

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

MÁRCIA RODRIGUES CAPPELLE SANTANA

**Sobre Grafos com r Tamanhos
Diferentes de Conjuntos Independentes
Maximais e Algumas Extensões**

Goiânia
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE TESE EM
FORMATO ELETRÔNICO**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, **AUTORIZO** o Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás – UFG a reproduzir, inclusive em outro formato ou mídia e através de armazenamento permanente ou temporário, bem como a publicar na rede mundial de computadores (*Internet*) e na biblioteca virtual da UFG, entendendo-se os termos “reproduzir” e “publicar” conforme definições dos incisos VI e I, respectivamente, do artigo 5º da Lei nº 9610/98 de 10/02/1998, a obra abaixo especificada, sem que me seja devido pagamento a título de direitos autorais, desde que a reprodução e/ou publicação tenham a finalidade exclusiva de uso por quem a consulta, e a título de divulgação da produção acadêmica gerada pela Universidade, a partir desta data.

Título: Sobre Grafos com r Tamanhos Diferentes de Conjuntos Independentes Maximais e Algumas Extensões

Autor(a): Márcia Rodrigues Cappelle Santana

Goiânia, 01 de Outubro de 2014.

Márcia Rodrigues Cappelle Santana – Autor

Dr. Rommel Melgaço Barbosa – Orientador

MÁRCIA RODRIGUES CAPPELLE SANTANA

Sobre Grafos com r Tamanhos Diferentes de Conjuntos Independentes Maximais e Algumas Extensões

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Área de concentração: Ciência da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa

Goiânia
2014

MÁRCIA RODRIGUES CAPPELLE SANTANA

Sobre Grafos com r Tamanhos Diferentes de Conjuntos Independentes Maximais e Algumas Extensões

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação, aprovada em 01 de Outubro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa
Instituto de Informática – UFG
Presidente da Banca

Profa. Dra. Nair Maria Maia de Abreu
COPPE – UFRJ

Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
IME – UNICAMP

Prof. Dr. Humberto José Longo
Instituto de Informática – UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Márcia Rodrigues Cappelle Santana

Possui mestrado em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Goiás (2007), onde é professora efetiva. Tem experiência na área de Ciência da Computação, com ênfase em Algoritmos e Complexidade Computacional. Foi bolsista da FAPEG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás - durante parte do doutorado. Atualmente, desenvolve pesquisas sobre Teoria dos grafos, especificamente sobre conjuntos independentes maximais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais esta oportunidade que colocou em meu caminho e sobretudo por ter me dado muita fé, coragem e disposição para enfrentar mais este desafio.

Agradeço a minha família, meu esposo Ronaldo e meus filhos Murillo, Marcela e Matheus, que estiveram ao meu lado durante estes quatro anos em que muito me dediquei aos estudos, sacrificando alguns momentos em família. Também devo agradecimentos a minha mãe, Telma, que sempre me apoiou incondicionalmente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço a todos os meus amigos e familiares, principalmente às amigas Eli-sângela e Erika, a minha irmã Marta e a minha prima Flávia. Elas sempre me ajudaram quando foi preciso e transformaram muitos momentos difíceis em situações muito mais leves e descontraídas.

Agradeço aos colegas Walid Jradi e Marcelo Quinta que disponibilizaram programas de computador que facilitaram o trabalho, antes manual, de contagem de conjuntos independentes maximais nos grafos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa, que mais uma vez confiou em mim e me indicou caminhos com muitas oportunidades.

Agradeço aos pesquisadores e amigos Prof. Dr. Dieter Rautenbach e Profa. Dra. Lúcia Draque Penso, que me receberam muito hospitaleiramente em Ulm, na Alemanha, e que muito contribuíram com a minha pesquisa.

Agradeço à banca examinadora, Profa. Dra. Nair Maria Maia de Abreu, Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos e especialmente Prof. Dr. Humberto José Longo, que me deram consideráveis sugestões e contribuições para o texto final.

Por fim, agradeço a UFG - Universidade Federal de Goiás e a FAPEG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás pelo financiamento parcial da pesquisa.

A verdadeira viagem de descobrimento não consiste em procurar novas paisagens, mas em ter novos olhos.

Marcel Proust,
Em busca do tempo perdido.

Resumo

Santana, Márcia Rodrigues Cappelle. **Sobre Grafos com r Tamanhos Diferentes de Conjuntos Independentes Maximais e Algumas Extensões**. Goiânia, 2014. 86p. Tese de Doutorado. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Nesta tese, apresentamos alguns resultados relacionados, principalmente, aos tamanhos de conjuntos independentes maximais em alguns grafos. Mostramos que para inteiros r e D , com $r \geq 2$ e $D \geq 3$, há um número finito de grafos conexos de grau mínimo pelo menos 2, grau máximo até D e cintura pelo menos 7 que têm tamanhos de conjuntos independentes maximais de até r tamanhos diferentes. Além disso, provamos outros resultados que restringem os graus de tais grafos e que generalizam resultados já conhecidos sobre grafos bem-cobertos. Foram estudados a estrutura e o reconhecimento dos grafos bem-cobertos G de ordem $n(G)$ sem vértice isolado que têm número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$, para algum inteiro não negativo k . Para $k = 1$, apresentamos uma descrição estrutural completa destes grafos e para um k geral, porém fixo, descrevemos um algoritmo de complexidade polinomial de tempo para o reconhecimento de tais grafos. Consideramos grafos G sem vértice isolado cuja diferença entre o maior e o menor conjuntos independentes maximais é no máximo k , para algum inteiro k não negativo. Obtivemos um limite superior sobre o número de independência destes grafos. Apresentamos um algoritmo de complexidade polinomial de tempo para reconhecimento de alguns produtos complementares, o qual inclui todos os prismas complementares. Apresentamos também alguns resultados sobre prismas complementares bem-cobertos. Mostramos que se G não é um grafo bem-coberto e seu prisma complementar é bem-coberto, então G tem somente dois tamanhos de conjuntos independentes maximais que são consecutivos. Apresentamos um limite superior para a quantidade de tamanhos de conjuntos independentes maximais em prismas complementares e também outros resultados relacionados à bem-cobertura. Apresentamos um limite inferior para a quantidade de conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes em produtos Cartesianos de caminhos e ciclos.

Palavras-chave

Teoria dos Grafos, Conjuntos independentes, Grafos bem-cobertos, Produtos complementares.

Abstract

Santana, Márcia Rodrigues Cappelle. **On Graphs Having r Different Sizes of Maximal Independent Sets and Some Extensions**. Goiânia, 2014. 86p. PhD. Thesis. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

In this thesis, we present some results concerning about the sizes of maximal independent sets in graphs. We prove that for integers r and D with $r \geq 2$ and $D \geq 3$, there are only finitely many connected graphs of minimum degree at least 2, maximum degree at most D , and girth at least 7 that have maximal independent sets of at most r different sizes. Furthermore, we prove several results restricting the degrees of such graphs. These contributions generalize known results on well-covered graphs. We study the structure and recognition of the well-covered graphs G with order $n(G)$ without an isolated vertex that have independence number $\frac{n(G)-k}{2}$ for some non-negative integer k . For $k = 1$, we give a complete structural description of these graphs, and for a general but fixed k , we describe a polynomial time recognition algorithm. We consider graphs G without an isolated vertex for which the independence number $\alpha(G)$ and the independent domination number $i(G)$ satisfy $\alpha(G) - i(G) \leq k$ for some non-negative integer k . We obtain an upper bound on the independence number in these graphs. We present a polynomial algorithm to recognize some complementary products, which includes all complementary prisms. Also, we present results on well-covered complementary prisms. We show that if G is not well-covered and its complementary prism is well-covered, then G has only two consecutive sizes of maximal independent sets. We present an upper bound for the quantity of sizes of maximal independent sets in complementary prisms and other well-covered concerning results. We present a lower bound for the quantity of different sizes of maximal independent sets in Cartesian products of paths and cycles.

Keywords

Graph theory, Independent sets, Well-covered graphs, Complementary products.

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Notações	12
1 INTRODUÇÃO	13
2 CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES	16
2.1 Introdução	16
2.2 Definições básicas	16
2.3 Trabalhos relacionados	18
3 GRAFOS COM ATÉ r TAMANHOS DE CONJUNTOS INDEPENDENTES MÁXIMOS COM RESTRIÇÃO DE CINTURA E DE GRAU MÍNIMO	24
3.1 Introdução	24
3.2 Resultados em $\mathcal{M}_{\leq r}$	25
3.3 Resultados em I_r	32
3.4 Mais algumas considerações	36
4 GRAFOS BEM-COBERTOS COM UM NÚMERO DE INDEPENDÊNCIA GRANDE	37
4.1 Introdução	37
4.2 Extensão dos resultados de Berge e Favaron sobre grafos bem-cobertos	39
4.3 Grafos G com $\alpha(G) - i(G) \leq k$	46
4.4 Mais algumas considerações	47
5 PRODUTOS COMPLEMENTARES	49
5.1 Introdução	49
5.2 O reconhecimento de alguns produtos complementares	50
5.2.1 Escolha da primeira linha	53
5.2.2 Identificação dos vizinhos da primeira linha	53
5.2.3 Identificação dos vértices com muitos vizinhos em partes conhecidas de uma coluna	55
5.2.4 Escolha do preenchimento completo de algumas colunas	57
5.2.5 Identificação de todos os vértices restantes	57
5.2.6 Exemplificação do algoritmo de reconhecimento	59
5.3 Prismas complementares bem-cobertos	63
5.4 Conjuntos independentes máximos em alguns produtos Cartesianos	71
5.5 Mais algumas considerações	78

