permeiam por este conteúdo matemático, principalmente, no que tange à soma infinita dos termos de progressão geométrica (PG). Referimo-nos a esta soma, pois ela só é apresentada junto à noção de limite nos livros didáticos, ao final do estudo de PG, por meio de aplicações de fórmulas e sem uma exploração adequada dos conceitos envolvidos neste conteúdo.

Por essas razões, partimos da hipótese que o estudo gradativo das progressões geométricas infinitas pode contribuir para a construção da noção de limite, sendo a operação de passagem de limite realizada no estudo das somas infinitas dos termos de PG.

1.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Em busca de resposta(s) para nossa questão norteadora, e com base nessas justificativas, definimos como objetivo geral desta pesquisa: **Analisar a construção da noção de limite por alunos de ensino médio num estudo de progressões geométricas infinitas.**

Com a finalidade de atingir o objetivo geral, elencamos a seguir três objetivos específicos:

Inicialmente, pretendemos **analisar como os alunos mobilizam e constroem conhecimentos relacionados a noção de limite de progressões geométricas infinitas.**

O segundo objetivo específico consiste em **identificar e analisar dificuldades encontradas pelos alunos durante a elaboração e validação de conjecturas no estudo relativo à noção de limite.**

Por último, procuramos **analisar como os alunos tratam a operação de passagem ao limite no estudo da soma dos termos de progressões geométricas infinitas.**

Em síntese, neste capítulo foi apresentado o percurso de construção de nosso objeto de estudo, no qual ressaltamos a problemática envolvida e delineamos nossa questão de pesquisa, que deu origem aos objetivos listados acima. Descreveremos, a seguir, a estrutura dos próximos capítulos dessa investigação.

No Capítulo II apresentamos a fundamentação teórica e metodológica, em que descrevemos alguns elementos da Teoria das situações Didáticas e da Teoria dos Campos Conceituais e delineamos o caminho pelo qual conduzimos este estudo na busca de respostas para nosso problema de pesquisa, segundo a Metodologia de pesquisa: Engenharia Didática.

No capítulo III relatamos a gênese histórica de nosso objeto de estudo e alguns obstáculos epistemológicos presente no tema, assim como as dificuldades inerentes ao campo de estudo das progressões geométricas infinitas. Com o objetivo de situar nosso estudo nos preceitos da Análise Matemática, trazemos alguns elementos conceituais que o fundamentam. Em seguida, destacamos o conhecimento em estudo no ensino atual, apresentando uma análise de nosso tema em alguns livros didáticos aprovados no PNLEM 2009 e PNLD 2012. A partir das análises realizadas elencamos, ao final deste capítulo, teoremas-em-ação que julgamos possíveis de serem mobilizados pelos alunos durante a aplicação da sequência didática.

A apresentação de algumas escolhas metodológicas e a delimitação dos blocos e sessões de tarefas que propomos se encontram no capítulo IV.

No capítulo V é descrita a fase de concepção e análise *a priori* de nossa sequência didática, seguida de suas respectivas análises *a posteriori*, cujos dados foram obtidos durante a fase de experimentação.

Por fim, apresentamos no capítulo VI as Considerações Finais contendo os resultados da pesquisa e algumas indicações para continuidade de estudos sobre o tema.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Neste capítulo descrevemos alguns elementos da Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau (1996) e da Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud (1996) as quais embasam o desenvolvimento deste estudo. Também apresentamos o caminho percorrido, a partir da Engenharia Didática, nosso aporte metodológico para coleta e análise dos dados, em consonância com as fundamentações teóricas adotadas.

2.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Amparado nos estudos de Jean Piaget acerca do processo de aprendizagem que se dá pela assimilação e acomodação do conhecimento em jogo, Guy Brousseau desenvolve a Teoria das Situações Didáticas (TSD), inserida no quadro teórico da Didática da Matemática. Freitas (2008) explica que essa teoria nos possibilita compreender o fenômeno da aprendizagem da matemática, propondo o estudo de um trabalho didático, que promove a interação do aluno com o saber num meio previamente organizado pelo professor.

Ao considerar o saber matemático, Brousseau (1998) ressalta que a apresentação axiomática da matemática esconde o desenrolar da construção dos saberes e, em consequência disso, o processo de transposição didática desse saber para aquele a ser ensinado leva à perda, muitas vezes, de sua essência, já que as adaptações para que este possa ser apreendido e compreendido são totalmente necessárias. Um exemplo disso são as transformações e adaptações, que ocorrem com o saber acadêmico, das séries numéricas deste estudo para integrar os conteúdos e as aulas no ensino médio. Isso nos leva a compreender a relação existente entre o trabalho do matemático comparado ao trabalho do professor e do aluno na relação didática.

No que cabe ao trabalho do matemático, este elabora conjecturas, testa a validade de suas estratégias, enfim, percorre vários caminhos até chegar a uma solução do problema. Porém, todo esse trabalho torna-se oculto quando apresenta apenas o resultado final, pronto e acabado, isto é, sem falhas. Isso fica caracterizado, segundo Brousseau (1996), pelo fato de o matemático despersonalizar, descontextualizar e destemporalizar os resultados obtidos em suas descobertas.

Já o trabalho do professor deve ser o inverso daquele realizado pelo matemático pesquisador; ele deve recontextualizar e repersonalizar o saber em jogo, isto é, tornar clara aos alunos a comunicação desse saber, de forma a propiciar situações para que estes possam ser vistos como "pequenos cientistas". É desta forma que o trabalho do aluno consiste em re-descontextualizar e re-despersonalizar o conhecimento. O aluno dará passos semelhantes à atividade do cientista; elaborando conjecturas, construindo modelos e linguagens na tentativa de expressar o conhecimento que está envolvido na situação proposta.

Segundo Freitas (2008, p. 80), "o significado do saber matemático escolar, para o aluno, é fortemente influenciado pela forma didática pela qual o conteúdo lhe é apresentado". Assim, uma situação didática fica caracterizada quando há a intenção do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem de certo conhecimento a partir dos problemas que lhe são colocados, num meio previamente organizado no qual o aluno passa a agir. Esta interação nos permite considerar alguns elementos constituintes da situação didática, que são: a estruturação de um **meio**, a **contextualização e a devolução** do problema ao aluno, bem como as **situações adidáticas** e a situação de **institucionalização**.

2.1.1 Elementos de uma situação didática

a) A estruturação de um meio

Entendemos que a constituição do meio se dá pelo conjunto de situações provocadas pelo professor, de problemas que reforçam a relação do aluno com o conhecimento matemático e das interações, tanto do professor com aluno quanto entre alunos com o saber, segundo as regras do 'jogo'. Sumariamente, o meio é o sistema que vai permitir a ação e retroação do aluno quando este é colocado frente a situações com que não está acostumado a lidar, ou seja, ele vai lidar com desafios e verificar que muitas vezes o conhecimento que possui não é suficiente para encontrar a estratégia vencedora.

É nesse sentido que Brousseau (1996, p.49) afirma que "o aluno aprende adaptando-se a um *meio* que é fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, [...] Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de novas respostas, que são a prova da aprendizagem". Daí a importância do meio, uma vez que é a forma como ele é organizado que vai propiciar aos alunos que entrem em conflitos cognitivos e/ou sócio-cognitivos diante de um saber matemático que lhe é desconhecido. Nesta pesquisa, tentamos estruturar um meio em que as situações-problema têm como objetivo de provocar um desequilíbrio cognitivo nos alunos frente às conjecturas que são levantadas, para que as estratégias utilizadas possam ser analisadas e, depois, validadas. Aqui, o ambiente que é construído permite a interação entre os alunos e os erros cometidos serão instrumentos de sua própria aprendizagem. É desta forma que podemos analisar algumas contribuições de um estudo de progressões geométricas infinitas para a construção de um conhecimento novo pelo aluno: a noção de limite.

Portanto, para que possamos atingir nossos objetivos é necessário levar em conta três grandes conceitos que caracterizam este processo: Contextualização e devolução; Situações adidáticas; Situação de institucionalização. A seguir, descrevemos cada um deles:

b) Contextualização e Devolução

A contextualização e devolução de um problema são caracterizadas quando o professor organiza o conhecimento que estará em jogo na situação didática conforme suas intenções e necessidades e, desta forma, devolve ao aluno um problema. Assim, ao fazer o que se chama de *devolução* de um problema, ele cria condições para que seus alunos entrem no "jogo", isto é, lança um desafio aos mesmos, visando que esse desafio seja aceito por ele e que seja visto como se fosse seu, passando a agir sobre o conhecimento em estudo e, consequentemente, podendo passar por situações adidáticas.

c) Situações adidáticas

Na perspectiva de Freitas (2008), essas situações são caracterizadas quando o aluno trabalha de forma independente, sem o controle direto do professor sobre o saber. Assim, o professor organiza a situação e tem apenas o controle sobre o seu andamento, isto é, o professor deve instigar os alunos na busca de uma estratégia vencedora, de forma a devolver suas dúvidas e questionamentos com novas perguntas que vão permitir a reflexão sobre suas estratégias de base. Além disso, para que o professor elabore uma situação que possa ser vivida como adidática, ele deve fazer algumas previsões quanto às possíveis estratégias, e *a priori* descrever as escolhas a serem feitas em relação ao conteúdo visado.

Ao considerar o trabalho do aluno em relação ao saber matemático, Brousseau (1996) identifica a necessidade de diferenciar tipos de situações adidáticas, no intuito de analisar o entorno da aprendizagem dos conceitos matemáticos. Nesta pesquisa, nos detemos aos três tipos de situações adidáticas: ação, formulação e validação. Cabe-nos ressaltar que essas situações apresentam-se de forma interligada, podendo o aluno transitar constantemente entre uma e outra. Vejamos as características de cada uma delas:

A situação adidática de *ação* é de natureza mais operacional, caracterizada quando o aluno age sobre as situações propostas, empenhando-se para obter uma solução do problema. O aluno reflete e desenvolve estratégias de resolução após algumas tentativas. Nesta fase, espera-se que ele faça uso de seus procedimentos de base sobre o conteúdo em questão e, se esses não lhes forem satisfatórios, deverá ajustá-los ou mudar de estratégia.

Na situação de *formulação*, o aluno esboça alguns modelos teóricos numa linguagem que deve ser compreendida pelos seus receptores. Ele troca informações com colegas, discute e formula algumas afirmações, estrutura o que foi realizado na fase anterior, de modo a considerar novos mecanismos e levantar as conjecturas conforme o desenrolar do debate de estratégias e esquemas usados entre o 'proponente e o oponente' desse jogo.

Na situação de *validação* o aluno sente a necessidade de defender as afirmações levantadas de modo a mostrar a validade da estratégia que dominou. Apresenta alguns mecanismos de prova voltados diretamente ao problema dado quando se utiliza de razões para aceitar ou rejeitar uma proposição levantada, o que vai lhe exigir uma atitude de prova a fim de atestar a veracidade de sua opinião a respeito do modelo discutido.

d) Situação de Institucionalização

Por fim, temos a situação de *institucionalização.* Esta situação não é considerada adidática, já que aqui é necessário o parecer final do professor sobre o saber em jogo. Com os alunos, o professor realiza um retrospecto do que foi abordado, buscando sistematizar o que já foi formulado e validado por eles ao institucionalizá-lo conforme regras e saberes aceitos e validados pelas instituições acadêmicas.

Esta situação é fundamental na relação didática; caso o aluno trabalhasse o tempo todo de maneira autônoma, ficaria num ciclo vicioso sem saber ao certo se suas descobertas e formulações estariam corretas ou não se comparadas às resoluções dos colegas ou ao próprio saber institucionalizado culturalmente.

Cabe ressaltar que uma situação de institucionalização não se dá apenas ao final de uma sessão de ensino, pois com a intenção de verificar o que os alunos produziram e ainda precisam realizar ou aprender, o pesquisador realiza algumas intervenções de modo a aproximar os conhecimentos dos alunos do saber matemático em jogo, indicando procedimentos que poderiam ser reutilizados, conforme explicita Brousseau (2008, p. 31). Deste modo,

> A institucionalização acontece tanto em uma situação de ação – quando se reconhece o valor de um procedimento que se tornará um meio de referência – como em uma formulação. Há formulações que vão permanecer ("isso se diz assim", "vale a pena manter essas"). Nas situações de prova também: deve-se identificar, dentre as propriedades encontradas, quais serão mantidas. (BROUSSEAU, 2008, p.103)

Em nosso estudo são realizadas algumas institucionalizações, para que os alunos possam dar continuidade a atividade programada, permitindo-os utilizar os conhecimentos em outras situações, segundo os objetivos previstos. Uma das principais institucionalizações deste estudo é a abordagem da noção de limite como forma de validar e sistematizar o trabalho desenvolvido pelos alunos ao longo da sequência didática.

2.2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud (1996), caracterizada por ser uma teoria cognitivista, nos permite estudar filiações e rupturas entre os conhecimentos do sujeito-em-situação.

> O funcionamento cognitivo do sujeito em situação repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados; ao mesmo tempo, o sujeito incorpora novos aspectos a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas. O estudo do funcionamento cognitivo não pode, portanto, descartar questões relativas ao desenvolvimento cognitivo. (FRANCHI 2008, p. 191-192)

Deste modo, a teoria detém-se sobre o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, isto é, como o sujeito aprende e processa esse conhecimento que, diferentemente da Teoria das Situações Didáticas, não se detém, sobretudo na relação didática envolvida, uma vez que "uma boa encenação didática se apóia necessariamente no conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos com que habitualmente se depara, do repertório dos procedimentos disponíveis, e das representações possíveis" (VERGNAUD, 1996, p. 178).

Para Vergnaud (2009) o conhecimento é adaptação, visto que o indivíduo se adapta às situações e "é por meio da evolução da organização de sua atividade que ele se adapta". Portanto, para fins deste estudo tomamos como referência essa designação, uma vez que a interação *esquema-situação* é peça chave ao considerarmos a "ação do sujeito em situação e a organização de sua conduta".

Nesse sentido, buscamos situações que envolvessem a noção de limite de progressões geométricas de forma a instigar os alunos diante dos problemas propostos, para que haja a 'devolução' destes, a fim de que este estudo faça sentido para eles, não sendo apenas a comunicação de um modelo expresso, de uma fórmula. Cabe ressaltar que as situações referidas ao Campo Conceitual estão estritamente ligadas ao conhecimento matemático que está em jogo, no sentido de *tarefas* a serem resolvidas, levando-se em conta suas particularidades e complexidades.

Considerando que os alunos dão sentido a um determinado conceito a partir do trabalho com uma diversidade de situações, procuramos propor tarefas que exigissem uma reflexão por parte do aluno ao fazer uso de estratégias de resolução, o que implicaria em diferentes usos de esquemas. Para compreendermos essa ação, precisamos analisar o que afinal constitui um esquema.

2.2.1 Estrutura organizadora da atividade: O esquema

Quando o aluno tenta resolver uma situação, ele mobiliza esquemas que já foram utilizados anteriormente noutras situações e que de algum modo podem ser reutilizados em situações semelhantes àquelas. São esses esquemas que vão orientá-lo durante a resolução de um dado problema, levando-o ao sucesso ou à modificação de estratégias para que possa satisfazer as condições do problema proposto. Apenas quando um esquema atinge um comportamento estável é que então ocorre a aprendizagem.

O *esquema* é a forma de organização invariante da atividade, é o que determina uma sequência de ações pelo aluno para uma mesma classe de situações. Por meio dos esquemas é que podemos reconhecer a forma invariante e operatória do conhecimento durante a ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos (conhecimentos-em-ação) que conduzem a ação do aluno num certo conjunto de situações. Um esquema é composto por quatro elementos, sendo eles: as *metas* (objetivos) e *antecipações*, *regras em ação*, as *inferências* e os *invariantes operatórios*.

Para melhor compreendermos a análise conceitual de um esquema, observamos a seguinte situação[9]:

Dado um recipiente de capacidade de 1L, adicionamos a cada dia uma quantidade de água, de modo que no primeiro dia adiciona-se $\frac{1}{2}$ *L de água, no segundo dia* $\frac{1}{4}$ *L, no terceiro dia adiciona-se* $\frac{1}{8}$ *L e, assim sucessivamente. Pergunta-se: A água preencherá o recipiente com o passar do tempo? Justifique.*

Frente a esta situação-problema, consideremos um sujeito que apresenta, em primeira instância, um **objetivo** a ser atingido: descobrir se a água preencherá ou não o recipiente ao longo do tempo. Durante o percurso para obter a solução esperada, este objetivo se decompõe em outros **sub-objetivos**, os quais permitirão obter algumas **antecipações**. Uma forma de organizar a resolução desta tarefa é obter a soma infinita da quantidade de água adicionada no recipiente ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ +...). Veja que nesse estágio há um novo objetivo em jogo que permitirá antecipar a solução desejada: averiguar se a dada soma converge ou não para o número 1. Segundo Vergnaud (2009, p.21-22), o objetivo é parte intencional da conduta e, portanto, não pode ser descartado. Além disso, o esquema comporta as **regras-em-ação**; são elas que constituem a parte geradora do esquema e que permitem tomar e dar continuidade a uma sequência de ações, uma vez identificadas como sendo do tipo "se ... então". Um exemplo de regra em ação seria os alunos verificarem que as somas de alguns termos seguem a seguinte regra $\frac{2^n-1}{2^n}$, para cada n dado, o que os leva a identificar uma impossibilidade de a água preencher o recipiente, já que se tem sempre uma unidade a menos no numerador da fração considerada, por exemplo.

Com relação a este fato, Vergnaud (2009, p.22) afirma que, "essas regras são totalmente condicionadas pela representação do objetivo a ser atingido e pelas

[9] Fonte (adaptado): BISOGNIN, E., BISOGNIN, V., FERREIRA, M. V., Convergência de sequências e séries numéricas por meio da resolução de problemas. UNIFRA: 2007. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/relatos.html >. Acesso em: 19 jan. 2011.

conceitualizações que permitem identificar os objetos presentes, suas propriedades e relações, as transformações ocorridas em função da conduta do sujeito". Embora os alunos executem a sequência de suas ações, muitas vezes não são capazes de anunciá-las, já que "há muito de implícito nos esquemas".

Em estreita conexão com as antecipações e as regras-em-ação está a possibilidade de **inferência** da tomada da informação e de controle, ressaltados anteriormente. É a inferência que é responsável pela escolha de certas atitudes dentre várias alternativas mobilizadas pelo sujeito durante a ação, as quais permitem "*calculá-las"* em função do objetivo a ser atingido.

Outro componente de um esquema são os **invariantes operatórios.** Eles estão entre os principais conceitos na Teoria dos Campos Conceituais, os quais compõem os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação e que fundamentam dois tipos de invariantes operatórios: os do tipo "*funções proposicionais*" e do tipo "*proposições*".

Os Invariantes do tipo "*proposições*" são categorias estabelecidas por Vergnaud (1996, p. 163) no sentido de exemplificar aqueles que "são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos". Podemos usar um teorema-em-ação falso numa determinada atividade e, no entanto, nos enganar, uma vez que é necessário levar em conta o domínio de validade a que este teorema pertence. Voltando a nossa situação inicial, um possível teorema-em-ação do tipo falso seria identificar o resultado da soma: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ como sendo um "valor desprezível ou próximo de zero", já que seus termos se aproximam de zero. Essa ideia pode ser explicada segundo a relação entre o limite do termo geral da sequência formada com o limite das somas parciais. Nessa pesquisa temos por hipótese alguns possíveis teoremas-em-ação a serem mobilizados pelos alunos no estudo da noção de limite de PGs que, discorreremos no capítulo IV.

Já os invariantes do tipo "*funções proposicionais*" são aqueles que "não são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas constituem tijolos indispensáveis à construção das proposições" (VERGNAUD, 1996, p.163). Os conceitos-em-ação são invariantes desse tipo, uma vez que consistem em conceitos considerados pertinentes ou não a serem usados e/ou construídos na ação. Um exemplo de conceito-em-ação a ser utilizado pelos alunos nesta pesquisa seria as aproximações.

Para Vergnaud (1996), um conhecimento está organizado em *Campos Conceituais*, formados por um conjunto de problemas, situações, esquemas, estruturas operacionais que estão estritamente ligadas e que requerem um domínio de vários conceitos e o uso de representações simbólicas para os mesmos. Se tivermos por objetivo a aprendizagem ou o ensino de um determinado conceito, então não podemos nos restringir a sua mera definição, visto que um *conceito* não consiste em uma definição textual, mas é composto por uma tríade (S, I, L) formada pelo conjunto de *situações (S)* que dão sentido a um conceito, pelos i*nvariantes* operatórios *(I)* que são constituídos pelos conceitos em ação e teoremas em ação (significados) e pelas *formas de linguagem (L)* que permitem expressar um conceito e suas propriedades (os significantes).

Como discorremos anteriormente sobre o conjunto de situações e invariantes, cabe-nos ressaltar os significantes desse tripé, já que são as representações tanto implícitas quanto explícitas que fazem parte de um esquema. Assim, "a função da linguagem e outros significantes [...] ajuda à designação e, portanto à identificação, das invariantes: objetos, propriedades, relações, teoremas; ajuda ao raciocínio e à inferência; ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controle da ação". (VERGNAUD 1996, p.180)

São as formas de linguagem que vão permitir ao aluno expressar a noção de limite de progressões geométricas infinitas, em linguagem natural ou matemática. Ao iniciarmos o estudo das somas infinitas dos termos de PG fazemos uso de representações geométricas, pois acreditamos que a mudança do quadro numérico-geométrico e vice-versa pode contribuir para que os alunos conjecturem e trabalhem em torno da noção de limite.

Além das representações linguísticas e simbólicas inerentes a esse estudo, a linguagem enquanto função de comunicação é de fundamental importância, no sentido que é ela que possibilita os alunos verbalizarem o que estão pensando, ajudando-nos a desvendar algumas relações pertinentes à atividade cognitiva. Todavia, é necessária a organização de um meio que propicie essa atividade. Aqui, a interação dos alunos com o trabalho realizado em grupos evidencia a socialização de ideias, tomadas de informação e de controle, além de tornar a atividade da linguagem um elemento indispensável na construção conceitual da noção de limite.

Buscamos, portanto, situações em que os alunos possam estabelecer relações entre os conceitos a serem estudados, as representações utilizadas, e os procedimentos e propriedades no estudo de progressões geométricas infinitas, ao dar-lhes oportunidade para mobilizarem seus conhecimentos e desenvolverem novos esquemas. É por meio destes fatores que procuramos identificar dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos com o saber em jogo.

2.3 ENGENHARIA DIDÁTICA

Adotamos como aporte metodológico os princípios da Engenharia Didática, que emergiu na Didática da Matemática na França, no início na década de 1980, e cujo objetivo centra-se na relação entre a pesquisa e a ação no sistema didático. Levando-se em conta esta especificidade, Michèle Artigue (1988) descreve essa metodologia comparando o trabalho didático com o trabalho de um engenheiro:

> [...] o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho de um engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, [...] mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar com objetos mais complexos [...] e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1988, p. 283)

Ao interpretar essa conduta, o engenheiro, para realizar certa obra, deve planejar os procedimentos da sua ação para aprimorar e fazer vigorar seus objetivos. Analogamente está o trabalho do pesquisador, que se apoia sobre conhecimentos científicos para planejar situações, visando que os alunos trabalhem e realizem o seu projeto em sala de aula. Em nossa pesquisa, buscamos criar situações para que os alunos pudessem construir a noção de limite num estudo de PG, uma vez que nosso objetivo geral é analisar a construção da noção de limite por alunos de ensino médio, num estudo de progressões geométricas infinitas, é necessária uma metodologia que nos subsidie na organização e elaboração de uma sequência didática de forma articulada com nossos preceitos e anseios. Para isso, faremos uso das quatro fases que compõem a engenharia didática, que são: análises preliminares; concepção e análise *a priori*; experimentação e análise *a posteriori* e validação.

2.3.1 Descrição das diferentes fases de uma engenharia

As *análises preliminares* constituem a fase na qual se faz a descrição do objeto de estudo, fundamentado por análises epistemológicas, didáticas, pedagógicas e cognitivas, permitindo-nos levantar algumas hipóteses no início da pesquisa. Machado (2008, 238) relata que esta fase considera o "quadro teórico didático geral e [...] os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão", ressaltando:

> A **análise epistemológica** dos conteúdos contemplados pelo ensino; a **análise do ensino atual** e seus efeitos; **a análise da concepção dos alunos**, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução; **a análise do campo dos entraves** no qual vai se situar a efetiva realização didática. (MACHADO, 2008, p.238, grifo nosso)

Neste estudo, fizemos, num primeiro momento, um levantamento de pesquisas em relação à temática trabalhada, para que as mesmas pudessem nos orientar nas demais etapas de desenvolvimento da pesquisa. Em seguida, levantamos aspectos históricos e epistemológicos sobre a noção de limite e progressões geométricas infinitas, para compreender a gênese e o desenvolvimento desse conteúdo na história da matemática e ajudar-nos na análise de possíveis dificuldades a serem encontradas pelos alunos no estudo do tema.

Posteriormente, passamos à análise do tema em alguns documentos, entre livros didáticos de matemática, orientações curriculares nacionais e guias de livros didáticos, para verificar como é proposta a abordagem do conteúdo de progressões geométricas infinitas no ensino médio, levando em consideração as escolhas feitas pelos livros didáticos e as orientações contidas nos parâmetros curriculares. Como nosso objetivo geral foca-se na análise da construção da noção de limite por alunos de ensino médio num estudo de progressões geométricas infinitas, é necessário que, além de um estudo bibliográfico e teórico do objeto de estudo, façamos um estudo experimental junto aos alunos, resgatando as particularidades que buscamos investigar por meio desta engenharia didática.

Segundo Artigue (1996), a fase de concepção e análise *a priori* é concebida, como sendo:

> [...] uma análise do controle do sentido; muito esquematicamente, se a teoria construtivista coloca o princípio do compromisso do aluno na construção dos seus conhecimentos por intermédio de interações com determinado meio, a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática, teve, desde sua origem, a ambição de se construir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações. (ARTIGUE, 1996, p.204)

É nesta fase que elaboramos uma sequência didática, de forma que as tarefas propostas provoquem a sua devolução aos alunos e que elas possam ser vividas como situações adidáticas, já que procuramos criar um meio em que eles tenham condições para construir a noção de limite.

É objetivo da análise *a priori* “determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos” (ARTIGUE, 1996, p. 205). Para isso, devem ser instituídas as variáveis didáticas. Essas variáveis são escolhas feitas pelo pesquisador para que ele possa provocar mudanças no processo de ensino e de aprendizagem do saber em jogo, pois acreditamos que o sujeito aprende num meio que provoque contradições, desequilíbrios e que ele deve se adaptar às situações propostas. São elas que permitem a ele mudar de estratégia de resolução, construir novos esquemas até atingir um comportamento estável neste processo.

Segundo Artigue (1996), há dois tipos de variáveis: as macro-variáveis e as micro-variáveis. Aqui, em especial, nos detemos às micro-variáveis, pois elas são relativas à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo ser tanto variáveis dos problemas propostos (uma vez que são elas que determinam o comportamento dos alunos frente a certas situações propostas) quanto das situações ligadas à organização do meio em que descrevemos nossas escolhas metodológicas.

A fase de experimentação constitui-se no momento de aplicação das atividades com os alunos.

> É a fase da realização da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observador (es) com a população de alunos, objeto da investigação. A experimentação supõe: a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; aplicação dos instrumentos de pesquisa; [...] (MACHADO, 2008, p. 244)

Nesta fase podemos retornar e revisar as atividades propostas se observarmos que a sequência previamente elaborada não satisfez as condições esperadas, podendo reformulá-las. Nesta etapa também são colhidas todas as informações necessárias para análise dos objetivos da pesquisa ao fazermos uso dos instrumentos metodológicos. Em nossa coleta de dados utilizamos os protocolos com as produções dos alunos em sala de aula e realizamos as transcrições de gravações dos acontecimentos no ambiente da pesquisa.

Diante de tudo que foi levantado nesta fase, conseguimos analisar esses dados cuidadosamente na fase seguinte: A análise *a posteriori* e validação.

Aqui são realizadas as análises dos dados colhidos durante a experimentação para que seja possível verificarmos se as hipóteses levantadas inicialmente foram ou não comprovadas, o que consiste na confrontação entre a análise *a priori* e *a posteriori*, ou seja, uma validação interna de pesquisa. Esta é uma singularidade dessa metodologia que, difere de outros métodos de experimentação em sala de aula, cuja validação é externa, ou seja, realiza-se com outros sujeitos de pesquisa, outras ações diferentes daquela que está sendo aplicada.

Apresentadas algumas descrições da TSD, TCC e, por último, a Engenharia Didática cabe nos referirmos a natureza da relação entre elas nesta pesquisa.

Como nosso objeto de estudo centra-se na aprendizagem da noção de limite por meio de um estudo de progressões geométricas infinitas, isso implica em criarmos situações didáticas e organizarmos um meio adidático para que os alunos possam construir esse conhecimento. Na relação didática proposta pela TSD, não são fornecidos elementos para compreender a atividade cognitiva do aluno em situação. É nesse viés que a TCC entra em cena como uma teoria cognitivista, de aprendizagem, permitindo ao pesquisador identificar e analisar elementos cognitivos subjacentes a ação do aluno. Mesmo que essa tarefa seja complexa, acreditamos que a Engenharia Didática, aliada à TSD e a TCC, é uma escolha pertinente, uma vez que esta permite colocar em prática os estudos trazidos nessas teorias, buscando as condições necessárias para criar, organizar e analisar situações didáticas para que o fenômeno da aprendizagem da matemática possa acontecer, conforme propõe Brousseau (1998).

> A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais [nada,] por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. [...] (ARTIGUE 1996, p. 196)

É esse caminho que percorreremos a seguir. Primeiramente, elencamos alguns elementos constituintes de nossa análise preliminar e somente nos próximos capítulos descrevemos as escolhas metodológicas dessa pesquisa, bem como as análises *a priori* e *a posteriori* de nossa sequência didática.

3 O CONHECIMENTO EM ESTUDO: UM QUADRO HISTÓRICO - DIDÁTICO

Neste capítulo abordamos, por meio de um quadro histórico, uma análise epistemológica de conceitos que permeiam este estudo. Para estabelecermos um diálogo entre passado e presente, optamos por considerar a abordagem de nosso objeto de pesquisa no âmbito da educação básica segundo as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio e alguns livros didáticos utilizados neste nível de escolaridade. Além disso, levamos em conta algumas pesquisas que versam sobre dificuldades e alguns obstáculos epistemológicos que perpassam por essa temática de pesquisa, com o objetivo de analisar prováveis dificuldades dos alunos durante a aprendizagem da noção de limite.

3.1 QUADRO HISTÓRICO

3.1.1 Nosso tema na história da matemática

a) As progressões geométricas e o método de exaustão

Uma das formas de resgatar a história dos povos antigos é por meio de seus materiais de escrita. Na matemática dos Egípcios preservada nos Papiros, por volta de 650 a. C, podemos observar a produção desses povos acerca de uma matemática de natureza prática. Um exemplo disso é o problema 79 do Papiro de Rhind[10] e que, no mesmo, podemos encontrar vestígios de uma soma dos 5 primeiros termos da PG (7, 49, 343, 2401, 16807, ...).

Neste mesmo Papiro, Gonçalves (2007) relata outra progressão geométrica, cujos termos são compostos por frações denominadas "frações dos olhos do deus Hórus": ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$). Com elas, verifica-se que os egípcios possuíam um método para calcular a soma de alguns termos de progressões geométricas. O procedimento utilizado para tanto consistia em considerar S e depois todos os seus termos eram multiplicados pelo último denominador desta soma, o que possibilitaria encontrar o valor de S.

[10]Segundo Boyer (1981), este papiro é o mais extenso entre os que tratam de matemática, trazendo inúmeros problemas matemáticos. Foi comprado pelo escocês Henry Rhind e, em 1650 a. C e copiado pelo escriba Ahmes. Hoje se encontra no British Museum.

Já na Babilônia, por volta de 300 a. C, encontram-se duas sequências na tábua do Louvre, sendo que uma delas considera a soma $1+2+2^2+2^3+...+2^9$ igual a $2^9+ 2^9 -1$. Partindo-se desses dados, podemos nos indagar se os povos babilônios apresentavam em suas receitas, a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica. Por serem considerados “calculistas extremamente hábeis”, como afirma Eves (2004), e por realizarem boas aproximações a respeito de raízes quadradas, seria possível resgatarmos alguns sinais de uma noção ainda que primitiva, de convergência ou infinito?

Boyer (1981, p.21) explica que “No algoritmo babilônio para a raiz quadrada acha-se um processo iterativo que poderia ter levado os matemáticos da época a descobrir processos infinitos, mas eles não levaram adiante a pesquisa das implicações de tais problemas.” Ao se deparar com problemas que envolviam o infinito, os babilônios não o encaravam como deveriam. O autor ainda mostra que a percepção da periodicidade no sistema sexagesimal de $\frac{1}{7}$ poderia ter levado à consideração sobre as somas infinitas, assim como nas expressões decimais infinitas que faziam e que não consideravam significativamente esse tipo de situação.

Contudo, é na Grécia que a história das progressões e da convergência é de fato instituída com descobertas que contribuíram para o desenvolvimento de uma matemática abstrata. Por volta de 300 a. C as progressões geométricas parecem ser fundamentadas a partir dos estudos sobre proporções na obra ‘Os Elementos’ de Euclides[11]. Eves (2004) aponta que no livro VIII da obra supracitada é que estes estudos são relacionados, relatando que se temos uma proporção contínua a: b = b: c = c: d, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.

A fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica é explicitada na proposição 35 do livro de Euclides, como sendo: “Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem” (BOYER, 1981, p. 84). Em outras palavras, Euclides provara que:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

[11] Os Elementos constituem uma obra de 13 livros contendo diversas proposições, axiomas, teoremas em que, Euclides reúne as principais descobertas da época assim como alguns de seus trabalhos e sistematiza a matemática até então existente, neste trabalho.

Para demonstrá-la[12], Euclides tem por hipótese que se os números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}$ estão em proporção contínua, então $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Em seguida, toma por base a proposição V-5 do livro V dos Elementos: "Se um número divide dois outros, ele também divide a diferença entre ambos", isto é, se $\frac{a_1}{a_2}$ e $\frac{a_1}{a_1}$ então $\frac{a_1}{a_2 - a_1}$. Considerando essa propriedade válida para os números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}$ que estão em proporção contínua, obtemos $\frac{a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a_2}{a_3 - a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n+1} - a_n}$. Em qualquer proporção, temos que a soma de todos os numeradores (antecedentes) está para a soma de todos os denominadores (consequentes), assim como qualquer antecedente está para seu consequente. Assim, temos $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_{n+1} - a_1}$, uma vez que a soma de todos os consequentes consiste em $a_{n+1} - a_n$, pois os números $a_2, a_3, ... a_n$ se anulam. Como $a_1 + a_2 + ... + a_n$ é a soma procurada, isto é, S_n, temos que $\frac{S_n}{a_{n+1} - a_1} = \frac{a_1}{a_2 - a_1}$, ou seja, $S_n = a_1 \frac{a_{n+1} - a_1}{a_2 - a_1}$.

Esta fórmula equivale à usada hoje para determinarmos a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica, bastando substituirmos $a_{n+1} = a_1.q^n$ e $a_2 = a_1.q$ para obtermos $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Ainda sobre as progressões geométricas, Miguel e Miorim (2004) tecem um comentário acerca da origem desse nome, ressaltando sua imbricação com a teoria das proporções:

> [...] Euclides, notável geômetra grego do século III antes de Cristo (450 - 380), estabeleceu a teoria das proporções em seus famosos Elementos, pela representação linear das quantidades. Por este motivo, e talvez também pela freqüente aplicação que das proporções se faz em geometria, deu-se-lhes a denominação imprópria de progressões geométricas. Como o uso sancionou essa denominação, apesar de sua impropriedade, as progressões por quocientes, compostas por sua vez de proporções contínuas sucessivas, receberam, também o nome de progressões geométricas. [...] (PEREZ y MARIN apud MIGUEL e MIORIM 2004, p.28-29)

[12] Tomamos como referência a demonstração apresentada por Garbi, G.G no livro: A Rainha das Ciências, 2006, p.56.

Segundo o exposto em Euclides, a Teoria das proporções desenvolvida por Eudoxo, além de fazer uso pela primeira vez do termo ‘razão’, contorna a questão da não comensurabilidade de segmentos de retas, ao lidar com problemas que continham a noção de infinito. Um exemplo disso está no método de exaustão que, se fez um tanto quanto útil para o cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arco, sendo também aprimorado por Arquimedes (287-212 a. C).

A origem do método de exaustão está na contribuição de Antífon, o Sofista, por volta de 430 a.C, ao problema da quadratura do círculo. Tomando por base que uma grandeza podia ser subdividida indefinidamente, afirmara que por meio de duplicações dos lados dos polígonos, a diferença entre a área do círculo e a do polígono “exaurir-se-ia”, levando-o a aceitar que a área do polígono fosse igual a do círculo. Segundo Eves (2004, p.419) este método faz uso da seguinte proposição: “Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se uma parte não menor que sua metade e, assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie”.

A noção de convergência aflora neste problema, porém, é com o uso desse método que os gregos são impedidos de avançar com as grandezas infinitesimais, já que este “consiste em um artifício lógico, que dá [...] a garantia da validade de sua mensuração” (CAMPOS, 2006, p.65). De acordo com Eves (2004), o método de exaustão podia ter sido considerado como resposta aos paradoxos de Zenão (cerca de 450 a. C), da Escola Pitagórica, já que estes excluíam os infinitésimos das demonstrações geométricas. Esses paradoxos constituíram a base do desenvolvimento da noção de limite, sendo provável que Zenão tenha sido o primeiro a lidar com essa ideia, como explicita Celestino (2008, p.79). Vejamos a seguir como a noção de limite e infinito se manifestava nos paradoxos de Aquiles e da Dicotomia e como estes acabaram influenciando o rumo da matemática grega.

b) Os paradoxos de Zenão

Em dois paradoxos, o de Aquiles e da Dicotomia, Zenão argumenta sobre a divisibilidade infinita do tempo e espaço, mostrando que o movimento é impossível.

O primeiro desses paradoxos caracteriza-se por uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga. Esta, que larga com uma vantagem inicial e por mais lenta que seja sempre está em vantagem com relação a Aquiles. Considerando esse processo infinitamente, Zenão chega à conclusão que Aquiles nunca alcançará a Tartaruga, mesmo que os espaços que os distem diminuam cada vez mais. Segundo Amadei (2005, p.27), "o impasse gerado em jogo nesse paradoxo é a dificuldade de considerar uma quantidade infinita de espaços cada vez menores e a impossibilidade de conceber intuitivamente que a soma do comprimento desses espaços possa ser finita".

Da mesma forma, o paradoxo da Dicotomia consiste no seguinte impasse: para um móvel percorrer um segmento de reta é necessário que percorra a metade deste estágio, depois a metade da metade do que restou, e assim sucessivamente. Amadei (2005) ressalta que Zenão tinha em mente a série ($\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...$); porém, sem o domínio da convergência para resolvê-la, ele considera que este movimento é impossível, isto é, jamais deve ser iniciado.

No entanto, observa-se que Zenão, em seus paradoxos assume de fato a impossibilidade de estas acontecerem efetivamente. Isso evidencia de um lado o que Caraça (2010) considera como sendo a concepção cada vez mais finitista da matemática grega. Por outro lado, Campos (2006) ressalta o porquê de Boyer considerar tais paradoxos como um dos maiores empecilhos ao desenvolvimento do cálculo na Grécia:

> Esses paradoxos [...] contribuíram para o abandono da aritmética como fundamento do pensamento matemático grego e a adoção, cada vez maior da geometria, que possibilitava uma representação dos objetos matemáticos através de elementos contínuos. Ocorreu então no pensamento grego uma cisão entre aritmética, que continuava a ser discreta, e a geometria, que trabalhava com a idéia de grandezas contínuas, sem relação direta com números e tratada por métodos geométricos. Era o fim da tentativa de se explicar os contínuos em termos de discretos. (CAMPOS, 2006, p.62)

Ao compreender as ideias contidas nos paradoxos, Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) faz menção a duas representações do infinito: "O infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final e o infinito como uma totalidade completa. O primeiro é o infinito potencial e o segundo é o infinito atual". (ORTIZ, 1994, p. 61).

É no início do século XVII que a ideia do infinito atual passa a ser desenvolvida por Galileu e Bolzano, sendo sistematizada por Cantor e Dedekind, no século XIX. Até esse período, o infinito que prevalecia era o infinito potencial observado na matemática grega.

c) Desenvolvimento do Cálculo infinitesimal

Em torno de 1350 que Richard Suiseth ("o calculador") relaciona a questão do infinito com uma série numérica, apresentando-se contra os filósofos da época, os quais consideravam o infinito como sendo uma "magnitude", como explicita Campos (2006). Segundo Cornu (1983), uma das maiores problemáticas quanto à noção de limite encontrava-se no cálculo de séries. É nesse sentido, que Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667), matemático belga, apresenta um novo olhar aos problemas antigos por meio da noção de limite. Sobre este último, Cornu afirma que o mesmo:

> [...] retoma os métodos de dicotomia, permitindo a subdivisão continuar "ad infinitum". Ele faz assim a relação com as séries, e, em especial, é o primeiro a aplicar as séries aos paradoxos Zénon: ele resolve o problema do encontro de Aquiles com a tartaruga. Utiliza o termo 'terminus' para falar do limite, e para, ele, este 'terminus' é visto como um obstáculo, um muro, que é impossível de atingir e de exceder. (CORNU, 1983, p.44, tradução nossa)

O emprego da palavra 'terminus' e o sentido de 'muro' que expressa o que não se pode atingir, deixa evidente uma representação primitiva da noção de limite. Para Campos (2006), a maior contribuição nesse âmbito foi dada por John Wallis (1616-1703), que foi quem mais se aproximou do conceito de limite. Wallis procurou 'libertar' a aritmética da geometria, como víamos na extensão da matemática grega.

> [...] A diferença entre o pensamento de Wallis e de seus antecessores, é que este matemático partiu de considerações aritméticas relacionadas a somas infinitas e séries que convergiam a um número, para depois aplicar suas teorias a problemas de quadraturas e cubaturas. (CAMPOS, 2006, p.90)

Por outro lado, Newton (1642-1727) apresenta grandes contribuições no estudo dos infinitesimais, mesmo lidando apenas com o infinito potencial. Uma de suas principais descobertas também está no estudo das séries numéricas, como mostra Campos:

> [...] a análise de séries infinitas poderia ser feita pelas regras gerais da álgebra de quantidades finitas. As séries infinitas não deviam, portanto, serem consideradas como formas de aproximação de valores, mas como uma outra forma de descrever funções representadas por elas. Assim, diferentemente do que ocorreu na Antigüidade, quando os processos infinitos eram evitados, estes tipos de considerações passaram a fazer parte do corpo matemático. (CAMPOS, 2006, p.93)

Observamos que Newton elabora o método dos fluxos, no qual se considera que uma curva é gerada por um movimento contínuo de um ponto e, em outra exposição de seu cálculo, chamado de “Quadratura Curvarum”, evita os infinitamente pequenos e infinitamente grandes. Boyer relata este procedimento da seguinte forma:

> Ele achava a “primeira razão de aumentos nascentes” ou a “última razão de incrementos evanescentes” como segue. Suponhamos que se procure a razão das variações de x e x^n. Seja o o incremento de x e $(x+ o)^n - x^n$ o correspondente incremento de x^n. Então a razão os incrementos será 1: [$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ox^{n-2} + ...$]. Para achar a primeira e última razão faz-se o desaparecer, obtendo a razão 1: (nx^{n-1}) (BOYER, 1981, p.291)

O mesmo autor relata que Newton, ao usar a palavra “desaparecer”, se aproxima mais do conceito de limite, porém sem explicá-la, fazendo com que ela ainda persistisse durante o século XVIII.

Em síntese, Ghedamsi (2003) afirma que o cálculo infinitesimal teve sua origem com as noções intuitivas dos gregos acerca do infinito, do limite e do contínuo, contudo, os matemáticos do século XVII ainda apresentaram dificuldades em explicar tais noções.

d) Em busca da Aritmetização da Análise

Em meio a tantas imprecisões, Cornu (1983, p. 50-52) relata que D' Alembert (1717-1783) ainda se mantém sensível ao problema dos infinitamente pequenos e dos infinitamente grandes, tendendo a analisar a noção de limite do ponto de vista geométrico, o que dificulta a passagem para o domínio numérico.

> Toma como exemplos o círculo, limite dos polígonos inscritos e limitados, ou ainda a soma de uma progressão geométrica. Define a "soma de uma sequência" (i.e de uma série) como "o limite dos seus diferentes termos, ou seja, uma quantidade da qual aproxima-se tão perto quanto se queira, tomando sempre na sequência um número de termos cada vez mais maior". (CORNU, 1983, p.51, tradução nossa)

Com isso, atribui-se a noção de limite de D’Alembert como um limite que não é atingido, do qual se aproxima de maneira monótona. Em contrapartida está Lagrange (1736-1813), “considerado um dos principais artesãos da passagem para o domínio numérico” (CORNU, 1983). Ao recusar a noção de limite, como cita Cornu (1983), ele trabalha com as séries de funções, sendo estes objetos algébricos e busca trazer a análise ao cálculo algébrico.

