UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EDILSON DE MOURA

O CONCEITO FRACTAL E SUA PRESENÇA PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CAMPO GRANDE

2011

EDILSON DE MOURA

O CONCEITO FRACTAL E SUA PRESENÇA PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Pádua Machado

CAMPO GRANDE

2011

Ficha Catalográfica

A dissertação intitulada "O CONCEITO FRACTAL E SUA PRESENÇA PEDAGÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA" apresentada por EDILSON DE MOURA, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, foi aprovada.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antônio Pádua Machado (orientador/UFMS)

Prof. Dr. Celso Correia de Souza (Anhanguera-Uniderp)

Profª. Drª. Patrícia Sândalo Pereira (UFMS)

Campo Grande-MS, 18 de agosto de 2011.

A minha esposa Adriana Alves de Moura, e aos meus pais Lourenço Ribeiro de Moura e Elódia Luiza de Moura, que sempre me incentivaram na realização de meus ideais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço e louvo a Deus por minha esposa, pais, mestres e amigos que muito me ajudaram na conclusão do Mestrado em Educação Matemática. "Em tudo [dou] dai graças; porque esta é a vontade de Deus em Cristo Jesus [...]" (I Tessalonicenses 5:18). Por isso, eu te agradeço Senhor e também te peço que nunca deixes a minha alma se esquecer de nenhum dos teus benefícios.

A minha esposa Adriana A. de Moura. Teu valor muito excede ao de muitas pedras preciosas, e em ti, o meu coração se alegra, pois só me tens feito bem, e não mal, todos os dias de nossa união, sempre trabalhando com boa vontade e amor.

Aos meus pais Lourenço e Elódia que me educaram e me amaram e, por tudo que fizeram, honro-vos.

Ao meu preceptor Antônio Pádua Machado que conduziu de forma ética, séria e honesta a minha formação como um Educador em Matemática. Mestre, muito obrigado.

Aos meus amigos e amigas, que além de terem compreendido o meu afastamento, ajudaram-me muitas vezes de forma direta ou indireta, considero-vos, pois, meus irmãos, porque o amigo a gente ama em todo tempo, mas é no momento da angústia que descobrimos um irmão.

A todos os docentes e discentes do programa de Mestrado, que construíram e, por vezes, "destruíram" o nosso projeto, sempre com as melhores intenções.

Por fim, minha efusiva gratidão a todos, até mesmo aos céticos que, ao contemplarem o nosso trabalho, podem não lhe dar o devido valor ou importância, pois estão encastelados em suas próprias verdades.

A visão simplificada diria: a parte está no todo. A visão complexa diz: não só a parte está no todo; o todo está no interior da parte que está no interior do todo!

Edgar Morin, 1986.

RESUMO

Este texto trata do Estudo de Caso realizado sobre “O Conceito Fractal e sua Presença Pedagógica na Educação Básica”. O objeto de estudo é o Conceito Fractal, que é constitutivo do conhecimento matemático, no exame de como vem se estabelecendo no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A fim de organizar um conhecimento pedagógico acerca do tema Fractal, procurou-se estabelecer um diálogo com a literatura existente, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, que orientam a inclusão do estudo desse tema no currículo de Matemática; estudos acadêmicos que vêm explorando o assunto por enfoques conceituais e pedagógicos e que visam, também, estabelecer esse tema na matemática escolar; livros científicos que vêm consagrando o tema na literatura matemática; e livros didáticos da Educação Básica. O conceito fractal foi estudado e descrito considerando os aspectos geométrico, topológico e o da linguagem. Para identificar a presença do conceito fractal na Educação Básica, foram escolhidos livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático, dos anos 2011 e 2012, que apresentavam mais lições sobre fractais. Após a descrição do desenvolvimento das respectivas lições, efetuou-se a análise das ocorrências dos objetos de aprendizagem de conceitos, classificados como fatos particulares, classes, relações e estruturas, critérios epistemológicos orientados por François Marie Gérard e Xavier Roegiers, em *Conceber e Avaliar Manuais Escolares* (1998), referência permanente nas orientações do Plano Nacional. Esses procedimentos possibilitaram constatar que, na maioria das situações analisadas, o tema fractal é vinculado às figuras geométricas e, em alguns exemplares, observa-se uma preferência por atividades similares aos temas convencionais da matemática, sem uma exploração maior do conceito fractal. Os textos apresentados nos livros didáticos ainda não expõem uma organização sistemática dos assuntos dos fractais, como fazem com os temas da matemática convencional.

Palavras-chave: Dimensão fractal. Educação básica. Fractais. Geometria fractal.

ABSTRACT

This research deals with a case study based on “Fractal Concept and its Pedagogical Presence on Basic Education”. The main objective is to study the “Fractal Concept”, which is a component of mathematical knowledge, analyzing how this concept has been established in elementary and high school. In order to organize a pedagogical reasoning about Fractal, a review on existent literature was developed, analyzing the National Curricular Parameters, which orient approaches of this theme in mathematical curriculum; academic studies that have been exploiting the subject by conceptual and pedagogical focus, and aim to introduce this theme in schools; scientific books that have been reinforcing the topic in mathematical literature; and school books adopted on Basic Education. Fractal was studied and described according to geometrical, topological and language aspects. In order to identify the presence of fractal on Basic Education, I have selected school books approved by School Book National Plan 2011/2012, which presented more lessons on fractal. After describing the development of these occurrences, I analyzed the occurrences of learning objects focused on concepts and criteria, classified as specific facts, categories, relations and structures; epistemological criteria oriented by François Marie Gérard and Xavier Roegiers, in Design and Evaluate School Manuals (1998), a permanent reference, adopted according to School Book National Plan. In most of the situations, those procedures indicated that fractal is related to geometrical shapes, and in some book copies there is a tendency to apply activities that are similar to the most conventional themes in Mathematics, rather than exploit the fractal concept. Texts in school books have still not shown a systematic organization of subjects related to fractal, as it has been done with conventional Mathematics topics.

Keywords: Fractal Dimension. Basic Education. Fractal. Fractal Geometry.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dada a frequência do tema Fractal em revistas, livros e sites científicos ou de informação, é válido considerar que os fractais podem se tornar um objeto de ensino e de aprendizagem da Matemática, com possibilidades e potencialidades, além da visualização de um estilo diferente de formas geométricas.

Amplos o bastante para traduzir resistências e desconfianças, principalmente dos matemáticos, os Fractais podem ser incorporados aos conteúdos já existentes da matemática escolar, tornando o trabalho didático mais interessante e com nuances de modernidade.

O objeto deste texto é a descrição do Estudo de Caso realizado com o objetivo de organizar um conhecimento pedagógico acerca de *O Conceito Fractal e Sua Presença Pedagógica na Educação Básica*. Buscou-se examinar e descrever o "Conceito Fractal" como constitutivo de conhecimento da Matemática, no exame de como vem se estabelecendo no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Fractal, como está tratado neste texto, é um conceito construído, ou que vem sendo construído, sob as normas científicas da Matemática, a partir de observações e de noções desenvolvidas sobre formas da natureza.

Com o objetivo de organizar um conhecimento pedagógico acerca desse assunto, fez-se necessária a constituição de um cenário investigativo em torno do conceito e da sua presença pedagógica, resultando, assim, na questão-problema da investigação: *Como o Conceito Fractal vem se Estabelecendo na Educação Básica?*

Esse objeto de estudo está vinculado ao campo de pesquisa da Educação Matemática, por meio da temática de investigação do processo "ensino-aprendizagem da Matemática". Desde 1994, Jeremy Kilpatrick, professor do Instituto de Educação em Matemática da Universidade da Geórgia, Estados Unidos, identificou os fractais como um "novo conhecimento" e uma nova tendência dentro do processo de ensino-aprendizagem, pois para ele, "[...] à medida que surgem novos conhecimentos e novas tecnologias e aplicações da matemática, têm surgido pesquisas sobre como estes poderiam ser ensinados e/ou aprendidos na escola. Um exemplo disso são os fractais [...]" (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 42).

O tema Fractal conta com pouco mais de 35 anos de desenvolvimento, sendo considerado um tema novo na Matemática e, por isso, tem se tornado alvo de críticas, desconfianças e de resistências. “O milagre é que a geometria fractal tenha sobrevivido aos males de infância que devastam as iniciativas intelectuais, particularmente aquelas que assumem um tom de síntese.” (MANDELBROT, 1998, p. 207). Essa resistência não é exclusividade da geometria fractal, exemplo disso são os números negativos, irracionais e imaginários.

Mandelbrot (1998), que iniciou o uso da palavra “Fractal” para designar a ideia, diz que “Geometria Fractal é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau e em todas as escalas”. Alves (2007, p. xxxiii), em uma síntese matemática, diz que “Fractal é uma forma composta de partes que de algum modo são semelhantes ao todo.” Associa-se a forma fractal a três noções: autossemelhança, complexidade infinita e dimensão não-inteira. Essas noções ficam evidentes e mais claras quando tratamos de sequências geométricas. A autossemelhança provém da semelhança entre si dos elementos que vão compondo as formas até a forma fractal. A complexidade infinita diz respeito à complexidade das formas que convergem à forma fractal no mesmo grau e em todas as escalas. A dimensão não-inteira é a noção que, segundo Alves (2007, p. xxxv), diz respeito à medida que um determinado conjunto ocupa no espaço natural a que pertence, como o espaço em uma reta, em um plano ou no espaço volumoso. Para Sallum (2005), a dimensão não-inteira traz o nome fractal.

Em relação à aceitação ou não da geometria fractal no meio acadêmico, o matemático polonês falecido em 14 de outubro de 2010, Mandelbrot (1998, p. 207-208) afirma que “De uma forma mais geral, a geometria fractal é largamente aceita, [...] Não obstante, ainda não se tornou “acadêmica”, mantendo uma diversidade que é intrínseca, rara, divertida e importante.”

O fato de a geometria fractal não ser acadêmica e também ser considerada muito nova não diminui a sua importância, pelo contrário, pois é sabido que “[...] Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática [...]” (BRASIL, 1998, p. 25), e é justamente por isso, que a geometria fractal pode contribuir com a visão de que a Matemática não é um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro. Tudo nos mostra que os fractais

> [...] Justamente por representar a matemática do futuro, é muito mais interessante para o jovem. Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê em TV e nos computadores. (D'AMBROSIO, 1996, p. 59).

O argumento de que a Matemática é uma ciência viva está apoiado na multiplicidade das teorias matemáticas, que

> [...] amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos que envolvem o acaso – a Estatística e a probabilidade – e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos fractais. (BRASIL, 1998, p. 25).

Devido a essa multiplicidade

> Pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama matemática discreta e igualmente o que se chamavam "casos patológicos", desde a não-linearidade até a teoria do caos, fractais, *fuzzies*, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica. [...] (D'AMBROSIO, 1996, p. 59).

Pouco a pouco, as ampliações das teorias matemáticas vão inspirando novas pesquisas no intuito de transpor o *saber científico* para o *saber a ensinar* e, segundo Kilpatrick (1998), a geometria fractal está inserida nesse contexto. Constatou-se um fato interessante: esse tema é parte integrante das Diretrizes Curriculares para Educação do Estado do Paraná, as quais orientam o estudo da geometria fractal; orientam, ainda, que esse estudo deve colaborar para que o aluno no Ensino Fundamental compreenda noções de geometrias não-euclidianas: "[...] geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica [...] e noção de geometria dos fractais." (PARANÁ, 2008, p. 56).

Destacam, também, que

> [...] no Ensino Médio se aprofunda os estudos das Noções de Geometrias não-euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica. Na geometria dos Fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, [...] (PARANÁ, 2008, p. 57).

Além do relato dos pontos de vista dos pesquisadores em Educação Matemática, como Ubiratan D'Ambrosio, em *Educação Matemática da Teoria à Prática* (1996), e Jeremy Kilpatrick, *Investigación en Educación Matemática: su Historia y Algunos Temas de*

Actualidad (1998), das orientações de documentos oficiais da Secretaria de Educação Básica brasileira como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (1998), e o documento oficial do Estado do Paraná, *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica (2008)*, foram também encontradas várias pesquisas acadêmicas que utilizam a teoria fractal em diversos campos do conhecimento como, por exemplo: a) Medicina: Marcelo Bezerra de Melo de Mendonça e outros, em *Análise Fractal da Vasculatura Retínica: Métodos de Segmentação e de Cálculo Dimensional* (2007); b) Desenvolvimento Urbano: Fabiano José Arcadio Sombreira, em *A Lógica da Diversidade: Complexidade e Dinâmica em Assentamentos Espontâneos* (2003*)*; c) Biologia: F. M. S. Angelis-Reis e W. S. Romanha, em a *Dimensão Fractal como um Parâmetro no Estudo do Granuloma na Esquistossomíase Experimental* (2006).

O estudo dos documentos oficiais e também das pesquisas acadêmicas em Educação Matemática confirmaram que o conceito fractal, objeto de estudo desta pesquisa, é de natureza pragmática, ou seja, os fractais estão relacionados à melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem.

As incertezas que pairavam sobre a importância desse estudo e os primeiros indícios da presença dos fractais nos livros didáticos estimularam a busca por respostas que pudessem ser mais reveladoras. A participação no II Seminário Internacional & Educação Matemática, em 2009, trouxe a oportunidade de compartilhar essa inquietação com o palestrante Ubiratan D'Ambrosio, professor e doutor em matemática, o qual expôs alguns argumentos favoráveis à continuidade de estudos sobre esse assunto.

Visto a presença do tema Fractal em diferentes estudos, publicações e até mesmo em orientações curriculares oficiais e a fim de atingir o objetivo desta pesquisa que é o de organizar um conhecimento pedagógico acerca desse assunto, procurou-se identificar, por meio de pesquisas em livros didáticos, a presença do conceito Fractal na Educação Básica, bem como o modo de apresentação e de desenvolvimento desse assunto.

Buscou-se, inicialmente, identificar a presença do conceito fractal na Educação Básica por meio da revisão acadêmica, a fim de organizar uma unidade de conhecimento ou essência compreensiva desenvolvida nos estudos acadêmicos voltados para a Educação Matemática. Em seguida, foram escolhidos livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), do Ministério da Educação brasileiro, anos 2011 e 2012, que apresentavam mais lições sobre Fractais. Após a descrição do desenvolvimento dado às respectivas lições sobre Fractais, efetuou-se a análise das ocorrências dos objetos de aprendizagem de conceitos, classificados como *fatos particulares, classes, relações e estruturas*, critérios epistemológicos orientados por François Marie Gérard e Xavier Roegiers, em *Conceber e Avaliar Manuais Escolares* (1998), referência permanente dos *Guias de Livros Didático*s, do PNLD, desde 2004. Na mesma organização teórica, procurou-se, também, avaliar e descrever as situações motivadoras da aprendizagem, que dizem respeito às articulações necessárias do conceito específico com situações de contextualização, favoráveis às construções conceituais. Vale destacar que fatos particulares são situações naturais em que o objeto aparece em nosso meio; classes são distintas constituições do objeto, que no caso fractal, podem ser numéricos, geométricos e algébricos; relações, quanto às operações em que os fractais aparecem; e estruturas, quanto ao número de relações do objeto.

O estudo do conceito fractal foi realizado levando-se em conta três aspectos: o topológico, o geométrico e o da linguagem. As noções topológicas que se buscou desenvolver se fazem necessárias porque há a classe dos fractais algébricos, construídos mediante teorias topológicas, que são aqueles obtidos por "sistemas de funções iteradas", onde é utilizado o estudo de métricas, do espaço métrico e da métrica de Hausdorff. Já o aspecto geométrico fez-se necessário porque apresenta grandes possibilidades da Teoria Fractal para o ensino da Matemática na Educação Básica e o aspecto da linguagem, porque a geometria fractal também é uma linguagem.

A partir de leituras de Pedro da Ponte (2006) e de Yin (2010); e devido a natureza do objeto de pesquisa, adotou-se a estratégia de investigação Estudo de Caso. Essa estratégia, que não se impõe como "método", mas que delineia uma organização científica para o estudo, vem favorecendo na compreensão de estudos desta orientação, como também na compreensão do próprio objeto.

Segundo Pedro da Ponte (2006), Estudos de Casos podem ser exploratórios, analíticos, descritivos ou de outra modalidade. Não têm que ser exclusivos de uma ou outra modalidade, mas são particularísticos, no sentido que buscam constituir o conhecimento universal a partir dos casos particulares, como neste estudo intitulado *O Conceito Fractal e sua Presença Pedagógica na Educação Básica*. Ao constituí-lo assim, concebe-se no Estudo de Caso a relação particular do pesquisador com seu objeto, cujo conhecimento científico acarretado da pesquisa tem valor universal.

Mediante as características da estratégia Estudo de Caso, esta pesquisa é considerada um estudo essencialmente descritivo, visto que se procurou conhecer, de modo descritivo e conjugado, a constituição matemática do conceito fractal, bem como a realidade pedagógica desse conceito no ensino da Educação Básica. Investigou-se, portanto, a realidade de uma situação pedagógica que veio se manifestando na descrição do conhecimento.

Como o objetivo desta pesquisa é organizar o conhecimento sobre o tratamento dispensado pelos livros didáticos e pelos estudos acadêmicos ao assunto fractal, procurou-se estabelecer um diálogo com a literatura existente, visando contribuir na formação de futuras hipóteses de outros estudos sobre o conceito fractal e sua presença pedagógica. Esta pesquisa foi tratada como bibliográfica e documentária porque foi realizada por meio de leituras diversas, em produções acadêmicas e livros escolares que tratam do tema em referência.

Dada a importância e a complexidade do tema, este trabalho foi organizado em 5 capítulos: sendo o primeiro a *Introdução*; no segundo, *O Conceito Factral*, apresentou-se uma das principais características do conceito fractal que é a dimensão fractal. Buscando atribuir significados ao valor não-inteiro da dimensão, foram desenvolvidas e descritas atividades que podem ser aplicadas na Educação Básica; no terceiro, a *Revisão Acadêmica* que possibilitou uma visualização da presença pedagógica do conceito fractal, fornecendo, assim, um panorama geral de como ele vem se estabelecendo como objeto de ensino e, também, uma análise da importância do seu estudo para a compreensão de homem e de mundo, alinhados com o pensamento sistêmico; no quarto, em *A Presença Pedagógica dos Fractais em Livros Didáticos*, foram expostas as análises de atividades envolvendo fractais, apresentadas nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, aprovados pelo PNLD de 2011 e 2012 respectivamente, expondo, ainda, algumas conclusões provenientes desta investigação; e por último *Uma Síntese Conclusiva.*

Enfim, a organização desse conhecimento pedagógico acerca do conceito Fractal poderá favorecer mais reflexões sobre o tema e, doravante, aliada a novas pesquisas, contribuir de forma efetiva para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática.

2 O CONCEITO FRACTAL

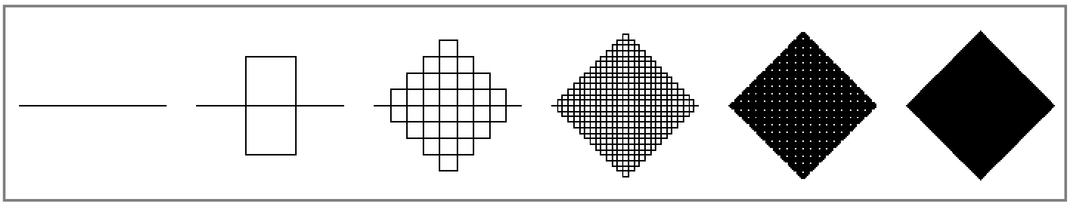
Em diferentes pesquisas, como em Alves (2007), é considerado que o conceito de Fractal é simples nas primeiras noções, como naquelas que aparecem ilustradas nos manuais do Ensino Fundamental, mas "não é fácil defini-lo de modo formal". Segundo a autora, a ideia é formada e é mais útil quando entendida de forma abrangente, por muitas imagens e contextos. Portanto, como anunciada na parte introdutória deste texto, o conceito fractal foi abordado pelos aspectos Geométrico, Topológico e da Linguagem.

2.1 O QUE SÃO FRACTAIS

Fractal é um conceito da Matemática que é expresso com a ideia de "[...] uma forma composta de partes que de algum modo são semelhantes ao todo." (ALVES, 2007, p. xxxiii). Uma forma fractal pode estar presente como objeto geométrico, como objeto numérico ou como objeto algébrico, dependendo da representação sobre a qual a definimos.

Mandelbrot (1998, p. 207), ao escrever a teoria fractal, afirma que a "Geometria Fractal é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau e em todas as escalas."

FIGURA 1 - Curva de Peano



Fonte: Alves (2007, p. 42).

Na Figura 1, o quadrado é um fractal. Essa afirmação assenta como verdadeira quando é justificada mediante o procedimento iterativo da curva de Peano[1]. Pode-se compreender que essa curva preenche todo o espaço do plano compreendido no quadrado euclidiano. Para se ter uma ideia desse fato, basta considerar um sistema de eixos cartesianos com origem no início da curva de Peano e o eixo das abscissas dado pelo próprio segmento. Na iteração de ordem k, a curva estará cobrindo pontos da superfície com abscissas dadas por racionais de denominadores 3^k decrescendo em $1/3$ na ordem seguinte. Fato semelhante pode ser visto para ordenadas. Em consequência, a superfície de cada quadradinho gerado pela curva tende a zero. Isso induz à confirmação de que a curva cobre toda a superfície. Neste capítulo serão descritas formas de se calcular o valor da dimensão desse objeto fractal, que é dois. O valor da dimensão fractal, em geral, é um número não-inteiro, mas se for um número inteiro, o todo será irregular ou com detalhes.

Sobreira (2003) levanta questionamentos sobre a utilidade de se calcular a dimensão não-inteira de um objeto, mais especificamente, da aplicabilidade ou significado desses números para um urbanista, ou seja, qual o significado que se deve atribuir à informação de que a dimensão fractal de malha (d_m) da cidade americana de Boston é *1,69*, enquanto da cidade de Budapest, capital e a maior cidade da Hungria, d_m é próxima de *1,72*. Sobreira (2003, p. 140) afirma que há autores que se utilizam dessas informações para definir postulados estéticos:

> [...] as melhores criações (sejam nas artes plásticas, na arquitetura ou urbanismo) seriam aquelas compostas por elementos nas mais diversas escalas. O que nos agradaria nos edifícios ou em uma cidade seria a mistura de regularidade e surpresa [...].

Mandelbrot (1998, p. 207), destacou a autossemelhança como uma das principais noções, ao afirmar que a “Geometria Fractal é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau em todas as escalas”. A autossimilaridade pode ser: estritamente autossemelhante (determinística), ou autossemelhança aproximada, ou ainda, autossemelhança estatística (não-determinística). As baías, por exemplo, são estatisticamente semelhantes às linhas litorâneas e

---

[1] Para se construir a curva de Peano, começa-se, por exemplo, com um segmento de reta unitária e em seguida colocamos os nove segmentos de comprimento 1/3. Aplica-se o mesmo procedimento para os nove segmentos e assim infinitas vezes.

a rugosidade das cordilheiras está reproduzida estatisticamente num simples pedaço de rocha. A autossimilaridade não ocorre em todos os fractais, nem em todas as partes de um fractal.

As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, a casca das árvores não é lisa e os relâmpagos não viajam em linha reta (MANDELBROT, 1983 apud ALVES, 2007). Nessas afirmações repousa a noção de irregularidade, pois o autor buscou mostrar exemplos de objetos naturais que não são regulares e que, se observados bem, possuem muitos graus de detalhes e reentrâncias; o grau de detalhamento se mostra na medida em que se aproxima do objeto, e isso tem a ver com a noção de escala. Para tornar mais compreensivas as noções de irregularidade e escala, Mandelbrot (1998) pergunta: “Quanto mede, afinal, a costa da Bretanha?”

Mandelbrot (1998, p. 30) ilustra a noção de escala sugerindo que se imagine

> [...] um homem que caminhe ao longo da costa, percorrendo o caminho mais curto possível, garantindo, contudo, que nunca se afaste da linha costeira mais do que uma dada distância η. Depois repete-se o processo, tornando a distância máxima do homem a costa cada vez menor. Em seguida substitui-se o nosso homem por um rato, depois por uma formiga e assim por diante. Mais uma vez, quanto mais próximo o animal se mantiver da costa, mais longa será, inevitavelmente, a distância a percorrer.

Com essa ilustração, o autor sugere que a extensão do objeto depende do instrumento com o qual é medido. *Mas pode um objeto ter extensão relativa?* A resposta a esse questionamento vai além da aparente obviedade, pois está ligada à maneira com a qual se olham os sistemas naturais e humanos. Ressalta-se que existem diferentes visões de homem, de mundo, de conhecimento e de ciência que, neste caso, constitui a diferença entre dois paradigmas: o paradigma tradicional da ciência e o que representa uma novidade ao paradigma da ciência, chamado de novo paradigma da ciência. No paradigma tradicional,

> [...] o destaque é dado à separação sujeito/objeto, à representação do espaço físico como sendo apenas o euclidiano, ao cálculo exato, priorizando, portanto, os aspectos quantitativos da Matemática. [...] Na sistêmica, a metáfora que a expressa é a da *rede*, que diz da impossibilidade de separar o sujeito que conhece do objeto conhecido e da inexistência de uma hierarquia de *a prioris*. (BAIER, 2005, p. 5, grifo do autor).

A fim de que se possa avançar na construção de outra noção, a dimensão fractal, é preciso ter depreendido estas duas características dos fractais: a irregularidade e a escala.

Antes do estudo da dimensão fractal, é necessário retornar à pergunta de Mandelbrot (1998); “Quanto mede, afinal, a costa da Bretanha?” Se a costa for considerada um objeto fractal, a pergunta está inadequada, por isso, será colocada nos seguintes termos: Quanto irregular é a costa da Bretanha? ou Quanto é a sua fragmentação? Dita dessas maneiras, agora há condições de prosseguir no estudo; para isso, precisa-se compreender um pouco a principal característica de todo objeto fractal, a dimensão fractal.

A dimensão fractal é uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação. “Um fato muito importante: ao contrário dos números dimensionais correntes, a dimensão fractal pode muito bem ser uma fração simples, como 1/2 ou 5/3, ou mesmo um número irracional, como log 4/log 3 $\approx$ 1,2618... ou π.” (MANDELBROT, 1998, p. 14). Portanto, as linhas costeiras são exemplos de fractais naturais que não são compostos por linhas retas e curvas suaves. “[...] os objetos fractais são fragmentados e irregulares, compostos por sucessões de subestruturas, que são notadas à medida que observamos o objeto de forma mais e mais detalhada.” (FRANKHAUSER, 1997 apud SOBREIRA, 2003, p. 58).

Em suma, o conceito fractal está relacionado com as noções de autossimilaridade, escala, irregularidade, e com a principal de todo objeto fractal, a dimensão fractal.

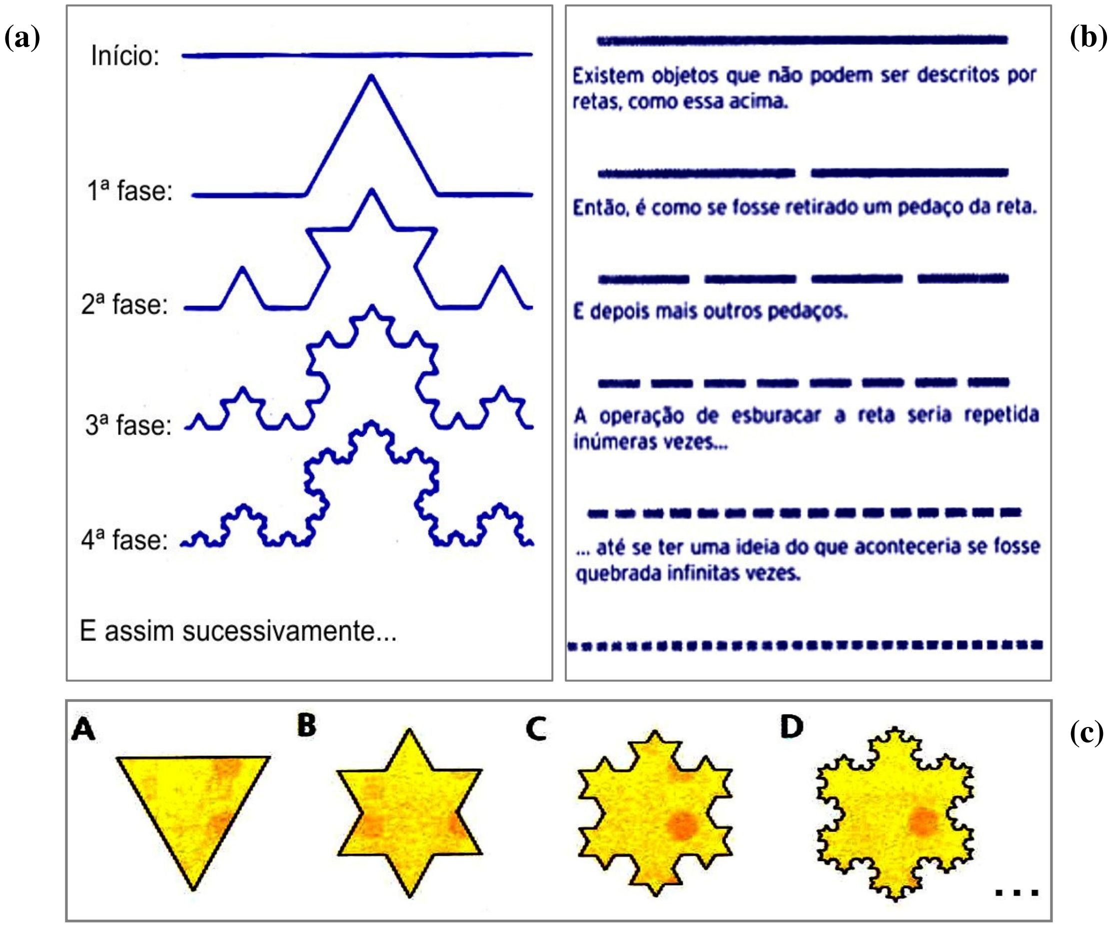
2.2 DO ASPECTO GEOMÉTRICO

A produção geométrica está, em geral, à frente de toda a atividade compreensiva da teoria fractal. Os chamados *fatos particulares*, tomados de Gérard e Roegiers (1998), como um dos objetos de aprendizagem dos conceitos são, para o estudo dos fractais na Educação Básica, as entidades materiais que servem de inspiração para o assunto fractal. A forma das nuvens, a linha do litoral, a formação das folhas, a radiografia do pulmão ganham atenção e são levadas a certas formas geométricas que lhes competem, como a curva de Koch e o diagrama do pulmão de Mandelbrot, resultando, daí, os conteúdos da Geometria Fractal. Essa geometria, como de regra na formação dos conteúdos da Matemática, ganha o estatuto de teoria a partir da abstração como compreensão. No estudo de Machado (2001), esses objetos da Matemática são da abstração, sem existência separada da existência dos objetos empíricos e que a abstração, na relação entre as instâncias, é exatamente aquilo que nos é necessário ao ato da significação.

Segundo Alves (2007), a partir da segunda metade do século XIX é que começaram aparecer os objetos, hoje tidos como objetos fractais. O triângulo de Sierpinski, o conjunto de Cantor, a curva de Peano, a curva de Koch e floco de neve vêm formando uma grande família de formas geométricas, constituindo o cenário visível da Geometria Fractal e com presença marcante nos variados estudos acadêmicos. Em meio a esta família de formas é que a grande expressão teórica de fractal, como uma "forma", faz sentido, assim como as noções de autossimilaridade, de complexidade infinita e de dimensão fractal.

Serão descritos alguns fractais geométricos presentes em atividades dos livros didáticos, que serão analisadas em capítulo posterior.

FIGURA 2 - Objetos fractais: a) curva de Koch; b) conjunto de Cantor; c) floco de neve de Koch



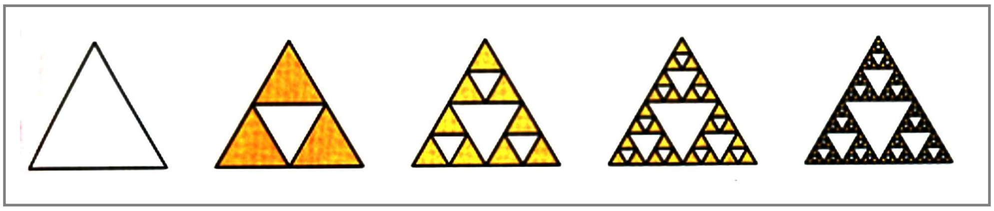
Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 246) e Reis e Trovon (2009b, p. 9).

A curva de Koch é uma forma geométrica em que nela não há tangente. Para obtê-la, parte-se de um segmento de reta. Depois é dividido em três segmentos iguais e substituído o segmento central por dois outros segmentos que formariam um triângulo equilátero com o segmento central que foi retirado. Desta maneira, obtém-se quatro segmentos idênticos, em que serão realizados os mesmos procedimentos com cada um deles, e assim sucessivamente. Na realidade, o limite do qual se aproxima a Figura 2a é chamada de curva de Koch.

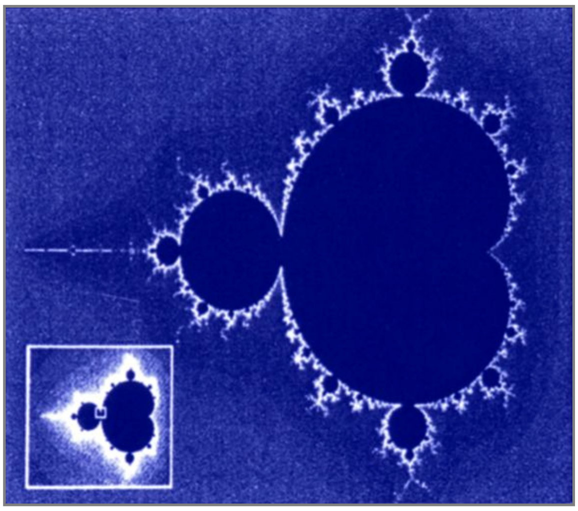
O conjunto de Cantor, ou também conhecido como Poeira de Cantor, é uma forma geométrica obtida a partir de um segmento de reta. Primeiro, divide-se esse segmento em três partes iguais e retira-se o segmento central. Repetem-se esses mesmos procedimentos com os dois segmentos restantes, e assim sucessivamente (FIGURA 2b).

O floco de neve de Koch é gerado inicialmente com um triângulo equilátero de lados unitários; em seguida, divide-se em três cada um dos segmentos unitários, constrói-se um triângulo equilátero no terço do meio e, finalmente, retira-se a base de cada um dos novos triângulos equiláteros. Continuando esse processo indefinidamente, obtém-se uma curva limite chamada de floco de neve, que além de não ter tangente em nenhum dos seus pontos, apresenta um comprimento infinito (FIGURA 2c).

FIGURA 3 - Formas geométricas: a) triângulo de Sierpinski; b) conjunto de Mandelbrot (a figura maior corresponde a uma ampliação detalhada da figura menor)



(a)



(b)

Fonte: Smole e Diniz (2010a, p. 73) e Ribeiro (2010e, p. 95).

O triângulo de Sierpinski é a forma geométrica mais usual, tanto nos trabalhos acadêmicos, quanto nos livros didáticos. Sua forma é obtida a partir de um triângulo equilátero no plano. Marcam-se os pontos médios dos três lados e em seguida ligam-se esses pontos, formando quatro novos triângulos equiláteros. Após isso, elimina-se o triângulo central, e, em seguida, aplicam-se os mesmos procedimentos para os três triângulos restantes, e assim sucessivamente (FIGURA 3a).

A partir de 1980 a Geometria Fractal ganha um novo e definitivo aliado, o computador. Agora, agregam-se ao universo das formas abstraídas das instâncias empíricas, as formas geradas por computação. Traça-se detalhadamente o gráfico da função complexa $f(z)=z^2+c$, sendo c um número *complexo*. Esse gráfico é conhecido como conjunto de Mandelbrot, que tem vistosa presença no cenário da geometria fractal, sendo referência obrigatória para a percepção geométrica das características essenciais dos objetos fractais no contexto do conceito fractal (FIGURA 3b).

A função complexa é iterada muitas vezes, com c variando sistematicamente sobre uma porção do plano complexo. Se nesse processo de iteração resultar valores que tendem ao infinito, o ponto c permanece com a cor de fundo da tela; caso contrário, atribui-se a cor branca para c. As paredes da prisão, então, vão tomando a forma do conjunto M de Mandelbrot.

2.3 DO ASPECTO TOPOLÓGICO

Nesta seção reportamos à classe dos fractais definidos como espaços topológicos. Sem reconstruir as sutilezas formais dos fractais desta classe, apenas pretendemos interpretar e descrever a compreensão que julgamos pertinente à pesquisa. De antemão, devemos recolocar a ideia descrita em Alves (2007, p. xxxiii) de que um fractal é uma forma composta de infinitas partes de algum modo semelhante ao todo.

Assim dito, é o fractal na sua natureza sintética, como objeto intuitivo abstraído de situações concretas. Aproximada essa ideia a modelos teóricos, pode-se compreender o fractal como um conjunto infinito de elementos semelhantes entre si, compreensão que possibilita tratá-lo com a formalidade matemática da Topologia. Neste tratamento o objeto fractal ganha natureza analítica e, numa terminologia da psicologia da aprendizagem, transcende da abstração empírica para a abstração reflexiva. Esta compreensão nos interessa na medida em que queremos tratar o conceito fractal como objeto de aprendizagem.

No conjunto fractal, de infinitos elementos semelhantes, a ideia de “semelhança” é referente à forma, e esta semelhança participa unificando a natureza constitutiva do conjunto e as partes. Os exemplos didáticos convencionais de conjuntos topológicos são conjuntos de números reais obtidos por alguma propriedade, conjuntos de segmentos da reta geométrica obtidos com alguma relação, conjuntos de regiões euclidianas no espaço plano ou no espaço volumoso. Numa abstração a partir desses modelos é introduzida a noção de “bola” e, como em Lima (1970), define-se bola aberta e bola fechada no espaço métrico. Sob a métrica que induz o espaço métrico é que deve estar a noção de raio dessas bolas. Na formalidade matemática do fractal é razoável pensar o fractal como um conjunto do plano euclidiano, como é o triângulo de Sierspinsk. Há exemplos numéricos, como sucessões numéricas convergentes e outros com representações na reta, como o conjunto de Cantor, que são modelos estratégicos para a compreensão.