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

80

Referências Bibliográficas

83

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de conjuntos independentes maximais. O grafo $G_1 \in \mathcal{M}_1$, ou seja, é bem coberto; $G_2 \in \mathcal{M}_3$, mas $G_2 \notin I_3$; $G_3 \in I_3$ e, portanto, $G_3 \in \mathcal{M}_3$.	20
2.2	Grafo $C_3 \square P_4$.	21
2.3	Grafos G , H e o produto complementar $G(R) \square H(S)$, com $R = \{1, 4\}$ e $S = \{a, c\}$.	22
2.4	Prismas complementares dos grafos K_4 (a) e C_4 (b).	23
3.1	O caminho P e a formação dos conjuntos I_0 e I_1 .	26
3.2	A seção de P entre $x(i_j - 3)$ e $x(i_{j+1} + 3)$.	27
3.3	A seção de P entre $x(q)$ e $x(q + 12)$.	28
3.4	Grafos em I_2 com $\delta = 2$.	33
3.5	Grafos em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$ e $\Delta = 4$.	34
3.6	Grafos G em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$, $\Delta = 3$ e $\text{ccim}(G) = \{4, 5\}$.	34
3.7	Grafos em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$ e $\Delta = 3$ e $\text{ccim}(G) = \{5, 6\}$.	35
3.8	Grafos G em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$ e $\Delta = 3$ e $\text{ccim}(G) = \{6, 7\}$.	35
3.9	Grafo G_{20} em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$, $\Delta = 3$ e $\text{ccim}(G) = \{8, 9\}$.	36
4.1	Um grafo bem-coberto G com $\alpha(G) = \frac{n(G)-3}{2}$ com um emparelhamento M que satisfaz a propriedade (P_3) .	40
4.2	Caminho M -alternante para ilustração da condição (e) do Teorema 4.6	41
4.3	Um grafo bem-coberto G com $\alpha(G) = \frac{n(G)-1}{2}$ com um emparelhamento M que satisfaz a propriedade (P_1) .	43
4.4	Exemplo para a prova do Teorema 4.7	45
5.1	Forma geral do grafo $G(V(G)) \square H(S)$.	51
5.2	Conhecimento atual sobre $G(V(G)) \square H(S)$.	54
5.3	Todos os elementos de $N_1 \cup \dots \cup N_h$ foram identificados. A questão preenche a mesma área da Figura 5.2.	55
5.4	Os vértice nas primeiras s colunas não foram identificados e todos os vértices nas últimas $h - s$ colunas foram identificados.	58
5.5	Todos os vértices nas últimas $h - s$ colunas e nas primeiras r_1 linhas foram identificados.	58
5.6	Os grafos F e H com $S = \{a, b, c\}$.	60
5.7	Foram identificados os vértices da primeira linha e seus respectivos vizinhos.	60
5.8	Os vizinhos dos vértices da primeira linha foram identificados.	61
5.9	Mais alguns vértices foram identificados.	61
5.10	O conhecimento sobre G foi descartado e \overline{G} foi totalmente identificado.	62
5.11	O grafo G que foi totalmente identificado.	62

5.12	Todos os vértices nas últimas 2 colunas e nas primeiras 2 linhas foram identificados.	62
5.13	Grafo bem-coberto G onde os vértices circulados formam um conjunto independente quase-maximal I .	64
5.14	Grafos bem-cobertos G tais que \overline{G} não é bem-coberto e $G\overline{G}$ é bem-coberto.	67
5.15	Grafo bem-coberto G tal que \overline{G} é bem-coberto, mas $G\overline{G}$ não é bem-coberto. É um exemplo de que a recíproca da Proposição 5.17 não é verdadeira.	70
5.16	O grafo H_5 .	74
5.17	$G = P_5 \square C_8$. O conjunto independente I é formado pelos vértices circulados e $G \setminus N_G[I]$ tem dois componentes isomorfos ao grafo H_5 .	77

Lista de Notações

$E(G)$	conjunto de arestas do grafo G
$V(G)$	conjunto de vértices do grafo G
$A \setminus B$	elementos do conjunto A menos elementos do conjunto B
$ S $	cardinalidade do conjunto S
C_n	ciclo com n vértices
$d_G(v) = d(v)$	número $ E(v) $ de arestas em incidentes ao vértice v
$G[U]$	grafo induzido de G sob conjunto de vértices U
K_n	grafo completo com n vértices
$K_{m,n}$	grafo bipartido completo com partições de m e n vértices
$N_G(a)$	conjunto dos vértices adjacentes ao vértice a no grafo G
$N_G[a]$	$N(a) \cup \{a\}$
$N_G[A]$	$\bigcup_{a \in A} N[a]$
$N_G(A)$	$N[A] \setminus A$
P_n	caminho com n vértices
$\alpha(G)$	número de independência do grafo G
$\delta(G)$	grau mínimo do grafo G
$\Delta(G)$	grau máximo do grafo G
\mathcal{M}_r	conjunto dos grafos que contêm exatamente r tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais
I_r	conjunto dos grafos que contêm exatamente r tamanhos diferentes e consecutivos de conjuntos independentes maximais
$\mathcal{M}_{\leq r}$	conjunto dos grafos que contêm até r tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais
$\gamma(G)$	número de dominação do grafo G
\overline{G}	prisma complementar do grafo G
$i(G)$	cardinalidade do menor conjunto independente maximal de G
$ccim(G)$	conjunto das cardinalidades dos conjuntos independentes maximais do grafo G
$\mathcal{G}(k)$	conjunto dos grafos G sem um vértice isolado e com $\alpha(G) - i(G) = k$
$G \square H$	produto Cartesiano de G e H

INTRODUÇÃO

Independência é um dos conceitos fundamentais em Teoria dos Grafos e é o assunto central abordado nesta tese. Dado um grafo G , um problema clássico é encontrar um conjunto independente máximo neste grafo. A cardinalidade deste conjunto é denotada por $\alpha(G)$, que é o número de independência de G .

Plummer [44] define um grafo como *bem-coberto* se todos os seus conjuntos independentes maximais têm o mesmo tamanho. Como uma generalização deste conceito, Finbow, Hartnell e Whitehead [25] definem, para todo $r \in \mathbb{N}$, o conjunto \mathcal{M}_r como o dos grafos que têm conjuntos independentes maximais de exatamente r tamanhos diferentes. Com esta notação, \mathcal{M}_1 contém exatamente todos os grafos bem-cobertos.

O problema de determinação do número de independência de um grafo pertence à classe dos problemas NP-completos [38]. Para grafos bem-cobertos este problema torna-se mais simples, pois é suficiente encontrar qualquer conjunto independente maximal, visto que todos têm a mesma cardinalidade nestes grafos. Porém, o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos pertence à classe de problemas co-NP-completos [17,50], até mesmo quando consideramos grafos livres de $K_{1,4}$ [16]. Caracterizações estruturais e algoritmos de reconhecimento de complexidade polinomial de tempo podem ser esperados somente quando consideramos restrições adicionais. Caro [13] prova que o problema de reconhecimento de grafos em \mathcal{M}_r está na classe co-NP-completo, mesmo para os grafos livres de $K_{1,4}$.

A estrutura dos grafos bem-cobertos ou mais genericamente dos grafos em \mathcal{M}_r está longe de ser completamente entendida [31, 45]. Muitos resultados sobre \mathcal{M}_r estão relacionados a grafos sem ciclos pequenos. Finbow, Hartnell e Nowakowski [23] provam que C_7 é o único grafo bem-coberto de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 6. De forma similar, Finbow, Hartnell e Whitehead [25] provam que C_8, C_9, C_{10}, C_{11} e C_{13} são os únicos grafos em \mathcal{M}_2 de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 8 e, para $r \geq 4$, Hartnell e Rall [32] provam que todo grafo em \mathcal{M}_r de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos $6r - 6$ é um ciclo. Para $r \in \{2, 3\}$, o conjunto \mathcal{M}_r contém grafos de grau mínimo pelo menos 2 e cintura $6r - 5$ que não são ciclos [32].

Uma motivação para este problema é provar nossa conjectura de que os grafos em

\mathcal{M}_2 com cintura 7 e grau mínimo pelo menos 2 têm grau máximo até 4 e ainda apresentar uma caracterização para estes grafos. Mostramos [6] que para todo $r \geq 2$ há um número finito de grafos com grau máximo limitado. Além disso, provamos outros resultados que restringem os graus de tais grafos. Mostramos que, para estes grafos, para todo vértice, o número de vizinhos de grau mínimo é limitado e que vértices de grau elevado não podem ter muitos vértices de grau consideravelmente menor com distância 3. Para grafos com cintura pelo menos 6 que não contêm ciclos de tamanho 7, mostramos que o número de diferentes graus dos vértices também é limitado.

Como uma generalização das caracterizações de Ravindra [48] de grafos bem-cobertos bipartidos, Favaron [20] apresenta uma caracterização dos chamados grafos muito bem-cobertos, os quais são grafos bem-cobertos G de ordem $n(G)$ par e número de independência $\alpha(G)$ igual a $\frac{n(G)}{2}$. Como todo componente conexo de um grafo muito bem-coberto G é também muito bem-coberto, são considerados grafos sem vértices isolados. Berge [8] mostra que o valor máximo possível para $\alpha(G)$ de um grafo bem-coberto G de ordem $n(G)$ sem um vértice isolado é $\frac{n(G)}{2}$; ou seja, os grafos muito bem-cobertos têm o número de independência máximo dentre os grafos bem-cobertos sem vértice isolado.

Estendemos os resultados de Berge e Favaron de duas maneiras diferentes. Foram estudados a estrutura e o reconhecimento dos grafos bem-cobertos G sem vértice isolado que têm número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$, para algum inteiro não-negativo k ; ou seja, foram considerados grafos bem-cobertos cujo número de independência está perto do limite superior do resultado de Berge. Para $k = 1$, apresentamos uma descrição estrutural completa destes grafos e para um k geral, porém fixo, descrevemos um algoritmo de reconhecimento de complexidade de tempo polinomial. As condições de bem-cobertura foram relaxadas e considerados grafos G sem vértice isolado para os quais o número de independência $\alpha(G)$ e o número de dominação independente $i(G)$ satisfazem $\alpha(G) - i(G) \leq k$, para algum inteiro k não negativo. Como $\alpha(G)$ e $i(G)$ são a máxima e a mínima ordem de um conjunto independente maximal de G , respectivamente, um grafo G é bem-coberto exatamente se $\alpha(G) - i(G) = 0$. Provamos uma versão do resultado de Berge para estes grafos. Obtivemos, ainda, um limite superior sobre o número de independência como corolário e discutimos sua relação com a caracterização de Favaron.