Segundo Eves (2004) foi Lagrange quem percebeu a insuficiência dos fundamentos da análise; para ele, era necessário um processo de rigor à análise.

A tarefa de "romper com as ideias intuitivas e estabelecer padrões de rigor" (EVES, 2004, p. 610), ficou a cargo de Gauss, matemático que apresenta as primeiras considerações adequadas quanto à convergência de uma série infinita. Além disso, é ele quem primeiro apresenta uma ideia clara da noção de limite, o que o leva a definir as noções de limite superior e de limite inferior, como afirma Cornu (1983).

Porém, é somente no século XIX que a análise infinitesimal adquire bases sólidas, com Cauchy (1789-1857), quando ele delimita um lugar definitivo à noção de limite e precisa seu caráter aritmético, como ressalta Boyer (1981).

> Ao passo que muitos matemáticos anteriores tinham pensado em infinitésimo como um *número* fixo muito pequeno, Cauchy definiu-o claramente como uma *variável* dependente: *Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero.* (BOYER, 1981, p. 380).

Atendendo a sugestão de D'Alembert, Cauchy desenvolve a teoria de limites, a qual toma como o ponto-chave para definir continuidade, integral e derivada. O alemão Weierstrass (1815-1897), procura fundamentar a análise que Cauchy iniciou e que, segundo Eves (2004), ainda não tinha atingido sua plenitude. De acordo com o autor:

> A teoria dos limites fora construída sobre uma noção intuitiva simples do sistema dos números reais. [...] Weirstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise, inspirasse segurança. Esse notável programa, conhecido como *aritmetização da análise.* (EVES, 2004, p. 610-611)

É com Weierstrass que a noção de limite toma um caráter estático, se desprendendo da geometria e passando a ser fundamentada sobre o conceito de número. Segundo ele, faltava uma sistematização adequada do conjunto dos números reais, tarefa realizada mais tarde por Cantor (1845 - 1918), e Dedekind (1831-1916). Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos e a teoria do infinito baseado num tratamento do infinito potencial, como ressalta Eves (2004).

> Uma vez que Cantor desenvolveu seus trabalhos no final do século XIX e início do XX, o cerne do "horror ao infinito", ou seja, o infinito atual, percorreu todo o desenvolvimento do Cálculo e persiste ainda hoje [...]. Eudoxo valia-se do infinito potencial em seus trabalhos com o principio da exaustão, já o infinito atual que Caraça denomina de "infinito do tipo do contínuo", está relacionado a grandezas

> contínuas. Ao longo da história vemos que o infinito potencial era razoavelmente aceito. (CELESTINO, 2008, p.41)

Ao longo deste percurso vimos o quanto o trabalho com as séries infinitas desencadeou o amadurecimento da noção de limite, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento deste conceito. Essas considerações contribuíram para a realização de um estudo sobre a construção da noção de limite por meio de uma soma infinita específica: o caso das séries geométricas, uma vez que é indispensável o resgate das dificuldades dos matemáticos antigos ao lidarem com a problemática da noção de limite, já que temos a intenção de oportunizar aos alunos a reprodução da atividade matemática científica.

Partindo de tais pressupostos, descrevemos a seguir alguns elementos teóricos do ponto de vista matemático, cuja finalidade centra-se em caracterizar nosso objeto de estudo na Análise Matemática.

3.1.2 Elementos conceituais da análise matemática

Como observamos no tópico anterior, as tarefas matemáticas desenvolvidas na antiguidade acerca da noção de limite se solidificaram a partir século XIX com a aritmetização da Análise, o que hoje nos permite elencar alguns conceitos matemáticos que embasam nosso objeto de estudo. Para analisar a construção da noção de limite por alunos de ensino médio, é necessário considerar que a ação desenvolvida por eles em torno de conceitos e relações que se estabelecem, é fundamentada por "teoremas-em-ação verdadeiros que lhes atribuem a sua função no tratamento das situações". (VERGNAUD, 1996, p.168).

Munidos pelas contribuições de Ávila (2006), Lima (2008) e Caraça (2010), elencamos alguns dos elementos conceituais que constituem esse trabalho de pesquisa.

Como realizamos um estudo de progressões geométricas cabe, primeiramente, atribuirmos uma caracterização à sequência numérica. Para Lima (2008, p.100-101):

> Uma *sequência de números reais* é uma função x: N→R, definida no conjunto N= {1,2,3, 4...} dos números naturais e tomando valores no conjunto R dos números reais. O valor *x(n)*, para todo $n \in$ N, será representado por x_n e chamado o *termo de ordem n*, ou *n-ésimo termo* da sequência. Escreveremos (x_1, x_2, x_3, ..., x_n,...), ou (x_n) $n \in$ N, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência x.

Intuitivamente, podemos analisar o comportamento dos termos de uma sequência quando *n* cresce infinitamente. Esta noção é fundamentada, segundo o autor, ao considerarmos o limite de uma sequência (x_n) de números reais como sendo um número real a que, para cada $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, é possível encontrarmos um $n_o \in N$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_o$. Em símbolos, escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e dizemos que a sequência (x_n) converge para a, ou tende para a ($x_n \to a$) quando $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Isto é,

> Uma **sequência** que possui limite chama-se **convergente.** Do contrário, ela se chama *divergente*. Explicitamente, uma **sequência** (x_n) diz-se **divergente** quando, para nenhum número real a, é verdade que se tenha $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. (LIMA, 2008, p.108, grifo nosso)

Contudo, ao considerarmos uma sequência convergente, podemos levar em conta a unicidade do limite. Não faz sentido dizermos que uma sequência converge para dois limites distintos, uma vez que, se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, então a só pode ser igual a b.

Outro conceito fundamental nesse estudo é a noção de infinitésimo**,** ao enunciar que uma sequência numérica (x_n) é vizinha de *zero* para *n* suficientemente grande. Segundo Caraça (2010, p. 207), "Dá-se o nome de infinitésimo a toda variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ tais que $|x_n| < \delta$ para todos os valores de $n > n_1$ e todo o $\delta > 0$." É esse elemento que nos permite analisar o caso de convergência ou não da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica em relação à q^n quando $-1 < q < 1$, tendo em vista o $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Ao definir uma soma infinita, Lima (2008) considera uma sequência de números reais (a_n) que dá origem a uma nova sequência (s_n) cujos termos são as somas $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ... , $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Essas são chamadas de reduzidas da série $\sum a_n$, onde a_n simboliza o n-ésimo termo ou o termo geral da série. Assim, o autor ressalta que se existir o limite: $s = \lim s_n = \lim (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$, diz-se que a série $\sum a_n$ é convergente e o limite s será chamado a soma da série, denotada da seguinte maneira:

$$s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Nesse sentido, considera-se que a série $\sum a_n$ é divergente, se a sequência das reduzidas não convergir.

Uma condição necessária para a convergência de uma série $\sum a_n$, porém não suficiente, é que o $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$ Como dizíamos anteriormente, essa é a condição fundamental para o estudo da convergência de uma série geométrica de razão q, expressa por: $1+ q + q^2 +...$ $= \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ e, cuja reduzida é $S_n = 1+ q + q^2 +...+ q^n$. Ao determinarmos o limite de $S_n = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}$, quando $|q| < 1$, temos que q^n tende a zero, logo a expressão converge para $\frac{1}{1-q}$, que é o limite de S_n. Contudo, no caso em que $|q| > 1$, temos que a série diverge, já que neste caso seu termo geral não tende a zero.

Ao considerarmos a sequência das reduzidas da série geométrica, analisamos o caso que n tende ao infinito, realizando assim a passagem ao limite. Sobre essa operação de passagem, Caraça (2010, p.218) ressalta o fato de que ao tomarmos uma sequência numérica (‘sucessão’) $a_1, a_2, a_3, ..., a_n,...$, e fazermos n tender ao infinito, estamos lidando com índices muito grandes e, assim, passamos ao limite, que para o autor é “o resultado da interdependência dessa infinidade de termos”.

Em termos da linguagem a ser utilizada no tratamento do limite, é indispensável levarmos em conta o conjunto de significantes para este conceito, uma vez que este é peça fundamental no processo de conceitualização do real, de acordo com Vergnaud (1996). Por sua vez, Caraça (2010, p.218) mostra-nos três maneiras de expressar o limite de uma *sucessão numerável* (termo usado para designar uma sequência numérica). A primeira delas o autor exprime como sendo: “a sucessão numerável a_n tem por limite L”; A segunda se expressa por: “a sucessão numerável a_n tende para L”. E por último, “a sucessão numerável a_n converge para L”. No entanto, por mais que tenham o mesmo significado matemático, isso não se mantém para alguns alunos, que tendem a atribuir significados diferentes às expressões “tende para” e “tem por limite”, como mostra a pesquisa de Cornu (1983), uma vez que o “tende para” esteja vinculado a questão dinâmica enquanto “tem por limite” tenha um sentido estático.

Em busca de identificar e compreender dificuldades e obstáculos na aprendizagem da noção de limite apresentamos a seguir, algumas contribuições de pesquisas para este campo de estudo.

3.1.3 Obstáculos epistemológicos e dificuldades inerentes às PGs

No processo de aprendizagem da noção de limite não podemos descartar os obstáculos que surgiram com o desenvolvimento deste conceito. Nas palavras de Brousseau (1998, p.120): "[...] a noção de obstáculo aparece como fundamental para colocar o problema do conhecimento científico".

> Os obstáculos epistemológicos são facilmente identificáveis pelas dificuldades encontradas pelos matemáticos para se superar na história. A compreensão desses obstáculos precisa de investigação em epistemologia e história da matemática. Em verdade, as grandes questões de matemática que foram fonte de progressos consideráveis, são todas obstáculos epistemológicos pelos alunos. (BROUSSEAU, 1998, p.120)

Deste modo, consideramos alguns obstáculos identificados na pesquisa de Cornu (1983) e de Sierspinska (1985) acerca da noção de limite.

Um dos obstáculos listado por Cornu (1983) é o "*aspecto metafísico da noção de limite*", expresso pela noção de que o infinito e o limite apareceram na história como sendo competências voltadas mais à filosofia e à metafísica do que à própria Matemática. Isso provocou uma reserva dos matemáticos frente a essas noções. Um exemplo disso está em relação ao infinito que impulsionou os gregos métodos e deduções que permitissem a fuga dessas noções.

No obstáculo que diz respeito às "*noções de infinitamente pequeno e infinitamente grande*", Cornu (1983) destaca que a suposição de existência do infinitamente pequeno foi um obstáculo essencial no desenvolvimento da noção de limite, o que deteve a atenção de alguns matemáticos, por exemplo, Newton. Tal caso se caracteriza como um obstáculo ao considerarem números muito pequenos e menores que os "verdadeiros números" (os números reais), porém não nulos.

Outro obstáculo destacado por Cornu refere-se ao fato do "*limite... atinge ou não?*" que, segundo o autor, até para Cauchy o limite jamais podia ser atingido; imaginemos então para os alunos. Esse é um obstáculo que o autor reafirma estar presente nos manuais escolares franceses e, dentre as demais dificuldades, ressalta a impossibilidade de que uma soma infinita possa ser igual a um número. Isso se deve novamente ao obstáculo ligado à noção de infinito, como vimos nos Paradoxos de Zenão e o que nos leva a identificá-lo em nosso estudo de PGs infinitas.

Essa noção de infinito é vista por Sierpinska (1985) como o primeiro e mais importante obstáculo epistemológico de sua listagem, chamando-o de "Horror ao Infinito" que, segundo a autora, decorre da recusa dos conjuntos infinitos. Além disso, a passagem ao limite é realizada por meio de aproximações ligadas a movimentos físicos, os quais a autora frisa nas expressões: "aproxima-se indefinidamente" ou "aproxima-se cada vez mais".

Tais expressões corroboram com o estudo de Robert (1982) sobre a convergência de sequências numéricas com alunos de ensino superior. Neste, a autora identifica a presença de algumas dificuldades específicas da convergência, estabelecendo quatro "modelos expressos": o modelo primitivo, o dinâmico, o estático e misto.

Robert classifica os modelos primitivos em estacionários e monótonos, que apresentam expressões como: "uma sequência que não passa de um determinado número: seu limite". Além disso, Santos (2005, p.29) ressalta que nesse modelo há os do tipo "barreira", que justificam expressões como "seus valores não podem ultrapassar L" ou "seus valores não o ultrapassam jamais".

Os modelos dinâmicos são relacionados com a monotonicidade. São representações deste modelo expressões como: "as imagens se aproximam cada vez mais de um número" ou "quanto mais n aumenta, mais a_n se aproxima de um número". Já os modelos estáticos são considerados como aquelas descrições numa linguagem básica, natural da definição estática por meio de (ε e N), por exemplo: "todos os termos, a partir de um determinado termo, devem estar em uma vizinhança de L tão pequena quanto se queira".

Considerando o nível de escolaridade no qual nossa pesquisa se insere, priorizamos o trabalho com o modelo dinâmico e, em alguns momentos, o modelo estático. No entanto, cabe investigar se os alunos também expressam a noção de limite, por meio do modelo primitivo ressaltado pela autora. Apenas não consideramos os modelos mistos, uma vez que eles são apresentados por meio de uma descrição estática e dinâmica. Parte-se da dinâmica: "a partir de um certo valor N todos os seus termos estão numa vizinhança de L cada vez menor" para a estática, a qual é expressa em símbolos por "$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ n_o \in N)\ (\forall\ n \geq n_o)\ (|a_n - L| < \varepsilon)$". Acreditamos que a definição estática do limite não seja apropriada para ser trabalhada no ensino médio, uma vez que a complexidade desta linguagem é alvo de estudos do ensino superior.

Em relação à passagem ao limite, Sierpinska observa que os alunos a fazem a partir de uma indução incompleta, isto é, calculam alguns termos da sequência e concluem o seu limite, o que matematicamente não é válido. Nesse sentido, Santos (2005, p.33) complementa que "para justificar um resultado não se pede para fazer demonstrações rigorosas, mas é suficiente encontrar uma fórmula que descreva a situação dada e que permita uma posterior verificação por um cálculo simples." Um dos nossos objetivos de pesquisa, centra-se justamente em analisar como os alunos tratam a passagem ao limite, uma vez que eles podem antecipar alguns resultados sem ao menos realizarem uma análise precisa das situações que envolvam o infinito. Isso corrobora com o fato de se "transferir automaticamente os métodos algébricos próprios à manipulação de grandezas finitas às infinitas", descrito por Sierpinska (1985). Um exemplo disso está ao tomarmos uma expressão do tipo $\frac{1}{\infty}$, em que não pode ser considerada literalmente em linguagem algébrica, como se operássemos com algo finito, exato.

Além do mais, Celestino (2008, p.52) ressalta a constatação de Robert que,

> [...] a dificuldade de considerar o caráter variável de *n* é um dos motivos que induz ao erro. Por exemplo: $\lim_{n \to \infty} (a_n)^n$ - em geral, os alunos não levam em conta na convergência de uma seqüência (a_n) que é o *n* a variável que tende ao infinito – Robert destaca aqui um erro de concepção indo além do simples abuso de notação, caracterizado por esquecer o "n ε N" que modifica a variável *n* na (a_n) ou o "$n \to \infty$" (CELESTINO, 2008, p.52)

Considerando-se a passagem ao limite junto aos métodos algébricos, um dos obstáculos destacados por Sierpinska refere-se ao símbolo "*lim*", o que leva os alunos a terem dificuldades em perceber que o *limite é* (ao invés do limite se aproxima, ou limite tende) e que a *função é que se aproxima* de. Assim, "a operação de limite foi simbolizada de uma maneira que enfatiza as semelhanças com a álgebra, oculta as diferenças e pode levar a uma perda de significação". (SIERPINSKA *apud* CELESTINO, 2008, p.50).

Celestino (2008) exemplifica a perda de significação, considerando o $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 1}{x - 3}$. Neste, se substituirmos o x por 5, obtemos o resultado 12. Porém, esse método da álgebra ignora o fato de que se a função não estiver definida no ponto 5 ou se a função não for contínua, essa passagem é inválida. Para isso, não basta apenas operar algebricamente sobre uma situação mesmo que encontremos o resultado esperado; é necessário darmos sentido e compreendermos a operação com a qual estamos lidando que, nesse caso, é o limite.

Em nosso estudo, um ponto de análise imperativa é a consideração de $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Deve-se observar que se "ignorarmos" o símbolo (*lim*), realizamos uma operação finita, na qual *n* simboliza um valor real, determinado. A partir do momento que operamos com o limite, é necessário analisar o comportamento da variável *n*, quando *n* tende ao infinito, isto é, operar e dar significado a noção de limite.

Uma possível dificuldade com a qual os alunos podem se deparar está em considerar *n* como sendo o infinito. Isso foi verificado na pesquisa de Nunes (2001) sobre a apropriação da noção de convergência de sequências numéricas com alunos universitários e que ainda não tinham sido introduzidos à noção de limite. A autora ressalta que os alunos consideravam o "infinito como sendo um número desconhecido", afirmando que *n* é infinito.

Quanto ao estudo de sequências numéricas, Nunes (2001) identifica dificuldades vinculadas à comparação de números negativos e no tratamento com os números em sua representação fracionária. Esses conceitos são fundamentais no estudo de progressões geométricas, já que as progressões cuja razão está entre os números -1 e 1 são as mais frequentes no estudo do tema. Em sua pesquisa sobre PGs via fractal, Gonçalves (2007) relata que os alunos confundiam a potenciação com a operação de multiplicação, isto é, ao encontrarem o enésimo termo de uma PG, indicavam *2n* ao invés de expressarem 2^n. Além disso, a autora aponta que um dos entraves ao lidarem com o tema estava relacionado ao processo de generalização.

Tais considerações nos levam a concluir que muitas das dificuldades elencadas anteriormente estão relacionadas ao campo da álgebra, permitindo algumas considerações a respeito disso. Segundo Usiskin (1995, p.13), "**As finalidades da álgebra** são determinadas por, ou relacionam-se com, **concepções** diferentes **da álgebra** que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos **usos das variáveis"**. Uma dessas concepções está na "*álgebra como aritmética generalizada"*, cujas variáveis centram-se em "generalizadoras de modelos" quando, por exemplo, generalizamos a soma: $2+2^2+2^3+....$ como $a_1+a_1.q+a_1.q^2+....,$ e os alunos realizam a tarefa de *traduzir* e *generalizar* os modelos expressos, como explica o autor.

Outra concepção de álgebra a qual fazemos referência nesse estudo é a *"álgebra como estudo de relações entre grandezas*", uma vez que consideramos uma função específica: as progressões geométricas. O autor ressalta que ao perguntarmos sobre "o que ocorre com o valor de 1/x quando x se torna cada vez maior"? isso é "suficiente para confundir os alunos. Não pedimos o valor de *x*, portanto *x* não é uma incógnita. Também não estamos pedindo ao aluno que traduza". (Id.,Ibid., p.15). Segundo esta concepção, uma variável consiste em um argumento, isto é, "representa os valores do domínio de uma função" (Id.,Ibid., p.16). Ainda sobre este assunto, o autor afirma que "apenas quando usadas como argumento as variáveis podem ser consideradas como variáveis mudas; os alunos têm uma certa dificuldade em entender bem esse uso especial de variáveis". (Id., Ibid., p.17).

Trabalhar com a álgebra, para o aluno, é sinônimo de "calcular com letras". Contudo, esse cálculo está subordinado a uma lógica das operações, em que é necessário estabelecer significado para a álgebra, no sentido de considerar números e operações num conjunto de afirmações expressas geralmente por igualdades, como explica Gimenez e Lins (1997). É em termos de estabelecer significados para a linguagem algébrica utilizada nesse estudo que é possível uma compreensão sobre o assunto abordado, e não apenas um simples "cálculo com letras".

3.2. QUADRO DIDÁTICO

3.2.1 A noção de limite e as progressões geométricas em documentos oficiais do ensino médio

Procuramos algumas propostas educacionais para o Ensino Médio nas orientações contidas no Guia do PNLEM[13] 2009 e PNLD de 2012, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), no PCN+ Ensino Médio[14] (1998) e no PCNEM (1998)[15] que possam contribuir para situarmos nosso objeto de estudo neste nível de escolaridade.

Segundo os PCNEM, a matemática do ensino médio,

[13] Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
[14] Orientações Educacionais Complementares dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
[15] Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

> [...] tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática [...] (BRASIL a,1998, p.40)

Levando-se em conta o papel formativo atribuído à matemática, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio retratam que os conteúdos escolares devem agregar o valor formativo, principalmente, no que tange ao desenvolvimento do pensamento matemático, o que significa:

> [...] colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.69-70)

Deste modo, observamos que o estudo da convergência das progressões geométricas infinitas pode valorizar o raciocínio matemático, o que implica no "saber-pensar" da matemática e não em apenas "saber-fazer" em matemática. No sentido de problematizar o conteúdo, os PCNEM propõem um "diálogo educativo":

> O efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado da ciência é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto-elaboração, pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões. (BRASIL a, 1998, p. 52).

Daí a importância de valorizarmos os conhecimentos prévios dos alunos no processo de aprendizagem ao realizarmos o estudo deste conteúdo específico. Esse diálogo se torna importante ao lidarmos com as somas infinitas de progressões geométricas, em especial as convergentes, que muitas vezes ferem a intuição. Para exemplificar, retomemos um exemplo relatado no capítulo anterior, em que consideramos um recipiente de capacidade 1L de adicionarmos quantidades de água infinitamente, seguindo certo padrão. No primeiro dia adiciona-se $\frac{1}{2}$ L de água, no segundo dia $\frac{1}{4}$ L de água, no terceiro dia $\frac{1}{8}$ L de água, e assim sucessivamente. Ao perguntarmos se a água preencherá o recipiente com o passar do tempo, estaremos diante de uma situação que envolve tanto conhecimentos matemáticos quanto conhecimentos práticos e intuitivos. Esta visão é caracterizada pela ideia de limite. Mas o que os parâmetros curriculares, nesse nível de escolaridade, recomendam sobre esse conceito matemático?

Em busca de uma resposta a essa questão, verificamos que os PCN+ Ensino Médio fazem menção a ideia de limite, sobretudo, vinculada ao contexto das progressões geométricas. Como já havíamos mencionado, é nesse documento que se relata a importância desse aprendizado no contexto das progressões, ressaltando que

> O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as idéias de convergência e de infinito [...] (BRASIL b, 1998, p.121)

Tendo em vista que o conceito de limite faz parte do rol de conteúdos do ensino superior, o Guia do PNLD de 2012 relata que este conceito, assim como o de derivadas, é considerado opcional no ensino médio. No entanto, nosso estudo corrobora com a possibilidade ressaltada pelos PCN+ do E.M de oportunizar aos alunos um contato com noções intuitivas do Cálculo, permitindo-os estabelecer e compreender algumas relações tanto no campo numérico quanto ao algébrico. Como as progressões geométricas fazem parte do campo da Álgebra, que abrange os números e funções, os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam a possibilidade de relacionar alguns conceitos de sequência com a função exponencial, ao propor a análise do comportamento de uma sequência, seja ela crescente ou decrescente. De posse desta análise voltamos nossa atenção para o uso de recursos didáticos. Segundo o Guia do PNLD de 2012, o uso de recursos computacionais, como a calculadora, permite em curto tempo realizar experimentos que possibilitam interpretar os dados obtidos, assim como dar significado às informações levantadas. Por isso, ao fazermos uso da calculadora, buscamos trabalhar a noção de limite de progressões geométricas de forma intuitiva,

> Contudo, não podemos esquecer que é indispensável, também, compreender e saber justificar os procedimentos de cálculo e as fórmulas que os definem, para que se possa exercer o controle dos cálculos e dos algoritmos realizados pelos artefatos tecnológicos (BRASIL, 2011, p. 37).

Outro recurso que os PCN+ do E.M recomendam é o trabalho em grupo. Concordamos com essa proposta, uma vez que ela enfatiza a importância da comunicação, de modo que os alunos possam relatar e expressar entre si o que estão entendendo, utilizando-se de uma linguagem acessível ao grupo.

Quanto à organização e distribuição dos conteúdos matemáticos nas três séries do ensino médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais alocam o estudo das progressões geométricas no 1° ano do ensino médio. Portanto, buscamos verificar no Guia de livros didáticos de 2012, do ensino médio, como nosso tema apresenta-se nos livros didáticos e as recomendações para o seu trabalho em sala de aula. Relatamos a seguir uma análise de nosso conteúdo em alguns dos livros aprovados no PNLD 2012 e no PNLEM 2009.

3.2.2 Análise de livros didáticos aprovados no PNLEM 2009 e PNLD 2012

Uma obra didática constitui um material auxiliar ao trabalho do professor em sala de aula e é, muitas vezes, seu principal alicerce para a elaboração e estruturação dos conteúdos a serem ensinados. Por isso a forma como os livros didáticos abordam um conteúdo muito influencia no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Sendo assim, julgamos pertinente a análise de alguns livros didáticos, em especial no que tange às progressões geométricas infinitas.

Para a seleção dos livros didáticos a serem analisados, consideramos a adoção de um livro na escola em que foi realizada a fase de experimentação desta pesquisa, e o livro de apoio usado pelo professor que leciona a disciplina de matemática e que ministra as aulas de sequências numéricas na escola. Ressaltamos que estes dois livros foram aprovados no PNLEM de 2009. O critério de seleção dos outros dois livros foi a aprovação destes na última avaliação do livro didático, cujas orientações constam no Guia do PNLD de 2012. Acreditamos que eles podem trazer novas perspectivas de abordagem da noção de limite em PG, contribuindo com esta pesquisa. Os livros escolhidos para essa análise encontram-se no quadro a seguir:

L_1	- Matemática Completa – volume 1. José R. Giovanni e José R. Bonjorno. Editora FTD 2005 – 2ª edição	Livro aprovado no PNLEM 2009
L_2	- Matemática – volume único. Luiz Roberto Dante. Editora Ática 2008. 1ª edição	Livro aprovado no PNLEM 2009
L_3	- Matemática, Ciência e Aplicações - vol.1. Gelson Iezzi; Osvaldo Dolce; David Degenszajn; Roberto Périgo; Nilze de Almeida. Editora Saraiva 2010 - 6ª edição	Livro aprovado no PNLD 2012
L_4	- Matemática, Ensino Médio – vol.1. Kátia S. Smole e Maria I. Diniz. Editora Saraiva 2010 - 6ª edição	Livro aprovado no PNLD 2012

Quadro 1. Livros didáticos analisados nesta pesquisa

Para analisar alguns aspectos que consideramos primordiais neste material, procuramos investigar a abordagem da noção de limite em PG infinitas nos livros didáticos selecionados. De maneira geral, observamos que <u>todos</u> os livros analisados abordam a noção de limite no estudo de progressão geométrica na 1ª série do ensino médio, conforme recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

3.2.2.1 Abordagem da noção de limite no estudo das PGs infinitas

Selecionamos esse critério de análise com o objetivo de investigar como os livros didáticos que escolhemos trazem a noção de limite no estudo das progressões geométricas infinitas, bem como se suas propostas estão de acordo com nossos objetivos de pesquisa. Nossa análise foi calcada na identificação dos principais aspectos que se evidenciam na explanação desse conteúdo.

a) Sobre o livro L_1:

Ao introduzir a noção de limite, o livro parte da representação geométrica de um quadrado de lado 1. Nela, toma-se a metade da área do quadrado e divide-se a parte restante ao meio, repetindo-se esse processo até a terceira operação. As sequências das áreas obtidas formam a PG ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ...). Porém, prossegue-se até a n-ésima operação, obtendo-se a soma $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$ e aplica-se a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG. Em seguida, analisa-se o resultado obtido ($1 - \frac{1}{2^n}$), quando *n* cresce infinitamente, a partir dos quatro primeiros termos da sequência $\frac{1}{2^n}$, como mostra a figura a seguir.

Aplicando a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PG, temos:

$$S_n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Quando *n* cresce indefinidamente, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se aproxima cada vez mais de zero. Observe:

$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}5$ $\quad\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$ $\quad\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$ $\quad\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625$ ...

Figura 1: Introdução ao limite
Fonte: Giovanni J. R & Bonjorno J. R (2005)

Desta forma, conclui-se que "S_n se aproxima cada vez mais de 1", apresentando a noção de limite.

Desse modo, S_n se aproxima cada vez mais de 1. Para representar esse fato, escrevemos:

$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$ (Lê-se: limite de S_n, quando n tende a infinito, é igual a 1.)

ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$

Figura 2: Institucionalização da noção de limite no livro L_1
Fonte: Giovanni J. R & Bonjorno J. R (2005)

Notemos que o livro sistematiza a noção de limite de forma prematura, ao concluir que S_n aproxima-se de 1 e cuja participação do aluno na construção dos resultados não é evidenciada, com propostas de questionamentos ou atividades, por exemplo. Após a apresentação do limite, não se faz referência a representação geométrica do quadrado inicial, o que poderia ser retomado, e parte-se para os casos de convergência e divergência de acordo com os valores da razão (q).

Para o caso em que $-1 < q < 1$, o livro apresenta a fórmula de S_n relatando que, de forma análoga ao $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pode-se considerar que q^n também se aproxima cada vez mais de zero, como mostra a figura a seguir:

Com procedimento análogo ao visto para $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, pode-se mostrar que, quando n cresce indefinidamente, q^n se aproxima cada vez mais de zero.

Vejamos o que acontece com S_n.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}$$

Ora, $n \to \infty \Rightarrow q^n \to 0$. Como a_1 e q são constantes, $\frac{a_1 q^n}{1 - q} \to 0$.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$ (soma finita)

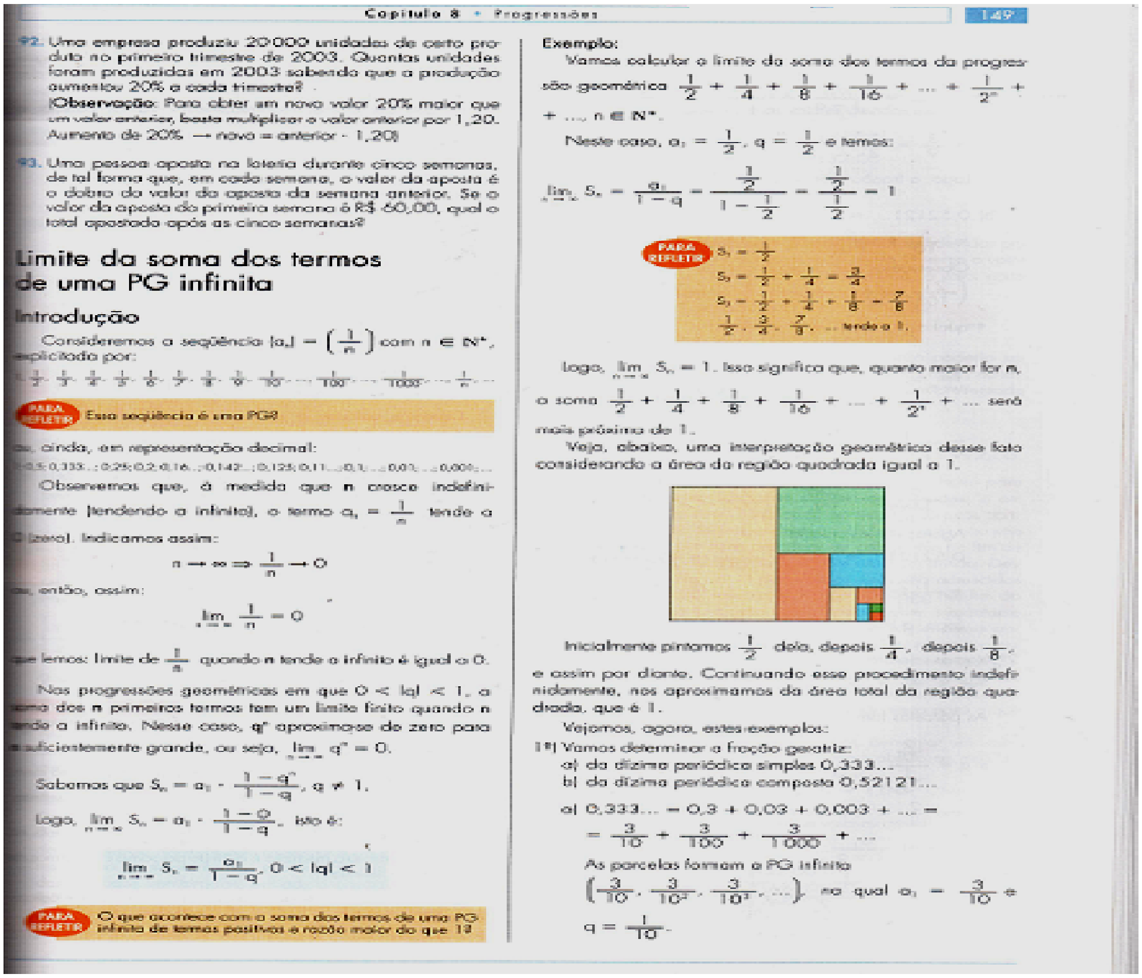
Quando a PG infinita possui soma finita, dizemos que a série é *convergente*.

Figura 3: Uma soma convergente
Fonte: Giovanni J. R & Bonjorno J. R (2005)

No entanto, observamos que o mesmo usa a notação ($n \to \infty \Rightarrow q^n \to 0$) sem mencionar anteriormente o significado dessa linguagem e, em seguida, afirma que "*quando a PG infinita possui soma finita, dizemos que a série é convergente*". Essa afirmação concisa, parecendo um tanto contraditória, pode levar os alunos a uma interpretação errônea de uma soma convergente, induzindo a interpretação de que a soma infinita deixa de ser infinita, ou seja, passando a ser considerada como finita. Ao invés de mencionar "soma finita", os autores poderiam deixar claro que a soma infinita converge para um valor numérico, que é o limite. Após considerar outros dois casos: $|q| > 1$ e $|q| < -1$, o livro afirma que *"quando a PG infinita não possui soma finita, dizemos que a série é divergente"*. São apresentados, posteriormente, alguns exercícios resolvidos, referindo-se um deles ao cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica. Entretanto, os autores o resolvem por meio do limite, sem realizar nenhum comentário a respeito e, como de praxe, seguem os exercícios propostos. Novamente, deixa claro a exclusão dos alunos do processo e a preocupação em apresentar de forma rápida e concisa o resultado. Além disso, em todos os exercícios do livro, não há indícios de somas divergentes.

b) Sobre o livro L_2:

Na figura a seguir apresentamos como o autor do livro L_2 sistematiza o limite da soma infinita dos termos de uma PG.



Capítulo 8 • Progressões 149

92. Uma empresa produziu 20 000 unidades de certo produto no primeiro trimestre de 2003. Quantas unidades foram produzidas em 2003 sabendo que a produção aumentou 20% a cada trimestre?
(Observação: Para obter um novo valor 20% maior que um valor anterior, basta multiplicar o valor anterior por 1,20. Aumento de 20% ⟶ novo = anterior · 1,20)

93. Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da aposta da semana anterior. Se o valor da aposta da primeira semana é R$ 60,00, qual o total apostado após as cinco semanas?

Limite da soma dos termos de uma PG infinita

Introdução

Consideremos a seqüência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$, explicitada por:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

PARA REFLETIR Essa seqüência é uma PG?

ou, ainda, em representação decimal:

1; 0,5; 0,333...; 0,25; 0,2; 0,16...; 0,142...; 0,125; 0,11...; 0,1; ...; 0,01; ...; 0,001; ...

Observemos que, à medida que n cresce indefinidamente (tendendo a infinito), o termo $a_n = \frac{1}{n}$ tende a 0 (zero). Indicamos assim:

$$n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0$$

ou, então, assim:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

que lemos: limite de $\frac{1}{n}$ quando n tende a infinito é igual a 0.

Nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de zero para n suficientemente grande, ou seja, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Sabemos que $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, $q \neq 1$.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$, isto é:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q},\ 0 < |q| < 1$$

PARA REFLETIR O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão maior do que 1?

Exemplo:

Vamos calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

PARA REFLETIR
$S_1 = \frac{1}{2}$
$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ tende a 1.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$. Isso significa que, quanto maior for n, a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ será mais próxima de 1.

Veja, abaixo, uma interpretação geométrica desse fato considerando a área da região quadrada igual a 1.

Inicialmente pintamos $\frac{1}{2}$ dela, depois $\frac{1}{4}$, depois $\frac{1}{8}$, e assim por diante. Continuando esse procedimento indefinidamente, nos aproximamos da área total da região quadrada, que é 1.

Vejamos, agora, estes exemplos:

1º) Vamos determinar a fração geratriz:
a) da dízima periódica simples 0,333...
b) da dízima periódica composta 0,52121...

a) $0{,}333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots =$
$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$
As parcelas formam a PG infinita $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots\right)$ na qual $a_1 = \frac{3}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$.

Figura 4: A sistematização da noção de limite em L_2
Fonte: Luiz Roberto Dante (2005)

Ao introduzir a noção de limite, acreditamos que o termo geral $\frac{1}{n}$ poderia ter sido substituído por uma PG, uma vez que o aluno deve se familiarizar com esse tipo de sequência.

Aqui, novamente percebe-se a preocupação em apresentar rapidamente a síntese, sem apresentar questionamento ou atividades que envolvam os alunos no processo de análise e participação na construção do resultado. Cabe ressaltar que, neste momento, explica-se de forma apropriada o conjunto de significantes que está sendo utilizado para tratar de limite. Contudo, a maneira como o livro substitui q^n por zero na fórmula da soma dos n primeiros termos da PG não foi bem explanada ao apresentar $\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1-0}{1-q}$. Por mais que se esteja calculando uma soma infinita, em termos de limite, é necessário considerar que há o cálculo de dois limites distintos, um referente à soma infinita e outro referente ao termo q^n, quando n

cresce infinitamente. É provável que essa forma concisa e abreviada de apresentar esses cálculos envolvendo limites possa gerar certa dificuldade para os alunos ao lidarem com essa noção. Logo abaixo, o autor deixa a cargo do aluno a reflexão sobre o que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita cuja razão seja maior que 1. Todavia, o livro carece de uma institucionalização acerca das somas divergentes, pois, em seguida, o autor prossegue com uma exemplificação da noção de limite por meio da representação geométrica do quadrado de lado 1 e suas infinitas subdivisões. Porém, em dois momentos distintos observamos as seguintes afirmações:

1) *"Logo, $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$. Isso significa que, quanto maior for n, a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+ \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$* ***será mais próxima de** 1."*

Em seguida, o livro considera a área da região quadrangular e afirma:

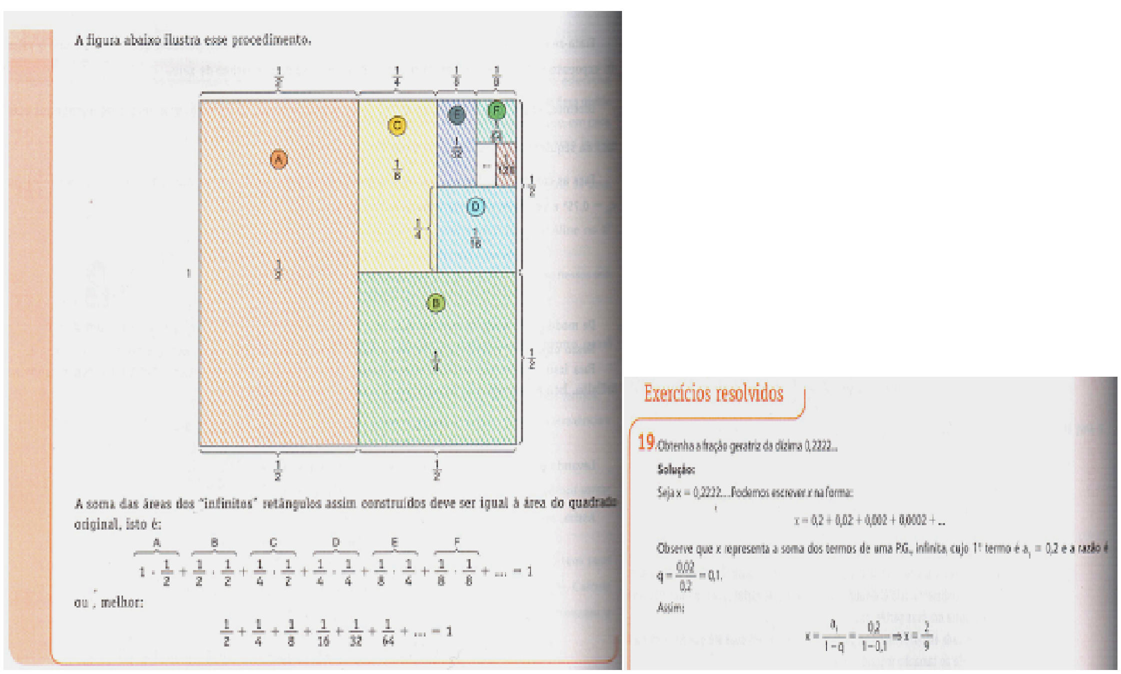
2) "Continuando esse procedimento indefinidamente, ***nos aproximamos da área total*** *da região quadrada, que é 1."*

A maneira como L_2 enfatiza que a soma apenas se aproxima de 1 reforça a ideia do infinito potencial, evidenciando apenas a forma dinâmica de lidar com o limite, priorizando a aproximação de uma soma infinita em relação a um valor numérico, isto é, a soma dada não pode atingir a área total de 1 cm^2. Por fim, o autor traz algumas atividades resolvidas que, assim como o livro L_1, também traz o cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica, sem provocar alguns questionamentos nos alunos. Além disso, observamos que nas resoluções só se aplica $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$, uma vez que todas as atividades propostas também são convergentes.

c) Sobre o livro L_3:

O livro L_3 inicia a apresentação da noção de limite discutindo o comportamento da sequência $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, definida pelo seu termo geral. Em sua explanação o livro analisa o comportamento da progressão para n =1,2,3,4,10, **indicando a continuidade desta**, diferentemente do que encontrávamos nos demais livros. Após a observação, relata-se que "à medida que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero", caracterizando-se em seguida a noção de limite. Sugere-se ainda algumas progressões semelhantes a esta para que os alunos analisem o comportamento entre elas. No entanto, deixa a cargo do aluno a verificação de progressões do tipo: *"$a_n=2^n$; $b_n=10^n$ ou $c_n= -(4^n)$"* que, uma vez divergentes, não apresentam o mesmo comportamento das progressões anteriores.

A forma como o livro introduz a noção de limite alinha-se com nossos objetivos; porém, L_3 explicita que vai se restringir às somas cuja razão é tal que $-1 < q < 1$. Assim, não se institucionaliza o comportamento das sequências cujo módulo da razão é maior que 1, dificultando a familiarização do aluno com o caso de PG divergentes. Por mais que as progressões divergentes não sejam exploradas, o cálculo do limite de PG cujo $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$ é realizado adequadamente. Com o objetivo de explorar a noção de limite da soma infinita de uma PG, o livro também utiliza a representação geométrica do quadrado de lado 1, como vemos a seguir:


A figura abaixo ilustra esse procedimento.

A soma das áreas dos "infinitos" retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado original, isto é:

$$\underbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{B} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{C} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{D} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}_{E} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}_{F} + \ldots = 1$$

ou, melhor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1$$

Exercícios resolvidos

19. Obtenha a fração geratriz da dízima 0,2222...

Solução:

Seja x = 0,2222... Podemos escrever x na forma:

$$x = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \ldots$$

Observe que x representa a soma dos termos de uma P.G. infinita, cujo 1º termo é $a_1 = 0{,}2$ e a razão é $q = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1$.

Assim:

$$x = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}2}{1-0{,}1} \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

Figura 5: A noção de limite em L_3
Fonte: Iezzi; Dolce; Degenszajn; Périgo; Almeida (2010)

O livro deixa explícito o processo de construção das áreas da região quadrada e, ao contrário dos livros L_1 e L_2, relata que a soma das áreas consideradas "deve ser igual à área do quadrado original". Neste caso, o L_3 aborda a ideia de limite de uma soma infinita de PG de maneira adequada e consistente, concluindo assim que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=1$, não dando margem a uma interpretação errônea dessa situação.

Outro aspecto a ser considerado são os exercícios resolvidos abordados no livro. Todos consideram x como sendo a soma infinita e $x=\frac{a_1}{1-q}$, e por mais que o autor esteja considerando apenas as somas convergentes, acreditamos que essa forma de resolução ignora a noção de limite, uma vez que é ela que permite que este cálculo seja efetuado. Tal método de resolução pode contribuir para que os alunos a tomem como método de resolução para qualquer soma dada, inclusive nas somas divergentes.

Essa forma de sistematização, por mais que induza o aluno a conjecturar sobre o caso de uma PG divergente, descarta a necessidade de um processo de institucionalização, já que pode levá-los a concluir que toda soma infinita de PGs seja convergente.

d) Sobre o livro L_4:

Neste livro, inicia-se sua explanação com duas progressões geométricas definidas pelo seu termo geral, cuja finalidade está na análise do comportamento destas, quando *n* tende ao infinito. Ao contrário dos outros livros, consideram uma representação gráfica para analisar o comportamento dos termos das PGs, como mostra a figura abaixo.