Na teoria convencional dos espaços topológicos, repetida em diferentes livros sobre topologia, o conceito de “aberto” ou “bola aberta” ou “conjunto aberto”, é compreendido como os subconjuntos do conjunto topológico, ou do espaço topológico, dos quais qualquer elemento centraliza um subconjunto também aberto contido no próprio elemento. Na matemática fractal descrita, onde é desenvolvida a classe fractal dos conjuntos topológicos, este conceito de “aberto” ou de “fechado”, cai sobre as partes semelhantes que também se decompõem em partes semelhantes.

Nesta abordagem matemática dos fractais, tomamos o que desenvolve Alves (2007), que são os fractais definidos por sistemas de funções iteradas. Trata-se de um modelo teórico, onde a formação fractal se dá por iterações de uma aplicação f sobre um conjunto X, numa sucessão até ao ponto fixo das iterações.

O conjunto X aqui considerado é o conjunto que reúne os elementos gerados nas iterações de f até ao ponto fixo, que é alcançado na convergência de f à forma idêntica. O ponto fixo a que referimos é definido nas aplicações de uma função f em um conjunto X e, escrito por x_f, é aquele em que $f(x_f) = x_f$.

No processo iterativo por f na formação fractal, o elemento x_f é a forma fractal. O conjunto X reúne os elementos gerados no processo iterativo até ao ponto x_f. Neste sentido, antes que aquele conjunto *X* seja um conjunto topológico ou que ganhe uma topologia, ele deve estar munido de uma métrica e ser com ela um espaço métrico. A medida chamada métrica é formalmente necessária como a operação pela qual distingue-se um do outro os elementos do espaço métrico. Nesta formalidade, como declara Alves (2007, p. 4): "Um fractal é o ponto fixo de um sistema de funções iteradas num espaço métrico completo munido da métrica de Hausdorff."

Para facilitar a compreensão dessa ideia, será sintetizado o que se constitui como métrica, como espaço métrico e como métrica de Hausdorff a fim da formação, nesta classe analítica, do significado fractal. Uma métrica em *X* é uma aplicação *d* de *X x X* em *R* com as seguintes propriedades:

$d(x,y) = d(y, x);\ \ x, y \text{ em } X;$

$d(x,y) > 0;$

$d(x,x) = 0;\ \ x \text{ em } X;$

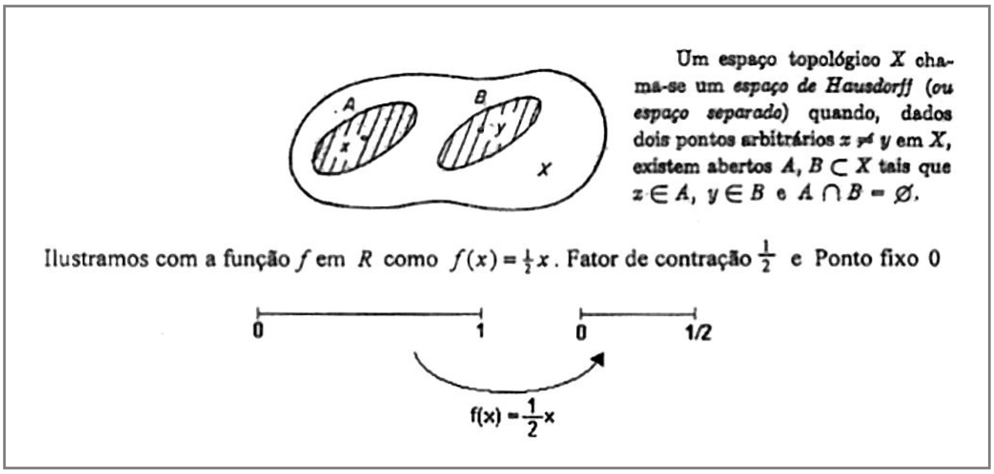
$d(x,y) < d(x,z) + d(z,y);\ x, y, z \text{ em } X.$

Um espaço métrico, em qualquer compêndio do assunto, é um par (*M, d*) formado por um conjunto *M* e uma métrica *d* em *M*, às vezes dito apenas espaço métrico *M*. Um exemplo comum é o conjunto *R* dos números reais com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, que é o espaço métrico da reta. Intuitivamente são válidas para esta *d* as quatro propriedades que ali transcrevemos da definição de métrica. Esta métrica é a própria distância entre abscissas na reta real. Como mais um exemplo, a distância usual no plano cartesiano é a métrica na expressão $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, que satisfaz àquele sistema de quatro propriedades.

A forma fractal como ponto fixo no sistema de funções iteradas tem que uma parte qualquer também se desenvolva pelas interações ao mesmo ponto fixo. Com este fato, a forma fractal munida da chamada métrica de Hausdorff, é dita um espaço métrico completo. Vale ressaltar que a forma fractal assim formalizada é uma ideia de um conjunto das partes de um conjunto. A seguir, será descrita a métrica de Hausdorff, para munir este conjunto das partes e dar-lhe a estrutura de espaço métrico.

Sejam (*S*, *d*) um espaço métrico completo e o seu conjunto das partes $X = \{A \subset S \,/\, A \neq \varphi\}$, sendo cada parte *A* como conjunto fechado e limitado. A métrica de Hausdorff em *X* é escrita por: $h(A, B) = max\ \{d(A, B), d(B, A)\}$; $A, B \subset X$; $d(A, B) = max\ \{d(x, B), x \in A\}$ e $d(x, B) = min\ \{d(x, y)\}$; $d(x, y)$ já é definida.

FIGURA 4 - Propriedade intrínseca da métrica de Hausdorff de separar os elementos do espaço métrico



Fonte: Lima (1970, p. 62).

Verifica-se que a métrica de Hausdorff está definida, não em um simples conjunto, mas já em um espaço métrico. Esta métrica escrita por *h* é expressa segundo uma métrica *d*. A métrica "*d*" distingue os elementos em *S* e a métrica "*h*" distingue os elementos no conjunto *X* das partes de *S*. Essa métrica *h* é, por vezes, chamada métrica da separação, e o espaço topológico *X*, induzido por ela, é chamado espaço separado (FIGURA 4).

2.3.1 Dimensão fractal

Alves (2007) afirma que a dimensão fractal é uma característica das mais importantes do conjunto fractal. Cita a dimensão euclidiana de *Os Elementos*[2] como 1, 2 e 3 conforme a

---

[2] A dimensão euclidiana se encontra descrita na famosa obra de Euclides, *Os Elementos*. O livro I traz as seguintes definições: "1. Ponto é aquilo de que nada é parte; 2. E linha é comprimento sem largura; [...] 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma; e 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura." (EUCLIDES, 2009, livro I, p. 97). Já o livro XI traz: "1. Sólido é o que tem comprimento e largura e profundidade." (EUCLIDES, 2009, livro XI, p. 481).

fronteira da figura euclidiana, se constituída de pontos, de linhas ou de superfícies. Na geometria fractal a convenção é outra, onde a dimensão fractal diz respeito à irregularidade da forma e pode até não ser inteira.

Na descrição do próprio Mandelbrot (1998, p. 14), que surge com a teoria fractal, a dimensão fractal pode ser concebida com a noção de

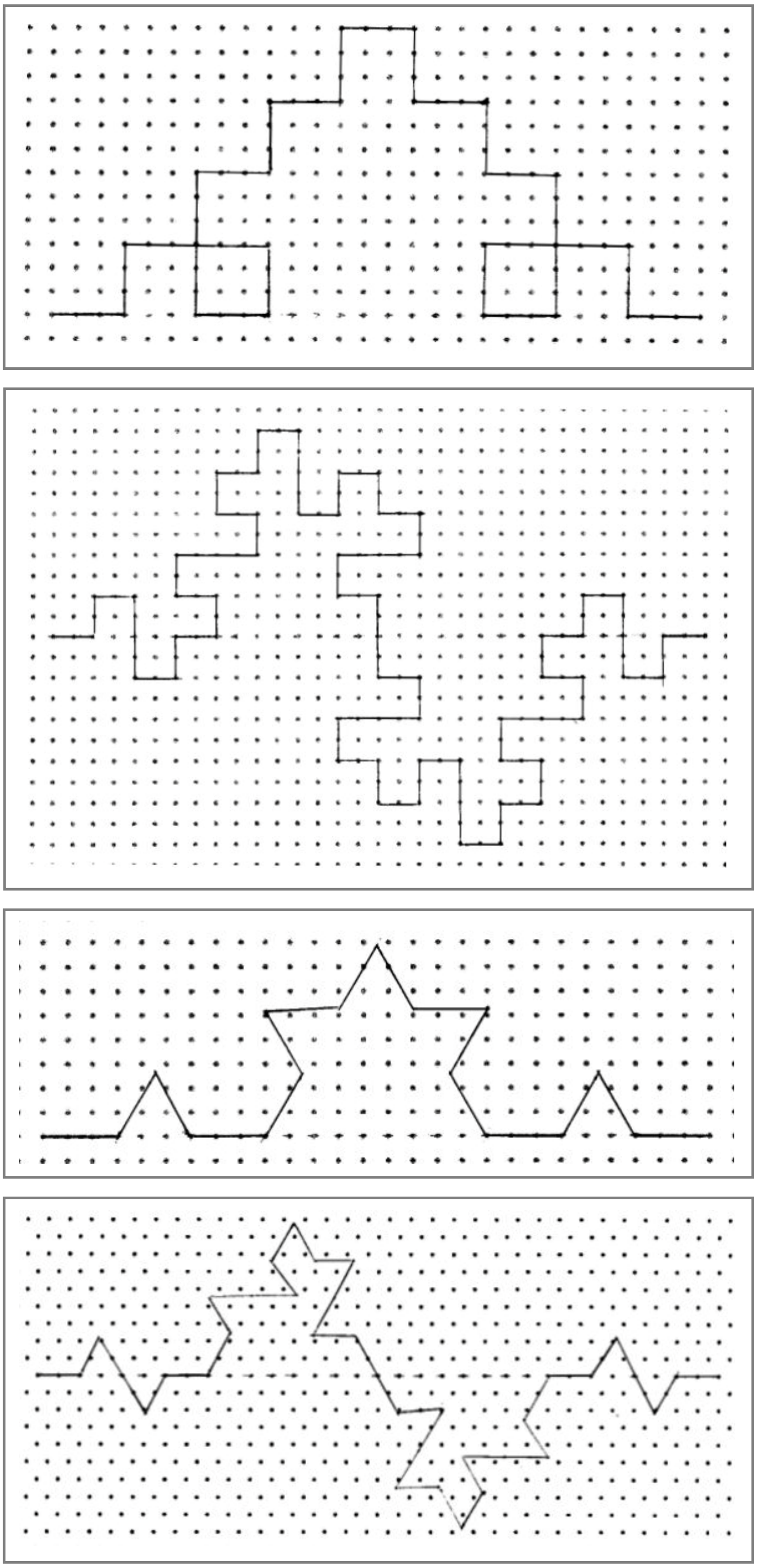
> [...] curvas planas muito irregulares, que sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, conjuntos de pontos sobre uma linha cuja a dimensão fractal está entre 0 e 1.

Capra (2006) complementa, expondo que o conceito de dimensão fractal é uma noção matemática, porém se aproxima de nossas experiências com a natureza. Por exemplo, "Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem, e quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea e de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais." (CAPRA, 2006, p. 119). Vemos que o autor se utiliza da "geometria da natureza".

Há muitas maneiras de se definir a dimensão fractal, no entanto, uma vez definida quaisquer uma delas, e determinado o valor *D* para ela, "[...] pode-se tentar definir um **conjunto fractal** como sendo, ou um conjunto para o qual *D* é um número real não inteiro, ou um conjunto para o qual *D* é um inteiro, mas o todo é "irregular"." (MANDELBROT, 1998, p. 176, grifo nosso). Antes de formalizarmos matematicamente a dimensão fractal, procuramos uma compreensão mais intuitiva desse conceito. Capra (2006, p. 119) afirma que

> [...] uma linha denteada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará sua dimensão fractal.

FIGURA 5 - Curvas planas irregulares de dimensão fractal entre 1 e 2



(a)

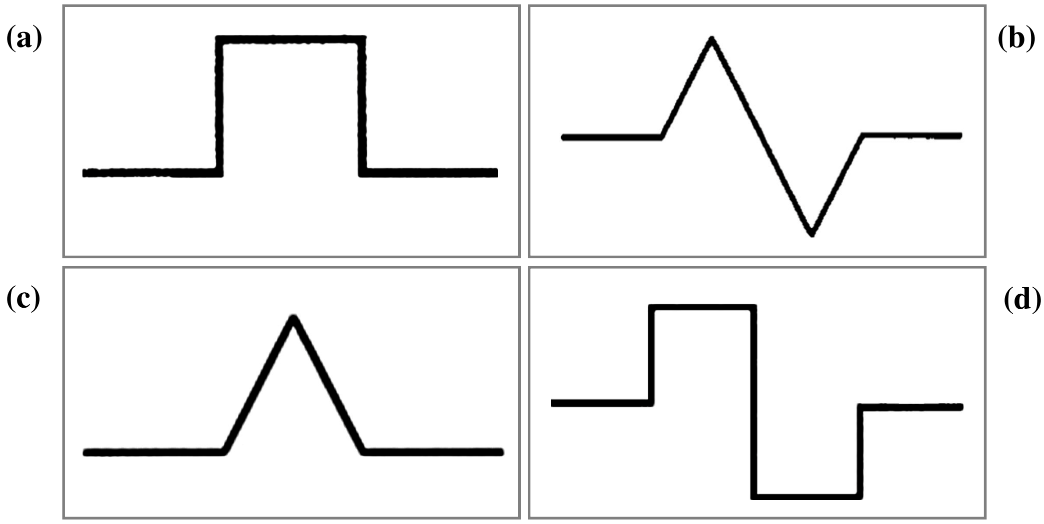
(b)

(c)

(d)

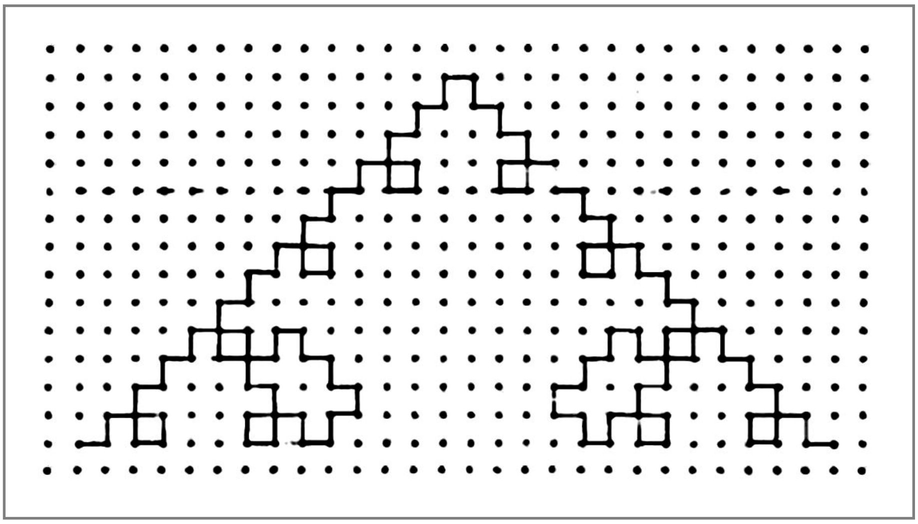
Fonte: Edilson de Moura, 2011.

FIGURA 6 - Iniciador-gerador da Figura 5



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

FIGURA 7 - Curva no 4º estágio de desenvolvimento



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Destacamos na Figura 5 um exemplo de curvas que foram construídas no plano e tem dimensões diferentes. Vale observar que quanto mais detalhes e reentrâncias tiver a curva, maior será a sua dimensão. Sendo assim, d_B (dimensão da Figura 5b) tem maior dimensão, portanto: $d_B > d_A > d_D > d_C$. As curvas da Figura 5 foram construídas a partir de um dos iniciador-gerador. Exemplificaremos a construção de um deles a partir do estágio em que se encontra a curva da Figura 5a.

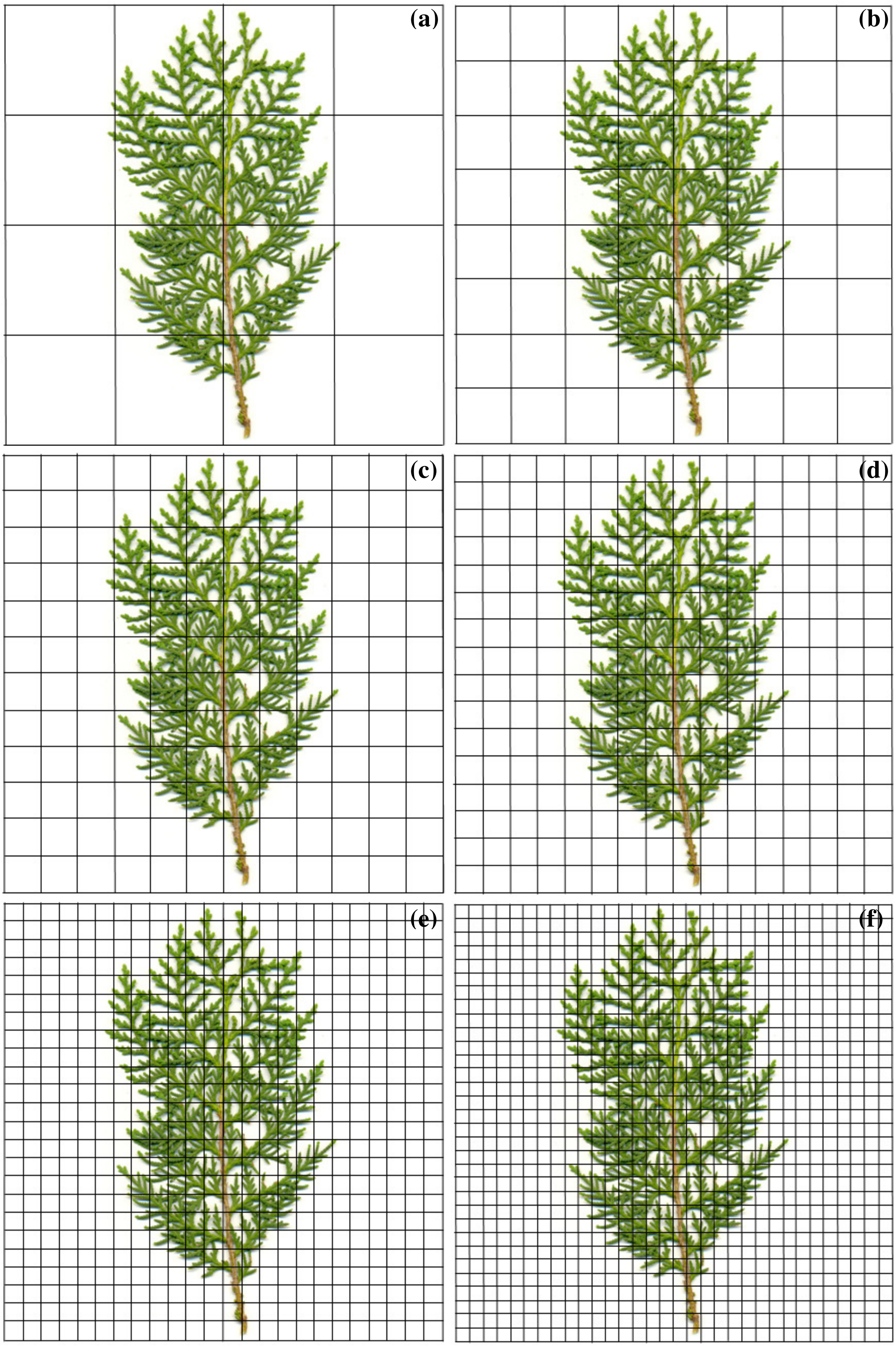
Primeiro, toma-se a peça correspondente ao iniciador-gerador da curva que, no nosso caso é a Figura 6a, depois, substitui-se cada segmento da Figura 5a pela peça geradora; para isso, a peça geradora terá que diminuir ou ficar numa escala menor para que possa ser encaixada por completo em cada segmento. Feito isso, obtém-se a curva da Figura 7, que está no 4º estágio de desenvolvimento.

Percebe-se que apesar da curva da Figura 7 apresentar visualmente mais detalhes do que a da Figura 5a, elas têm a mesma dimensão, pois apenas estão em escalas e fases de desenvolvimento diferentes. Para que os nossos sentidos não nos enganem, precisamos formalizar matematicamente maneiras de quantificar a dimensão fractal. Esses exemplos podem servir como atividades para as séries iniciais do Ensino Fundamental, pois desenvolvem conceitos de homotetia, dimensão fractal (sob o aspecto geométrico), escala, e padrão.

Existem muitas definições de dimensão, o que pode gerar resultados numéricos diferentes quando aplicadas ao mesmo conjunto fractal. Alves (2007, p. xxxv) afirma que "O valor da dimensão é um indicador da quantidade de espaço que ocupa um determinado conjunto. É uma medida das proeminências das irregularidades de um conjunto quando observado a uma escala muito pequena." Então, a seguir, será demonstrada uma maneira de se calcular a dimensão fractal por meio da contagem de caixas.

Para se calcular a dimensão fractal por meio da contagem de caixas de um conjunto plano F, primeiro, desenha-se uma *rede-*ε de quadrados (caixas) e conta-se, para vários valores de ε (escala) cada vez menores, o número $N_\varepsilon(F)$ de quadrados (caixas) que se sobrepõe ao conjunto. A dimensão é a razão logarítmica, a qual $N_\varepsilon(F)$ cresce quando ε tende para zero e pode ser estimada pelo declive do gráfico de $\log N_\varepsilon(F)$ em função de $(-\log \varepsilon)$. Pode-se dizer também que o número de quadrados da *rede-*ε que intersecta F é um indicador de quão espalhado ou irregular é o conjunto, quando examinado à escala ε. A dimensão reflete quão rapidamente as irregularidades se desenvolvem à medida que ε tende para zero. Ou seja, quanto maior o declive do gráfico ou a razão logarítmica maior a dimensão.

FIGURA 8 - Tamanho de caixas *versus* número de células ocupadas: a) escala 1/4; b) escala 1/8; c) escala 1/12; d) escala 1/16; e) escala 1/24; f) escala 1/32



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Para se compreender melhor esse processo descrito por Alves (2007), determinamos a dimensão fractal de um ramo de pinheiro, o qual depois de colhido foi escaneado, a fim de que pudéssemos submetê-lo ao processo de contagem das caixas (quadrados) que se sobrepunham a ele (FIGURA 8). Verifica-se que na Figura 8a, os onze quadrados da malha têm alguma parte do ramo, então $N_\varepsilon(F) = 11$ e a escala $\varepsilon = 1/4$.

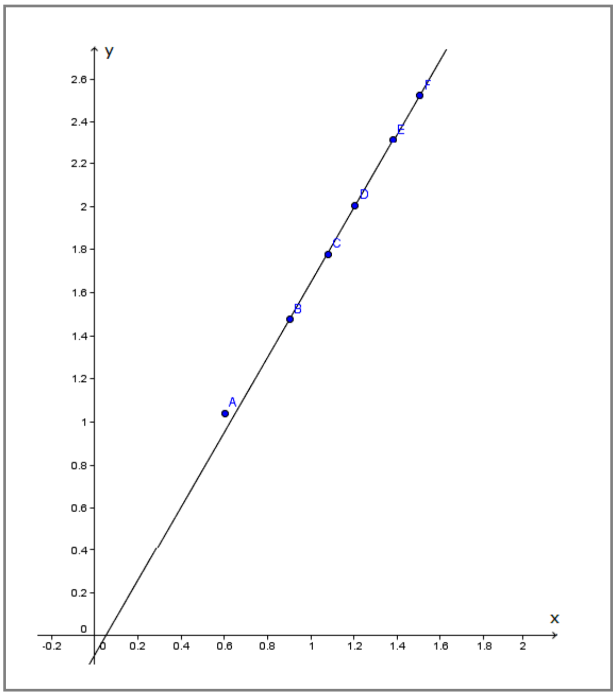
TABELA 1 - Dimensão fractal do ramo do pinheiro

Escala ε	**1/4**	**1/8**	**1/12**	**1/16**	**1/24**	**1/32**
$N_\varepsilon(F)$	11	30	60	101	208	334
–log ε	0,602	0,903	1,074	1,204	1,380	1,505
log $N_\varepsilon(F)$	1,041	1,477	1,778	2,004	2,318	2,523

Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Os valores obtidos na contagem dos quadrados $N_\varepsilon(F)$ e sua respectiva escala ε geraram as coordenadas *(–log* ε*; log* $N_\varepsilon(F)$*)*, as quais foram, em seguida, inseridas no *software* GeoGebra (TABELA 1).

FIGURA 9 - Gráfico da reta de regressão linear por meio da ferramenta Reta de Regressão, em *software* específico



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Finalizando, construímos a reta de regressão linear[3] por meio da ferramenta Reta de Regressão Linear, daquele *software* (FIGURA 9).

Este método da dimensão de contagem das caixas é utilizado para estruturas fractais que não são totalmente autossemelhantes. A curva de Koch e o conjunto de Cantor são exemplos de fractais com autossemelhança exata. Contudo, a definição da dimensão de contagem de caixas também permite calcular o valor da dimensão fractal para os objetos fractais com autossemelhança exata.

Pode-se observar que o tamanho relativo do ramo cresce à medida que o tamanho das caixas diminui. Essa taxa de crescimento, representada pela inclinação da reta do gráfico logarítmico, dirá quanto quebradiço ou tortuoso é o ramo ou o objeto.

Resumindo, o cálculo da dimensão por meio da contagem de caixas pode ser simplificadamente entendido da seguinte forma:

> [...] divide-se a área do conjunto analisado em um certo número de caixas iguais. Conta-se o número de caixas em que existe pelo menos um ponto do conjunto. Repete-se o procedimento para vários tamanhos de caixas. Os dados (tamanho de caixas *versus* número de células ocupadas) são lançados num gráfico logarítmico (pois neste gráfico a lei de potência é convertida em função linear, sendo possível medir o expoente da função, que corresponde a inclinação da reta resultante após uma regressão linear). A dimensão fractal, neste caso, equivale à inclinação do gráfico (SOBREIRA, 2003, p. 65-66).

Se os objetos forem pouco fragmentados (mais euclidiano), o valor relativo da medição em diferentes escalas muda pouco e a inclinação do gráfico é pequena. A inclinação do gráfico indica quanto quebradiço ou detalhado é um objeto.

Mas, que significado há quando afirmamos que o ramo do pinheiro tem dimensão 1,75? É necessário buscar, então, uma compreensão significativa que possa ser atribuída pelos sujeitos, pois na postura fenomenológica e no âmbito da educação,

> [...] é importante privilegiar a atribuição de significados às teorias, às expressões artísticas, literárias, históricas, enfim, ao mundo onde vivemos. É importante que as atividades sejam dirigidas de modo que o sentido se faça para o aluno, gerando compreensão, interpretação e comunicação de maneira

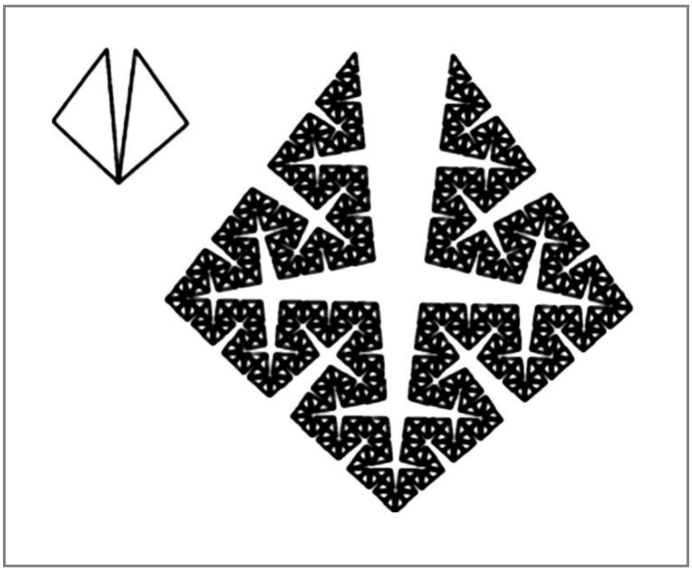
---

[3] O coeficiente angular da reta: $1{,}05x - 0{,}6y = 0{,}06$ obtida por meio do software GeoGebra, representa a dimensão fractal do ramo do pinheiro. Portanto $D = 1{,}75$.

> que significados sejam atribuídos. “Ao trabalhar fenomenologicamente no âmbito da educação escolar, a postura é a de buscar pelo sentido e pelo significado do que se faz e do que se escolhe” (BICUDO, 1999 apud BAIER, 2005, p. 133).

No intuito de atribuirmos significado à dimensão fracionária, faremos uso de uma variante da curva de Von Koch, a qual é interpretada como o modelo de pulmão.

FIGURA 10 - Variante da curva de Von Koch, interpretada como modelo de Pulmão



Fonte: Mandelbrot (1998, p. 49).

Como se pode ver na Figura 10, no pequeno diagrama à esquerda, cada pulmão é um triângulo isósceles, ligeiramente obtuso (tem um ângulo de $90°+\varepsilon$):

> [...] A traqueia é limitada por um diedro de ângulo 2ε. À traqueia junta-se, de cada um dos lados, um brônquio, também limitado por um ângulo de 2ε. [...] de cada segmento do contorno externo parte um triângulo de carne, que divide o lóbulo correspondente em dois sublóbulos. Acrescentamos assim sucessivamente, ora de um lado ora do outro, subsub-brônquios e subsubtriângulos de carne (MANDELBROT, 1998, p. 48).

Segundo Mandelbrot (1998, p. 48),

> [...] trata-se de um modelo medíocre, mas é suficiente para pôr em evidência a ligação que existe entre, por um lado, as conexões que permitem a este

> órgão estabelecer um contacto íntimo entre o ar e o sangue e, por outro lado, o conceito de objeto fractal.

Se continuássemos o processo de construção desse objeto fractal indefinidamente, Mandelbrot (1998, p. 48) afirma que

> [...] acabaríamos por obter uma secção de pulmão ideal, que seria uma curva de comprimento infinito e com dimensão *D* ligeiramente inferior a 2. Extrapolando para três dimensões, obteríamos então uma superfície pulmonar com dimensão ligeiramente inferior a 3.

Quando Mandelbrot (1998) afirmou que a dimensão do pulmão era ligeiramente inferior a três, possivelmente estava atribuindo significado à dimensão fracionária do objeto fractal, relacionando-o à eficiência do pulmão humano que tem um volume pequeno e uma área enorme, condizente com o modelo fractal sugerido, o qual apresenta área máxima – indefinida, pois depende da escala de observação - mas com volume mínimo.

Em relação ao exemplo do pinheiro, qual o significado que podemos atribuir ao valor fracionário da dimensão do ramo? Quando calculamos a dimensão por meio da contagem de caixas, obtemos a irregularidade do contorno do ramo do pinheiro, já que a dimensão está entre um e dois, e, valendo-nos do exemplo dado por Mandelbrot (1998), inferimos que a árvore pinheiro tem dimensão fractal entre dois e três. Sendo assim, podemos atribuir um significado condizente à disposição da copa das árvores, pois Romanha (2009) afirma que

> A disposição fractal da copa das árvores potencializa e maximiza a exposição de uma quantidade enorme de folhas ao sol, permitindo maior eficiência na captação de luz. A disposição fractal das árvores adultas também permite que elas lancem novos ramos durante todo o ano sem que o aumento do perímetro da copa seja perceptível. Então, uma estrutura fractal fornece o máximo de eficiência com o mínimo de ocupação de espaço.

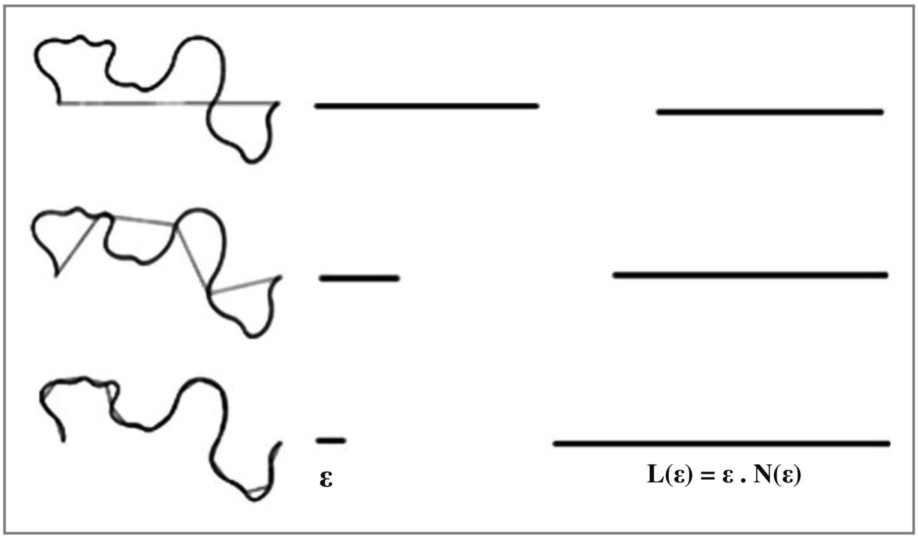
Existem várias maneiras de se medir a dimensão fractal: uma, que é o cálculo por meio da contagem de caixas ou dimensão da malha, e outra, que é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch, a qual está em conformidade com a dimensão usual de espaços usuais. O termo dimensão fractal está associado ao processo de contagem das caixas ou a de Hausdorff.

A formulação precisa da dimensão de Hausdorff-Besicovitch não será apresentada neste estudo, pois além de ter sido pouco reveladora, transcendeu o âmbito desta investigação. No entanto, foram constatados na dissertação de Alves (2007), subsídios para o aprofundamento desse estudo. Mas, para se ter uma visão geral do que seja essa dimensão, Stewart (1991, p. 237) afirma que

> [...] a ideia básica é definir o volume *d*-dimensional de uma figura para *d* arbitrário (não inteiro). Assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch da figura é o valor *d* para o qual o volume *d*-dimensional muda de infinito a zero. Cada figura tem um valor específico de *d* no qual o volume *d*-dimensional faz tal desvio.

Por parecer-nos pouco reveladora essa formulação da dimensão de Hausdorff-Besicovitch, faz-se necessário o estudo do conceito escala, a fim de atribuirmos significado, pois a maior parte das definições de dimensão de um conjunto depende de uma medição desse conjunto na escala ε, que quantifica a sua irregularidade quando observada. Carvalho et al. (1986) apresenta os conceitos escala e dimensão de Hausdorff-Besicovitch de forma esclarecedora e bem organizada, por isso, com o intuito de apreendermos melhor aqueles conceitos, serão descritas algumas ideias centrais.

FIGURA 11 - Esquema para calcular o comprimento de uma curva



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Mandelbrot (1998) fez uma pergunta provocativa a respeito do comprimento da costa da Bretanha e, depois, concluiu que o comprimento dependeria da escala. Assim, se usada uma régua de tamanho ε para medir o comprimento do litoral (ou de uma curva), ele será igual ao comprimento ε multiplicado pelo número de vezes que a régua foi tomada ao contornar a costa. Então, se o tamanho da régua usada para medir a costa, diminuir, seu comprimento aumentará (FIGURA 11).

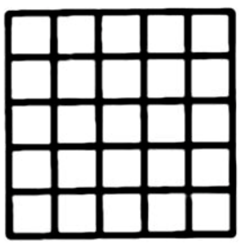
O meteorologista Lewis Richardson aplicou essa definição para determinar o comprimento da costa de diversos países e descobriu que, para cada um deles, o número de segmentos na escala satisfaz a Lei Empírica: $N(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{-D}$, onde K e D são constantes que dependem da formação costeira do país. Temos então:
$L(\varepsilon) = \varepsilon \cdot N(\varepsilon) = (\varepsilon \cdot \varepsilon^{-D} N(\varepsilon))/\varepsilon^{-D} = (\varepsilon^{1-D} N(\varepsilon))/\varepsilon^{-D}$, fazendo $N(\varepsilon)/\varepsilon^{-D} = K$, temos que $L(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{1-D}$ e $N(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{-D}$. Daí, concluímos que:

$$L = \lim_{\varepsilon \to 0} (L(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0} (K \cdot \varepsilon^{1-D}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(K \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^{D}} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(K \cdot \frac{1}{\varepsilon^{D-1}} \right) = \infty,$$ ou seja, o comprimento total L da costa tende ao infinito.

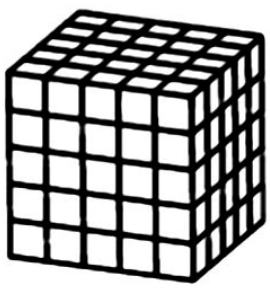
Reiterando que a dimensão de Hausdorff-Besicovitch está em conformidade com a dimensão usual de espaços usuais, mostraremos como ocorre essa adequação.

FIGURA 12 - A dimensão euclidiana

N = 5 partes ; $r = \frac{1}{5}$



N = 25 partes ; $r = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{5^2}} = \frac{1}{5}$



N = 125 partes; $r = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{1}{5}$

Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 20-21).

Um objeto unidimensional, como um segmento de reta, também possui a propriedade de se reproduzir similarmente. Ele pode ser dividido em *N* peças em forma de segmentos idênticos, cada uma das quais reduzidas pela razão *r* do todo (FIGURA 12), da seguinte forma: $r = \frac{1}{N}$.