Haynes et al. [33] introduzem os prismas complementares como um caso especial de um produto mais geral, o produto complementar. Este último generaliza também o produto Cartesiano. O prisma complementar de G denotado por $G\bar{G}$ é o grafo formado a partir da união disjunta de G e \bar{G} , adicionando as arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de G e \bar{G} . Os prismas complementares têm sido estudados mais recentemente, principalmente com relação ao parâmetro dominação [27, 34–36, 40]. Duarte et al. [19] apresentam resultados algorítmicos e de complexidade para os prismas complementares em relação a cliques, conjuntos independentes,

dominação e convexidade.

Mostramos [11] que alguns produtos complementares podem ser reconhecidos por algoritmos de complexidade polinomial de tempo. Este reconhecimento inclui todos os prismas complementares. Apresentamos também alguns resultados sobre prismas complementares bem-cobertos [3]. Mostramos que se G não é um grafo bem-coberto e $G\bar{G}$ é bem-coberto, então G tem somente dois tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais que são consecutivos. Apresentamos um limite superior para a quantidade de tamanhos de conjuntos independentes maximais em prismas complementares e também outros resultados relacionados à bem-cobertura.

O produto Cartesiano de um grafo ciclo com um grafo caminho é chamado de grade cilíndrica. Apresentamos [2] um limite inferior para a quantidade de conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes nestes grafos.

A partir de estudos e aplicações de resultados já conhecidos para algumas classes de grafos, foram apresentados novos resultados teóricos, o que contribui para a pesquisa na área da teoria dos grafos, sobretudo em relação aos problemas sobre conjuntos independentes maximais de vértices e seus tamanhos.

O texto está organizado em mais cinco capítulos. O próximo capítulo, Capítulo 2, contém a notação e as definições básicas utilizadas no texto, bem como alguns resultados disponíveis na literatura que estão relacionados ao tema desta tese. Os resultados são apresentados nos Capítulos 3, 4 e 5. Estes capítulos começam com uma pequena introdução sobre o assunto e terminam com uma seção onde são colocadas mais algumas considerações sobre o tema, inclusive alguns problemas em aberto e conjecturas propostas. No Capítulo 3, são apresentados os resultados sobre os grafos nas classes \mathcal{M}_r e I_r com as restrições adicionais de cintura e de grau mínimo pelo menos 2. No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos pela extensão dos resultados de Berge e Favaron para grafos bem-cobertos. O Capítulo 5 aborda resultados sobre produtos complementares que estão divididos em três seções. Na primeira, é apresentado um algoritmo de complexidade de tempo polinomial para o reconhecimento de alguns produtos complementares, o que inclui todos os prismas complementares. Na sequência, são mostrados alguns resultados sobre prismas complementares bem-cobertos e, por último, é apresentado um limite inferior para a quantidade de tamanhos de conjuntos independentes maximais em grades cilíndricas. Finalmente, no Capítulo 6, são discutidos os principais resultados obtidos nesta tese e destacados alguns trabalhos futuros.

CONCEITOS E RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 Introdução

Este capítulo fornece embasamento para o entendimento desta tese. Ele está dividido em mais duas seções. Na seção 2.2 apresentamos definições e notação básicas de teoria dos grafos. Em geral, a notação segue a adotada por Bondy e Murty [9]. Outras definições não colocadas aqui são apresentadas no texto, em momento oportuno. Na Seção 2.3 são relatados os principais resultados relacionados ao tema desta tese.

2.2 Definições básicas

Um grafo G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto de *vértices* e $E(G)$ é um conjunto que consiste de pares não ordenados $\{u, v\}$ de vértices (não necessariamente distintos) de $V(G)$. Cada par como este é chamado de *aresta*. Escrevemos uv correspondendo a uma aresta $e = \{u, v\}$. Se $uv \in E(G)$, então dizemos que u e v são *adjacentes* ou que u é *vizinho* de v e, ainda, que u e v são as *pontas* de e . Duas arestas são adjacentes se elas possuem um vértice em comum. A *ordem* de um grafo G é dada pelo seu número de vértices e é denotada por $n(G)$. O *tamanho* de um grafo G corresponde ao seu número de arestas. Uma aresta com ambas as pontas incidentes a um mesmo vértice é chamada de *laço*. Duas ou mais arestas com o mesmo par de pontas são chamadas de *arestas paralelas*. Um grafo é *simplex* se não possui nem laços nem arestas paralelas.

Um grafo é *finito* se seus conjuntos de vértices e de arestas são ambos finitos. Consideramos aqui grafos simples e finitos.

O *grau* $d_G(v) = d(v)$ de um vértice v é o número $|E(v)|$ de arestas em v , isto é, ele é igual ao número de vizinhos de v . Um vértice de grau zero é dito *isolado*. Um vértice de grau um é chamado *folha*. O conjunto de vizinhos de um vértice u de G é denotado por $N_G(u)$, ou simplesmente $N(u)$. Denotamos, ainda, $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$

e para algum conjunto U de vértices de G , denotamos $N_G[U] = \bigcup_{u \in U} N_G[u]$. O número $\delta(G) := \min\{d_G(v) : v \in V\}$ é o grau mínimo de G e o número $\Delta(G) := \max\{d_G(v) : v \in V\}$ é o seu grau máximo. Se todos os vértices de G têm o mesmo grau k , então G é k -regular, ou simplesmente *regular*. Um grafo 3-regular é chamado *cúbico*.

Um *grafo completo* K_n é um grafo com n vértices no qual há uma aresta entre cada par de vértices. Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se $V'(G') \subseteq V(G)$ e G' contém todas as arestas $xy \in E$ com $x, y \in V'$, então G' é um *subgrafo induzido* de G . Dizemos que V' *induz* ou *gera* G' em G e denotamos por $G[V']$. Portanto, se $U \subseteq V$ é qualquer conjunto de vértices de G , então $G[U]$ denota o grafo sobre U cujas arestas são precisamente as arestas de G com extremos em U . Uma *clique* de um grafo G é um subgrafo induzido que é um grafo completo maximal em G .

Sejam $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ dois grafos. Nós chamamos G e G' *isomorfos* e escrevemos $G \cong G'$, se há uma bijeção $\phi : V \rightarrow V'$ com $xy \in E \iff \phi(x)\phi(y) \in E'$ para todo $x, y \in V$. Este mapeamento é chamado *isomorfismo*.

Se U é qualquer conjunto de vértices (usualmente de G), nós escrevemos $G \setminus U$ para $G[V \setminus U]$. Em outras palavras, $G \setminus U$ é obtido de G pela remoção de todos os vértices em $U \cap V$ e suas arestas incidentes. Ao invés de $G \setminus V(G')$ nós simplesmente escreveremos $G \setminus G'$. O *complemento* de G , denotado por \bar{G} é o grafo sobre V com conjunto de arestas $(V \times V) \setminus E$.

Um *caminho* é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência linear de tal forma que dois vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência e não adjacentes em caso contrário. De forma semelhante, um *ciclo* sobre três ou mais vértices é um grafo simples cujos vértices podem ser arranjados em uma sequência cíclica de tal forma que dois vértices são adjacentes se eles são consecutivos na sequência e não adjacentes em caso contrário. O número de vértices de um caminho ou ciclo é o seu *tamanho*. O caminho de tamanho k é chamado de um k -caminho e denotado por P_k . O ciclo de tamanho k é chamado de um k -ciclo e denotado por C_k . A *distância* $\text{dist}_G(x, y)$ em G de dois vértices x, y é o tamanho do menor caminho entre x e y em G ; se tal caminho não existe, fazemos $\text{dist}_G(x, y) := \infty$.

Um grafo é *conexo* se, para cada partição de seus vértices em dois conjuntos não vazios X e Y , há uma aresta com uma ponta em X e uma ponta em Y ; caso contrário o grafo é *desconexo*.

Um grafo G é chamado k -partido se $V(G)$ admite uma partição em k conjuntos independentes disjuntos, $V(G) = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$, para algum inteiro $k \leq |V|$. Cada partição como tal é chamada de *parte*. Ao invés de *2-partido* nós costumamos dizer *bipartido*. Um grafo k -partido no qual $N(v) = V \setminus P_i$ para cada vértice $v \in P_i$, $1 \leq i \leq k$ é chamado de k -partido completo. Um grafo *bipartido completo* com partições de tamanho m e n será aqui denotado por $K_{m,n}$. Um grafo *livre de* $K_{1,3}$ é um grafo que não contém

um subgrafo induzido isomorfo a $K_{1,3}$. Um grafo é dito ser K_n -partido completo se ele é k -partido completo com cada parte contendo n vértices.

Um vértice v é um vértice *simplicial* se o grafo induzido por $N[v]$ for uma clique. Uma clique de um grafo G contendo pelo menos um vértice simplicial é denominado um *simplex* do grafo. Um grafo G é um *grafo simplicial* se todo vértice de G for um vértice simplicial ou for adjacente a um vértice simplicial.

Um *emparelhamento* em um grafo conexo é um conjunto de arestas tal que quaisquer duas arestas não compartilham um vértice. Seja M um emparelhamento em um grafo G . O emparelhamento M é dito *perfeito* se cobre todos os vértices de G . Um caminho em G é M -alternante se é um caminho cujas arestas estão, alternadamente, em M e em $E(G) \setminus M$.

Um conjunto I de vértices de um grafo G é *independente* se quaisquer dois vértices em I não são adjacentes. Um conjunto independente I de G é *maximal* se todo vértice u em $V(G) \setminus I$ tem um vizinho em I . Um conjunto independente I de G é *máximo* se G não tem conjunto independente J com $|J| > |I|$.

Um conjunto D de vértices de um grafo G é *dominante* se $N[D] = V(G)$. O *número de dominação* de G é a cardinalidade de um menor conjunto dominante de G e é denotado por $\gamma(G)$. O *número de dominação independente* de G é a cardinalidade de um menor conjunto dominante de G que é independente e é denotado por $i(G)$. Note que um menor conjunto dominante de G que é independente é também um conjunto independente maximal de G de mínima cardinalidade.