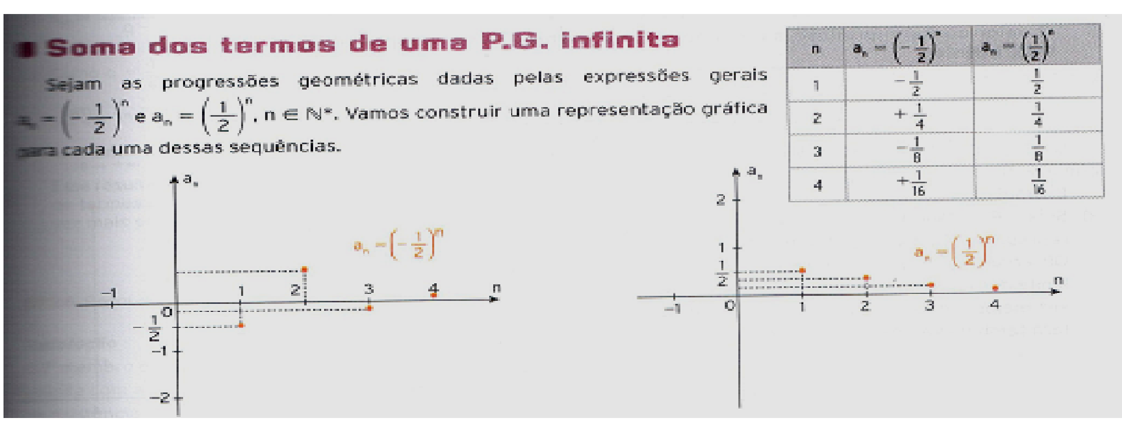


Figura 6: Representação gráfica de progressões geométricas
Fonte: Kátia S. Smole e Maria I. Diniz (2010)

O livro não traz uma indicação de que os termos das progressões continuam após o 4° termo considerado na tabela apresentada, uma vez que ao se tratar de progressões geométricas **infinitas,** a sua ausência pode dificultar a compreensão dessa noção pelos alunos. Em seguida, apresenta-se o texto a seguir para explicar o comportamento das progressões consideradas anteriormente e, consequentemente, introduzir a noção de limite.

Observando as representações gráficas, notamos que, à medida que aumentamos o valor de n, os pontos **vão se aproximando do eixo horizontal.** Nos dois casos apresentados, os termos da sequência **não interceptarão o eixo horizontal,** apenas se aproximarão cada vez mais do valor zero, à medida que os valores de n forem aumentando.

Dizemos, então, que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tendem a zero ou têm limite zero quando n tende a infinito e representamos desta forma:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Outros exemplos de sequências que têm limite zero para n tendendo a $+\infty$ são: $\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $-\left(\frac{1}{4}\right)^n$; $(0{,}6)^n$; $(-0{,}7)^n$.

De forma geral:

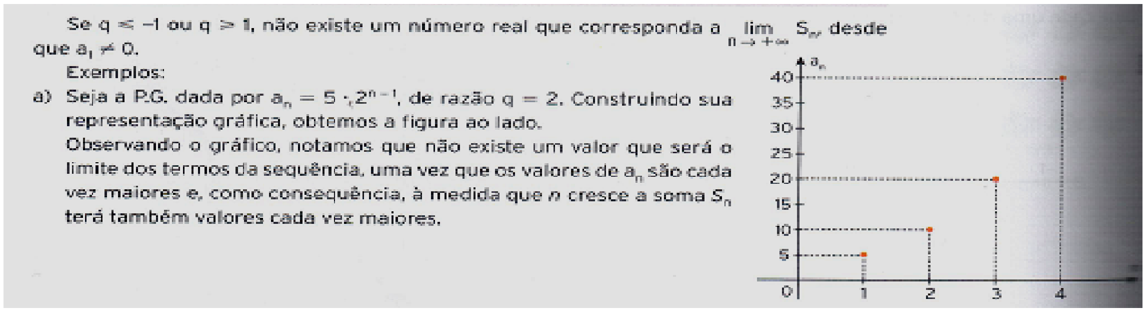
$$\text{Se } -1 < q < 1, \text{ então } \lim_{n \to +\infty} q^n = 0.$$

Outra forma de expressar isso é dizer que os termos da sequência $(1, q, q^2, \ldots)$, com $-1 < q < 1$, convergem para zero.

Figura 7: Introdução a noção de limite em L_4
Fonte: Kátia S. Smole e Maria I. Diniz (2010)

Nesse fragmento o livro destaca o fato de que os termos da sequência <u>nunca</u> interceptarão o eixo horizontal, afirmando que apenas se aproximarão cada vez mais de zero. Entretanto, introduz-se noção de limite sem explicar por que os termos não interceptam o eixo. Nesse ponto, consideramos que faltou uma justificativa plausível para essa afirmação, pois da forma como foi explicada e, seguindo para a noção de limite, reforça novamente o fato de que o limite é um valor no qual a função apenas se aproxima, sem ser atingido.

Seguindo o modelo apresentado no livro L_3, observamos que L_4 analisa a fórmula dos n primeiros termos de uma PG considerando o caso em que a razão esteja entre -1 e 1, obtendo $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$. Diferentemente dos livros anteriores, L_4 foca na discussão sobre os casos em que a razão $q \leq -1$ e $q \geq 1$ e, posteriormente, institucionaliza que "*não existe um número real que corresponda a* $\lim_{n\to\infty} S_n$*, desde que* $a_1 \neq 0$". Essa forma de sistematização estaria coerente com os preceitos da Teoria das Situações Didáticas que, ao propor situações para que os alunos construam seus conhecimentos seja necessário também, dar um estatuto de saber sobre as afirmações levantadas, ao apresentar de uma maneira formalizada e objetiva o que concerne ao conhecimento em questão. Assim, para mostrar a divergência das PGs, as autoras apresentam uma representação gráfica para os casos em que a razão seja maior que 1, seja igual a 1 (uma sequência constante) e menor que -1. Segue abaixo um dos exemplos.


Se $q \leq -1$ ou $q \geq 1$, não existe um número real que corresponda a $\lim_{n \to +\infty} S_n$, desde que $a_1 \neq 0$.

Exemplos:

a) Seja a P.G. dada por $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, de razão $q = 2$. Construindo sua representação gráfica, obtemos a figura ao lado.

Observando o gráfico, notamos que não existe um valor que será o limite dos termos da sequência, uma vez que os valores de a_n são cada vez maiores e, como consequência, à medida que n cresce a soma S_n terá também valores cada vez maiores.

Figura 8: Indícios de uma soma divergente de PG
Fonte: Kátia S. Smole e Maria I. Diniz (2010)

O livro exemplifica o comportamento dos termos de progressões geométricas, mas não retoma a análise do limite na fórmula de S_n. Assim como nos demais livros analisados, também finaliza este tópico com exercícios resolvidos e propostos, considerando apenas as somas convergentes. No quadro abaixo, sintetizamos os elementos que se mais destacaram nessa análise.

Principais aspectos da análise		L_1	L_2	L_3	L_4
Utiliza a representação geométrica (quadrado de lado 1 e suas infinitas subdivisões)	Enfatizando o infinito potencial	x	x		
	Transitando do infinito potencial ao infinito atual			x	
Analisa o comportamento dos termos de uma PG convergente	Utilizando poucos termos da PG	x			x
	Adequadamente e indicando continuidade		x	x	
	Fazendo uso de representação gráfica				x
Analisa o comportamento dos termos de uma PG divergente	Propõe a discussão, mas deixa as conclusões a responsabilidade do aluno		x	x	
	Adequadamente e com explanação	x			x
	Fazendo uso de representação gráfica				x
Utiliza linguagens e notações simbólicas	Adequadamente		x	x	x
	Pouco adequadamente	x			
Apresenta exercícios resolvidos e propostos	Tratando apenas de PGs convergentes	x	x	x	x
	Tratando de PGs convergentes e divergentes				
Apresenta a noção de limite e a soma dos termos de uma PG divergente	Com explicação	x			x
	A cargo do aluno (sem institucionalização)		x	x	
Realiza a passagem ao limite na fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG	De forma imediata		x		x
	Com explicação, porém sem propor o envolvimento dos alunos no processo de construção	x		x	
Simplifica o cálculo do limite na soma dos termos de PGs	Uso imediato da regra-em-ação $x = \frac{a_1}{1-q}$ ou $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$	x	x	x	x

Quadro 2: Síntese da análise de livros didáticos

Com os dados obtidos, observamos a necessidade de se tratar a noção de limite com diferentes situações em que os alunos possam confrontar os casos, os quais uma soma infinita seja divergente ou não, discutindo a passagem ao limite realizada com a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PG.

A confluência entre as análises deste capítulo nos leva a algumas perspectivas para a análise de dificuldades inerentes ao processo de construção da noção de limite.

3.2.2.2 Confluências entre aspectos epistemológicos e didáticos: Os teoremas-em-ação

A partir dos dados que levantamos sobre o desenvolvimento da noção de limite na história da matemática, das pesquisas que versam sobre o tema, bem como nas análises nos livros didáticos, verificamos que muitas das dificuldades enfrentadas pelos matemáticos antigos no trato com a noção de limite, como o infinito potencial e atual, bem como os obstáculos levantados por Cornu (1983) e Sierpinska (1981) e as questões ligadas à álgebra se fizeram presentes de forma constante nos livros didáticos analisados. Isso nos permitiu constatar que as dificuldades, que os alunos podem apresentar durante este estudo, estejam vinculadas a certos tipos de teoremas-em-ação errôneos que mobilizam, tidos como pertinentes para resolver tais situações propostas. Desta forma, propomos quatro teoremas-em-ação que também nos subsidiará na análise das dificuldades e na mobilização dos conhecimentos dos alunos no processo de construção da noção de limite de PGs infinitas. Dentre os teoremas, listamos:

T_1: *Os termos de uma PG apenas se aproximam cada vez mais de certo valor, mas não o atingem.*

Este teorema partiu das observações de Sierpinska (1985), quando a mesma afirma que a noção de convergência dos alunos está imbricada a uma aproximação, isto é, a um movimento físico, fazendo uso de expressões do tipo: “se aproxima cada vez mais”. Isso faz com que vigore a impossibilidade de uma sequência atingir certo valor, como vimos nas observações de Cornu (1983) quanto aos obstáculos ligados à noção de limite, bem como, em algumas explanações nos livros didáticos analisados.

T_2: *O limite da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica infinita é o mesmo que o limite do termo geral desta PG, isto é, o valor limite é zero.*

Evidenciamos esse teorema-em-ação, pois com relação à convergência dos termos de uma progressão geométrica de razão entre -1 e 1, poderia surgir a dificuldade de associar o limite do termo geral de uma progressão geométrica com o limite das somas parciais. Esta suposição está baseada na hipótese da não distinção entre esses dois limites pelo aluno, uma vez que para uma série geométrica ser convergente é necessário que o limite do termo geral seja zero.

T_3: *Uma soma infinita não pode corresponder a um número real*

Este teorema parte de afirmações que reforçam a ideia do infinito potencial, como vimos nos livros didáticos. A dificuldade em aceitar que uma soma infinita possa ser expressa por um valor real está intrínseca a história da noção de limite e do infinito, sendo manifestada desde os matemáticos gregos. Um exemplo deste teorema se dá quando os alunos enunciam frases do tipo: "*nunca vai chegar a 1, por que vai ser infinito [...]*".

T_4: *Uma soma infinita tende ao infinito.*

Relacionamos este teorema com as dificuldades que os alunos possuem em aceitar que uma soma infinita possa corresponder a um número real. Ao contrário de T_3, o identificamos pela possibilidade de os alunos associarem que se uma soma é infinita necessariamente ela deve tender ao infinito. Em outras palavras, seria "natural" o relato de que uma operação que envolva o infinito só pode ter como "resultado" o próprio infinito.

Ao considerarmos que a maior parte dos teoremas-em-ação como sendo do tipo errôneos, buscaremos verificar se as dificuldades dos alunos serão superadas ou não. Nosso papel está em propor situações que possam desestabilizar esses invariantes a fim de que os alunos possam construir esquemas mais eficazes durante a aplicação da sequência didática, que será descrita e analisada a seguir.

4 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Em uma engenharia, a análise *a priori*, segundo Artigue (1996, p.205), "comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva [...] centrada nas características de uma situação adidática que se pretendeu constituir e que se vai procurar devolver aos alunos." Assim, de acordo com nossos objetivos de pesquisa e a partir das análises preliminares realizadas, apresentamos aqui a descrição das escolhas efetuadas nesta pesquisa, que nos permitiram a elaboração, organização e análise de nossa sequência didática. É nesta fase que "o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema [...] variáveis de comando, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado" (ARTIGUE, 1996, p. 202).

4.1 A ESCOLHA DOS PROBLEMAS

Em busca de encontrar respostas para nossa questão de pesquisa: "**De que forma um estudo de progressões geométricas infinitas pode contribuir para que alunos de ensino médio construam a noção de limite?",** desenvolvemos uma sequência didática composta por algumas tarefas apresentadas no estudo de PG em livros didáticos do ensino médio e adaptadas para que pudessem atender aos nossos objetivos de pesquisa. Na análise realizada no capítulo 3 observamos que muitas vezes os livros didáticos não trazem uma exploração com situações e conceitos que permitem dar significado a este conteúdo, ignorando as articulações entre eles. Assim, as tarefas aqui propostas têm o objetivo de colocar os alunos frente a situações que contribuem para a elaboração de conjecturas, estabelecendo relações entre os procedimentos e afirmações já manifestadas, para que eles possam construir gradativamente seus conhecimentos acerca da noção de limite.

Então, como explorar a noção de limite com o estudo de PGs? Primeiramente, propusemos algumas tarefas com o objetivo de familiarizar os alunos com o conceito de progressões geométricas, levando-os a identificar regularidades, e partir rumo a um processo de generalização e construção das fórmulas gerais. Em seguida, buscamos contemplar a noção de limite de forma intuitiva, envolvendo um estudo sobre o comportamento dos termos de progressões geométricas convergentes e divergentes.

Para este fim, abordamos a noção de limite com o uso da calculadora, que permite realizar estimativas dos cálculos efetuados e analisar as aproximações obtidas. No entanto, objetivamos a exploração de algumas situações em que o uso da calculadora é restrito, e estas devem ser resolvidas por meio de algum modelo algébrico. Procedemos assim, por acreditarmos ser necessário que os alunos sintam a necessidade de um método de resolução, em busca de validar os cálculos que efetuam empiricamente. Essa decisão corrobora com Nunes (2001), quando ela relata que, em alguns casos, "o arredondamento das somas efetuadas pela calculadora "mascara" as aproximações, pois o número de dígitos é limitado", o que pode contribuir para interpretações errôneas a respeito da convergência.

Porém, essas situações tornam-se mais complexas à medida que as esmiuçamos, de modo que apenas a intuição como estratégia base não é suficiente para averiguar o que acontece com a soma infinita dos termos de uma PG dada. Assim, partimos de um exemplo aritmético para a construção do algébrico, visando o processo de dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG para que, posteriormente, pudéssemos propor tarefas que envolvam o cálculo do limite de uma soma infinita de PGs. Deste modo, é possível que as dificuldades dos alunos venham à tona conforme as tarefas restringem a possibilidade do uso de determinadas estratégias, principalmente quando a operação de passagem ao limite se faz indispensável ao cálculo algébrico considerado.

Outra escolha que realizamos nesse estudo é a presença de situações que contemplem algumas dízimas periódicas. Ao questionarmos, por exemplo, se 1 é igual a 0,9999... acreditamos ser essencial a exploração da noção de limite da soma dos termos de PG infinitas, uma vez que esta consiste em um método de resolução e validação para este tipo de tarefa.

Relatadas algumas escolhas dos problemas a serem propostos aos alunos, buscamos identificar as variáveis didáticas dessa sequência e os valores que estas podem assumir em cada atividade proposta.

4.2 AS VARIÁVEIS DIDÁTICAS

Segundo Almouloud (2007, p. 36), as variáveis didáticas são "aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas, o que a torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem". A partir da escolha dessas variáveis didáticas é possível analisarmos a construção da noção de limite pelos alunos diante de diferentes situações no meio dado. Elencamos e descrevemos a seguir três variáveis didáticas, por acreditarmos que a maneira como "jogamos" com estas pode influenciar na determinação das estratégias a serem apresentadas pelos alunos diante das situações propostas.

4.2.1 Variável de situação 1: Uso da calculadora

O uso da calculadora como um instrumento didático na construção dos conceitos matemáticos pelos alunos contribui para a exploração e a formulação de conjecturas. Segundo Silva, Loureiro e Veloso (1990), a calculadora permite concluir que as respostas dadas pelos alunos, num processo de generalização e construção de expressões para determinados problemas, podem estar mais ligadas a "base intuitiva". Por outro lado, ela contribui para a construção da noção de convergência por meio das aproximações, quando os alunos têm contato com "o conceito de vizinhança, como intervalo de números reais, em que o ponto de convergência é o centro e não um dos extremos".

Diante desses pressupostos, consideramos a calculadora como uma variável didática de nossa sequência, pois ela pode contribuir para o levantamento de conjecturas sobre a noção de limite de progressões geométricas. Contudo, ao restringirmos o seu uso, os alunos serão capazes de pensar em novas estratégias de resolução que apenas a estimativa de alguns cálculos efetuados ou o uso de sua própria intuição não seria suficiente para justificar e validar as afirmações levantadas. Conjecturar com e sem o uso das calculadoras nos permitirá analisar como os alunos mobilizam e constroem os conceitos envolvidos nesse estudo nos diferentes momentos em que a noção de limite é apresentada pelos alunos.

4.2.2 Variável de situação 2: Representação figural no enunciado da situação-problema

Consideramos a presença de uma representação figural no enunciado da situação-problema como uma variável didática visto que, ao estar presente no enunciado do problema, tal recurso pode facilitar a interpretação deste e, consequentemente, dar indícios de possíveis validações e do processo infinito presente nas situações. Além disso, deve-se levar em conta o tipo de representação utilizada e sua complexidade, porque estes fatores influenciam na busca do aluno por novas estratégias para solucionar o problema proposto. No entanto, quando ele é colocado frente a tarefas que não possuem essas representações, deve conjecturar e apresentar novas formas de lidar com os problemas que, se tivesse contato com alguma representação, poderia induzir algum valor limite, apenas pelo que visualizam.

4.2.3 Variável de situação 3: O tipo de progressão geométrica

Ao analisarmos a noção de limite de progressões geométricas vimos que o tipo de PG é peça chave de nosso estudo. Desse modo, consideramo-lo como uma variável didática, já que em determinadas situações o aluno pode apresentar estratégias base fazendo uso apenas de sua intuição, sem conjecturar sobre a convergência delas. Isso o leva a responder sem nenhuma dificuldade, por exemplo, quando perguntamos sobre o comportamento da progressão geométrica definida por 2^n. Neste caso, o aluno não necessita refletir sobre as aproximações destas, ao contrário das sequências definidas por $\left(\frac{3}{2}\right)^n$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(-\frac{5}{4}\right)^n$. Ele deve fazer uso de outras estratégias para verificar se os termos de uma progressão geométrica se aproximam ou não de algum valor, pois, nesse momento, determinar poucos termos de uma sequência pode não levá-lo à estratégia ótima.

4.3 OS SUJEITOS DE PESQUISA

Ao final do ano de 2010 havíamos iniciado uma tentativa de experimentação com seis alunos de primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual na cidade de Campo Grande-MS. Dentre as atividades previstas só foi possível realizar algumas delas, pois os encontros coincidiram com o início do período de férias dos alunos, o que nos obrigou a interromper as sessões de experimentação. Com isto, optamos por executar uma nova aplicação, porém, esses alunos não poderiam participar, pois alguns deles resolveriam os problemas pela segunda vez. Assim, efetuamos nossa experimentação com alunos de 3° ano do ensino médio que, já tinham estudado sequências numéricas, embora não tivessem sido familiarizados com a noção de limite durante o ensino médio.

Conversamos com a coordenadora da escola e com a professora que leciona no Ensino Médio. Com a autorização de ambas convidamos os estudantes dos terceiros anos a participarem de nossa pesquisa. Instigamo-los sobre "*como resolver uma soma infinita de*

PG?”, comparecendo 24 deles na primeira sessão de atividades, sendo que, a maioria era alunos que possuem um baixo rendimento escolar, segundo a professora da escola.

Cabe ressaltar que também foi solicitada uma autorização dos pais dos alunos para que eles pudessem permanecer na escola após o término das aulas para a realização da pesquisa. Também foi combinado que os alunos, os quais tivessem assiduidade nos encontros receberiam um certificado de participação na pesquisa realizada, sendo os seus nomes mantidos em sigilo.

Os sujeitos de pesquisa foram escolhidos de acordo com um critério de assiduidade nos encontros realizados. Seis alunos com uma média de frequência de 90% representam nossos sujeitos na presente pesquisa, sendo identificados pelas letras (G, I, J, K, L, M).

Outra escolha realizada foi que alunos trabalhassem em grupos, com o objetivo de provocar uma melhor interação entre eles, viabilizando momentos de discussão durante a resolução das atividades. Acreditamos que a comunicação de diferentes concepções a respeito dos conceitos trabalhados e a forma como os alunos se manifestam no decorrer das situações, nos permite investigar suas ações frente à construção de um novo conhecimento (a noção de limite), num meio previamente organizado para essa finalidade.

4.4 ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nossa sequência didática comporta 12 sessões de tarefas distribuídas em 6 blocos (Blocos A, B, C, D, E e F). Cada sessão teve duração de aproximadamente 50 minutos, aplicadas das 11h20min às 12h10min após o término de aulas. A seguir, descrevemos a estrutura de nossa sequência didática com os objetivos de cada bloco, sessão e tarefas propostas. No próximo capítulo apresentamos a sequência didática precedida de suas respectivas análises *a priori* e análises *a posteriori.*

Bloco	Objetivos (bloco)	Sessão	Objetivos (sessão)	Quantidade de tarefas por sessão	Objetivos (tarefas)	Variáveis Didáticas
A	Possibilitar a entrada dos alunos no jogo	1	Provocar o desequilíbrio cognitivo no aluno frente a uma primeira situação que envolve a noção de limite	1	Idem aos objetivos do bloco e, consequentemente, desta sessão	Uso da calculadora; Representação figural; Tipo de PG
B	Iniciar o estudo de sequências numéricas e, em especial as PG	2	Introduzir a noção de sequência numérica a partir de uma situação-problema	1	Idem ao objetivo desta sessão	Representação figural
		3	Possibilitar o reconhecimento dos termos de sequências numéricas definidas pelo seu termo geral e iniciar o estudo de PGs	2	Reconhecer os termos das sequências	Uso da calculadora; Representação figural
					Explorar o conceito de PG	Representação figural; Tipo de PG
C	Provocar um primeiro contato dos alunos com a noção de limite de PG	4	Proporcionar o reconhecimento de uma PG e análise do comportamento dos termos de uma PG convergente	1	Idem ao objetivo desta sessão	Uso da calculadora; Representação figural; Tipo de PG
		5	Propor a análise do comportamento dos termos de PGs convergentes e divergentes	2	Analisar o comportamento de uma PG divergente	Representação figural no enunciado; Tipo de PG
					Idem ao objetivo desta sessão	Uso da calculadora; Representação figural; Tipo de PG
D	Proporcionar situações para que os alunos explorem a noção de limite da soma infinita dos termos de PG	6	Possibilitar a elaboração de conjecturas a respeito de uma soma infinita dos termos de PGs convergentes	1	Parte I: Possibilitar a reflexão sobre uma soma infinita corresponder a um valor real	Uso da calculadora; Representação figural; Tipo de PG
					Parte II: Provocar uma possível validação em relação a situação anterior	
		7	Provocar os alunos à busca de um método de resolução algébrica por meio de uma situação problema	1	Parte I: Indagar os alunos sobre a noção de limite da soma infinita dos termos de PGs.	Uso da calculadora; Representação figural Tipo de PG
					Parte II: Provocar uma validação para as conjecturas levantadas nas tarefas anteriores	
E	Possibilitar a dedução da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de PG e provocá-los à passagem ao limite	8	Propor a dedução da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de PGs	1	Idem ao objetivo desta sessão	Tipo de PG
		9	Propor uma situação com a finalidade de realizar a operação de passagem ao limite na fórmula de S_n	1	Idem ao objetivo desta sessão	Uso da calculadora; Tipo de PG
F	Analisar como os alunos tratam a operação de passagem ao limite nas situações propostas	10	Levar os alunos a elaboração de conjecturas sobre a convergência e divergência da soma infinita de PGs	1	Idem ao objetivo desta sessão	Uso da calculadora; Tipo de PG
		11	Analisar como os alunos operam com diferentes somas infinitas de PGs	1	Idem ao objetivo desta sessão	Uso da calculadora; Tipo de PG
		12	Analisar como os alunos procedem com as tarefas, após terem contato com a noção de limite (Reinvestimento)	2	Idem ao objetivo da sessão	Uso da calculadora
					Retomar a tarefa da sessão 1 e analisar como os alunos a tratam após contato com o limite	Uso da calculadora

Quadro 3: Organização da sequência didática

5 ANÁLISES *A PRIORI* E *A POSTERIORI* DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A partir da organização de nossa sequência didática, apresentamos neste capítulo as tarefas que a compõem, precedidas de seus objetivos e de suas respectivas análises *a priori* que contém, as variáveis didáticas em jogo, bem como as possíveis estratégias a serem utilizadas pelos alunos. Em seguida, relatamos como ocorreu a fase de experimentação com os mesmos e, seguimos para a análise *a posteriori* de cada uma das tarefas propostas.

5.1 BLOCO A (ENTRADA DOS ALUNOS NO JOGO)

Este bloco contém uma única sessão de tarefas cuja finalidade é possibilitar a entrada dos alunos no jogo, motivando-os para que aceitem o desafio de resolver as situações propostas.

5.1.1. Sessão 1 (A noção intuitiva de infinito e limite)

Esta sessão foi constituída pela seguinte tarefa:

Num recipiente de capacidade de um litro, adiciona-se, a cada dia, uma quantidade de água do seguinte modo[16]*:*

- *No 1º dia, adiciona-se* $\frac{1}{2}$ *litro de água;*
- *No 2º dia, adiciona-se* $\frac{1}{4}$ *litro de água;*
- *No 3º dia, adiciona-se* $\frac{1}{8}$ *litro de água;*
- *No 4º dia, adiciona-se* $\frac{1}{16}$ *litro de água;*

e assim sucessivamente.

[16] Fonte (adaptado): BISOGNIN, E., BISOGNIN, V., FERREIRA, M. V., Convergência de sequências e séries numéricas por meio da resolução de problemas. UNIFRA: 2007. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/relatos.html >. Acesso em: 19 jan. 2011.

a) Ao final do 4º dia, qual a quantidade de água contida no recipiente? E, quando estivermos no 7° dia?

b) Determine uma expressão que representa a quantidade de água contida no recipiente, no enésimo dia.

c) A água preencherá o recipiente com o passar do tempo? Justifique sua resposta.

Objetivo: Como explicita Brousseau (2008), o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fruto de dificuldades, contradições e desequilíbrios e, é nesse sentido, que acreditamos que esta sessão de tarefa possa provocar um desequilíbrio cognitivo no aluno frente a uma situação que envolve a noção de infinito, de limite, o que não é comumente trabalhada no ensino.

5.1.1.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

Uso da calculadora: Esta variável nos permite verificar se os alunos se prenderão ao cálculo com decimais ou com a representação fracionária, o que implicará na determinação de diferentes estratégias, principalmente no que tange aos itens (b) e (c).

Representação figural no enunciado da situação-problema: Na presente tarefa não apresentamos uma representação figural para ilustrar a situação, na intenção de verificar se uma das estratégias utilizadas pelos alunos seria o uso de uma figura, o que poderia influenciar na interpretação do problema, levando-os a levantar conjecturas a respeito da convergência.

Tipo de PG: O tipo de progressão geométrica utilizada exige mais do que a intuição por parte dos alunos para concluírem que a soma da quantidade de água adicionada se aproxima do valor 1; para tanto, é necessária uma análise do comportamento dos termos da sequência dada, podendo ser este um fator de dificuldade no trato com números fracionários.

Para a resolução desta tarefa é necessário que os alunos mobilizem conhecimentos sobre padrões numéricos, expressão algébrica, operações com números fracionários e/ou decimais, variáveis.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Conversão de fração em decimais. Converter a representação fracionária para a representação decimal para encontrar os respectivos valores e, observando a regularidade existente entre a quantidade de água adicionada no recipiente com a do dia anterior efetua-se a soma da quantidade de água contida no recipiente do quarto ao sétimo dia.
Ao contrário desta estratégia elencamos **E_{a2}**, ao realizar a soma pedida por meio da representação fracionária, obtendo os valores $\frac{15}{16}$ e $\frac{127}{128}$ respectivamente.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Indicação da soma. Determinar a quantidade de água no n-ésimo dia, obtendo a expressão $\frac{2^n - 1}{2^n}$, a partir da estratégia **E_{a2}** ou indicando a soma até o enésimo dia, isto é, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n}$. Uma possível dificuldade está em considerar o termo geral da sequência acima como sendo $\frac{1}{2n}$. Isto é, pode-se observar que há uma regularidade, porém não associa à multiplicidade 2 com uma exponencial.
E_{b2}: Visualização apenas dos valores no enunciado. Identificar a quantidade de água adicionada no n-ésimo dia, ao invés da quantidade de água contida no recipiente neste dia, podendo expressar corretamente que o termo geral seja $\frac{1}{2^n}$, bem como outro termo que satisfaça apenas os primeiros casos da situação proposta.

Para o item (c) prevemos:

E_{c1}: O uso da intuição. Observar que a água preencherá o recipiente ou que até transbordará, já que nele é acrescida sempre uma quantidade de água.
E_{c2}: Infinito potencial. Observar que a água não preencheria o recipiente, pois os valores apenas estariam se aproximando cada vez mais do número 1, isto é, sempre estaria faltando a

metade da quantidade de água que foi adicionada no dia para completar o recipiente. Cabe a nós investigarmos se há indícios dos teoremas-em-ação T_1 *(os termos de uma PG apenas se aproximam cada vez mais de certo valor, sem atingi-lo)* e de $\mathbf{T_3}$, que consiste *na impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real.*

$\mathbf{E_{c3}}$: Uso de figura. Representar por meio de uma figura a quantidade de água contida no recipiente a cada novo dia. Ao fazê-lo, analisa-se a situação semelhantemente a estratégia $\mathbf{E_{c2}}$ listada anteriormente.

$\mathbf{E_{c4}}$: A quantidade de água tende a zero. Verificar que a quantidade de água acrescida a cada dia está diminuindo ou se aproximando de zero, concluindo que, logo, o recipiente não será preenchido. Essa estratégia leva-nos a investigar a presença da mobilização do teorema-em-ação ($\mathbf{T_2}$), que consiste no equívoco de considerarem o limite do termo geral da sequência formada como sendo o limite da sequência das reduzidas da série.

Uma possível validação nesta tarefa: Acreditamos que ao determinarem, no item (b), a expressão $\frac{2^n-1}{2^n}$, podem tomá-la como referência para validar se a quantidade de água preencherá ou não o recipiente com o passar do tempo, analisando o caso em que n tende ao infinito.

5.1.1.2 Experimentação (sessão 1)

Esta sessão de tarefa ocorreu no dia 04 de abril de 2011, teve duração de 59 minutos e contou com todos os sujeitos de pesquisa. Os alunos dividiram-se em grupos, como forma de garantirmos a interação entre eles. Os mesmos fizeram uso da calculadora e ao final da tarefa deu-se o momento de discussão geral, conforme comentado no capítulo anterior.

5.1.1.3 Análise *a posteriori*

Em relação ao item (a), os alunos I, G e K utilizaram a estratégia E_{a1} ao realizarem conversões da representação fracionária para a decimal. Para obterem a quantidade de água adicionada a cada dia, eles identificaram a regularidade considerando apenas o denominador das frações unitárias, como mostra o diálogo entre o aluno G e I:

> Aluno I: Não, você tem que fazer 7 dias, tá vendo aqui, 1/2, 1/4, 2x2
> Aluno G: 2x2, quatro
> Aluno I: 2 x 8
> Aluno G: 16
> Aluno I: 16 x 2
> Aluno G: 16 x 2, 32 [...] 32 x 2, 64.
> Aluno I: Vezes 2
> Aluno G: 128..
> Aluno I: Isso garoto. Dá os 7 dias [...] agora você divide.

Por mais que tenham feito uso da mesma estratégia, o aluno K consegue obter a solução correta, enquanto I e G apresentam um erro de cálculo relacionado ao 7° dia.

Já os sujeitos J, L e M fazem uso da estratégia E_{a2}, expressando os valores referentes às quantidades de água por meio da representação fracionária. Desta forma, finalizam este item apresentando as soluções $\frac{15}{16}$ e $\frac{127}{128}$, respectivamente.

Na resolução do item (b), muitos alunos apresentaram dificuldades por não entenderem o que seria o n-ésimo termo. Alguns deles sentiam a necessidade de simbolizar o n-ésimo dia como sendo o sétimo ou o oitavo dia, por exemplo. Outros chegaram a atestar um valor exato, mesmo após as discussões realizadas. Deste modo, para que os alunos pudessem progredir na tarefa, a pesquisadora exemplifica o que seria o n-ésimo termo, uma vez que ao realizar a intervenção sobre o saber, a situação deixa momentaneamente de ser adidática. Já os sujeitos G e I não apresentaram suas resoluções, identificando apenas no final do encontro a expressão $\frac{2x}{x}$. No caso de K, o mesmo tentou encontrar algumas expressões algébricas após explicar para o colega o que seria o "n-ésimo" termo, como vemos a seguir:

> Parceiro do Aluno K: Quanto é o n-ésimo dia?
> Aluno K: O n-ésimo dia quer dizer n. Sabe por quê? Qualquer dia que ele jogar vai dar o valor exato de água, vou ter que jogar uma expressão, tipo uma fórmula [...] Acho que é v = n.2. Tipo, vamos ver, no 5° dia, dá 10. Não dá [...] vamos tentar: v=1/n.2. **Vamos ver, no 3° dia, dá 1/6**
> **Parceiro do Aluno K: Não bateu.**
> **Aluno K: Então, ainda não é essa fórmula**
> Parceiro do Aluno K: E se colocasse ao quadrado?
> Aluno K: Vamos ver $v=1/n^2$ [...]

Observamos que este sujeito faz uso da estratégia E_{b2}, ao buscar uma expressão para a quantidade de água adicionada no recipiente no n-ésimo dia, em detrimento da quantidade contida nele. Nesse diálogo, podemos identificar a ocorrência das fases adidáticas: de ação, já que o aluno desenvolve estratégias de resolução, antecipando suas ações; de formulação, quando conjecturam que há uma fórmula que possibilita encontrar a quantidade de água num determinado dia, expressando-as; e de validação, uma vez que os alunos testam se as expressões formuladas correspondem ou não à resposta esperada ao substituírem os valores que corresponderiam às quantidades de água a cada dia, como grifamos no diálogo acima. Mesmo validando que suas formulações não eram convenientes, o aluno K deixa como solução final a expressão “v = 1/v.2”.

Contudo, é o aluno L quem constrói a expressão que corresponderia a quantidade de água contida no enésimo dia utilizando a estratégia E_{b3}, assim como prevíamos, ao apresentar como resposta $\frac{x-1}{x}$, sem verificar, porém, que x também corresponderia a 2^n. Convencido da expressão encontrada, L tenta convencer os colegas:

> Aluno M: Faz x menos 1 sobre y. Mesmo. Vai ser x menos 1 sobre y.
> Aluno L: Sobre x.
> Aluno M: Sobre x?
> Aluno L: Oh, pensa comigo [...] como aqui, se o x é igual a 128. Vai pra fórmula, x menos 1, 128 menos 1 sobre 128, dá 127sobre 128, que é o resultado. Se você substituir por 16 é a mesma coisa.

Ele valida sua afirmação mostrando a veracidade da fórmula que foi descoberta ao substituir os valores encontrados para cada dia. Assim, convence os colegas M e J, o que faz com que também a apresentem como resolução final.

No último item, os alunos L, M e J realizam uma longa discussão, para decidirem se a água preencheria ou não o recipiente com o passar do tempo, dispondo de alguns esquemas na tentativa de solucionar a situação proposta. Num primeiro instante, todos afirmam que “*uma hora vai ter que encher o recipiente*”, o que parece uma afirmação mais intuitiva que racional. No entanto, após inferirem sobre as informações levantadas e em busca de justificativas, recorrem à expressão encontrada no item anterior, como retrata o diálogo abaixo.

> Aluno L: Oh, para uma divisão ser exata, os dois números tem que ser iguais [...] então, é impossível chegar a 1 na divisão
> Parceiro do Grupo: Vai dar 1 milhão de 9 e outro 1 no final lá...

A última frase deste diálogo revela outro esquema mobilizado pelos alunos na resolução da tarefa, pois não conformados com a expressão descoberta, realizam inúmeras somas com o auxílio da calculadora. A partir dos cálculos efetuados, o aluno M parece bem desestabilizado cognitivamente, pois ao mesmo tempo em que responde sim à tarefa, fica na dúvida, afirmando depois que *"pode chegar, mas...não pode chegar".* Nesse caso, observamos que a organização da conduta do aluno M sofre variações frente aos argumentos ressaltados no grupo. Segundo Vergnaud (1996, p.156), "o desencadeamento sucessivo de diversos esquemas, que podem entrar em competição e que, para desembocarem na solução procurada, devem ser acomodados, descombinados e combinados; este processo é necessariamente acompanhado por descobertas". Outro ponto a ser considerado está no diálogo do aluno M com o aluno J:

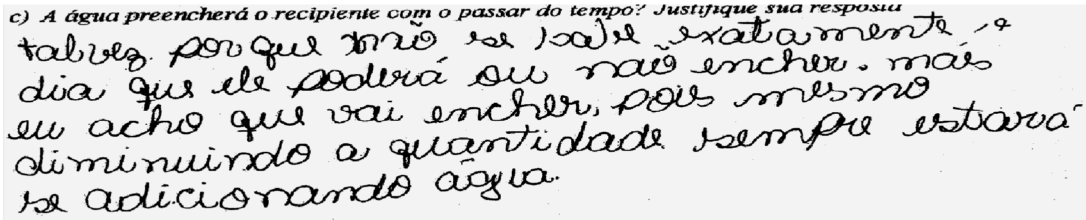
> Aluno J: Ele vai encher...por que vai tá sempre acrescentando mais, mais [...]
> Aluno M: Ele vai parar quando ele chegar a 1 inteiro. Depois que ele encher que ele vai parar.

Neste diálogo, o aluno M parece desconsiderar o infinito presente na situação, pois para ele, quando o recipiente ficar preenchido, não haverá nenhuma soma a ser efetuada, entrando em contradição com a hipótese da situação-problema. A pesquisadora, em outro momento, volta a questionar se o preenchimento do recipiente terá um fim e, mesmo o aluno L alegando que este seja infinito, a incerteza de suas afirmações nos leva a investigar essa questão nas próximas situações, o que pode estar vinculado ao teorema-em-ação T_3 (impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real).

Mesmo fazendo os cálculos, os alunos mantêm-se desestabilizados pelo fato de não saberem quando o recipiente poderá encher. Isso leva o aluno M a tentar mais uma vez, fazendo uso de alguma representação para a situação, porém, sem ser possível identificarmos o uso de figura, conforme previsto na estratégia E_{c3}.

> Aluno M: Vamos supor aqui. Tem um copo, ele tá enchendo na metade, ele foi enchendo mais a metade da metade daqui, e foi enchendo, assim cada vez mais, **é lógico que olhando ele vai chegar uma hora, só que você olhando pela matemática** [...] Tá aqui, não completou ainda o espaço, ele **tá enchendo, só que a gente não tá vendo que tá enchendo. Só que nem, vai chegar aqui na pontinha, ele continua enchendo, só que ele não vai nunca encher**, **entendeu?**

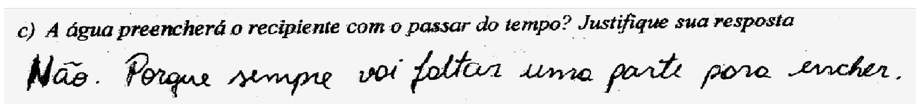
Além disso, observamos que a ação do aluno J repousa sob a intuição, estratégia E_{c1} prevista a priori, pois mesmo ficando em desequilíbrio cognitivo com as opiniões levantadas, finaliza a tarefa dizendo que o recipiente ficará completo, como ele mesmo afirma:


c) A água preencherá o recipiente com o passar do tempo? Justifique sua resposta

talvez. porque não se sabe exatamente o dia que ele poderá ou não encher. mas eu acho que vai encher, pois mesmo diminuindo a quantidade sempre estará se adicionando água.

Figura 9: Resposta do aluno J. Sessão 1. Item (c)

Após levar em conta o repertório de esquemas formados por cada sujeito em situação, os alunos M e L, salvo o aluno J, decidem apresentar como resposta final que:


c) A água preencherá o recipiente com o passar do tempo? Justifique sua resposta

Não. Porque sempre vai faltar uma parte para encher.

Figura 10: Resposta do aluno L. Sessão 1. Item (c)

Essa justificativa deriva do relato de o recipiente não ficar completo, já que "*para dar um inteiro, seria x dividido por x*", ao invés de $\frac{x-1}{x}$. Conforme tínhamos previsto, esta poderia ter sido uma validação da tarefa pelos alunos; porém, os mesmos analisam a expressão algébrica sem considerar a noção de infinito. Além disso, essa resolução evidencia a presença do teorema-em-ação (T_3), bem como evidencia a presença do infinito potencial (E_{c2}) em todo processo de construção do conhecimento,

Os sujeitos G, I e K não discutem muito a respeito deste item, ao se concentrarem apenas na resolução dos itens anteriores. Num primeiro instante, os alunos G e I não interpretam corretamente a tarefa, e só após a retroação do meio, fornecido pelas discussões em grupo, é que G apresenta como resposta: *"Não, o recipiente vai demorar encher"*, o que nos dá indícios do infinito potencial (E_{c2}). Já o aluno I mostra sensibilidade à noção do infinitamente pequeno, quando expressa: *"mas a água vai diminuindo muito, será que um dia vai acabar? Vai colocar só uma gota assim... não tem como uma gota... Ela vai diminuindo na metade a cada dia. [...] Um dia vai acabar, não vai ter mais como colocar a quantidade de água*". Além do mais, ao associar que um dia a quantidade de água deva acabar, o aluno também ignora a noção do infinito presente na situação e mantém-se desestabilizado cognitivamente ao lidar com o problema, sem saber ao certo o que responder, como mostra o excerto a seguir.

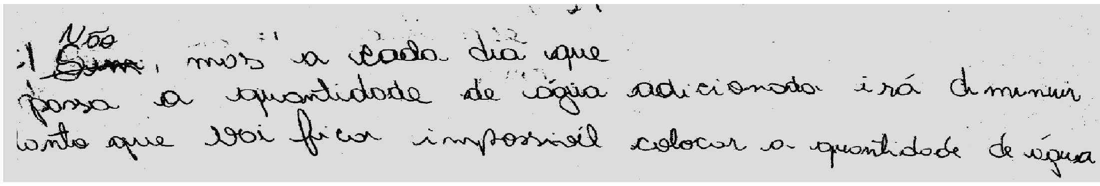

Não ~~Sim~~, mas a cada dia que
passa a quantidade de água adicionada irá diminuir
tanto que vai ficar impossível colocar a quantidade de água

Figura 11: Protocolo do aluno I. Sessão 1. Item (c)

A angústia dos alunos mostra que ocorreu a devolução do problema aos mesmos, fazendo com que tomassem para si a responsabilidade de lidar com o saber em jogo ao agirem, refletirem e discutirem constantemente sobre a tarefa proposta, como podemos notar no momento de discussão da pesquisadora com a turma:

> Pesquisadora: No n-ésimo dia enche? [...] no nono dia enche? No sétimo, no sexto?
> Todos: Não
> Aluno G: E se eu colocar o milésimo dia? Talvez pode encher.
> Pesquisadora: Vocês acham que no milésimo dia enche?
> Aluno K: Ah, eu acho que não.
> Pesquisadora: Por que não enche no milésimo dia?
> Aluno K: Por que eu coloquei assim**. "Não, pois a cada dia que passa a quantidade aumenta. No entanto, ela não preencherá o recipiente, pois é infinita"** [...]
> Aluno J: Acho que (aluno K) tá mais certo, hein [...] (O ALUNO K) me convenceu.

Neste diálogo, um detalhe que cabe ser ressaltado refere-se a estratégia infinito potencial apresentada pelo aluno K, evidenciando a mobilização do teorema-em-ação (T_3) previsto anteriormente ao dar indício de que uma soma infinita não possa corresponder a um número real. A persistência desse teorema é sondada nas próximas atividades, ao analisarmos as dificuldades dos alunos com o tema. Assim, a pesquisadora encerra o encontro, relatando aos alunos que, no decorrer das próximas tarefas, construirão algumas estratégias para resolverem problemas desse tipo.