Analogamente, um objeto bidimensional, como um quadrado no plano, pode ser dividido em *N* peças em forma de quadrados autossimilares, as quais estão reduzidas pela razão *r* do todo, da seguinte forma: $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Por fim, um objeto tridimensional, como um cubo sólido, pode ser dividido em *N* peças pequenas em forma de cubos, cada um dos quais reduzidos pela Razão: $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$.

Um objeto autossimilar de dimensão *D* pode ser dividido em *N* pequenas réplicas (peças) de si próprio, cada uma das quais reduzidas por um fator *r*, da seguinte forma: $r = \frac{1}{\sqrt[D]{N}}$.

Podemos escrever: $r \, . \sqrt[D]{N} = 1$; depois, elevando a *D* membro a membro, teremos: $r^D \, . \, N = 1$. Para obtermos o valor de *D* a partir desta equação exponencial devemos aplicar o logaritmo decimal membro a membro, da seguinte maneira: $log\ (r^D \, . \, N) = log\ 1$.

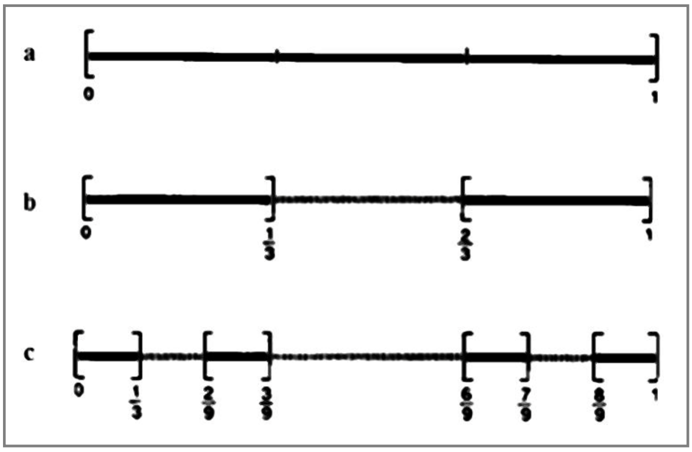
Pelas propriedades de logaritmo, teremos: $log\ r^D + log\ N = log\ 1$, ou seja, $D \, . \, log\ r + log\ N = 0$; Então, $D = \frac{-\,log\ N}{log\ r} = \frac{log\ N}{-\,log\ r} = \frac{log\ N}{log\ r^{-1}}$, portanto,

$$D = \frac{log\ N}{log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Mandelbrot (1998) chama *D* de dimensão fractal da curva, que difere da dimensão euclidiana por não precisar ser, necessariamente, um número inteiro. A magnitude de *D* é a medida da “rugosidade” da curva. Para entender como objetos autossimilares se relacionam com as leis de Richardson, basta fazer: $K = 1$, $\varepsilon = r$ e $N = \frac{1}{r^D}$.

Um fractal primitivo que destacaremos está ligado ao nome de Georg Cantor (1845-1918), que criou um conjunto obtido por meio da fragmentação do intervalo *[0, 1]* e reconhecido por Mandelbrot (1998), muitas décadas mais tarde, como um fractal.

FIGURA 13 - A dimensão fractal do Conjunto de Cantor



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 25).

O conjunto de Cantor[4] é obtido da seguinte maneira: divide-se o intervalo $I_0 = [0, 1]$ em três partes autossimilares, e em seguida, retira-se de I_0, seu terço médio aberto (FIGURA 13a). Na Figura 13b, encontramos, assim, $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] U \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

No passo seguinte, divide-se cada intervalo de I_1 em três partes autossimilares e retiramos seus respectivos terços médios abertos. Obtemos, na Figura 13c, assim, $I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] U \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] U \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] U \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

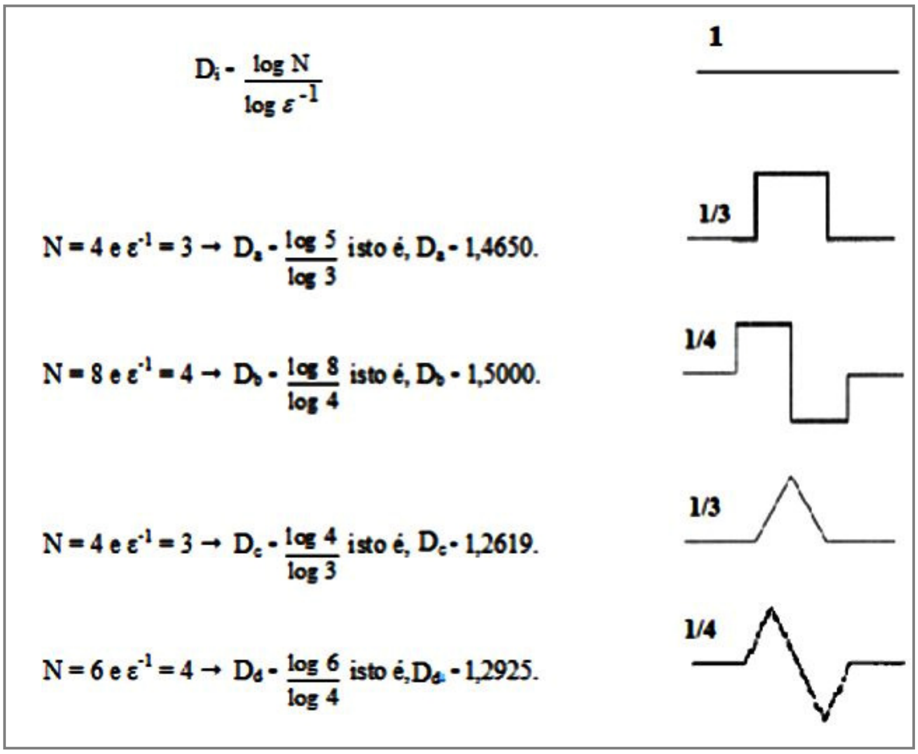
Repetindo-se o processo indefinidamente, chega-se ao conjunto de Cantor, que é formado por todos os pontos que não foram retirados. Nota-se que os pontos extremos $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$, pertencem ao conjunto de Cantor, uma vez que em cada etapa da construção são retirados apenas pontos interiores dos intervalos anteriores. Como em cada etapa obtém-se

4 O conjunto de Cantor tem dimensão fracionária entre o ponto e a reta, ou ainda, entre 0 e 1.

dois novos intervalos, temos que $N = 2$. Por outro lado, vimos que cada intervalo é dividido em três partes autossimilares, logo a razão $r = \frac{1}{3}$.

Assim, a dimensão fractal do conjunto de Cantor é dada pelo algoritmo: $D = \frac{log\ N}{log\ \varepsilon^{-1}}$, então $D = \frac{log\ 2}{log\ 3} = 0{,}6309$. Também pode-se calculá-la em relação à Figura 13, só que neste caso, $N = 4$ e $\varepsilon = 1/9$, sendo assim $D = \frac{log\ 4}{log\ 9} = 0{,}6309$.

FIGURA 14 - A dimensão de objetos com autossemelhança exata



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Do exposto até o momento, pode-se calcular, agora, a dimensão das curvas da Figura 5 que está descrita na Figura 14.

Vale ressaltar que, cada uma das maneiras de se calcular a dimensão fractal, pode gerar uma medida distinta. Isso significa dizer que a dimensão fractal não é única, pois depende do método de observação e medição utilizada. Além desses procedimentos apresentados, existem outras categorias de dimensões fractais, todas categorizando o objeto segundo a sua fragmentação, mas a partir de visões distintas. O conceito dimensão, apesar de sua importância para aquisição do conceito fractal, vem sendo explorado apenas como uma curiosidade, tanto em trabalhos acadêmicos como nos cursos oferecidos a professores.

2.3.2 Atratores

Pelo fato de o conceito de atrator ser relevante para a compreensão e aquisição do conceito fractal e também por estar presente em livros didáticos da Educação Básica, objeto de nosso estudo, serão evidenciados os seus principais aspectos; será apresentada, também, uma atividade constante num livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental.

Segundo Stewart (1991, p. 239), “[agora] tudo ficou bem mais claro. Em particular, a distinção geométrica entre formas regulares, como círculos e esferas – isto é, múltiplos – e formas irregulares, como fractais [...]”. Essas distinções entre as geometrias euclidianas e mandelbrotianas (geometria de Mandelbrot) se tornaram mais evidentes após o estudo do conceito dimensão fractal, que é aquele

> [...] esquisito número fracionário inventado por Hausdorff e Besicovitch, desprezado pelos cientistas da área aplicada até que Mandelbrot o ressuscitou, poliu e explorou, vem a ser uma propriedade-chave do atrator, governando várias características quantitativas da dinâmica (STEWART, 1991, p. 239).

Souza e Pataro (2009b, p. 107) trazem no livro escolar do 9º ano do Ensino Fundamental uma atividade (FIGURA 36), da qual apresentaremos apenas um de seus itens:

> O modelo de Verhulst citado no texto [A matemática do caos] é dado por $y = k \cdot p \cdot (1 - p)$, no qual k representa uma característica da população e p (cujo valor máximo é 1) representa o percentual do número de indivíduos vivos nessa população. Com o auxílio de uma calculadora, considere $k = 4{,}5$ e use os valores 0,25; 0,5; 0,75 para p. Em seguida faça o mesmo para $k = 5$. O que você pôde observar?

Para Baier (2005), torna-se urgente o estudo da dinâmica populacional, por meio do modelo Logístico May, relacionado com os temas fractais, função composta, e função quadrática. Para realizar-se um estudo da dinâmica populacional com essa abordagem, faz-se necessária a compreensão das noções de atrator, iteração e órbita, além do estudo do processo de iteração gráfica, os quais também são relevantes para o estudo do conceito fractal.

Sobre o conceito atrator, Mandelbrot (1977 apud BAIER, 2005, p. 92) afirma que

> Um atrator que evolui por um processo de alongamentos e dobras é chamado de *atrator estranho*, denominação introduzida por Ruelle e Takens. É também denominado *atrator caótico* ou *atrator fractal*. “Muitos livros de *Mecânica* se referem aos sistemas dinâmicos cujos atratores são pontos, aproximações de círculos ou outras formas de Euclides. Mas eles são raras exceções, e o comportamento da maioria dos sistemas dinâmicos é incomparavelmente mais complexo: seus atratores ou repulsores tendem a ser fractais.

Já para Stewart (1991, p. 121-122), “A essência de um atrator é ser uma porção do espaço de fase tal que qualquer ponto que se ponha em movimento nas suas proximidades se aproxima cada vez mais dele.” Capra (2006, p. 119), afirma que o atratror serviu de elo entre a geometria fractal e a teoria do caos, pois quando Mandelbrot publicou o seu primeiro livro, ainda não estava clara a conexão entre a geometria fractal e a teoria do caos, mas não demorou muito para que se descobrisse que

> [...] os atratores estranhos são exemplos extraordinários de fractais. Se partes da sua estrutura são ampliadas, elas revelam uma subestrutura em muitas camadas nas quais os mesmos padrões são repetidos muitas e muitas vezes. Por isso, tornou-se comum definir atratores estranhos como trajetórias no espaço de fase que exibem geometria fractal.

Porém, não é possível predizer em que ponto do espaço de fase a trajetória do atrator passará num certo instante, porque mesmo que

> [...] o sistema seja governado por equações deterministas, é uma característica comum de todos os sistemas caóticos. No entanto, isto não significa que a teoria do caos não é capaz de quaisquer previsões. Ainda podemos fazer previsões muito precisas, mas elas se referem às características qualitativas com do comportamento do sistema e não aos valores precisos de suas variáveis num determinado instante. Assim, a nova matemática representa uma mudança da quantidade para a qualidade, o que é característico do pensamento sistêmico em geral. Enquanto a matemática convencional lida com quantidades e com fórmulas, a teoria dos sistemas dinâmicos lida com qualidades e com padrões. (CAPRA, 2006, p. 116).

Atratores que não são pontos, círculos ou outras formas de Euclides são chamados de atratores estranhos. Sobre esse termo, Stewart (1991, p. 134, grifo do autor) comenta que

> O nome é uma declaração de ignorância: sempre que os matemáticos chamam algo de “patológico”, “anormal”, “estranho”, ou coisa parecida, o

> que isto significa é: "Não entendo que diabo é isto". Mas é também uma bandeira, que transmite uma mensagem: *Posso não entendê-la, mas ela certamente me parece importante*.

Para se compreender a ideia de Stewart (1991) sobre atratores, é preciso estudar o conceito de iteração. Alves (2007, p. 4, grifo nosso) afirma que

> Os fractais definidos por *sistemas de funções iteradas* constituem apenas uma pequena classe dos fractais, mas esta forma de construir fractais é muito útil para trabalhar o conceito de fractal com os alunos dos ensinos básico e secundário porque, por um lado é simples de entender e, por outro, pode interligar muitos conceitos matemáticos.

Numa abordagem para a Educação Básica, pode-se considerar que "[...] fractal é o ponto fixo de um sistema de funções iteradas num espaço métrico munido de uma métrica de Hausdorff." (ALVES, 2007, p. 4).

2.3.3 Iteração

Para se obter uma melhor compreensão das noções de iteração, atratores, repulsores, e órbitas, serão utilizados alguns exemplos utilizados por Carvalho et al. (1986) e Peitgen et al. (1991).

Provavelmente algum estudante já tenha iterado funções: $R(x)=\sqrt{x}$; $Q(x)=x^2$; $S(x)=sen\,x$; $C(x)=cos\,x$, introduzindo um número qualquer na calculadora e acionando repetidas vezes a tecla correspondente a uma dessas funções reais. Ao iterarmos função real $R(x)=\sqrt{x}$, para $x = 196$, temos:

R1(196)=14; R2(196)=3,7416; R3(196)=1,9343; R4(196)=1,3908; R5(196)=1,1793; R6(196)=1,0859; R7(196)=1,0420; ... ;R13(196)=1,0006;...; R16(196)=1,0000; ...

A listagem obtida por meio da sequência sucessiva de iterações de um número de valores de $R^n(x)$, onde $R^n(x)=(R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R)(x)$, n vezes, é chamada de órbita do valor inicial. Então:

A órbita de um número é a listagem obtida por meio da sequência sucessiva de iterações de $R^n(x)$.

No exemplo anterior, a órbita de *196* será a sequência (*196; 14; 3,7416; 1,9343; ...*), que, por sua vez, converge para 1. De fato, pode-se provar que, isto acontece não importando o número introduzido inicialmente na calculadora.

Tomemos a função $Q(x) = x^2$ e $x = 2,3$, então a órbita do número *2,3* é a sequência: $(2,3;\ 5,29;\ 27,9841;\ 783,1099;\ ...) \to \infty$.

Mas esse fato ocorre sempre? Vejamos o que acontece quando $x = 0,5$. Iterando a função $Q(x)$, então, a órbita é: $(0,5;\ 0,25;\ 0,0623;\ 0,0004;\ ...\ ) \to 0$. Ao passo que, se $x = 1$, a órbita é $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ...) \to 1$.

Tomemos agora a função $S(x) = sen\ x$ e $x = 56\ rad$, então, a órbita do número *56 rad* é a sequência: $(56;\ -0,522;\ -0,498;\ -0477;\ ...) \to 0$. Uma curiosidade é que a órbita converge vagarosamente para zero.

Retornando, então, à questão básica dos sistemas dinâmicos: *pode-se predizer o destino das órbitas sob iteração? Tal pergunta é semelhante à que já foi feita antes: pode-se predizer acontecimentos a longo prazo?* Para os sistemas $R(x)=\sqrt{x}$; $Q(x) = x^2$; $S(x) = sen\ x$, a resposta é sim.

Aqui está mais um exemplo cujo destino das órbitas pode ser previsto. Tomemos,
$C(x) = cos\ x$ e $x = 56\ rad$. Temos:
$C^1(56) = 0,8532;\ \ C^2(56) = 0,6576;\ \ C^3(56) = 0,7915;\ \ C^4(56) = 0,7028;$
$C^5(56) = 0,7630;...;\ C^{15}(56) = 0,7395;...;\ C^{34}(56) = 0,739085.$

A órbita de *56 rad* é uma sequência que tende a *0,739085...* Novamente, é demonstrável que este fato ocorre para todo valor inicial de *x*; ou seja, todas as órbitas do cosseno são estáveis. Então: “Uma órbita estável é aquela que tem a propriedade de: fazendo uma pequena variação no valor inicial, a órbita resultante se comporta de forma similar.”

As funções: $R(x)=\sqrt{x},\ \forall\ x \in I\!R^*_+$; $S(x) = sen\ x,\ \forall\ x \in I\!R$; e $C(x) = cos\ x,\ \forall\ x \in I\!R$, todas têm órbitas estáveis.

Pode-se pensar nas órbitas estáveis como boas órbitas, no sentido de que se seu sistema dinâmico representa um processo físico, cujo resultado pode-se predizer e se a órbita resultante é estável, os pequenos erros de observações e arredondamentos que podem ocorrer não têm importância. Infelizmente, nem todas as órbitas são estáveis. Mesmo sistemas mais simples possuem órbitas que estão longe de serem deste tipo. Estas órbitas são chamadas de instáveis ou oscilantes.

Retornando à atividade citada anteriormente na seção 2.3.2, por Souza e Pataro (2009b, p. 107) observa-se que os autores mudam os valores de *k* e esperam que o aluno faça inferências e conclua que "[...] uma pequena alteração na função para o mesmo *k* provoca grandes oscilações para o valor de *y*." Outra maneira de se obter esta conclusão seria por meio de análises da órbita de $x_0 = 1$ para a função $Q(x) = x^2$.

Este é um exemplo de *ponto fixo* para o sistema dinâmico; mas esta órbita simples é *instável*. Suponha que cometêssemos um erro $\pm\ 0{,}1$ no valor inicial $x_0 = 1$, então:

$$se\ x = 0{,}9;\ então\ \lim_{n \to \infty} Q^n(0{,}9) = 0.$$

$$se\ x_0 = 1{,}0;\ então\ \lim_{n \to \infty} Q^n(1{,}0) = 1.$$

$$se\ x = 1{,}1;\ então\ \lim_{n \to \infty} Q^n(1{,}1) = \infty.$$

Seja $f\colon X \to X$ uma aplicação de um espaço métrico nele próprio. Chama-se ponto fixo de f a um elemento x_f tal que $f(x_f) = x_f$.

Assim, a órbita do número *1* é instável para $Q(x) = x^2$, pois para uma "pequena" variação no valor inicial (x_o) temos que as órbitas convergem para valores totalmente distintos.

"O conjunto de todos os pontos cuja órbita é instável (não estável), é chamado *Conjunto Caótico*. Como vimos, pequenas mudanças de parâmetro podem alterar radicalmente a caracterização do conjunto caótico." (CARVALHO et al., 1986, p. 84, grifo nosso). Então: "Conjunto Caótico é o conjunto de todos os pontos cuja órbita é instável."

Frequentemente, "[...] o conjunto dos pontos cujas órbitas *não são estáveis* forma um *fractal*. Assim, esses fractais são dados por uma regra precisa – eles são simplesmente o *conjunto caótico* de um *sistema dinâmico*." (CARVALHO et al., 1986, p. 84, grifo nosso).

Estudaremos detalhadamente o modelo de *Verhulst* que consta no livro escolar de Souza e Pataro (2009b), apresentado anteriormente. Esse modelo é representado por uma função real $y = k \cdot p \cdot (1 - p)$ introduzida para exemplificar o crescimento populacional de certas espécies. Segundo Baier (2005), o estudo da dinâmica populacional, por meio do modelo logístico de May, relacionado com os temas fractais, função composta e função quadrática, tornam evidente a dependência das condições iniciais.

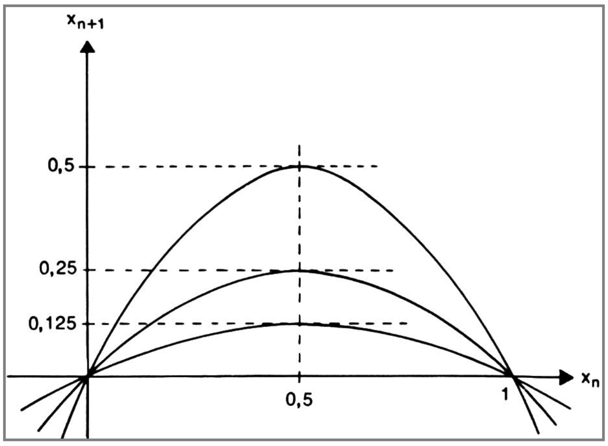
Suponhamos que exista uma espécie cuja população aumente e diminua durante um certo tempo, num meio ambiente controlado. Ecologistas têm sugerido vários modelos matemáticos para predizer o comportamento dessa população em longo prazo. Medimos a população da espécie no final de cada geração e indicamos por x_n sua porcentagem após n gerações, onde $0 < x_n < 1$.

Uma equação que pode ser utilizada para descrever ou modelar o crescimento é dado por: $f(x) = r \cdot x(1-x)$; onde r é uma constante que depende das condições ambientais, como por exemplo, a quantidade de comida presente.

Usando esta função quadrática na variável x_n deduzimos a população da geração seguinte, baseando-nos apenas no conhecimento da população da geração precedente e da constante r.

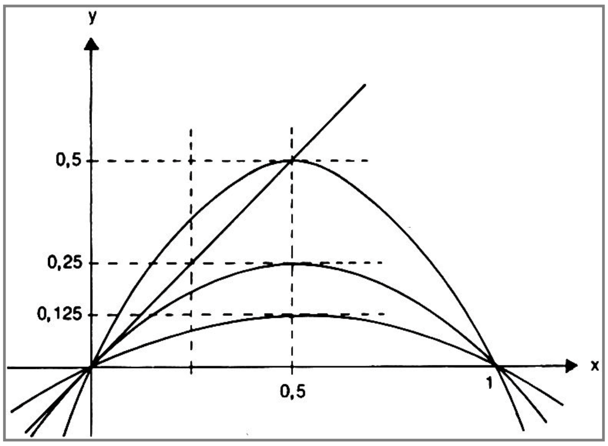
FIGURA 15 - Representação gráfica: a) da curva $x_{n+1} = -r \,.\, x_n^2 + r \,.\, x_n$; b) da tabela com os valores máximos da funçã*o* $y = r \,.\, x \,.(1 - x)$; c) das curvas $y = r \,.\, x \,.(1 - x)$ e $y = x$; d) da curva $x = \dfrac{r - 1}{r}$

(a)

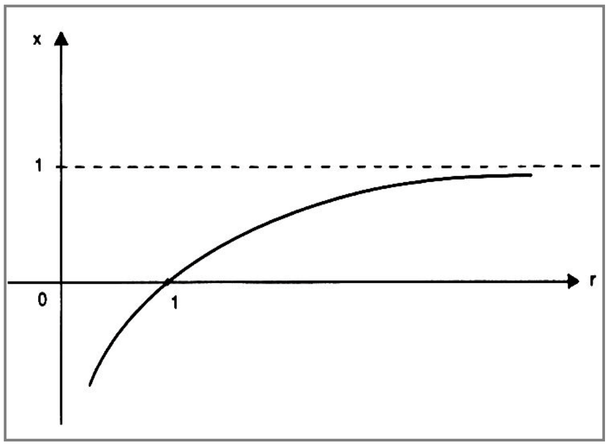


(b)

x	r	f(x) = y
0,5	0,2	0,05
0,5	0,4	0,10
0,5	0,6	0,15
0,5	0,8	0,20
0,5	1,0	0,25
0,5	1,2	0,30
0,5	1,4	0,35
0,5	1,6	0,40
0,5	1,8	0,45
0,5	2,0	0,50



(c)



(d)

Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 71-74).

O uso do fator *(1 - x_n)*, é mais do que simplesmente deduzir o crescimento, indica a quão numerosa a população virá a ser. A equação do segundo grau: $-r \,.\, x_n^2 + r \,.\, x_n = 0$, admite *0* e *1* como raízes; portanto, a população alcançará um máximo quando $x_n = 0{,}5$ (FIGURA 15a).

Vamos observar agora a variação dos máximos das funções em relação a *r*. Para isso, atribuamos a *r* valores pertencentes ao conjunto *{0,2; 0,4 ;0,6 ;0,8 ;1,0 ;1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0}*, e *x = 0,5*. Em seguida, determinamos os respectivos máximos da função: *y = f(x) = r . x . (1 – x)* para cada valor de *r* (FIGURA 15b). Verificamos que *y = f(x)* varia linearmente com *r* e que $y_{máx} = 0{,}25 \,.\, r$.

Os pontos de intersecção das parábolas definidas por r com a reta $y = x$, determinam os pontos fixos (FIGURA 15c). Para determinar os pontos fixos resolvemos o sistema de equações formadas por $y = r.\ x\ .\ (1 - x)$ e $y = x$. Então, ou $x = 0$ ou $-r\ .\ x + r - 1 = 0$.

Já sabemos que $x = 0$ é um ponto de intersecção; o outro será: $x = f(r) = \dfrac{r - 1}{r}$.

Por meio do esboço do gráfico dessa função, concluímos que, com $r > 0$ (uma vez que se trata de uma constante dependente das condições ambientais), a população tende a se estabilizar quando r cresce (FIGURA 15d).

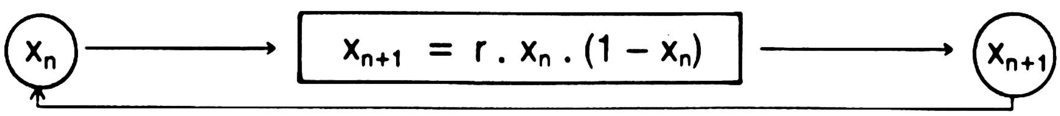
Se $0 < r \leq 4$, esta equação leva o intervalo unitário nele mesmo e podemos restringir nossa atenção ao intervalo $[0,\ 1]$, ou seja, $0 \leq r \leq 1$. Notemos que com a extinção da população, x_n decresce a zero e ela, certamente, nunca se recuperará.

FIGURA 16 - Modelo de crescimento para vários valores de r

(a)

$y = f(x) = r\ .\ x\ .\ (1 - x)$								
r	**0,5**	**0,7**	**1,3**	**2,0**	**2,6**	**3,3**	**3,5**	**4,0**
x_0	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**	**0,5**
1ª iteração	0,125	0,175	0,325	0,5	0,650	0,852	0,875	1
2ª iteração	0,055	0,101	0,285	0,5	0,592	0,476	0,383	0
3ª iteração	0,026	0,064	0,265	0,5	0,628	0,823	0,827	0
4ª iteração	0,013	0,042	0,253	0,5	0,607	0,481	0,501	0
5ª iteração	0,006	0,028	0,246	0,5	0,620	0,824	0,875	0
6ª iteração	0,003	0,019	0,241	0,5	0,613	0,479	0,383	0
7ª iteração	0,002	0,013	0,238	0,5	0,617	0,824	0,827	0
8ª iteração	0,001	0,008	0,236	0,5	0,614	0,479	0,501	0
9ª iteração	0,000	0,006	0,234	0,5	0,616	0,824	0,875	0
10ª iteração	0,000	0,004	0,233	0,5	0,616	0,479	0,383	0
11ª iteração	0,000	0,003	0,232	0,5	0,616	0,824	0,827	0
12ª iteração	0,000	0,002	0,232	0,5	0,616	0,479	0,501	0
13ª iteração	0,000	0,001	0,232	0,5	0,616	0,824	0,875	0
14ª iteração	0,000	0,000	0,232	0,5	0,616	0,479	0,383	0
15ª iteração	0,000	0,000	0,232	0,5	0,616	0,824	0,827	0

(b)



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 70 e 74).

Listamos as porcentagens previstas por esse modelo para vários valores de r. Notemos que quando r é "pequeno", o destino parece quase previsível. De fato, para um valor inicial

$x_0 = 0,5$ e $r = 0,5$ ou $r = 0,7$ a população desaparece após algumas gerações, enquanto que para $r = 1,3$; $r = 2$ e $r = 2,6$ ela tende a se estabilizar (admite um valor limite definido) (FIGURA 16a).

Se $r > 3$, os resultados gerados são assustadoramente diferentes. Para $r = 3,3$, os valores limites tendem a oscilar entre dois resultados distintos. Para $r = 3,5$, a oscilação ocorre entre quatro valores diferentes. Finalmente, quando $r = 4$ e $x_0 = 0,5$ temos o desaparecimento da espécie após apenas duas gerações. Como o valor inicial tomado foi $x_0 = 0,5$ em todos os casos, observamos que a primeira iteração fornece $y_{máx} = 0,25r$.
Se $x_0 = 0,4$ e $r = 4$ teremos *(0,4; 0,96; 0,154; 0,520; 0,998; 0,006 ; 0,25; 0,099; ...)*, ou seja, um total de população completamente aleatório.

Certos valores de *r* levam a resultados totalmente previsíveis (um valor limite fixo ou periodicamente repetido), mas outros fornecem resultados *randômicos*. Esta é a natureza imprevisível desse processo. Sobre a importância do estudo dos fractais randômicos, Baier (2005, p. 141, grifo nosso) destaca, comparando os fractais clássicos aos randômicos, afirmando que

> Estes fractais clássicos estão difundidos pela internet, em revistas populares e em materiais didáticos. Pela sua aproximação com a postura mecanicista, são confortavelmente aceitos, pois seu processo de construção é regular. No entanto, é o estudo dos *fractais randômicos* que pode contribuir para o entendimento da concepção de mundo instaurada desde a criação da teoria quântica, onde a aleatoriedade é presença.

O principal componente na formulação matemática do exemplo que demos, cuja equação vem sendo utilizada por ecologistas desde aproximadamente 1950, foi a iteração[5], ou seja, a repetição do processo muitas vezes (FIGURA 16b). Isto é exatamente o que foi feito para gerar a tabela (FIGURA 16a).

---

[5] Processos deste tipo são encontrados em todas as ciências exatas; por exemplo, para fazer a descrição de fenômenos naturais, por equações diferenciais, Isaac Newton e Gottfried Liebniz, basearam-se no princípio de *feedback*. O processo dinâmico determina a localização e a velocidade de uma partícula num determinado instante, a partir de seus valores no instante precedente (CARVALHO et al., 1986).

Verificamos na Figura 16a que a função, $f(x) = r \,.\, x \,.\, (1\text{-}x)$ para $x = 0{,}5$ e $r = 0{,}5$, gera a órbita de $0{,}5$ que é a sequência $(0{,}5;\ 0{,}125;\ 0{,}055;\ 0{,}026;\ 0{,}013;\ 0{,}006;\ 0{,}003;\ 0{,}002;\ 0{,}001;\ 0;\ 0;\ ...) \rightarrow 0$.

Quando $0 < r \leq 4$, a função leva $[0, 1]$ nele mesmo e podemos restringir a atenção nesse intervalo. Particularmente, se $0 < r \leq 1$, f tem um ponto fixo zero, uma vez que $f(0) = r \,.\, 0 \,.\, (1 - 0) = 0$. Como $f^n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in [0, 1]$, ele é atrator.

Quando $1 < r < 3$, o ponto fixo é instável, pois para uma pequena variação no valor inicial, as órbitas convergem para valores distintos. Por exemplo, $f^{\,n}(0) \rightarrow 0$ mas, $f^n(0{,}01) \rightarrow 0{,}5$.

A função f tem um ponto fixo estável $\frac{r\,\text{-}\,1}{r}$ quando r está entre 1 e 3, uma vez que:

$$f\left(\frac{r - 1}{r}\right) = r \,.\left(\frac{r - 1}{r}\right).\left[1 - \left(\frac{r - 1}{r}\right)\right] = (r - 1)\,.\left(\frac{r - r + 1}{r}\right) = \frac{r - 1}{r} \text{ e } f^n(x) \rightarrow \frac{\mathrm{r - 1}}{\mathrm{r}};\ \text{para todo } x \in\ ]0,1[.$$

Vejamos alguns exemplos de órbitas quando $r = 2$.

$f(x) = 2.\, x \,.\, (1 - x)$

$(0{,}1;\ 0{,}18;\ 0{,}29;\ 0{,}41;\ 0{,}48;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ ...\ ) \rightarrow 0{,}5;\ f^n(0{,}1) \rightarrow 0{,}5.$

$(0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}04;\ 0{,}08;\ 0{,}15;\ 0{,}26;\ 0{,}40;\ 0{,}48;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ ...\ ) \rightarrow 0{,}5;\ f^n(0{,}01) \rightarrow 0{,}5.$

$(0{,}2;\ 0{,}08;\ 0{,}15;\ 0{,}26;\ 0{,}38;\ 0{,}47;\ 0{,}49;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ ...) \rightarrow 0{,}5;\ f^n(0{,}2) \rightarrow 0{,}5.$

Quando r aumenta para 3 o ponto fixo $\frac{r - 1}{r} = \frac{2}{3} = 0{,}67$ fica instável. Surgindo órbitas de período 2, para as quais muitos pontos de $]0, 1[$ são atraídas.

Dizemos que um número real x tem período 2 quando a partir de um número qualquer da sequência for iterada duas vezes, gerar ele mesmo, ou seja $f^2(x) = x$.

Observemos algumas órbitas para entender melhor este fato.

Sequências de período dois:

a) $(0{,}1\ ;\ 0{,}27;\ 0{,}6;\ 0{,}72;\ 0{,}6;\ 0{,}72;\ 0{,}6;\ ...\ )$; *pois:* $f^1(0{,}6) = 0{,}72 \rightarrow f^2(0{,}6) = 0{,}6.$

b) $(0{,}2;\ 0{,}48;\ 0{,}75;\ 0{,}56;\ 0{,}74;\ 0{,}58;\ 0{,}73;\ 0{,}6;\ 0{,}72;\ 0{,}6;\ 0{,}72;\ 0{,}6;\ ...\ )$; *pois:* $f^1(0{,}6) = 0{,}72 \rightarrow f^2(0{,}6) = 0{,}6.$

c) *(0,21; 0,5; 0,75; 0,56; 0,74; 0,58; 0,73; 0,6; 0,72; 0,6; 0,72; 0,6; ...); pois:* $f^1(0,6) = 0,72 \rightarrow f^2(0,6) = 0,6$.

Quando r está "próximo" de $1 + \sqrt{6} \cong 3,45$ as órbitas de período *2* ficam instáveis e são substituídas por órbitas estáveis de período *4*. Então, fazendo $r = 3,45$, temos $f(x) = 3,45 \, . \, x(1 - x)$. Determinadas as órbitas dos números *0,1* e *0,316* temos:
(0,1 ; 0,31 ; 0,74; 0,66; 0,77; 0,61 ; 0,82; 0,51 ; 0,86; 0,41 ; 0,83; 0,49; 0,86; 0,41 ; ...)
(0,316; 0,75; 0,65; 0,78; 0,59; 0,84; 0,46; 0,86; 0,41 ; 0,83; 0,49; 0,86; 0,41 ; ...)

O número *0,86* tem período *4* pois, $f(0,86) = 0,41$; $f^2(0,86) = 0,83$; $f^3(0,86) = 0,49$ e $f^4(0,86) = 0,86$.

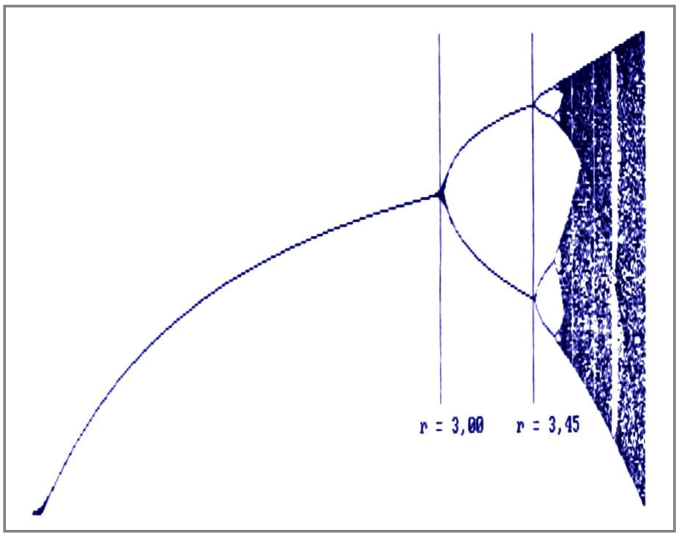
Teremos órbitas estáveis de período *4* para valores "próximos" a este considerado (nas vizinhanças desse valor) como, por exemplo, para $r = 3,44$; $r = 3,435$; $r = 3,43$. Conforme r aumenta, encontramos um valor para o qual as órbitas de períodos *4* ficam instáveis e são substituídas por órbitas estáveis de ordem *8* e assim por diante.

Um fato interessante neste processo é que as órbitas de período 2^s ocorrem com mais frequência até que r seja aproximadamente *3,570*. Conforme r se aproxima deste valor, a separação repetida de órbitas de período 2^s em órbitas estáveis de período 2^{s+1} produz uma sequência de órbitas atratoras que se aproximam de um conjunto do tipo do conjunto de Cantor.

Quando $3,570 < r \leq 4$, muitos tipos de comportamentos podem ocorrer, mostrando quão imprevisível é $f(x) = r. \, x \, . \, (1 - x)$.