O tamanho do menor ciclo em um grafo G é chamado *cintura* de G . Um grafo sem ciclo tem cintura infinita. Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Um grafo *centopeia* é uma árvore cuja remoção de todos os vértices folha resulta em um grafo caminho.

2.3 Trabalhos relacionados

Independência é um dos conceitos fundamentais em Teoria dos Grafos. Dado um grafo G , um problema clássico é encontrar um conjunto independente máximo neste grafo. Assim, é possível obter a sua cardinalidade, o que chamamos de número de independência de G , denotado por $\alpha(G)$. Em 1972, Karp [38] prova que o problema de determinação do número de independência de um grafo qualquer está na classe de problemas NP-completos. Um grafo é *bem-coberto* se todos os seus conjuntos independentes maximais têm o mesmo tamanho e, portanto, todos são máximos. Os grafos bem-cobertos foram introduzidos por Plummer [44] em 1970. O problema de determinação do número de independência em grafos bem-cobertos torna-se mais simples, pois é suficiente encontrar qualquer conjunto independente maximal. Porém, o reconhecimento destes grafos

está em co-NP-completo [17, 50], mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ [16]. Caracterizações estruturais e algoritmos de reconhecimento de complexidade de tempo polinomial podem ser esperados somente quando consideramos restrições adicionais.

Algumas caracterizações de grafos bem-cobertos levam a algoritmos de reconhecimento de complexidade de tempo polinomial, como por exemplo, a caracterização dos seguintes grafos: de cintura pelo menos 5 [23], grafos que não contém ciclo de tamanho 4 ou 5 [24], grafos que não contém ciclo de tamanho 3, 5 ou 7 [47], grafos simpliciais, cordais e arco-circulares [46] e os grafos blocos e unicíclicos [53].

Os grafos bem-cobertos com grau máximo limitado podem ser reconhecidos por algoritmos de complexidade de tempo polinomial [14]. Levit e Tankus [41] apresentam uma conjectura de que também os grafos bem-cobertos que não contém ciclos de tamanho 4 ou 6 podem ser reconhecidos eficientemente e ainda provam vários resultados relacionados. Embora os grafos bem-cobertos livres de $K_{1,3}$ possam ser reconhecidos eficientemente [51, 52], não é conhecida uma caracterização geral para estes grafos. Caracterizações com restrições adicionais podem ser encontradas em [29, 56]. Outros trabalhos sobre grafos bem-cobertos podem ser consultados em [31, 44].

Como uma generalização dos grafos bem-cobertos, Finbow, Hartnell e Nowakowski [25] definem, para todo $r \in \mathbb{N}$, o conjunto \mathcal{M}_r como o conjunto de grafos que tem conjuntos independentes maximais de exatamente r diferentes tamanhos. Com esta definição, \mathcal{M}_1 contém exatamente todos os grafos bem-cobertos. Caro [13] prova que o reconhecimento de grafos em \mathcal{M}_r também é um problema que está em co-NP-completo, mesmo para os grafos livres de $K_{1,4}$. Se um grafo pertence a \mathcal{M}_r e os seus tamanhos de conjuntos independentes maximais são consecutivos, então o grafo pertence a uma classe chamada I_r , definida por Barbosa e Hartnell [4].

Para um grafo G , $\text{ccim}(G)$ denota o conjunto com todas as cardinalidades de conjuntos independentes maximais de G . Na Figura 2.1, podem ser vistos alguns exemplos de grafos e as classes às quais pertencem em relação aos seus diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais.

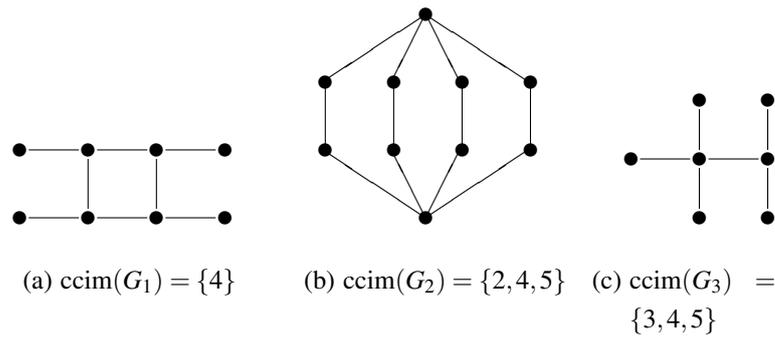


Figura 2.1: Exemplos de conjuntos independentes maximais. O grafo $G_1 \in \mathcal{M}_1$, ou seja, é bem coberto; $G_2 \in \mathcal{M}_3$, mas $G_2 \notin \mathcal{I}_3$; $G_3 \in \mathcal{I}_3$ e, portanto, $G_3 \in \mathcal{M}_3$.

Assim como ocorre com os grafos bem-cobertos, muitos resultados sobre \mathcal{M}_r estão relacionados a grafos sem ciclos pequenos. Finbow, Hartnell e Nowakowski [23] provam que C_7 é o único grafo conexo bem-coberto de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 6. De forma similar, Finbow, Hartnell e Whitehead [25] provam que os ciclos C_8, C_9, C_{10}, C_{11} e C_{13} são os únicos grafos em \mathcal{M}_2 de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 8. Para $r \geq 4$, Hartnell e Rall [32] provam que todo grafo em \mathcal{M}_r de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos $6r - 6$ é um ciclo. Para $r \in \{2, 3\}$, o conjunto \mathcal{M}_r contém grafos de grau mínimo pelo menos 2 e cintura $6r - 5$ que não são ciclos [32].

Barbosa e Hartnell [4] mostram condições suficientes para um grafo pertencer a \mathcal{M}_2 ou \mathcal{I}_2 e mostram também que se G é livre de $K_{1,3}$ e pertence a \mathcal{M}_r então G pertence a \mathcal{I}_r . Para $G \in \mathcal{M}_r$ e $v \in G$, Barbosa e Hartnell [5] determinam os valores extremos que t pode assumir tal que $G \setminus \{v\}$ pertença a \mathcal{M}_t e apresentam grafos que atendem aos limites mínimo e máximo. Outra questão considerada pelos autores foi o efeito da remoção de uma aresta do grafo sobre os seus tamanhos dos conjuntos independentes maximais.

Como uma generalização das caracterizações de Ravindra [48] de grafos bem-cobertos bipartidos, Favaron [20] apresenta uma caracterização dos então chamados grafos muito bem-cobertos, os quais são grafos G bem-cobertos que são de ordem $n(G)$ par e têm $\alpha(G)$ igual a $\frac{n(G)}{2}$. Como todo componente conexo de um grafo muito bem-coberto G é também muito bem-coberto, são considerados grafos sem vértices isolados. Berge [8] prova que o valor máximo possível de $\alpha(G)$ de um grafo bem-coberto G de ordem $n(G)$ sem um vértice isolado é $\frac{n(G)}{2}$; ou seja, os grafos muito bem-cobertos têm o número de independência máximo dentre os grafos bem-cobertos sem vértice isolado.

Por outro lado, se um grafo não é bem-coberto, uma outra questão é determinar o quão distante ele está de ser bem-coberto. Em outras palavras, qual a quantidade máxima possível de tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais em um grafo G com $n(G)$ vértices? Em 1965, Moon e Moser [42] provam que essa quantidade

é, no máximo, $n(G) - \lfloor \log n(G) \rfloor$. Em [10], são analisadas algumas características da estrutura de grafos com o maior número possível de tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais e também são dadas estimativas que são as melhores possíveis para grafos regulares e grafos livres de $K_{1,k}$, para $k \geq 3$.

Quando analisamos os tamanhos dos conjuntos independentes maximais de dois grafos, uma outra questão que tem sido investigada é o comportamento das cardinalidades ao se fazer uma certa operação com os mesmos. Apresentamos nesta tese resultados relacionados ao produto complementar e também sobre dois tipos particulares deste produto: o produto Cartesiano e o prisma complementar. Apresentamos as definições de tais produtos e alguns trabalhos relacionados.

O *produto Cartesiano* $G \square H$ de dois grafos G e H é o grafo contendo conjunto de vértices $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, e dois vértices (u,v) e (x,y) são adjacentes exatamente se

- $(u,x) \in E(G)$ e $v = y$,
- ou $(v,y) \in E(H)$ e $u = x$.

Na Figura 2.2, temos o grafo $C_3 \square P_4$.

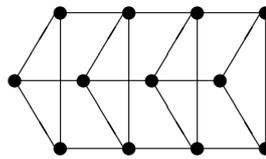


Figura 2.2: Grafo $C_3 \square P_4$.

Topp e Volkman [54] apresentam resultados sobre o produto Cartesiano de alguns grafos, incluindo os grafos bipartidos e ciclos e deixam uma questão em aberto: Se o produto dos grafos G e H é bem-coberto, necessariamente G e H são bem-cobertos? Fradkin [26] mostra que $G \square H$ não é bem-coberto quando G e H não são bem-cobertos e são livres de triângulo. Hartnell e Rall [30] generalizam este resultado, mostrando que se $G \square H$ é bem-coberto, então pelos menos um dentre G e H é bem-coberto. Mostramos em [7] algumas propriedades do produto Cartesiano de dois ciclos.

Uma questão antiga sobre o produto Cartesiano de grafos é a chamada *conjectura de Vizing*. Vizing [55] conjectura que o número de dominação do produto Cartesiano de dois grafos é sempre maior do que ou igual ao produto do número de dominação dos dois fatores. Até o momento não há uma prova para esta conjectura para um grafo qualquer. Lembramos que todo conjunto independente maximal é um conjunto dominante, embora a recíproca não seja verdadeira. Além disso, o menor conjunto dominante independente é um conjunto independente maximal de mínima cardinalidade.

Em [43], são estabelecidos resultados relativos ao número de dominação do produto Cartesiano de caminhos e ciclos. Estes grafos são chamados de grades cilíndricas. Os autores mostram a validade da Conjectura de Vizing para estes produtos.