5.1.1.4 Considerações sobre o Bloco A

De modo geral, observamos que os alunos entraram no jogo e se envolveram na resolução da tarefa, o que possibilitou atingirmos o objetivo de provocar desequilíbrios cognitivos frente a uma situação nova, iniciando no processo de construção/aprendizagem da noção de limite. Quanto às dificuldades encontradas, observou-se que, inicialmente, alguns sujeitos não reconheciam a expressão "n-ésimo", passando, após as discussões, a trilhar algumas estratégias para a resolução do item proposto, conforme havíamos previsto.

Os conhecimentos de nossos sujeitos de pesquisa permaneceram desestabilizados ao se depararem com a noção de infinito, como foi o caso de J, L e M que, mesmo fazendo uso da regra-em-ação (x-1)/x, realizaram várias somas com a calculadora na expectativa de verificar o que realmente aconteceria com a quantidade de água no recipiente. Já o aluno I também se mostra desestabilizado cognitivamente com a situação, ao manter-se sensível à noção de infinitamente pequeno.

A noção de infinito potencial esteve fortemente imbricada em suas ações, bem como foi possível verificar indícios de alguns teoremas-em-ação que tínhamos como hipótese, sendo estes mobilizados pelos alunos K, L, G e M, o que nos leva a investigar a sua estabilidade no decorrer de nossa sequência didática.

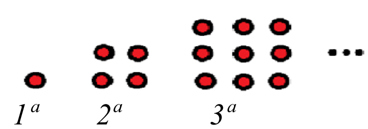
5.2 BLOCO B (INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS)

Este bloco contém duas sessões de atividades (2ª e 3ª sessão) que têm por objetivo iniciar o estudo de sequências numéricas, em especial, o de progressões geométricas.

5.2.1 Sessão 2 (Uma sequência de figuras)

Esta sessão é composta pela seguinte tarefa:

Observe a sequência de figuras a seguir[17]*:*



a) Qual a quantidade de bolinhas da 5ª figura desta sequência.

b) Esta sequência possui quantas figuras?

c) Com base nessa sequência, construa uma tabela relacionando a quantidade de bolinhas presente em cada figura com a posição que ela ocupa.

d) A 21ª figura tem quantas bolinhas?

---

[17]Fonte (adaptado): MODANEZ, L. Das Sequências de Padrões Geométricos à Introdução do Pensamento Algébrico. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

e) É possível descobrir o número de bolinhas de uma figura qualquer desta sequência? Como?

Objetivo: Introduzir a noção de sequência numérica a partir de uma situação-problema e, ao final, definir o conceito de sequência numérica.

Segundo Modanez (2003), a importância desta situação está em observar a relação dependente que existe entre o resultado encontrado e a posição que este ocupa. A mesma nos remete à necessidade de apresentar uma tarefa em que vigore a noção de função, que se estabelece durante este estudo.

5.2.1.1. Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

V_{s2}: Representação figural no enunciado da situação-problema. Ao considerarmos uma figura cuja representação geométrica seja um quadrado, esta pode facilitar o uso de estratégias na resolução dos itens questionados, ao contrário se tivéssemos outras formas geométricas ou da não utilização de alguma representação.

Alguns dos conhecimentos necessários para a resolução desta tarefa são os padrões geométrico-numéricos, expressão algébrica, propriedades de potência.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Sobreposição. Perceber que a quantidade de bolinhas em cada figura é igual à quantidade de bolinhas da posição anterior acrescida de algumas bolinhas, como afirma Modanez (2003).

E_{a2}: Cálculo da área. Observar que a quantidade de bolinhas em cada figura é obtida multiplicando-se a quantidade de bolinhas da base pela quantidade de bolinhas da altura. Esta estratégia está vinculada ao cálculo da área de um quadrado.

E_{a3}: Relação. Relacionar a quantidade de bolinhas (Q_b) presente em cada figura com o valor da posição (P_f) que encontra-se a figura, representada pela equação: $Q_b = (P_f) \times (P_f)$.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Infinitas figuras. Observar que a presença de reticências simboliza a infinidade de figuras da sequência.

E_{b2}: N-ésimas figuras. Apresentar como solução: *n figuras ou n-ésimas figuras*, por não ser possível encontrar um número exato ou associando à variável *n* ao infinito. Esta é uma situação que deve ser investigada quanto à noção de infinito.

E_{b3}: Fixação de um valor exato. Identificar um número qualquer como a quantidade de figuras na sequência. Por exemplo: 5, 22, 100, etc.

Essas estratégias apontam a necessidade de os alunos expressarem uma quantidade finita de figuras para a situação proposta, ignorando sua condição infinita. Essa dificuldade se assemelha com o "Horror ao Infinito" descrito por Sierpinska (1985), quanto à recusa dos alunos em aceitar um conjunto infinito.

Para o item (c) prevemos:

E_{c1}: Representação finita. Apresentar a quantidade de bolinhas presentes nas figuras até certa posição sem indicar a continuidade da sequência de figuras, sendo esta infinita.

E_{c2}: Representação infinita. Expressar a quantidade de bolinhas até certa posição apresentando alguma expressão algébrica que simbolize a n-ésima figura e, posteriormente, indicar a continuidade da sequência de figuras.

Para o item (d) prevemos:

E_{d1}: Desenho. Desenhar as figuras até obter a figura na posição desejada.

E_{d2}: Área ou Relação. Encontrar a 21ª figura, verificando a relação existente entre a linha e a coluna de cada figura ou a relação entre a posição de cada figura e a quantidade de bolinhas nelas, conforme previsto nas estratégias **E_{a2}** e **E_{a3}**.

Para o item (e) prevemos:

E_{e1}: Generalização. Descrever que para encontrar a figura desejada basta elevar a posição que ocupa o quadrado, apresentando uma expressão algébrica para a situação proposta ao realizar a generalização da sequência dada.

Uma possível validação nesta tarefa: Caracterizada pelo fato de os alunos atribuírem valores (referentes à posição que a figura ocupa) para a expressão algébrica encontrada no item (e), verificando, assim, se esta satisfaz as quantidades de bolinhas já obtidas nos itens anteriores.

5.2.1.2 Experimentação (sessão 2)

Esta sessão de atividade ocorreu no dia 05 de abril de 2011 e teve duração de 54 minutos. Participaram dela cinco sujeitos de pesquisa, já que o aluno M não compareceu a sessão.

5.2.1.3 Análise *a posteriori*

Na resolução do item (a), apenas o aluno K não obteve êxito em sua resposta. Apresentou o número de bolinhas como sendo 27, fazendo uso da estratégia E_{a1}, porém sem considerar uma regularidade existente entre a quantidade de bolinhas em cada posição dada. Já os alunos J e L expressam sua resolução da seguinte maneira:

> Pesquisadora: Como que vocês acharam esse 25? [...] Mas qual foi a regra que vocês usaram?
> Aluno L: Eu coloquei que o número é sempre igual ao daqui e daqui (aponta para as bolinhas na horizontal e da vertical), então multiplicou 5 por 5.
> Pesquisadora: Você também fez assim 'aluno J'?
> Aluno J: Não to desenhando bolinhas
> Pesquisadora: Mas como você foi desenhando? [...]
> Aluno J: Eu sempre aumentei os outros 3 que tem aqui e os 3 que tem aqui, ai foi aumentando.
> Pesquisadora: Sempre de 3 em 3?
> Aluno J: Não, sempre aumentando, sabe tipo, quando eu aumentei 3, aí ficou 4, aí aumentou mais, aí contei 25 bolinhas.

No diálogo supracitado é possível identificarmos que o aluno L faz uso da estratégia E_{a2} ao multiplicar a quantidade de bolinhas da horizontal pela vertical, observando que tanto a base como a altura possuem o mesmo número de bolinhas. Já o aluno J verifica a quantidade de bolinhas em cada figura sobrepondo-as, conforme previsto na estratégia E_{a1} e fazendo uso de desenhos para encontrar o valor desejado. Essa estratégia foi obtida após o aluno descartar alguns esquemas ineficazes, já que no momento de discussão, o mesmo relata que havia chegado à mesma conclusão do aluno K, que obteve como resposta 27 bolinhas. Esta situação se configura como uma das formas com as quais organizamos um meio adidático, pois a disposição dos alunos em grupo contribuiu para que o aluno J discutisse, testasse e refletisse sobre a sua estratégia e a dos colegas, levando-o a repensar sobre a sua estratégia até apresentar corretamente a quantidade de 25 bolinhas, assim como o aluno L.

Quanto aos sujeitos I e G, estes, num primeiro momento, tentam estabelecer uma relação entre as figuras, após refletir e buscar por uma regularidade. Assim, G observa que a sequência é formada por quadrados, deduzindo o número 25, conforme diálogo a seguir:

> Aluno I: 25? 25 bolinhas?
> Aluno G: Um, um por um, dois, dois por 2, três, três por três, quatro por quatro...

Além disso, o aluno I faz uso de desenhos para representar a figura pedida e conclui, juntamente com G, que a quantidade de bolinhas da vertical é igual a horizontal, utilizando a estratégia E_{a2}.

No que concerne ao item (b) alguns alunos tiveram dificuldades em verificar que a sequência dada é infinita como, por exemplo, G, que mobiliza todas as estratégias que previmos para esse item. Em uma das falas deste sujeito, observamos que ele apresenta dúvida se a quantidade de figuras continua até a terceira ou até a quinta. Tal raciocínio está de acordo com a estratégia E_{b3}, quando o aluno exprime um número exato de figuras e depois identifica 21 figuras. No diálogo a seguir, ele também utiliza a estratégia E_{b2} ao afirmar que a sequência possui apenas n-ésimas figuras.

> Aluno G: Professora, eu não entendi essa b em relação às figuras [...] essa sequência possui quantas figuras?
> Pesquisadora: Então, essa aqui não é uma sequência de figuras? Eu quero saber quantas figuras tem nessa sequência.
> Aluno G: Mas até aonde?
> Pesquisadora: Então, mas isso que eu quero saber de vocês. Por que isso daí é uma figura, primeira, segunda, terceira, né? É uma sequência de figuras. Quantas figuras?

> Aluno G: N-ésimas
> Parceiro do grupo: Não são n-ésimas figuras. (discussão entre o grupo)
> Pesquisadora: Leia o enunciado

Mesmo em dúvida os sujeitos G e I passam a resolver os demais itens da tarefa e retornam várias vezes ao enunciado do item (b), como foi sugerido pela pesquisadora. Depois de algum tempo, o aluno I, mesmo não convencido, diz que a sequência é infinita. Não conseguindo obter a solução, foi apenas no momento de discussão entre os grupos que G e I associam as reticências no enunciado à continuidade da sequência infinita, apresentando a seguinte resposta:

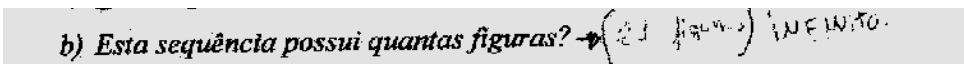


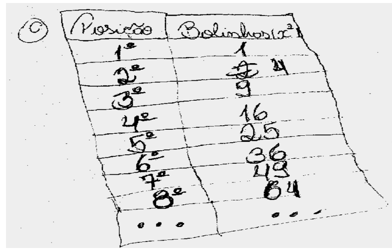
Figura 12: Protocolo do aluno G. Sessão 2. Item (b)

Já os sujeitos J e L fazem uso da estratégia E_{b1} ao identificar que a sequência é infinita, ao responderem: "*um número indeterminado, infinito*". Mesmo compreendendo que a sequência possuía infinitas figuras, o aluno J busca simbolizar o infinito pela variável x, dificuldade apontada por Nunes (2001) sobre a tentativa de representar algebricamente o infinito. Nas palavras de J:

> Aluno J: Pode ser uma sequência infinita por que ela pode falar um bilhão vezes um bilhão, você nunca vai saber o número que ela fez aí [...] Então x equivale a infinito, no caso, por que nunca sabe o número que ela vai pedir [...]
> Aluno L: x não é igual a infinito, ele é igual a qualquer número que puder [...]

Quanto ao aluno K, este não apresentou resoluções, uma vez que concentrou todo o tempo apenas na resolução do item (a).

A discussão do item (c) pelos alunos G e I só se dá após descobrirem uma relação para encontrar a quantidade de bolinhas de uma figura qualquer, solicitada no item (e). No entanto, apenas I resolve este item apresentando a seguinte tabela:



c) Posição	Bolinhas (x²)
1ª	1
2ª	4
3ª	9
4ª	16
5ª	25
6ª	36
7ª	49
8ª	64
...	...

Figura 13: Protocolo do aluno I. Sessão 2. item (c)

Os alunos J e L também prosseguem da mesma forma que G e I. No entanto, constroem a tabela indicando até o enésimo termo. Só após a pesquisadora indagar se a sequência de figuras termina na enésima figura é que os alunos fazem referência ao infinito, ao utilizarem reticências, de acordo com o previsto na estratégia E_{c2}.

Ao perguntarmos sobre qual seria a quantidade de bolinhas da 21ª figura proposta no item (d), os alunos G, I, J e L responderam corretamente que seria 441 bolinhas. Como a estratégia inicial do aluno J era o desenho, o aluno L logo percebe que essa estratégia E_{d1}, como prevista, é muito trabalhosa, propondo que o aluno J o faça em "duas folhas" até encontrar a 21ª figura. Os alunos L, G e I encontram o valor de 441 bolinhas, multiplicando 21 por 21 (vide estratégia E_{d2}). Também de acordo com nossas previsões o tipo de figura para representar a situação problema facilitou os cálculos efetuados durante a ação, como verificam os alunos G e I.

> Aluno I: Uma figura, duas figuras, três, quatro, cinco figuras...
> Aluno G: Isso tá muito na cara
> Aluno I: A gente forma um quadrado, este forma um quadrado, isso também forma um quadrado, por que vai ter o mesmo número de lados.
> Aluno G: O mesmo número de lados ou comprimento

Cabe ressaltar que o aluno K não apresentou soluções dos itens (d) e (e) devido à falta de tempo já mencionada.

Em relação ao item (e), após fazer algumas tentativas de encontrar expressões algébricas, os alunos G e I utilizam a estratégia $E_{e1,}$ passando por situações adidáticas de formulação e validação, ao justificarem a expressão encontrada e nela substituírem valores, conforme antevisto.

> Aluno I: O meu vai ficar assim, oh: x é igual ao número da figura ao quadrado [...]
> Aluno G: 2 vezes 2
> Aluno I: Quatro [...]
> Parceiro do grupo: Mais não vai dar

> Aluno I: 3 vezes 3, 9
> Aluno G: Por que 1 ao quadrado é 1
> Aluno I: E aqui tem quanto? É isso que to falando, aqui tem x ao quadrado.

Os alunos L e J também chegam ao resultado x^2 usando da estratégia E_{e1} prevista para esse item. Vejamos:

> Pesquisadora: como você descobriu essa fórmula (x^2)?
> Aluno L: Por que sempre para achar o total, no caso y, a gente multiplica..
> Pesquisadora: O y é a quantidade de bolinhas?
> Aluno L: Isso, a quantidade de bolinhas, multiplica pelos lados....**ai tá difícil de explicar** [...]
> **Aluno J: a gente acha um negócio e não sabe explicar como achou...**

Nesse diálogo, os alunos L e J manifestam dificuldade em formular uma justificativa para a expressão, isto é, em comunicarem os saberes expressos. Nesse sentido, Vergnaud (1996, p. 159), ao se referir à manifestação de regras-em-ação pelos alunos, relata que "*é difícil e quase impossível as crianças explicitarem estas regras, embora sejam capazes de executar a sequência das operações. Há sempre muito de implícito nos esquemas*".

Esses alunos apresentam várias fórmulas como *"x = y e x = x²"*, o que indica certa dificuldade com as notações algébricas, pois mesmo compreendendo as relações existentes, não as exprimem corretamente na linguagem matemática. Os excertos abaixo nos dão um exemplo desta dificuldade:

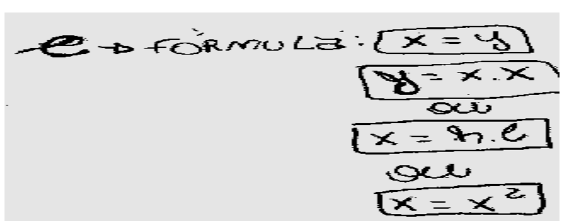


Figura 14: Protocolo do aluno J. Sessão 2. Item (e)

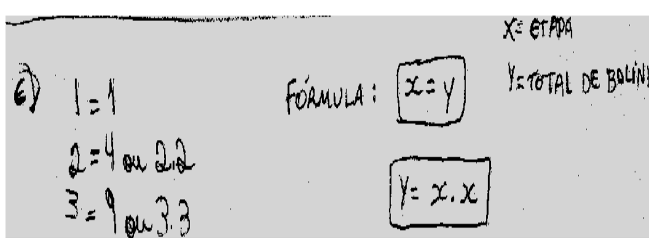


Figura 15: Protocolo do aluno L. Sessão 2. Item (e)

Ao final do encontro, com o gerenciamento da pesquisadora, seguimos para o momento de discussão geral com os alunos, no qual os mesmos discutiam suas estratégias e apresentavam suas resoluções. A partir da tabela e da lei de formação construída pelos alunos, a pesquisadora apresenta a definição de sequência numérica, uma vez que este conceito é indispensável para o processo de construção do conceito de PG e, posteriormente, na análise da noção de limite deste tipo de sequência.

5.2.2 Sessão 3 (Explorando o conceito de PG)

Esta sessão é composta por duas tarefas, cujo objetivo é investigar se os alunos reconhecem os termos de sequências numéricas definidas pelo seu termo geral para que possamos, posteriormente, iniciarmos o estudo de PG.

A primeira tarefa segue abaixo:

Escreva os termos das seguintes sequências, definidas pelo seu termo geral.

a) $x_n = 3n$ *b)* $a_n = \dfrac{5}{n}$ *c)* $b_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

Objetivo: Verificar se os alunos reconhecem os termos das sequências acima quando estas são definidas por meio de seu termo geral, uma vez que esse momento se caracteriza pelo primeiro contato com o estudo de sequência numérica após esta ser definida.

A seguir, a segunda tarefa proposta:

Com base na sequência numérica $(x_n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64,...)$*, responda:*

a) O que você observa em relação aos termos da sequência dada? Explique.
b) Como podemos representar o termo geral da sequência (x_n)*? Justifique*

Objetivo: Pretendemos explorar o estudo das progressões geométricas infinitas.

5.2.2.1. Análise *a priori* da primeira tarefa

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. O uso deste instrumento implica na forma como os alunos podem dispor os termos da sequência, apresentando os respectivos valores numéricos da mesma tanto em sua representação decimal quanto fracionária.

Quanto aos conhecimentos necessários para a resolução desta tarefa destacamos o conceito de sequências numéricas, propriedades de potência e operação com números racionais.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

E_1: Disposição aleatória. Determinar aleatoriamente apenas alguns termos das sequências, sem seguirem uma ordem numérica. Por exemplo: 3, 9, 6...
E_2: Noção de função. Identificar a relação existente entre dado n e seu correspondente a_n. Neste caso, pode-se identificar as sequências como sendo: (3, 6, 9, ...) ; $(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, ...)$ e $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27})$. No entanto, acreditamos que a dificuldade desta estratégia esteja em encontrar os termos da sequência (b_n) que, se tratando de uma sequência alternada, podem não relacionar o sinal do termo considerado com o expoente par ou ímpar.
E_3: Sequência finita. Identificar alguns termos da sequência, considerando-as como finitas.
E_4: Representação decimal ou fracionária. Representar os termos das sequências (a_n) e (b_n) por meio da representação decimal ou fracionária. Levamos em conta esta estratégia quando se faz uso da calculadora.

Uma possível validação nesta tarefa: Acreditamos que esta tarefa já possibilita a retroação do aluno, ao permitir que ele atribua valores para a variável n e verifique se estes condizem ou não com a lei de formação. Além disso, permite também que faça uma analogia com a tarefa anterior (relação existente entre a posição das figuras e a quantidade de bolinhas que estas possuem).

5.2.2.2 Análise *a priori* da segunda tarefa

Variáveis didáticas:

V_{s2}: Representação figural no enunciado da situação-problema. Essa variável é ausente, por considerarmos que a situação proposta já é de fácil compreensão apenas com o registro numérico, dispensando o uso de outro tipo de representação.
V_{s3}: Tipo de PG. Consideramos para esta tarefa uma progressão geométrica cujos termos são números inteiros, pois atende ao objetivo nesse momento.

Os conhecimentos necessários para esta resolução são: as propriedades de potência, a lei de formação de uma sequência numérica, padrões numéricos e equação algébrica.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Multiplicidade. Verificar que há uma relação de multiplicidade entre os termos da sequência, uma vez que cada termo é obtido multiplicando-o por 2.
E_{a2}: Recorrência. Relatar que para obter um termo da sequência basta multiplicá-lo pelo termo anterior.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Exponencial. Identificar e generalizar alguns termos segundo a expressão, concebendo o termo geral à exponencial 2^n.
E_{b2}: Multiplicidade 2. Identificar a expressão *2n* ao observar a multiplicidade 2 presente na sequência.
E_{b3}: Fórmula PG. Observar a regularidade presente na relação acima e generalizar a sequência, utilizando o que foi apreendido na sessão anterior ao definir uma sequência numérica. Desta forma, apresentam como resposta a expressão $a_n = a_{n-1} \times 2$.

Cremos que a estratégia **multiplicidade 2** seja a mais adotada pelos alunos, assim como no item (a), pelo fato de a expressão *2n* satisfazer os dois primeiros termos da sequência. Assim, os alunos a têm como verdadeira ao generalizarem suas observações.

Uma possível validação nesta tarefa: Substituir os valores que correspondem aos termos da sequência no termo geral encontrado e verificar se estão de acordo com a lei de formação inferida.

5.2.2.3 Experimentação (sessão 3)

Essa sessão de tarefas foi realizada no dia 06/04/2011 com duração de aproximadamente 50 minutos e contou com a participação de <u>cinco</u> sujeitos da pesquisa, pois o aluno I não esteve presente.

5.2.2.4 Análise *a posteriori* da primeira tarefa

Inicialmente, os alunos tiveram dificuldade para encontrar os termos da sequência e, não conseguindo progredir na resolução, a pesquisadora intervém explicando a relação existente entre dado <u>n</u> e um correspondente y_n e, a necessidade de atribuírem valores para a variável *n*. Nesse momento, foi a pesquisadora quem "agiu" sobre o saber, ocorrendo um breve interrupção dessa fase adidática. Após a explicação, todos os sujeitos de pesquisa utilizaram a estratégia E_4, ao fazerem uso da representação decimal na sequência (a_n) e da representação fracionária em (b_n).

Como havíamos previsto, os alunos G e M manifestaram dificuldades na sequência (b_n) ao lidarem com a operação de potência. Porém, a organização de um meio adidático com a discussão em grupo propiciou a superação desta dificuldade ao obterem a resposta correta. Além disso, outra dificuldade encontrada pelo aluno G foi utilizar inicialmente a estratégia E_3, ao identificar as sequências dadas como finita, alterando sua resposta ao longo da resolução, como podemos verificar a seguir:

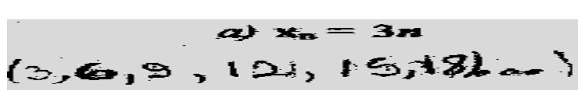


Figura 16: Resposta do Aluno G. Sessão 3. 1ª atividade. Item (a)

Quanto ao aluno K, este faz uso tanto da estratégia E_2 quanto de E_4, não apresentando dificuldades ao identificar os termos das sequências dadas. Porém, faz uso da notação de sequências numéricas somente após a pesquisadora interrogá-lo sobre como expressamos uma sequência numérica.

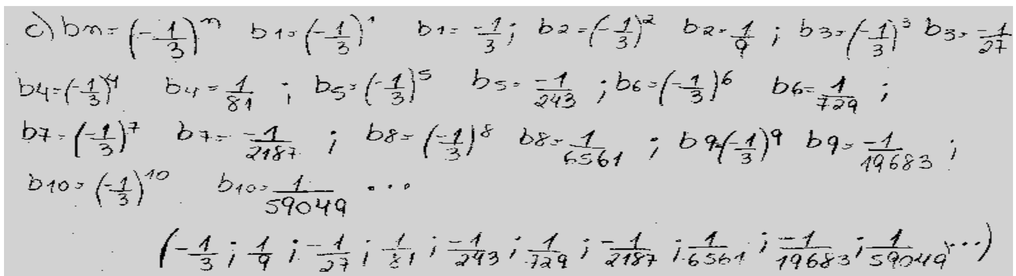


Figura 17: Resolução do aluno K. Sessão 3. 1ª atividade. Item (c)

Como o aluno M não esteve no encontro anterior, J explica a ele a tarefa realizada na sessão 2, fazendo analogia com as sequências dadas, isto é, apresentando os termos das sequências numéricas em forma de tabela, levando L a fazer uso desta mesma estratégia. Para Vergnaud (1996) é o conjunto de significantes que torna indispensável à conceitualização, que ajuda no raciocínio, nas inferências e o que também permitiu ao aluno J dar sentido a situação proposta.

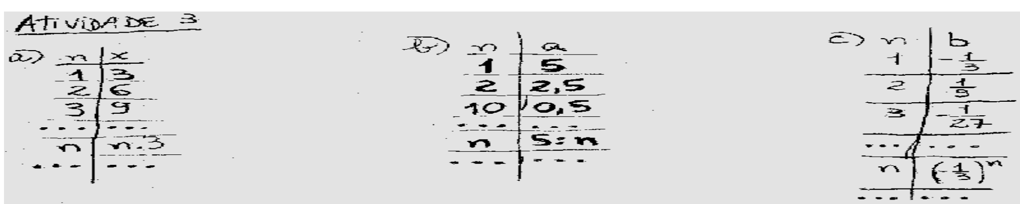


Figura 18: Protocolo do aluno L. Sessão 3. 1ª atividade

5.2.2.5 Análise *a posteriori* da segunda tarefa

De modo geral, nesta tarefa, os alunos não tiveram dificuldades no item (a), afirmando que os termos da sequência estão sendo multiplicados por 2, fazendo uso da estratégia E_{a1}. Quanto ao item (b) foram apresentadas diversas expressões; porém, apenas um aluno, não sujeito de pesquisa, consegue determinar o termo geral da sequência dada (2^n). Dada a dificuldade dos sujeitos de pesquisa em determinar tal termo, a pesquisadora dialoga com eles sobre a validade da expressão descoberta, institucionalizando-a em relação as formulações anteriores.

Na resolução do aluno G observamos que este determina várias expressões, como por exemplo, x^2, formulando e validando ao substituir alguns valores para n e verificar que nenhuma expressão é conveniente. Porém, em seus registros escritos identificamos a expressão correta 2^n, após outros colegas terem-na descoberto e a pesquisadora ter discutido sua solução. Já o aluno K também passa pelas fases de ação e formulação quando age em busca de identificar alguma regularidade entre os termos da sequência e formula expressões que exprimem o que ele percebeu. A validação ocorre ao substituir os valores para n nas expressões formuladas, verificando que ainda não era a esperada. Isso se confirma na descrição dada por Brousseau (2008, p.30) a um esquema de validação, quando o mesmo afirma que *"os esquemas de ação e de formulação implicam processos de correção, seja empírica ou apoiada em aspectos culturais, para assegurar a pertinência, a adequação, a adaptação ou a conveniência dos conhecimentos mobilizados"*, o que se confirma no excerto a seguir:

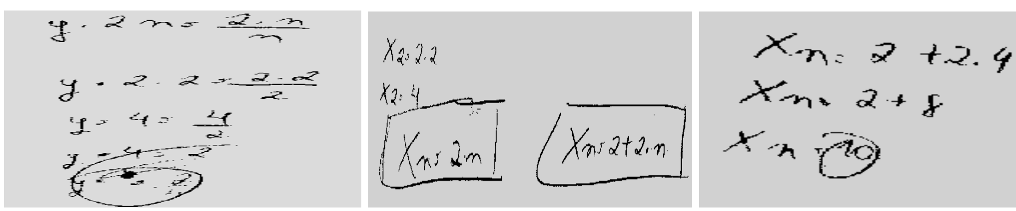


Figura 19: Protocolo aluno K. Sessão 3. 2ª tarefa. Item(b)

Dentre as tentativas do aluno K, observamos o uso da estratégia E_{b2}, que também foi utilizada pelos alunos M, J e L ao apresentarem como solução "*x.2*". Cabe ressaltar que apenas um aluno, não sujeito de pesquisa, conseguiu formular as expressões para encontrar qualquer termo dessa sequência em função de a_1 e da constante 2. Desse modo, a pesquisadora gerencia o momento de institucionalização envolvendo o conceito de progressões geométricas, tomando como ponto de partida a construção realizada pelo aluno ao apresentar como resposta que $a_2 = a_1 \times 2$. Assim, prosseguimos para a generalização dessa expressão com os alunos, questionando-os sobre cada termo seguinte.

> Pesquisadora: [...] Quem seria o a_3? [...] a_2 vezes quem?
> Aluno M: vezes 2 [...] $a_3 = a_2$ vezes 2
> Pesquisadora: mas como eu posso simbolizar o a_2?
> Aluno L: a_1 vezes 2

> Os grupos discutem ao mesmo tempo.
> Pesquisadora: Então o $a_3 = a_1$ vezes 2 vezes 2.Como que ficaria a_4 só em função de a_1 e de 2?
> Alunos J, M e L: $a_1$vezes a_2 [...] a_1 vezes 2 vezes 2 [...] vezes 2
> Pesquisadora: Seguindo essa regularidade, como seria o n-ésmo termo? [...]
> Aluno M e J: $a_n= a_1$ vezes 2^n [...]
> Aluno G: $a_n= a_1$ vezes 2^{n-1} [...]
> Pesquisadora: [...] Então, a fórmula geral de uma PG é $a_n= a_1$vezes q^{n-1}[...]
> Aluno que encontrou $a_2 =a_1x2$: Criamos duas fórmulas...duas... (risos)

Após a generalização de $a_n = a_1 \times 2^{n-1}$ são discutidas as características de uma progressão geométrica, a razão entre os termos (q) e como encontrá-la.

5.2.2.6 Considerações sobre o Bloco B

Apesar de os alunos K, L, J, G e I terem dificuldade para encontrar os termos da sequência no início da 2ª sessão, os mesmos envolveram-se na resolução das tarefas propostas, bem como no processo de construção da fórmula do termo geral de PGs no debate final da 3ª sessão. Nesse bloco foi possível verificar que os alunos passaram por várias situações adidáticas e mobilizaram conceitos construídos anteriormente, como foi o caso do aluno J que, para resolver a primeira tarefa da 3ª sessão, fez analogia com o que havia construído na sessão anterior, apresentando os termos da sequência em forma de tabela.

Mesmo tendo dificuldades ao lidarem com o conceito de sequências, como é o caso do aluno M, e também com o infinito, apresentada pelos alunos G, I e J, os mesmos compartilham conhecimentos e discutem em grupos, favorecendo a mobilização e a construção dos conceitos em jogo.

5.3 BLOCO C (A NOÇÃO DE LIMITE EM PG)

Este bloco é composto por duas sessões de tarefas (4ª e 5ª sessão) que têm como objetivo provocar um primeiro contato dos alunos com a noção de limite de PGs ao analisarem o comportamento de seus termos, quando seus índices tornam-se suficientemente grandes.

5.3.1 Sessão 4 (PGs convergentes)

A quarta sessão é composta por uma única tarefa, apresentada a seguir.

Considere a sequência $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...)$ *e o intervalo]0,1[da reta real abaixo.*

a) Na reta real, represente os cinco primeiros termos desta sequência.

b) A sequência acima é uma progressão geométrica? Se sim, encontre a razão entre os termos e justifique sua resposta.

c) Indique o 22° termo desta sequência

d) Se continuarmos a representar os próximos termos da progressão, sobre a reta, qual será o comportamento dos termos desta sequência? Explique o que você observou.

Objetivo: Visamos que os alunos reconheçam uma PG cujos termos estão representados na forma fracionária e analisem o comportamento dos termos de uma PG convergente.

5.3.1.1. Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

Vs_1: Uso da calculadora. Esta variável influencia na forma com os alunos conjecturam sobre a noção de limite, ao representarem um número máximo dos valores dos termos sobre a reta e os disporem sob a mesma na forma fracionária ou decimal.

Vs_2: Representação figural no enunciado da situação-problema. Utilizamos a reta numérica por ser esta um tipo de representação que implica na elaboração de conjecturas ao dispor-se os valores dos termos da sequência sobre ela, favorecendo a visualização da convergência.

Vs_3: Tipo de PG. Ao tomarmos uma PG cuja razão está entre os valores -1 e 1, é possível realizar o estudo da convergência, o que faz com que os alunos determinem estratégias para refletirem sobre as aproximações obtidas.

Alguns dos conhecimentos necessários a resolução desta tarefa dizem respeito ao tratamento dos números em sua representação fracionária e decimal, relação de ordem entre números decimais e/ou fracionários, progressão geométrica e as propriedades de potência.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Conversão. Identificar os termos da sequência em sua forma decimal ao realizar a conversão da representação fracionária para a decimal e dispor os valores dos termos sob a reta numérica.

E_{a2}: Frações. Visualizar as frações e deduzir que quanto maior o denominador menor será o valor numérico e, desta forma, dispor os termos sob a reta.

Ao contrário das estratégias listadas, quanto a disposição dos valores dos termos sob a reta, acreditamos que as maiores dificuldades dos alunos estejam no tratamento dos números em sua representação fracionária ou decimal. LINS e GIMENEZ (1997, p.47), destacam que "no que diz respeito à ordenação e à localização dos números, as maiores dificuldades dão-se no campo das frações e decimais."

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: PG de razão $\frac{1}{3}$. Reconhecer a sequência acima como sendo uma progressão geométrica, identificando corretamente a razão de $\frac{1}{3}$ entre os termos da sequência.

E_{b2}: PG de razão 3**.** Observar a regularidade entre os denominadores dos números fracionários, o que leva a determinar a razão da sequência como sendo o número natural 3. O que nos remete a dificuldade no tratamento com a representação fracionária.

Para o item (c) prevemos:

E_{c1}: Fórmula do termo geral. Utilizar a fórmula geral: $a_n = a_1 \; x \; q^{n-1}$, construída anteriormente, indicando o 22° termo da sequência.

E_{c2}: Termo a termo. Identificar termo a termo até encontrar o 22° termo da sequência.

Para o item (d) prevemos:

E_{d1}: **Proximidade 1.** Afirmar que os termos da sequência se aproximam cada vez mais do número 1, ao dispor os valores dos termos na reta de forma equivocada, conforme observado no item (a).

E_{d2}: **Proximidade 0.** Identificar corretamente os termos da sequência ao afirmar que eles se aproximam cada vez mais do número zero. Cabe-nos observar se há indícios da mobilização do teorema-em-ação (**T_1**), quando os termos se aproximam de certo valor sem atingi-lo.

Uma possível validação nesta tarefa: Alegar que quando n cresce infinitamente, os termos da sequência definida por $\frac{1}{3^n}$ se aproximam cada vez mais do número zero, sem atingi-lo, já que não existe nenhum valor para *n* tal que $x_n = \frac{1}{3^n} = 0$

5.3.1.2 Experimentação (sessão 4)

Esta sessão ocorreu no dia 11 de abril de 2011 tendo duração de aproximadamente 58 minutos com todos os sujeitos de pesquisa presentes. Durante as sessões anteriores percebemos que todos os alunos discutiam e apresentavam a mesma resposta final; por isso, sugerimos que as resoluções poderiam ser entregues em grupo ao invés de individualmente, já que também teríamos acesso as discussões por meio dos aparelhos gravadores.

No início deste encontro foram entregues aos alunos duas questões a fim de retomarmos o estudo de progressões geométricas iniciado na 3ª sessão de tarefas, uma vez que foi a pesquisadora quem gerenciou o processo de construção da fórmula do termo geral. Desta forma, buscamos iniciar essa sessão de forma que os alunos pudessem retomar essa construção, familiarizando com este conceito e, em seguida, passamos para a análise da tarefa programada nessa sessão.

5.3.1.3 Análise *a posteriori*

Como relatamos anteriormente, segue as questões propostas no início desta sessão e alguns resultados obtidos:

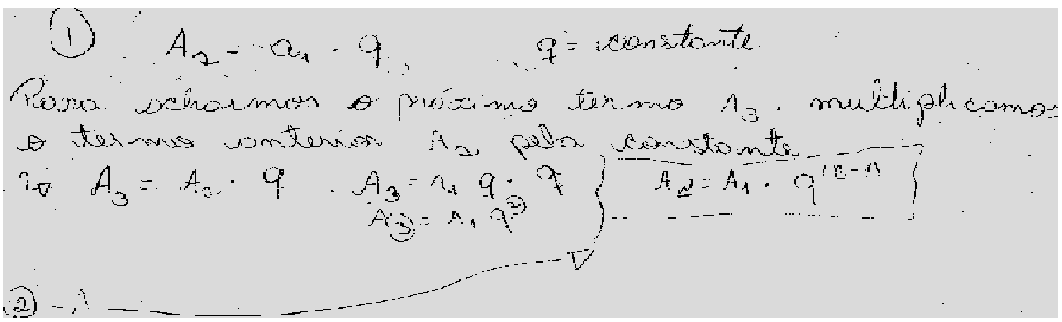
1) *Como podemos encontrar a razão entre os termos de uma PG?*

2) Construa a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica em função do 1° termo da sequência (a_1) e da razão (q).

Na resolução do item (1), os alunos M, J e L não mostraram como encontrar a razão de uma PG, apresentando apenas a fórmula geral solicitada no item posterior. Já os alunos K, G e I verificaram a regularidade existente, explicitando as seguintes respostas:


1) Dividindo o termo escolhido pelo anterior

Figura 20: Resposta do aluno K


(1) $A_2 = a_1 \cdot q$, q = constante

Para acharmos o próximo termo A_3 multiplicamos o termo anterior A_2 pela constante

$A_3 = A_2 \cdot q$ $\quad A_3 = A_1 \cdot q \cdot q$ $\quad A_3 = A_1 \, q^2$ $\quad \boxed{A_n = A_1 \cdot q^{(n-1)}}$

(2) –

Figura 21: Protocolo dos alunos G e I

Como podemos observar, os alunos G e I conseguem deduzir a fórmula do termo geral solicitada no item (2) e, no momento de diálogo da dupla, eles conseguem aplicar essa fórmula para encontrar um termo qualquer de um PG dada, sem a solicitação da pesquisadora, situação que configura um processo de devolução do problema ao aluno, conforme propõe Brousseau (1996).

> Aluno I: Eu quero que você ache o $\mathbf{a_{43}}$ dessa fórmula aqui, igual aquela que ela (pesquisadora) passou no quadro, 4, 8, e assim sucessivamente com essa formulazinha.
> Aluno G: Qual, qual é a constante?
> Aluno I: É dois
> Aluno G. Calma, 2 vezes 2 [...] não dá pra fazer essa conta
> Aluno I: Por quê?
> Aluno G: Por que não vai elevar pra 42? (continua tentando resolver) [...] viu, multiplica aí.
> Aluno I: Tá certinho.

Na resolução deste item (2) observamos que o aluno K apresentou a fórmula solicitada sem construí-la, já que parece que ele se lembra da construção da mesma realizada no encontro anterior. Porém, na tentativa de construção, observamos alguns equívocos no processo de dedução, como considerar que *"$a_4=a_3 \,.\, a_2 \,.\, a_1 \,.\, q$"*. Da mesma forma que o aluno K, os alunos M, L e J apresentam a fórmula do termo geral, após algumas tentativas de dedução.

Mesmo com algumas dificuldades quanto à dedução da fórmula, consideramos válida essa discussão, já que os alunos ficaram interessados com a proposta e por esta ser um tipo de atividade que não é comum no ensino em que se encontram. A a análise da tarefa que compõe essa sessão é feita a seguir.

Quanto ao item (a), os alunos G e I fazem uso da estratégia E_{a2}, dispondo os seis primeiros termos na forma fracionária sobre a reta real.

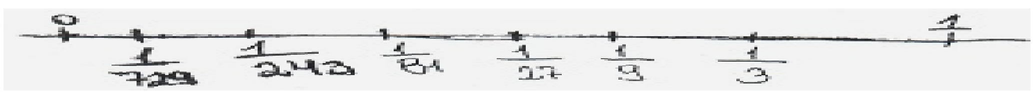


Figura 22: Protocolo dos alunos G e I. Sessão 4. Item (a)

Já K, L, M e J fazem as conversões da representação fracionária para decimal, conforme previsto na estratégia E_{a1}; porém, representam os valores dos termos sob a reta das seguintes formas.

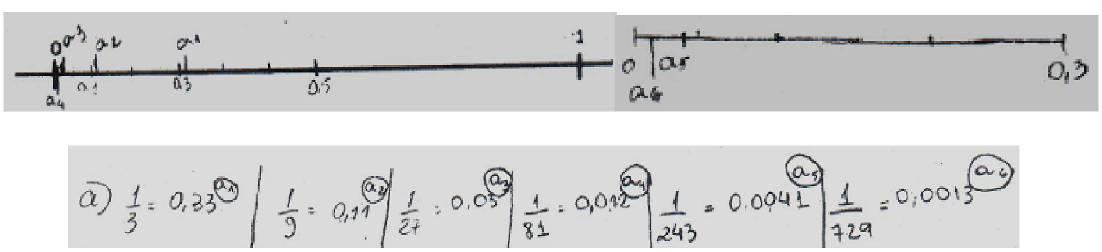


Figura 23: Protocolo dos alunos M, J e L. Sessão 4. Item (a)

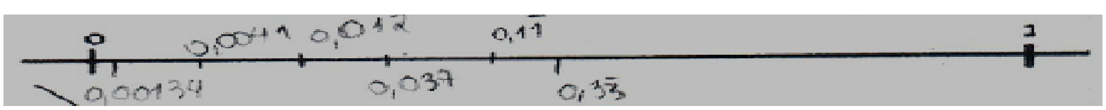


Figura 24: Protocolo do aluno K. Sessão 4. Item (a)

Notemos no excerto de M, J e L, a tentativa dos alunos em analisar com precisão a aproximação dos valores dos termos na vizinhança de 0, o que leva-os a dar um "zoom" na reta numérica. É a mobilização deste esquema que os deixa desestabilizados cognitivamente frente a possibilitar dos termos atingir o valor zero ou apenas aproximar cada vez mais dele (infinito potencial), como veremos a diante.

O item (b) é respondido corretamente pelos alunos K, G e I, que justificaram a existência de uma constante que multiplica os termos da progressão encontrando a razão $\frac{1}{3}$, só depois de verificarem que a razão da PG não seria 3, como mostra o excerto a seguir.

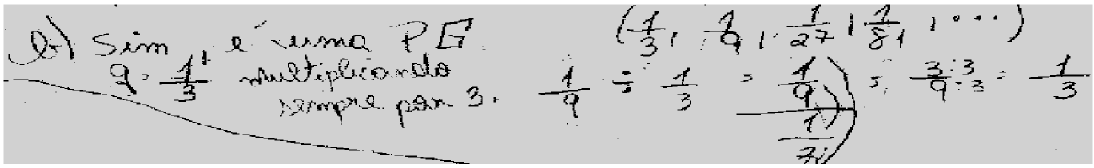


Figura 25: Protocolo do aluno K. Sessão 4. Item (b)

No mesmo item os alunos M, J e L utilizaram a estratégia E_{b2}, e apresentaram como resposta final a razão 3, conforme mostra o diálogo abaixo. Isso evidencia a dificuldade dos alunos em determinar a regularidade entre os termos, visualizando apenas o denominador das frações unitárias.

> Aluno J: A razão é 3, não é?
> Aluno M: É por que faz todos vezes 3
> Aluno L: A razão é 3

No que concerne ao item (c), os alunos I, G e K utilizaram a estratégia E_{c1}, ao indicarem corretamente o 22° termo da progressão, fazendo uso da fórmula geral construída anteriormente. Contudo, os alunos M, J e L não conseguiram progredir na resolução deste item, apresentando como solução: $\frac{1}{a_n^{22}}$, devido ao aluno M manifestar dificuldade com as notações usadas e fazendo prevalecer sua própria resolução perante os demais. Os colegas não conseguiram invalidar o resultado obtido por M, ainda que o aluno J alerte que seria melhor utilizar a fórmula.

> Pesquisadora: Como que a gente pode indicar o 22°?
> Aluno J: Não dá para mostrar pela fórmula? Assim, que termo que ela quer? [...] o 22°? Igual a 1 vezes q da razão *n* menos, não, o *n* é o 22 menos...
> Aluno M: A gente não sabe qual é a fórmula, não tem como colocar assim.