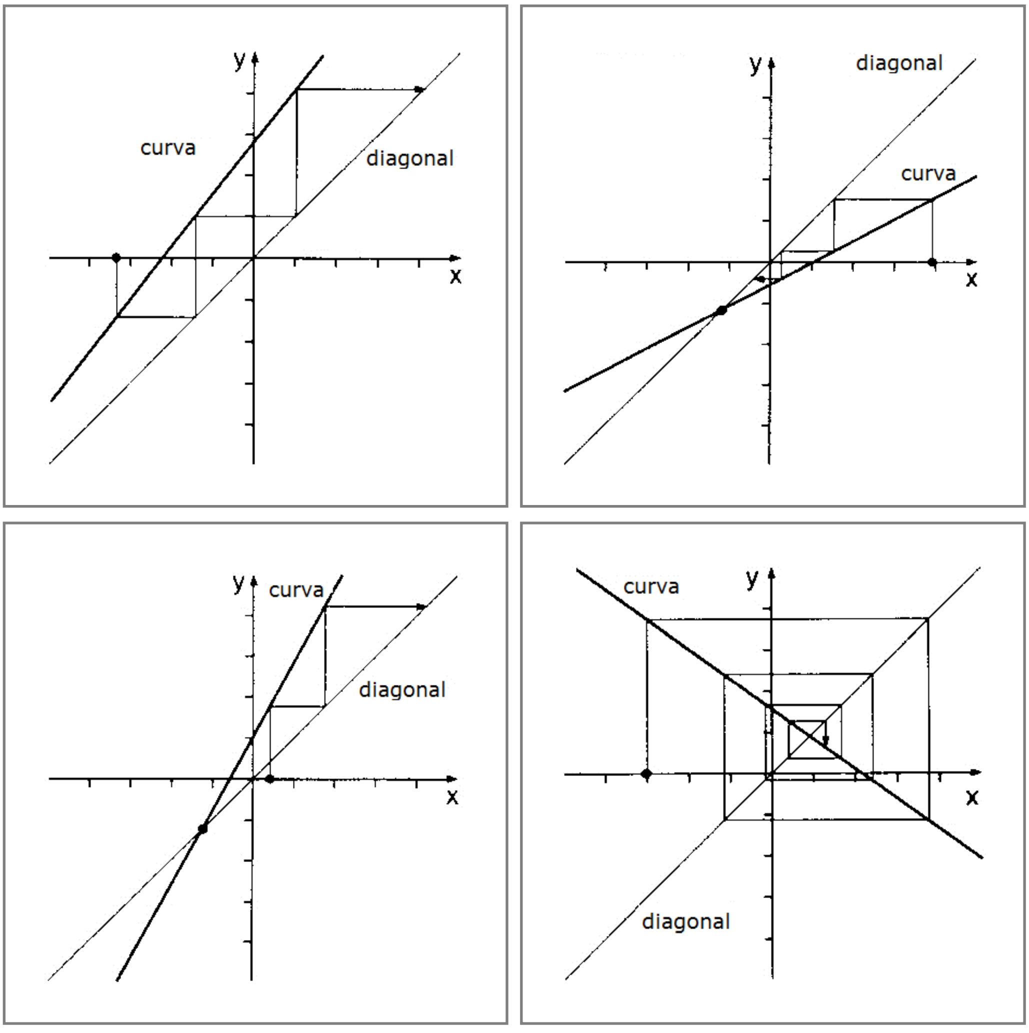
A nossa investigação buscou encontrar atividades que pudessem promover ligações entre os conteúdos da Matemática e os demais temas do currículo do Ensino Básico. Na verdade foram encontrados muitos autores afirmando que os fractais poderiam contextualizar vários assuntos do currículo, no entanto, não diziam como.

FIGURA 17 - Diagrama de Bifurcação



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 87).

FIGURA 18 - Iteração gráfica



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 11-12).

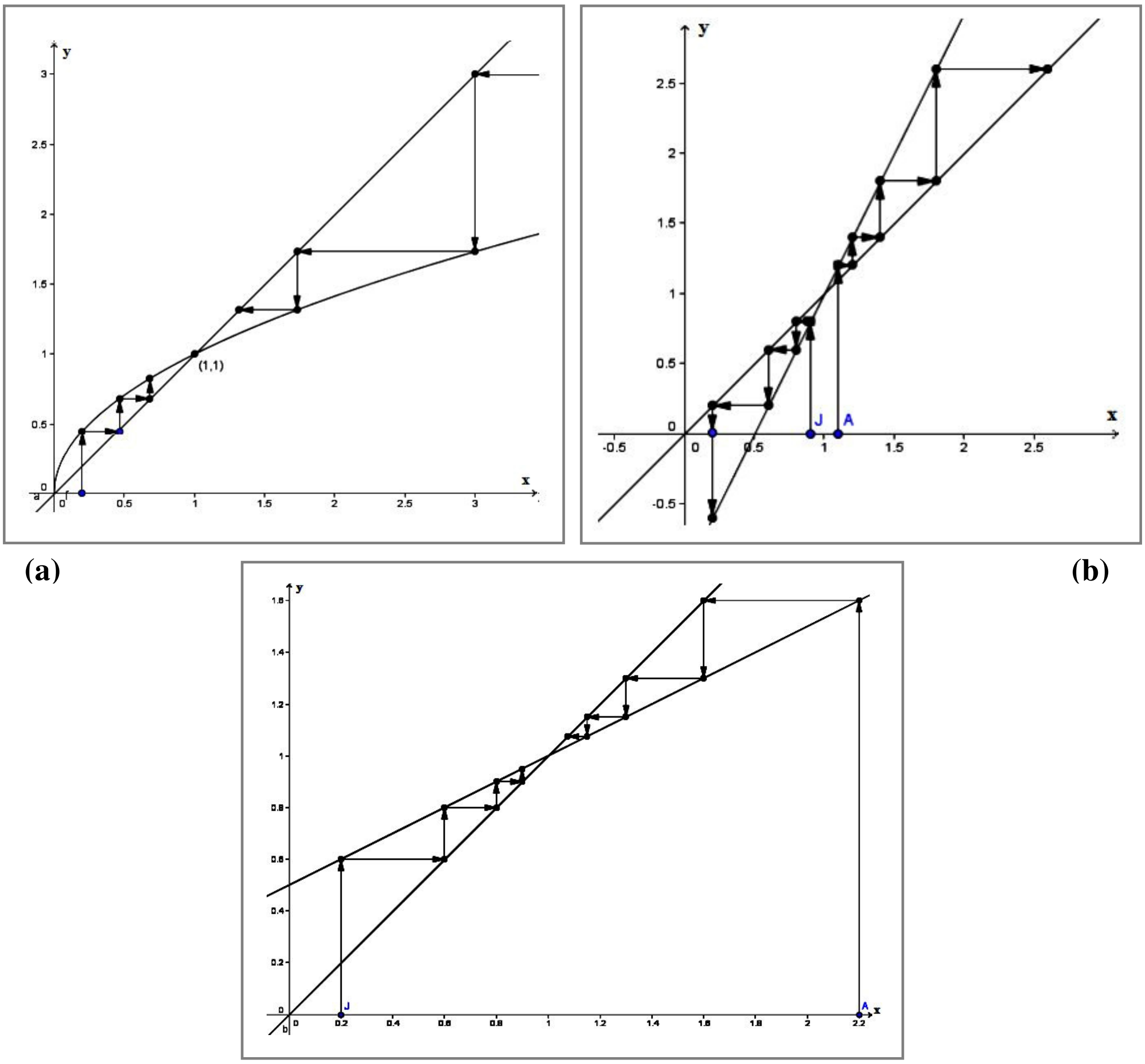
A melhor maneira de perceber o comportamento complexo da equação simples é através do uso de gráficos relacionando *x* e *r*. Esses gráficos são citados, usualmente, como Diagramas de Bifurcação (FIGURA 17).

A Figura 18 apresenta o processo de iteração gráfica, que é simples, mas poderoso, aproveitando ao máximo os nossos sentidos visuais. Para isso, partimos de um exemplo dado por Barbosa (2005) que foi adaptado para que pudéssemos perceber a importância do mapeamento e dos padrões que são conceitos matemáticos fundamentais para a construção da ciência alinhada com o pensamento sistêmico. Também nos valemos de algumas ideias de Peitgen et al. (1992) e de recursos do *software* Geogebra.

A iteração gráfica é um processo simples. O algoritmo do desenho nada mais é do que construção de segmentos verticais e horizontais. Em primeiro lugar, partimos do gráfico de uma função e depois para a diagonal $y = x$, o que reflete de volta para o gráfico novamente. Repetindo o processo várias vezes é gerado um caminho contínuo e alternando segmentos verticais e horizontais. Podemos aprender muito sobre o comportamento da função de forma visual na iteração do caminho.

O algoritmo da iteração gráfica é o seguinte: primeiro, partindo de um valor qualquer de x, traçamos uma reta vertical que intercepte a curva (função), depois, partindo do ponto de intersecção, traçamos uma reta horizontal até interceptar a diagonal $(y = x)$, por fim, partindo desse ponto de intersecção, traçamos uma reta vertical que intercepte a curva, e assim sucessivamente. Em outros termos, para obtermos tal caminho, primeiro desenhamos um segmento vertical para a curva e um segmento horizontal de lá para a diagonal. O processo geométrico central desta atividade é a sequência repetida destas duas etapas, repetidas vezes, cada vez usando o último ponto final como o próximo ponto de partida.

FIGURA 19 - Iteração gráfica da função: *f(x); g(x);* e *h(x)*

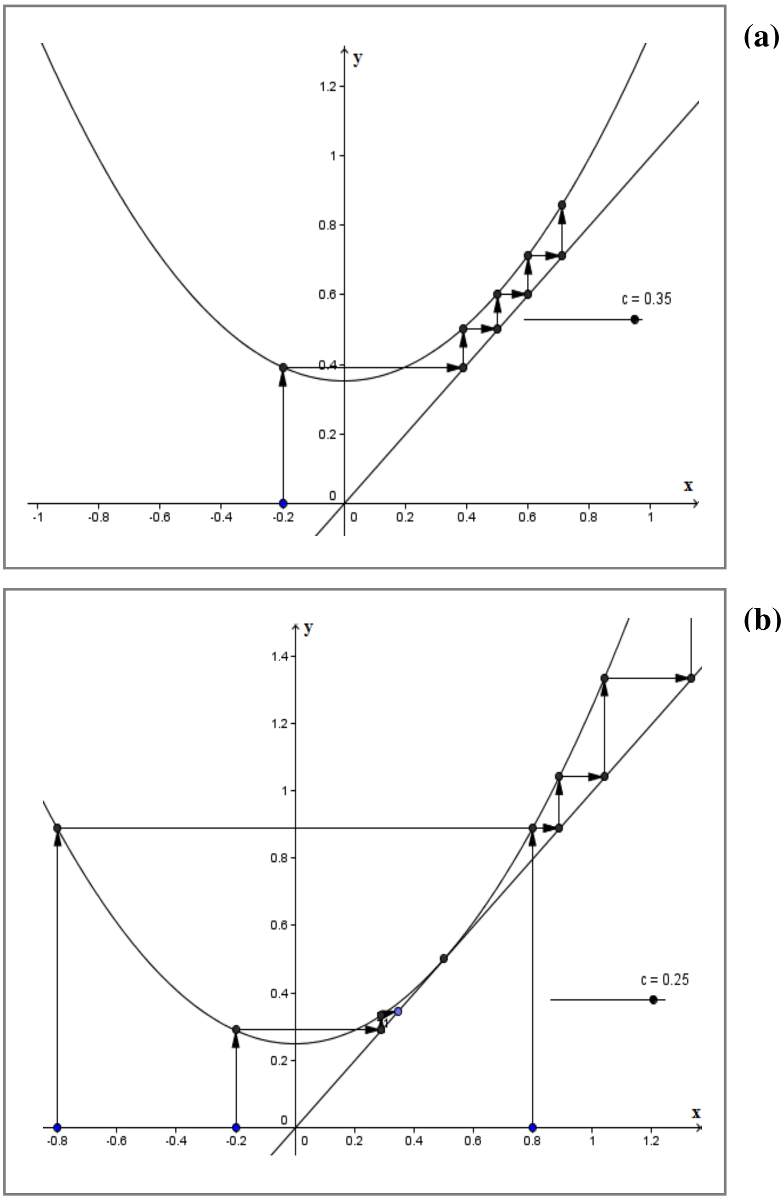


(a) **(b)** **(c)**

Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Na Figura 19a, $x = 1$ é um ponto fixo e é atrator; na Figura 19b, x = 1 é um ponto fixo e é repulsor; e na Figura 19c, x = 1 é um ponto fixo e é atrator. A Figura 19 é obtida pelo processo de iteração gráfica das funções reais: $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=2x-1$; e $h(x)=\frac{(x+1)}{2}$.

FIGURA 20 - Iteração gráfica da função *w(x)* com $c \geq 1/4$



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

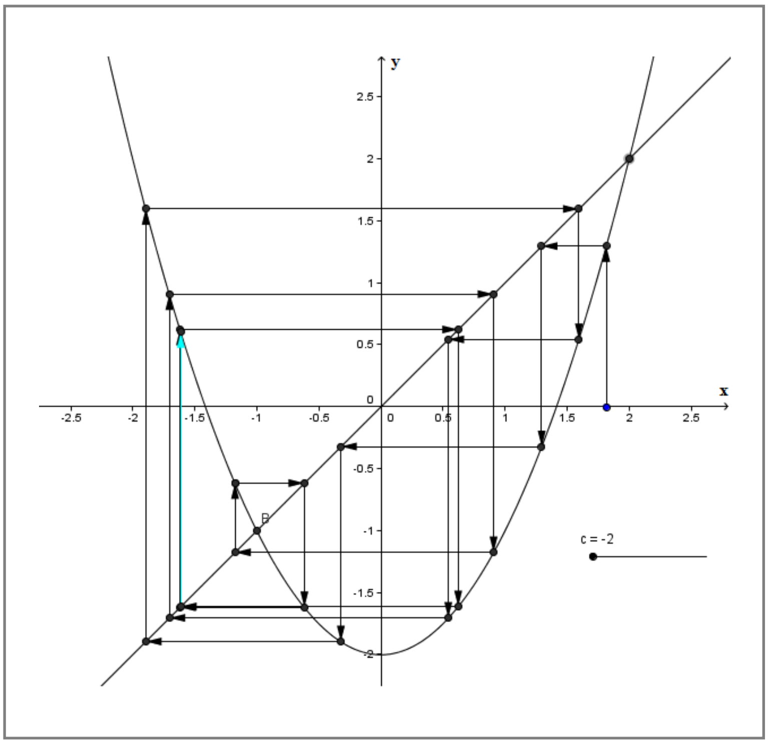
Estudaremos a iteração gráfica da função real quadrática: $w(x) = x^2 + c$ (x real, c constante). Resolvendo o sistema $y = x$ e $w(x) = x^2+c$, encontramos a equação: $x^2 - x + c = 0$, que pode ser reescrita como $(x - 1/2)^2 = 1/4 - c$, então: se $c > 1/4$, logo $w(x)$ não terá ponto fixo, o que significa que a parábola fica inteiramente acima da reta $y = x$ (FIGURA 20a).

Se $c = 1/4$, logo a função $w(x)$ tem um único ponto fixo cujo valor é $x = 0,5$, obtida da solução da equação: $x^2 - x + 0,25 = 0$. O que implica dizer que $w(x)$ tem um ponto fixo que é repulsor para $x > 0,5$ e $x < - 0,5$; e atrator para $-0,5 < x < 0,5$ (FIGURA 20b). Se houver um desvio de $\pm 0,3$ no valor do ponto fixo $x_0 = 0, 5$. Então:

Se $x = 0,8$; então $0,5$ é ponto fixo repulsor para $x > 0,5$ ou $x < -0,5$.

Se $x = 0,2$, então $0,5$ é ponto fixo atrator para $-0,5 < x < 0,5$.

FIGURA 21 - Iteração gráfica da função *w(x)* com $c < 1/4$



Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Se $c < 1/4$, logo a função: *w(x)* tem dois pontos fixos. Consideremos para exemplificar $c = -2$, então $w(x) = x^2 - 2$. A solução da equação: $x^2 - x - 2 = 0$ é $x = -1$ ou $x = 2$ que são os pontos fixos de *w(x)* (FIGURA 21).

Então, se $x = 2,1$ terá órbita *(2,1; 2,41; 3,8081; 12,5016...; 154, 29...)* $\to \infty$; ou seja, 2 é ponto fixo repulsor para $x > 2$. Se $x = 1,5$, então terá órbita *(1,5; 0,25; -1,93...; 1,7573...; 1,076...)*. Agora, não é simples tirar alguma conclusão apenas olhando para a sequência numérica, ou ainda, quando $x \in 1 < x < 2$. Dessa forma, faz-se necessário representar as funções $w(x) = x^2 - 2$ e $y = x$ no *software* GeoGebra e aplicar o algoritmo do desenho da iteração gráfica (figura 2.21). A Figura 21 mostra que o caminho rodeia o ponto fixo *(-1, -1)*, como um redemoinho de um sifão; logo esse ponto fixo é atrator.

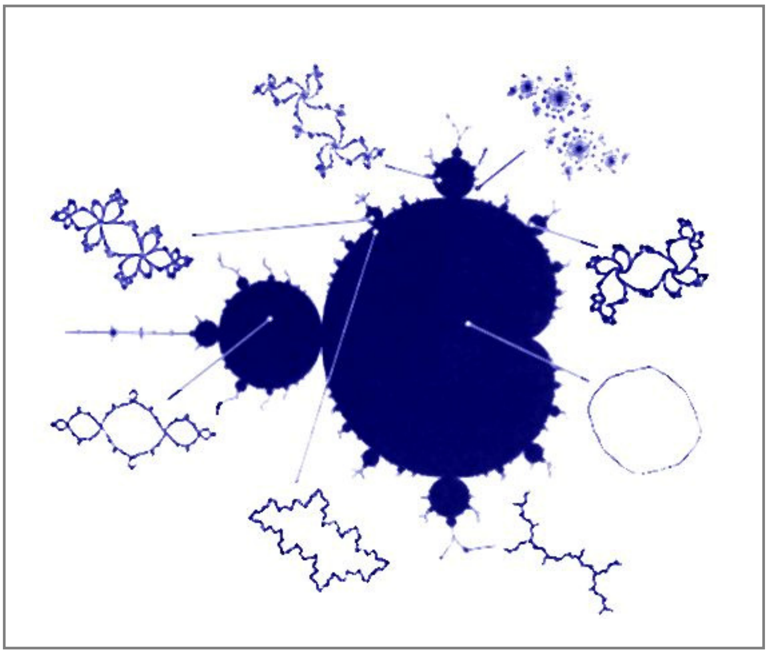
Se $x = -1,8$, então a sua órbita é $(-1,8;\ 1,24;\ -0,46...;\ -1,78...;\ 1,19046...)$, de novo rodearão o ponto fixo $(-1,-1)$ como um redemoinho em sifão. É importante observar que as órbitas para pontos do intervalo $-2 < x < 2$ estão nele inteiramente contidas, de onde se pode dizer que as órbitas são prisioneiras.

Se $x = -2,2$, então a órbita é $(-2,2;\ 2,84;\ 6,06...;\ 34,79...;\ 1208,44...) \rightarrow \infty$; então -1 é ponto fixo repulsor para $x < -2$.

Para ponto inicial $x = -2$ temos $w(-2) = 2$ e sucessivamente $w^i(-2) = 2\ (i > 1)$, ou que $x = -2$ é ponto aparentemente fixo ou eventualmente fixo.

Em suma, se $c < 1/4$, então temos dois pontos fixos, portanto para $x > 2$ ou $x < -2$ o ponto fixo $x = 2$ é repulsor; e se $-2 < x < 2$ o ponto fixo $x = -1$ é atrator. Podemos dizer também que as órbitas são prisioneiras no intervalo $-2 < x < 2$; e fugitivas para $x > 2$ ou $x < -2$.

FIGURA 22 - Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 147).

Se iterarmos a função complexa $f(z) = z^2 + c$, o resultado é uma sequência de números complexos que apresenta uma estranha dança no plano complexo. Para obter o conjunto de Mandelbrot (FIGURA 22) utilizamos $z = 0 + 0i$ como ponto inicial; poderíamos, então, perguntar o que ocorre quando algum outro valor inicial for fixado. Sabe-se que, nesse caso, o resultado é sempre uma versão deformada do conjunto de Mandelbrot.

Do ponto de vista técnico-histórico, o trabalho de Mandelbrot (1998) é uma união muito bem feita dos estudos realizados por Verhulst, Julia, Fatou, Poincaré e Kolmogorov. Esse trabalho só foi possível, na década passada, devido às facilidades proporcionadas pelos computadores.

2.4 DO ASPECTO DA LINGUAGEM

Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951), filósofo austríaco-britânico e um dos principais filósofos da linguagem do século passado, tem sua obra prima em *Tractatus Lógico-Philosophicus* (1921), na qual, como está em Giles (1993, p. 261), afirma: "[...] Os limites de minha linguagem denotam os limites do meu mundo." Vem como compreensão que fundamenta nossa busca. Desenvolver condições para o uso da linguagem, como meio da ação intelectual, é tudo o que incessantemente fazemos. Um aspecto da aprendizagem matemática é este. Então, do ponto de vista de que a teoria fractal visa ao desenvolvimento da nossa linguagem para a matemática, temos que esse novo conhecimento está na marcha natural da ampliação dos limites da ciência. Serão descritos alguns estudos que mostram a presença de conhecimentos sobre fractais empregados em diferentes domínios de atividades.

Angelis-Reis e Romanha (2006, p. 13) investigaram os granulomas hepáticos na esquistossomose e identificaram

> [...] uma topologia colagênica irregular e variável, semelhante a uma estrutura fractal após varias iterações. Fractais são uma família de formas constituídas por unidades iguais (auto-similares) que se ramificam infinitamente em escalas cada vez menores. A unidade inicial, ou seja, aquela que se mostra repetitiva diante de "infinitas" iterações, é denominada de embrião fractal ou pré-fractal.

Para se estudar aquelas propriedades geométricas, os pesquisadores buscaram observar a forma para então identificar padrões. Angelis-Reis e Romanha (2006, p. 14), ao analisarem os fígados de camundongos infectados após o início da reação periovular, encontraram

> [...]. a presença de resíduos vasculares de colágeno que se difundiam pelo tecido formando estruturas fractais de difícil caracterização geométrica. Aos 38 dias de infecção, entretanto, foi possível perceber dois padrões de difusão

> de fibras. Um de origem vascular e outro de origem fibroblastóide situado perifericamente. No padrão periférico identificamos o embrião.

Capra (2006, p. 38) destaca que "[...] o entendimento do padrão de auto-organização é a chave para se entender a natureza essencial da vida." Por isso, os cientistas procuram por padrões, pois nas ciências a repetição significa um padrão e nós inferimos muitas conclusões justamente pelo comportamento repetitivo dos eventos. O antropólogo busca identificar padrões da cultura, o psicólogo olha para os padrões de comportamento, o músico se encanta com os padrões rítmicos e o matemático investiga padrões numéricos, geométricos, buscando uma ordem e uma estética. Pode-se dizer que é da natureza humana identificar e analisar padrões, construindo para si significados e ampliando a linguagem.

Outro exemplo vem de organizações empresariais. Baier (2005, p. 69, grifo do autor) destaca que

> Na contemporaneidade, concepções sistêmicas são utilizadas nas empresas industriais, uma vez que administradores passam a considerar não apenas o grande número de componentes individuais envolvidos, mas também os efeitos originários das inúmeras interações. À medida que se tornam mais complexas, algumas empresas assumem o entendimento da organização dos negócios como um sistema social vivo, sendo incorporadas muitas ideias vindas da *Ecologia*.

Tôrres (2005, p. 1) se apropria das características dos fractais e as utiliza como uma linguagem aplicada às organizações:

> [...] devemos reduzir a unidade padrão de medida, e medimos a qualidade de uma empresa e de uma pessoa pelo conhecimento e pela sabedoria que elas têm e são capazes de gerar. Uma empresa pode aumentar seus limites: 1) dando maior atenção aos pequenos detalhes e desenvolvendo dados mais específicos de seus padrões (redução da medida do padrão cognitivo); 2) reformulando um padrão já existente, pelo desenvolvimento de novas interpretações de eventos passados.

Quanto à noção de autossimilaridade, Tôrres (2005, p. 5) afirma que

> A visão fractal da organização é a iterativa reflexão de toda a organização em cada uma de suas partes. A dinâmica de funcionamento de uma organização deve ser vista como ela toda se refletindo iterativamente ou recursivamente em cada uma de suas Unidades componentes. Não é uma visão hierárquica, para cima e para baixo e sim uma visão em zoom – uma visão fractal.

Portanto, a linguagem fractal tem se tornado cada vez mais presente no mundo das pessoas e do trabalho, tanto é, que Stewart (1991, p. 260), fundamentado em John Archibald Wheeler (1911-2008), afirma que "[...]. Hoje, ninguém que não tenha familiaridade com os fractais será considerado cientificamente alfabetizado." E por se tratar justamente de um conhecimento básico, é importante incorporá-lo à formação do aluno, pois a aquisição desse conhecimento tanto preparará o aluno cientificamente, como também, aumentará a sua capacidade de utilizar diferentes tecnologias em diferentes áreas de atuação, que segundo os *PCNEM*, esse é o alvo principal da Educação Básica (BRASIL, 2000a).

3 REVISÃO ACADÊMICA

Neste capítulo será apresentado um panorama das investigações que contém o tema fractal ou fractais, os quais foram tomados para esta pesquisa, buscando organizar uma unidade de conhecimento compreensiva do conceito fractal para o ensino de matemática. Fiorentini e Lorenzato (2009) dizem que a revisão acadêmica não só aprofunda teoricamente o conhecimento como dá sustentação à investigação.

3.1 BANCO DE TESES DA COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR

Para se compreender como o tema fractal vem se estabelecendo, em especial, como conteúdo para a Educação Básica, foi consultado o banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), onde se verificou que o primeiro registro desse tema ocorreu em 1987. Vale destacar que o período compreendido para o respectivo estudo foi entre 1987 a 2009. Constatou-se o aumento, com o passar dos anos, do uso dos termos fractais ou fractal nos estudos.

TABELA 2 - Quantidade de estudos acadêmicos no banco de teses da CAPES relacionados com os termos fractal ou fractais, no período de 1987-2009

Período	Número de estudos
1987 a 1989	6
1990 a 1994	27
1995 a 1999	78
2000 a 2004	142
2005 a 2009	178
Total	**431**

Fonte: Edilson de Moura, 2011.

As informações foram geradas ao se inserir os termos no buscador da CAPES e, em seguida, os mais de 400 resumos foram acessados, a fim de se identificar a área do conhecimento e o nível de titulação da pesquisa (TABELA 2). Desse modo, encontramos esses termos na

> [...] astronomia, administração, agronomia, arquitetura e urbanismo, biologia, biometria, botânica, física, ciência da computação e matemática computacional, ciência florestal, ciências biológicas, ciências contábeis, ciências geodésicas, comunicação, comunicação e semiótica, ecologia, educação, educação física, engenharia agrícola, engenharia ambiental, engenharia biomédica, engenharia civil, engenharia de alimentos, engenharia de minas, engenharia de petróleo, engenharia de produção, engenharia dos materiais, engenharia e tecnologias espaciais, engenharia elétrica, engenharia eletrônica e computação, engenharia florestal, engenharia hidráulica, engenharia mecânica, estatística, estruturas, fisioterapia, fitotecnia, geociência, geofísica, geografia, geologia, geotecnia, história, irrigação e drenagem, letras, entre outros. (MOURA; MACHADO, 2010, p. 10).

Vale destacar que o aparecimento crescente dos termos pode não implicar, necessariamente, no aumento do uso da Teoria Fractal ou da Geometria Fractal; assim, por exemplo, alguns dos estudos podem conter o termo fractal com sentido de fragmentado ou quebrado, não guardando com isso, uma relação mais efetiva e direta com a teoria. Por outro lado, pode ocorrer o caso de um estudo não ter aquelas palavras-chave e, no entanto, utilizar a Teoria Fractal. Mas, ao que tudo indica, segundo Capra (2006, p. 118, grifo do autor), a grande maioria dos estudos utilizam a Teoria e a Geometria Fractal como linguagens, visto que, foi Mandelbrot que “ [...] introduziu o termo ‘fractal’ para caracterizar sua invenção e publicou seus resultados num livro espetacular, *The Fractal Geometry of Nature* [...]”.

TABELA 3 - Quantidade de estudos, no banco de teses da CAPES, sobre fractais na área de Matemática e Educação, no período de 1987-2009

Área do conhecimento	**Número de estudos**
Educação	9
Educação para Ciência	1
Educação Matemática	5
Educação em Ciência e Matemática	2
Ensino de Matemática	1
Ensino das Ciências	1
Matemática	5
Matemática Aplicada	9
Total	**33**

Fonte: Edilson de Moura, 2011.

Os termos fractal e fractais também foram encontrados nos estudos nas áreas de Educação e Ensino de Matemática, numa proporção ligeiramente maior do que nas áreas de Matemática e Matemática Aplicada, sendo que desse total de investigações, 60% são em nível de mestrado e os demais em nível de doutorado (TABELA 3).

O aumento do uso do termo fractal na academia pode ser justificado pelo.

> [...] grande fascínio que a teoria do caos e a geometria fractal exercem sobre as pessoas envolvidas em todas as disciplinas – desde cientistas a empresários e a artistas – pode ser, de fato, um sinal de esperança de que o isolamento da matemática está terminando [...] (CAPRA, 2006, p. 129).

Para Capra (2006) o isolamento da matemática é um fenômeno novo, pois a história mostra que, durante muitos séculos, matemáticos como Omar Khayyám, Descartes, Newton, Leibniz e Gauss, todos produziram avanços científicos em outros campos. A exemplos desses, comenta Capra (2006, p. 129), poderiam ser acrescentados dezenas de outros, pois

> [...] a matemática nunca foi separada de outras áreas do conhecimento e da atividade humanos. No entanto, no século XX, o reducionismo, a fragmentação e a especialização crescentes levaram a um extremo isolamento da matemática, até mesmo no âmbito da comunidade científica.

Constata-se que, conforme banco de teses da CAPES, várias áreas do conhecimento se utilizam do termo fractais em suas pesquisas. Além disso, vimos que a teoria fractal provoca grande fascínio nas pessoas, o que, segundo Capra (2006), pode contribuir para unir, ligar e aproximar a matemática das regiões do conhecimento que estão compartimentizadas ou isoladas. A compreensão de aproximar a matemática de outros conhecimentos também é compartilhada pelos PCNEM.

Os PCNEM não só defendem a importância de se ligar as diversas áreas do conhecimento, mas também, os diversos conteúdos da própria matemática que estão nucleados. Para isso, deve-se promover a interdisciplinaridade e o desenvolvimento das competências básicas, que são as "[...] Da capacidade de abstração, do desenvolvimento do *pensamento sistêmico*, ao contrário da compreensão parcial e fragmentada dos fenômenos [...]". (BRASIL, 2000a, p. 11, grifo nosso).

Esses Parâmetros enfatizam, ainda, que alguns elementos são essenciais na composição de temas ou tópicos em Matemática, os quais devem ser escolhidos a partir de alguns critérios, sendo que, desses critérios, o central

> [...] é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000b, p. 43).

Os estudos expostos a seguir foram organizados por meio de um roteiro de fichamento sugerido por Fiorentini e Lorenzato (2009). Esses autores acreditam que a realização de leituras e análise de relatos de pesquisas contribuem, efetivamente, para que o futuro pesquisador possa se apropriar da dinâmica e da estrutura de uma investigação, além do que,

> [...] Essa leitura/análise não deve restringir-se apenas aos bons exemplos de pesquisa. Muitas vezes podemos tirar ricas lições de um mau trabalho de pesquisa, pois também aprendemos a partir dos erros dos outros. Mas para isso é necessária a realização de uma boa análise do trabalho. Nessa dinâmica, o futuro pesquisador não apenas se apropria do processo de pesquisa como, também, aprende a avaliar um relatório de pesquisa. (p. 189).

3.2 ESTUDOS ACADÊMICOS

Dos sete estudos acadêmicos selecionados na área de educação ou ensino, quatro forneceram contribuições significativas para a nossa questão-problema de investigação, enquanto os demais ajudaram a construir um panorama histórico da presença pedagógica do conceito fractal no campo da Educação Matemática. Os trabalhos não serão descritos por ordem de qualidade, mas sim, numa sequência que julgamos mais compreensiva.

3.2.1 Ricardo Ronald Eberson – Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano (2004)

Dos estudos acadêmicos selecionados, a investigação mais antiga que tivemos acesso é de 2004. O autor apoia o seu estudo em três temáticas principais como base de sustentação conceitual:

> [...] a apresentação da Geometria Fractal, enquanto objeto do saber matemático; a análise de ambientes informáticos de aprendizagem humana, enquanto meios de representação desses objetos matemáticos; e a utilização didática desses ambientes, visando a identificação de situações de ensino que explorem a construção de fractais. (p. 55).

Com o intuito de aprofundar e relacionar as três temáticas, o autor formula as seguintes questões de pesquisa:

> Que transformações resultam do esforço de representação decorrente da passagem dos modelos matemáticos, utilizados na construção de objetos fractais, para modelos computáveis, utilizados em ambientes informáticos de aprendizagem? Quais as consequências dessas transformações numa perspectiva didática?
>
> Que contribuições podem advir da utilização dos processos de construção de fractais, assim como dos conceitos matemáticos a eles relacionados, no sentido da contextualização do ensino e aprendizagem de determinadas noções matemáticas? (p. 55)

A principal tendência ou abordagem metodológica do estudo está fundamentada nas concepções teóricas de Transposição Informática, de N. Balacheff, em *Eclairage Didactique sur les* (1994) e *La Transposition Informatique, un Nouveau Problème pour la Didactique* (1998).

A síntese extraída é que o estudo contém a elaboração de uma proposta de sequência didática envolvendo o conceito de Transformações Afins no Plano, contextualizada com a construção de objetos fractais a partir da utilização ferramentas informáticas, MicroWorlds LOGO e Geome Tricks, para alunos de graduação em matemática ou afins. O estudo explicita que não houve experimentação da sequência didática por motivos decorrentes da complexidade e da amplitude das questões envolvendo a Geometria Fractal e o uso de ferramentas computacionais. Em sua conclusão, o estudo apresenta várias sugestões direcionadas para o Ensino Médio, envolvendo possíveis contextualizações de conteúdos como matrizes, sistemas de funções, sequências numéricas, representações gráficas, sequências complexas, limites e números irracionais, porém, o estudo não mostrou como realizar tais contextualizações.

3.2.2 Andrea Gomes Nazuto Gonçalves – Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais (2007)

Este segundo estudo toma as seguintes questões investigativas: *Como a utilização dos fractais pode ser motivadora na percepção da autossemelhança? Como a autossemelhança pode contribuir no processo de generalização das fórmulas da progressão geométrica para alunos de Ensino Médio?*

A principal tendência ou abordagem metodológica do estudo está fundamentada nos pressupostos de Parzysz, Machado, Vergnaud e na Geometria Dinâmica. No entanto, a sequência de ensino foi projetada de acordo com a metodologia da engenharia didática e foi analisada segundo o planejamento feito *a priori*.

A base documental para análise se constitui de livros didáticos do Ensino Médio, das atividades da sequência de ensino propostas pela pesquisadora, das anotações dos professores-observadores, das gravações dos diálogos das duplas e o questionário diagnóstico.

Gonçalves analisou três livros didáticos que continham as progressões geométricas. Para isso, foram definidas as seguintes categorias de análise: inicia por exemplo numérico; contextualiza; utiliza fractais na contextualização; e utiliza fractais em exercícios.

A autora concluiu que os fractais confeccionados por meio de dobraduras, por meio do dinamismo dos *softwares* de geometria dinâmica ou pela observação das gerações do tetra-círculo, facilitam a compreensão da autossemelhança na medida em que os alunos observam suas características; por meio dessas atividades, o aluno descobre propriedades inerentes aos fractais e passa a desenvolver um processo de generalização. Esta autossemelhança também faz despertar o senso estético, que age motivando o aprendizado matemático. Gonçalves planejou uma sequência de ensino com muitas atividades e constatou que essa dinâmica resultou em cansaço e certa desmotivação nos alunos, pois tinham pouco tempo para desenvolver habilidades com materiais manipulativos, com apreensão dos conceitos programáticos de dois *softwares,* com o conceito de Progressões Geométricas, com os conceitos da geometria fractal, conceito de semelhança, e tantos outros.

3.2.3 Hamilton Cunha de Carvalho – Geometria fractal – perspectivas e possibilidades no ensino de matemática (2005)

Este é um estudo de investigação no qual foi planejado um curso sobre a geometria fractal. Foi realizado por Carvalho, que é professor de Matemática da rede pública de ensino. A reflexão sobre sua prática docente o conduziu a querer investigar o porquê de a Matemática ser considerada, pela maioria dos alunos, difícil de ser aprendida, chata e sem significado real.

Alguns questionamentos como: quais as vantagens de se ensinar a geometria fractal e quais os pontos favoráveis dessa teoria para o ensino-aprendizagem, contribuíram na formulação da sua questão investigativa: "Ao trabalhar com atividades de Geometria Fractal, quais são os fatores que influenciam no aprendizado de alguns tópicos da Matemática curricular em alunos do 3°ano do Ensino Médio?" (p. 2). Em relação à principal tendência metodológica e aos sujeitos de pesquisa, o autor descreve:

> Em nossa pesquisa, muito inspirados na metodologia utilizada por Baraldi (1999), optamos pelo enfoque qualitativo, em especial, do estudo de caso. Nosso caso consistiu num curso sobre Geometria Fractal ministrado por nós. O público alvo foram 11 alunos do 3° Ano do Ensino Médio, da escola Plácido de Castro, na cidade de Santarém-Pa. Nesta escola também trabalhamos lecionando a disciplina Matemática. É importante ressaltar que dos 11 alunos que iniciaram o curso, apenas 7 deles conseguiram concluí-lo. Todos eram nossos alunos no ensino regular. (p. 18).

As informações que constituem a investigação provêm da observação direta; do teste específico; e do questionário, todos aplicados durante o curso Geometria Fractal para o Ensino Médio que teve a duração de cinco dias. A observação direta teve o propósito de anotar falas e impressões do comportamento dos alunos durante as aulas, enquanto o questionário objetivava captar as impressões dos alunos acerca da Matemática, da Geometria Fractal, das atividades do curso e dos conteúdos matemáticos abordados tanto em suas trajetórias escolares, quanto dentro do curso.

O autor buscou novos caminhos, os quais conduziram-no ao encontro da Geometria Fractal, que se lhe apresentou mais interessante, moderna e mais próxima da linguagem dos alunos, possibilitando, assim, uma aprendizagem mais significativa da Matemática.