Sabidussi [49] e Vizing [55] mostram que todo grafo conexo tem uma fatoração em fatores primos com relação ao produto Cartesiano que é única, a menos da permutação dos fatores. Um primeiro algoritmo de tempo polinomial para determinar esta fatoração é proposto por Feigenbaum et al. [22]. Consideráveis simplificações de tempo de execução e melhoramentos são obtidos por Winkler [57], Feder [21] e Aurenhammer et al. [1]. Finalmente, Imrich e Peterin [37] apresentam um algoritmo de complexidade de tempo linear para tal fatoração. Para um excelente levantamento sobre esta questão e outros produtos de grafos, sugerimos [28].

Haynes et al. [33] generalizam o conceito de produto Cartesiano. Para dois grafos G e H , um conjunto R de vértices de G , e um conjunto S de vértices de H , o *produto complementar* $G(R)\square H(S)$ é definido como o grafo com conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$ onde dois vértices (u, v) e (x, y) são adjacentes exatamente se

- $u = x, u \in R$ e $vy \in E(H)$, ou
- $u = x, u \in V(G) \setminus R$ e $vy \notin E(H)$, ou
- $v = y, v \in S$ e $ux \in E(G)$, ou
- $v = y, v \in V(H) \setminus S$ e $ux \notin E(G)$.

Em outras palavras, para cada $u \in V(G)$, substituímos u por uma cópia de H se u está em R e por uma cópia de seu complemento \bar{H} se u não está em R , e para cada $v \in V(H)$, substituímos v por uma cópia de G se v está em S e uma cópia de \bar{G} se $v \notin S$. Note que $G(R)\square H(S)$ coincide com o produto Cartesiano de G e H se $R = V(G)$ e $S = V(H)$. Na Figura 2.3, é apresentado um exemplo do produto complementar de dois grafos.

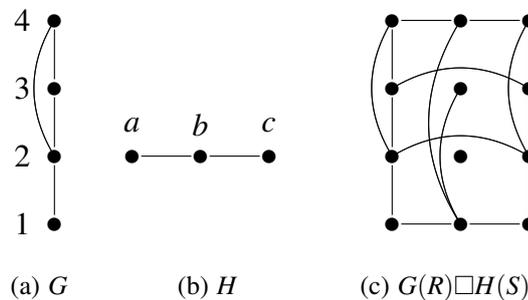


Figura 2.3: Grafos G , H e o produto complementar $G(R)\square H(S)$, com $R = \{1, 4\}$ e $S = \{a, c\}$.

Haynes et al. [33] também definem por *prisma complementar* o produto complementar $G(V(G)\square K_2(S))$, com $|S| = 1$, denotado por $G\bar{G}$. Eles investigam, para es-

tes grafos, algumas propriedades como independência, distância e dominação. Outras propriedades de prismas complementares são estudadas em alguns poucos artigos [18, 27, 34–36, 39, 40]. Duarte et al. [19] apresentam resultados algorítmicos e de complexidade para os prismas complementares em relação a cliques, conjuntos independentes, dominação e convexidade. Na Figura 2.4, podem ser vistos os prismas complementares dos grafos K_4 e C_4 , respectivamente.

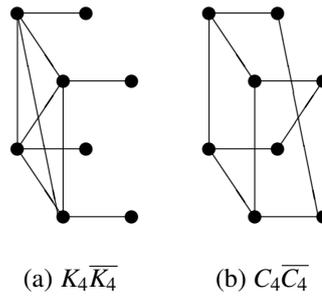


Figura 2.4: Prismas complementares dos grafos K_4 (a) e C_4 (b).

GRAFOS COM ATÉ r TAMANHOS DE CONJUNTOS INDEPENDENTES MAXIMAIS COM RESTRIÇÃO DE CINTURA E DE GRAU MÍNIMO

3.1 Introdução

Como uma generalização dos grafos bem-cobertos, Finbow, Hartnell e Nowakowski [25] definem, para todo $r \in \mathbb{N}$, o conjunto \mathcal{M}_r como o conjunto de grafos que tem conjuntos independentes maximais de exatamente r diferentes tamanhos. Com esta definição, \mathcal{M}_1 contém exatamente todos os grafos bem-cobertos.

É possível construir árvores arbitrariamente grandes, mais especificamente grafos centopeia de grau máximo 4, que pertencem à \mathcal{M}_r . Além disso, se G e H são grafos em \mathcal{M}_r e \mathcal{M}_s , respectivamente, então, adicionando todas as arestas entre $V(G)$ e $V(H)$ à união disjunta de G e H , o grafo resultante pertence a \mathcal{M}_t para algum t com $\max\{r, s\} \leq t \leq r + s$. De forma similar, começando com qualquer grafo G e adicionando para todo vértice u de G , uma clique não vazia unida totalmente a u , obtemos um grafo bem-coberto. Isto implica que, para $r \geq 1$, o conjunto \mathcal{M}_r contém infinitos grafos de grau mínimo pelo menos 2.

Um grafo G pertence à classe I_r , definida por Barbosa e Hartnell [4], se G tem exatamente r tamanhos de conjuntos independentes maximais de tamanhos $t, t + 1, \dots, t + r - 1$ para algum $t \in \mathbb{N}$. Claramente, todo grafo G pertencente a I_r pertence a \mathcal{M}_r , embora a recíproca não seja verdadeira.

Neste capítulo, são apresentados resultados sobre grafos em \mathcal{M}_r com as restrições de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 6. Para cintura pelo menos 7, nossa motivação foi a conjectura que, para $r = 2$, há um número finito de grafos com estas propriedades, todos com $\Delta \leq 4$. Na Seção 3.2, mostramos que para todo $r \geq 2$, há um número finito de grafos com grau máximo limitado com estas restrições. Além

disso, provamos alguns outros resultados que restringem os graus de tais grafos. Outros resultados sobre \mathcal{M}_r e restrição de cintura (tamanho ímpar) podem ser encontrados em [4, 5, 47]. Mostramos, na Seção 3.3, alguns resultados relacionados a grafos em I_r com cintura pelo menos 6 e grau mínimo pelo menos 2.

3.2 Resultados em $\mathcal{M}_{\leq r}$

Para $r \geq 1$, denotamos $\mathcal{M}_{\leq r} = \mathcal{M}_1 \cup \dots \cup \mathcal{M}_r$, ou seja, $\mathcal{M}_{\leq r}$ é o conjunto de grafos que tem conjuntos independentes de no máximo r tamanhos diferentes.

Para algumas provas, mesmo sem mencionar, utilizamos o seguinte resultado de Finbow, Hartnell e Whitehead [25].

Teorema 3.1 [25] *Seja G um grafo tal que $G \in \mathcal{M}_{\leq r}$. Para todo conjunto independente I de G , o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus N_G[I]$ pertence a $\mathcal{M}_{\leq r}$.*

O Teorema 3.1 é utilizado da seguinte maneira. Encontramos um conjunto independente I em um grafo G , demonstramos que $G \setminus I$ tem um componente que está na classe \mathcal{M}_s para algum $s > r$ e então concluímos que $G \notin \mathcal{M}_r$.

Provamos em [6] que, para todo $r \geq 2$, há um número finito de grafos de grau mínimo pelo menos 2, cintura pelo menos 7 e com grau máximo limitado, já que limitamos a ordem do grafo com tais propriedades.

Teorema 3.2 [6] *Para $r \geq 2$ e $D \geq 3$, todo grafo conexo em $\mathcal{M}_{\leq r}$, de grau mínimo pelo menos 2, grau máximo até D e cintura pelo menos 7 tem ordem no máximo*

$$\frac{D}{D-2} \left((D-1)^{48(r+1)^2+56(r+1)+4} - 1 \right).$$

Prova. Para uma contradição, suponhamos que $\mathcal{M}_{\leq r}$ contém um grafo conexo G que é de grau mínimo pelo menos 2, grau máximo até D , cintura pelo menos 7 e ordem maior do que o valor dado. Já que todo grafo de grau máximo até D não tem mais do que $1 + \frac{D}{D-2} \left((D-1)^d - 1 \right)$ vértices com distância no máximo d de todo vértice dado, o grafo G contém dois vértices u e v separados à distância $48(r+1)^2 + 56(r+1) + 4$. Seja P um caminho de menor comprimento em G entre u e v ; Indexe seus vértices por $x(0), \dots, x(k-1)$. Note que a ordem k de P é $48(r+1)^2 + 56(r+1) + 5$.

Seja o grafo H obtido de G pela remoção de todos os vértices com distância no máximo 1 de P . Seja I_0 o conjunto de todos os vértices y em $V(H)$ tal que existe algum índice $i \in \{0, \dots, k-1\}$ com $i \equiv 0 \pmod{6}$ e $\text{dist}_G(x(i), y) = 2$. Como G tem cintura pelo menos 7 e P é um menor caminho, o conjunto I_0 é independente. Seja I_1 um conjunto independente maximal de H que contém I_0 . Veja a Figura 3.1 para uma ilustração da formação destes conjuntos.

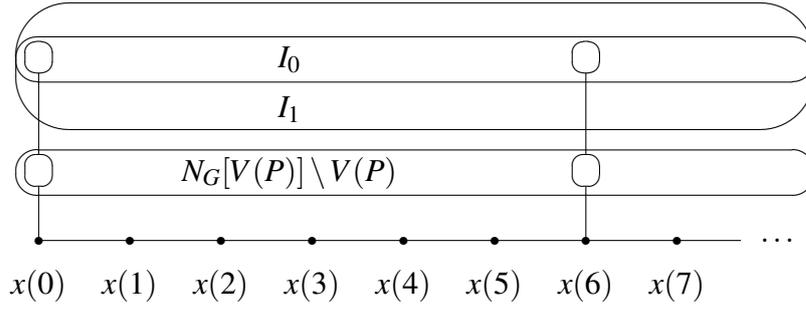


Figura 3.1: O caminho P e a formação dos conjuntos I_0 e I_1 .

Seja T o subgrafo de G induzido por $N_G[V(P)] \setminus N_G[I_1]$. Claramente, $P \subseteq T$. Para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, sejam $N(i) = N_T(x(i)) \setminus V(P)$ e $n(i) = |N(i)|$. Como G tem cintura pelo menos 7 e P é um menor caminho, o grafo T é uma centopeia que é obtida pela ligação de n_i folhas para cada vértice x_i de P . Além disso, como G tem grau mínimo pelo menos 2, a definição de I_0 implica que $n(i) = 0$ para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$ com $i \equiv 0 \pmod{6}$.