No entanto, o aluno J não consegue formular uma justificativa plausível para seus interlocutores para convencê-los sobre a operação a ser realizada, ou seja, *"a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo,* *identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema lingüístico)"* (BROUSSEAU, 2008, p.29)

Quanto ao último item desta tarefa, G, I, J, L e M fazem uso da estratégia E_{d2}, salvo o aluno K que explica sua resolução afirmando que *"vai diminuindo, aproximando-se de 0"*, mas sem apresentar justificativas. É importante mencionar que apenas no debate final os sujeitos de pesquisa discutem a respeito deste item; o que isso nos leva a considerar que o tempo tenha sido curto para as duas atividades realizadas. Nesse momento a pesquisadora questiona sobre o comportamento dos termos da progressão nas proximidades do número zero, o que possibilitou resgatar a fala do aluno K quando este afirma que não haveria possibilidade dos termos atingir 0, já que são infinitos, bem como a fala do aluno I, que também justifica que os termos da sequência não atingem zero, por ser infinito: *"Não, é infinito professora".*

Essas afirmações evidenciam a presença do teorema-em-ação (T_1), quanto à impossibilidade de uma progressão geométrica atingir dado valor, devido ao fato de ser infinita. Essa atitude tem se mantido pelo aluno K desde a primeira tarefa de nossa sequência, enquanto ser este o momento em que o aluno I, nos dá indícios da mobilização desse teorema-em-ação.

Durante a discussão final observamos, na interação entre os alunos M e J que a organização de suas condutas torna-se invariante, conforme analisadas inicialmente na tarefa da sessão 1. Além disso, continuam entrando em contradição quando afirmam que "*vai chegar"* e depois que "*não vai chegar*," já que ainda não possuem mecanismos de prova. No entanto, por mais que não consigam validar as afirmações levantadas, os alunos passam por situações adidáticas de ação, ao conjecturarem se os termos da sequência "chegam" ou não a zero, e de formulação, quando o aluno M, condicionado à regra-em-ação (x-1)/x, justifica suas conjecturas afirmando: "porque não vai chegar, vai ficar sempre faltando 1", como podemos verificar no diálogo que segue.

> **Aluno M: Ele vai chegar no zero**
> Pesquisadora: Por que ele vai [...] quem respondeu?
> Aluno M: Uma hora vai ter que chegar
> **Aluno J: Uma hora vai ter que encher, é que nem o balde, uma hora tem que encher**
> Aluno M: Ele não vai chegar. **Ele não vai chegar por que não vai dar exato**
> Pesquisadora: Ele vai só se aproximar do zero?
> Aluno J: Só; tá muito próximo do zero. **Ele não vai chegar** [...]
> **Pesquisadora: Então, pode ultrapassar o zero?**

> **Aluno M: Não**
> Todos: Não
> Pesquisadora: Certeza?
> Aluno M: Sim, certeza. **Por que não vai chegar, vai ficar sempre faltando 1**

As conjecturas "não vai chegar, vai ficar sempre faltando 1" e "não vai chegar por que não vai dar exato" manifestados pelo aluno M nos dá indícios da mobilização do teorema-em-ação (T_1), vinculado ao fato dos termos se aproximarem cada vez mais do valor dado, sem atingi-los, o que leva-os a atestar que os termos jamais ultrapassarão o valor dado. Prevalece a ideia do infinito potencial, como podemos observar na afirmação: "*vai ficar sempre faltando",* o que também é mantido na segunda afirmação quando o aluno manifesta o fato de "não dar exato", podendo ter se referido à regra ($\frac{x-1}{x}$) mobilizada na primeira tarefa realizada.

Com essa tarefa verificamos que os alunos constroem, ainda que intuitivamente, a noção de limite da sequência numérica, identificando o máximo de termos possíveis, porém sem analisar o comportamento de $\frac{1}{3^n}$ quando n cresce infinitamente. Ainda que não tenhamos solicitado aos alunos a identificação do termo geral, vimos que nenhum deles o encontrou, sendo este um possível caminho para a validação, conforme havíamos previsto.

5.3.2 Sessão 5 (PGs convergentes e divergentes)

Essa sessão contém duas tarefas que têm como objetivo propor aos alunos a análise do comportamento dos termos de PGs tanto convergentes quanto divergentes.

A seguir, primeira tarefa proposta:

a) *Complete a tabela abaixo, que representa uma progressão geométrica definida pelo seu termo geral:* $a_n = 3^n$

n	a_n
1	
2	
3	
4	
5	
. . .	. . .
n	
. . .	. . .

b) *O que está acontecendo com os termos dessa progressão, quando n cresce infinitamente? Justifique*

Objetivo: Ao contrário da tarefa anterior, esta foi escolhida com o objetivo de levar os alunos a analisarem o comportamento de uma progressão geométrica divergente.

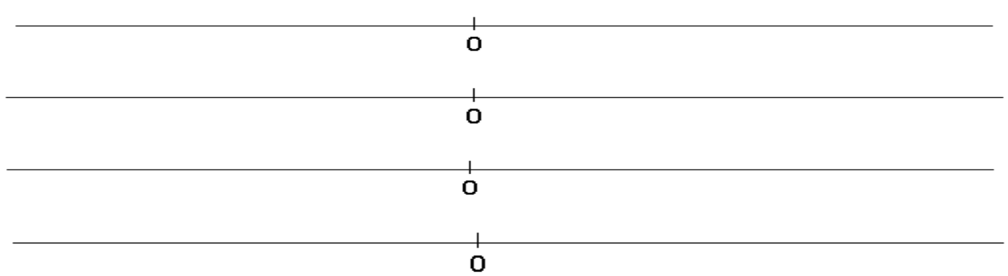
A seguir, a segunda tarefa:

Considere as seguintes progressões geométricas definidas por seus termos gerais:

$$\boldsymbol{a_n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad \boldsymbol{b_n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad \boldsymbol{c_n} = \left(\frac{5}{4}\right)^n \qquad \boldsymbol{d_n} = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

a) Represente sobre a reta, no mínimo, os cinco primeiros termos de cada uma das progressões acima.

(a_n)
(b_n)
(c_n)
(d_n)



b) Se continuarmos representando na reta os termos de cada progressão geométrica, o que poderíamos concluir quanto as progressões $(\boldsymbol{a_n})$ *e* $(\mathbf{b_n})$*, quando fazemos n crescer infinitamente? E quanto as progressões* $(\boldsymbol{c_n})$ *e* $(\boldsymbol{d_n})$*? Por que isso acontece?*

Objetivo: Propor aos alunos que analisem os comportamentos entre as progressões (a_n ; b_n) e (c_n ; d_n), quando *n* cresce infinitamente.

5.3.2.1 Análise *a priori* da primeira tarefa

Variáveis didáticas:

V_{s2}: Representação figural no enunciado da situação-problema. Optamos por utilizar a tabela, devido ao fato da mesma favorecer a visualização da divergência da PG, restringindo o uso de diferentes estratégias.

V_{s3}: Tipo de PG. O uso da progressão de razão inteira e maior que 1, ao contrário da atividade anterior, pode levar os alunos a manifestarem estratégias de forma automatizada, sem ser preciso analisar com precisão as aproximações nesse caso. O que isso nos leva a acreditar que os mesmos não terão dificuldade na resolução desta tarefa.

Alguns dos conhecimentos a serem mobilizados pelos alunos são: as propriedades de potência, progressão geométrica, noção de função, infinito.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Substituição. Substituir os valores para a variável *n*, conforme apresentado na tabela, associando corretamente os valores de a_n, para cada *n* dado.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Divergência. Observar que quanto mais *n* cresce infinitamente os termos da progressão aumentam, crescendo infinitamente. Isso pode levá-los a conjecturar sobre a possibilidade desta sequência não se aproximar de nenhum número fixo, já que seus termos estão sempre aumentando, tendendo ao infinito.

Uma possível validação nesta tarefa: Analisar o termo geral $a_n = 3^n$ ressaltando que os termos tendem ao infinito ao substituírem valores para a variável *n*.

5.3.2.2 Análise *a priori* da segunda tarefa

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. A calculadora influencia na determinação de estratégias pelos alunos, quando representam os valores dos termos na reta numérica, e ao fazerem uso da representação fracionária ou decimal, bem como na análise das aproximações obtidas.
V_{s2}: Representação figural no enunciado da situação-problema. A reta numérica favorece a visualização do comportamento dos termos das progressões na vizinhança de zero, diferentemente do que se fizéssemos uso de nenhuma ou outra representação, podendo os alunos levantarem outras conjecturas a respeito da noção de limite.
V_{s3}: Tipo de PG. Ao trabalhar com as diferentes razões de uma PG ($-1< q <1$ e $|q| >1$) os alunos terão que apresentar novas estratégias ao determinar a convergência e divergência das sequências dadas, principalmente quanto as progressões ($\mathbf{b_n}$) e ($\mathbf{d_n}$), por serem alternadas.

Os conhecimentos a serem mobilizados pelos alunos são os números racionais, operação com números decimais e/ou fracionários, as propriedades de potência, progressão geométrica, noção de função.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}**: Representação fracionária ou decimal.** Representar os cinco termos da progressão, respeitando a ordem de grandeza entre eles. Podem representá-los sob a forma fracionária ou realizar a conversão da representação fracionária para a representação decimal. No entanto, acreditamos que possam surgir os possíveis erros:

- ✓ Representar os termos das sequências sem levar em conta a ordem de grandeza entre eles o que se dá se houver dificuldades ao compararem números fracionários e decimais ou oriundos dos cálculos realizados.
- ✓ Representar todos os termos das sequências **(b_n)** e (**d_n**) na reta com valores positivos. Tal erro seria oriundo da dificuldade ao trabalhar trabalharem com as propriedades de potenciação, ignorando assim o sinal negativo presente no termo geral.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}**: Análise da variação dos termos.** Afirmar que no caso das sequências **(a_n)** e (**b_n**) os termos estão diminuindo enquanto os termos de (**c_n**) e (**d_n**) aumentam. Neste caso, observam o que está acontecendo com os termos da sequência quando *n* varia e podem ou não analisar o comportamento delas nas proximidades do número zero representado na reta.

E_{b2}**: Análise nas proximidades de zero.** Quanto as sequências (**b_n**) e (**d_n**) pode-se afirmar que os termos se alternam, embora os termos de (**b_n**) se aproximem de zero, e os termos de (**d_n**) se afastem dele. Na progressão (**a_n**) os termos se aproximam de zero e, em (**c_n**) os termos se afastam do número zero.

Uma possível validação nesta tarefa: Verificar que para progressões em que $|q| > 1$ o termo geral tende ao infinito, ao contrário de progressões em que $-1 < q < 1$, o qual se aproxima cada vez mais de zero.

5.3.2.3 Experimentação (sessão 5)

Esta sessão foi aplicada no dia 13 de abril de 2011 e teve duração de aproximadamente 54 minutos. Todos os sujeitos de pesquisa compareceram a sessão.

5.3.2.4 Análise *a posteriori* da primeira tarefa

Como previsto, os alunos não tiveram dificuldade na resolução dessa tarefa, por se tratar de uma progressão geométrica com razão inteira e maior que 1. Quanto ao item (a), todos os sujeitos o resolveram corretamente ao fazerem uso da estratégia E_{a1}, substituindo os valores para a variável n. Segue abaixo o diálogo do aluno I explicando a estratégia usada.

> Aluno do grupo: “Aluno I”, 3, 6, 9, 12...
> Aluno I: Não, vai ser assim
> Aluno do grupo: Vai ser multiplicado?
> Aluno I: Não, vai ser elevado ...1...vai ser 3 elevado a 1, que nem tá aqui oh, aqui vai ser 3 elevado a 2..
> Aluno G: 3, 9, 27, 81, 243...

Temos por hipótese de que o aluno G parece relacionar a variável n como sendo infinito, o que mostra-nos que esta concepção ainda não foi desestabilizada com as discussões já realizadas, como vemos a seguir:

> Aluno do grupo: Quanto dá 3 elevado a n?
> Aluno G: Não dá nada por que o n é o número enésimo você nomeia ele como **qualquer número infinito.**

Quanto ao item (b) todos os sujeitos afirmam que os valores estão sendo multiplicados por 3 (triplicados) e, além disso, os alunos M e L acrescentam:

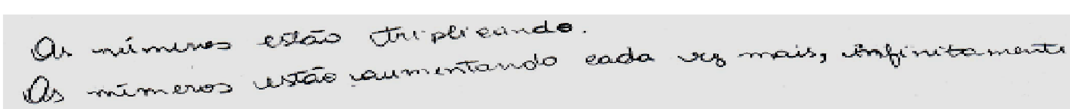


Figura 26: Protocolo dos alunos M e L. Sessão 5. 1ª tarefa. Item (b)

No diálogo abaixo observamos a mesma dificuldade encontrada pelo aluno G, ao representar o infinito com a variável n, manifesta-se com o aluno M, pelo fato do mesmo tomar a variável n como sendo infinito, o que nos leva a investigar a persistência dessa ideia equivocada nas resoluções do aluno nas próximas tarefas.

> Pesquisadora: [...] o que está acontecendo com os termos da sequência? Eles estão chegando perto de algum número ou não?
> Aluno M: Não, porque é infinitivamente.
> Pesquisadora: Você concorda ‘Aluno L’?
> Aluno L: No infinito, os números estão aumentando sim.

> Pesquisadora: Os números estão aumentando? Então quer dizer que eles vão aumentar, aumentar, é isso?
> **Aluno M: Até o n.**
> Pesquisadora: Até o n-ésimo; ele vai parar?
> Aluno L: Não.
> Aluno do grupo: Não, porque n-ésimo é um número qualquer.
> **Aluno M: Até infinitivamente**

O aluno K, por sua vez, faz uso da estratégia E_{b1} prevista anteriormente, no momento em que a pesquisadora indaga se há possibilidade dos valores convergirem para algum valor dado.

> Pesquisadora: Além de estarem triplicando, o que está acontecendo quando estou aumentando o valor de n, o que está acontecendo com os termos da sequência?
> Aluno K: Tá aumentando [...] vai aumentar a infinito [...]
> **Pesquisadora: Mas se os valores estivessem diminuindo?[...]**
> **Aluno K: Estaria diminuindo pra chegar a zero, talvez**
> Pesquisadora: Então quer dizer que quando diminui, então pode chegar a algum número?
> **Aluno K: Mas é que não vai chegar né? Por que é infinito que nem dos anteriores, nunca chega, sempre vai ficar um restinho pra achar**.

No diálogo acima grifamos duas ideias manifestadas pelo aluno, que o levaram a inferir o resultado obtido durante sua ação. A primeira delas está vinculada ao fato de que toda sequência monótona limitada é convergente, já que as progressões cuja razão está entre 0 e 1 convergem, conceito trabalhado na tarefa da 4ª sessão. No entanto, o aluno deixa explícita sua concepção, de que os termos não atingem certo valor já que a sequência é infinita, o que evidencia a estabilidade do teorema-em-ação (T_1). Também neste momento o aluno deixa transparecer a noção do infinito potencial quando afirma que "*sempre vai ficar um restinho pra achar*", visto que o uso desse tipo de significante ainda não tinha sido manifestado por ele nas tarefas anteriores. Como Franchi (2008, p.189) reafirma: "buscamos, entretanto, nos significados atribuídos pelos alunos a expressões da linguagem cotidiana, elementos para entender diferentes procedimentos correspondentes a determinadas situações" que envolvem a noção de limite de progressões geométricas infinitas.

5.3.2.5 Análise *a posteriori* da segunda tarefa

Ao representarem os termos sobre a reta todos os alunos resolveram o item (a) fazendo uso da estratégia E_{a1} e realizando as conversões entre as representações ao apresentarem os termos sob a forma fracionária ou decimal. Ao contrário do que imaginávamos, não demonstraram dificuldades ao lidarem com as progressões alternadas, como mostram os protocolos abaixo.

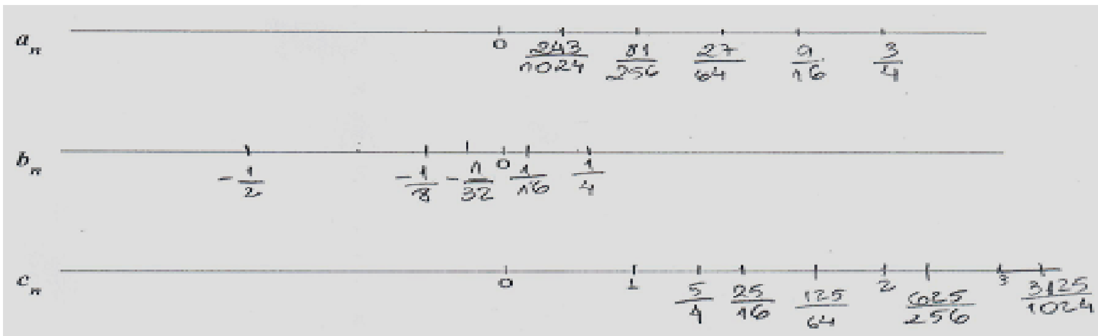


Figura 27: Protocolo dos alunos M e L. Sessão 5. 2ª tarefa. Item (a)

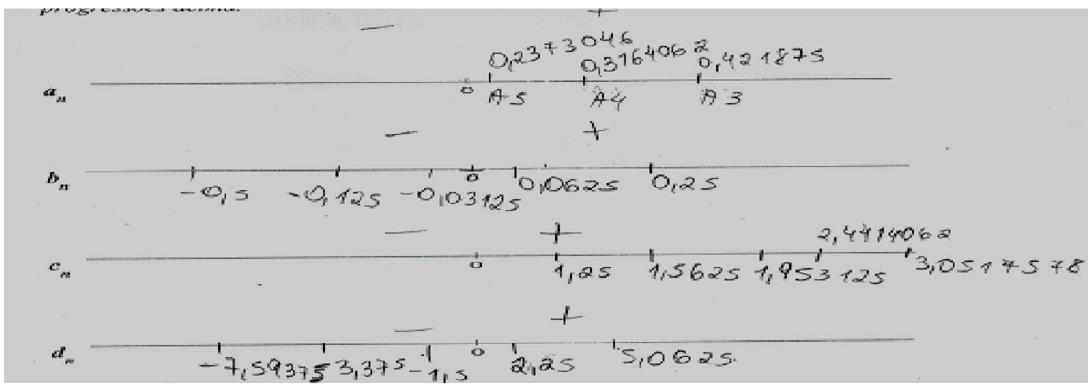


Figura 28: Protocolo do aluno K. Sessão 5. 2ª tarefa. Item (a)

Assim como, os alunos M e L, o aluno J representou corretamente os valores dos termos sob a reta, utilizando a representação fracionária. Nas produções de G e I, observamos que os mesmos fizeram uso da representação decimal e representaram todos os termos da sequência d_n como sendo positivos. No entanto, acreditamos que este equívoco seja apenas um erro de cálculo como previsto, já que os alunos levaram em conta a alternância dos sinais nos termos do item b_n. Quanto ao item (b), apenas os alunos G e I não apresentaram resoluções devido ao tempo que despenderam apenas à ordenação dos termos das sequências sob a reta. No caso de K, o mesmo fez uso da estratégia E_{b2}, respondendo da seguinte forma:

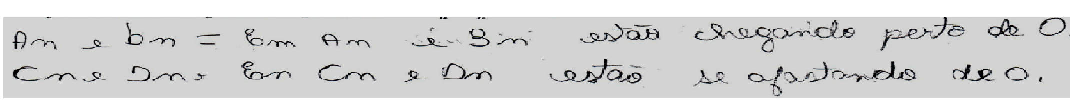
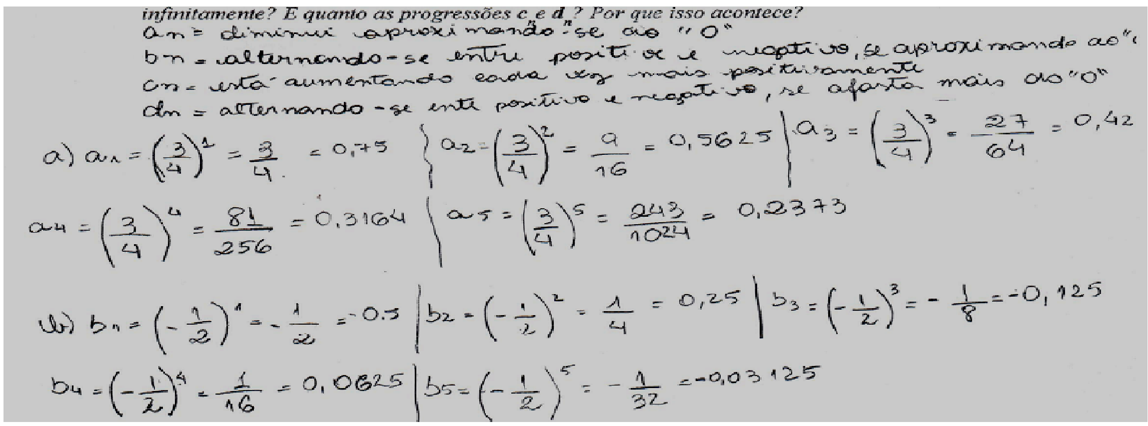

An e bn = Em An e Bn estão chegando perto de O.
Cn e Dn = Em Cn e Dn estão se afastando de O.

Figura 29: Protocolo do aluno K. Sessão 5. 2ª tarefa. Item (b)

No momento de debate com a turma o aluno K afirma que os termos se aproximam de zero, mas não chegam ao zero já que a sequência é infinita, o que reforça a persistência do teorema-em-ação T_1 (os termos de uma PG se aproximam de certo valor, sem atingi-lo). Os alunos M, L e J fazem uso das estratégias E_{b1} e E_{b2}, como mostra a resolução a seguir.


infinitamente? E quanto as progressões c e d? Por que isso acontece?

a_n = diminui aproximando-se ao "0"

b_n = alternando-se entre positivo e negativo, se aproximando ao "0"

c_n = está aumentando cada vez mais positivamente

d_n = alternando-se entre positivo e negativo, se afasta mais do "0"

a) $a_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$ | $a_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = 0{,}5625$ | $a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = 0{,}42$

$a_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} = 0{,}3164$ | $a_5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024} = 0{,}2373$

b) $b_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ | $b_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ | $b_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} = -0{,}125$

$b_4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ | $b_5 = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} = -0{,}03125$

Figura 30: Protocolo dos alunos M e L. Sessão 5. 2ª tarefa. Item (b)

Quando indagamos os alunos se os termos da sequência dada podem chegar ao zero, os alunos M e L apresentam a seguinte resposta:

> Aluno M: Não, não vai, porque vai aumentando. Porque pra ficar zero certinho teria que ser ..
> Aluno L: 1 dividido por 0...
> Aluno M: É 1 dividido por zero, e ele vai aumentando...

Nesse diálogo podemos verificar que os alunos apresentam um embrião de validação quando observam a partir do termo geral a impossibilidade de se chegar a zero, porém sem fazer referência à variável *n*. No que concerne ao último questionamento realizado no item (b), para justificar o porquê do comportamento dos termos das sequências dadas apenas um grupo de alunos (não sujeitos de pesquisa) conseguiu formular uma justificativa plausível para o comportamento em comum das sequências (a_n) e (b_n) e das sequências (c_n) e (d_n), apresentando a seguinte resolução.

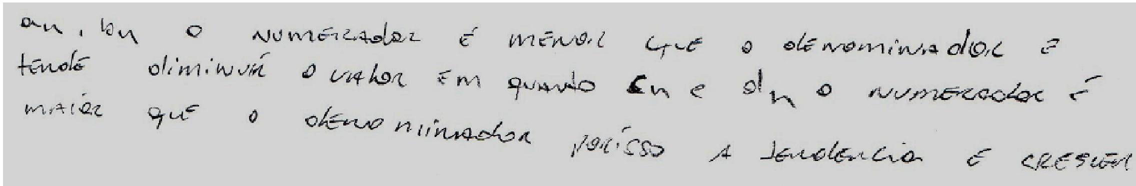

a_n, b_n o numerador é menor que o denominador e tende diminuir o valor em quanto c_n e d_n o numerador é maior que o denominador por isso a tendencia é cresçer

Figura 31: Resposta de um grupo. Sessão 5. 2ª tarefa. Item (b)

Esses alunos comunicam para a classe a informação obtida, formulando-a em uma linguagem compreensível para os demais. Como ao final do encontro nenhum aluno conseguiu validar a formulação levantada, a pesquisadora realiza a institucionalização desta formulação, pois mesmo interrompendo a situação que se apresentava como sendo adidática, foi necessário proporcionar um fechamento à discussão dos alunos devido ao curto tempo para discussão. Por considerarmos que esta formulação seja de grande valia para a resolução dos alunos nas tarefas propostas a partir do bloco E, a pesquisadora trata intuitivamente a noção de limite, afirmando que os termos das sequências dadas se aproximam cada vez mais de zero, já que para valores tão grandes de *n* os termos x_n tornam-se cada vez mais próximos de zero, quanto queiramos. A necessidade desta situação de institucionalização está vinculada ao que Brousseau (2008, p.31) explicita quanto a tarefa do professor, uma vez que este deve “dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados, [...] conferir um *status* aos eventos da classe vistos como resultados dos alunos e do processo de ensino [...]”.

5.3.2.6 Considerações sobre o Bloco C

Para a realização das tarefas propostas, os alunos mobilizaram conhecimentos construídos nas sessões anteriores, como foi o caso da construção da fórmula do termo geral de PGs. Ao localizarem os valores dos termos das progressões na reta, a estratégia que mais predominou foi a de realizar conversões das representações fracionárias para as decimais.

Ao determinarem a razão de uma PG, alguns alunos analisaram apenas a regularidade existente entre os denominadores das frações unitárias, procedimento que já havíamos verificado na tarefa da sessão 1. Verificamos ainda que o teorema-em-ação T_1 (os termos da PG se aproximam de certo valor, sem atingi-lo) novamente foi mobilizado pelos alunos M, L, J, I e K, manifestando indícios do infinito potencial.

Como relatamos no bloco B, os alunos trabalharam com o n-ésimo termo de uma sequência sem dificuldades; porém, aqui, os alunos G e M, parecem atribuir à variável *n* um valor infinito, o que nos indica que devemos analisar a sua estabilidade nas próximas tarefas. Para finalizar, cabe ressaltar que as validações esperadas neste bloco foram um tanto complexas; no entanto, os alunos apresentaram alguns embriões de validação após formularem suas conjecturas, como foi o caso de M e L.

5.4 BLOCO D (A NOÇÃO DE LIMITE NA SOMA INFINITA DE PG)

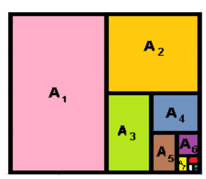
Este bloco é composto por duas sessões de tarefas (6ª e 7ª sessão) que têm como objetivo explorar a noção de limite da soma infinita dos termos de PGs.

5.4.1 Sessão 6 (Conjecturas relativas as somas infinitas)

Esta sessão é composta por uma única tarefa, dividida em duas partes, cujo objetivo é possibilitar a elaboração de conjecturas a respeito de uma soma infinita dos termos de uma progressão geométrica convergente.

Parte I

Considere o quadrado da figura abaixo, cuja área é 1 cm^2. Analise as divisões feitas na figura e responda as seguintes questões:[18]



O quadrado inicial foi dividido ao meio, em que tomamos uma de suas partes A_1. Dividimos a parte restante ao meio, tomando A_2. Da mesma forma, obtemos A_3 ao dividirmos a parte que restou de A_2, ao meio. Esse processo se repete infinitamente, como mostra a figura acima.

a) Determine a sequência das áreas de A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n, ...

b) Se somarmos as áreas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 e, assim sucessivamente, **,** *o que será obtido nesse processo? Como você explicaria este fato?*

---

[18] Fonte (adaptado): **GIOVANNI**, J.R; **BONJORNO**, J.R. *Matemática Completa*. 2ª edição. São Paulo: FTD. 2005, p.375.

Objetivo: Nesta parte, temos o intuito de possibilitar aos alunos a reflexão sobre o fato de uma soma infinita corresponder a um valor real por meio de uma representação geométrica.

Parte II

a) Com o auxílio da calculadora, encontre o valor da seguinte soma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

b) Como ter certeza que o valor que a calculadora nos induz seja o resultado desta soma? Explique sua resposta.

Objetivo (Uma possível validação): Esta segunda parte da tarefa está vinculada à mesma soma que os alunos devem apresentar na primeira parte, cujo objetivo é de provocá-los a uma possível validação ao associarem esta soma com a área do quadrado na situação anterior, concluindo assim o valor para o qual esta soma deve convergir.

5.4.1.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora: O uso dessa variável implica na realização de conversões da representação fracionária para decimal, ao analisar as aproximações obtidas nas somas ao invés de conjecturar geometricamente sob a situação proposta.

V_{s2}: Representação figural no enunciado da situação-problema. Esperamos que a presença da figura na parte I da tarefa possa contribuir para que os alunos conjecturem sobre a possibilidade de que uma soma infinita possa corresponder a um número real.

V_{s3}: Tipo de PG. Cremos que algumas estratégias a serem apresentadas podem estar vinculadas ao tipo de progressão, pois ao lidar com uma sequência em que $0 < q < 1$, a noção de convergência nesta situação implica no trabalho com uma soma de termos infinitamente pequenos.

Quanto aos conhecimentos necessários para a resolução dessa sessão de tarefa podemos destacar as progressões geométricas, operações com números racionais, generalização de padrão numérico-geométrico, cálculo da área do quadrado e retângulo, propriedades de potência.

i) Análise relativa à parte I da tarefa:

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Cálculo das áreas. Identificar a partir dos pontos médios do lado do quadrado a medida dos lados dos outras figuras e, em seguida, efetuar o cálculo de algumas áreas.
E_{a2}: Generalização. Observar a regularidade entre as áreas descrita no enunciado da tarefa e generalizar o padrão observado, indicando alguns termos da sequência das áreas. A representação dos termos pode ser dada na forma decimal ou fracionária.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Infinito atual. Perceber que a soma só pode ser igual a área do quadrado inicial ($1cm^2$).
E_{b2}: Infinito potencial. Considerar que a soma das áreas apenas se aproxima cada vez mais do *1* que, por ser infinita, alegariam impossibilidade de preencher o quadrado inicial. Essa estratégia nos mostra indícios da manifestação do teorema-em-ação (T_3).
E_{b3}: Tende ao infinito. Associar que o "resultado" da soma infinita seja infinito, já que a soma cresce infinitamente, característica esta do teorema-em-ação T_4.

Esta associação indica que nem a presença da figura possibilita desestabilizar a concepção de que uma soma infinita não possa corresponder a um número real (teorema-em-ação T_3).
E_{b4}: Tende a zero. Observar apenas o comportamento dos termos da sequência, afirmando que a soma tende a zero. Essa estratégia vincula-se ao teorema-em-ação $\mathbf{T_2}$ (equívoco ao considerar o limite do termo geral igual ao limite das somas parciais).
E_{b5}: Uso da intuição. Observar que em algum momento uma hora vai chegar a área total de $1cm^2$, uma vez que se está somando infinitamente a quantidade dos termos.

ii) Análise relativa à Parte II da tarefa:

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Proximidade de 1. Realizar a soma de alguns termos da sequência e verificar que a mesma se aproxima cada vez mais de 1. Com isso, é possível instigar os alunos sobre uma melhor aproximação da soma dada, viabilizando assim uma discussão acerca da noção de limite na situação proposta.
E_{a2}: Obtêm-se o valor 1. Efetuar a soma de um número máximo de termos possíveis e verificar que a mesma se aproxima de 0,9999... o que leva-os a afirmar que a soma tende ao número 1.

Neste caso, por não conceberem 0,99999...como sendo um número real, podem apresentar o valor da soma como sendo 1, por ser este o número mais próximo e provável como resultado da soma considerada, como ressalta Monaghan citado por Moreira; David (2007).

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Validação. Associar esta soma com a parte I desta tarefa, mostrando que nesta parte a soma não poderia ultrapassar a área total do quadrado inicial de 1 cm^2. Como se trata da mesma soma infinita o valor que a calculadora induz é o número 1.
E_{b2}: Infinito potencial. Efetuar o cálculo de alguns valores da soma, observando apenas as aproximações em relação ao número 1.

5.4.1.2 Experimentação (sessão 6)

Esta sessão de tarefa ocorreu no dia 18 de abril de 2011 com duração de aproximadamente 55 minutos. Os seis sujeitos de pesquisa compareceram a este encontro.

5.4.1.3 Análise *a posteriori*

i) Análise relativa à parte I da tarefa

Os alunos I, M, L e J determinaram algumas áreas que compunham a sequência solicitada no item (a), utilizando a estratégia de seguir a regularidade existente ao verificar que cada uma das áreas é constituída tomando sempre "a metade da metade" da área do quadrado inicial, conforme previsto na estratégia E_{a2}. Esta também é usada pelos alunos K e G, embora não registrem a sequência solicitada. O diálogo a seguir mostra-nos como o aluno G procedeu na resolução deste item.

> **Aluno G: (lê o enunciado e diz): Que massa cara!** Oh, considere o quadrado abaixo, da figura toda né. Dividiu ele ao meio, 1/2 cm, o 1/2 cm também foi dividido ao meio que é esse aqui, é só fazer [...] se o quadrado do primeiro tem 1 cm, a área dele, a metade de 1 cm tem quanto?
> Parceiro do aluno G: meio
> Aluno G: Então, ½ cm é o a_1.
> **Parceiro do aluno G: Rapaz, eu não acredito que 1 cm^2 vai dar tudo isso de pedaçinhos [...]**
> Aluno G (lê o enunciado do item (a): a_1 é igual a...
> Parceiro do aluno G: 0,5 cm...o a_2 é a metade da metade
> Aluno G: 1/4......1/4 dá quanto? 0,25. O **a_3 equivale a 12 e meio...tem que dar doze e meio aqui**

Um ponto que merece consideração na fala do aluno G é a ocorrência de devolução do problema ao aluno quando este se entusiasma com essa nova situação. Isso também se mantém em relação ao aluno L quando explica aos colegas a sua interpretação sobre o problema dado, ao lidar com a ideia de infinito neste estudo.

> Aluno L: A_1 é ½ porque pra formar um inteiro que é 1 precisa de 2 desse, mesma coisa com o resto, você precisa de 4 A_2 pra chegar um inteiro [...] (o aluno lê o item b) o que seria obtido nesse processo? **Outro número infinito, eba!**

Mesmo encontrando as áreas corretamente, todos os sujeitos ainda anteciparam a razão da progressão geométrica como sendo 2 ao invés de $\frac{1}{2}$.Os alunos sabiam o procedimento a ser usado para encontrar as razões; entretanto, deduziam o valor 2 ao focarem sua atenção apenas no denominador das frações unitárias, como vínhamos relatando nas atividades anteriores.

Observamos que após encontrarem as áreas das figuras obtidas, é no item (b) que os alunos passam a formular justificativas sobre as somas das mesmas, passando por situações adidáticas, como podemos ver adiante. Uma situação de ação vivenciada pelo aluno K pode ser identificada quando ele realiza algumas somas das áreas no intuito de verificar se há possibilidade de completar a área do quadrado inicial, apresentando uma estratégia de natureza mais operatória, condicionada pelo uso da calculadora, como mostra o seguinte diálogo:

> Pesquisadora: Por que você acha que não completa a área do quadrado?
> Aluno K: dá 0,984675...ainda tá em 9...e tá no a_6 ainda e, ainda não chegou. Então a gente acha que não.

Segundo Freitas (2008, p.96), "Numa situação de ação, há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento". A ação do aluno evidencia a tentativa de encontrar um valor limite para a soma dada por meio de alguns cálculos realizados, pois como explica Sierpinska (1985), a tendência dos alunos é efetuar o cálculo de alguns termos da sequência e deduzir seu limite, processo caracterizado como uma indução incompleta.

No decorrer do diálogo, verificamos uma situação de formulação quando o aluno em questão busca encontrar uma justificativa para a conclusão que tirou em relação à ação efetuada, tomando por base as tarefas realizadas anteriormente.

> Aluno K: Tá aumentando... mas não vai encher igual a anteriores [...] por que ela é infinita.
> Pesquisadora: Mas se ela é infinita e não tá sempre aumentando, na lógica não deveria preencher?
> Aluno K: Mas mesmo assim, é que nem aquelas outras, não chega, vai ficar sempre 0,0000.... [...] vai estar sempre faltando um pouquinho.

Ao final de sua fala, o aluno K volta a manifestar a noção do infinito potencial e o fato de afirmar que a soma das áreas não completa a área do quadrado inicial, **por esta ser infinita**, atesta a mobilização do teorema-em-ação T_3, que postula a impossibilidade de uma soma infinita ser expressa por um número finito, prevista na estratégia E_{b2}. Nesse sentido, vimos que o aluno apresenta a intenção de validar a sua afirmação ao ressaltar o porquê de a soma não poder corresponder a área inicial (1 cm^2).

Da mesma forma como age o aluno K, o aluno I faz uso da estratégia E_{b2}, operando com números decimais e analisam as aproximações obtidas com o auxílio da calculadora, como pode ser observado na fala a seguir.

> Aluno I: não vai chegar a 1. Lembra, isso vai dar ½...vai chegar perto do 1....vai dar 0 e milhares de números *(0,.....)* [...] o número pode ser grande depois da virgula mas nunca vai dar 1 [...] vai diminuindo muito.

Assim como os alunos K e I, os alunos M, J e L também manifestam indícios do teorema-em-ação T_3, ao perceberem a impossibilidade da soma da áreas atingir a área do quadrado inicial, já que as somas efetuadas apenas se aproximam da área total. Esses sujeitos utilizam-se da expressão algébrica descoberta na primeira tarefa desta sequência ($\frac{x-1}{x}$) na tentativa de validar a afirmação levantada.

Somente o uso do esquema (x-1)/x, não leva os alunos à resposta correta, pelo fato de não possuírem ainda o conhecimento da noção de limite e/ou não analisarem intuitivamente o que acontece com $\frac{1}{x}$ quando x cresce infinitamente na expressão dada. Segundo Vergnaud (1996, p. 158-159), os algoritmos são esquemas. Entretanto, verificamos que este esquema-algoritmo nem sempre funciona se não está associado a uma conceitualização adequada, isto é, a persistência desses alunos em usar a expressão $\frac{x-1}{x}$, por mais que esta repouse sobre uma conceitualização implícita, a sua validade só se mostra evidente quando utilizamo-la em termos de limite, quando fazemos x tender ao infinito.

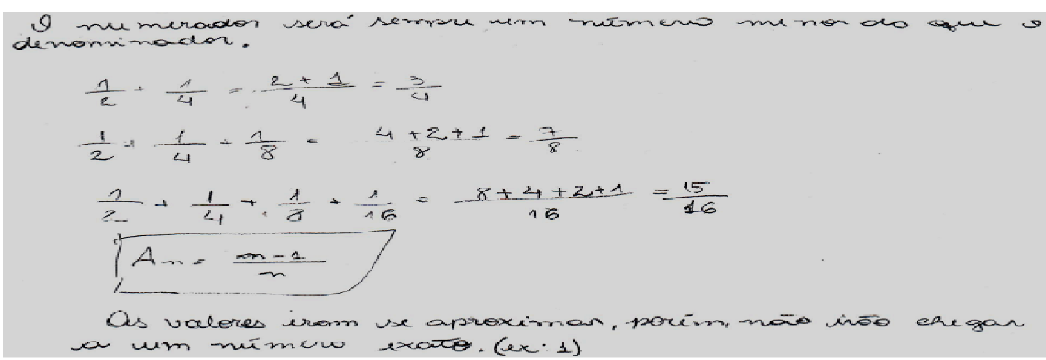


Figura 32: Protocolo dos alunos M, L e J. Sessão 6. Parte I. Item (b)

Mesmo fazendo uso desta estratégia, observamos que os conhecimentos dos alunos mostraram-se desestabilizados com a representação geométrica presente na situação-problema. O diálogo a seguir exemplifica essa desestabilização.

> [...] Pesquisadora: Tá, se eu somar todas essas áreas o que vocês vão obter?
> Parceiro do grupo: 1
> Pesquisadora: Por quê? [...]
> **Aluno J: No caso ele tá dividindo, então se ele somasse é como se ele tivesse parando de dividir e colocando tudo junto de novo... como se parasse de dividir ele fosse reformulando, então ele voltaria a ter 1cm dele...**

Dentre os sujeitos de pesquisa, apenas o aluno G afirma a possibilidade de obtermos a área do quadrado inicial de $1cm^2$, conforme previsto na estratégia E_{b1} (infinito atual).

> Aluno G: Professora, na minha opinião se somarmos tudo isso aqui, vamos obter isso aqui não é? [...]
> Pesquisadora: O quadrado inicial?
> Aluno G: É
> Pesquisadora: Por que você acha isso?
> **Aluno G: Por que foi dividido tudo isso daqui né, e se somarmos tudo isso de novo vai voltar nele de novo, não vai?[...]** é, metade da metade [...] **se somarmos tudo isso aqui vai ter que dar 1 cm, e não vai passar**
> Pesquisadora: E por que você acha que não vai ultrapassar o 1?
> **Aluno G: Por que foi dividido dentro disso aqui, do espaço [...]** isso vai diminuindo, diminuindo [...]

A presença da figura nesta tarefa parece ter sido um diferencial para desestabilizar a concepção do aluno G, que até então vinha conjecturando apenas sob as aproximações em torno de um valor dado. Após elaborar suas conjecturas, manifesta a seguinte resposta final, atestando sua inferência frente a situação proposta, o que evidencia uma passagem das concepções que o aluno vinha manifestando, em torno do infinito potencial, para o atual.

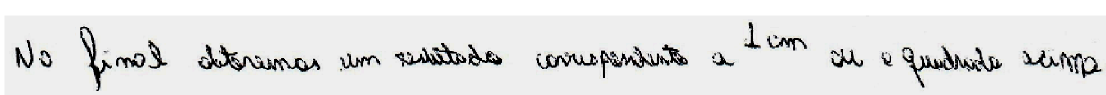


Figura 33: Resposta do aluno G. Sessão 6. Parte I. Item (b)

ii) Análise relativa à parte II da tarefa

Nesta etapa os alunos não corresponderam exatamente às nossas previsões, pois realizaram apenas algumas somas a mais, assim como aconteceu na parte I da tarefa. Fizeram uso apenas da estratégia E_{a1}, analisando somente as aproximações obtidas ao verificarem que os valores obtidos estavam apenas se aproximando do número 1.

Passamos então para o momento de debate das estratégias usadas, uma vez que os alunos discutiram a possibilidade da soma das áreas chegarem ou não a área do quadrado inicial. Neste momento de discussão, os sujeitos I, K, M e L manifestaram a análise de alguns números decimais observando que na parte decimal, os valores aumentara, sendo assim impossível obter o valor 1. Em suas palavras:

> Aluno K: 0,98...Um número aproximado a 1
> Aluno M:...fiz até o décimo termo... 0,9995117
> Aluno I: Se fazer a conta nunca vai passar pra cá, pra dar 1 na dízima [...]
> Pesquisadora. Então, vai chegar a um ponto que aqui terá só 999... vai dar 0,999999.....
> Aluno I: Isso daí não tem como dar 1...não.

A partir das conjecturas levantadas, encerramos o encontro questionando se o número 0,99999... não poderia ser 1, o que levou os alunos a afirmarem que isso seria impossível. Diante desta discussão e ao percebermos que os alunos começaram a ficar angustiados por não conseguir "validar" suas afirmações, adiantamos que em nossa próxima tarefa trabalharíamos em busca de um método de resolução mais eficaz do que apenas realizar algumas contas exaustivamente com a calculadora. Mediante esta situação, podemos afirmar que, como era esperado dos alunos, o processo de validação da parte II, em relação à parte I, não foi atingido por nenhum aluno participante.

5.4.2 Sessão 7 (A busca por um método algébrico de resolução)

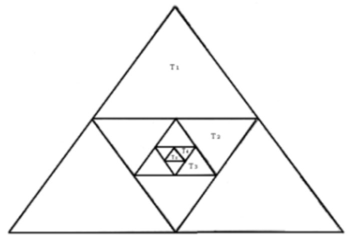
Esta sessão é composta por uma única tarefa que, assim como a anterior, é dividida em duas partes. O objetivo dessa sessão é incitar os alunos a refletirem sobre uma situação-problema na busca de um método de resolução algébrica que os auxilie na validação da noção de limite na soma infinita dos termos de uma PG.

Parte I [19]

---

[19] Fonte (adaptado): **DANTE**, L.R. *Matemática*. Volume único. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2008.

A medida do lado de um triângulo equilátero T_1 é 10 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo equilátero T_2. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero obtém-se um terceiro T_3 e, assim sucessivamente.



a) Observe a figura acima e determine a sequência dos perímetros dos triângulos T_1, T_2, T_3, ... ,T_n, ...

b) Considere a soma dos perímetros de todos os triângulos formados, isto é,

$$\boldsymbol{S} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + \ldots + T_n + \ldots$$

*A soma **S** de todos os* perímetros *será igual a 60 cm? Por quê?*

Objetivo: Indagar os alunos sobre a noção de limite de uma soma infinita dos termos de PGs.