3.2.4 Arlete Aparecida Oliveira de Almeida – Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula (2006)

Este quarto estudo tem o objetivo de investigar os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula. A autora teve o seu primeiro contato com o tema, numa aula demonstrativa, na qual foram apresentados exemplos de situações da vida que poderiam ser relacionados com a Matemática. Depois de dezessete anos de seu encontro com o tema, Almeida retornou ao Campus Universitário para iniciar a pós-graduação e estranhou o fato de se ter avançado tão pouco no estudo da geometria fractal para a Educação Básica.

Com o objetivo de contribuir para o avanço do estudo da geometria fractal na sala de aula, a autora se propõe a responder às seguintes questões investigativas: *Quais as possibilidades de mudança de atitude do professor de matemática de modo a encaminhar um trabalho inovador em sala de aula? Será que por meio de um mini-curso, seria possível proporcionar ao professor condições para que ele pudesse encaminhar um trabalho inovador em sala de aula? Como produzir um encadeamento metodológico que proporcione ao professor visualizar um novo momento para o ensino, levando-o a transpor as resistências que possui pela própria formação acadêmica que teve? Como desenvolver um encadeamento metodológico que possa ser aplicado na sala de aula?*

Almeida pretendia responder essas questões investigativas no decorrer do mini-curso que foi dividido em duas sessões, aplicadas em dois dias. Para alcançar esse seu objetivo, elaborou uma sequência didática com o propósito de fomentar possibilidades para que, a partir delas, o professor adquirisse condições de encaminhar a geometria fractal para a sala de aula, provocando assim, mudanças nas práticas pedagógicas. Além disso, pretendeu

> Observar de que forma os professores atuam à frente de uma nova proposta de trabalho para a sala de aula, contribuindo para uma formação reflexiva dos pesquisadores frente ao estudo das possibilidades de inovação do professor de matemática sobre a abordagem de um novo conteúdo: Geometria dos Fractais. (p. 29).

Almeida afirma que elaborou “[...] uma sequência didática para aplicar aos professores, já como um possível modelo a ser reutilizado em sala de aula.” (p. 34), porém não foi essa a proposta inicial do trabalho, que era um projeto pedagógico realizado pelos próprios professores ao final do mini-curso.

Os sujeitos da pesquisa eram professores da rede pública da região Sul da cidade de São Paulo, composta por 84 escolas do Ensino Fundamental I, II e Ensino Médio, dos períodos diurno e noturno. Como a Diretoria de Ensino já realizava reuniões com os professores, isso contribuiu para a aplicação de um questionário diagnóstico aos oitenta e três professores que frequentavam as reuniões; apenas cinco não participaram do mini-curso.

O mini-curso foi elaborado a partir desse questionário diagnóstico, composto por nove questões objetivas, que produziram informações sobre o nível de conhecimento dos professores relacionado à geometria fractal. Além desse, Almeida realizou outro questionário formado por cinco questões, que foram aplicadas duas vezes, sendo uma no início do primeiro dia e a outra, ao final do mini-curso. São elas: 1- Você já ouviu falar sobre fractais, tem formulado uma ideia a seu respeito. Se não, o próprio nome deve levá-lo a fazer referência sobre o seu significado. 2- Professor, como a matemática da escola se relaciona com a sua história de vida? 3- Professor, você percebe a necessidade de inserir novos rumos para o ensino da matemática? Cite essas necessidades e suas justificativas. 4- Você acha que a sua área de atuação como professor de Matemática, deve seguir os padrões propostos durante sua formação? Comente. 5- Você percebe algum obstáculo, no ensino da matemática para abordar adequadamente assuntos que ainda não foram inseridos no nosso currículo? Quais? Essa reaplicação tinha o objetivo de produzir informações que permitissem verificar se houve mudanças de atitude do professor e se o mini-curso havia proporcionado ao professor condições para que ele encaminhasse a geometria fractal para a sala de aula.

Devido à importância da análise do questionário reaplicado para a investigação, será detalhada apenas a análise da primeira questão, realizada por Almeida, pois é aquela que tem mais aproximação com o nosso objetivo, que é buscar uma essência compreensiva desenvolvida nesses estudos. Essa questão foi analisada quantitativamente por meio de cinco categorias, da seguinte forma: 20% sabem exatamente o significado da palavra; 20% se referem ao conceito de fração; 30% não conseguiram identificar o significado da palavra; 28% relacionaram a palavra à geometria ou a alguma aplicação; e em 2% as respostas não tinham relação com a pergunta. Essa mesma questão, reaplicada no final do curso, produziu uma segunda análise, a qual permitiu a Almeida afirmar que percebeu “[...] um grande progresso ao se desmistificar o assunto, dando oportunidade para que o professor possa fazer mais uma escolha na sua atividade docente.” (p. 127).

Almeida apresenta as seguintes conclusões: poucos professores conhecem ainda o que é a geometria fractal; o mini-curso proporcionou aos professores uma alternativa para aplicação em sala de aula; os professores perceberem que sua formação acadêmica se deu por meio de aplicação de fórmulas sem clareza a respeito da finalidade; a Geometria Fractal ainda está muito distante da prática dos docentes; e que o uso do computador é necessário para se desenvolver conceitos e introduzir os fractais.

TABELA 4 - Investigações que se utilizam dos fractais iniciador-gerador como exemplos de fractais, no período de 2004-2007

Fractais iniciador-gerador	**Eberson (2004)**	**Carvalho (2005)**	**Almeida (2006)**	**Gonçalves (2007)**
Conjunto de Cantor	X	X	X	X
Curva de Von Koch	X	X	X	X
Floco de Neve de Koch	X	X	X	
Triângulo de Sierpinski	X	X	X	X
Tapete de Sierpinski			X	
Tetraedro de Sierpinski			X	
Esponja de Menger	X		X	
Curva de Peano	X		X	X
Curva de Hilbert	X		X	
Cartão fractal			X	X
Tetra-Círculo				X
Construção com régua e compasso			X	

Fonte: Edilson de Moura, 2011.

A Tabela 4 apresenta uma síntese dos quatro estudos descritos, buscando estabelecer e organizar uma primeira unidade de compreensão do conceito fractal para o ensino de Matemática. Os estudos apresentam, normalmente, como exemplos de fractais, o conjunto de Cantor, curva de Von Koch, curva de Peano e muitos outros fractais, que têm um iniciador que os gerará.

O planejamento de sequências didáticas tanto para alunos da Educação Básica, como para alunos da graduação em Matemática e até para professores é outro ponto bastante explorado nos estudos. No planejamento dessas sequências didáticas há excesso de atividades planejadas, falta de familiaridade com os diversos *softwares*, falta de habilidade para executar trabalhos manuais e excesso de informações transmitidas sobre o conceito fractal.

Um conceito pouco desenvolvido nos trabalhos é o da dimensão fractal. Os trabalhos a definem como uma característica importante do conceito fractal, porém, as atividades se resumem apenas no cálculo da dimensão do objeto fractal e, muitas vezes, sem significado algum para o sujeito.

Por fim, os estudos expostos apresentam a Geometria Fractal como um conhecimento com potencial para ligar áreas nucleadas da própria Matemática, contribuindo para uma contextualização interna.

3.2.5 Talita Secorun dos Santos – A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica (2006)

Este estudo pretende responder às seguintes indagações: *Como os professores sentiram a inclusão das Geometrias não-euclidianas no Currículo da Educação Básica do Estado do Paraná? O que pensam a respeito? Após participarem de um curso sobre Geometrias não-euclidianas se sentem mais preparados para abordar o tema com seus alunos?*

Santos, professora da Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão, onde ministra aula no curso de Licenciatura em Matemática. Essa vivência acadêmica permitiu-lhe supor que os professores da Educação Básica do Núcleo Regional de Maringá não conhecem as Geometrias não-euclidianas ou, que elas não foram ensinadas durante sua formação acadêmica. Por isso, logo que soube da inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica do Estado do Paraná, buscou questionar a maneira que esse tema seria estudado pelos professores da Educação Básica e como eles reagiriam a tal inclusão.

Este estudo se caracteriza como sendo de cunho qualitativo interpretativo. Os sujeitos participantes da pesquisa foram cinquenta professores da Educação Básica do Núcleo Regional de Maringá, participantes do curso de Geometrias não-euclidianas oferecido pela Universidade Estadual de Maringá, em parceria com o Núcleo Regional de Maringá, cuja carga horária foi de vinte e quatro horas distribuídas em seis dias consecutivos, onde foram apresentadas, nessa ordem, as seguintes geometrias: Euclidiana, Topológica, Projetiva, Projetiva com a apresentação de problemas da Euclidiana; Hiperbólica e Esférica; e Fractal.

Para obter as informações para análise, a pesquisadora aplicou dois questionários. O primeiro foi aplicado em 2007 aos professores do Núcleo Regional de Maringá com intuito de sondar o nível de conhecimento sobre as Geometrias não-euclidianas e verificar se trabalhavam com o tema em sala de aula ou se tinham conhecimento da inclusão no currículo de Educação Básica. O segundo foi aplicado a todos os participantes do curso de Geometrias não-euclidianas. Esse segundo questionário era composto por sete atividades que foram aplicadas nos seis encontros ocorridos com o grupo de cinquenta professores. Conforme a autora, a investigação não tinha interesse em avaliar quantitativamente o conhecimento dos professores, mas sim, detectar os principais obstáculos que eles enfrentariam no decorrer do curso e identificar o principal caminho para seu melhor aproveitamento.

Os elementos constitutivos da análise provieram dos questionários aplicados, das gravações feitas dos encontros e das observações do diário de campo. A análise dos documentos foi realizada por meio da metodologia da Análise de Conteúdo, baseada em Roque Moraes, em *Análise de Conteúdo* (1999).

Após a análise da primeira atividade do primeiro dia, os principais resultados obtidos pela pesquisadora foram: os professores se mostraram atentos às mudanças curriculares, sendo que apenas sete não sabiam que a inclusão havia ocorrido e um dos principais obstáculos para o entendimento das Geometrias não-euclidianas é a falta de conhecimento da Geometria Euclidiana, principalmente da Espacial. Já os resultados da análise da segunda atividade do segundo dia foram: vinte e seis professores declararam que não conheciam a geometria euclidiana axiomática; quarenta declararam que não conheciam o assunto Topologia, apesar de alguns declararem já terem visto algo na faculdade; e dez professores confundiram a palavra topologia com topografia. Os resultados permitiram que a pesquisadora afirmasse que o estudo das Geometrias não-euclidianas "[...] pode contribuir para o ensino da Geometria de maneira geral, já que para se aprender Geometrias não-euclidianas é necessário solidificar o conhecimento de Geometria Euclidiana." (p. 68).

Os resultados da análise da terceira atividade do terceiro dia foram: quarenta e seis professores afirmaram que depois da aula de Topologia era possível o trabalho com esse tema na Educação Básica, o que representava uma mudança de postura razoável para grande parte de professores que, antes do segundo encontro, não a conheciam; e, ao final do terceiro encontro, foi possível perceber que os professores ainda se sentiam desconfiados e despreparados para trabalhar com o ensino das Geometrias não-euclidianas na Educação Básica. A quinta atividade do quinto dia desencadeou os seguintes resultados: vinte e sete pessoas não faziam ideia do que era a Geometria Hiperbólica e vinte e duas não conheciam o objeto de estudo da Geometria da Superfície Esférica; e o número de professores que afirmaram que as retas paralelas se encontram em um ponto aumentou consideravelmente a cada encontro. A pesquisadora ressalta que, apesar da grande dificuldade em entender a Geometria Hiperbólica, os professores demonstravam muita curiosidade, o que os deixava alvoroçados.

A sexta atividade tinha o objetivo de detectar conhecimentos relativos à geometria Hiperbólica e Esférica, ministradas no dia anterior e também verificar o conhecimento prévio dos professores, concernente à geometria fractal. Sobre a geometria fractal: vinte e dois professores afirmaram não conhecê-la; onze afirmaram ter visto alguma imagem ou leram a respeito; um professor declarou que são superfícies com contornos irregulares que mudam de direção; quatro professores falaram que é a geometria da natureza; um professor associou a equações que geram imagens no computador; cinco professores afirmaram que são divisões infinitas baseadas em um padrão; um professor associou a mosaicos; três professores disseram que é o estudo de fragmentos; e dois professores afirmaram que são figuras que se formam com vários desenhos do mesmo formato. Do exposto, a pesquisadora concluiu que alguns professores já tinham noção da Geometria Fractal, mas que um número considerável não sabia qual era o objeto de estudo dessa geometria.

O principal objetivo da sétima atividade, que foi aplicada no final do sexto dia, era verificar se os professores após o término do curso de Geometrias não-euclidianas acreditavam ser possível trabalhar com as Geometrias não-euclidianas na Educação Básica. A autora da pesquisa relatou que dois professores afirmaram que no Ensino Fundamental não era possível o trabalho com as Geometrias não-euclidianas e um professor afirmou que não acreditava ser possível o trabalho com essa geometria no Ensino Médio.

Quanto à possibilidade para o ensino da geometria não-euclidiana, Santos descreveu que treze professores acreditavam ser possível a Topologia no Ensino Fundamental e vinte e cinco professores, no Ensino Médio; trinta e um professores afirmaram ser possível a Geometria Projetiva no Ensino Fundamental e trinta e dois professores, no Ensino Médio; treze professores disseram que a Geometria Esférica é possível no Ensino Fundamental e trinta e três, no Ensino Médio; doze professores afirmaram ser possível a Geometria Hiperbólica no Ensino Fundamental e trinta e dois, no Ensino Médio; e vinte e oito professores disseram ser possível a Geometria Fractal no Ensino Fundamental e trinta e um, no Ensino Médio.

Essas informações levaram a conclusão de que os professores demonstraram mais segurança para abordar a Geometria Fractal e a Geometria Projetiva na sala de aula, principalmente no Ensino Fundamental.

É oportuno descrever como a geometria fractal foi ministrada aos professores participantes do curso. Conforme a autora da pesquisa, o professor ministrante iniciou apresentando a Geometria Fractal como sendo a Geometria da Natureza e, depois com auxílio de *softwares* geométricos, construiu curva de Peano, curva de Koch, triângulo de Sierpinski. Sobre a dimensão fractal o ministrante explicou que o espaço em que vivemos é tridimensional e que antes do advento da Geometria Fractal eram conhecidas apenas dimensões inteiras; a Geometria Fractal possibilitou a descoberta de um mundo de dimensões fracionárias. Como atividade final sobre o tema fractal, os professores construíram um cartão fractal.

Após o curso, a pesquisadora constatou que grande parte dos professores não se sente segura para ministrar as geometrias não-euclidianas; o curso sobre a geometria fractal seguiu a mesma característica dos estudos anteriores, ou seja, a construção dos fractais tradicionais como a curva de Peano, curva de Koch, triângulo de Sierpinski; a dimensão fractal foi praticamente apresentada como uma curiosidade, ou seja, sem significado; e, além disso, era muito conteúdo para pouco tempo.

3.2.6 Márcia Denise Gressler – Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais (2008)

Uma característica que difere este estudo dos demais é a proposta de uma contextualização externa à matemática. Este estudo tem então, por objetivo, examinar qual a compreensão dos alunos em relação à ligação da matemática complexa dos fractais com outras áreas do conhecimento, como também verificar se os alunos envolvidos nesses estudos ampliam sua percepção frente à complexidade com que a realidade se apresenta.

O fato de ser professora de Matemática da 8ª série (atual 9º ano) fez com que Gressler percebesse que muitos alunos que cursam essa série apresentam um conhecimento linear e desconectado das outras áreas do conhecimento bem como um pensamento fragmentado em relação a conteúdos desenvolvidos em aula bem como em grande parte dos temas cotidianos. Para estudar melhor essa problemática, a autora formula a seguinte questão investigativa: *De que forma o estudo interdisciplinar da natureza complexa dos fractais modifica a compreensão de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, acerca da realidade?* Sendo assim, planejou uma ação interdisciplinar entre Matemática, Filosofia e Artes Plásticas que viesse favorecer a percepção ampla da realidade por meio de situações que incentivassem o contato com a complexidade inerente aos fatos cotidianos, a partir do estudo dos fractais.

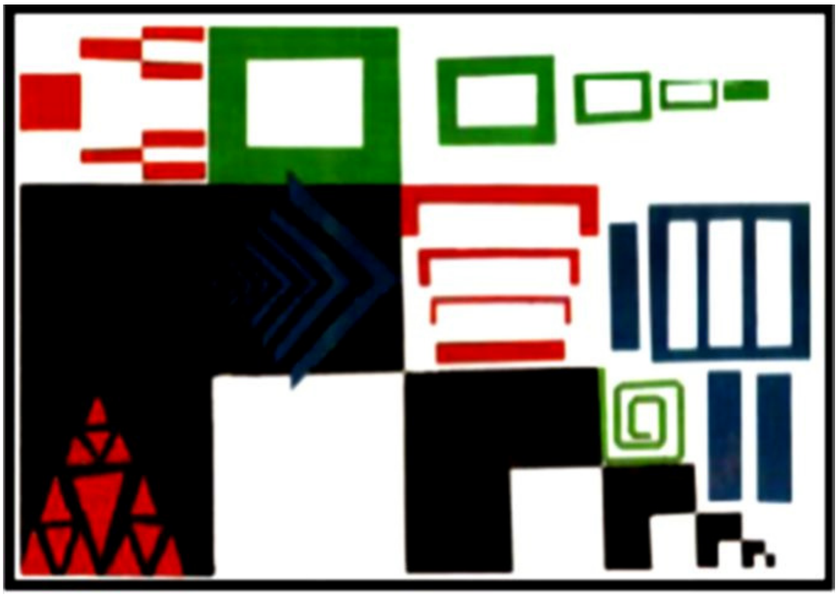
A investigação foi realizada por meio de uma abordagem qualitativa, com uma estratégia metodológica descritiva e interpretativa, utilizando como método o estudo de caso. Essa investigação se desenvolveu com quarenta alunos de 8ª série do Ensino Fundamental da rede particular de ensino de Porto Alegre. A ação interdisciplinar foi planejada conjuntamente com as professoras de Filosofia, Artes Plástica e Matemática.

Com o intuito de analisar se o estudo interdisciplinar da natureza complexa dos Fractais, envolvendo Matemática, Filosofia e Artes Plásticas, modifica a compreensão da realidade em alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, foram constituídos três instrumentos de pesquisa que foram apresentados aos alunos em dias distintos e sempre na disciplina de Matemática e também nesta ordem: desenho de uma araucária; análise de um trabalho artístico; análise reflexiva do curta-metragem – “3 minutos”.

A geometria Fractal é apresentada duas vezes aos alunos: a primeira aconteceu antes de se iniciar o trabalho interdisciplinar, pois Gressler desconfiava que os alunos desconheciam a Geometria Fractal, e a segunda é realizada após o estudo interdisciplinar.

O objetivo do primeiro instrumento “[...] é verificar de que forma o grupo de alunos investigado, percebe uma imagem real e como eles as reproduzem, antes e após o estudo interdisciplinar.” (p. 47). Para isso, os alunos foram conduzidos até o pátio da escola para desenharem uma araucária que foi escolhida devido às irregularidades e rugosidades do seu tronco. O objetivo do segundo instrumento consistiu em verificar, antes e após o estudo interdisciplinar, como os alunos percebem as formas geométricas de um trabalho artístico que foi desenvolvido por um aluno do 1º ano do Ensino Médio daquele colégio.

FIGURA 23 - Trabalho artístico Fragmentando Figuras Geométricas, utilizado por Gressler em seu estudo



Fonte: Gressler (2008, p. 48).

O nome do trabalho artístico, Fragmentando Figuras Geométricas, não foi revelado aos alunos, pois poderia sugestioná-los, produzindo assim, interferência nas análises (FIGURA 23). Após a apresentação do trabalho, foi solicitado aos alunos que, individualmente, fizessem uma análise reflexiva sobre o trabalho artístico.

Por fim, o terceiro instrumento teve o objetivo de verificar as concepções de realidade presentes em cada aluno e detectar possíveis modificações ocorridas após o estudo interdisciplinar. O curta-metragem retrata uma situação frustrante vivida por Marília, personagem interpretada pela atriz Liza Becker, que ao tomar consciência das escolhas que fez na vida e da dificuldade em modificar sua situação existencial, inicia um diálogo interior ao qual tem acesso o espectador. “A complexidade da situação de Marília, proposta pelo autor, provoca no espectador sensação de indefinição quanto aos sentimentos e atitudes da personagem, em parte devido aos fatos que se multiplicam na trama.” (p. 50). Para Gressler, as respostas ao terceiro instrumento de pesquisa foram consideradas o coração da investigação, tendo em vista que o objetivo deste foi verificar quais as percepções da realidade apresentada por cada aluno e quais as modificações que ocorreram após o estudo interdisciplinar.

A autora expôs em suas considerações finais que, após a ação interdisciplinar, pôde constatar uma mudança na percepção da realidade de cerca de 2/3 dos alunos que evoluíram em sua análise da situação apresentada no filme. Essa mudança também foi percebida quando um aluno, durante uma aula de Química, interveio e revelou seu entendimento de que o átomo pode ser compreendido como uma entidade fractal.

O trabalho realizado por Gressler conclui que o estudo dos fractais modifica a compreensão complexa da realidade.

3.2.7 Tânia Baier – O nexo fractal "geometria fractal – produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico (2005)

Nesta investigação, constatou-se que os padrões que emergem por processos iterativos, os quais geram também os fractais, assumem uma singular importância para o estudo do pensamento sistêmico, onde o tratamento matemático estende-se do quantitativo ao qualitativo.

Este estudo pretende investigar se o ensino da Geometria Fractal pode contribuir na compreensão da visão de mundo que permeia a ciência contemporânea. Para isso, Baier discorre sobre o processo histórico da construção da ciência moderna, buscando assim explicitar as visões de homem, de mundo e de ciência, decorrentes dessa postura. Depois, aborda historicamente a construção das ciências contemporâneas, as quais inspiraram um novo pensamento, o pensamento sistêmico.

A autora revela que já participou de trabalhos de conclusão de disciplinas e de monografias relacionados com os conteúdos matemáticos que envolvem a Geometria Fractal. Essa experiência com o tema fractal permitiu-lhe formular suas primeiras indagações: "Seria o estudo dos fractais uma resposta às críticas efetuadas a respeito do afastamento dos conteúdos matemáticos que constituem o currículo escolar da realidade do mundo? Seria o ensino dos fractais um modo de realizar, na prática da sala de aula, a interdisciplinaridade?" Pouco a pouco esses questionamentos foram delineando a seguinte questão investigativa: "Trabalhar a incorporação da *geometria fractal* no currículo tradicional do ensino básico possibilitaria uma compreensão da visão de mundo que permeia a construção da ciência contemporânea?" (p. 13, grifo do autor).

Para poder lidar com os padrões que são detectados na complexidade sistêmica, faz-se necessária a criação de teorias matemáticas que permitam estudar o fenômeno. Sendo assim, foi concebida a teoria dos sistemas dinâmicos que é uma teoria matemática que permite lidar com a complexidade do fenômeno não-linear. Além disso, Baier afirma que o fenômeno da não-linearidade está presente na natureza e nos sistemas vivos, e que as relações num padrão de rede são não-lineares. Outro conceito importante apresentado no estudo é o de padrão. O padrão envolve qualidades e não quantidades, por isso, o padrão não pode ser medido, ou pesado; ele é mapeado. Mas esse conceito tão importante não encontra espaço no ensino, justamente, explica Baier, por não ser significativo na visão de mundo mecanicista, não é valorizado nos currículos escolares, porém, torna-se importante a partir do advento do pensamento sistêmico. Na atualidade, tornou-se essencial para a compreensão dos sistemas vivos.

Capra (2006, p. 107, grifo do autor) compara matematicamente um laço de realimentação "[...] a um tipo especial de processo não-linear conhecido como *iteração* (palavra que em latim significa *repetição*) na qual uma função opera continuamente sobre si mesma." É exatamente nesse ponto, que a pesquisadora apresenta os conteúdos possíveis de serem estudados no Ensino Básico, afirmando que processos iterativos acontecem em diversas situações, destacando que: o processo de divisão celular é repetitivo, operações bancárias envolvendo juros são iterativas e iterar o botão de uma calculadora significa entrar com um número qualquer diferente de zero e apertar o botão referente a uma função matemática diversas vezes. Ressalta que podem ser iteradas construções geométricas ou expressões algébricas e que o conceito de iteração está relacionado com o tópico *função composta* tratado no Ensino Básico com pouca ênfase, já que o processo iterativo não é muito utilizado durante a produção da ciência moderna; contudo, assume um papel importante na construção da ciência contemporânea. A pesquisadora destaca, ainda, que os temas iteração, mapeamentos e padrões são conceitos matemáticos fundamentais para a construção da ciência alinhada com o pensamento sistêmico. Eles são alguns dos conceitos integrantes da linguagem matemática que descreve sistemas que se sustentam em processos não-lineares, envolvendo interconexões em redes.

Com base nos resultados de sua pesquisa, a pesquisadora apresenta algumas conclusões: o estudo de objetos fractais possibilita ligações entre os conteúdos da Matemática e os demais temas do currículo do Ensino Básico; algumas ferramentas matemáticas são complexas, o que torna difícil a abordagem das concepções da ciência contemporânea no Ensino Básico e uma possibilidade reside no estudo de conceitos básicos da teoria dos fractais e suas ligações com a teoria do caos; torna-se possível ligar conteúdos da Matemática tradicional com o estudo da dinâmica populacional, relacionado com os temas fractais, função composta e função quadrática; torna-se possível abordar a aleatoriedade e a instabilidade, características do mundo em que vivemos, com a abordagem de conceitos elementares da teoria dos fractais, sendo focadas suas ligações com a teoria do caos; possibilidade de construir uma nova visão de mundo instaurada a partir da física quântica, considerando que o estudo dos fractais randômicos pode contribuir para o entendimento da concepção de mundo instaurada desde a criação da teoria quântica, onde a aleatoriedade é presença; não é necessária a substituição de conteúdos matemáticos que constituem a grade curricular, mas sim, a mudança no modo de abordá-los, articulando-os com a teoria dos fractais; possibilidade de se perceber como parte do mundo e não separado dele, por meio do estudo do conceito da *dimensão fractal,* o qual possibilita o entendimento da imbricação observador/observado, mostrando as limitações do princípio da objetividade, pois a *dimensão fractal* se relaciona com a noção de *escala*.

Os estudos de Baier demonstraram que a postura mecanicista levou à fragmentação das disciplinas escolares e uma forma de aproximar e apagar essas fronteiras é por meio do estudo da teoria fractal, que dentre todas as teorias alinhadas com o pensamento sistêmico, é a mais acessível. Destacaram, ainda, que a teoria fractal também pode ligar conteúdos matemáticos tradicionais como: função composta, quadrática, logaritmos, progressões e números complexos. Além desses aspectos, esta investigação evidenciou as relações (nexos) entre os fractais, a teoria do caos e as teorias matemáticas, que são concernentes à teoria fractal.

4 A PRESENÇA PEDAGÓGICA DOS FRACTAIS EM LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo será descrito o desenvolvimento dado às lições sobre Fractais em alguns livros didáticos, analisando as ocorrências dos objetos de aprendizagem de conceitos: *fatos particulares, classes, relações* e *estruturas,* que são critérios epistemológicos orientados por François Marie Gérard e Xavier Roegiers, em *Conceber e Avaliar Manuais Escolares* (1998), cuja compreensão epistemológica é referência permanente dos *Guias de Livros Didáticos*, do PNLD, desde 2004. Os livros foram escolhidos considerando o que apresentam no respectivo desenvolvimento sobre fractais, mas, para esta análise, foram adotados apenas aqueles que mais conteúdo puderam oferecer.

Pode-se tomar os quatro objetos como quatro “dimensões” da aprendizagem de um conceito; esses objetos vêm completar uma noção de aprendizagem. Um exemplo específico apresentado por Gérard e Roegiers (1998), é o da aprendizagem sobre triângulos. Um sinal de trânsito na forma triangular indica um fato particular sobre o conceito de triângulo. As classes são os conjuntos de triângulos do mesmo tipo, como o conjunto dos triângulos isósceles, dos triângulos equiláteros, dos triângulos retângulos, etc. Como relação, no estudo de triângulos, os autores citam a fórmula da área de todo triângulo. Como estrutura, os autores citam a classificação dos triângulos em função do comprimento dos lados e da amplitude dos ângulos. Assim, se o sujeito epistêmico interroga: “como se aprende, ou como se constrói, o conceito de triângulo?”, a resposta é: buscando fatos particulares, distinguindo-os em classes, estudando suas relações métricas e reconhecendo estruturas internas.

Porém, a interrogação desta pesquisa é: *Como ascendemos ao conceito Fractal?* No sentido do interrogado e da análise a ser realizada, damos a construção do conceito mediante os quatro objetos: fatos particulares, classes, relações e estruturas.

Nas formas da natureza encontram-se fatos particulares de fractais, como nas folhas da samambaia, na radiografia pulmonar, na linha do litoral. Como classes de fractais, há a classe dos fractais formais, definidos como pontos fixos nas iterações de funções; há a classe dos fractais numéricos, como são as sequências numéricas convergentes a zero e geradas por uma propriedade, e a classe dos fractais geométricos obtidos em decomposições de figuras geométricas, como é o triângulo de Sierpinski. Por esta epistemologia, os fractais são formas abstratas, como são as formas geométricas. As representações materiais são meros fatos particulares. Vale destacar que uma figura reproduzida na superfície plana do papel é uma representação material que realizamos como manifestação. O objeto matemático, representado no papel, na forma conceitual e abstrata, repousa como conceito na psique.

4.1 DO ENSINO FUNDAMENTAL

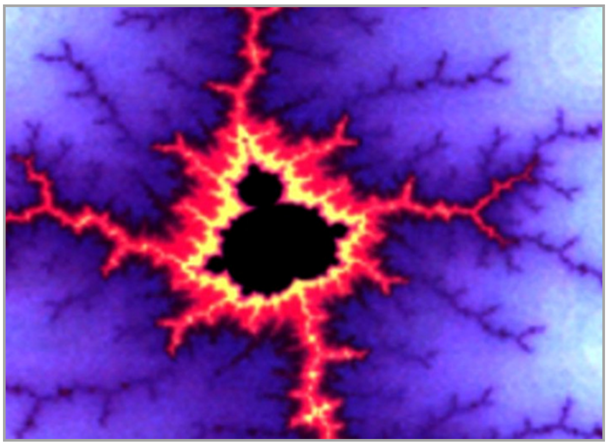
A fim de atingir o objetivo desta pesquisa que é o de organizar um conhecimento pedagógico acerca do tema Fractal, procurou-se identificar por meio de pesquisas em livros didáticos, a presença desse conceito na Educação Básica, bem como o modo de apresentação e de desenvolvimento desse assunto.

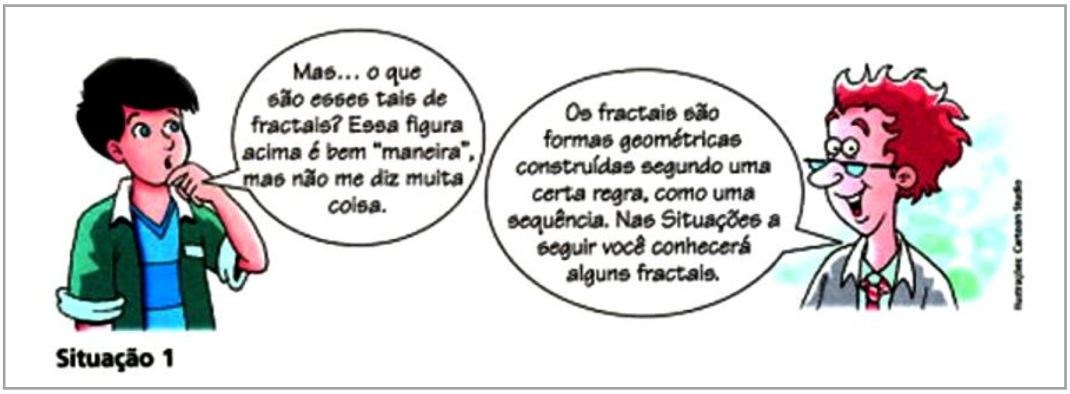
A seguir, serão apresentados os livros didáticos do Ensino Fundamental, que apresentavam mais lições sobre Fractais. Vale destacar que eles são livros didáticos aprovados pelo PNLD 2011.

4.1.1 Lourisnei Fortes Reis e Alexandre Luís Trovon de Carvalho – Aplicando a matemática (2006)

Os autores iniciam a respectiva introdução afirmando que na natureza, diversas formas seguem padrões e que elas (as formas) se organizam de uma maneira regular, seguindo princípios que podem ser geométricos ou numéricos. Relatam, ainda, que certos tipos de tumores se desenvolvem mais, ou menos, segundo certas regras matemáticas e que por isto, os cientistas estudam formas geométricas chamadas fractais, buscando diagnósticos mais precisos e rápidos.

FIGURA 24 - Figuras na introdução ao tema fractal: a) conjunto de Mandelbrot; b) diálogo sobre o que são fractais





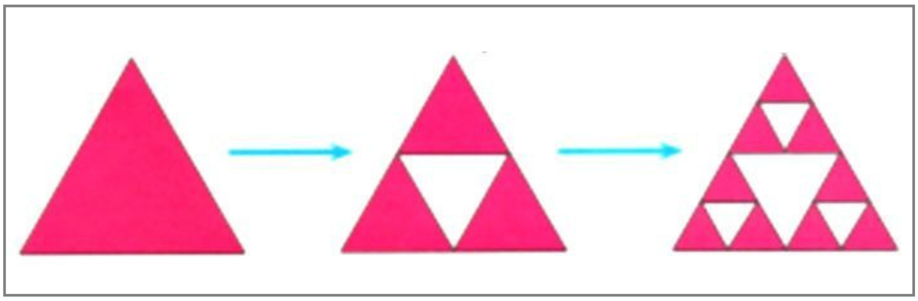
Fonte: Reis e Trovon (2009b, p. 6).

Ao lado da figura do conjunto de Mandelbrot (FIGURA 24a), há o desenho de um aluno perguntando o que são fractais e um professor respondendo que "Os fractais são formas geométricas construídas segundo certa regra, como uma sequência." (FIGURA 24b). Em seguida, apresentam duas situações em que há a presença de alguns fractais:

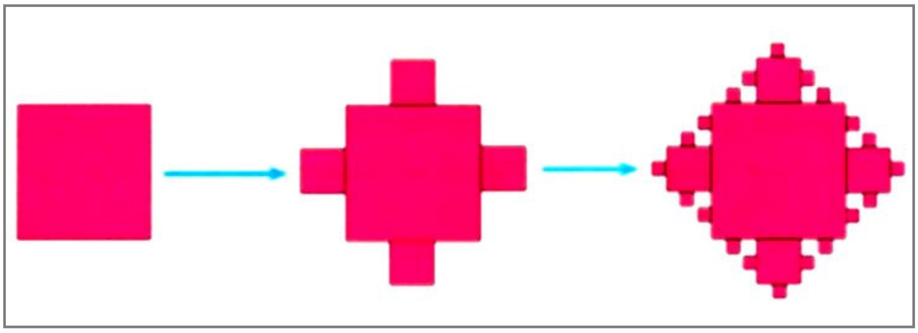
Situação 1:

Dado um triângulo equilátero é desenvolvida sua decomposição em outros triângulos equiláteros, por sucessivas ligações dos pontos médios dos lados, construindo-se, assim, o chamado triângulo de Sierpinski.

FIGURA 25 - Situações com presença de fractais: a) sequência 1 (triângulo de Sierpinski); b) sequência 2 (curva de Koch).



(a)



(b)

Fonte: Reis e Trovon (2009b, p. 7).

Depois que apresentam as figuras, explicam passo a passo as decomposições e, em seguida, associam a sequência numérica 1, 3, 9, 27 no desenvolvimento dos primeiros quatro passos da decomposição (FIGURA 25a). Sugerem que se pode descobrir o próximo termo da sequência ou a quantidade de triângulos que há na próxima etapa da decomposição.

Situação 2:

Dá-se um quadrado todo pintado. Com um terço do lado, são construídos novos quadrados sobre os lados do anterior, formando uma figura regular em que vemos a forma quadrada inicial e outras quatro formas quadradas unidas pelos lados (FIGURA 25b). O procedimento é repetido sobre as quatro formas menores, pelos três lados disponíveis. Obtém-se uma nova figura sobre a qual o processo se repete, de modo que se converge para uma forma quadrada com os lados em reentrâncias quadriculadas. Quanto à quantidade de quadrados obtidos nas três etapas iniciais, faz-se corresponder a sequência numérica: 1, 5, 25. Como na situação 1, sugerem que se pode continuar as operações geométricas, e também que se pode descobrir a quantidade de quadrados na figura formada na próxima etapa da construção fractal.

Não houve em nenhuma situação, no desenvolvimento de cada situação, quaisquer outras explorações a respeito do conceito fractal; houve, apenas, a explicação prática sobre o surgimento das figuras. Na situação 1 faz-se uma decomposição e na situação 2, uma composição, mas esta distinção operatória não foi destacada pelos autores.

Com base na análise epistemológica, pode-se dar um dimensionamento à aprendizagem desses fractais. Trata-se de atividades que podem ser orientadas aos alunos do final do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, mas haverá situações mais sofisticadas que demandarão domínios mais elevados de conhecimentos geométricos, numéricos e também conhecimentos algébricos.

FIGURA 26 - Logomarca do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática

Fonte: Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (2011).