Um índice i com $i \in \{3, \dots, k-4\}$ é chamado *especial*, se $n_i + 1 \neq n_{i-1} + n_{i+1}$. Consideramos dois casos de acordo com o número de índices especiais.

Caso 1 Há pelo menos $8(r+1)$ índices especiais.

Neste caso, há $r+1$ índices especiais $i_1 < i_2 < \dots < i_{r+1}$ com $i_{j+1} - i_j \geq 8$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$.

Seja I_2 contendo

- para todo $j \in \{1, \dots, r+1\}$, todos os vértices em

$$\{x(i_j - 3), x(i_j + 3)\} \cup N(i_j - 2) \cup N(i_j + 2),$$

- todos os vértices em um conjunto independente maximal no subgrafo de G induzido por

$$N(i_1 - 4) \cup N(i_{r+1} + 4) \cup \bigcup_{i=0}^{i_1-5} (x(i) \cup N(i)) \cup \bigcup_{i=i_{r+1}+5}^{k-1} (x(i) \cup N(i)),$$

e

- para todo $j \in \{1, \dots, r\}$, todos os vértices em um conjunto independente maximal do subgrafo de G induzido por

$$N(i_j + 4) \cup N(i_{j+1} - 4) \cup \bigcup_{i=i_j+5}^{i_{j+1}-5} (x(i) \cup N(i)).$$

(Note que este conjunto pode ser vazio para $i_{j+1} - i_j \leq 9$.)

Veja a Figura 3.2 para uma ilustração.

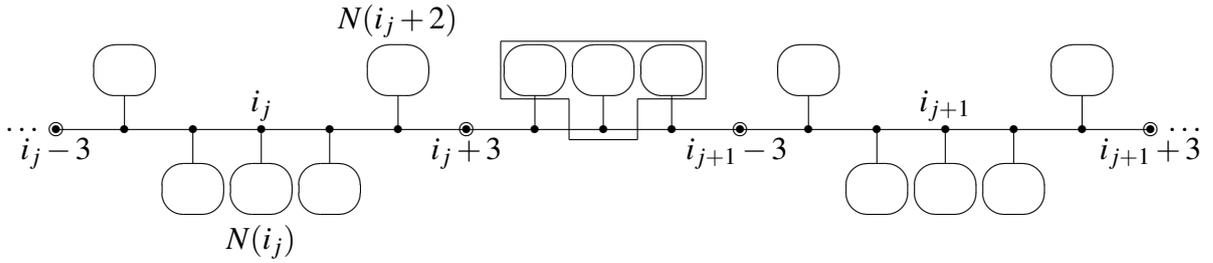


Figura 3.2: A seção de P entre $x(i_j - 3)$ e $x(i_{j+1} + 3)$.

Como T é uma centopeia, o conjunto I_2 é independente.

Para todo $j \in \{1, \dots, r+1\}$, sejam

$$S(j) = \{x(i_j - 1), x(i_j + 1)\} \cup N(i_j)$$

e

$$L(j) = \{x(i_j)\} \cup N(i_j - 1) \cup N(i_j + 1).$$

Como i_j é especial, temos $|S(j)| \neq |L(j)|$.

Se para todo $j \in \{1, \dots, r+1\}$, $I(j) \in \{S(j), L(j)\}$, então

$$I_1 \cup I_2 \cup \bigcup_{j=1}^{r+1} I(j)$$

é um conjunto independente maximal de G . Isto implica na existência de conjuntos independentes maximais de G de pelo menos $r+1$ tamanhos diferentes, o que é uma contradição.

Caso 2 Há menos do que $8(r+1)$ índices especiais.

Ao apagar de P os primeiros três vértices, os últimos três vértices, e todos os vértices $x(i)$ tal que i é especial, obtemos uma coleção de no máximo $8(r+1)$ caminhos cuja soma é $k - 6 - (8(r+1) - 1)$, que é igual a $48(r+1)^2 + 48(r+1)$. Portanto, um caminho nesta coleção, digamos Q , de $x(p)$ a $x(p+\ell-1)$, tem ordem pelo menos $6(r+1) + 6$.

Pela definição de I_0 , o caminho Q contém um vértice $x(i)$ com $n(i) = 0$. Já que i não é especial, $n(i-1) + n(i+1) = 1$, o que implica que $\{n(i-1), n(i+1)\} = \{0, 1\}$. Como nenhum dos índices $p, \dots, p+\ell-1$ é especial, segue que a sequência

$$n(p), n(p+1), \dots, n(p+\ell-1)$$

consiste de ℓ números consecutivos de uma sequência periódica infinita dos dois lados

$$\dots, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, \dots$$

Seja $q \in \{p, \dots, p+5\}$ tal que $n(q) = n(q+1) = 0$.

Seja I'_2 contendo

- para todo $j \in \{1, \dots, r+1\}$, todos os vértices em

$$\{x(q+6(j-1))\} \cup N(q+6(j-1)+4) \cup N(q+6(j-1)+5),$$

- o vértice $x(q+6(r+1))$, e
- todos os vértices em um conjunto independente maximal do subgrafo de G induzido por

$$\bigcup_{i=0}^{q-2} (x(i) \cup N(i)) \cup N(q-1)$$

e

- todos os vértices em um conjunto independente maximal do subgrafo de G induzido por

$$N(q-1) \cup N(q+6(r+1)+1) \cup \bigcup_{i=0}^{q-2} (x(i) \cup N(i)) \cup \bigcup_{i=q+6(r+1)+2}^{k-1} (x(i) \cup N(i)).$$

Veja a Figura 3.3 para uma ilustração.

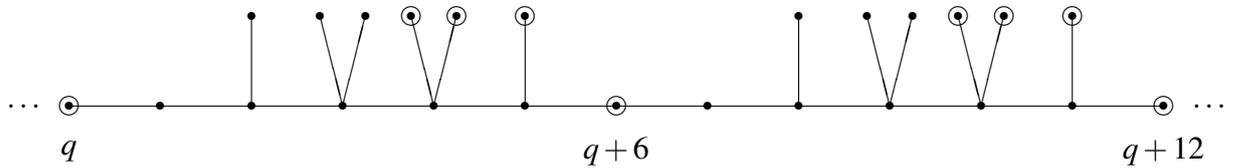


Figura 3.3: A seção de P entre $x(q)$ e $x(q+12)$.

Como T é uma centopeia, o conjunto I'_2 é independente.

Se, para todo $j \in \{1, \dots, r+1\}$, $I'(j)$ é ou o conjunto $\{x(q+6(j-1)+3)\} \cup N(q+6(j-1)+2)$, que contém dois vértices, ou o conjunto $\{x(q+6(j-1)+2)\} \cup N(q+6(j-1)+3)$, que contém três vértices, então

$$I_1 \cup I'_2 \cup \bigcup_{j=1}^{r+1} I'(j)$$

é um conjunto independente maximal de G . Isto implica a existência de conjuntos independentes maximais de $r+1$ tamanhos diferentes, o que é uma contradição e completa a prova. \square

Devido ao Teorema 3.2, condições que implicam uma limitação no grau máximo dos grafos considerados são de interesse. Nossos outros resultados ilustram condições diferentes para permitir a restrição dos graus dos vértices.

Teorema 3.3 [6] *Para $r \geq 2$ e $s \geq 0$, todo grafo em $\mathcal{M}_{\leq r}$ que*

- *tem grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 7,*
- *e no qual para todo vértice u , há no máximo s ciclos de tamanho 7 que contém u ,*

tem grau máximo até $\binom{r}{2} + 2s + 1$.

Prova. Suponhamos, ao contrário, que G possui as propriedades descritas, mas $\Delta(G) > \binom{r}{2} + 2s + 1$. Seja u um vértice de grau máximo e sejam $v_1, \dots, v_{\Delta(G)}$ os vizinhos de u . Para $i \in \{1, \dots, \Delta(G)\}$, sejam $N_i = N_G(v_i) \setminus \{u\}$ e $N_i^2 = N_G[N_i] \setminus (\{v_i\} \cup N_i)$. Pela condição da cintura, todos estes conjuntos são disjuntos.

Seja H o grafo com conjunto de vértices $\{1, \dots, \Delta(G)\}$ no qual dois vértices distintos i e j são adjacentes exatamente se G contém uma aresta entre N_i^2 e N_j^2 . Como nenhum vértice de G está em mais do que s ciclos de tamanho 7, o grafo H não tem um emparelhamento com mais do que s arestas.

Isto implica que H tem um conjunto independente de tamanho pelo menos $\Delta(G) - 2s$. Pela simetria, podemos assumir que para todo $1 \leq i < j \leq \Delta(G) - 2s$, o grafo G não contém arestas entre N_i^2 e N_j^2 . Isto implica que o subgrafo T de G induzido por

$$N_G[u] \cup \bigcup_{i=1}^{\Delta(G)-2s} (N_i \cup N_i^2)$$

é uma árvore.

Para $k \in \{2, \dots, \Delta(G) - 2s\}$, seja I_k um conjunto independente maximal do subgrafo de G induzido por

$$V(G) \setminus \left(N_G[u] \cup \bigcup_{i=1}^k N_i \right)$$

tal que I_k contém o conjunto independente

$$\bigcup_{i=1}^k N_i^2 \cup \bigcup_{i=k+1}^{\Delta(G)} N_i.$$

O subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus N_G[I_k]$ é isomorfo ao grafo $K_{1,k}$. Já que $K_{1,k}$ tem conjuntos independentes maximais de tamanhos 1 e k , respectivamente, isto implica que, para todo $k \in \{2, \dots, \Delta(G) - 2s\}$, o grafo G contém dois conjuntos independentes

maximais S_k e L_k com $|L_k| - |S_k| = k - 1$. Como o conjunto de diferenças de elementos distintos de S tem tamanho no máximo $\binom{r'}{2}$ quando S é um conjunto de r' inteiros, isto implica que $G \in \mathcal{M}_{r'}$, para algum r' com $\binom{r'}{2} \geq \Delta(G) - 2s - 1 > \binom{r}{2}$, o que é uma contradição. \square

Combinando os Teoremas 3.2 e 3.3 temos o corolário seguinte.