Parte II

Considere a soma $\boldsymbol{S} = 30 + \frac{30}{2} + \frac{30}{4} + \frac{30}{8} + \ldots + \frac{30}{2^n} + \ldots$

*Neste caso **S** é a soma infinita dos termos da progressão geométrica:*

$(30, \frac{30}{2}, \frac{30}{4}, \frac{30}{8}, \ldots)$. *Pergunta-se:*

a) Qual a razão (r) dessa progressão?

*b) Se multiplicarmos **S** pela razão (r) que você encontrou, isto é, r.**S**, como ficará essa nova soma?*

*c) Observe as somas **S** e r.**S**, que você encontrou. O que podemos fazer para determinar o valor da soma **S**? Justifique.*

*d) A partir de suas observações, o que você pode concluir a respeito da **Parte I**, desta atividade, realizada em sala?*

Objetivo (Uma possível validação): Esta parte da tarefa já propicia uma validação para as conjecturas levantadas sobre a noção de limite e a soma infinita dos termos de PG nas tarefas propostas anteriormente, a partir da construção de um método aritmético-algébrico para encontrar o valor limite da soma dada.

5.4.2.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. A ausência da calculadora, na segunda parte, visa a elaboração de justificativas como a construção de um método de resolução algébrico, sem ser necessário o uso de estratégias vinculadas a intuição e estimativas.
V_{s2}: Representação figural no enunciado da situação-problema. Na parte I, acreditamos que o tipo de figura apresenta certo nível de complexidade em relação à anterior, exigindo novas estratégias de resolução.
V_{s3}: Tipo de PG: O tipo de progressão remete os alunos a associá-la com as tarefas trabalhadas anteriormente, provocando assim mudança e uso de outras estratégias.

Alguns dos conhecimentos necessários para a resolução dessa sessão são: progressões geométricas, operações com números racionais, generalização de padrão numérico-geométrico, cálculo do perímetro de triângulos eqüiláteros, propriedades de potência.

i) Análise relativa à parte I desta tarefa:

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Frações ou decimais. Identificar alguns perímetros dos triângulos formados fazendo uso da representação decimal ou fracionária.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Impossibilidade de atingir 60. Realizar alguns cálculos com os valores obtidos e estimar que a soma pode se aproximar do número 60, porém sem atingir esse valor, já que a mesma é infinita. Esta estratégia pode estar relacionada à dificuldade em aceitar que uma soma infinita pode corresponder a um número real, como postulado no teorema-em-ação (**T_3**).

ii) Análise relativa à parte II desta tarefa:

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Razão $\frac{1}{2}$. Identificar corretamente a razão da progressão como sendo $\frac{1}{2}$.

E_{a2}: Razão 2. Observar apenas a regularidade existente entre os denominadores, não se atentando á fração como um todo, obtendo como resposta a razão 2.

Para o item (b) prevemos:

As previsões deste item estão condicionadas às estratégias fornecidas no item (a), restando, assim, efetuar a operação de multiplicação que lhe é solicitada.

Para o item (c) prevemos:

E_{c1}: Soma $\frac{1}{2}$S. Identificar a razão $\frac{1}{2}$ e efetuar a soma **r.S,** sendo esta: $\frac{1}{2}\mathbf{S} = \frac{30}{2} + \frac{30}{4} + \frac{30}{8} + \ldots + \frac{30}{2^n} + \ldots$

Observa-se que a partir do segundo termo da soma S, a soma $\frac{1}{2}$.**S** apresenta os mesmos termos de S e substituindo a soma $\frac{1}{2}$.**S** em **S**, se obtém a equação algébrica **S** = 30 + $\frac{1}{2}$.**S** e, consequentemente, o valor da soma procurada.

E_{c2}: Soma 2S. Identificar a razão da progressão como sendo 2 ao efetuar a soma 2.**S** realizando as operações de divisão dos termos de S, ao obter: 2.**S**= 60 + 30 + $\frac{30}{2} + \frac{30}{4} + \frac{30}{8}$

$+...+ \frac{30}{2^n} +...$ Desta forma, podem conceber a semelhança entre a soma **S** e 2.**S** efetuando o mesmo procedimento listado na estratégia anterior.

E_{c3}: Fator comum em evidência. Observar a soma S e colocar o número 30 em evidência a partir do segundo termo, como: $S = 30+ 30\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...)$. Com isto verifica-se que esta soma já é conhecida, cujo valor para qual converge é 1. Por fim, obtêm S, resolvendo a equação S= 30 + 30. (1).

Para o item (d) prevemos:

E_{d1}: Validação. Encontrar o valor da soma S como sendo 60 com o procedimento visado. Assim, justifica-se que a soma de triângulos formados naquele processo pode atingir 60 cm, visto que o método de resolução usado nesta segunda parte comprova a veracidade da proposição dada anteriormente.

Nesse caso, acreditamos que os conhecimentos que os alunos vinham mobilizando podem ser desestabilizados ao verificarem o resultado da soma, já que há a tendência de manifestar a impossibilidade de uma soma atingir certo valor dado. No entanto, cabe-nos investigar se os alunos continuarão a mobilizar os teoremas-em-ação no decorrer da sequência.

5.4.2.2 Experimentação (sessão 7)

Esta sessão de tarefa foi aplicada no dia 19 de abril de 2011 com duração de aproximadamente 1 hora. Compareceram a esta sessão os seis sujeitos de pesquisa.

5.4.2.3 Análise *a posteriori*

i) Análise relativa à parte I desta tarefa:

Na resolução do item (a) os alunos identificaram alguns termos da sequência de perímetros fazendo uso da representação fracionária, de acordo com o previsto na estratégia E_{a1}. Todos fizeram uso da fórmula do termo geral e apenas os alunos M, J e L identificaram a continuidade da sequência dada com o uso de reticências, como mostra parte de seu protocolo.

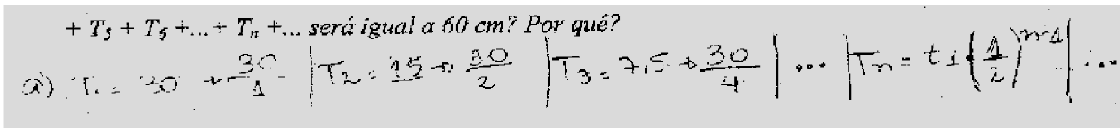


Figura 34: Resposta dos alunos M, L e J. Sessão 7. Parte I. Item (a)

Quanto ao item (b) todos os sujeitos de pesquisa continuam a realizar inúmeras somas, com a expectativa de encontrar o valor limite para a soma dada, como relata o aluno L e o cálculo realizado pelo aluno K até o décimo termo.

> L: Ela sabe que não vai chegar a 60, mas continua somando
> M: Não vai chegar por que vai faltar sempre um pouco....


Figura 35: Protocolo do aluno K. Sessão 7. Parte I

Em busca de sondar a noção de limite, a pesquisadora questiona aos alunos L, M e J sobre a possibilidade da soma dos perímetros atingir 70 cm ao invés de 60 cm.

> Pesquisadora: Então vamos mudar, e se fosse 70? Será que iria se aproximar de 70 também? E aí grupo?
> **Aluno M. Eu acho que sim**
> Pesquisadora: O que você tá achando na calculadora?
> Aluno M: Tá dando 59, alguma coisa [...]
> **Aluno L: Ia demorar mais pra chegar a 69,9...**
> Pesquisadora: Mas será que vai chegar a 69?
> Aluno M: Sabe por que não vai chegar? Por que tá acrescentando, por exemplo, vai acrescentando zero vírgula alguma coisa, pouquinho, quase nada [...]
> Pesquisadora: 70 está longe, né? Tá se aproximando cada vez mais do 60
> Aluno M: Não tá chegando nem no 60 imagina no 70.

Neste caso, as ações realizadas pelos alunos cujo caráter é mais operatório, nos mostram que, eles tomam decisões sem ter consciência delas, como explicita Brousseau (2008), ao acreditarem que se continuassem os cálculos haveria possibilidade de se chegar próximo a 70. Em relação às estratégias usadas neste item, todos os alunos alegam que a soma de perímetros não pode atingir o valor de 60, conforme prevíamos em E_{b1}. Os alunos I, G, L, M e J relatam que os termos apenas se aproximarão do valor dado ao realizarem as conversões das representações fracionárias para decimais, o que confirma o uso da estratégia E_{b2}, como mostra os excertos:

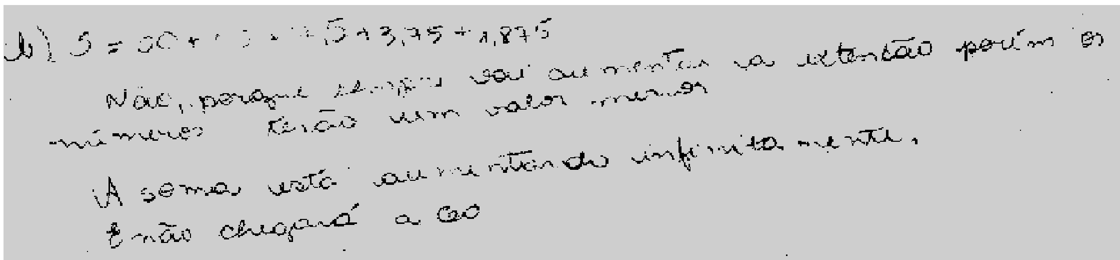

b) S = 30 + 15 + 7,5 + 3,75 + 1,875
Não, porque sempre vai aumentar a extensão porém os números terão um valor menor
A soma está aumentando infinitamente.
Então chegará a 60

Figura 36: Resposta do Grupo 3. Sessão 7. Parte I. Item (b)

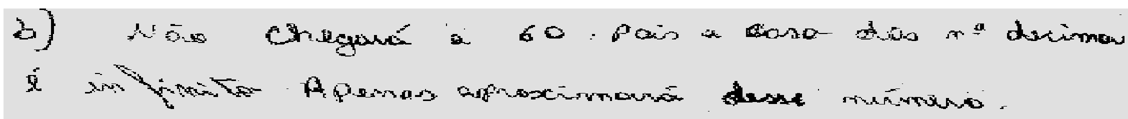

b) Não chegará à 60. Pois a casa dos nº decimais é infinito. Apenas aproximará desse número.

Figura 37: Resposta do aluno I Sessão 7. Parte I. Item (b)

As retroações provocadas pelo meio favoreceram a mobilização dos conhecimentos construídos pelo aluno G que, ao conjecturar sobre a situação proposta faz referência à atividade anterior, na qual havia afirmado que a soma infinita das áreas atingiria a área do quadrado inicial. Segundo Brousseau (2008, p.28): “Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (feedback), antecipar respostas e considerá-las em futuras decisões”.

> Aluno G: Vai ficar 59,99999.... [...] **acho que não chega** professora, por que após a virgula, é infinita, tá chegando próximo mas a gente desistiu [...] **eu acho que chega hein, por que você pega um quadrado** a metade é 30 depois a 30/2, quando você soma tudo vai chegar.
> Aluno I: Eu acho que não chega

Porém, G ainda mantém-se indeciso com as informações que possui e retorna a velhos esquemas formados, para concluir que: “*Não, porque os números são infinitos, apenas aproximará de 60”*.

Já o aluno K continua justificando sua resposta pelo fato da soma não atingir o valor dado por ser infinita, o que corrobora com o teorema-em-ação (T_3), como podemos verificar a seguir.

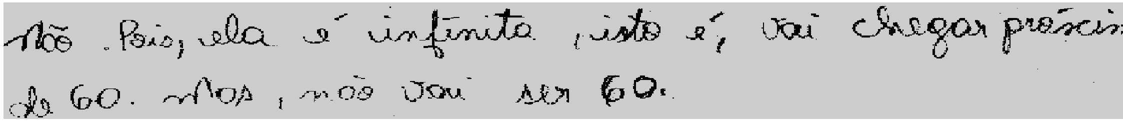

Não. Pois, ela é infinita, isto é, vai chegar próximo de 60. Mas, não vai ser 60.

Figura 38: Protocolo do aluno K. Sessão 7. Parte I. Item (b)

ii) Análise relativa à parte II desta tarefa:

De forma geral, observamos que a dificuldade com cálculos algébricos e com a noção de infinito impediu a realização desta tarefa pelos alunos. Deste modo, foi imperativa a intervenção constante da pesquisadora sobre o saber em jogo, fazendo com que essa situação não fosse vivenciada pelos alunos como sendo adidática, o que cremos que mesmo a pesquisadora induzindo-os na resolução da tarefa, os alunos não progrediram, uma vez que não conseguiram dar sentido às operações que deveriam realizar.

Em relação ao item (a) os alunos G e I fazem uso da estratégia E_{a2} e M, L, J e K utilizam, inicialmente, a estratégia E_{a1} ao determinar a razão como sendo 2, alterando a resolução, ao explicitar a razão (q) = $\frac{1}{2}$, após a pesquisadora indagar se essa seria de fato a razão da PG. No item (b), uma das dificuldades manifestadas pelos alunos M, J e L está em lidar com o infinito, como mostra o diálogo a seguir.

> Aluno J: Só que a soma é infinita [...]
> Aluno M: Vamos fazer um número representativo.
> Aluno L. Como assim?
> Aluno M. Vamos representar algum número, porque é infinito, não tem como saber onde vai chegar [...]

Somente após a pesquisadora retomar a definição de igualdade algébrica é que os sujeitos L, M, J, bem como os demais, multiplicam cada termo da soma S pela razão encontrada. Quanto ao item (c), os alunos L, M e J deixam claro suas dificuldades, alegando que S e r.S representam a mesma soma; e após discussões, a pesquisadora ajuda-os dizendo que só a partir do segundo termo da soma S os termos ficam iguais a $\frac{1}{2}$.S, mas, ainda assim, não conseguem formular a equação algébrica.

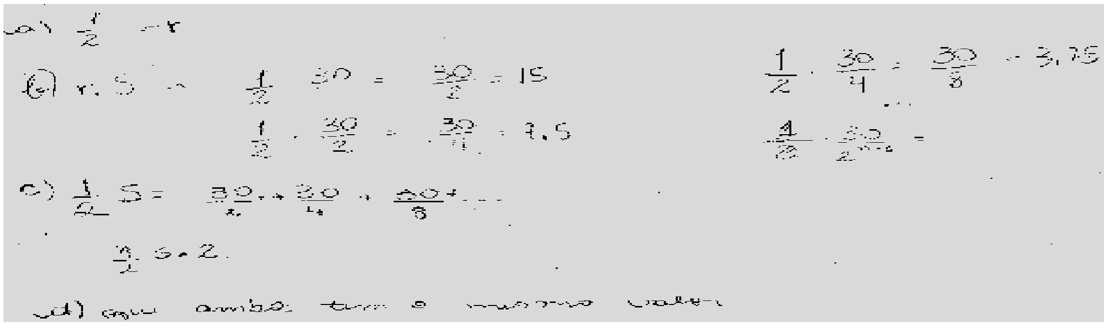


Figura 39: Protocolo de resolução dos alunos M, J e L. Sessão 7. Parte II

Ao final do encontro a pesquisadora inicia a institucionalização de uma técnica (método aritmético-algébrico) para calcular a soma dada, como mostra o trecho abaixo do momento de discussão.

> Pesquisadora: Pessoal, quando a gente encontrou o ½ S, quem era o primeiro termo?
> Aluno G: 30
> Pesquisadora: Só 30? [...]
> Aluno L: 30/2
> Pesquisadora: E o segundo termo?
> Aluno G: 30/4 [...]
> Pesquisadora: E assim sucessivamente, né? [...] Então, o S não será igual a só 30 será igual a 30 + quem é esse aqui? (aponta para a soma 30/2+ 30/4+....)
> Aluno I: É o ½ S
> Pesquisadora: Então, se substituirmos 1/2 S [...] obtemos [...] (S= 30+1/2S). Será que não conseguimos achar S agora? Resolvendo [...] S vai dar quanto? [...]
> (ao final chega-se S=60)

Em seguida, os alunos ficam em silêncio e, por isso, questionamo-los sobre o resultado obtido.

> Pesquisadora: O que isso representa pra vocês?
> **Aluno L: Representa que o copo enche.**
> **Aluno M: Isso representa que a gente estava errado o tempo todo** [...]
> Aluno G: Isso quer dizer que a gente tava certo ontem
> Aluno I: Chegou a 60, chegoouu...
> **Aluno G: Eu tava certo só desde ontem professora.**

Observando que os alunos ficaram desestabilizados com o resultado obtido, além de retornarem às atividades realizadas anteriormente, a pesquisadora relata aos alunos que existem casos em que uma soma não atinge um valor dado, indagando-os sobre a soma 2+ 4+ 8+... que é divergente. Os alunos observam que a soma está tendendo ao infinito e a professora-pesquisadora ressalta que é em busca da construção de um método que será trabalhado adiante para verificar se uma dada soma é convergente ou não. Esse processo é descrito nas sessões seguintes.

5.4.2.4 Considerações sobre o Bloco D

Nas tarefas deste bloco, os alunos M, J, L, G, K e I continuaram a calcular várias somas com uso da calculadora para obterem o valor limite esperado, como já havíamos observado anteriormente. Além disso, também verificamos que o aluno M sentia a necessidade de representar o infinito, ao lidar com essa noção na sessão 7. Esta dificuldade se acentuou durante as resoluções, durante o tratamento com expressões algébricas.

Os alunos mobilizaram conhecimentos construídos nas tarefas anteriores, sendo estes estratégias base para a resolução das situações propostas, como é o caso da regra-em-ação ($\frac{x-1}{x}$) construída pelos alunos M, L e J, bem como a representação geométrica do quadrado da 6ª sessão de tarefa a qual é retomada por G. Cabe ressaltar que, na 6ª sessão apenas os alunos G e J dão indícios de transitar do infinito potencial ao infinito atual.

O teorema-em-ação T_3 (impossibilidade de uma soma infinita dos termos de PGs corresponder a um número real) volta a ser mobilizado por todos os sujeitos de pesquisa, bem como o infinito potencial; porém, esses conhecimentos parece desestabilizado com a última tarefa proposta ao observarem a possibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real, diferentemente do que eles acreditavam, o que nos leva a investigar se T_3 volta a ser mobilizado nas próximas sessões de tarefas.

5.5 BLOCO E (O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE S_n E PASSAGEM AO LIMITE)

Este bloco é composto por 2 sessões de tarefas (8ª e 9ª sessão) que têm como finalidade investigar o processo de construção da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de progressões geométricas infinitas para que, posteriormente, possamos realizar a operação de passagem ao limite quando trabalharmos com somas infinitas dos termos de PGs.

5.5.1 Sessão 8 (Construção da fórmula de S_n)

Esta sessão é composta por uma única tarefa, apresentada a seguir:

A partir da situação abaixo, responda as questões:

Seja $\boldsymbol{S} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \ldots + \frac{4}{3^{n-1}}$ *a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica: (4, 4/3, 4/9, 4/27 ...). Podemos reescrever essa soma como:*

$$\boldsymbol{S_n} = 4 + 4.\left(\frac{1}{3}\right) + 4.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4.\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4.\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4.\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots + 4.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

*a) Explique por que podemos reescrever **S** na forma acima.*

b) Qual a razão desta progressão geométrica?

c) Reescreva a soma $\boldsymbol{S_n}$*, no caso em que o primeiro termo é* a_1 *e a razão é q.*

d) Se multiplicarmos $\boldsymbol{S_n}$ *pela razão (q), como encontrar uma expressão para a soma* $\boldsymbol{S_n}$*?*

Objetivo: Conforme descrevemos no quadro 3, no final do capítulo anterior, esta sessão tem por objetivo proporcionar o processo de dedução da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de PG.

5.5.1.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

$\mathbf{V_{s3}}$: **Tipo de PG.** Utilizamos esta variável para familiarizar os alunos com PGs de razão entre 0 e 1 que, ao trabalharem com números fracionários, os leva a determinarem estratégias de resolução, ao invés, de observarem apenas a multiplicidade existente entre um número inteiro.

É possível que nos itens (c) e (d) os alunos manifestem dificuldade na passagem da aritmética para a álgebra, uma vez que seja necessário traduzir e generalizar os modelos expressos, como explica Usiskin (1995).

Os conhecimentos necessários para esta sessão são: números fracionários, progressões geométricas, propriedades de potência, generalização de padrões numéricos, equivalência de expressões numérico-algébricas.

Uma possível validação nesta tarefa: Após a dedução da fórmula de S_n, os alunos podem validar a expressão encontrada realizando a soma de alguns termos da PG (4, 4/3, 4/9, 4/27 ...) ao verificarem a procedência da fórmula descoberta.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Somas equivalentes. Observar que é possível reescrever S na forma de S_n, visto que ambas são equivalentes.

E_{a2}: Razão. Observar primeiramente que a razão da PG é de $\frac{1}{3}$ e afirmar que a nova soma pode ser assim reescrita, visto que os termos estão sendo multiplicados pela razão, segundo as potências consideradas.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Divisão. Dividir algum termo dado da PG pelo seu termo anterior, encontrando a razão esperada.

E_{b2}: Multiplicidade entre denominadores. Verificar a regularidade existente apenas em relação aos denominadores das frações dadas, obtendo como razão o valor 3. Listamos esta estratégia devido à dificuldade dos alunos no tratamento com números racionais.

Para o item (c) prevemos:

E_{c1}: Generalização. Representar S_n em função de a_1 e da razão q. Neste caso, a dificuldade desta estratégia está em substituir os termos de S_n por a_1 e da razão q, realizando assim as tarefas de tradução das expressões numéricas.

Para o item (d) prevemos:

E_{d1}: Cálculo algébrico. Efetuar a multiplicação de q por S_n e realizar a operação de subtração entre as somas S_n e $q.S_n$, com a finalidade de obter S_n. Tal estratégia está vinculada ao procedimento realizado ao final da sessão anterior.

5.5.1.2 Experimentação (sessão 8)

Esta sessão de tarefa foi realizada no dia 20 de abril de 2011 com duração de aproximadamente 52 minutos. Estiveram presentes quatro sujeitos de pesquisa (L, M, I e K).

5.5.1.3 Análise *a posteriori*

Na resolução do item (a), os alunos L e K fazem uso da estratégia E_{a2} ao observarem que se trata da mesma soma, após identificarem que $\frac{1}{3}$ corresponde à razão da PG, como mostra o excerto de K:

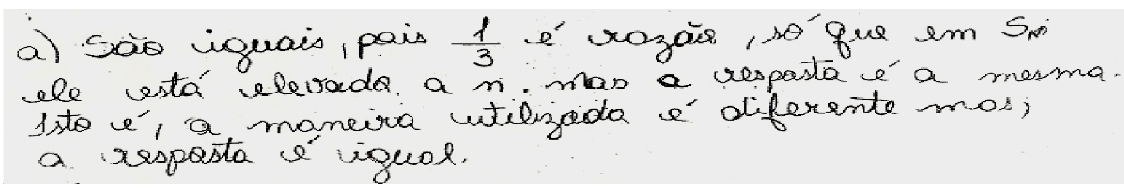

a) São iguais, pois $\frac{1}{3}$ é razão, só que em S_n ele está elevada a n. mas a resposta é a mesma. Isto é, a maneira utilizada é diferente mas; a resposta é igual.

Figura 40: Resolução do aluno K. Sessão 8. tarefa única. Item (a)

Mesmo observando a equivalência entre as somas, conforme previsto na estratégia E_{a1}, os alunos M e L formulam a resposta "*Por que o resultado é o mesmo, as somas são equivalentes*", após apresentarem dificuldade em produzir significado para a operação que foi realizada, como mostra o diálogo abaixo:

> Aluno L: A única diferença é que aqui ele tá deixando a razão e o n. Ele vai colocando sempre na mesma razão.
> Aluno M: Tá agora explica por que podemos reescrever S da forma acima.
> Aluno L: Então, isso eu não sei explicar [...] A razão é 1/3 [...]
> Aluno M: Então nessa está mais especificado que a primeira, a primeira está mais direto.
> Pesquisadora: Então, mas por que podemos reescrever essa soma desse jeito?
> Parceiro do grupo: Por que dá o mesmo resultado?
> Aluno L: Eu vi que dá a mesma coisa, agora por que está acontecendo isso, eu não sei explicar [...]

O aluno I também alega tratar-se da mesma soma, após realizar as operações de potenciação e multiplicação em S_n. Quanto ao item (b) todos os sujeitos fazem uso da estratégia E_{b1}, antecipando-a na resolução do item anterior, como foi o caso de I, K e L. Neste momento podemos inferir que os alunos, ao se envolverem na resolução, passaram por situações adidáticas de ação e formulação quando agem sobre os itens (a) e (b), antecipando suas respostas e argumentando sobre o porquê de reescrever a soma S na forma S_n.

Diferentemente dos itens (a) e (b), na resolução do item (c) surgiu certa dificuldade dos alunos na passagem da aritmética para a álgebra, bem como prevíamos. A pesquisadora esclarece aos alunos que a tarefa consiste num processo de generalização, para que prosseguissem na dedução da fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG. Também como previsto, somente com esta intervenção, todos os alunos explicitam S_n em função de a_1 e q.

É importante frisar que, inicialmente, os alunos M e L reescrevem S_n como sendo "$S_n= a_1+ a_1.q^{n-1}$", ignorando os demais termos. Ao expressarem S_n dessa forma, os alunos deixam evidências que a tarefa de tradução desse modelo, conforme afirma Usiskin (1995), não foi compreendida, visto que tenham desconsiderado o fato de generalizar a soma dos termos e não o termo geral desta. Enfrentando a mesma dificuldade, apenas o aluno K reescreveu a soma qS_n, conforme solicitado no item (d), ainda que não tenha prosseguido para a obtenção da fórmula final, assim como o aluno I, que inicia a resolução e também não dá continuidade à mesma. Já os alunos M e L reescrevem a soma apenas após a interferência da pesquisadora que constata, a partir do diálogo abaixo, que os alunos não vêem sentido em efetuar a operação solicitada.

> Aluno L: Eu não entendi essa (d) ainda direito.
> Pesquisadora: A gente tem que multiplicar todos os termos por q, que é a nossa razão.
> **Aluno M: Mas como a gente vai multiplicar cada um?**
> (A pesquisadora retoma o que foi feito no encontro anterior)
> Pesquisadora: Veja. Se eu tenho s=1 e eu multiplico s por 2. Eu também tenho que multiplicar o 1 por 2, para manter a igualdade, não é? Aqui é a mesma coisa, se multiplicarmos S_n por q temos que multiplicar todos os termos de S_n por q, para manter a igualdade.
> **Aluno M: Sim. Mas a gente já representou isso aqui em cima.**
> Pesquisadora: Aí vocês só reescreveram S_n, agora vocês vão construir uma nova soma a qS_n.
> Aluno M: Aí tá difícil [...]

O aluno M apresenta dificuldade quanto à multiplicação de q no segundo termo da igualdade, além de não conceber que S_n e qS_n consistem em duas somas distintas, já que, por apresentarem quase todos os termos iguais, torna-se difícil esta percepção. Isso atesta que "sem a capacidade de interpretar expressões, os alunos não dispõem de mecanismos para verificar se um dado procedimento é correto". (LOCHHESD; MESTRE, 1995, p.148).

Como as dificuldades dos alunos se acentuaram nos itens (c) e (d), exigindo uma interferência maior da pesquisadora nesse processo, as situações adidáticas quase não ocorreram. No entanto, mesmo sem conseguirem concluir a tarefa, consideramos válido esse contato dos alunos com um processo de dedução da fórmula de S_n, já que alegaram nunca terem realizado alguma dedução e/ou demonstração em sala de aula. Além disso, a partir desse tipo de situação os alunos começam a refletir sobre a atividade algébrica proposta, e principalmente em relação à noção de limite, a ser apresentada adiante.

Segundo Moreira (2002, p.17), tanto a linguagem quanto os símbolos são elementos importantes no processo de acomodação do conhecimento. Porém, o papel do professor é essencial em sua função mediadora, tendo em vista que um conceito ou uma proposição não se capta sozinho; é necessário que o professor proponha diversas situações, de modo a torná-lo significativa para os participantes, assim como propõe Vergnaud (1996).

A partir das produções dos alunos finalizamos a construção da fórmula dos *n* primeiros termos de uma PG relatando sua aplicabilidade e, posteriormente, partimos desse modelo para tratar da noção de limite da soma infinita de progressão geométrica, propondo a situação-problema a seguir.

5.5.2. Sessão 9 (Operação de passagem ao limite)

Esta sessão constitui-se de uma única tarefa.

O número 0,3333....pode ser expresso por meio de uma soma infinita de frações decimais.

a) Que soma é esta?

b) Determine a soma dos cinco primeiros termos desta progressão.

c) Com base na fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, é possível encontrarmos o valor dessa soma, sabendo que n cresce infinitamente? Justifique sua resposta.

Objetivo: Propor uma situação-problema com a finalidade de realizar a operação de passagem ao limite na fórmula de S_n. Nesta, os alunos são indagados sobre a possibilidade de uma representação decimal infinita ser expressa por um número real.

5.5.2.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. Faremos uso desta variável como forma de instigar os alunos a confrontar suas conjecturas com o cálculo obtido com uso deste instrumento, que oculta a periodicidade infinita de uma dízima periódica.
V_{s3}: Tipo de PG. Uma PG convergente possibilita a escolha de estratégias pelos alunos ao analisarem a situação em torno da noção de limite, ao contrário do que tivéssemos uma razão de número inteiro, que restringiria a elaboração de suas conjecturas.

Para a resolução desta tarefa são necessários conhecimentos acerca de dízimas periódicas, fração geratriz, frações decimais, propriedades de potência e a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PG.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Decomposição em números decimais. Encontrar a soma de frações decimais, decompondo o número 0,3333... em uma sequência infinita de números decimais e realizar a soma dos valores obtidos, convertendo as representações decimais em fracionárias conforme solicitado.

Para o item (b) prevemos:

E_{b1}: Aplicação da fórmula. Identificar a soma solicitada, aplicando a fórmula de S_n.

E_{b2}: Soma termo a termo. Identificar os cinco primeiros termos da progressão dada efetuando a soma deles, termo a termo, o que exige a utilização do cálculo de m.m.c (com números fracionários) ou realizar a soma com números decimais e, ainda, com o auxílio da calculadora.

Para o item (c) prevemos:

E_{c1}: Validação. Observar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica e verificar que *n* assume valores finitos a cada situação proposta. Porém, ao fazer *n* tender ao infinito, pode-se afirmar a impossibilidade de encontrarmos a soma infinita, pela fórmula dada, visto que o comportamento de $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ é “contínuo”. Usiskin (1995) refere-se a essa situação como um “<u>modelo fundamentalmente algébrico</u>”, pois ao refletir sobre $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ quando *n* cresce indefinidamente nesta situação, o valor de *n* não se apresenta como função de incógnita e nem como um modelo da aritmética a ser generalizado, como o autor mesmo explicita.

E_{c2}: Infinito. Substituir os valores da razão e do primeiro termo da sequência dada na fórmula pedida e alegar que a expressão $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ tende ao infinito sendo, consequentemente, impossível encontrar um valor para a soma.

A partir das conjecturas levantadas pelos alunos, devemos sondar se eles identificam, nesse caso, a variável *n* assumindo o valor “infinito”, isto é, que *n* esteja representando o infinito, conforme verificamos nas atividades anteriores.

Uma possível validação nesta tarefa: É possível que alguns alunos busquem validar de maneira ingênua, considerando impossível utilizar a fórmula de S_n para lidar com uma soma infinita, ao verificarem que não há como a variável *n* assumir um valor exato (fixo), visto que *n* cresce infinitamente.

5.5.2.2 Experimentação (sessão 9)

Esta sessão de tarefa foi aplicada no dia 26 de abril de 2011 com duração de aproximadamente 1 hora. Compareceram a esta sessão cinco sujeitos de pesquisa, pois o aluno J não esteve presente.

5.5.2.3 Análise *a posteriori*

De acordo com Brousseau (2008, p. 114), "situações de revisão dão condições ao aluno de formular suas observações e lembranças [...], uma vez que o passado comum permite que o professor o compreenda". Com esse intuito, iniciamos essa sessão retomando a construção da fórmula dos *n* primeiros termos de uma PG, durante a qual os alunos teriam que construir a fórmula que havia sido deduzida no encontro anterior, explicando para os colegas que não estavam presentes. Devemos salientar que houve pouca intervenção da pesquisadora nessa etapa e todos os alunos conseguiram obter a fórmula solicitada, prosseguindo passo a passo no processo de dedução.

Além disso, verificamos que o aluno I consegue explicar o processo de dedução da fórmula de S_n para o aluno G, o qual faltara no encontro anterior, vejamos:

> Aluno I: S_n é isso daqui, ai a única coisa que não tinha no S_n que tirou dos dois eram esses daqui o a_1 menos o a_1q_n...ai era só substituir. **A S_n é a soma da progressão, porque a progressão é a_1q...o primeiro termo vezes a razão...**
> Aluno G: Ai depois é o primeiro termo vezes a razão elevado a 2. **Ah isso eu entendi, eu lembro.**
> Aluno I: Então, S_n é a formula, é a soma. S_n era assim $a_1+ a_1q+ a_1q^2+....+a_1q^{n-1}$ e a qS_n era assim, a_1q [...] pra tirar todos, pra achar o resultado, a gente vai cortando quem é igual a partir daqui (segundo termo). $S_n - qS_n = a_1 – a_1q^n$ [...] é o que sobrou. Aí, não sei o que a professora fez [...]

Notemos que o aluno I consegue formular as expressões algébricas de forma que o aluno G compreendesse a situação, relembrando a generalização dos termos realizada nas primeiras tarefas, em que foi deduzida a fórmula do termo geral da PG. O aluno I tenta deixar claro que S_n é a soma dos termos de uma PG, e apresenta exemplos para tanto, porém, ao final não consegue compreender o fator comum (S_n) em evidência, sendo necessário a interferência da pesquisadora para a conclusão da explicação de I ao G. Além disso, o trabalho em grupo e o papel da linguagem em sua função de comunicação, nos possibilitou identificar a mobilização do processo de generalização pelos alunos, além de identificarmos os significados dados pelo aluno I ao explicar a construção realizada.

Finalizando o processo de construção da fórmula com os alunos, propusemos a análise de uma soma infinita com o que havia construído até o presente momento. Para tanto, fizemos o seguinte questionamento: 0,3333...é igual a $\frac{1}{3}$? Com o registro da pergunta no quadro, os alunos passaram por situações adidáticas de ação ao levantarem suas conjecturas e tomarem decisões sobre elas. Inicialmente, responderam que sim, porém fazendo o cálculo na calculadora, observando a limitação desta. Apenas um aluno (não sujeito de pesquisa) lembra-se do cálculo da fração geratriz e, de posse das conjecturas dos alunos, a pesquisadora questiona.

> Pesquisadora: Mas vocês conseguem um número maior que esse (0,3333....) e menor que esse (1/3)? [Silêncio] Conseguem um número maior que 0,3333333?
> Aluno K: é só aumentar um 3
> Pesquisadora: então, assim eu consigo um número maior que 0,3333333 e menor que 1/3 [...] Voltamos para o número 0,3333...= 1/3. Agora considerando infinito, conseguem achar?
> Aluno L: eu não consigo
> Aluno M: por que a gente não sabe qual que é o número, até onde vai o 3. Infinitamente, eu acho que não.

De modo geral, sem conseguirem um número entre 0,3333... e 1/3 e induzidos pelo cálculo efetuado na calculadora, os alunos tomam controle da situação inferindo a veracidade da pergunta realizada. Porém, ao questionarmos se o número 0,9999...é igual a 1, o comportamento dos alunos sofre alteração, pois essa situação não é validada com o uso da calculadora, já que não há uma operação de divisão a ser realizada com o número 1, diferentemente de quando lidam com o significado de quociente da fração 1/3.

> Pesquisadora: [...] e esse daqui, é? 0,99999....= 1?
> Aluno M: Não, claro que não (a maioria concorda) T**em que ser muito burro pra não entender que 1 é 1 e 0,9999....é igual a 0,9999.... e não 1**
> Pesquisadora: Por que não é 1?
> Aluno M: Por que não, não é [...] 1 é 1, 0,9999....é 0,9999....
> Pesquisadora: E agora o 0,3333....= 1/3?
> Aluno M: Agora não é mais (outros concordam) Oh [...] o triângulo fecha, o copo enche, e isso não é.
> Aluno I: Se levar em conta a aproximação...
> Aluno K: Por exemplo: 0,9987... aí sempre arredonda talvez chegue a 1, é mas...
> Pesquisadora: arredondando, pode dar 1?
> Aluno K: mas eu acho que não

Os alunos mostram-se desestabilizados cognitivamente com a pergunta, os quais agem sobre o problema proposto e passam por situações adidáticas de formulação ao comunicarem e debaterem suas estratégias, quando são levados a justificar suas conjecturas relatando, por exemplo, a possibilidade de arredondamento das casas decimais em 0,9999 ...

O diálogo acima nos permite inferir que tanto o aluno M quanto K parecem não aceitar que um "número infinito" possa ser expresso por um número inteiro, o que atesta a possibilidade do teorema-em-ação T_3 (impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real) ainda não ter sido desestabilizado. Um elemento importante é a idéia de infinito potencial que se evidencia nas ações dos alunos, já que não concebem o número 0,9999... como um todo, mas consideram o infinito como processo, que não tem fim, como o aluno M ressaltou ao afirmar que "*1 é 1* e *0,9999...é 0,9999...*"

Levando em conta as mudanças de atitude pelos alunos, a pesquisadora dá continuidade à tarefa programada para a sessão, no intuito de levá-los a compreender e validar as conjecturas que levantaram.

Conforme solicitado no item (a), os alunos deveriam expressar o número 0,3333... como sendo uma soma de frações decimais, porém, os mesmos alegaram não conhecer esse conceito. Sendo assim, a pesquisadora define uma fração decimal como sendo uma fração cujo denominador é uma potência de 10, o que possibilitou compreenderem o item (a) proposto. Os alunos M, L e K utilizam a estratégia E_{a1}, ao contrário de G e I, que já partem para a representação fracionária. Entretanto, todos eles desenvolveram a soma somente até o n-ésimo termo, podendo ter sido influenciados pela sessão anterior em que considerávamos até o n-ésimo termo da progressão.

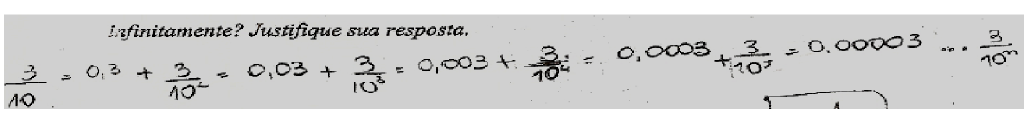


Figura 41: Resolução dos alunos K, M e L. Sessão 9

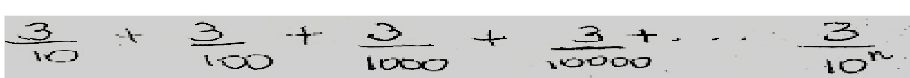


Figura 42: Resolução dos alunos I e G Sessão 9

Quanto ao item (b) os alunos K, M e L efetuaram o cálculo somando termo a termo (estratégia E_{b1}), ao contrário dos alunos G e I que o obtiveram segundo a fórmula S_n, conforme previsto em E_{b2}. Apesar de os alunos terem obtido a mesma resposta, mobilizaram esquemas diferentes, caminhos distintos de atingir o objetivo da tarefa. Cabe ressaltar que o aluno G manifestou dificuldade em operar com divisões de frações e propriedades de potenciação, o qual já vinha apresentando essas deficiências ao longo do estudo, ao realizar perguntas como: "*quando tá elevado é só o de cima ou o de baixo também*?"

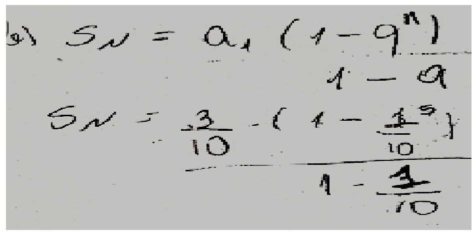


Figura 43: Resolução dos alunos I e G. Sessão 9. Item (b)

Contrariando nossas previsões para o item (c), os sujeitos não relataram impossibilidade de efetuar o cálculo, acreditando que haja um jeito de obter o resultado, e respondendo "*Sim*" para a questão. Porém, apenas os alunos K, M e L progridem na discussão do item, como mostra o diálogo a seguir:

> Pesquisadora: Aquela fórmula serve para uma soma finita ou infinita?
> Aluno K: Finita.
> Aluno do grupo: Consegue sim professora por que na fórmula esse q^n tende ao infinito, mas eu posso chamar de zero, por que é a_1 sobre 1-q.
> Pesquisadora: Essa é a ideia, por que na verdade, nesse caso, não é que q^n é infinito, quando o n tende ao infinito, tá acontecendo alguma coisa com o q^n [...]
> Pesquisadora: [...] quando *n* tende ao infinito, o que vai acontecer com o $(1/10)^n$? [...]
> Aluno K: O negócio é que ela quer achar uma fórmula para infinitamente, né? [...]
> Pesquisadora: O que acontece quando o n cresce infinitamente?
> Aluno do grupo: Ele vai tender a zero.
> **Aluno L: É, quanto maior o denominador menor é o número, é isso mesmo, mais próximo de zero ele é.**

Neste diálogo, um aluno do grupo lembra-se da fórmula final da soma de uma PG infinita, e isto serve de ponto de partida para a pesquisadora indagar os sujeitos de pesquisa sobre o que está acontecendo com q^n quando n tende ao infinito. Com a retroação do meio, os alunos K, L e M refletem e agem sobre esse novo objetivo, e o aluno L consegue validar a conjectura levantada pelo colega, como grifamos no diálogo acima. São esses tipos de interações que "constituem o momento de estabelecer relações entre conhecimentos ou de transformar conhecimentos em saberes [...]" (BROUSSEAU, 2008, p.58).

Desta forma, a pesquisadora institucionaliza a noção de limite com os alunos, analisando apenas o comportamento de q^n quando n tende ao infinito, uma vez que a variável *n* passa a ter um novo estatuto, diferentemente de quando consideramos uma soma finita, mostrando o equívoco de se considerar *n* como sendo infinito. Com isto, mostra-se que a operação de passagem ao limite se faz necessária, uma vez que manifestam dificuldades com o infinito. Devido a esse fato, retomamos a exploração desse conceito no início da próxima tarefa, para que os alunos pudessem se manifestar diante de outras situações envolvendo o limite da soma infinita dos termos de PGs.

5.5.2.4 Considerações sobre o Bloco E

As dificuldades vinculadas aos cálculos algébricos que identificamos no bloco D também se evidenciaram no início da resolução das tarefas da 8ª sessão, quando propusemos a dedução da fórmula da soma dos termos de uma PG, por meio da passagem da aritmética para a álgebra. Apesar de ser nesse momento que a intervenção da pesquisadora se acentua no processo de construção dos alunos, observamos que os sujeitos K, M, L e I progrediram no tratamento das notações algébricas no início da 9ª sessão, quando conseguem reconstruir a fórmula de S_n, sendo o aluno I aquele que mais se destacou ao deduzi-la para o aluno G. Após a dedução da soma S_n, as indagações realizadas: 0,333... = 1/3? e 0,999...=1? nos forneceram evidências de que o teorema-em-ação T_3 (impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real) ainda não teria sido desestabilizado, como foi possível verificar nas explanações dos alunos K e M, bem como, a constante presença do infinito potencial nas justificativas ressaltadas pelos alunos, por exemplo ao afirmarem: *"1 é 1 e 0,999... é 0,9999..."*. O desequilíbrio cognitivo provocado por essa situação possibilitou o envolvimento dos alunos na tarefa desta sessão e, assim, demos início à operação de passagem ao limite a partir das conjecturas levantadas pelos alunos. Cabe ressaltar que as indagações: 1/3 = 0,333...? e 0,999..=1? são retomadas nas próximas sessões de tarefas. Além disso, observamos que o aluno G ainda apresenta dificuldades no tratamento com os números fracionários e com a potenciação.

5.6 BLOCO F (OPERANDO COM A NOÇÃO DE LIMITE)

Conforme descrevemos no quadro 3, ao final do capítulo 4, este bloco é composto por três sessões de tarefas (10ª, 11ª e 12ª sessão) com o objetivo de analisar como os alunos tratam a operação de passagem ao limite nas situações que lhes são propostas.

5.6.1. Sessão10 (Casos de convergência e divergência na soma infinita de PG)

Esta sessão é constituída pela seguinte tarefa:

a) Dê um exemplo de uma soma de progressão geométrica cuja razão esteja entre -1 e 1. ($-1 < q < 1$).
b) Dê um exemplo de uma soma de progressão geométrica em que a razão seja menor que -1 ($q < -1$).
c) Dê um exemplo de uma soma de progressão geométrica cuja razão seja maior que 1 ($q > 1$).
d) Dentre os exemplos que você apresentou, o que podemos concluir quanto à convergência das somas em cada um dos casos listados acima? Justifique.

Objetivo: Esta tarefa tem a finalidade de levar os alunos à elaboração de conjecturas sobre a convergência e divergência da soma infinita dos termos de PGs, considerando os casos em que a razão (q) seja $-1 < q < 1$ e $|q| > 1$.