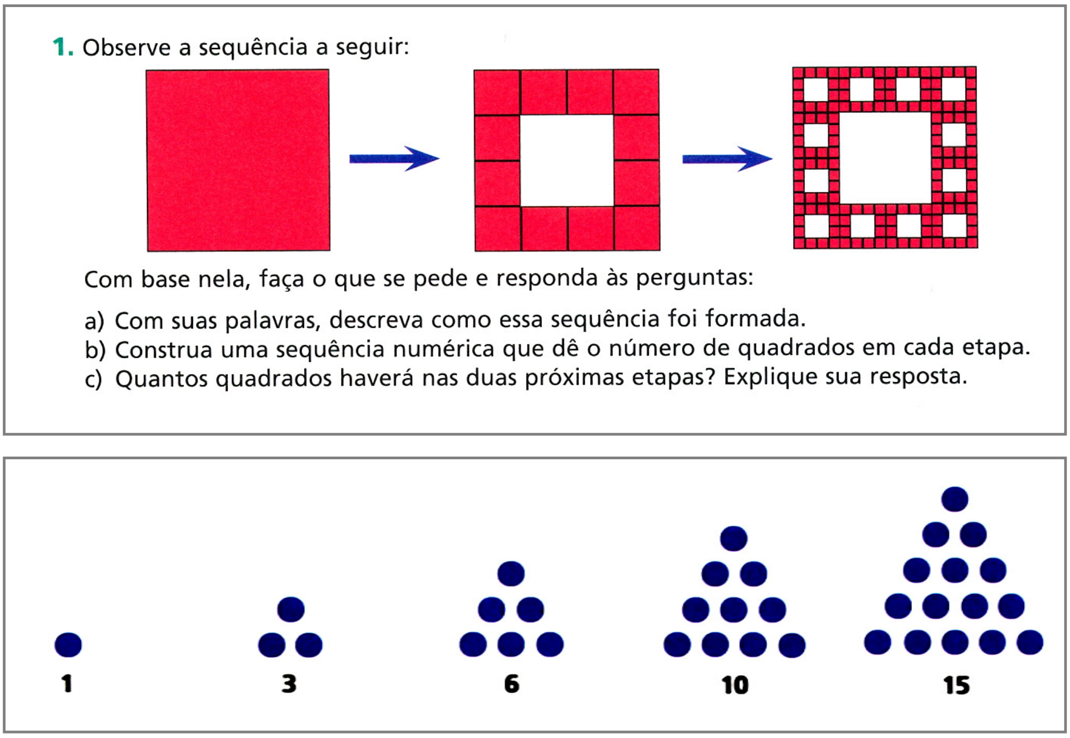
A figura do triângulo de Sierpinski é encontrada como "marca" em diferentes situações. Na situação 1, está como *slogan* publicitário do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática (FIGURA 26).

Isto é um fato particular para o fractal de Sierpinski, pois o sujeito, visualizando o slogan, recai imaginariamente na forma fractal de Sierpinski. Como classe, trata-se da classe dos fractais geométricos. Ao associar a sequência de números 1, 3, 9, 27, fica envolvida também a classe dos fractais numéricos. Como relação, temos a considerar a quantidade de triângulos em uma etapa como o quadrado da quantidade na etapa anterior, isto a partir da terceira etapa. Como estrutura, diremos do modo de obtenção da forma em uma etapa pelas ligações dos pontos médios dos lados nos triângulos periféricos.

Na situação 2, não podemos ter a mesma organização que desenvolvemos na situação 1. Podemos antecipar que há formas fractais não exploradas entre nós e que fica inesperado encontrar aplicações como fatos particulares. Vindo ao currículo escolar e ao tratamento no ensino, as formas fractais, que são visivelmente atraentes nas páginas dos livros e em outras ilustrações, poderão tornar-se fatos particulares para o conceito fractal.

Na seção *Exercícios de Aprendizagem*, como primeira atividade, o livro traz uma sequência geométrica a partir de um quadrado, do qual quadrados menores vão sendo extraídos.

FIGURA 27 - Sequência geométrica na seção de *Exercícios de Aprendizagem*: a) tapete de Sierpinski; b) sequência triangular



(a)

(b)

Fonte: Reis e Trovon (2009b, p. 8).

Da primeira forma, Figura 27a, extrai-se um quadrado central. Da parte restante são extraídos dez pequenos quadrados. Resulta uma figura regular composta de formas quadradas em que contamos doze formas quadradas. Com base no que é visto, três questões são propostas.

Na análise epistemológica das atividades, será associado a cada questão, o objeto de aprendizagem correspondente. Na primeira atividade, o objeto fato particular não foi contemplado nas questões propostas no manual. Poderia propor-se a busca deste objeto, que pode ser encontrado em pinturas geométricas, em formas ornamentais de tapetes ou como forma decorativa em produtos artesanais.

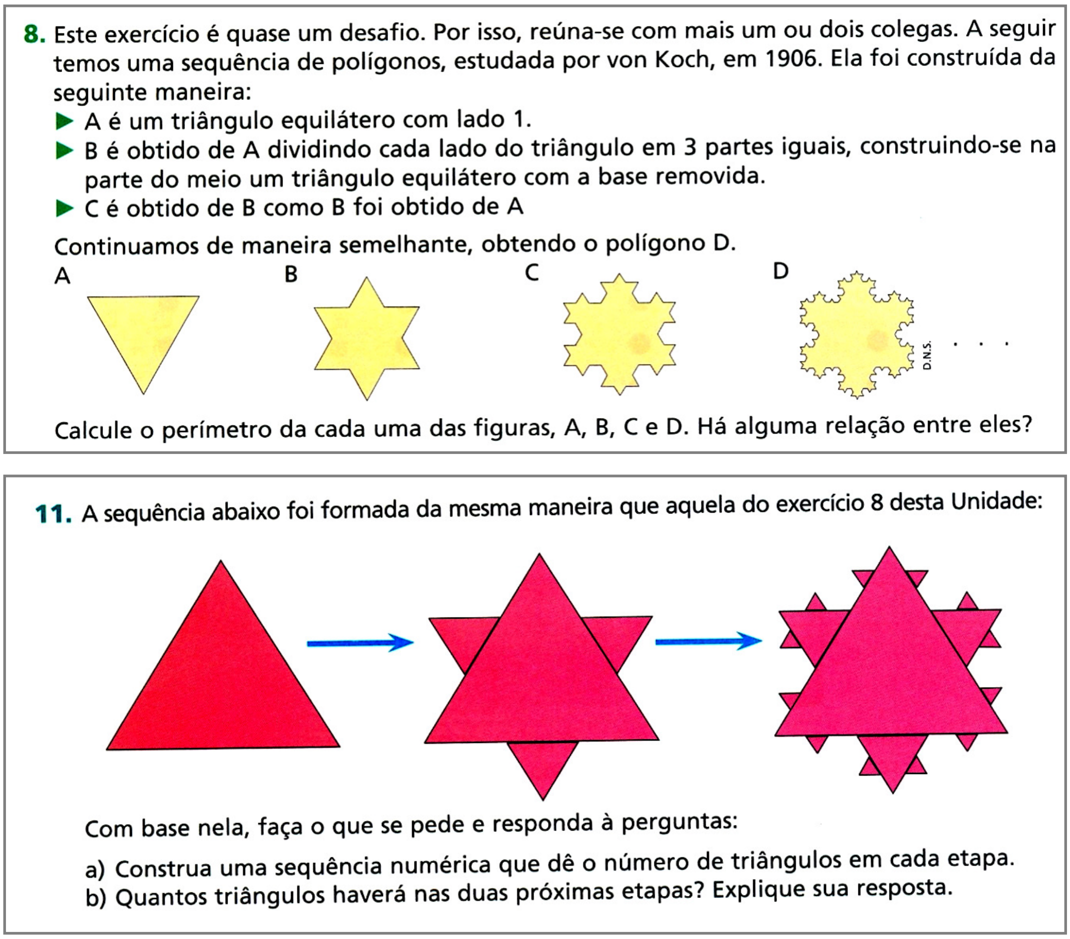
(a) estrutura – a partir da visualização das figuras, descrevemos a formação da sequência como: a forma inicial foi dividida em dezesseis partes quadradas iguais e quatro centrais foram retiradas. As doze restantes, cada uma sofreu o mesmo processo. Esta compreensão daremos como a estrutura do conceito do fractal geométrico em estudo.

(b) classe – a sequência numérica requerida diz respeito a outra classe do mesmo conceito, um fractal numérico do mesmo conceito fractal. Tal como triângulos equiláteros e triângulos isósceles participando da construção do mesmo conceito de triângulo.

(c) relação – para responder quantos quadrados contaremos nas duas próximas etapas, temos que ter uma fórmula de recorrência, que é o objeto relação.

Na segunda atividade, Figura 27b, é apresentada uma sequência de bolinhas, sendo 1, 3, 6, 10, 15 bolinhas e, a partir do segundo grupo, são dispostas em formas de triângulos equiláteros com 2, 3, 4, 5 bolinhas nos lados. São propostos os seguintes exercícios: (a) identificar qual é o próximo elemento da sequência e quantas bolinhas ele terá; (b) sem desenhar, descobrir como o número de bolinhas aumenta de uma etapa para a seguinte e discutir com os colegas a respeito disso. Sobre essa atividade podemos desenvolver a mesma análise que realizamos na atividade anterior.

FIGURA 28 - Sequência geométrica na seção de *Exercícios de Aprendizagem*: a) floco de neve de Koch; b) atividade de fixação



(a)

8. Este exercício é quase um desafio. Por isso, reúna-se com mais um ou dois colegas. A seguir temos uma sequência de polígonos, estudada por von Koch, em 1906. Ela foi construída da seguinte maneira:

- A é um triângulo equilátero com lado 1.
- B é obtido de A dividindo cada lado do triângulo em 3 partes iguais, construindo-se na parte do meio um triângulo equilátero com a base removida.
- C é obtido de B como B foi obtido de A

Continuamos de maneira semelhante, obtendo o polígono D.

Calcule o perímetro da cada uma das figuras, A, B, C e D. Há alguma relação entre eles?

(b)

11. A sequência abaixo foi formada da mesma maneira que aquela do exercício 8 desta Unidade:

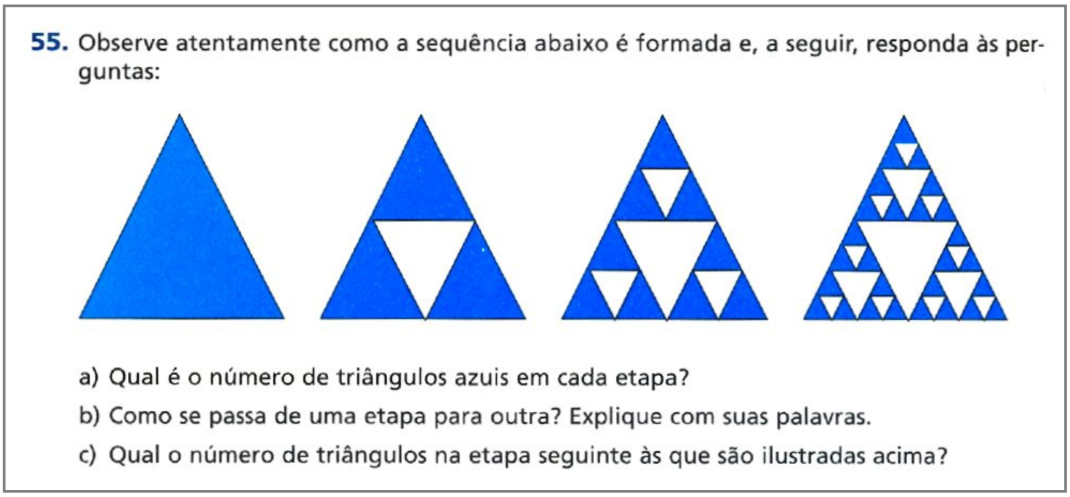
Com base nela, faça o que se pede e responda à perguntas:

a) Construa uma sequência numérica que dê o número de triângulos em cada etapa.
b) Quantos triângulos haverá nas duas próximas etapas? Explique sua resposta.

Fonte: Reis e Trovon (2009b, p. 9-10).

Outras atividades da seção *Exercícios de Aprendizagem* quanto aos fatos particulares e classes, podem ser analisadas como as anteriores, no entanto, algumas mudanças são perceptíveis quanto ao aspecto das relações, pois a variável muda de quantidade de elementos – triângulos, quadrados, segmentos – para a determinação do perímetro do polígono que tem inicialmente lado 1 (FIGURA 28). O conjunto de relações também muda, visto que o aprendiz relacionará quantidade de segmento com o comprimento, mudando o aspecto da estrutura.

FIGURA 29 - Classe dos fractais geométrico e numérico: primeira atividade



55. Observe atentamente como a sequência abaixo é formada e, a seguir, responda às perguntas:

a) Qual é o número de triângulos azuis em cada etapa?

b) Como se passa de uma etapa para outra? Explique com suas palavras.

c) Qual o número de triângulos na etapa seguinte às que são ilustradas acima?

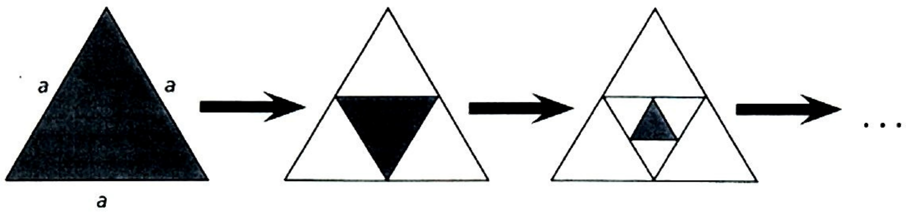
Fonte: Reis e Trovon (2009a, p. 224).

No exemplar do 6º ano, na seção *Exercícios de Aprendizagem*, a atividade explora mais a classe dos fractais geométrico e numérico (FIGURA 29). Do aspecto geométrico, abstraímos a autossemelhança e quanto ao aspecto numérico, a sequência numérica formada pela decomposição do triângulo. Esta atividade não apresenta este tipo de decomposição como sendo o de Sierpinski, mas com base nas quatro dimensões sugeridas por Gérard e Roegiers (1998), observa-se que o triângulo de Sierpinski já se apresenta como um fato particular e as relações são estabelecidas por meio da contagem dos números de triângulos azuis em cada etapa.

Essa atividade solicita que se descubra, explique e deduza como se passa de uma etapa para outra. Segundo Gérard e Roegiers (1998), este tipo de atividade desenvolve e exige do aprendiz uma maior elaboração cognitiva. Relacionam essa atitude a um saber-fazer cognitivo, que é "[...] uma atividade que necessita de um trabalho cognitivo de transformação de uma mensagem dada e/ou não dada.", e que por sua vez tem a ver com "[...] atividades cognitivas de base como: distinguir o essencial do acessório; [...] resolver um problema; comparar dados; formular hipóteses; deduzir conclusões; etc." (GÉRARD; ROEGIERS, 1998, p. 50).

FIGURA 30 - Atividade de fixação, exemplar do 8º ano

18. Unindo os pontos médios de um triângulo equilátero, cujos lados medem *a*, obtemos novamente um triângulo equilátero. Repetimos esse procedimento com o novo triângulo, e assim sucessivamente.



Com base nisso, responda:

a) Qual é o perímetro do triângulo de lado *a*?

b) Qual é o perímetro de cada um dos quatro triângulos obtidos nesse processo?

c) Será que é possível obter uma fórmula que dê o perímetro quando repetirmos esse processo *n* vezes?

Fonte: Reis e Trovon (2009c, p. 48).

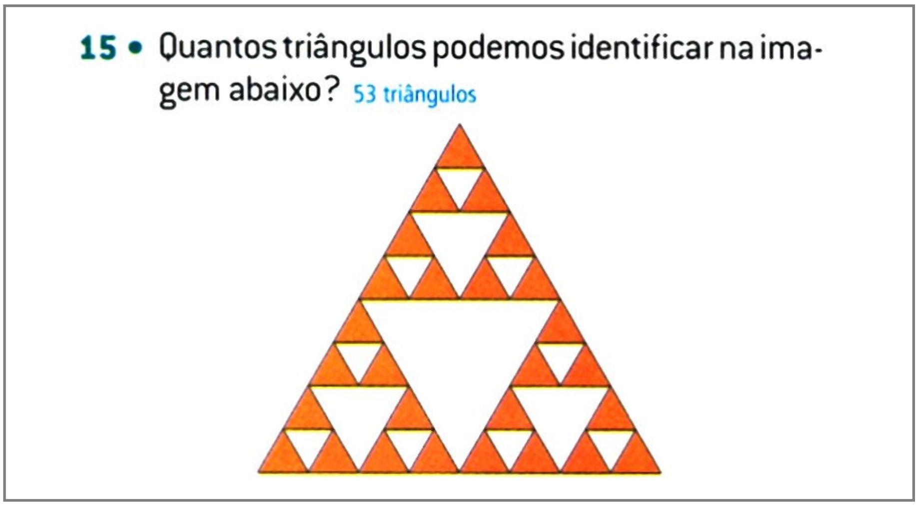
No exemplar do 8º ano, na seção "Exercício de Fixação", há outra atividade (FIGURA 30) que não difere das análises feitas no volume do 7º ano (FIGURA 25).

Os autores poderiam iniciar o tratamento dos fractais algébricos, mas isso não ocorre em nenhum dos volumes analisados. Observa-se, que mesmo nesse tema, há a preferência por atividades similares aos temas convencionais da Matemática.

4.1.2 Jackson da Silva Ribeiro – Projeto Radix (2010)

Nos livros didáticos de Ribeiro, intitulados *Projeto Radix: Matemática, 6º Ano* (2010) e *Projeto Radix: Matemática, 8º Ano* (2010), o tema fractal é abordado na seção *Complementando* e na seção *Algo Mais*, respectivamente.

FIGURA 31 - Tema fractal na atividade de complementação, 6º ano



Fonte: Ribeiro (2010d, p. 218).

Na análise epistemológica da atividade, identificamos a imagem como um fato particular do conceito fractal. As diferentes maneiras de contar os triângulos associam-se às relações, enquanto o conjunto dessas relações associa-se às estruturas (FIGURA 31).

FIGURA 32 - Tema fractal na seção *Algo a Mais*, 8º ano, produzido pelo computador a partir de equações matemáticas

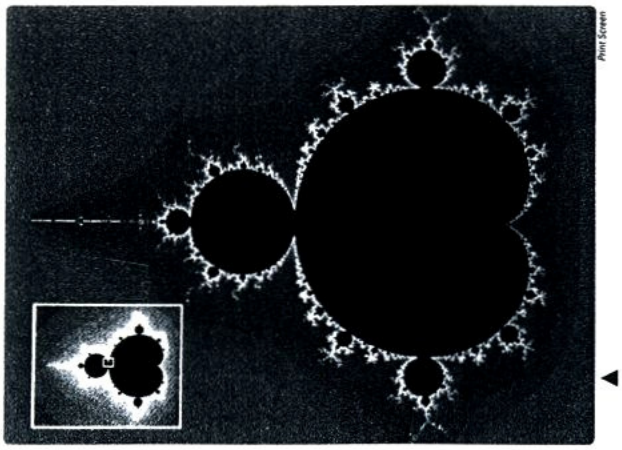
O que são os fractais?

psicodélico: diz-se de imagens, objetos etc., de cores muito vivas, totalmente fora dos padrões costumeiros

Não é fácil entender nem definir essas formas, que mais parecem pinturas **psicodélicas** e são fruto de uma verdadeira revolução em dois ramos da Matemática: a Geometria e a Estatística. Desde o século IV a.C. até poucas décadas atrás, o estudo das figuras geométricas se baseava em formas puras, como os círculos, os quadrados e os triângulos, que aprendemos ainda no primário. É a chamada geometria euclidiana, que deve seu nome ao matemático egípcio Euclides. Formas exatas e perfeitas como essas são abstrações impossíveis de serem encontradas na natureza. E é justamente na natureza que estava oculta a geometria fractal, descoberta entre as décadas de 60 e 70 tanto nos estudos das variações climáticas pelo meteorologista americano Edward Lorenz quanto nas estatísticas visualizadas em computador pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, o homem que deu nome às fractais. O que elas mostravam é que processos aparentemente irregulares como ramificação de uma árvore ou recorte geográfico de um litoral seguem, na verdade, um padrão – que, por sua vez, obedece a uma fórmula matemática. Aí está a característica principal da geometria fractal, batizada de autossimilaridade: são formas cujas partes sempre reproduzem o todo. "Não existe uma definição precisa, mas podemos dizer que uma figura é um fractal quando ela é formada por diversas partes, que lembram, cada uma, o desenho da figura inteira", diz o matemático americano Michael Frame, da Universidade Yale, nos Estados Unidos, coautor, junto com Mandelbrot, do livro *Chaos Under Control: The Art and Science of complexity* ("Caos sob controle: a arte e a ciência da complexidade"), que explora esse tema.

SUPERINTERESSANTE MUNDO ESTRANHO. São Paulo: Abril, ano 16, n. 1, abr. 2002. Edição especial.

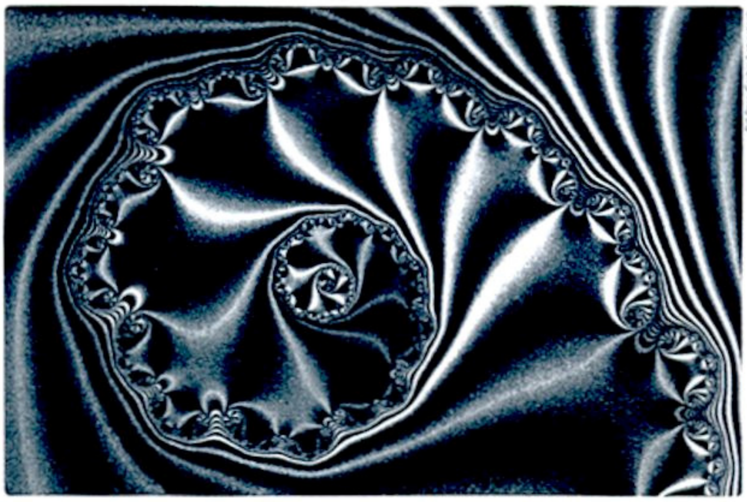
Veja a seguir alguns fractais gerados com o uso do computador a partir de equações matemáticas.



◀ Nesta imagem, a figura maior corresponde a uma ampliação do detalhe da figura menor.

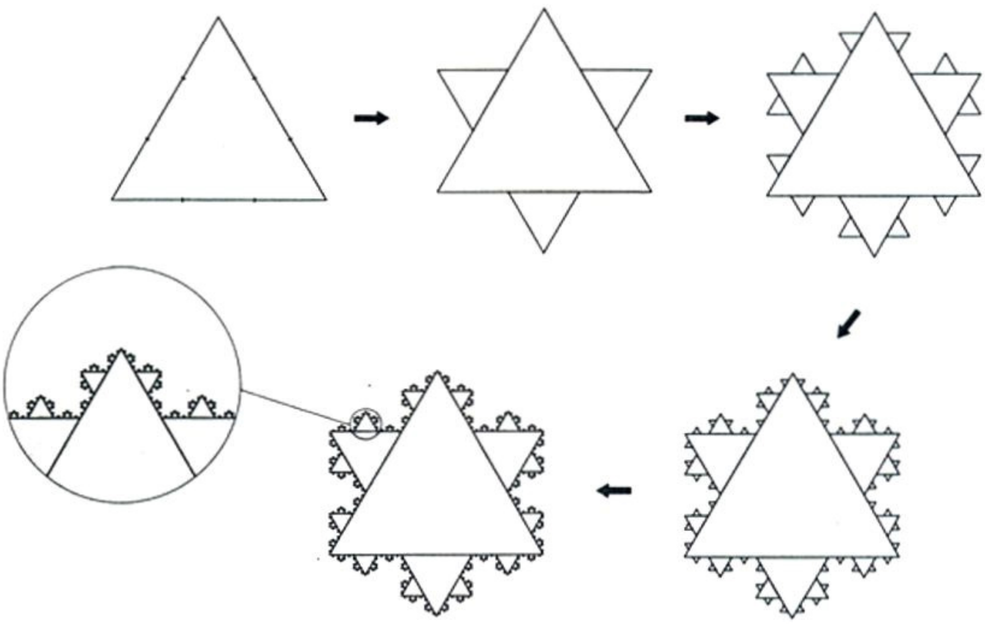
Fonte: Ribeiro (2010e, p. 95).

FIGURA 33 - Tema fractal na seção *Algo a Mais*, 8º ano, produzido pelo computador



Outro exemplo de fractal produzido em computador.

É possível, também, construir alguns fractais utilizando instrumentos, como régua, compasso, lápis e esquadros. No exemplo abaixo, desenhamos, inicialmente, um triângulo equilátero e dividimos cada um de seus lados em três partes iguais. A partir daí, construímos novos triângulos equiláteros e repetimos o processo sucessivamente, obtendo as figuras representadas.



1 • Quando e como foi descoberta a geometria fractal?

2 • Quando uma figura é um fractal?

3 • Junte-se a um colega e, utilizando os instrumentos necessários, construam um fractal.

Fonte: Ribeiro (2010e, p. 96).

Na seção *Algo Mais*, do exemplar do 8º ano, aparecem informações e atividades sobre fractais (FIGURAS 32-33).

A apresentação do conceito fractal é introduzida por um texto da revista *Mundo Estranho,* da editora Abril. Depois do texto, visualiza-se a imagem do conjunto de Mandelbrot. Esse texto interroga: *O que são Fractais?* E no intuito de responder a esse questionamento, afirma que fractais parecem com pinturas psicodélicas e que a natureza apresenta uma geometria fractal e ela é constituída de formas aparentemente irregulares como a ramificação de uma árvore ou o recorte geográfico de um litoral. Entretanto, diz o texto, essas formas irregulares obedecem a fórmulas matemáticas.

Outra característica importante trazida no texto é o conceito de autossimilaridade, que são formas cujas partes sempre reproduzem o todo. Destaca o texto que não existe uma definição precisa para os fractais, mas que podemos entender esse conceito como sendo uma figura formada por diversas partes, que lembram, cada uma, o desenho da figura inteira.

Em seguida, é apresentado outro exemplo de fractal produzido em computador. Além disso, há uma informação sobre a construção de alguns fractais, bem como a sequência dessa construção (FIGURA 33).

São propostos dois questionamentos que exigem do aluno a compreensão da leitura realizada e, em seguida, o autor sugere a construção de um fractal com a ajuda de um colega.

Na análise epistemológica dessa atividade, compreendemos que aqueles questionamentos – *Quando e como foi descoberta a geometria fractal? E quando uma figura é um fractal?* – estão envolvendo a dimensão do saber-redizer textual que, segundo Gérard e Roegiers (1998, p. 50), “[...] é uma atividade que consiste em poder redizer ou reconstruir uma mensagem aprendida ou transmitida, sem lhe introduzir transformações significativas. [...] que é uma repetição palavra por palavra.”

Em relação à construção de um fractal, há poucas orientações e informações quanto aos procedimentos necessários para a respectiva construção. Não foram observados os instrumentos que poderiam ser empregados, assim como a classe do fractal. Entretanto, esta atividade devidamente orientada, exigirá do aluno um saber-fazer gestual que, segundo Gérard e Roegiers (1998, p. 50), “[...] designa um conjunto de atividades de predominância gestual e que necessitam de controle cinestésico [...]”.

Sobre os diferentes objetos de aprendizagem, diferentes aprendizagens podem ser exercidas. Gérard e Roegiers (1998) classificam a forma de atuar sobre os objetos de aprendizagem em três tipos de saberes: o saber-redizer que pode ser textual ou transposto; o saber-fazer que pode ser cognitivo ou gestual; e o saber-ser.

Para exemplificar esses saberes, utilizaremos a classe de triângulos equiláteros. Desse objeto de aprendizagem da Matemática, pode-se solicitar que o aluno repita a definição aprendida (saber-redizer); que ele estabeleça uma classificação entre triângulos equiláteros e não equiláteros (saber-fazer cognitivo); e que construa triângulos equiláteros (saber-fazer gestual). É possível, também, verificar se o aluno adquiriu o hábito de observar se o triângulo é equilátero antes de expor a afirmação (saber-ser).

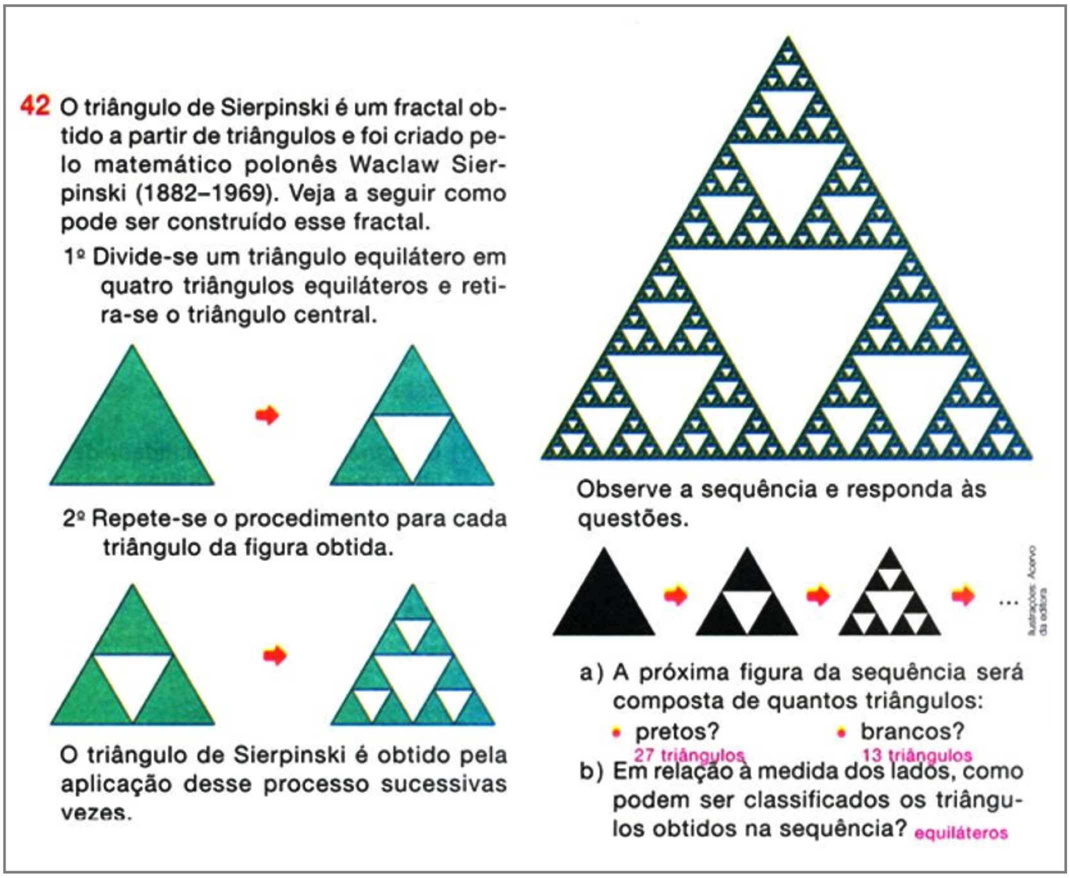
Constata-se que o texto apresenta muitos *fatos particulares* como o próprio termo fractal e o nome do criador da geometria fractal. Também encontramos um conjunto de elementos geométricos que representam as *classes*, bem como o conjunto das relações que são necessárias na construção de um fractal, o qual compõe as *estruturas* do conceito fractal.

4.1.3 Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro – Vontade de saber matemática (2009)

Nos livros didáticos de Souza e Pataro, intitulados *Vontade de Saber Matemática: 6º Ano* (2009) e *Vontade de Saber Matemática: 9º Ano* (2009), o tema fractal é abordado nas seções *Revisão*, *Atividades* e *Explorando o Tema*.

No livro didático do 6º ano o tema fractal abordado na seção *Revisão*, que está organizada no final de cada capítulo, onde são propostas atividades que podem ser trabalhadas em grupo ou em casa, e até como complemento avaliativo. A seção *Atividades* apresenta proposta de atividades com conceitos que foram abordados em um ou mais tópicos do capítulo, dispostas em grau crescente de dificuldade e com o intuito de serem trabalhadas, em sua maioria, na sala de aula. Já a seção *Explorando o Tema* do livro didático do 9º ano, apresenta textos extraídos de revistas, livros, jornais e Internet, nos quais são abordados temas ligados à história da Matemática e a outras áreas; o objetivo é estimular o aluno a ler, a interpretar textos e a emitir opiniões, além de motivá-los a fazer pesquisas complementares.

FIGURA 34 - Tema fractal na seção *Revisão*, 6º ano



42 O triângulo de Sierpinski é um fractal obtido a partir de triângulos e foi criado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882–1969). Veja a seguir como pode ser construído esse fractal.

1º Divide-se um triângulo equilátero em quatro triângulos equiláteros e retira-se o triângulo central.

2º Repete-se o procedimento para cada triângulo da figura obtida.

O triângulo de Sierpinski é obtido pela aplicação desse processo sucessivas vezes.

Observe a sequência e responda às questões.

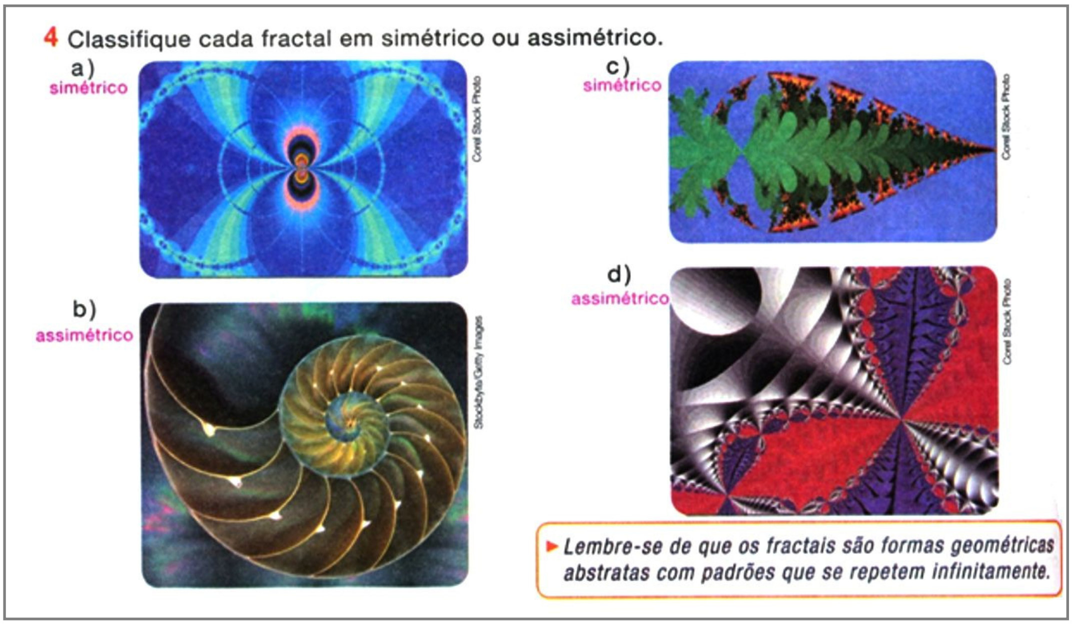
Ilustrações: Acervo da editora

a) A próxima figura da sequência será composta de quantos triângulos:
- pretos? 27 triângulos
- brancos? 13 triângulos

b) Em relação à medida dos lados, como podem ser classificados os triângulos obtidos na sequência? equiláteros

Fonte: Souza e Pataro (2009a, p. 173).

FIGURA 35 - Tema fractal na seção *Atividades*, 6º ano



4 Classifique cada fractal em simétrico ou assimétrico.

a) simétrico

Corel Stock Photo

b) assimétrico

Stockbyte/Getty Images

c) simétrico

Corel Stock Photo

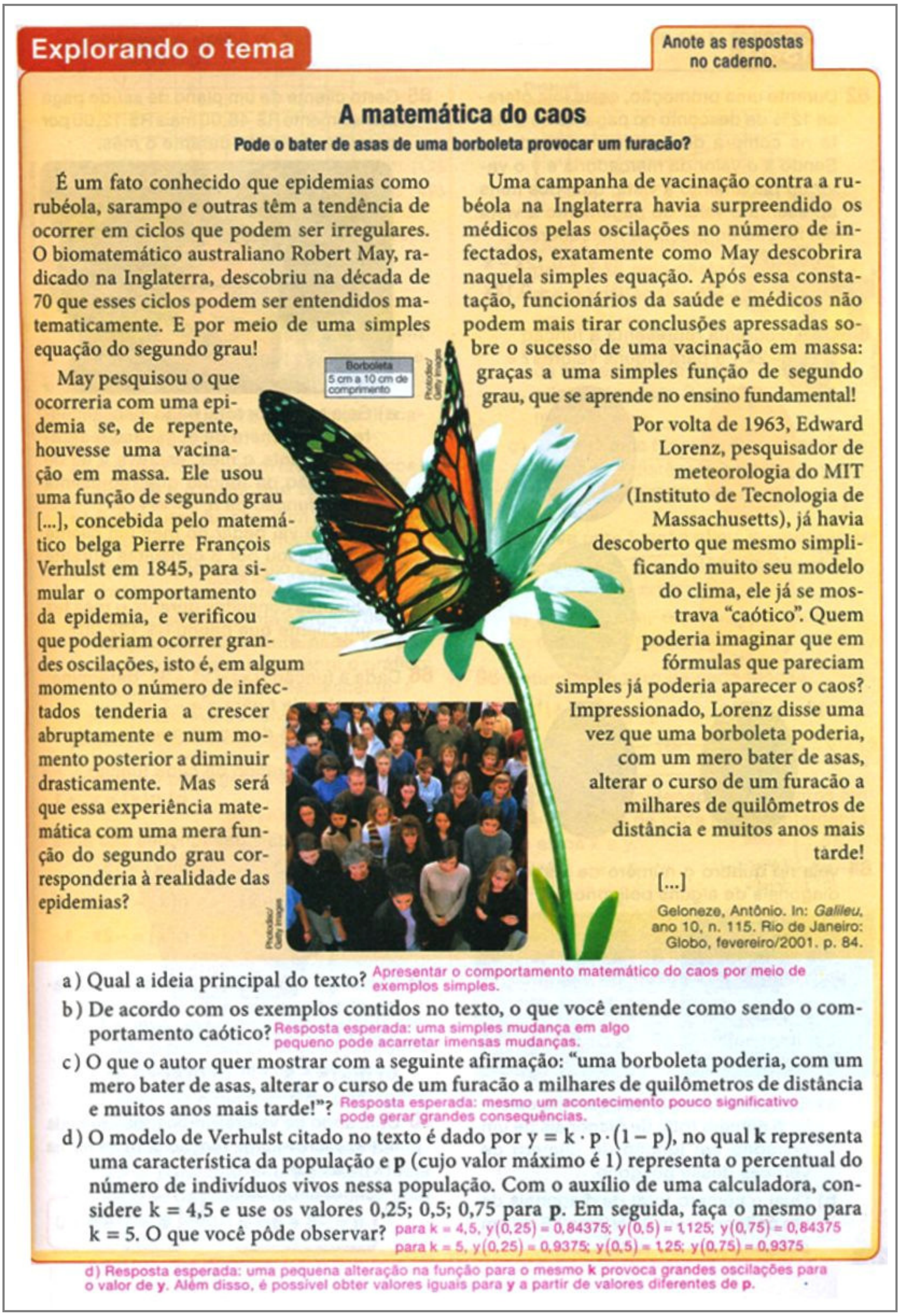
d) assimétrico

Corel Stock Photo

► Lembre-se de que os fractais são formas geométricas abstratas com padrões que se repetem infinitamente.