Corolário 3.4 [6] *Para todo $r \geq 2$, o conjunto $\mathcal{M}_{\leq r}$ contém uma quantidade finita de grafos de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 8.*

Prova. Seja G um grafo em $\mathcal{M}_{\leq r}$ de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 8. Pelo Teorema 3.3, o grau máximo de G é menor ou igual a $\binom{r}{2} + 1$. Logo, pelo Teorema 3.2, a ordem de cada componente de G é limitada em termos de r . Pelo resultado de Finbow, Hartnell e Nowakowski [23] mencionado no Capítulo 2, não há grafo bem-coberto de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 8; isto é, todo componente de G tem conjuntos independentes maximais com pelo menos dois tamanhos diferentes. Isto implica que G tem no máximo $r - 1$ componentes. Portanto, obtemos que a ordem de G é limitada em termos de r , o que completa a prova. \square

Para $r \in \{1, 2\}$, a declaração do Corolário 3.4 já era conhecida [23, 25]. Para grafos em \mathcal{M}_r de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 8, o Teorema 3.3 pode ser levemente melhorado, conforme a proposição abaixo.

Proposição 3.5 *Se G é um grafo em \mathcal{M}_r , que é de grau mínimo pelo menos 2, e cintura pelo menos 8, então $\Delta(G) \leq r$.*

Prova. Similar à prova do Teorema 3.3. \square

Nosso próximo resultado limita o número de vizinhos de grau mínimo de todo vértice.

Proposição 3.6 [6] *Se $r \geq 2$ e G é um grafo em $\mathcal{M}_{\leq r}$ de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 7, então todo vértice em G tem no máximo $\left(\binom{r}{2} + 1\right)^2$ vizinhos de grau 2.*

Prova. Suponhamos, para uma contradição, que G contém um vértice u com d vizinhos v_1, \dots, v_d de grau 2 tal que $d > \left(\binom{r}{2} + 1\right)^2$. Para $i \in \{1, \dots, d\}$, sejam w_i os vizinhos de v_i distintos de u e sejam z_i os vizinhos de w_i distintos de v_i . Pela condição da cintura, todos estes vértices são distintos. Seja

$$N^2 = \{v \in V(G) : \text{dist}_G(u, v) = 2\} \setminus \{w_1, \dots, w_d\}.$$

Já que todo grafo sem triângulos de ordem $d \geq 3$ tem um conjunto independente de ordem $\lceil \sqrt{d} \rceil$, podemos assumir, pela simetria, que $\{z_1, \dots, z_{\lceil \sqrt{d} \rceil}\}$ é um conjunto independente.

Para $k \in \{2, \dots, \lceil \sqrt{d} \rceil\}$, seja I_k um conjunto independente maximal do subgrafo de G induzido por

$$V(G) \setminus (N_G[u] \cup \{w_1, \dots, w_k\})$$

tal que I_k contém o conjunto independente $\{z_1, \dots, z_k\} \cup \{w_{k+1}, \dots, w_d\} \cup N^2$. O subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus N_G[I_k]$ é isomorfo a $K_{1,k}$. A partir deste ponto, é possível completar a prova exatamente como foi feito no Teorema 3.3. \square

O grafo que é obtido pela ligação de um vértice em cada uma de duas cópias de C_7 mostra que a igualdade da Proposição 3.6 é válida para $r = 2$.

Nosso próximo resultado é uma variação da Proposição 3.6. Mostramos que vértices de grau elevado não podem ter muitos vértices de grau consideravelmente menor com distância 3.

Proposição 3.7 [6] *Seja $r \geq 2$ e seja G um grafo em $\mathcal{M}_{\leq r}$ de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 7. Se u é um vértice de G e N é um conjunto de d_1 vizinhos de u tal que*

- *todo vértice em N tem grau no máximo d_2 e*
- *para todo vértice v em N e todo vértice w em $N_G(v) \setminus \{u\}$, há um vértice z em $N_G(w) \setminus \{v\}$ de grau no máximo d_3 ,*

então

$$\frac{d_1}{(d_2 - 1)(d_3 - 1) + 1} - 1 \leq \binom{r}{2}.$$

Prova. Sejam G , u , N e d_1, d_2, d_3 como declarados. Seja $N = \{v_1, \dots, v_{d_1}\}$. Para todo $v_i \in N$, Seja $N_i = N_G(v_i) \setminus \{u\}$ e seja N_i^2 um conjunto de $d_G(v_i) - 1$ vértices de grau no máximo d_3 tal que, para todo $w \in N_i$, o conjunto N_i^2 contém um vizinho de w distinto de v_i . Pela condição da cintura, os conjuntos N_i^2 são disjuntos e independentes.

O grafo com conjunto de vértices $\{1, \dots, d_1\}$, no qual dois vértices distintos i e j são adjacentes exatamente se G contém uma aresta entre N_i^2 e N_j^2 , tem ordem d_1 e grau máximo no máximo $(d_2 - 1)(d_3 - 1)$. Logo, estes grafos contém um conjunto independente de ordem pelo menos $\frac{d_1}{(d_2 - 1)(d_3 - 1) + 1}$.

A partir deste ponto, é possível completar a prova exatamente como na Proposição 3.6. \square

Em nosso último resultado desta seção, consideramos grafos de cintura pelo menos 6 que não contém ciclos de tamanho 7. Enquanto não é possível limitar, neste caso, o grau máximo, podemos pelo menos limitar o número de diferentes graus dos vértices.

Proposição 3.8 [6] Para $r \geq 2$, todo grafo G em $\mathcal{M}_{\leq r}$ que é de grau mínimo pelo menos 2, cintura pelo menos 6 e não contém um ciclo de tamanho 7, tem no máximo $\binom{r}{2}$ graus diferentes de seus vértices.

Prova. Seja G um grafo em $\mathcal{M}_{\leq r}$ com grau mínimo pelo menos 2, cintura pelo menos 6 e que não contém um ciclo de tamanho 7.

Seja u um vértice de G de grau d . Se N^i é o conjunto de vértices a distância i de u , então N^3 é independente. Se I é um conjunto independente maximal do subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus (\{u\} \cup N^1 \cup N^2)$ tal que $N^3 \subseteq I$, então o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus N_G[I]$ é $K_{1,d}$, o que implica que G tem conjuntos independentes maximais cujas cardinalidades diferem por exatamente $d - 1$. Isto implica que G tem vértices de, no máximo, $\binom{r}{2}$ diferentes graus. \square

3.3 Resultados em I_r

Nesta seção, são considerados os grafos em I_r com cintura pelo menos 6 e grau mínimo pelo menos 2. Primeiramente é provado que C_6 é o único grafo conexo em \mathcal{M}_2 com estas restrições de cintura e grau mínimo, com a restrição adicional de não conter um ciclo de tamanho 7.

Proposição 3.9 Se G é um grafo conexo em \mathcal{M}_2 , que é de grau mínimo pelo menos 2, cintura 6 e não contém um ciclo de tamanho 7, então G é isomorfo a C_6 .

Prova. Suponhamos, para uma contradição, que G satisfaz às propriedades acima, mas G é diferente de C_6 . Pela Proposição 3.8, G é um grafo k -regular. Se $k = 2$, G é um ciclo com 6 vértices e $G \in \mathcal{M}_2$. Logo, suponhamos que $k \geq 3$. Como descrito na prova da Proposição 3.8, G tem conjuntos independentes cujas cardinalidades diferem por exatamente $k - 1$. Seja $u \in V(G)$. Sejam v_1, \dots, v_k os k vizinhos de u . Seja N^i o conjunto de vértices com distância i de u . Note que, pela regularidade do grafo, $|N^2| = k(k - 1)$ e que, pela condição de cintura, N^2 é independente, assim como N^3 . Seja I_0 um subconjunto de $V(G)$ contendo um vértice $x \in (N^2 \cap N_G(v_1))$ e todos os vértices em $N^3 \setminus N_G(x)$. Note que $N_G(x) \cap N^3$ tem tamanho $k - 1$ e $N^3(u)$ tem pelo menos $(k - 1)(k - 1)$ vértices. Logo, $N^3 \setminus N_G(x)$ é um conjunto não vazio.

Estenda I_0 a um conjunto independente maximal I_1 de $G \setminus (\{u\} \cup N^1 \cup N^2)$. O subgrafo de G , induzido por $G \setminus N_G[I_1]$ contém o vértice u com aresta para cada um dos vértices v_2, \dots, v_k e é, portanto, isomorfo a $K_{1,k-1}$. Note que todos os vértices em $N^3 \setminus N_G[x]$ dominam todos os vértices em $N^2 \setminus \{x\}$; caso contrário, haveria um vértice $y \in N^2 \setminus \{x\}$, tal que $N(y) \cap N^3 = N(x) \cap N^3$, o que implicaria em G ter um C_4 . Logo,

$I_1 \cup \{u\}$ e $I_1 \cup \{v_2, \dots, v_k\}$ são conjuntos independentes maximais em G com cardinalidades que diferem em exatamente $k - 2$. Isto contradiz que $G \in \mathcal{M}_2$ e completa a prova. \square

Note que se G é um grafo de cintura 6, sem ciclo de tamanho 7 e de grau mínimo pelo menos 2 em \mathcal{M}_r , para algum $r \geq 3$, não necessariamente G pertencerá a I_r . Por exemplo, o grafo conexo formado pela união disjunta de 2 grafos $K_{1,k}$, $k \geq 4$, ligando-se suas folhas para formar um emparelhamento perfeito, tem conjuntos independentes maximais de exatamente 3 tamanhos diferentes e não consecutivos, que são 2, k e $k + 1$.