5.6.1.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. Optamos por restringir o uso da calculadora nesta tarefa, pois neste caso os alunos podem utilizar a fórmula da soma infinita dos termos de uma PG, eliminando, por exemplo, o cálculo aproximado.
V_{s3}: Tipo de PG. Jogamos com esta variável, pois dentre as progressões geométricas há algumas que pode não ser trivial a identificação da convergência, e eles terão que utilizar-se de outras estratégias de resolução que os permitam identificar a convergência para o caso considerado.

Quanto aos conhecimentos necessários para a resolução desta tarefa destacamos a noção de limite, propriedades de potência e operação com números racionais.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para os itens (a, b, c) prevemos:

E_1: Frações unitárias. Escolher as razões que estejam representadas por frações unitárias, já que as mesmas estiveram mais presentes nas tarefas desta sequência. Assim sendo, representar os termos das somas tanto na forma fracionária como decimal ao realizar as conversões.

Acreditamos que os alunos não terão dificuldade em exemplificar as somas solicitadas, visto que em várias tarefas pedia-se que identificassem tanto a razão quanto todos os termos de uma progressão geométrica.

Para o item (d) prevemos:

E_{d1}: Noção de limite. Fazer uso da fórmula discutida na atividade anterior, analisando-as para os casos em que $q > 1$ e $q < -1$. Nesse caso, devem observar que quando n tende ao infinito q^n cresce infinitamente, o que pode levar a conclusão que a soma dos termos dessa PG também tende ao infinito. Dessa forma, afirma-se que $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$.

E_{d2}: Análise dos termos da PG. Analisar apenas a expressão q^n quando n cresce infinitamente. Assim, analisa o comportamento em cada caso proposto, sem considerar a soma dos termos das progressões geométricas.

E_{d3}: Aproximações. Relatar a convergência ou não das somas especificadas fazendo uso de alguns cálculos aproximados, ou seja, sem fazer uso do cálculo do limite na fórmula da soma dos termos de PGs.

Uma possível validação nesta tarefa: Substituir os valores das razões na fórmula da soma dos termos de PGs e, ao analisar o limite de q^n, concluir que as somas cuja razão esteja ente -1 e 1 possuem limite, ao contrário daquelas em que o módulo da razão seja maior que 1.

5.6.1.2 Experimentação (sessão 10)

Esta sessão de tarefa foi aplicada no dia 27 de abril de 2011 com duração de aproximadamente uma hora. Todos os sujeitos de pesquisa compareceram à sessão.

5.6.1.3 Análise *a posteriori*

Como relatado ao final da tarefa anterior, iniciamos esta sessão retomando a noção de limite, uma vez que nenhuma sistematização do limite em S_n havia sido feita ao analisarmos se o número 0,333... era igual a $\frac{1}{3}$. Portanto foi retomada a resolução da soma infinita de PG ($\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...$), verificando o comportamento de q^n para o caso em que $-1 < q < 1$ e, ao final, o cálculo do limite da soma considerada.

Entendemos que a atitude da pesquisadora mostrou-se profícua no sentido de dar condições aos alunos para que pudessem trabalhar com o saber em jogo, como relata Brousseau (1996). Tal postura também nos permite analisar se os alunos reinvestem esses conceitos e como o fazem, após a institucionalização realizada no encontro anterior.

De posse desta introdução sobre a noção de limite de uma soma infinita de PGs, lançamos a tarefa destinada a esta sessão, desafiando os alunos a descobrirem o comportamento de uma soma infinita quando a razão não está entre -1 e 1, além de serem indagados sobre as concepções que vinham manifestando durante a sequência didática. Vejamos:

> Pesquisadora: [...] Antes vocês diziam que era impossível uma soma infinita chegar a um valor finito, por esta ser infinita, né? Vocês ainda concordam com isso?
> Aluno M: Não, por que agora eu sei que vai chegar.
> Pesquisadora: Aluno K, você concorda?
> Aluno K: Depende né, por que tipo o 0,999...o limite não vai ser 1, é o 0,9999...[...] Eu acho que não é 1.
> Aluno I: É chega... a um número exato
> Pesquisadora: Você ainda mantém a sua posição, que não chega por ser infinita?
> Aluno K: Não sei, é que ela vai ter um limite agora.

O diálogo acima nos dá indícios da necessidade de investigar os significados atribuídos pelos alunos quando operam com o limite, pois ao serem questionados se 0,999... é igual ao número 1, o aluno K apresenta-se desestabilizado cognitivamente, uma vez que é frente ao novo conhecimento em jogo, o limite, que se faz necessária a adaptação do sujeito diante dessa situação.

Prosseguindo com a tarefa programada, observamos que nas somas apresentadas os alunos G e I utilizaram-se da estratégia E_1 apenas na resolução do item (a), optando por fazer uso de razões com números inteiros para os itens (b) e (c).

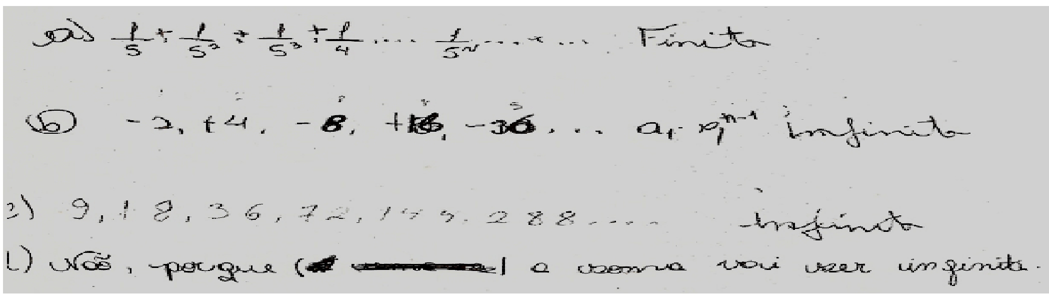


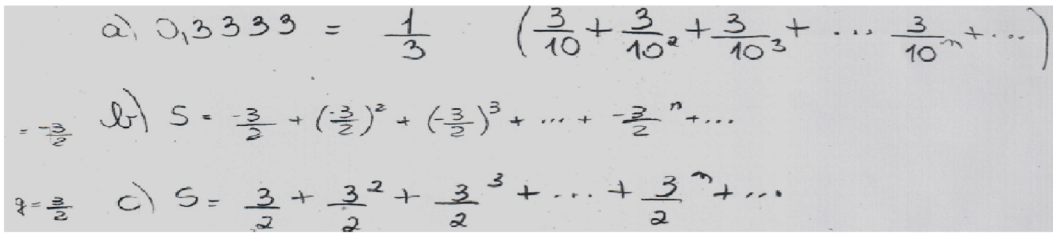
Figura 44: Resolução dos alunos G e I. Sessão 10

Verificamos que os exemplos escolhidos pelo aluno G antes de formularem essa resposta, são aqueles já disponíveis em seu repertório, isto é, os que já foram analisados anteriormente, conforme previsto. No entanto, a atitude do aluno I ao procurar um exemplo diferente mostra-nos que o mesmo entrou no jogo do saber, já que toma para si a responsabilidade do problema, tomando-o como seu, o que nos mostra que houve a devolução do problema, conforme propõe Brousseau (2008), vejamos:

> Aluno I: Fala um número pra razão [...] 1 dividido por 8
> Aluno G: Você tão complicando. Pega qualquer número e multiplica por 0.5
> Aluno I: Mas aí vai ficar igual aqueles que ela já passou: ½, ¼....eu quero achar um diferente.

Com relação à resolução dos alunos K, M e L observamos que, inicialmente apresentaram dificuldade para encontrar a razão das progressões, uma vez que por acreditarem que essas deveriam estar na representação fracionária, além de mostrarem desconfiança se o primeiro termo da progressão deveria ser necessariamente o valor da razão. Isso está condicionado à estratégia E_1, conforme previsto, já que se trata dos tipos de progressões que vínhamos apresentando.

Após o aluno K apresentar várias opções de soma, os alunos M, K e L optam por apresentar no item (a) a mesma soma encontrada no desafio inicial: $(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...)$, e para os demais itens, apresentam somas cuja razão é $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$, respectivamente, como mostra o seguinte excerto:

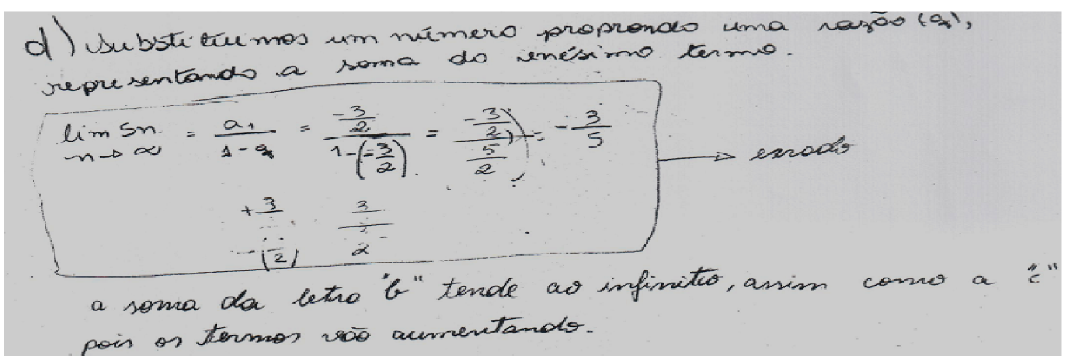

$a)\ 0{,}3333 = \frac{1}{3} \quad \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots \frac{3}{10^n} + \dots\right)$

$= -\frac{3}{2} \quad b)\ S = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \dots + -\frac{3}{2}^n + \dots$

$q = \frac{3}{2} \quad c)\ S = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}^2 + \frac{3}{2}^3 + \dots + \frac{3}{2}^n + \dots$

Figura 45: Resolução dos alunos M, K e L. Sessão 10. Itens a, b, c

Na resolução do item (d) esses mesmos alunos explicam o que foi realizado nos itens anteriores sem analisar a convergência das somas, dando-nos margem para interpretar que esta linguagem, ao nos referirmos à noção do limite, ainda não tenha ficado clara. Sendo assim, só após a pesquisadora questionar sobre quais somas possuem ou não limite é que os alunos apresentam a resposta abaixo, fazendo uso da estratégia E_{d1}. Segundo Brousseau (2008, p.54), "a intervenção do professor evoca, necessariamente, em relação aos conhecimentos que ensina, um funcionamento possível em outras circunstâncias [...]"


d) Substituímos um número propondo uma razão (q), representando a soma do enésimo termo.

$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$ → errado

a soma da letra "b" tende ao infinito, assim como a "c" pois os termos vão aumentando.

Figura 46: Resolução dos alunos L, M e K. Sessão 10. Item(d)

Neste excerto, observamos que, primeiramente, os alunos fazem uso imediato da expressão $\frac{a_1}{1-q}$ sem analisar o comportamento de q^n, o que acreditamos ser fruto do cálculo do limite que ficou registrado no quadro quando discutíamos se 0,333... era igual a 1/3, no início da sessão. Em outro grupo também observamos a associação ~~por eles~~ desta expressão como uma fórmula simplificada de S_n que remete ao mesmo resultado para qualquer soma dada, de acordo com as falas a seguir:

> Aluno1: Quando você joga na fórmula, ai como dá zero, fica essa resumida.
> Aluno2: Independente da que você usar, vai chegar no mesmo resultado.

Isso está coerente com a análise dos livros didáticos realizada no capítulo 3, no qual os autores evidenciam a aplicação dessa regra sem propor a análise de seu domínio de validade, imediatismo também observado aqui, quando os alunos têm o primeiro contato com essa regra-em-ação, uma vez que há a tendência de fazerem uso dela sem analisar quando e porque a utilizar. A partir desta constatação, estruturamos um meio no qual os alunos participassem do processo de construção desses conceitos. Por isso, em busca de questioná-los sobre a estratégia usada, a pesquisadora faz referência a sua resolução no quadro, já que a expressão foi obtida devido a razão estar entre 1 e -1, o que fez com que o aluno K deduzisse que o mesmo não ocorre no caso $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ quando n tende ao infinito, levando os colegas a refletirem sobre o caso proposto, como mostra o diálogo a seguir:

> Pesquisadora: [...] Se aqui tá indo pro infinito, será que a gente consegue achar um valor para esta soma? [...]
> Aluno M: Então aqui não tem como definir [...] Então, ela não chega vai dar infinito.
> Aluno L: Rapaz, você entendeu?
> Aluno M: Ela vai tender ao infinito por que o número aqui da razão aumenta, sempre aumenta, ali tá chegando ao zero, aqui a gente não tem onde chegar
> Aluno L: Ah tá, agora eu entendi, tende ao infinito...
> Aluno M: E a (c) também, mesmo sendo negativo ele vai tender ao infinito, ele vai alternar mais vai continuar afastando, lembra daquela da reta que a gente fez, eles foram alternando e se afastando, a (c) é só positivo ela vai só se afastando...

Ainda que a pesquisadora tenha iniciado a reflexão sobre o $\lim_{n \to \infty} q^n$, o aluno M passa por situação de formulação quando recorre às tarefas realizadas durante a sequência apresenta uma justificativa que seja compreensível pelo grupo, já que mostrou ter compreendido o comportamento da soma nos diferentes tipos de razões das PGs. Este posicionamento os leva a retomar suas resoluções, corrigindo-as, como observamos em seus protocolos, que pode ser justificado por Brousseau (2008, p.58) quando este diz que "o sujeito aprende corrigindo suas ações e antecipando seus efeitos [...] A reflexão sobre a ação é o que lhe dá as possibilidades de aprender".

Em se tratando do aluno I, o mesmo infere a possibilidade de apenas o item (a) ter "soma finita", mas não consegue argumentar sobre isto, provocando no aluno G a seguinte indagação: *"mas, não tem como por que a soma vai ser infinita. Cara, isso é confuso...."*

Nesta fala o aluno G apresenta resistência em aceitar que uma soma infinita possa ser expressa por um número real, mobilizando o teorema-em-ação T_3, evidenciando que apesar das situações anteriores esse conhecimento-em-ação ainda não foi desestabilizado. Vale frisar que em suas produções, conforme protocolo no item (a), os alunos G e I fazem uso da linguagem "finita e infinita" ao finalizar esta tarefa, levando-nos a investigar se o uso deste significante está condicionado ao fato de que no primeiro caso a soma infinita deixa de ser infinita, uma vez que esta é convergente. Além disso, esses alunos deduzem a convergência das somas pela estratégia E_{d3} (cálculos por aproximação), porém infringindo as regras do jogo ao fazerem uso da calculadora. Quanto ao aluno J, ele uniu-se com outros colegas, os quais realizaram sozinhos a tarefa proposta sem participação de nosso sujeito de pesquisa J, o que isso fez com que não fosse possível resgatar suas produções nessa tarefa.

No momento de discussão final com a turma, os alunos M, L, K, G e I expressam as somas que apresentaram, o que fez com que o objetivo desta tarefa fosse alcançado, sendo este o momento em que levantaram as primeiras conjecturas após contato com o limite. A pesquisadora discute os comportamentos de cada soma, em função das razões especificadas, já que, ao contrário do que prevíamos, não houve indícios de validação da tarefa por parte dos mesmos. Concluímos que esse momento ficou caracterizado apenas como uma explicação final do pesquisador, sem institucionalizar nenhum saber científico; isso não caracterizaria uma situação de institucionalização, uma vez que esta "define os comportamentos ou as produções <livres> do aluno pode ter com o saber cultural ou científico e com o projeto didático: faz uma leitura dessas atividades e atribui-lhes um estatuto" (BROUSSEAU, 1996, p. 87-88).

5.6.2 Sessão 11 (Somas infinitas dos termos de PGs)

Esta sessão é composta por uma única tarefa, apresentada a seguir:

Dadas as somas abaixo, verifique quais delas convergem para um número finito. Justifique sua resposta

a) 20 + 4 + 4/5 + 4/25 +... *b) 1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 +...*

c) 1/2 - 1/4 +1/8 -1/16.. *d) 2 - 6 + 18 - 54 + 162 - ...*

Objetivo: Analisar como os alunos operam com diferentes somas infinitas dos termos de PGs após contato com a noção de limite.

5.6.2.1 Análise *a priori*

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. Nesta tarefa, restringimos o uso da calculadora para que os alunos pudessem se manifestar diante do cálculo da soma infinita de PGs a partir da noção de limite, dificultando o uso das estratégias vinculadas ao cálculo por aproximações.

V_{s3}: Tipo de PG. Ao trabalharmos com vários tipos de PGs, acreditamos que estas não sejam triviais para determinarem a convergência ou não das somas de seus termos, o que consequentemente, implica em novas possibilidades de estratégias a serem mobilizadas pelos alunos.

Quanto aos conhecimentos necessários para a resolução desta tarefa destacamos a noção de limite na fórmula da soma dos *n* primeiros termos de PGs, propriedades de potência e operação com números racionais.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

E_1: Regra-em-ação. Aplicar o $\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{a_1}{1-q}$ para todas as somas, não observando que esta expressão só é válida para as somas convergentes, nas quais $-1 < q < 1$.

E_2: Cálculo do limite. Fazer uso da noção de limite na fórmula $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ao identificar a razão de cada soma dada analisando, a cada caso, o comportamento de q^n.

E_3: Razão. Identificar a convergência ou não das somas, determinando apenas a razão entre os termos da PG.

E_4: Estimativa. Estimar os valores para os quais as somas podem convergir ou não, após determinar o cálculo de alguns termos de cada soma, mesmo sem o uso da calculadora.

Uma possível validação nesta tarefa: Verificar que a condição necessária para que as somas possuam limite repousa na razão da PG que se encontra entre -1 e 1, uma vez que o $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ possibilita o cálculo do limite em S_n.

5.6.2.2 Experimentação (sessão 11)

Esta sessão ocorreu no dia 03 de maio de 2011 e teve duração de aproximadamente uma hora. Compareceram a esta sessão <u>cinco</u> sujeitos de pesquisa, pois o aluno L não esteve presente. Os alunos foram avisados de que não era permitido o uso da calculadora.

5.6.2.3 Análise *a posteriori*

Tendo em vista o "objetivo" a ser atingido, os alunos G, I, M e J sabem que devem utilizar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG, fazendo uso para tanto da estratégia E_2. Assim, iniciam a resolução da soma do item (a), antecipando que a razão seria 5 ao invés de $\frac{1}{5}$, pois só após dividirem o segundo termo pelo primeiro termo é que obtêm a razão esperada. No entanto, depois de efetuar a soma de alguns termos da soma, conforme estratégia E_4 o aluno I antecipa o fato de somente a soma do item (c) convergir, como mostra a seguir:

> Aluno I: Oh, 2-6+... deu 14-64...
> Aluno G: 30 ... não 40 (realizam algumas contas)
> Aluno I: Aí você deve 64, depois você tem... Eu também acho que só a (c) o resto vai pro infinito.

Essa atitude o remete à mobilização de uma regra-em-ação vinculada à propriedade associativa da adição, utilizada para determinar somas finitas, fazendo uso de uma linguagem natural para tratar de forma imediata a situação proposta. No caso do aluno K ressaltamos que, ao fazer uso praticamente do mesmo objetivo (efetuar a soma de alguns termos), porém junto ao conceito de mínimo múltiplo comum (m.m.c), o mesmo também inicia a resolução proposta no item (a) efetuando a soma dos 4 primeiros termos da PG, conforme apresentado no enunciado.

> Figura 47: Parte da resolução do aluno K. Sessão 11
> Pesquisadora: sim, mas como vocês estão resolvendo a soma infinita?
> Aluno K: por que aqui na (a), eu joguei o mmc...
> Pesquisadora: mas o mmc a gente faz quando a soma é finita, né? E todas essas são infinitas. O que a gente aprendeu pra resolver uma soma infinita?
> Aluno K: tem que jogar na fórmula

No diálogo acima observamos a falha da pesquisadora em sua intervenção, uma vez que a mesma poderia explorar mais a situação de forma que o próprio aluno pudesse validar seu procedimento de resolução, sem deste modo interromper um momento que poderia ser adidático. Além disso, só após o questionamento sobre o cálculo efetuado é que o aluno K menciona o uso da fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG, viabilizando a discussão entre os pares.

> Pesquisadora: Agora o que significa essa fórmula?
> Aluno do grupo: A fórmula da soma dos números finitos, né?
> Aluno K: Isso dos *n* primeiros termos. **Agora dá infinita não dá?**
> Parceiro do grupo: Eu lembro que a gente analisava aqui (q^n) que dava zero aí ficava...a_1/1-q [...]
> **Aluno K: Se fosse 5 termos...n=5**
> **Pesquisadora: Na soma finita, mas essa é infinita.**
> **Aluno K: [...] então, aí eu não coloco nada? [...]**

Nota-se que, ao final do diálogo, o aluno K mostra dificuldade ao lidar com a variável *n*, considerando-a numa soma infinita, evidenciando o que Usiskin (1995) ressalta ser um elemento de difícil compreensão, visto que nesse caso *n* não assume valor de incógnita. Assim, o aluno prossegue substituindo o valor de n por 4, e mesmo desconfiando que algo não está correto, nos dá indícios de que considera impossível resolver a operação proposta, já que uma vez que, no caso de uma soma infinita, a variável *n* não assume um único valor.

Esta mesma dificuldade também se mantém para os alunos G e M, como podemos verificar nas falas: *"M: [...] a gente não sabe exatamente qual é o valor desse infinito"* e "G: *Então, não vai elevar a nada?"*, sendo essa a possível causa de o aluno G efetuar o cálculo para a soma do item (a) sem levar em conta a noção de limite, ainda não compreendida.

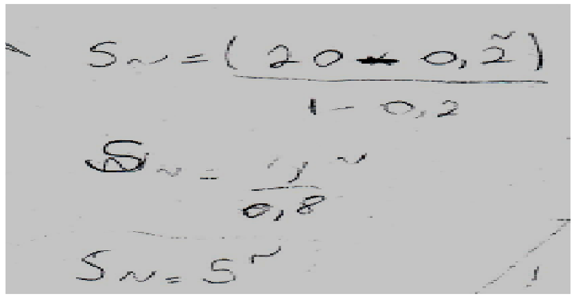


Figura 48: Excerto da produção do aluno G. Sessão 11

Diante destas indagações, sentimos a necessidade de intervir sobre a noção de limite, visto que os mesmos não conseguiram progredir em suas resoluções. A necessidade desta intervenção evidencia a vigência do contrato didático[20] referido por Brousseau (1986), uma vez que o professor cria condições para que os alunos se apropriem dos conhecimentos, esperando-se desta forma que os mesmos sejam capazes de satisfazê-las. No entanto, caso o contrato se "quebre" a relação didática deve prosseguir e é a sua reavaliação que pode levar os alunos a reconstruírem os conhecimentos em jogo. Com esse intuito, chamamos a atenção para a análise do comportamento de $(0{,}2)^n$ quando n cresce infinitamente, ao mostrar aos alunos que a variável n não possui um valor exato mediante a análise do uso do significante $\lim_{n \to \infty} q^n$, sendo este o primeiro passo para verificarmos posteriormente se uma dada soma possui ou não limite.

Somente após essa discussão os alunos M e J prosseguem na resolução da tarefa, analisando apenas o $\lim_{n \to \infty} q^n$, procedimento em que podemos verificar que os mesmos transferem as características próprias da função para o limite, equívoco este relatado por Sierpinska (1985) e expresso no uso de "o limite tende" ao invés de "limite é", como mostra o excerto a seguir.

[20] Segundo Brousseau (1996) o contrato didático é constituído por um conjunto de comportamentos que são esperados tanto pelo aluno quanto pelo professor, mediante o saber em jogo. Neste caso, as relações entre as partes envolvidas são regidas, sobretudo, por regras implícitas sobre o qual cada parceiro será responsável perante o outro.

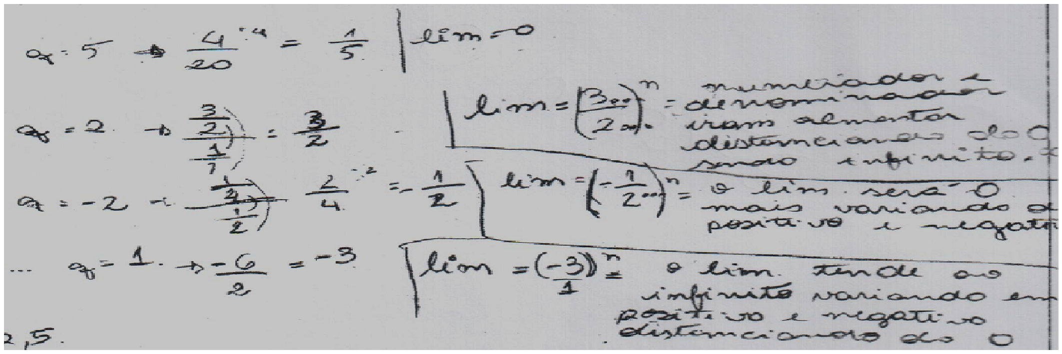


Figura 49: Excerto da Sessão 11. Alunos M e J

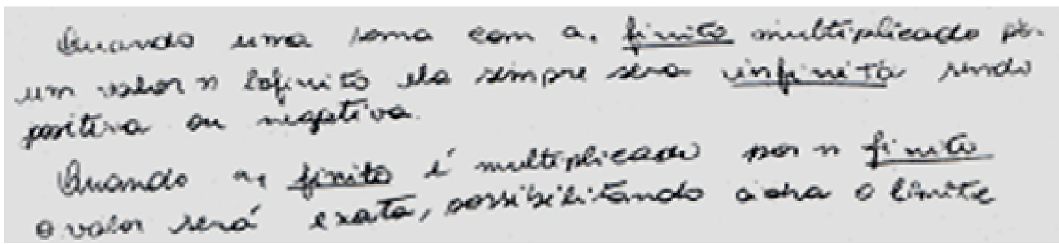


Figura 50: Excerto da Sessão 11. Alunos M e J

Neste último, observamos que após analisarem $\lim_{n\to\infty} q^n$ os alunos passam por uma situação adidática de formulação, ao buscarem justificativas para as conjecturas levantadas, após operarem com a fórmula da soma dos termos de uma PG. Além disso, a afirmação de que "*ela sempre será infinita*" ao se referirem ao resultado da soma leva-nos a considerar que esse significante pode corresponder a uma interpretação errônea de convergência, ou seja, como se a soma deixasse de ser infinita.

Quanto à resolução dos alunos G e I, cabe ressaltar que houve pouca participação deste último, pois saiu mais cedo da sessão. No entanto, ao trabalharem com a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da PG, verificamos a persistência de equívocos em torno dos conceitos de potenciação e operações com números racionais. Observamos que só após o debate final é que o aluno G apresenta a seguinte solução, o que consistiria indícios de validação da tarefa, como prevíamos.

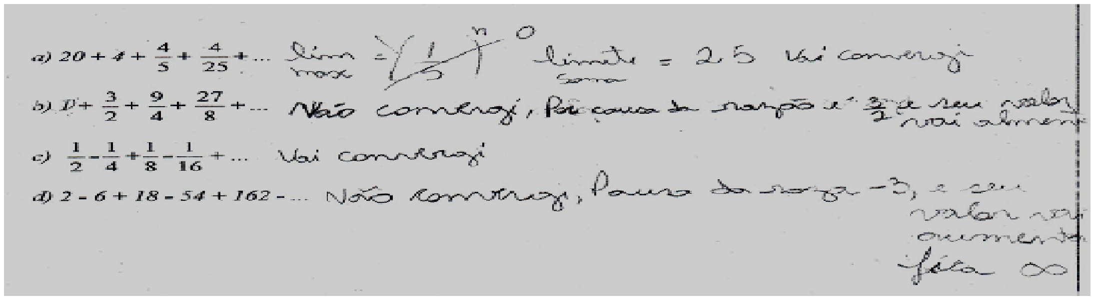


Figura 51: Solução do aluno G. Sessão 11

No caso de K, uma longa discussão se inicia, pois foi necessário a pesquisadora ressaltar a noção de limite no uso da fórmula da soma dos termos de uma PG ao analisarmos o valor que a variável *n* assume nesse caso. Só assim ele observa a relação entre a razão e a convergência dos termos da PG (limite), como observamos a seguir.

> Aluno K: Então no caso, a gente tem que prestar a atenção na razão.
> Pesquisadora: Lembra o que a gente fazia na aula passada, quando a razão era maior que 1 ou menor que -1?
> Aluno K: Ela divergia, se afastava [...] Então aqui você quer saber quais têm limite?
> Pesquisadora: Sim
> Aluno K: Agora deu pra entender. Então a gente tem que encontrar o limite da razão e da soma [...]
> Pesquisadora: E no caso da letra b?
> Aluno K: Ela tá divergindo ...
> Pesquisadora: Vai ter limite?
> Aluno K: Não [...] por que ela tá crescendo infinitamente...

Diálogos como este mostra-nos o envolvimento do aluno na busca de compreenção da situação proposta. Após verificar que sua tarefa consistia em identificar quais somas possuíam limite é que ele atribui sentido à operação realizada, passando por situações adidáticas de ação, ao efetuar o cálculo do limite fazendo uso da estratégia E_2, e de formulação, quando apresenta justificativas para a resolução dos itens (a) e (b), já que não restou tempo para a resolução dos demais.

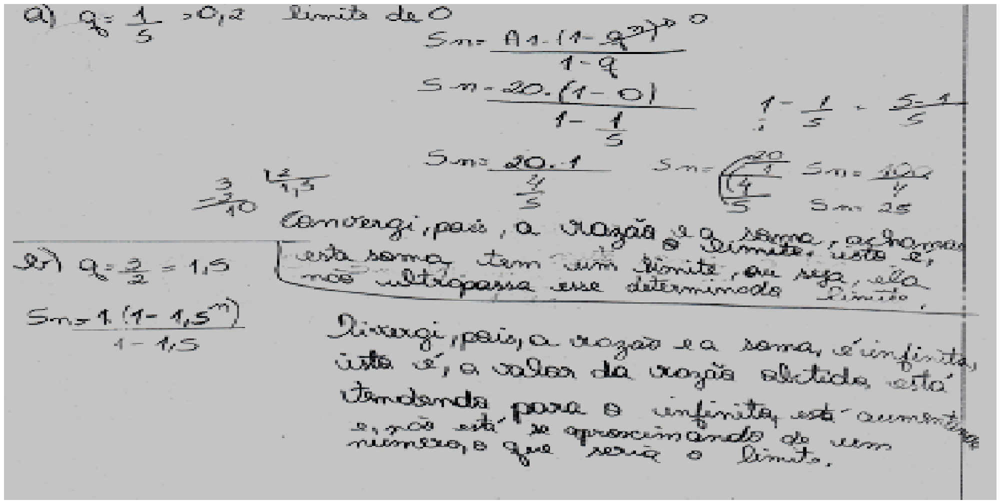


Figura 52: Resolução do aluno K. Sessão 11

Como ainda não havia ficado claro qual seria o significado dado à noção de limite pelo aluno K, procuramos realizar um diálogo com o mesmo:

> Pesquisadora: Você entendeu por que, que quando isso acontece ($q^n \to \infty$), a soma também tende ao infinito?
> Aluno K: A soma? É a soma é infinita, no caso vai ultrapassar.
> Pesquisadora: o que vai ultrapassar?
> **Aluno K: A soma, por que a soma já é infinita, aí não sei explicar**
> Pesquisadora: mas, em todos os casos as somas não são infinitas? [...]
> Aluno K: Que nem o 3,2 já não dá, porque é maior que 1
> Pesquisadora: Então o que vai acontecer com a soma nesse caso?
> **Aluno K: Ela não vai tender ao finito, ela vai ser sempre infinita.**
> Pesquisadora: Ela vai divergir [...] o que você tá entendendo por limite?
> **Aluno K: É a última barreira que os termos nunca ultrapassam esse valor. [...] É os termos vão só se aproximando dele.** [...] agora quando diverge, eles nem vão se aproximar, né? não vai ter nenhuma barreira, né? que é o limite.
> Pesquisadora: É que na verdade não existe o limite ...
> Aluno K: Arram

Desta forma, acreditamos que num primeiro momento o aluno deixa implícita a confusão entre a soma ser infinita e o fato de ela corresponder a um número real. Há indícios de que esse aluno ainda mobiliza o teorema-em-ação T_3 (uma soma infinita não pode corresponder a um número real), uma vez que, quando ele afirma que "*ela não vai tender ao finito, ela vai ser sempre infinita*" nos induz a acreditar, conforme ressaltamos anteriormente, que quando uma soma infinita é convergente ela deixa de ser infinita. Além disso, ao associar o limite como sendo uma "*barreira*", cujos termos apenas se aproximam e não ultrapassam, reflete o modelo primitivo por Robert (1982). Essas afirmações evidenciam o fato de que os significantes explícitos são indispensáveis ao processo de conceitualização (VERGNAUD, 1996), já que é possível buscar elementos que nos levem a compreender os esquemas mobilizados pelos alunos durante sua ação.

Ainda que nesta sessão os alunos manifestaram dificuldades com a noção de limite das somas infinitas dos termos de PGs, ao contrário do que previamos, observamos que mobilizaram conhecimentos que estavam sendo construídos, questionando e se envolvendo na construção dos conceitos em jogo. Ao final, a pesquisadora encerra retomando a distinção e a relação existente entre o limite de q^n e o limite de S_n, quando n tende ao infinito. Esta diferenciação é de suma importância no estudo do tema e, atesta a veracidade do teorema-em-ação T_1 (os termos de uma PG apenas se aproximam do limite, sem atingi-lo), mobilizado pelos alunos, deixando claro que o "limite é" e a "função tende", visto que esta pode ou não atingir o limite.

5.6.3 Sessão 12 (Reinvestimento da noção de limite)

Esta sessão contém duas tarefas nas quais temos por objetivo analisar como os alunos procedem com situações que já foram discutidas anteriormente após terem contato com a noção de limite.

Segue a primeira tarefa desta sessão:

0,9999....= 1? Justifique sua resposta

Objetivo: Conforme descrito no quadro 3, ao final do capítulo anterior, esta tarefa possui o mesmo objetivo desta sessão, uma vez que o questionamento (*0,9999....= 1?*) persistiu em vários momentos de nossa sequência didática, em especial no início da sexta sessão, na qual foi discutido o cálculo por meio do limite.

A segunda tarefa: Retomando a situação-problema da 1ª sessão...

Num recipiente de capacidade de um litro, adiciona-se, a cada dia, uma quantidade de água do seguinte modo:

- *No 1º dia, adiciona-se* $\frac{1}{2}$ *litro de água;*
- *No 2º dia, adiciona-se* $\frac{1}{4}$ *litro de água;*
- *No 3º dia, adiciona-se* $\frac{1}{8}$ *litro de água;*
- *No 4º dia, adiciona-se* $\frac{1}{16}$ *litro de água;*

e assim sucessivamente.

a) Ao final do 7º dia, qual a quantidade de água contida no recipiente? ***(adaptado[21])***
b) Determine uma expressão que representa a quantidade de água contida no recipiente, no enésimo dia.
c) A água preencherá o recipiente com o passar do tempo? Justifique sua resposta

Objetivo: Retomar a tarefa da sessão 1 e analisar como os alunos a tratam após contato com o limite.

5.6.3.1 Análise *a priori* da primeira tarefa

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. O uso da calculadora será restrito, pois desta forma será possível restringir as estratégias a serem usadas pelos alunos, levando-os a trabalhar sobre a noção de limite em S_n.

Quanto aos conhecimentos necessários para a resolução dessa sessão de tarefa destacamos as dízimas periódicas, frações decimais, noção de limite, operação com números racionais e expressão algébrica.

[21] Na primeira sessão de tarefa solicitávamos a quantidade de água contida no recipiente no quarto e no sétimo dia. Considerando que os alunos poderiam utilizar a mesma estratégia, optamos por dispensá-los nesta sessão de dois cálculos, visto que os mesmos demandariam mais tempo para serem efetuados e a presente sessão por si continha mais tarefas programadas.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

E_1: Infinito potencial. Afirmar que o número 0,9999... apenas se aproxima cada vez mais do número 1, mostrando impossibilidade de ser 1.
E_2: Noção de limite. Encontrar a soma de frações decimais conforme esperado, decompondo o número 0,999... em uma sequência de números decimais. Ao realizar a conversão para a representação fracionária, analisa-se com a fórmula da soma infinita dos termos de uma PG, obtendo o número 1 como solução, o que permite validar a referida igualdade.

Uma possível validação nesta tarefa: Realizar o cálculo do limite na fórmula de S_n como forma de validar a igualdade entre as duas representações numéricas.

5.6.3.2 Análise *a priori* da segunda tarefa

Variáveis didáticas:

V_{s1}: Uso da calculadora. Optamos pela ausência da calculadora nesta tarefa, para provocar mudanças nas estratégias apresentadas no início da sequência didática, uma vez que os alunos podem mobilizar conhecimentos construídos durante as sessões de tarefa para resolvê-la.

Quanto aos conhecimentos necessários para a resolução desta tarefa destacamos a noção de limite na fórmula da soma dos termos de PGs, propriedades de potência, operação com números racionais, expressões algébricas.

Possíveis estratégias a serem apresentadas pelos alunos:

Para o item (a) prevemos:

E_{a1}: Conversão de fração em decimais. Transformar as frações em números decimais e ao observar a regularidade existente entre a quantidade de água adicionada no recipiente com o dia anterior efetuar a soma da quantidade de água contida no recipiente no sétimo dia.

Ao contrário de E_{a1} elencamos a estratégia $\mathbf{E_{a2}}$, que permite a soma pedida por meio da representação fracionária com o cálculo do m.m.c, obtendo assim a solução esperada.
$\mathbf{E_{a3}}$: **Fórmula.** Utilizar a fórmula dos *n* primeiros termos da PG, identificando o primeiro termo e a razão da PG e, em seguida, atribuir o valor 7 para a variável n.

Para o item (b) prevemos:

$\mathbf{E_{b1}}$: **Indicação da soma**. Determinar a quantidade de água no n-ésimo dia, obtendo a expressão $\frac{2^n-1}{2^n}$ a partir da estratégia $\mathbf{E_{a2}}$ ou indicando a soma até o enésimo dia, isto é, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$.
$\mathbf{E_{b2}}$: **Termo geral.** Identificar a quantidade de água <u>adicionada</u> no n-ésimo dia ao invés da quantidade de água <u>contida</u> no recipiente neste dia, podendo os alunos expressarem corretamente que o termo geral seja $\frac{1}{2^n}$.
$\mathbf{E_{b3}}$: **Fórmula**. Fazer uso da fórmula dos *n* primeiros termos da PG, indicando apenas o primeiro termo e a razão da PG que se forma com a quantidade de água que são adicionadas no recipiente.

Para o item (c) prevemos:

$\mathbf{E_{c1}}$**: O uso da intuição**. Observar que a água preencherá o recipiente <u>ou</u> que até transbordará, já que nele é acrescida sempre uma quantidade de água correspondente a uma parte do que falta.
$\mathbf{E_{c2}}$**: Infinito potencial**. Observar que a água não preencheria o recipiente, pois os valores apenas estariam se aproximando cada vez mais do número 1, isto é, sempre estaria faltando a metade da quantidade de água que foi adicionada no dia para completar o recipiente. Cabe a nós investigarmos se ainda persiste o teorema-em-ação $\mathbf{T_3}$, que consiste *na impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real.*
$\mathbf{E_{c3}}$**: Noção de limite.** Fazer uso da noção de limite aplicada à fórmula da soma dos termos de uma PG. Desta forma, encontra-se como limite o valor 1, o que leva a afirmar que a água preencherá o recipiente.

Uma possível validação nesta tarefa: Observar ou perceber que o máximo a ocorrer é o recipiente ficar completo, pois o valor limite 1 coincide com a capacidade do recipiente.

5.6.3.2. Experimentação (sessão 12)

Essa última sessão de tarefa de nossa sequência didática foi realizada no dia 04 de maio de 2011 e teve duração de uma hora. Compareceram à sessão os seis sujeitos da pesquisa.

5.6.3.3. Análise *a posteriori* da primeira tarefa

Quanto à resolução dessa tarefa, não obtivemos muitas produções dos alunos G e I, uma vez que os mesmos se detiveram à resolução da segunda tarefa proposta. No entanto, verificamos que eles observam que a igualdade é verdadeira só após a discussão final; como podemos verificar no diálogo que segue, quando o aluno G justifica para o colega o porquê de o limite ser o número 1.

> Aluno I: O limite vai ser 1?
> Aluno G: Não sei. Mas 0,9999...o limite não é 1? O**h, o limite de zero é quantos? Ou é zero ou é 1.** Vamos jogar na reta pra você entender melhor. Aqui tá zero, e aqui tá 1...se essa soma tiver indo...o limite dela vai ser 1....

A frase grifada neste diálogo nos mostra que o aluno G atribui o significado do termo "limite" no sentido de "ser limitado", considerando o intervalo]0,1[sobre a reta real, em sua reflexão sobre o limite. Isso está de acordo com a afirmação de Willian (apud Celestino 2008, p.153) quando o mesmo atesta o fato de que "os significados cotidianos dos termos influenciam as percepções dos estudantes sobre esses termos em um contexto matemático".

Os alunos L, M e J iniciam a resolução a partir da soma de frações decimais ao lembrarem-se da tarefa realizada nas sessões anteriores e, em seguida, antecipam a obtenção da razão da PG, iniciando a resolução com q=10. Só após o aluno L verificar que a razão certa é 1/10 é que substituem novamente os valores de a_1 e q na fórmula de S_n, conforme estratégia E_{a2}. Nesse processo, ainda encontramos vestígios da dificuldade dos alunos ao lidarem com a variável n, quando, por exemplo, o aluno M toma $n=1$ ao justificar que o limite seja 1, como podemos averiguar no diálogo a seguir:

> Aluno L: Eu não sei fazer quando tem o n aqui em cima. Não tá certo isso, a gente andou e chegou no mesmo lugar.
> Pesquisadora: Por que você colocou 1 aqui? [...]
> Aluno M: Por que o finito dele é 1....o limite é 1.
> Aluno J: Ela tá perguntando se é igual a 1.
> Pesquisadora: Você tem que descobrir isso (aluno M) [...] se você coloca n igual a 1 Você consegue achar a soma de quantos termos?
> Aluno L: De um termo.

Em seguida, a pesquisadora discute com os alunos por que se deve analisar o limite de q^n e que, assim como havíamos presenciado no encontro anterior por outros sujeitos de pesquisa, o aluno L levanta o seguinte questionamento: *"L: se tende ao infinito a gente tem que colocar infinito aqui?"* e o aluno M complementa respondendo *"não sei*". Tais questionamentos nos mostram que ainda persiste a necessidade de atribuir um valor para *n*, levando-os a considerarem o infinito como sendo um número. Da mesma forma Nunes (2001) e Celestino (2008) verificaram esse fato com os sujeitos de suas pesquisas. Após efetuarem o cálculo esperado, conforme a estratégia E_2, os alunos M, L e J finalizam a tarefa encontrando o valor 1. No entanto, observamos uma confusão na interpretação entre o limite de S_n e o limite de q^n, apresentada pelos alunos M e J:

> Aluno J: 0,999... é igual a 1? Sim. Por quê?
> Aluno M: Porque o limite tende ao finito que é 1
> Aluno J: Não o limite tende a zero.
> Aluno M: Então o limite tende ao finito sendo zero. [...] Eu acho que não é essa resposta...
> Aluno J: Eu também acho que não.

Notemos que esses alunos passam por situações de ação ao realizarem o cálculo do limite na fórmula de S_n e de formulação, ao buscarem uma justificativa para a situação em termos da noção de limite. No entanto, apresentam-se desconfiados das conjecturas que elaboraram, na tentativa de validar o fato de 0,999... ser igual a 1.

Algo que notamos nas produções de todos os sujeitos da pesquisa é que os mesmos não fizeram uso do símbolo $\lim\limits_{n \to \infty}$ na fórmula da soma dos *n* primeiros termos. Acreditamos que as dificuldades que vêm apresentando estejam, de certo modo, relacionadas à interpretação dessa linguagem, como é ressaltado por Sierpinska (1985).

Quanto à resolução do aluno K, o mesmo mobiliza alguns conhecimentos ao agir sobre o problema proposto. Primeiramente, o aluno expressa que para 0,999... ser igual a 1, "*depende do ponto de vista*"[22], e relata que se considerarmos "por aproximação", temos que "$0,\overline{9}=1$", *"ou não"*, como ele mesmo justifica: *"pois, sempre irá faltar milésimos de décimos para se tornar 1"*. Este posicionamento mostra que o aluno ainda mantém-se em desequilíbrio cognitivo ao contrapor duas ideias, deixando explícita a relação com os infinitamente pequenos na tentativa de expressar o fato de ter sempre um número menor a considerar, ao lidar com o infinito potencial (estratégia E_1). Observando que o aluno acabara a resolução sem refletir sobre a noção de limite, a pesquisadora aproveita o pouco tempo que resta para discussão e antecipa o momento da validação de suas estratégias que deveria ser realizado pelo aluno. Deste modo, o interroga e sugere uma nova estratégia de resolução, a partir do cálculo do limite em S_n, como segue no diálogo abaixo.