Fonte: Souza e Pataro (2009a, p. 250).

FIGURA 36 - Tema fractal na seção *Explorando o Tema*, 9º ano



Explorando o tema

Anote as respostas no caderno.

A matemática do caos

Pode o bater de asas de uma borboleta provocar um furacão?

É um fato conhecido que epidemias como rubéola, sarampo e outras têm a tendência de ocorrer em ciclos que podem ser irregulares. O biomatemático australiano Robert May, radicado na Inglaterra, descobriu na década de 70 que esses ciclos podem ser entendidos matematicamente. E por meio de uma simples equação do segundo grau!

May pesquisou o que ocorreria com uma epidemia se, de repente, houvesse uma vacinação em massa. Ele usou uma função de segundo grau [...], concebida pelo matemático belga Pierre François Verhulst em 1845, para simular o comportamento da epidemia, e verificou que poderiam ocorrer grandes oscilações, isto é, em algum momento o número de infectados tenderia a crescer abruptamente e num momento posterior a diminuir drasticamente. Mas será que essa experiência matemática com uma mera função do segundo grau corresponderia à realidade das epidemias?

Uma campanha de vacinação contra a rubéola na Inglaterra havia surpreendido os médicos pelas oscilações no número de infectados, exatamente como May descobrira naquela simples equação. Após essa constatação, funcionários da saúde e médicos não podem mais tirar conclusões apressadas sobre o sucesso de uma vacinação em massa: graças a uma simples função de segundo grau, que se aprende no ensino fundamental!

Por volta de 1963, Edward Lorenz, pesquisador de meteorologia do MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), já havia descoberto que mesmo simplificando muito seu modelo do clima, ele já se mostrava "caótico". Quem poderia imaginar que em fórmulas que pareciam simples já poderia aparecer o caos? Impressionado, Lorenz disse uma vez que uma borboleta poderia, com um mero bater de asas, alterar o curso de um furacão a milhares de quilômetros de distância e muitos anos mais tarde!

[...]

Geloneze, Antônio. In: *Galileu*, ano 10, n. 115. Rio de Janeiro: Globo, fevereiro/2001. p. 84.

Borboleta
5 cm a 10 cm de comprimento

Photodisc/Getty Images

Photodisc/Getty Images

a) Qual a ideia principal do texto? Apresentar o comportamento matemático do caos por meio de exemplos simples.

b) De acordo com os exemplos contidos no texto, o que você entende como sendo o comportamento caótico? Resposta esperada: uma simples mudança em algo pequeno pode acarretar imensas mudanças.

c) O que o autor quer mostrar com a seguinte afirmação: "uma borboleta poderia, com um mero bater de asas, alterar o curso de um furacão a milhares de quilômetros de distância e muitos anos mais tarde!"? Resposta esperada: mesmo um acontecimento pouco significativo pode gerar grandes consequências.

d) O modelo de Verhulst citado no texto é dado por $y = k \cdot p \cdot (1 - p)$, no qual **k** representa uma característica da população e **p** (cujo valor máximo é 1) representa o percentual do número de indivíduos vivos nessa população. Com o auxílio de uma calculadora, considere $k = 4,5$ e use os valores 0,25; 0,5; 0,75 para **p**. Em seguida, faça o mesmo para $k = 5$. O que você pôde observar? para $k = 4,5$, $y(0,25) = 0,84375$; $y(0,5) = 1,125$; $y(0,75) = 0,84375$
para $k = 5$, $y(0,25) = 0,9375$; $y(0,5) = 1,25$; $y(0,75) = 0,9375$

d) Resposta esperada: uma pequena alteração na função para o mesmo **k** provoca grandes oscilações para o valor de **y**. Além disso, é possível obter valores iguais para **y** a partir de valores diferentes de **p**.

Fonte: Souza e Pataro (2009b, p. 107).

A análise da primeira atividade é análoga às atividades apresentadas e analisadas anteriormente, cuja ênfase está nos três tipos de saberes que atuam sobre os objetos de aprendizagem, conforme Gérard e Roegiers (1998) (FIGURA 34). A segunda atividade traz uma propriedade que distingue fractais em duas *classes*: os simétricos e os assimétricos (FIGURA 35).

Além dessas duas atividades, encontrou-se outra no volume do 9º ano do Ensino Fundamental na seção *Explorando o Tema*, a qual não menciona o termo fractal, mas sabe-se que ela está relacionada à teoria do caos, visto que a teoria fractal é uma linguagem dessa teoria (FIGURA 36). Como já se tratou anteriormente neste estudo, essa atividade traz a fórmula de Verhulst, a qual modela o crescimento populacional e também oferece possibilidades de se abordar o conceito de atratores. Esse tipo de atratores compõe a classe dos fractais algébricos, que são obtidos por iterações de funções; todavia, os autores não exploraram essa possibilidade.

4.2 DO ENSINO MÉDIO

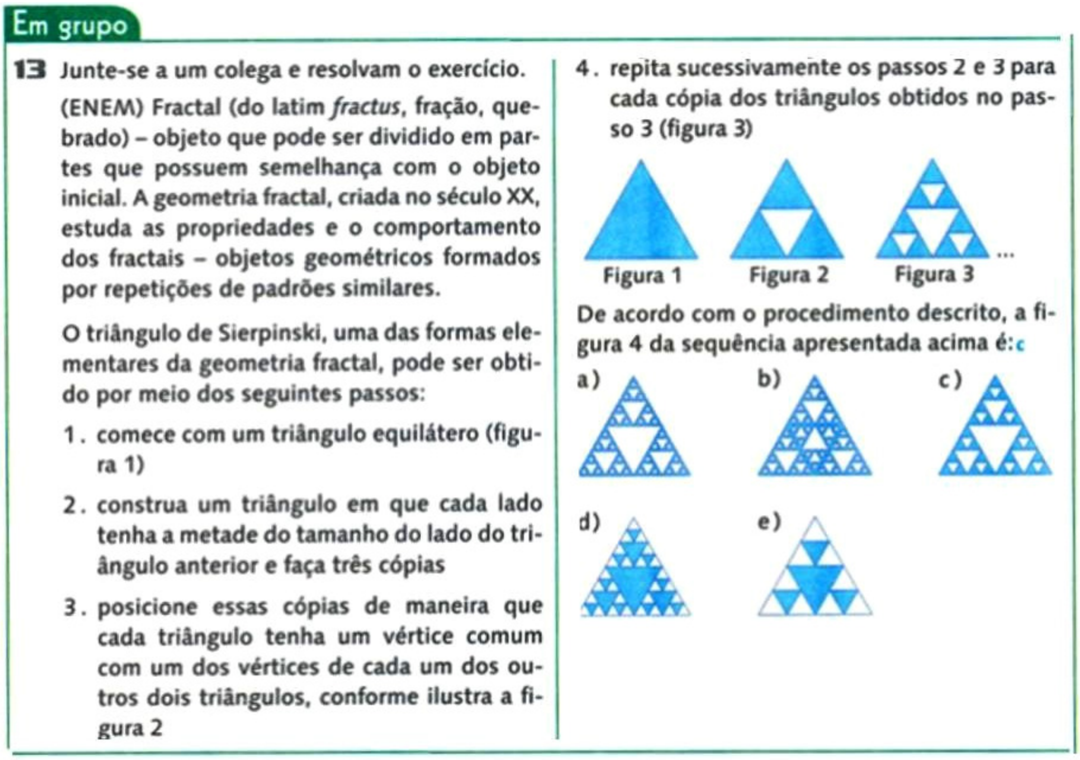
Os livros didáticos do Ensino Médio foram escolhidos seguindo os mesmos critérios de escolha dos livros do Ensino Fundamental.

Será descrito o desenvolvimento dado às lições sobre Fractais nos livros didáticos selecionados, analisando as ocorrências dos objetos de aprendizagem de conceitos: fatos particulares, classes, relações e estruturas, que são critérios epistemológicos orientados por Gérard e Roegiers (1998).

4.2.1 Jackson Ribeiro – Matemática ciência, linguagem e tecnologia (2010)

Nos livros didáticos de Ribeiro, intitulados *Matemática*: Ciência, Linguagem e Tecnologia, Ensino Médio (2010), no volume 1, 1º ano, o tema fractal é abordado nas seções, *Em Grupo* e *Exercícios Propostos*, sendo que o volume 3, 3º ano, o tema é abordado na seção *Conectando Ideias* e na seção destinada ao professor, denominada *Assessoria Pedagógica.*

FIGURA 37 - Tema fractal na seção *Em Grupo*, 1º ano, volume 1



Em grupo

13 Junte-se a um colega e resolvam o exercício.

(ENEM) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1)
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3)

Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é: c

a) b) c) d) e)

Fonte: Ribeiro (2010a, p. 289 e 314).

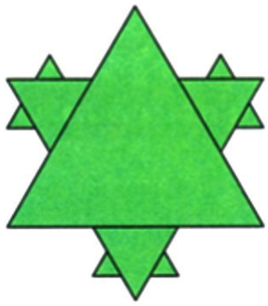
A seção *Em Grupo* foi organizada para promover o trabalho em grupo e com isso alcançar maior interação e desenvolvimento cognitivo (FIGURA 37). Enquanto a seção *Exercícios Propostos* traz exercícios referentes ao conteúdo abordado no tópico do capítulo.

A questão apresentada na Figura 37 foi aplicada no Exame Nacional do Ensino Médio, em 2008. Vale destacar que ela apresenta, de modo confuso, a construção do triângulo de Sierpinski e que o saber-fazer gestual é preponderante nesta atividade.

FIGURA 38 - Tema fractal na seção *Exercícios Propostos*, 1º ano, volume 1

(a)

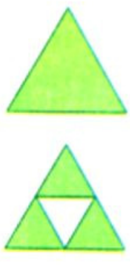
133 (Unicamp – SP) Construir fractais no computador corresponde a um procedimento como o descrito a seguir. A partir de um triângulo equilátero, de área A, acrescentamos, no meio de cada lado, um outro triângulo equilátero, de lado igual a um terço do anterior; nos lados livres desses triângulos, acrescentamos triângulos de lados iguais a um terço dos anteriores e assim sucessivamente. Desse modo, construímos uma figura com uma infinidade de triângulos (veja o desenho).

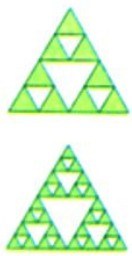


Calcule a área, em termos de A, da região determinada por esse processo. $\frac{10A}{7}$

(b)

A geometria fractal, oculta na natureza, foi descoberta na década de 1960, nos estudos das variações climáticas pelo meteorologista americano Edward Lorenz e passou a ser visualizada em computador na década de 1970, a partir de estudos do matemático polonês Benoit Mandelbrot que deu o nome de fractal, do latim *fractus*, que significa quebrado, fracionado. Exemplo de um fractal é o triângulo de Sierpinski.





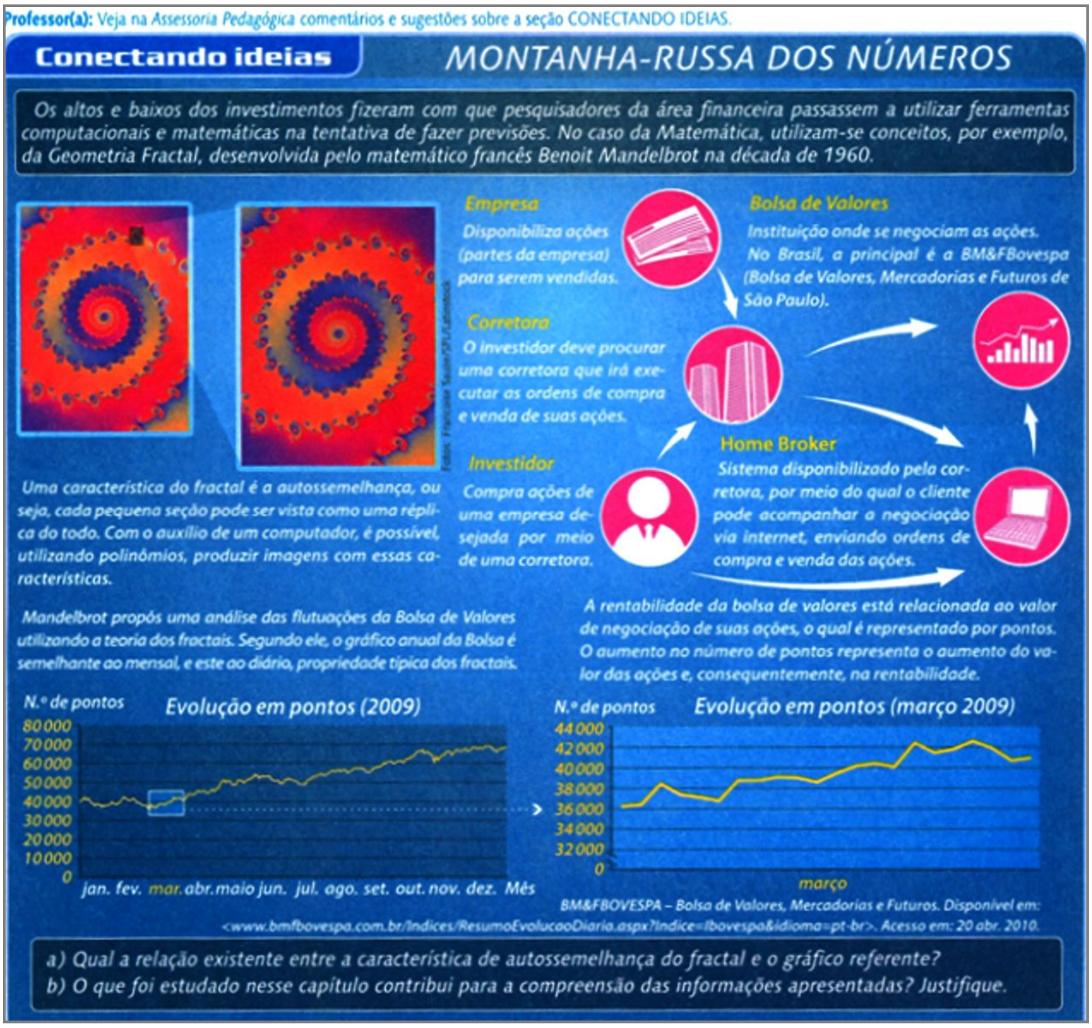
Uma figura fractal é formada por diversas partes que lembram, cada uma, o desenho da figura inteira. Neste fractal, os triângulos são semelhantes, um padrão dentro de outro padrão.

Fonte: Ribeiro (2010a, p. 289 e 314).

A questão apresentada na Figura 38a foi aplicada no vestibular da Universidade Estadual de Campinas, em 1990. As análises feitas anteriormente quanto às quatro dimensões teóricas, praticamente são as mesmas, a não ser pelo aparecimento de uma nova variável (a área do floco de neve de Koch), com isso, tem-se uma nova relação e a partir de novas relações e outros elementos, pode-se estabelecer novas estruturas.

Na Figura 38b, o autor apresenta uma nota informativa, em que expõe a construção do triângulo Sierpinski. Essa informação apresenta-se no momento em que aborda o tópico sobre triângulos semelhantes; sendo assim, esse fractal se apresenta como um fato particular.

FIGURA 39 - Tema fractal na seção *Conectando Ideias*, 3º ano, volume 3



Fonte: Ribeiro (2010c, p. 354).

O tema fractal abordado no exemplar do 3º ano, na seção *Conectando Ideias*, segundo o autor, apresenta textos e infográficos que visam motivar o aluno e levá-lo a refletir sobre o que foi estudado no capítulo, bem como perceber a relação desse conteúdo com situações cotidianas e outras áreas do conhecimento (FIGURA 39).

Numa seção destinada ao professor, denominada *Assessoria Pedagógica*, o autor fornece sugestões de como orientar essa atividade para o aluno. Sugere que o professor, com base nos gráficos, questione aos alunos sobre qual a semelhança entre eles. A partir desse questionamento, os alunos devem ser conduzidos a concluir que o gráfico do mês de março é praticamente uma réplica do gráfico do ano todo.

Qual é a relação dos fractais com os polinômios? Responde o autor que é possível elaborar uma imagem computacional com a característica de um fractal, inserindo algumas funções polinomiais em programas de computador e, também, as flutuações das bolsas de valores são descritas por polinômios. O autor levanta a possibilidade de os alunos pesquisarem outras imagens de fractais, como o triângulo de Sierpinski e o floco de neve, assim como os procedimentos para obtê-los. Também pede para que os professores observem a ocorrência dos fractais nos vegetais (brócolis, pinha, samambaia, etc.).

Um aspecto tratado na seção *Assessoria Pedagógica* é o da linguagem. Além disso, a atividade proposta exige do aluno o saber-fazer cognitivo, pois para identificar a relação existente entre a característica de autossemelhança do fractal e o gráfico, deverá relacionar, comparar os dados e concluir que o gráfico se assemelha aos fractais sob o ponto de vista da noção de escala, já que uma parte (ano, mês, dias ou horas) do gráfico representa, sob alguns aspectos, o todo.

Em relação ao questionamento do item b, apresentado na Figura 39, compreende-se que o aluno responderá afirmativamente, pois os gráficos representam funções polinomiais, que é tema do estudo. A respeito do conceito fractal, o aluno terá maior dificuldade, visto que o livro não tratou do tema fractal em nenhum outro momento. Apesar disso, parece que o autor espera que os alunos se refiram aos fractais como imagens criadas também por aplicação de polinômios. Essa hipótese está fundamentada nas orientações da Seção Assessoria Pedagógica.

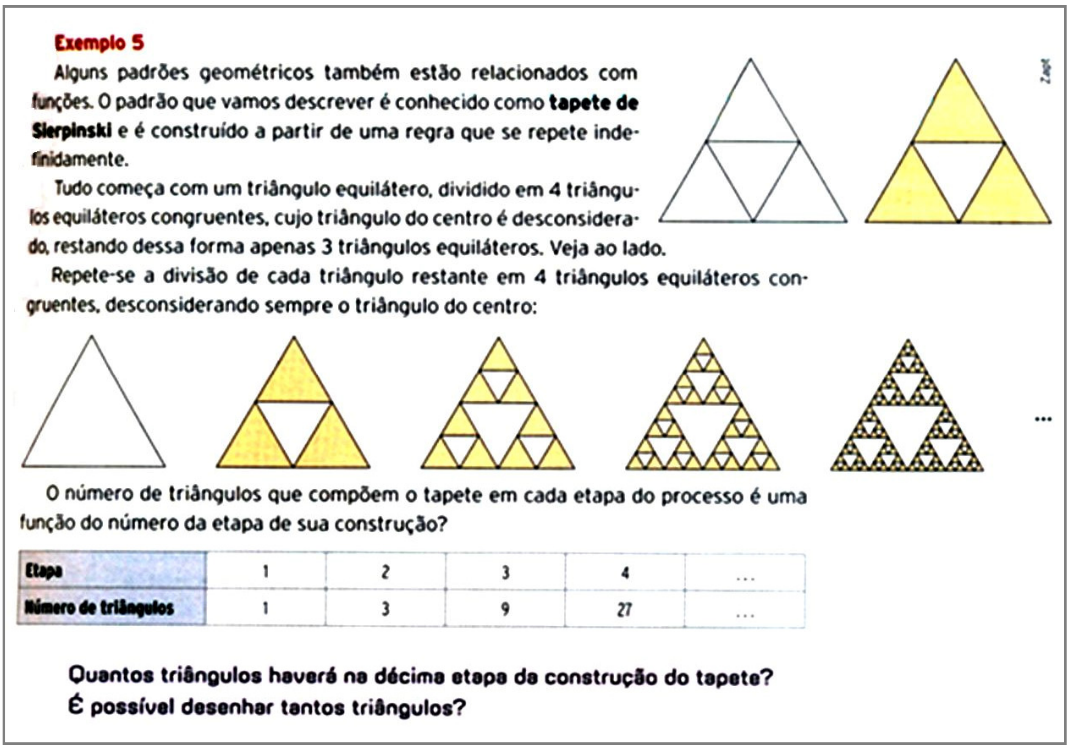
Percebe-se, por meio dessas orientações, que o autor procurou conectar polinômios à economia. Vale ressaltar que os fractais podem ser mais bem explorados, principalmente no 3º ano, pois os fractais algébricos possibilitam unir temas, tais como: polinômios, números complexos, geometria e tantos outros dos diversos campos do conhecimento, como já descritos nesta pesquisa.

4.2.2 Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz – Matemática Ensino Médio (2010)

Nos dois volumes do livro didático do Ensino Médio, de Diniz e Smole, intitulado *Matemática: Ensino Médio* (2010), o tema fractal é abordado no volume 1, em exemplos de função e sequências e na seção *Para Saber Mais*; e no volume 2 está nas seções *Saia Dessa* e *Para Saber Mais*.

No livro didático do 1º ano do Ensino Médio, as autoras apresentam cinco exemplos de função: a altura da criança em função de sua idade; a relação entre a concentração do suco em função do suco pronto; a área do quadrado em função do seu lado; a numeração dos sapatos em função do comprimento dos pés; e a etapa de construção do triângulo de Sierpinski em função do número de triângulos.

FIGURA 40 - Tema fractal como exemplos de função, 1º ano do Ensino Médio, volume 1



Exemplo 5

Alguns padrões geométricos também estão relacionados com funções. O padrão que vamos descrever é conhecido como **tapete de Sierpinski** e é construído a partir de uma regra que se repete indefinidamente.

Tudo começa com um triângulo equilátero, dividido em 4 triângulos equiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos equiláteros. Veja ao lado.

Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos equiláteros congruentes, desconsiderando sempre o triângulo do centro:

O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do tapete? É possível desenhar tantos triângulos?

Fonte: Smole e Diniz (2010a, p. 73).

Observa-se que na Figura 40, as autoras se referem, de modo incorreto, ao padrão descrito nessa figura, pois não é o tapete Sierpinski, mas sim, o triângulo Sierpinski. Referente à resposta da segunda pergunta, é apropriado tomá-la como subjetiva, pois, depende do processo utilizado: computacional, com lápis, régua e compasso ou ainda, de variáveis como o comprimento dos lados que se inicia, ou da escala utilizada.

Essa atividade não difere muito daquelas de outros autores, analisadas anteriormente, a não ser pelo fato de haver mudança no valor da variável, pois nas atividades anteriores era pedido o número de triângulos na etapa seguinte, enquanto essa solicitou a décima etapa. Verifica-se que, neste caso, há uma mudança nas relações, além do que, exige-se muito mais do aluno o saber-fazer cognitivo do que o saber-fazer gestual; nas outras atividades, ainda era possível o aluno fazer o desenho para contar os triângulos.

FIGURA 41 - Tema fractal como exemplos de sequências, 1ª página, 1º ano do Ensino Médio, volume 1

UNIDADE 6

Sequências, progressão aritmética e progressão geométrica

Optamos por inserir esta unidade sobre sequências numéricas e progressões antes das funções exponencial e logarítmica porque, dessa forma, é possível:
- relacionar o estudo das funções e de função afim com sequências e progressões;

Nesta unidade, vamos estudar algumas funções especiais, conhecidas como **sequências numéricas**, com atenção às **progressões aritméticas** e **progressões geométricas**. A compreensão dessas sequências facilitará o estudo, nas próximas unidades, das funções exponencial e logarítmica.

- abordar a noção de crescimento ou decrescimento exponencial por meio de progressão geométrica, cujos padrões permitem um contexto de aprendizagem que favorece a maior compreensão de função exponencial e o conceito de logaritmo.

1. Sequências

Zapt

SPL/LatinStock

As figuras acima são conhecidas como **curva do floco de neve de Koch** e **tapete de Sierpinski**, respectivamente. A primeira é feita a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero e a segunda, no interior de um quadrado.

O matemático Helge von Koch, em 1904, obteve a primeira dessas figuras a partir de um triângulo equilátero de lado 1. Observe as três primeiras figuras da sequência.

Zapt

Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira? Acompanhe a explicação.

Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números.

Como podemos descrever essa sequência?

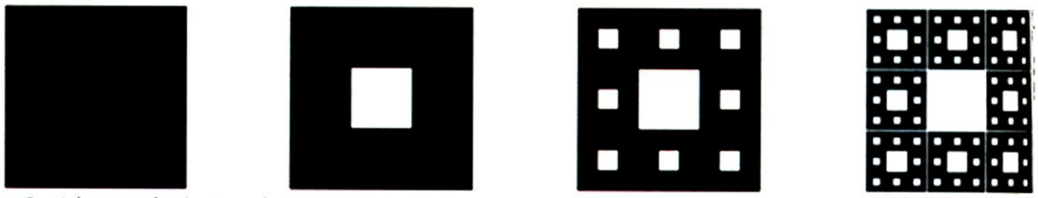
PARA LER

Se você já está lendo o livro *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger (Cia. das Letras), indicado na unidade 3, não deixe de ler a 5ª e a 6ª noites. Elas ajudarão você a pensar mais sobre as sequências que estudará nesta unidade.

Fonte: Smole e Diniz (2010a, p. 141).

FIGURA 42 - Tema fractal como exemplos de sequências, 2ª página, 1º ano do Ensino Médio, volume 1

Observe agora o que fez o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Ele construiu seu "tapete" dividindo um quadrado de lado 1 em nove quadrados congruentes e retirando o quadrado central. Esse processo se repete em cada um dos quadrados restantes na etapa anterior.



Qual é a sequência dos números com as medidas dos lados dos quadrados retirados em cada etapa?

Para discutir problemas como esse é que vamos estudar, nesta unidade, sequências e progressões.

Uma **sequência numérica** é uma organização de números. As sequências podem ter ou não uma lei de formação e podem ser finitas ou infinitas.

Exemplos:

a) (5, 5, 4, 8, 6, 9, 1, 2) é uma sequência finita dos algarismos que compõem o número de um telefone e não possui uma lei de formação.

b) (4, 16, 64, ...) é uma sequência infinita de números naturais não nulos que são potências de 4. Essa sequência tem uma lei de formação bem simples: o primeiro termo é 4 e cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 4.

As sequências que vamos estudar nesta unidade são infinitas e para elas cada número sucede o anterior de acordo com uma determinada regra, de tal modo que é sempre possível saber se um número pertence ou não à sequência.

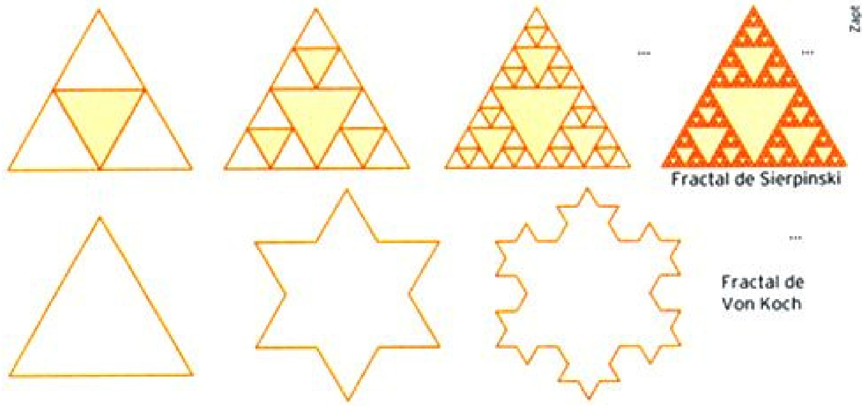
Fonte: Smole e Diniz (2010a, p. 142).

Os fractais apresentados nas Figuras 41-42 têm duas funções básicas: motivar e servir como problema de partida. Segundo Gérard e Roegiers (1998, p. 62) há motivações intrínsecas e extrínsecas; a extrínseca limita-se "[...] a utilizar processo para captar e manter a atenção [...] 'chamar a atenção' sem, contudo, a fundamentar num verdadeiro interesse pela matéria a aprender." Essas atividades com fractais atendem as características descritas por Gérard e Roegiers (1998), tais como: apresenta uma situação nova que obriga o aluno a explorar uma estrutura desconhecida, mas composta de elementos conhecidos; situa-se num patamar acima do nível de conhecimentos atuais; fornece ao aluno pistas que o encaminham para o ponto-chave da aprendizagem; evidencia o objetivo a atingir e os meios dispostos ao aluno para consegui-lo.

FIGURA 43 - Tema fractal na seção *Para Saber Mais*, 1º ano do Ensino Médio, volume 1

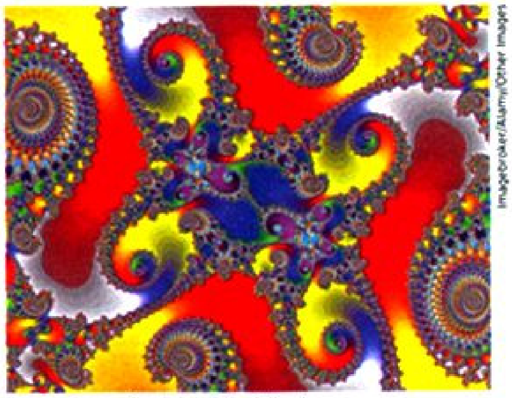
PARA SABER MAIS

Sequências na era do computador



De sequências de imagens como estas, definidas por regras muito simples, quando desenhadas a mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores, que torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.

O limite de uma sequência de figuras como as anteriores é um **fractal**.



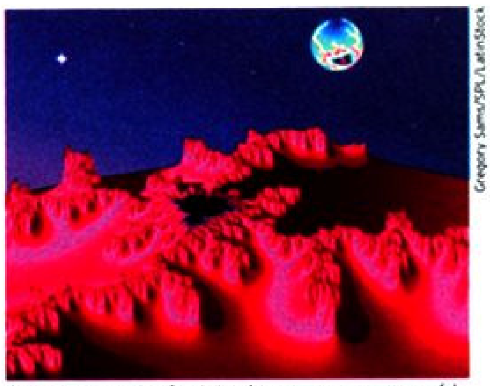
Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

A Geometria fractal é um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a Ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a Geometria euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas – um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta –, mas é sempre estranhamente bela.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastíssimas em Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia, Geografia e até em História, Economia e Linguística. Os linguistas, por exemplo, começaram a aplicar a teoria dos fractais no estudo da evolução dos dialetos. Já na Medicina, foram reconhecidas características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

Imagens fractais também têm sido usadas em filmes de ficção, como em *O retorno de Jedi*.



Observe esse outro fractal: veja como parece um cenário de filme de ficção científica..

Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 169).

Nesse mesmo volume, o tema fractal reaparece na seção *Para Saber Mais* e, segundo as autoras, tem as seguintes funções: destacar ideias ou propriedades que serão usadas no desenvolvimento do tema em estudo; trazer um novo conteúdo que permitirá melhor compreensão do tema; apresentar uma curiosidade ou aplicação do que está sendo estudado; e possibilitar a geração de pesquisa.

Nessa seção, os fractais podem ser vistos como uma curiosidade, a qual se classifica como sendo um fato particular ou motivacional (FIGURA 43). Na página seguinte, logo após o encerramento da seção, as autoras iniciam outra seção *Conexão – Matemática e Economia*, e mostram gráficos que representam as variações de mercado, entretanto, não fazem nenhuma relação desses gráficos com fractais, como fez Jackson Ribeiro.

FIGURA 44 - Tema fractal na seção *Para Saber Mais*, 2º ano do Ensino Médio, volume 2 – parte 1

PARA SABER MAIS

A matemática do delírio

Segundo o velho Euclides, matemático grego que viveu cerca de 2 200 anos atrás, existem figuras que não têm dimensão, ou melhor, têm dimensão 0. É o caso dos pontos, como este ponto final (.). Uma linha, por sua vez, é algo com uma única dimensão. Já a capa de *Superinteressante*, de acordo com a geometria euclidiana, tem duas dimensões. Pois, para conhecer qual a sua área, é necessário multiplicar dois números —

Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 247).

FIGURA 45 - Tema fractal na seção *Para Saber Mais*, 2º ano do Ensino Médio, volume 2 – parte 2

o do comprimento pelo da largura. Do mesmo modo, um bloco possui três dimensões, porque precisamos multiplicar três números (comprimento, largura e altura) para saber qual o seu volume. Euclides estava certo. Mas não resolveu todo o problema.

Os contornos das montanhas, a superfície dos pulmões humanos, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra — existe uma infinidade de fenômenos na natureza que, graças à sua irregularidade, não podem ser descritos por essa geometria toda certinha. É preciso apelar para complicados cálculos que resultam nas chamadas dimensões fracionárias — como a dimensão 0,5, por exemplo, típica de um objeto que é mais do que um simples ponto com dimensão zero, porém menos do que uma linha com dimensão 1 (veja gráfico a seguir). Só a chamada geometria dos fractais consegue descrevê-lo.

Essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas. Para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belo — e, sem dúvida, o mais colorido — é o uso dos fractais na arte. Quando os computadores são alimentados com equações, eles criam magníficos desenhos abstratos. É o que você poderá ver nas ilustrações do inglês Greg Sams e no trabalho do grupo Fractarte, formado por três pesquisadores paulistanos.

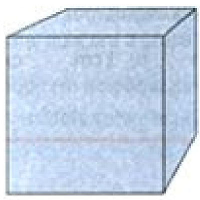
Duas maneiras de descrever o mundo

A geometria euclidiana...

Um ponto tem dimensão 0. Ele não tem comprimento ou largura. É impossível medi-lo.

Uma reta – a distância mínima entre dois pontos – tem uma única dimensão. Porque só pode ser medida de uma maneira: pelo seu comprimento.

Um plano, como o da tábua da sua mesa, tem duas dimensões. A sua área é a multiplicação de dois números: o do comprimento e o da largura.



Já **um cubo** seria o máximo, com suas três dimensões: largura, comprimento e profundidade que, multiplicados, resultam em sua área.

... e a dos fractais

Existem objetos que não podem ser descritos por retas, como essa acima.

Então, é como se fosse retirado um pedaço da reta.

E depois mais outros pedaços.

A operação de esburacar a reta seria repetida inúmeras vezes...

... até se ter uma ideia do que aconteceria se fosse quebrada infinitas vezes.

Sobraria, então, o que se chama "Poeira de Cantor", idealizada pelo matemático alemão Georg Cantor. Seria mais do que um único ponto (dimensão 0) e menos do que uma reta (dimensão 1): uma dimensão 0,5, por exemplo. Existem, ainda, objetos entre a reta e o plano. E objetos entre o plano e o cubo. Basta imaginar essas figuras esburacadas, como a reta que virou poeira.

Equações e muita imaginação podem criar coloridas galáxias

Planetas com florestas estranhas, mares cor de laranja e montanhas com milhares de picos pontiagudos são alguns dos mundos imaginados pelo artista gráfico Greg Sams, que trabalha em Londres, na Inglaterra. verdade, ele faz uma espécie de colagem com o auxílio do computador, como se recortasse pedaços redon de fractais para criar um planeta ou uma estrela de contorno regular.

Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 248).

FIGURA 46 - Tema fractal na seção *Para Saber Mais*, 2º ano do Ensino Médio, volume 2 – parte 3

"O que mais me fascina é procurar novos padrões de um mesmo fractal para construir as minhas imagens", diz o artista. Isso porque quanto mais você se aproxima de um fractal, mais detalhes você consegue enxergar nele. Parece não ter fim — é uma visão do infinito. Desse modo, Sams vai ampliando determinada área dezenas ou centenas de vezes — e sempre observa desenhos diferentes.

Diferentes, porém parecidos. Pois não basta ter dimensão fracionária para ser um fractal. É preciso que o objeto seja autossemelhante: suas partes devem se parecer muito entre si e representar o todo. Ou seja, um fractal pode ser comparado a uma couve-flor — se alguém cortar um *pedaço dela, verá que ele tem a cara* da verdura inteira. A terceira e última característica de um fractal é ser fruto de um processo iterativo. No jargão dos matemáticos, isso significa repetir uma fórmula inúmeras vezes. É dessa repetição que surge a imagem.

A viagem da cabeça dos brasileiros parece o efeito de um alucinógeno

Fractais obtidos pela aplicação das fórmulas matemáticas.

A arte com fractais pode ser um caminho para os matemáticos explicarem as suas ideias. Isso é o que almejam três pesquisadores da Univesidade de São Paulo. Rodrigo de Almeira Siqueira, 23 anos, cursa Engenharia Elétrica e faz pesquisas na área de multimídia. Alexandre Dupont, 25 anos, é estudante de Engenharia e de Matemática. A terceira figura é Humberto Rossetti Baptista, 23 anos, formado em Ciência da Computação, que vive no maior corre-corre por causa de uma inacabada tese de mestrado. Cujo assunto, claro, é teoria dos fractais — o elo entre os três integrantes do grupo Fractarte.

"Os fractais viraram uma espécie de moda", observa Dupont. "Muita gente está fazendo coisas com fractais. No entanto, quase ninguém explica o que são." Daí surgiu a ideia da exposição "Janelas para o Infinito" (...).