> Aluno K: Eu to lembrando que essa vai ser o 0,999... e a barreira dela vai ser 1.
> Pesquisadora: [...] barreira?
> Aluno K: O limite dela, por que ela não vai ultrapassar esse número.
> Pesquisadora: Você achou que o limite é 1? Como assim por aproximação? (o aluno mostra a barra em cima do número 9) Mas será que a gente consegue arredondar infinitamente?
> Aluno K: Ah, acho que não, né?
> Pesquisadora: E como que a gente prova se isso pode ser 1? [...] será que nunca vai dar 1 mesmo? (Silêncio) Lembra daquele do 0,333... que a gente fez? Pelas frações decimais? Será que não tem como fazer?
> Aluno K: Vou ter que pensar...

Embora tenhamos induzido o aluno à resolução por meio da noção de limite, buscamos verificar como ele interpretaria essa situação com o uso de limite. No entanto, o aluno fez o cálculo proposto, conforme observamos a seguir, e só ao final da sessão é que retornamos sobre o sentido dado por ele a esta noção, assim como para os demais sujeitos de pesquisa.

---

[22] A referência de: "depende do ponto de vista" e em relação à aproximação, não foi possível identificar na figura escaneada, uma vez que o aluno apagou sua produção antes da pesquisadora pedir-lhes que não o fizesse. Assim sendo, apenas o protocolo original contêm vestígios do esquema mobilizado pelo aluno.

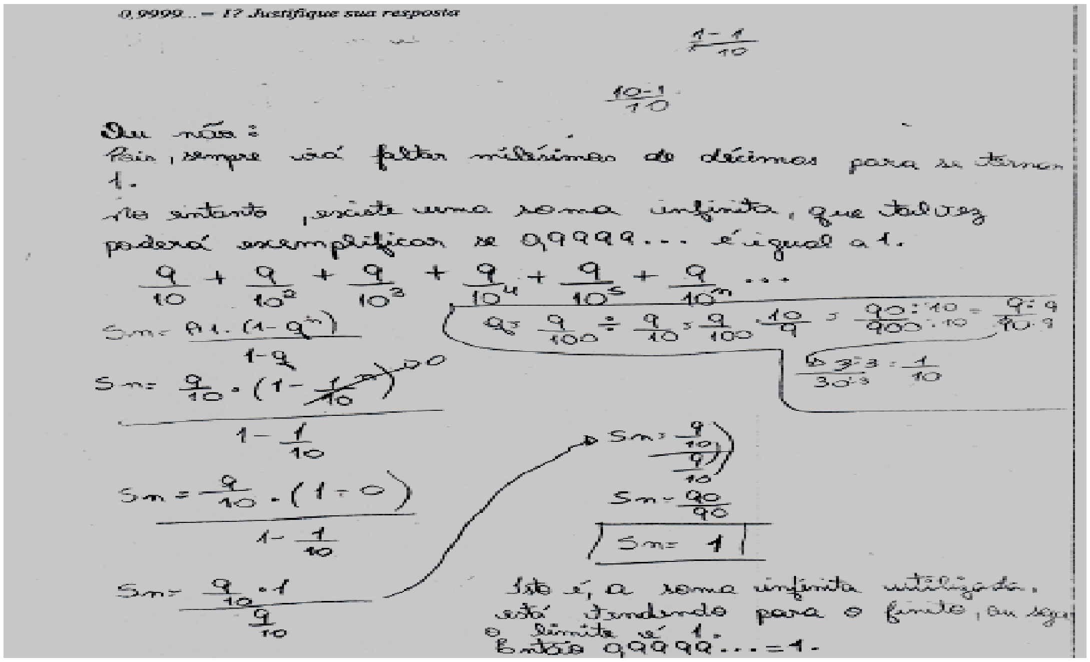


Figura 53: Resolução da atividade proposta Sessão 12. 1ª atividade. Aluno K

No momento de discussão final, a pesquisadora retoma as soluções levantadas pelos alunos sobre a situação-problema 0,9999... = 1, discutindo a veracidade da mesma, tanto de forma intuitiva, observando que não há possibilidade de encontrarmos um número entre 0,9999... e 1, como com relação ao cálculo do limite, efetuado pelos alunos. O diálogo abaixo sinaliza que os mesmos se convenceram de que 0,999... seja, de fato, igual a 1.

> Aluno J: A gente se convenceu por que a gente fez a conta e deu o resultado e que nem você falou por que... não tem um número entre 0,99999.... e 1;
> Aluno L: É também [...]
> Pesquisadora. E aquele do 0,99999.. você ficou convencida que é 1 ou não?
> Aluno K: Fiquei.
> Pesquisadora: O que te convenceu que é 1?
> Aluno K: Por que eu joguei na fórmula do limite e o limite já deu 1. O limite dela... do 9 sobre 10 +....deu 1, então só pode ser 1 mesmo e ainda mais que você falou que entre 0,99999... e 1 não tem nenhum valor, menor que 1 e maior que 0,9999...

5.6.3.4. Análise *a posteriori* da segunda tarefa

Quanto ao item (a) observamos que os alunos G, I, M, L e J apresentam como solução a quantidade de água adicionada no recipiente no dia considerado, assim como faziam no início de nossa sequência. Só após interrogarmos G e I é que os mesmos efetuam a soma desses termos, utilizando a estratégia E_{a1} (conversão), apresentando erro nos cálculos efetuados. O aluno K faz uso da estratégia E_{a2} (m.m.c), apresentando como solução $\frac{126}{128}$ ao invés de $\frac{127}{128}$, de acordo com excerto do protocolo a seguir.

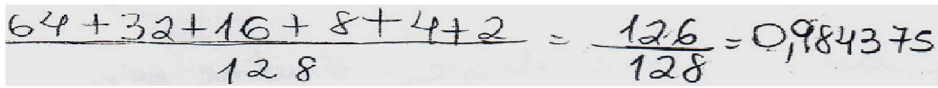


Figura 54: Resolução de tarefa na Sessão 12. 1ª tarefa. Aluno K

A má interpretação do problema também acontece na resolução do item (b), quando todos os sujeitos dessa pesquisa tomam a informação "n-ésimo termo" e procuram encontrá-lo por ser este o objetivo da tarefa, sem considerar a operação de soma. Então, determinam apenas a expressão $\frac{1}{2^n}$, segundo a estratégia E_{b2}. Apenas os alunos M, J e L registram a fórmula do termo geral sem sequer substituir os valores dados.

Em seguida, M antecipa a resolução do item (c) relacionando o n-ésimo número com um valor real, com o qual uma soma infinita pode convergir, ao afirmar que: *"M: óh. Ela vai preencher por que aqui a gente sabe que o n-ésimo número é finito e não infinito"*.

Neste item, todos os alunos utilizaram a estratégia E_{c3} referente ao cálculo do limite na fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG, sendo nesta que, observamos a dificuldade do aluno G em diferenciar o limite de q^n de o limite de S_n. Segundo Brousseau (2008, p.101), "Os diferentes tipos de situação em que evocamos a devolução têm por objetivo fazer com que o aluno dê um sentido aos conhecimentos que manipula". Com essa finalidade, a pesquisadora reinveste na discussão sobre a noção de limite na operação efetuada, já que o aluno ainda não apresenta controle sobre ela, sendo necessário "refazê-la" tomando por base o que havia aprendido. Mesmo que esta situação não tenha sido adidática, os alunos G e I agem sobre a situação proposta, mostrando controle sobre ela. Vejamos:

> Pesquisadora: Quanto que dá o limite de ½ elevado a n quando n tende ao infinito?
> Aluno I: Zero.
> Pesquisadora: Por isso que a gente coloca zero aqui, por que é o limite.
> Aluno G: Ah entendi, entendi... (Fazem as contas na fórmula)
> Pesquisadora: E essa conta aí (limite de S_n) dá quanto?
> Aluno G: Vai dar um.
> Aluno I: O limite da soma é 1.
> Aluno G: Não é difícil, mas também não é fácil.
> Aluno I: Ah, fica mais fácil depois que a gente entende, né?

Cabe ressaltar que, dentre os sujeitos de pesquisa, apenas o aluno I fez uso do significante "*lim* S_n" ao considerar a operação de uma soma infinita, como mostra a figura seguir.

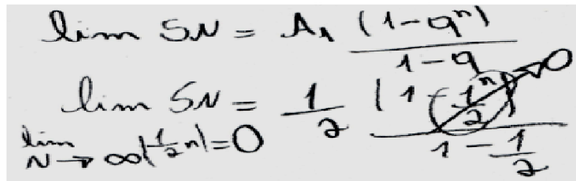


Figura 55: Resolução da 2ª atividade. Sessão 12. Aluno I

Apesar de todos os sujeitos sentirem dificuldade com o cálculo do limite, eles relacionam a noção de limite para interpretar a situação proposta. No entanto, apenas o aluno K formula uma justificativa para esta questão, evidenciando o sentido de "limite" como sendo uma barreira, que não pode ser ultrapassada pelos termos.

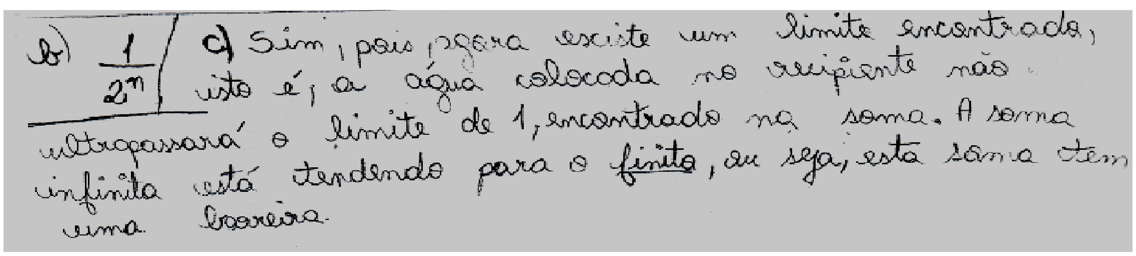


Figura 56: Resolução da 2ª atividade. Sessão 12. Item (c). Aluno K

No momento de discussão final, os alunos G e M também compartilham do mesmo significado atribuído pelo aluno K ao utilizarem-se da linguagem natural "barreira".

> Aluno G: Se o limite é 1 eu acho que não vai ultrapassar, mesma coisa quando o limite é zero, não tem como voltar pra trás ... que nem no zero... parou no zero, não vai ficar -1, -2 [...]
> Aluno M: Não pode transbordar, por que o limite é como se fosse uma barreira

Ao final dessa sessão, a pesquisadora discute com os alunos as estratégias utilizadas e a noção de limite na expressão $\frac{x-1}{x}$, já que esta se manteve constante em muitas resoluções dos alunos M, J e L de nossa sequência didática não sendo retomada ao final da atividade pelos mesmos. Tendo em vista que o cerne do problema consistia em verificar se a água preencheria ou não o recipiente, os alunos conjecturam sobre a noção de limite ao afirmarem que a água o preencheria e, assim, realçamos que o máximo que pode acontecer nessa situação é o recipiente encher e, consequentemente, a água não transbordaria do recipiente.

Considerando as dificuldades que os alunos encontraram durante a sequência didática, tecemos um paralelo com a resistência dos gregos antigos ao lidarem com a noção de infinito e de limite, explicando que esta levou milênios para que fosse realmente esclarecida. Em seguida, ressaltamos a amplitude do tema ao mostrar aos alunos que a noção de limite é uma ferramenta necessária que possuem para lidar com uma soma infinita dos termos de uma progressão geométrica, embora não esteja restrita a este estudo: há muito ainda a ser considerado em suas entrelinhas.

5.6.3.5 Considerações sobre o Bloco F

O bloco F permitiu-nos analisar o tratamento dado pelos alunos ao realizarem o cálculo por limite, ao contrário do bloco anterior, em que realizamos a operação de passagem ao limite na fórmula de S_n na qual os mesmos não sentiram a necessidade de analisar a variável n ao tratar de uma soma infinita. Dessa forma, o uso restrito da calculadora viabilizou o tratamento das questões junto à noção de limite de S_n, tendo apenas os alunos G e I mobilizado o cálculo por aproximação na sessão 10.

Nesta sessão, observamos o uso imediato da regra em ação $\frac{a_1}{1-q}$ pelos alunos M e L; no entanto, com a intervenção realizada e as retroações do meio no momento de discussão final, G, M, L e I progrediram, passando a analisar o $\lim_{n \to \infty} q^n$ nas demais sessões. Deste modo, uma nova dificuldade surge para todos os sujeitos de pesquisa quando lidam com a variável n na análise de $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Por outro lado, as indagações do tipo: "*L: se tende ao infinito, tem que colocar infinito aqui?*" ou "G: *então, não vai elevar a nada?*" também nos mostram o envolvimento dos alunos na resolução das tarefas propostas em busca de compreender o método usado (limite S_n).

Ao trabalharem com a noção de limite, os alunos G e I usam uma terminologia dúbia ao se referirem a uma "soma finita", visto que lidamos com uma soma infinita de termos de PGs. Tal situação se repete nas sessões 11 e 12 com os alunos M, J e K. O aluno G volta a manifestar a presença do teorema-em-ação T_3 (impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real), o qual também é mobilizado pelo aluno K, quando este lida com o questionamento (0, 999...= 1?), uma vez que o infinito potencial torna-se presente. O predomínio das estratégias relacionadas ao cálculo do limite na fórmula de S_n leva os alunos a manifestarem dificuldades em distinguir $\lim_{n\to\infty} S_n$ de $\lim_{n\to\infty} q^n$ e, somente após as discussões realizadas pela pesquisadora tomam controle da situação. Entretanto, apenas o aluno I faz uso do significante $\lim_{n\to\infty}$ nos cálculos realizados.

Na última sessão, os alunos M, J e L não reinvestiram na regra-em-ação $\frac{x-1}{x}$ mobilizada nas primeiras sessões de tarefas, e as dificuldades no tratamento com números fracionários e a potenciação se evidenciaram nessas sessões ao determinarem as razões de PGs. Para os alunos K e M o sentido dado ao limite atribui-se a uma "barreira" ou sinônimo de "ser limitado", como evidenciado pelo aluno G.

5.7 SÍNTESE PANORÂMICA DAS PRODUÇÕES DOS ALUNOS NOS BLOCOS DE TAREFAS

Como nosso objetivo de pesquisa é analisar a construção da noção de limite em um estudo de progressões geométricas infinitas, buscamos apresentar uma visão panorâmica das principais produções de cada sujeito de pesquisa ao longo da sequência, dificuldades apresentadas, conhecimentos mobilizados e construídos e o tratamento dado para cada tarefa proposta.

Nesse intuito, observamos que o aluno K inicia a primeira sessão alegando impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real, isto é, mobiliza T_3 (uma soma infinita não pode corresponder a um número real) e o conceito de infinito potencial. Ele tem dificuldade em administrar o tempo, mas evolui no decorrer da sequência. Utiliza as estratégias previstas, realiza muitos cálculos aproximativos e também mobiliza T_1 (os termos de uma PG apenas se aproximam do limite, sem atingi-lo). O aluno sabe como encontrar a razão entre os termos de uma PG, mas ao iniciar a resolução sempre a antecipa observando apenas a regularidade entre os denominadores das frações unitárias.

Volta a mobilizar T_3, nos dando indícios da presença do infinito potencial. Fica desestabilizado cognitivamente ao verificar que uma soma infinita pode corresponder a um número real diante da igualdade 0,999...= 1, mesmo após o primeiro contato com a noção de limite. Apresenta dificuldades com cálculos algébricos em uma soma infinita e ao trabalhar com o cálculo do limite de S_n, inicia utilizando a regra-em-ação $a_1/1$-q e apresenta dificuldade com a passagem ao limite, ao ter que lidar com a noção de infinito e diferenciar limite de S_n de q^n, mas ele as supera na última sessão.

Este aluno retoma velhos esquemas vinculados ao cálculo de somas finitas, mobiliza a ideia de infinito potencial e atribui significado ao termo limite, como sendo "barreira". Ao final da sequência, ele analisa a noção de limite para interpretar as situações-problema, formulando uma justificativa plausível para a situação, o que nos dá indícios de se aproximar da noção de limite atual.

Quanto às produções do aluno M, observamos que ele inicia a sequência didática com dificuldade com o n-ésimo termo, mostra-se desestabilizado cognitivamente ao lidar com a noção de infinito, fazendo uso da intuição e ao mobilizar a regra-em-ação: (x -1)/x, o aluno realiza vários cálculos aproximativos que atestam o infinito potencial e o teorema-em-ação T_3. Nos dá evidências de associar a variável n ao infinito e de mobilizar T_1, tentando validar suas conjecturas. Antecipa o valor da razão entre os termos de uma PG, apenas ao observar a regularidade existente os denominadores das frações unitárias.

Este aluno retorna a mobilização de T_3 e infinito potencial, realizando inúmeras somas por cálculos aproximativos e apresentando dificuldades em dar sentido as operações algébricas com uma soma infinita, dando indícios da desestabilização de T_3. Desestabilizado cognitivamente volta a manifestar T_3, utiliza inicialmente a regra-em-ação (x-1)/x e só depois analisa o limite quando q^n tende a zero. Em seguida, apresenta dificuldade com a passagem ao limite, ao lidar com a noção de infinito em S_n. Ao final das atividades, ele ainda apresenta dificuldade em analisar a variável n em S_n, mas depois consegue efetuar o cálculo do limite, associando limite ao termo "barreira".

Ao iniciar a sequência didática, o aluno L não reconhece um n-ésimo termo, deduz a regra-em-ação (x-1)/x para lidar com a primeira tarefa proposta, partindo da intuição ao infinito potencial, realizando cálculos aproximativos e mobilizando T_3 (uma soma infinita não pode corresponder a um número real). Inicialmente ele apresenta dificuldade com igualdade de notações algébricas, lida com a noção de função facilmente, mobilizando T_1 (os termos de uma PG apenas se aproximam do limite, sem atingi-lo), regra-em-ação (x-1)/x e infinito potencial. Tenta validar T_1, mas não obtêm êxito. Tem dificuldade com o trato algébrico em uma soma infinita e parece que T_3 é desestabilizado na 7ª sessão. Apresenta antecipações da razão de PG, ao observar os denominadores da frações unitárias, mas obtêm êxito ao final.

Após a institucionalização, para calcular o valor da soma infinita, da noção de limite utiliza a regra-em-ação $a_1/1\text{-}q$, a qual não é retomada posteriormente, uma vez que o aluno parte para a análise de q^n em S_n. Finaliza nossa sequência didática, apresentando dificuldade em analisar a variável n em S_n, ao realizar a passagem ao limite e, só depois de refletir sobre as situações é que efetua o cálculo do limite, manifestando indícios de infinito potencial.

Quanto ao aluno J, ao lidar com a situação problema da 1ª sessão, verificamos que o mesmo inicia com dificuldade com relação ao n-ésimo termo, realiza vários cálculos aproximativos, repousando sob a intuição. Ele dá indícios de considerar a variável n como sendo um valor infinito, apresentando dificuldades com igualdade de notações algébricas. Faz uso da noção de função, mobilizando conhecimentos construídos em sessões anteriores. Antecipa o valor da razão entre os termos da PG, observando apenas os denominadores de frações unitárias, mesmo tendo conhecimento de como encontrar a razão. Mobiliza o teorema-em-ação T_1, a regra-em-çõo (x-1)/x e ainda o conceito de infinito potencial, na 4ª sessão.

Desestabilizado cognitivamente com a tarefa da 6ª sessão, o aluno J nos dá indícios de transitar do infinito potencial ao atual. Em seguida, realiza vários cálculos aproximativos, mobilizando T_3, o qual parece ser desestabilizado ao final do bloco D. Este aluno apresenta dificuldade com o trato algébrico em uma soma infinita. Ele utiliza a fórmula de S_n com dificuldade em lidar com a noção de infinito. Quanto à passagem do limite, o aluno tem dificuldade em analisar a variável n em S_n e, só após discussões ele efetua o cálculo do limite, relacionando-o com as situações-problema propostas.

Nas produções do aluno G observamos que ele inicia com dificuldade em compreender o n-ésimo termo e mobiliza T_3. Tem dificuldade com a noção de infinito, ao verificar uma sequência numérica infinita. Posteriormente, ele nos dá indícios de ignorar a noção de infinito nas situações e também de associar n a um valor infinito. Este aluno antecipa a razão entre os termos da PG, ao verificar apenas os denominadores das frações unitárias. Desestabilizado cognitivamente na 6ª sessão, ele transita do infinito potencial ao atual.

Observamos que ele realiza inúmeras somas por cálculo aproximativo, mobilizando T_3 e infinito potencial, retoma a atividade anterior, mas mantém desestabilizado ao observar a impossibilidade de T_3. O aluno apresenta dificuldade com a operação de potência nas frações utilizadas nas tarefas. Usa uma linguagem dúbia para se referir as convergências das somas infinitas dos termos de PGs e novamente retorna a mobilizar T_3 e realizar cálculos aproximativos para deduzir o limite. Além disso, ele mobiliza esquemas vinculados às somas finitas e faz uso da fórmula de S_n, mas neste momento apresenta dificuldade ao lidar com a noção de limite.

Este aluno J finaliza as tarefas propostas com dificuldade em diferenciar o limite S_n de q^n e só depois de tomar controle sobre a situação é que realiza o cálculo do limite, atribuindo o significado "ser limitado" ao termo limite.

Por fim, o aluno I inicia com dificuldade em lidar com o n-ésimo termo e desestabilizado cognitivamente com a primeira situação, repousa sobre a noção de infinitamente pequeno. Apresenta dúvida ao verificar se uma sequência numérica é de fato infinita. Há indícios da mobilização de T_1 e antecipa o valor da razão entre os termos da PG ao observar a regularidade existente entre os denominadores das frações unitárias.

Este aluno faz uso de cálculos aproximativos, mobilizando o infinito potencial e T_3, o qual parece ter sido desestabilizado ao final da 7ª sessão. Ao lidar com cálculos algébricos ele encontra dificuldades, mas obtém êxito após discussões. Ele retorna a mobilizar T_3 e infinito potencial, bem como os cálculos aproximativos na tentativa de deduzir um valor limite. Além disso, faz uso de uma linguagem dúbia: "soma finita" ao se referir as somas convergentes.

Este aluno mobiliza esquemas de somas finitas e utiliza a fórmula de S_n apresentando dificuldade em lidar com a noção de infinito, ao realizar a passagem ao limite. Neste estágio, a dificuldade em diferenciar limite S_n e q^n se acentua, mas ao final efetua o cálculo do limite, mobilizando o infinito potencial ao lidar com as situações propostas, sendo o único sujeito de pesquisa a utilizar o símbolo (*lim*) na fórmula S_n.

Com base nessas considerações, ressaltamos algumas conclusões a respeito das produções apresentadas pelos alunos, bem como as principais confluências existentes entre elas, descritas no próximo capítulo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As indagações surgidas em torno do ensino e aprendizagem do Cálculo nos levaram a delinear um campo de estudo no qual pudéssemos analisar a construção da noção de limite por alunos de ensino médio, haja vista que este conceito é foco de investigação do ensino superior, nível de escolaridade no qual passa a ser visto como objeto de estudo. Assim, tendo em vista as dificuldades que os alunos manifestam nesse estágio, conforme mostram as pesquisas de Robert (1982), Sierpinska (1985), Celestino (2008), Santos (2005) e Nunes (2001), e considerando que no ensino médio brasileiro a noção de limite é apresentada no estudo de progressões geométricas infinitas, como sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (1998), passamos a considerar a seguinte questão norteadora desta pesquisa: *De que forma um estudo de progressões geométricas infinitas pode contribuir para que alunos do ensino médio construam a noção de limite?*

Para fundamentar esta investigação, buscamos aporte teórico na Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (1998), com a finalidade de propor aos alunos situações de aprendizagem da noção de limite e, em complementaridade, a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud (1996), que nos permitiu reconhecer elementos cognitivos importantes dos sujeitos na construção desta noção durante a experimentação proposta. Junto a essas teorias, a Engenharia Didática descrita por Artigue (1996) nos ditou o caminho metodológico a trilhar. Assim, seguindo os princípios da mesma, destacamos nas análises preliminares os aspectos epistemológicos de nosso objeto de estudo, bem como as dificuldades e/ou obstáculos ressaltados nas pesquisas de Robert (1982), Cornu (1981), Sierpinska (1985), Celestino (2008), Santos (2005), Nunes (2001), Usiskin (1995) que também se evidenciaram no decorrer de nossa pesquisa, contribuindo para uma melhor compreensão do campo de estudo a qual está inserida.

Em consonância com alguns aspectos epistemológicos e dificuldades elencadas nessas pesquisas, a análise dos livros didáticos contribuiu para elencarmos alguns teoremas-em-ação que poderiam ser mobilizados pelos alunos, como o que afirma a impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real. De forma geral, observamos que os livros didáticos explanam a noção de limite de forma abreviada e prematura. Os principais aspectos destacados nessa análise apontam para possíveis dificuldades e algumas concepções errôneas acerca da noção de limite que podem induzir os alunos a equivocarem-se. Um exemplo disso é o caso do uso de terminologia dúbia como “soma finita” ao se referirem às somas convergentes e o uso simplificado do cálculo do limite com a expressão $\frac{a_1}{1-q}$, a qual denominamos de regra-em-ação, uma vez que todos os livros analisados apresentam essa “regra” para uso imediato na resolução de exercícios, deixando de analisar a noção de limite em S_n em cada situação proposta. Na maioria dos livros observa-se que tanto a abordagem do comportamento dos termos da progressão quanto a passagem ao limite são realizadas prematuramente, excluindo os alunos do processo de construção da noção de limite. Além disso, essas obras deixam de lado a análise e discussão das progressões divergentes, perdendo a oportunidade de dar um estatuto de saber aos conhecimentos produzidos pelos alunos, como propõe Brousseau (2008).

Tomando por base esses pressupostos, partimos da hipótese de que um estudo gradativo da noção de limite de PGs poderia contribuir para que esta pudesse ser aprofundada no estudo das somas infinitas dos termos de PGs. Assim, elaboramos uma sequência didática com esse intuito, o que nos permitiu atender aos objetivos desta pesquisa e cujos resultados, bem como possíveis contribuições deste estudo, apresentamos a seguir.

Dividida em seis blocos de tarefas, a sequência didática foi estruturada de forma que a cada bloco os alunos pudessem mobilizar conhecimentos explorados anteriormente para avançar no processo de construção da noção de limite, levantando e validando suas conjecturas. Desta forma, atingimos os objetivos previstos em cada bloco, visto que a cada etapa os alunos foram adquirindo habilidades e construindo os conhecimentos necessários para, ao final, analisar a noção de limite em S_n e aplicar as situações-problema propostas. Isso pode ser observado quando os alunos inicialmente não reconheciam uma sequência numérica, em especial as PGs, sem conhecer a linguagem "n-ésima" e posteriormente realizaram as deduções da fórmula do termo geral da PG e da soma S_n dos n primeiros termos da PG, finalizando as sessões reconhecendo o termo geral das sequências, ao analisar as progressões geométricas em termos de limite.

Além do mais, os alunos iniciaram a sequência didática com uma visão ingênua sobre a noção de limite e sem saberem ao certo como lidar com questionamentos que exigiam refletir, conjecturar e lidar com o infinito. No decorrer das sessões foi notória a presença do infinito potencial imbricada em suas ações. A estratégia mobilizada pelos alunos M e L, prevista a priori no início do bloco A, à qual vinculava-se a regra-em-ação (x-1)/x, foi determinante na mobilização dos teoremas-em-ação T_3 (impossibilidade de uma soma infinita corresponder a um número real) e T_1 (os termos de uma PG apenas se aproximam cada vez mais de certo valor, sem atingi-lo). Diante deste fato, concluímos que esta regra-em-ação pode ter interferido no processo de transição do infinito potencial ao atual que poderia ter sido vivenciado por esses alunos.

A análise do bloco B nos permitiu identificar dificuldades dos alunos ao lidarem com a variável *n,* pois ao fazerem uso da terminologia “n-ésima”, inicialmente atribuíam valores finitos a variável *n* e, ao longo de suas produções, passaram a associá-la com o infinito. Além disso, observamos que os mesmos não estavam acostumados com o processo de generalização, mas a construção das expressões algébricas que propusemos constituiu um elemento fundamental e indispensável na produção de significados, contribuindo para o trabalho com fórmulas e expressões envolvidas nesse conteúdo matemático.

Cabe ressaltar que apesar da pertinência desta escolha, tivemos uma intervenção maior da pesquisadora nesse processo, uma vez que as dificuldades dos alunos com a álgebra se acentuaram e, decorrente a isso, houve momentos em que os mesmos deixaram de vivenciar situações adidáticas. É nesse sentido que podemos repensar em situações que explorem o trabalho ativo dos alunos, com adequada intervenção e mediação do professor-pesquisador, para que desta forma possamos evitar o surgimento de efeitos topázios.

Quanto às escolhas das questões, observamos que a tarefa de dedução da fórmula da soma de S_n proposta na 8ª sessão, foi realizada prematuramente, uma vez que as dificuldades dos alunos, na passagem da aritmética para a álgebra, poderia ter sido mais explorada na atividade anterior. Nesta mesma tarefa o uso da simbologia S, para determinar a soma dos *n* primeiros termos de uma PG, a qual geralmente é expressa por S_n, poderia ter sido substituído por outra denominação, uma vez que o uso deste significante pode acarretar em dificuldades futuras.

Por outro lado, as situações-problema propostas ao longo da sequência muito contribuíram para a exploração de estratégias de resolução, reflexão e envolvimento dos alunos, em busca de darem sentido a esses tipos de tarefas. Apesar de presos pela concepção do infinito potencial, vimos que os alunos sentiam a necessidade de formular justificativas, validar suas concepções e mobilizarem-nas em outras situações. Este é um dos fatores que nos mostra o quanto os mesmos se envolveram nesse processo de construção da noção de limite, vivenciando várias situações adidáticas.

Outro ponto a destacar diz respeito às escolhas das variáveis didáticas. Nesse sentido, verificamos que a variável *representação figural no enunciado da situação problema* foi de grande valia na elaboração das conjecturas dos alunos a respeito da noção de limite, pois o uso da reta numérica contribuiu para a análise do comportamento dos termos das progressões. Cabe ressaltar que, quanto à representação na reta numérica, os alunos não apresentaram dificuldades quanto a ordenação, localização e análise dos termos sob a reta, até mesmo nos diferentes tipos de progressões geométricas, superando nossas expectativas previstas a priori.

Uma perspectiva para este estudo seria partir da análise do comportamento dos termos da PG na reta numérica para uma análise gráfica dessa situação. Para tanto, acreditamos que o uso de tecnologia de informação e comunicação poderia contribuir para uma melhor visualização da convergência, bem como a possibilidade de sucessivas retroações fornecidas aos alunos, possa permitir a mobilização de novas conjecturas. No entanto, seria importante um software que possibilitasse a exploração do conjunto dos naturais como domínio da função, e não apenas funções com domínio nos reais.

Ainda com relação à variável *representação figural no enunciado da situação problema,* observamos que ela contribuiu para a desestabilização cognitiva dos alunos a respeito de T_3, no estudo da noção de limite de uma soma infinita de PGs no bloco D. Assim, apenas os alunos G e J apresentaram indícios de passagem do infinito potencial ao atual. Apesar de não termos feito uso de um software de geometria dinâmica, podemos refletir sobre esta possibilidade ao permitir a visualização do preenchimento das áreas na figura inicial (quadrado) com maior precisão. Nesse caso, levantamos seguinte questão: De que forma o uso das TIC poderia contribuir para a desestabilização do teorema-em-ação T_3? Com esse recurso os demais alunos também poderiam transitar do infinito potencial ao atual? Estas não deixam de ser indicações para futuras pesquisas.

A proposta de utilização de uma técnica para calcular o valor limite de uma soma infinita, na qual os conhecimentos dos alunos se desestabilizaram ao observar a possibilidade de uma soma infinita corresponder a um valor real, e as situações questionadas (0,333...=1/3? e 0,999...=1?) com o trabalho da noção de limite de S_n, não foram suficientes para desestabilizar T_3, uma vez que este volta a ser mobilizado noutras situações. Um fato a destacar está quanto às estratégias que poderiam ser mobilizadas pelos alunos diante as indagações dessas duas igualdades numéricas. Neste caso, podemos refletir sobre quais outros métodos são possíveis de explorá-las, além do cálculo da fração geratriz, por limite, o cálculo aproximativo com o uso da calculadora ou de perceber intuitivamente que não há nenhum número maior que 0,9999.... e que seja menor do que 1.

Além disso, quanto ao uso da calculadora verificamos que este instrumento possibilitou aos alunos realizarem excessivas somas no intuito de analisar os cálculos aproximativos contribuindo, inicialmente, para a construção da noção intuitiva de limite.

Entretanto, fortaleceu a persistência do infinito potencial, acarretando, por conseguinte, a estabilidade de T_3, o que nos parece que seu uso tenha colaborado para que os alunos ficassem mais presos à ideia de que o limite não pode ser atingido pela função. De certa maneira, acreditamos que a utilização da calculadora simples, que realiza apenas a operação de truncamento das casas decimais e não o arredondamento delas, tenha contribuído para o fato dos alunos não passarem ao infinito atual ao observarem que à medida que os índices da sequência crescem, a diferença entre o limite e os valores de seus termos tornam-se tão desprezíveis a ponto de levarmos a desconsiderá-la.

Tendo em vista que ao longo de nosso estudo foi priorizado o modelo dinâmico de tratamento da noção de limite, outro questionamento que perpassa este estudo seria se a proposta de um trabalho que partisse do modelo dinâmico e evidenciasse o modelo estático destacado por Robert (1982), no qual se traduz para a linguagem natural a forma estática do limite, considerando linguagens específicas como "intervalos", "vizinhanças", seria viável no ensino médio. Será que essa forma contribuiria para que pudéssemos chegar à noção de limite atual?

No entanto, ao analisarmos como os alunos tratam a operação de passagem ao limite no estudo da soma dos termos de progressões geométricas infinitas, nosso terceiro objetivo específico, encontramos nas produções dos alunos vestígios de alguns elementos analisados nos livros didáticos, como a tendência a utilizar apenas a expressão $\frac{a_1}{1-q}$, a qual foi superada com a análise da noção de limite de S_n proposta neste estudo, bem como a terminologia dúbia "finita e infinita" ao expressarem somas convergentes e divergentes, respectivamente. O obstáculo: "transferir automaticamente os métodos algébricos próprios à manipulação de grandezas finitas às infinitas", destacado por Sierpinska (1985), nos permitiu analisar algumas dificuldades dos alunos em efetuar o cálculo do limite, ao lidarem com a variável n e a noção de infinito. Isso evidencia o fato de que a maioria de nossos alunos não conseguiu identificar que há dois limites a serem considerados, um relativo às somas parciais e outro relativo ao termo q^n, cuja interpretação dessa operação não é trivial. Por conseguinte, podemos concluir que esses fatos mostram que as dificuldades concernentes ao campo da álgebra e a concepção de infinito tornam-se entraves para que os alunos evoluam no tratamento do limite.

De forma geral, após o término da sequência didática, solicitamos que os alunos manifestassem seus conhecimentos sobre a noção de limite. Nesse momento, os alunos K, M, e J mostraram indícios de uma nova desestabilização do teorema-em-ação T_3, como podemos observar nas falas: Aluno M: “a gente só acha um valor pra ela”; Aluno L: “um valor máximo que ela pode alcançar, né? [...] seria até o valor máximo que pode chegar ... mas não necessariamente é esse valor [...]” ou ainda o aluno K:

> Aluno K: **Meu ponto de vista já mudou totalmente por que antes eu pensava que não enchia por que era infinitamente, agora eu descobri que ela vai encher.**
> Pesquisadora: E assim ela deixa de ser infinita?
> Aluno K: **Infinita não, mas ela vai tender para o finito [...]**

Bem como o aluno I, ao expressar que *“chega a 1 ... e não vai ultrapassar por que tem um limite, e até chegar no limite....”.*

Essas observações nos levam a concluir que os alunos iniciaram o processo de construção da noção de limite, chegando muito próximo da ideia do limite atual e que, como havíamos considerado ao final do capítulo 5, eles evoluíram durante a sequência, finalizando-a com indícios de que o limite seria atingido, mas mobilizando o infinito potencial. Assim, mesmo que atribuam significados ao limite, como o uso dos termos “barreira” ou “ser limitado” e mostram terem compreendido esta ideia, não temos elementos suficientes para afirmar se realmente houve uma estabilidade que se caracterize como aprendizagem efetiva. Segundo Vergnaud (1996) a aprendizagem é um longo processo e demanda tempo; além disso, Brousseau (2008) explicita que um conhecimento realmente é aprendido se o aluno consegue aplicá-lo em outras situações não previstas. Isso nos leva a propor que sejam realizados mais trabalhos desta natureza, porém com duração maior de tempo e abarcando novas situações e estratégias didáticas que possam contribuir efetivamente para a aprendizagem da noção de limite e, consequentemente, a desestabilização de T_3.

Diante das considerações aqui apresentadas, e em resposta à nossa questão de pesquisa, concluímos que um estudo que explore a noção de limite gradativamente, como o desenvolvido nesta pesquisa, contribuiu para que os alunos pudessem construir conhecimentos relativos à esta noção. A organização do meio nesta pesquisa nos permitiu ter acesso a esquemas mobilizados pelos alunos, uma vez que as retroações do meio e as devidas institucionalizações contribuíram para que eles avaliassem suas estratégias e que, refletindo sobre elas, passassem por situações adidáticas de ação, formulação e validação. A contribuição da atividade da linguagem como função de representação e comunicação também favoreceu a articulação entre significados e significantes presentes no estudo do tema, uma vez que é por meio deles que foi possível os alunos conjecturarem, analisarem e tratarem a noção de limite de progressões geométricas. Isso nos mostra o quanto os quadros teóricos adotados em nossa pesquisa foram pertinentes e complementaram um ao outro, isto é, a TSD nos permitiu organizar um trabalho didático, de forma que o aluno pudesse agir sobre a construção de seu próprio conhecimento e subjacente a ela, a TCC nos fornece elementos importantes para a análise cognitiva do sujeito-em-ação, permitindo-nos identificar os esquemas mobilizados pelos alunos em situação de aprendizagem.

Nesta pesquisa, demos início a uma análise das produções dos alunos, procurando identificar nelas os quatro componentes de um esquema (*os objetivos* e *antecipações*, *regras em ação*, as *inferências* e os *invariantes operatórios*). Porém, observamos que ainda há uma vasta possibilidade de exploração do conceito de *esquema* em um objeto de estudo, no sentido de identificá-lo e explicitá-lo durante as análises dos dados obtidos. Esta é uma possibilidade de continuidade desta pesquisa.

Além do mais, ao identificarmos as dificuldades que os alunos manifestaram quanto à potenciação com números fracionários, como foi o caso de G, e as antecipações dos valores das razões, ao observarem apenas a regularidade existente entre os denominadores das frações, nos leva a considerar que as deficiências dos alunos com os conceitos básicos apresentam-se como uma perspectiva de resgatar os conhecimentos inerentes ao campo de estudo; uma vez que compreendendo-os podem viabilizar o objetivo maior: a construção da noção de limite. Como ressalta Vergnaud (1996), um conceito não está isolado e sim, em estreita conexão com outros conceitos e, é nesse intuito, que podemos inferir a necessidade de trabalhos que possibilitem o envolvimento dos alunos, estimulando a criatividade e a produção de sentido e significados em diversas situações.

Por mais que esta pesquisa se restrinja a uma intervenção de ensino para a análise da aprendizagem da noção de limite, não podemos deixar de observar que a mesma perpassa questões vinculadas à história da educação matemática, aos obstáculos epistemológicos identificados na história da matemática, bem como uma visão curricular concernente à seleção e sistematização de um conteúdo escolar, no caso as PGs, junto à noção de limite. Assim, podemos nos indagar, por exemplo, sobre a presença do estudo de PGs na matemática escolar brasileira, tratando uma soma infinita por meio de limites. Seria esta uma abordagem advinda da estruturação da aritmética de Bézout no século XIX?

Além do mais, sugerimos a possibilidade de se trabalhar com a noção de limite, primeiramente, no estudo de sequências numéricas, o que permitiria explorar teoremas-em-ação do tipo T_1 - os termos de uma PG (sequência numérica) apenas se aproximam cada vez mais de certo valor, sem atingi-lo, uma vez que este é do tipo verdadeiro no estudo de PG e, falso, para outros tipos de sequências, como em uma sequência constante. Em nosso estudo, as produções dos alunos nos permitiram explorar situações que envolvessem o teorema-em-ação T_3 e, no entanto, não nos deram evidências da mobilização dos teoremas-em-ação T_2 (*O limite da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica infinita é o mesmo que o limite do termo geral desta PG, isto é, o valor limite é zero*) e T_4 (*Uma soma infinita tende ao infinito*), os quais tínhamos como hipótese. Assim, sugerimos como continuidade a esta pesquisa a proposta de outras situações-problema que viabilizem o trabalho com esses teoremas-em-ação como, por exemplo, T_2, já que a condição necessária, porém, não suficiente para que uma série seja convergente é que o termo geral convirja para zero.

Enfim, esperamos que esta pesquisa tenha uma pequena parcela de contribuição para a Educação Matemática, principalmente no que tange a um elemento conceitual do ensino superior que poderia ter início na educação básica, cuja matemática escolar carece de mais investimentos e pesquisas.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito. Um obstáculo no estudo da matemática**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação de Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, Michèle. **Ingénierie didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 1988.

ÁVILA, Geraldo**. Análise Matemática para Licenciatura**. 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2006.

BISOGNIN, Eleni., BISOGNIN, Vanilde., FERREIRA, Marcio Violante., **Convergência de sequências e séries numéricas por meio da resolução de problemas**. UNIFRA: 2007. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/relatos.html > Acesso em: 19 jan. 2011.

BOYER, Carl Bejamin. **História da matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda. 1981.

BRASIL a, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL b, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2012: Matemática. Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. **Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio**: PNLEM/2009. Brasília: MEC, 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas.** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, Guy. **Théorie des situations didactiques**, RDM, Pensée Sauvage, Grenoble, 1998.

CAMPOS, Dilhermando Ferreira. **Debates na historiografia da matemática e a história do surgimento do cálculo infinitesimal segundo Carl Boyer.** 2006. Dissertação (Mestrado em História) - Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas - UFMG, Belo Horizonte.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2010.

CELESTINO, Marcos Roberto. **"Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do Ensino Superior**". 2008. Tese (Doutorado em Educação de Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles** . 1983. Tese de doutorado - Universidade de Grenoble.1983.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática. 1.ed. São Paulo: Ática, 2008.v. único.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FRANCHI, Anna. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org.) **Educação Matemática: uma nova introdução**. São Paulo: EDUC, 2008. p. 189-229.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org.) **Educação Matemática: uma nova introdução**. São Paulo: EDUC, 2008. p. 77-112.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GHEDAMSI, Imène. **La transition lycée université en analyse: mise en evidence de facteurs qui contribuent à accroître les ruptures**: Le cas de la notion de limite.
Tese de Doutorado, Universite de TUNIS, 2003.

GIOVANNI, José Ruy.; BONJORNO, José Roberto. **Matemática completa.** 2.ed. São Paulo: FTD, 2005. (Coleção Matemática Completa). 1ª série Matemática. Ensino Médio.

GONÇALVES, Andrea Gomes Nazuto. **Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**: vol 1. 12 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

LINS, Romulo Campos; GIMENES, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOCHHEAD, Jack; MESTRE, José, P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, Arthur F; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (Org.) **Educação Matemática: uma nova Introdução**. São Paulo: EDUC, 2008. p. 233-248.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Angela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 28-29.

MODANEZ, Leila. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação de Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

MONTEIRO, Lúcia Cristina Silveira. **O desenvolvimento das Metáforas do Conceito de Infinito na Educação Matemática**. 2003. Dissertação (Mestrado em psicologia cognitiva) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação matemática do professor**: Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 78-100.

MOREIRA, Marcos Antonio. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2002.

NUNES, Marly Nardi Ferraz. **Sequências Numéricas: um estudo da convergência através de atividades.** 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

ORTIZ, José Ramón. **El concepto de infinito**. Venezuela: Associação Matemática Venezolana. Boletin v.1, n. 2, p. 59-81, 1994.

REIS, Frederico da Silva. **A Tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise:a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ROBERT, Aline. **L' acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.** Recherches en Didactique des Mathématiques. vol. 3, n. 3, p. 307- 341, 1982.

SANTOS, Milena Gonçalves. **Um estudo sobre a convergência de sequências numéricas com alunos que já tiveram contato com a noção de limite**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica, São Paulo.

SIERPINSKA, Anna. **Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite**. RDM, vol. 6, n.1, p. 5-67, 1985.

SILVA, Allano; LOUREIRO, Cristina; VELOSO, M. Graciosa. **Calculadoras na Educação Matemática**: Actividades. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2 ed, out. 1990.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matematica: ensino médio:** 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v.1.

USISKIN, Zalman. O Que É Álgebra Da Escola Média? In: COXFORD, Arthur F; SHULTE, Albert P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. (Orgs). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p.13-35.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.