Dizem que uma imagem pode substituir mil palavras. No caso, um único fractal pode ocupar o espaço de 100 000 palavras na memória do computador. E o objetivo dos pesquisadores é de que ele sirva por outras 100 000 palavras para mostrar ao público leigo aquilo que passa na cabeça de um matemático. "Muitas vezes, os matemáticos perdem anos tentando encontrar ou decifrar uma fórmula sem finalidade prática alguma — ao menos imediata", diz Rossetti Baptista. "Fazem isso porque a matemática é lúdica; com suas ideias abstratas; e é um pouco desse lado lúdico que as pessoas podem experimentar ao ver uma obra cuja base é uma equação."

Na opinião do professor José Teixeira Coelho Neto, da Escola de Comunicação da USP, *a linguagem dos* fractais tem tudo a ver com o presente. "Há muito tempo existe uma discussão na Arquitetura entre modernos e pós-modernos", exemplifica. Segundo ele, os modernos encaram os ângulos retos, a geometria *clean*, como algo mais evoluído, enquanto os pós-modernos brigam contra esse conceito. "Assim, a geometria dos fractais vem como um reforço para o pós-modernismo."

Fonte: OLIVEIRA, Lúcia Helena de. Revista Superinteressante, ano 8, n. 10, São Paulo, Abril, out. 1994, p. 23

Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 249).

O texto apresentado na seção *Para Saber Mais* aborda o conceito da dimensão fracionária, da autossemelhança e da complexidade infinita (FIGURAS 44-46). Informa, também, que a geometria euclidiana não dá conta de resolver alguns problemas da natureza, e por isso foi criada a geometria mandelbrotiana para poder descrever esses fenômenos.

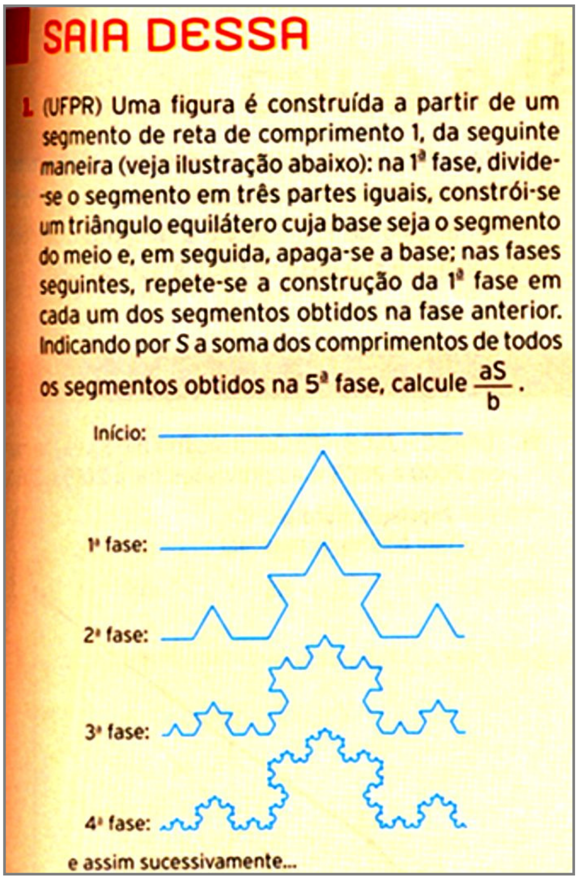
Na sequência, o texto apresenta uma tabela na qual mostra duas maneiras de descrever o mundo, ora por meio da geometria dos fractais ora por meio da geometria euclidiana. Percebe-se na Figura 45 que a tabela descreve a construção do conjunto de Cantor por meio da ilustração, de modo impreciso. Além de se ter uma dimensão fracionária, adverte o texto, é necessário ser autossemelhante e ser fruto de um processo iterativo.

No final da matéria, há uma menção de que os fractais estão presentes na arte e que pessoas pesquisam formas de desenvolver e divulgar a teoria fractal. O texto termina dizendo que na arquitetura a linguagem (geometria) dos fractais vem como um reforço para o pós-modernismo.

Apesar de o texto possibilitar inúmeros questionamentos acerca de seu conteúdo, as autoras não fizeram quaisquer observações sobre o assunto, tornando o texto apenas como um fato particular, não havendo um aproveitamento mais significativo.

Nesse mesmo volume, o tema fractal se apresenta também na seção *Saia Dessa*, que tem como propósito, fazer com que os alunos resolvam problemas não convencionais, os quais podem ou não estarem relacionados ao tema da unidade, mas não podem ser resolvidos com a aplicação direta de uma equação ou processo algorítmico, exigindo do aluno criatividade e originalidade. Esses problemas devem ser resolvidos em duplas e envolvem as mais diversas habilidades e estratégias de resolução: tentativa e erro; diagramas e desenhos; busca de regularidades; e conjectura de hipóteses.

FIGURA 47 - Tema fractal na seção *Saia Dessa*, 2º ano do Ensino Médio, volume 2



SAIA DESSA

1 (UFPR) Uma figura é construída a partir de um segmento de reta de comprimento 1, da seguinte maneira (veja ilustração abaixo): na 1ª fase, divide-se o segmento em três partes iguais, constrói-se um triângulo equilátero cuja base seja o segmento do meio e, em seguida, apaga-se a base; nas fases seguintes, repete-se a construção da 1ª fase em cada um dos segmentos obtidos na fase anterior. Indicando por S a soma dos comprimentos de todos os segmentos obtidos na 5ª fase, calcule $\frac{aS}{b}$.

e assim sucessivamente...

Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 245).

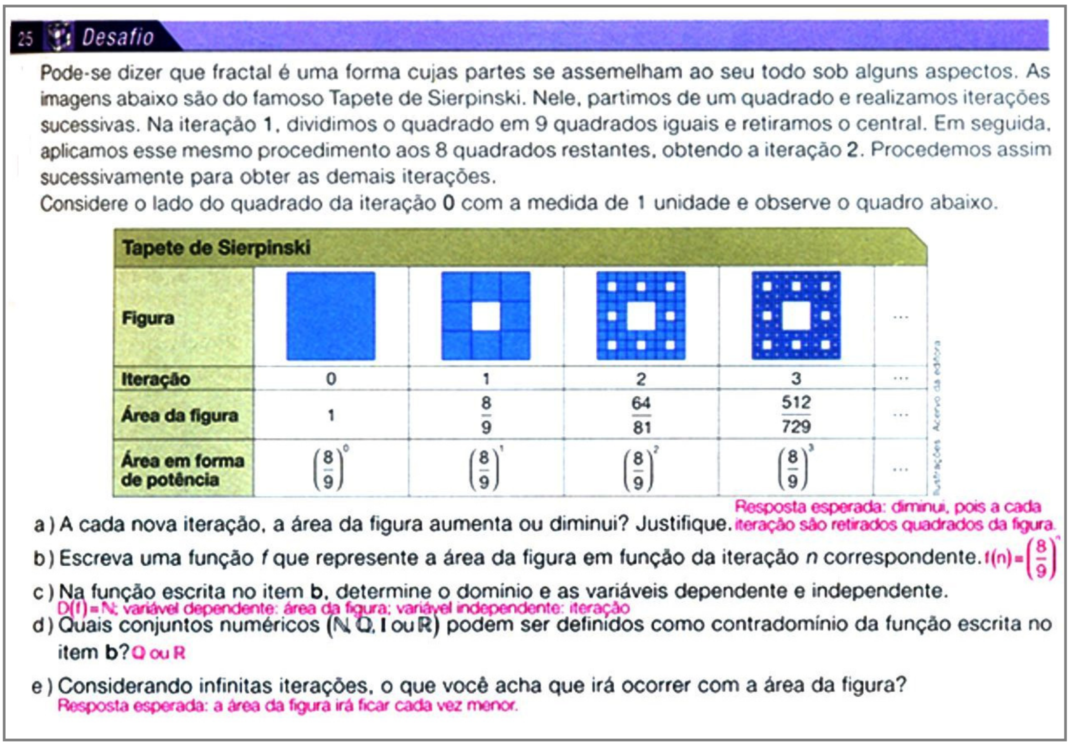
Observa-se que nesta questão há duas variáveis: o comprimento de cada segmento e o número total de segmentos na 5ª fase (FIGURA 47). Essas duas variáveis permitem estabelecer outras relações e com isso estabelecer novas estruturas. Compreende-se que este problema desenvolve a postura do saber-fazer cognitivo.

4.2.3 Joamir Souza – Novo olhar – matemática (2010)

O tema fractal é abordado no livro didático do 1º ano do Ensino Médio, nas seções *Atividades* e *Atividades Complementares*.

A seção *Atividades*, segundo o autor, traz exercícios relacionados ao conteúdo estudado em um ou mais tópicos do capítulo e estão dispostos em nível gradual de complexidade. As atividades, em sua maioria, devem ser resolvidas em sala de aula. Já a seção *Atividades Complementares* tem como objetivo propor atividades com o intuito de revisar todo o conteúdo explorado ou anteriores. As duas seções podem ser compostas por alguns dos seguintes tópicos: Desafio, Contexto e Calculadora. Os desafios são atividades cuja resolução vai além da aplicação imediata do conteúdo e, de modo geral, o aluno terá que desenvolver suas próprias estratégias de resolução.

FIGURA 48 - Tema fractal no tópico *Desafio*, 1º ano do Ensino Médio



25 Desafio

Pode-se dizer que fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos. As imagens abaixo são do famoso Tapete de Sierpinski. Nele, partimos de um quadrado e realizamos iterações sucessivas. Na iteração 1, dividimos o quadrado em 9 quadrados iguais e retiramos o central. Em seguida, aplicamos esse mesmo procedimento aos 8 quadrados restantes, obtendo a iteração 2. Procedemos assim sucessivamente para obter as demais iterações.

Considere o lado do quadrado da iteração **0** com a medida de 1 unidade e observe o quadro abaixo.

Tapete de Sierpinski					
Figura					...
Iteração	0	1	2	3	...
Área da figura	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	...
Área em forma de potência	$\left(\frac{8}{9}\right)^0$	$\left(\frac{8}{9}\right)^1$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3$	...

Ilustrações: Acervo da editora

a) A cada nova iteração, a área da figura aumenta ou diminui? Justifique. Resposta esperada: diminui, pois a cada iteração são retirados quadrados da figura.

b) Escreva uma função *f* que represente a área da figura em função da iteração *n* correspondente. $f(n)=\left(\frac{8}{9}\right)^n$

c) Na função escrita no item **b**, determine o domínio e as variáveis dependente e independente.
D(f) = N; variável dependente: área da figura; variável independente: iteração

d) Quais conjuntos numéricos (N, Q, I ou R) podem ser definidos como contradomínio da função escrita no item **b**? Q ou R

e) Considerando infinitas iterações, o que você acha que irá ocorrer com a área da figura?
Resposta esperada: a área da figura irá ficar cada vez menor.

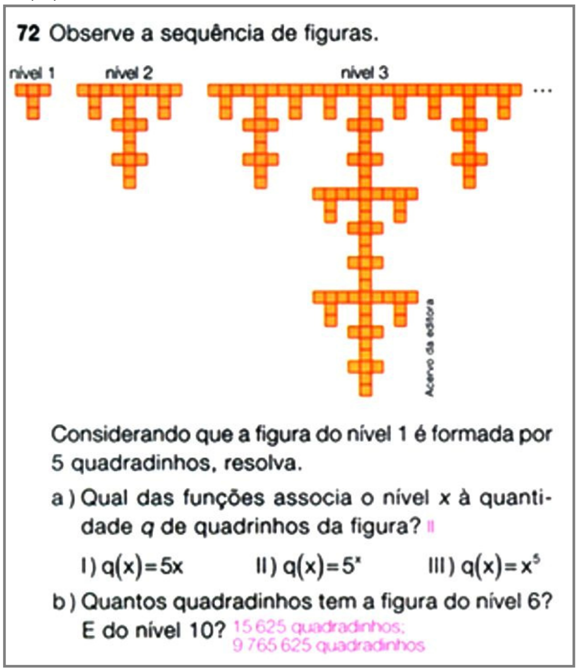
Fonte: Souza (2010, p. 55).

Na atividade do tópico *Desafio*, observa-se uma tabela em que são apresentadas as fases de construção do tapete de Sierpinski, com suas respectivas áreas, fases e também sua área em forma de potência. Os itens "a" e o "e" são praticamente idênticos e por isso atuam de forma similar do ponto de vista do saber-fazer cognitivo, já que é necessário elaborar uma conjectura sobre o tamanho da área. Já o item "b" introduz uma nova variável; com isso, tem-se nova relação e nova estrutura. Os itens "c" e o "d" exigem do aluno conhecimentos prévios de Conjuntos Numéricos e Relação (FIGURA 48).

Em linhas gerais, a análise dessa atividade não difere muito daquela com o triângulo de Sierpinski, a qual apresenta exemplos de Função (FIGURA 40).

FIGURA 49 - Tema fractal nas seções: a) *Atividades Complementares*; b) *Atividade*; 1º ano do Ensino Médio

(a)



72 Observe a sequência de figuras.

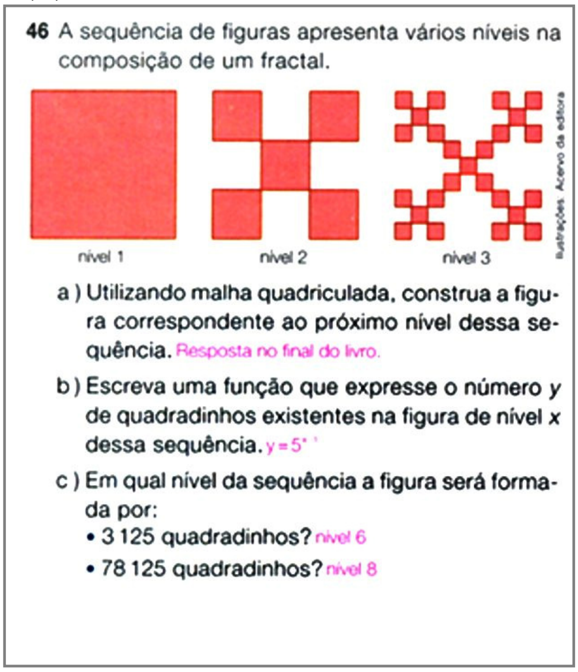
Considerando que a figura do nível 1 é formada por 5 quadradinhos, resolva.

a) Qual das funções associa o nível x à quantidade q de quadrinhos da figura? II

I) $q(x)=5x$ II) $q(x)=5^x$ III) $q(x)=x^5$

b) Quantos quadradinhos tem a figura do nível 6? E do nível 10? 15 625 quadradinhos; 9 765 625 quadradinhos

(b)



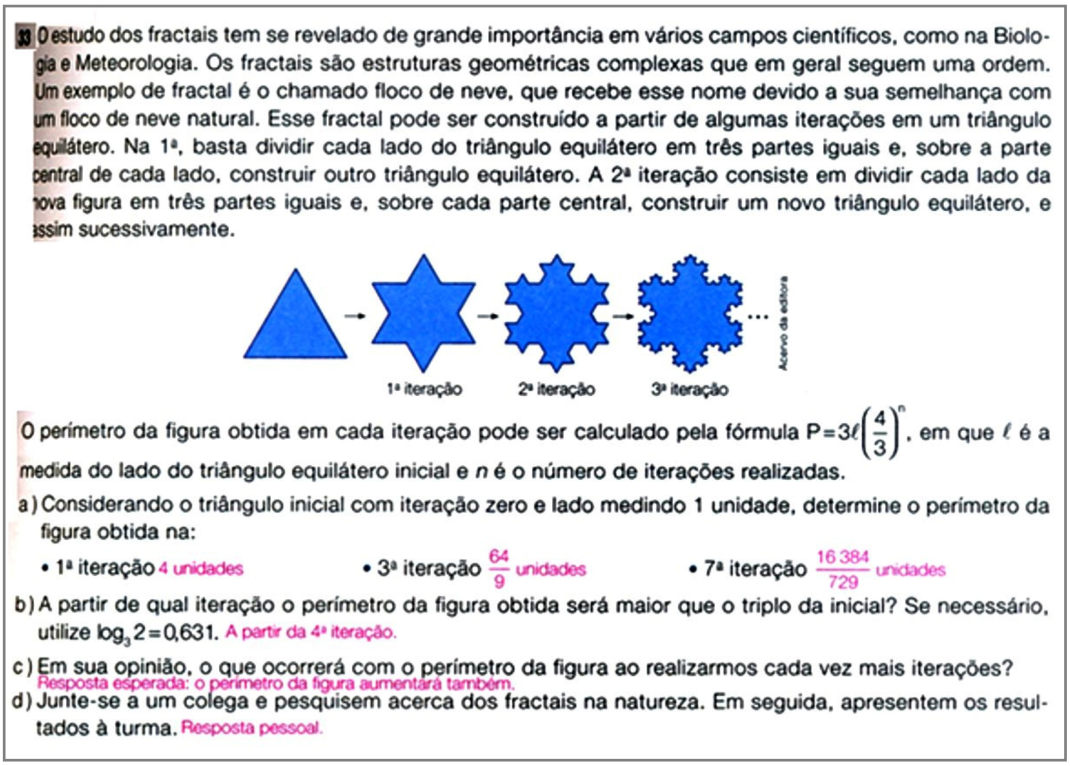
46 A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.

a) Utilizando malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência. Resposta no final do livro.

b) Escreva uma função que expresse o número y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência. $y=5^{x-1}$

c) Em qual nível da sequência a figura será formada por:

- 3 125 quadradinhos? nível 6
- 78 125 quadradinhos? nível 8



33 O estudo dos fractais tem se revelado de grande importância em vários campos científicos, como na Biologia e Meteorologia. Os fractais são estruturas geométricas complexas que em geral seguem uma ordem. Um exemplo de fractal é o chamado floco de neve, que recebe esse nome devido a sua semelhança com um floco de neve natural. Esse fractal pode ser construído a partir de algumas iterações em um triângulo equilátero. Na 1ª, basta dividir cada lado do triângulo equilátero em três partes iguais e, sobre a parte central de cada lado, construir outro triângulo equilátero. A 2ª iteração consiste em dividir cada lado da nova figura em três partes iguais e, sobre cada parte central, construir um novo triângulo equilátero, e assim sucessivamente.

O perímetro da figura obtida em cada iteração pode ser calculado pela fórmula $P=3\ell\left(\frac{4}{3}\right)^n$, em que ℓ é a medida do lado do triângulo equilátero inicial e n é o número de iterações realizadas.

a) Considerando o triângulo inicial com iteração zero e lado medindo 1 unidade, determine o perímetro da figura obtida na:

- 1ª iteração 4 unidades
- 3ª iteração $\frac{64}{9}$ unidades
- 7ª iteração $\frac{16\,384}{729}$ unidades

b) A partir de qual iteração o perímetro da figura obtida será maior que o triplo da inicial? Se necessário, utilize $\log_3 2=0{,}631$. A partir da 4ª iteração.

c) Em sua opinião, o que ocorrerá com o perímetro da figura ao realizarmos cada vez mais iterações? Resposta esperada: o perímetro da figura aumentará também.

d) Junte-se a um colega e pesquisem acerca dos fractais na natureza. Em seguida, apresentem os resultados à turma. Resposta pessoal.

(c)

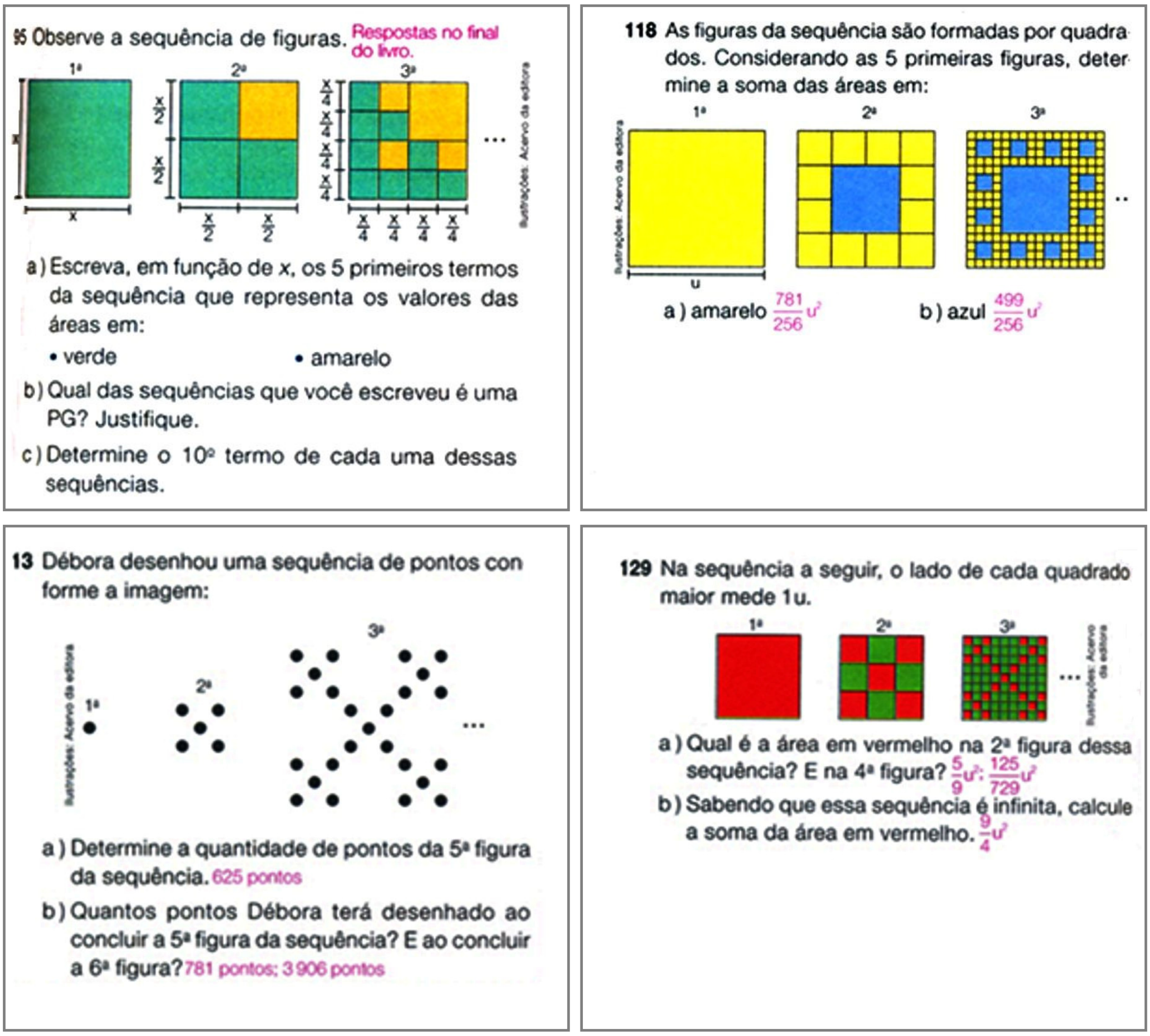
Fonte: Souza (2010, p. 80, 168 e 185).

Comparando as atividades apresentadas na Figura 49, nota-se que o item "a" da Figura 49b exige mais o saber-fazer gestual; já a resolução dos itens "b" e o "c" necessita de maior articulação cognitiva do que a dos itens "a" e o "b" da Figura 49a.

A Figura 49c atividade “c” descreve o processo de formação do floco de Koch e também fornece a fórmula que determina o perímetro dessa curva. Vemos duas variáveis, o número de iterações (n) e a medida do comprimento do lado do triângulo equilátero (l). No item “a” temos a variável (n) iteração assumindo vários valores particulares, afetando o aspecto das relações, enquanto a variável (l) se mantém constante e igual a 1 unidade. No item “b” temos bem marcado o aspecto da estrutura (conjunto de relações), no item “c”, o saber-fazer cognitivo e no item “d”, o saber-redizer, tanto o textual como o transposto.

FIGURA 50 - Tema fractal na seção *Atividades Complementares*, 1º ano do Ensino Médio

(a) **(b)**



(c) **(d)**

Fonte: Souza (2010, p. 24, 248 e 250).

Com base nas orientações de Gérard e Roegiers (1998), pode-se afirmar que a atividade “a” envolve várias relações, possibilitando outras estruturas mais sofisticadas; exige-se, assim, uma cognição maior, resultando no desenvolvimento do saber-fazer cognitivo (FIGURA 50).

A análise da atividade “b” é análoga à análise realizada na atividade da Figura 49b, apresentando, apenas, algumas mudanças nas relações. Já o item a da atividade “d” tem a mesma característica da atividade “c”, apresentando, apenas, mudança de variáveis, estabelecendo novas relações e estruturas.

5 UMA SÍNTESE CONCLUSIVA

Inicialmente, reiteramos que a constituição de um cenário investigativo em torno do conceito fractal e da sua presença pedagógica fez-se necessária, a fim de se organizar uma unidade de conhecimento ou essência compreensiva desenvolvida nos estudos científicos e pedagógicos voltados para a Educação Matemática e, assim, responder à questão proposta: *Como o conceito fractal vem se estabelecendo na Educação Básica?*

Para se caracterizar os resultados deste estudo, foram considerados quatro aspectos relevantes: como o tema fractal se apresenta na Educação Básica; como se encontram os estudos acadêmicos que visam ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática; como o tema vem se estabelecendo nos livros escolares da Educação Básica; e como estima-se o desenvolvimento desse tema doravante.

O conceito fractal já é amplo na matemática acadêmica e é notória a sua formação em três categorias: os fractais aleatórios gerados por processos estocásticos, cuja similaridade não é exata, mas sim estatística; os fractais definidos por lei de recorrência e os fractais gerados por iterações de funções, que são regras fixas e a autossimilaridade é exata. Esta classe é tratada favoravelmente mediante as formalidades da topologia que ocupa a maior parte dos textos científicos do tema. Os conteúdos já presentes nas lições escolares do ensino básico são das duas primeiras categorias; os fractais por funções iteradas aparecem nos estudos acadêmicos e em textos para o Ensino Médio, sendo que neste são abordadas situações mais simples. A dimensão fractal, como característica numérica e distintiva das formas fractais, é formalizada em diferentes definições. É observada na distinção da chamada geometria fractal para a geometria euclidiana, em que as formas fractais com dimensões não-inteiras marcam e acentuam a distinção. A definição de dimensão fractal pela chamada "contagem das caixas" revela-se vantajosa até para estimações intuitivas que podem ser exploradas em atividades do Ensino Fundamental. Seu cálculo logarítmico pela sua fórmula empírica é apropriado ao conhecimento e à prática matemática no Ensino Médio.

Os estudos acadêmicos sobre os fractais mostram que o tema ganhou atenção, vem se aprofundando em diferentes lugares e há diferentes pesquisas na matemática científica dos programas das universidades brasileiras, inclusive com estudos orientados em iniciação científica envolvendo a categoria dos fractais algébricos. Além das orientações constantes nos

Parâmetros Curriculares Nacionais da Educação Básica, encontrou-se, nas Diretrizes do Estado do Paraná, orientações sobre planejamentos de estudo e de ensino da geometria fractal. Também foram encontradas produções estrangeiras relacionadas à inclusão do tema fractais no ensino da Educação Básica. De um modo geral, o tema fractal se apresenta nas pesquisas acadêmicas com muitas ilustrações e fatos históricos, o que torna o estudo do conceito pouco proveitoso. Além disso, ao se buscar a contextualização do tema fractal com um tema do currículo tradicional, a quantidade de atividades aumenta e a complexidade também, dificultando o processo de aprendizagem. Em relação ao conceito dimensão, a orientação é apenas para o Ensino Médio e verifica-se, ainda, que da maneira que é tratado, não tem significado para o sujeito. Vale destacar que o estudo da pesquisadora portuguesa Alves (2007) auxiliou-nos na compreensão e na organização das categorias dos fractais, assim como os livros para fins didáticos editados pelo National Council of Teachers Mathematics, que é o conselho americano permanente para o ensino da Matemática, os quais sugerem atividades práticas para o planejamento de ensino sobre o tema para a Educação Básica.

A descrição do desenvolvimento dado às lições sobre fractais em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e a análise das ocorrências dos objetos de aprendizagem de conceitos, critérios orientados por Gérard e Roegiers (1998), possibilitaram algumas constatações em relação ao objeto desta pesquisa. Vale ressaltar que estão descritas as situações que foram consideradas recorrentes nos respectivos livros didáticos, bem como aquelas que abordaram, implicitamente, outros conceitos.

Nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental há um consenso entre os autores quando corroboram que fractais são formas geométricas; é possível observar que o tema é vinculado, na maioria das situações, às figuras geométricas. Os discursos produzidos direcionam os fractais àquelas figuras expostas graficamente nas páginas do texto, quase sempre inspiradas em ocorrências da natureza. Considera-se uma situação de presença certa na inclusão do tema, a forma do triângulo de Sierpinski, que é um triângulo equilátero decomposto estruturadamente em outros triângulos da mesma classe. Quanto ao aspecto topológico e o da linguagem, nota-se que são pouco explorados nas atividades propostas pelos livros didáticos. Em alguns exemplares, observa-se que há preferência por atividades similares aos temas convencionais da Matemática, sem uma exploração maior do conceito fractal. Em relação à construção de um fractal, há poucas orientações e informações quanto aos procedimentos necessários para a respectiva construção. Algumas atividades oferecem possibilidades de se abordar o conceito de atratores, no entanto, os autores não exploram essas possibilidades. No Ensino Médio, alguns exemplares apresentam textos e infográficos como uma forma de motivação ao estudo do tema fractal, estimulando a percepção da relação desse conteúdo com situações cotidianas e outras áreas do conhecimento. Em relação ao conceito dimensão, vale ratificar que, apesar de sua importância para a aquisição do conceito fractal, ele vem sendo explorado apenas como uma curiosidade, tanto em alguns trabalhos acadêmicos como em cursos oferecidos a docentes. Já nos livros didáticos, especialmente no exemplar do 2º ano do Ensino Médio, de Smole e Diniz (2010b), a dimensão fractal é mencionada, de modo questionável, na seção “Para Saber Mais”. Ainda nessa Seção, no texto “A matemática do delírio” percebe-se que na tabela apresentada para demonstrar duas maneiras de descrever o mundo, a construção do conjunto de Cantor por meio da ilustração é descrita de modo impreciso. Em alguns exemplares, as atividades possibilitam inúmeros questionamentos acerca do conceito da dimensão fracionária, no entanto, os autores não aproveitam, de forma significativa, essas possibilidades. Constata-se, também, que o conceito dimensão não é abordado de forma empírica, com desenhos ou fotos.

Enfim, é oportuno ressaltar que os textos apresentados nos livros didáticos ainda não apresentam uma organização sistemática nos tratamentos dos assuntos dos fractais, como fazem com os temas da Matemática convencional.

Estimamos ainda que doravante, o desenvolvimento do tema fractal nos planejamentos didáticos se dará por via dos eventos e dos estudos acadêmicos nacionais e estrangeiros, onde crescem as publicações sobre o tema.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. A. O. *Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula.* 2006. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/arlete_almeida.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2009.

ALVES, C. M. F. S. J. *Fractais*: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. 2007. 324 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007. Disponível em: <http://www.scribd.com/doc/20939623/Fractais-Conceitos-Basicos-Representacoes-Graficas-e-Aplicacoes-ao-Ensino-nao-Universitario>. Acesso em: 3 abr. 2010.

ANGELIS-REIS, F. M. S.; ROMANHA, W. S. A dimensão fractal como um parâmetro no estudo do granuloma na esquistossomíase experimental. In: REUNIÃO ANUAL DA FEDERAÇÃO DE SOCIEDADES DE BIOLOGIA EXPERIMENTAL, 21.; CONGRESSO BRASILEIRO DE BIOFÍSICA, 31.; CONGRESSO BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÃO CLÍNICA, 21.; CONGRESSO BRASILEIRO DE NEUROCIÊNCIAS E COMPORTAMENTO, 30.; 2006, Águas de Lindóia. *Resumos...* São Paulo: Federação de Sociedade de Biologia Experimental, 2006. p. 13-14. Disponível em <http://www.fesbe.org.br/fesbenovo/fesbe2006/files/FESBE2006.pdf>. Acesso em 23 dez. 2010.

BAIER, T. *O nexo "geometria fractal – produção da ciência contemporânea" tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico*. 2005. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2005/baier_t_dr_rcla.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2009.

BARBOSA, R. M. *Descobrindo a geometria fractal*: para sala de aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 158 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)*: parte I – bases legais. Brasília, 2000a. 109 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 31 dez. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)*: parte III – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000b. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 31 dez. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática. Brasília, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2010.

CAPRA, F. *A teia da vida*: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. Tradução de Newton Roberval Eichemberg. São Paulo: Cultrix, 2006. 256 p.

CARVALHO, A. L. T.; REIS, L. F. *Aplicando a matemática*: 7º ano, ensino fundamental. 2. ed. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2009. 320 p.

CARVALHO, H. C. *Geometria fractal*: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005. Disponível em: <http://www.ufpa.br/ppgecm/media/dissertacao_hamilton_cunha_de_carvalho.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2009.

CARVALHO, M. C. C. S. et al. *Fractais*: uma breve introdução. São Paulo, 1986. 189 p.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática da teoria à prática*. 16. ed. Campinas: Papirus, 1996. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

EBERSON, R. R. *Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano*. 2004. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/ricardo_ronald_eberson.pdf> Acesso em: 24 abr. 2009.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. Unesp, 2009. 13 livros, 593 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 228 p.

GÉRARD, F. M.; ROEGIERS, X. *Conceber e avaliar manuais escolares*. Portugal: Porto, 1998. 344 p.

GILES, T. R. *Dicionário de Filosofia*: termos e filósofos. São Paulo: EPU, 1993. 269 p.

GONÇALVES, A. G. N. *Uma seqüência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais*. 2007. 174 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/andrea_nazuto.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2009.

GRESSLER, M. D. *Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais*. 2008. 150 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <http://tede.pucrs.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1483>. Acesso em 29 mar. 2009.

KILPATRICK, J. Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. In: KILPATRICK, J.; GÓMEZ, P.; RICO, L. (Eds.). *Educación matemática*: Bogotá: Universidad de los Andes, 1998. p. 1-18. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2011.

LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. 299 p.

MACHADO, A. P. Abstração. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2001, São Paulo. *Anais*... São Paulo: PUC-SP, 2001. p. 66-72.

MANDELBROT, B. *Objectos fractais*. Tradução Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1998. 296 p.

MORIN, E. *Os sete saberes para a educação do futuro*. Tradução de Ana Paula de Viveiros. Lisboa: Instituto Piaget, 2002. 130 p.

MOURA, E.; MACHADO, A. P. O tema fractal nos parâmetros curriculares. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2010, Campo Grande. *Anais*... Campo Grande: UFMS, 2010. 1 CD-ROM.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica*. Curitiba, 2008. Disponível em: <HTTP://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf>. Acesso em: 10 out. 2010.

PEDRO DA PONTE, J. *Estudos de caso em educação matemática*. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2006. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20%28Estudo%20caso%29.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2010.

PEITGEN, H. O. et al. *Fractals for the classroom*: Strategic activities. New York: Springer Verlag, 1991. v. 1, 128 p.

PEITGEN, H. O. et al. *Fractals for the classroom*: Strategic activities. New York: Springer Verlag, 1992. v. 2, 187 p.

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Logomarca*. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/default.asp>. Acesso em: 12 abr. 2011.

REIS, L. F.; TROVON, A. L. C. *Ensino Fundamental*, 6º ano. 2. ed. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2009a. 320 p. (Coleção Aplicando a Matemática).

______. *Ensino Fundamental*: 7º ano. 2. ed. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2009b. 320 p. (Coleção Aplicando a Matemática).

______. *Ensino Fundamental*: 8º ano. 2. ed. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2009c. 288 p. (Coleção Aplicando a Matemática).

RIBEIRO, J. S. *Matemática*: ciência, linguagem e tecnologia, Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010a. v. 1, 384 p.

______. *Matemática*: ciência, linguagem e tecnologia, Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010b. v. 2, 328 p.

______. *Matemática*: ciência, linguagem e tecnologia, Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010c. v. 3, 376 p.

RIBEIRO, J. S. *Projeto Radix*: matemática, 6º ano. São Paulo: Scipione, 2010d. 320 p.

______. *Projeto Radix*: matemática, 8º ano. São Paulo: Scipione, 2010e. 336 p.

ROMANHA, W. S. *Fractais na natureza*. 30 jun. 2009. Disponível em: <http://microsintonias.blogspot.com/2009/06/fractais-na-natureza.html>. Acesso em: 12 jan. 2011.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 57, p. 1-8, 2005. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2011.

SANTOS, T. S. A inclusão das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica. 2009. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009. Disponível em: <http://cienciaematematica.vivawebinternet.com.br/media/dissertacoes/60991d1eb0f8417.pdf > Acesso em: 17 nov. 2010.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática*: Ensino Médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010a. v. 1, 320 p.

______. *Matemática*: Ensino Médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010b. v. 2, 448 p.

SOBREIRA, F. J. A. *A lógica da diversidade*: complexidade e dinâmica em assentamentos espontâneos. 2003. 262 f. Tese (Doutorado em Desenvolvimento Urbano) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003. Disponível em: <http://fabianosobreira.files.wordpress.com/2009/07/fabiano-sobreira-tese-de-doutorado.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2010.

SOUZA, J. R. *Matemática*. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar, v. 1). 336 p.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. *Vontade de saber matemática*: 6º ano. São Paulo: FTD, 2009a. 304 p.

______. *Vontade de saber matemática*: 9º ano. São Paulo: FTD, 2009b. 256 p.

STEWART, I. *Será que Deus joga dados?*: a nova matemática do caos. Tradução de Maria Luiza X. A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991. 336 p.

TÔRRES, J. J. M. *Teoria da complexidade*: uma nova visão de mundo para a estratégia. Curitiba, 2005. p. 1-10. Disponível em: <http://www.juliotorres.ws/textos/teoriadacomplexidade/TeoriaDaComplexidade-e-Estrategia.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2010.

YIN, R. K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. Tradução de Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010. 248 p.