Para cintura ≤ 5 podemos encontrar famílias infinitas de grafos com grau mínimo pelo menos 2 em I_2 . Todos os grafos bipartidos completos $K_{m,m+1}$, $m \geq 2$, têm grau mínimo pelo menos 2 e cintura 4 e eles estão em I_2 . Na Figura 3.4, são apresentados dois exemplos de grafos em I_2 com cinturas 3 e 5. Podemos adicionar qualquer quantidade de ciclos para obter grafos com ordem arbitrariamente grande em I_2 .

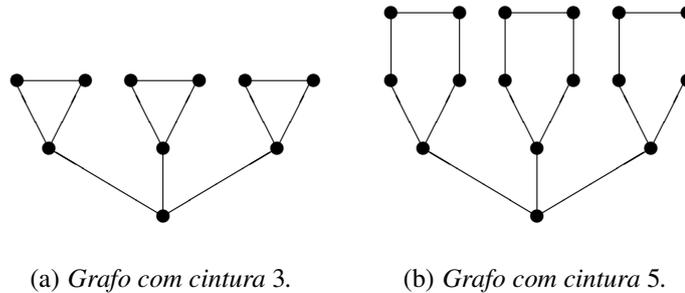
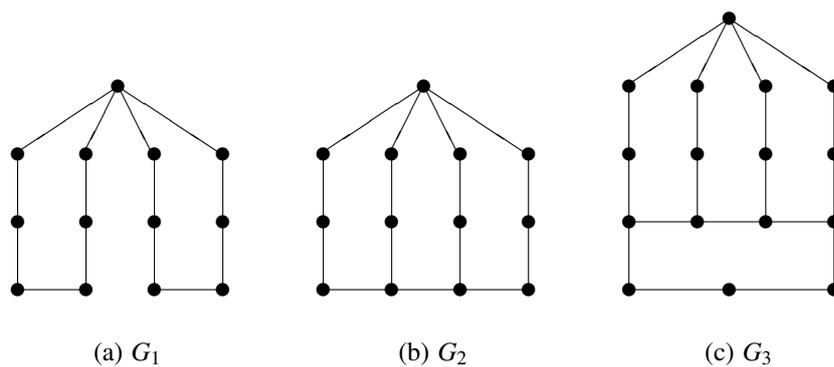


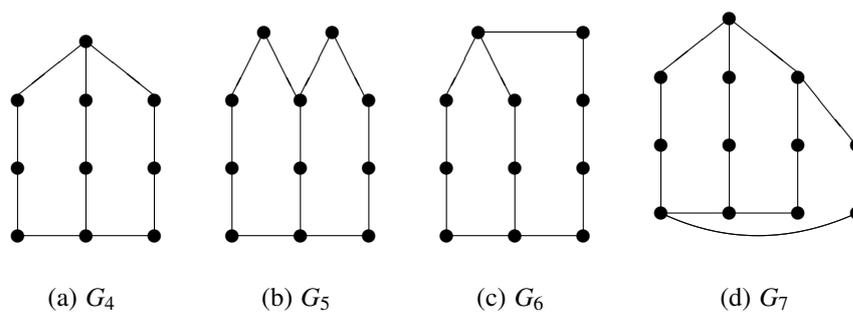
Figura 3.4: Grafos em I_2 com $\delta = 2$.

Um grafo é Z_m -bem-coberto se todos os seus tamanhos de conjuntos independentes maximais são congruentes módulo m . Por exemplo, um grafo em que todos os seus conjuntos independentes maximais têm cardinalidade par é um grafo Z_2 -bem-coberto. Os grafos Z_m -bem-cobertos com cintura pelo menos 6 foram caracterizados por Caro e Hartnell [15]. Todos estes grafos, com exceção de C_7 , possuem vértices de grau um. Logo, se G é um grafo em \mathcal{M}_2 de cintura pelo menos 6 e grau mínimo pelo menos 2, então G não é Z_m -bem-coberto, o que implica que $G \in I_2$.

A Proposição 3.6 implica que se G é um grafo de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 7, então todo vértice em G tem no máximo 4 vizinhos de grau 2. Na Figura 3.5, temos 3 grafos com estas propriedades que têm exatamente o limite estabelecido na proposição.

(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3 **Figura 3.5:** Grafos em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$ e $\Delta = 4$.

Além dos grafos mostrados na Figura 3.5, apresentamos nas Figuras 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9, todos os grafos em I_2 com cintura 7 e grau mínimo pelo menos 2 que foram encontrados na pesquisa. Todos possuem grau mínimo 2 e grau máximo 4.

(a) G_4 (b) G_5 (c) G_6 (d) G_7 **Figura 3.6:** Grafos G em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$, $\Delta = 3$ e $\text{ccim}(G) = \{4, 5\}$.

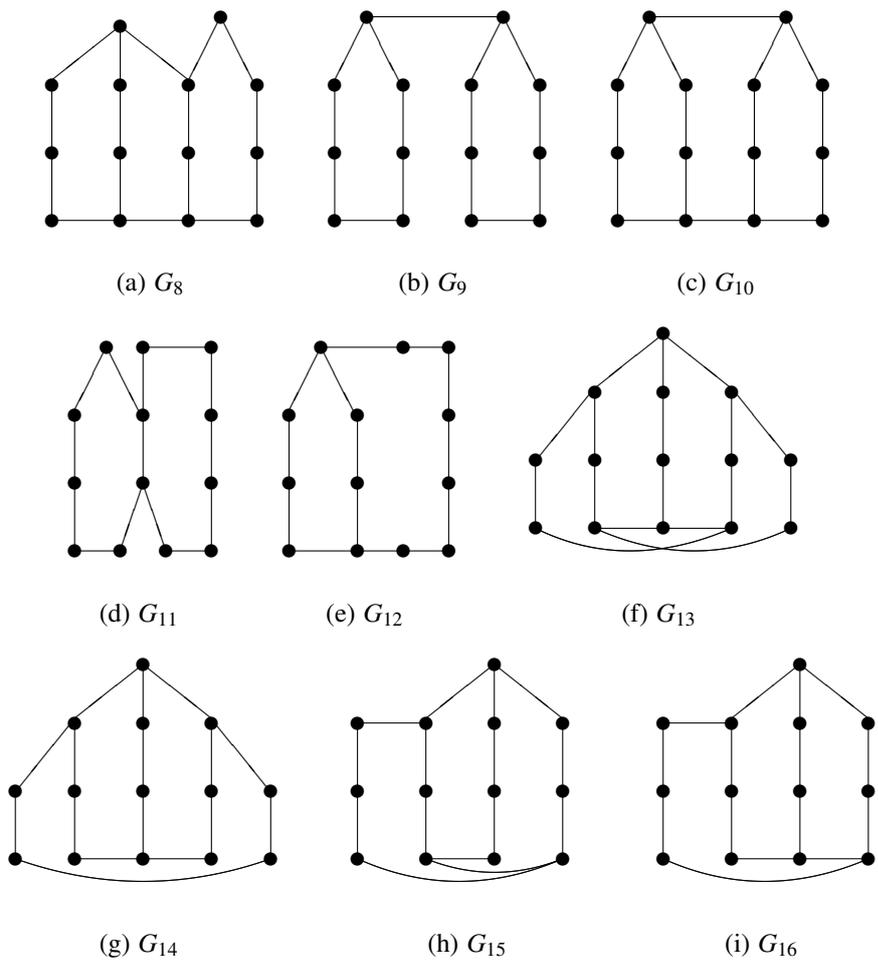


Figura 3.7: Grafos em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$ e $\Delta = 3$ e $ccim(G) = \{5, 6\}$.

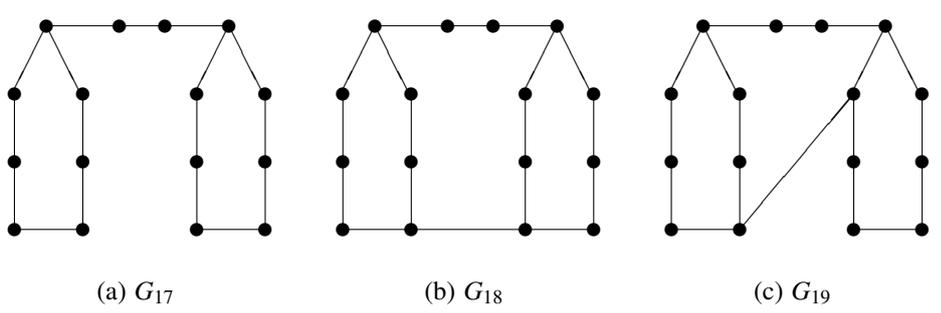


Figura 3.8: Grafos G em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$ e $\Delta = 3$ e $ccim(G) = \{6, 7\}$.

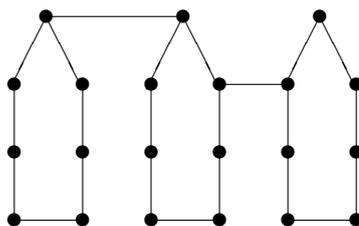


Figura 3.9: Grafo G_{20} em I_2 com cintura 7, $\delta = 2$, $\Delta = 3$ e $\text{ccim}(G) = \{8, 9\}$.

3.4 Mais algumas considerações

Mostramos que se o grau máximo de um grafo em $\mathcal{M}_{\leq r}$ com cintura pelo menos 7 e grau mínimo pelo menos 2 é limitado, temos uma quantidade finita de grafos na respectiva classe. Provamos resultados que restringem o grau máximo destes grafos e que nos permitem apresentar a seguinte conjectura.

Conjectura 3.1 *Há uma quantidade finita de grafos em \mathcal{M}_2 que são de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 7. Além disso, todos estes grafos têm $\Delta \leq 4$.*

Com o propósito de provar a Conjectura 3.1, foram apresentados, nas Figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9, todos os grafos em \mathcal{M}_2 com cintura 7 e grau mínimo 2 que foram encontrados na pesquisa. Todos possuem grau máximo 4. Além disso, todos pertencem à I_2 .

Mostramos que podemos construir infinitos grafos em \mathcal{M}_2 com cintura até 5 e grau mínimo pelo menos 2. Para cintura 6, quando o grafo não tem ciclos de tamanho 7, o único grafo G que satisfaz as restrições de grau mínimo 2 em \mathcal{M}_2 é C_6 , como provado na Proposição 3.9. Quando ciclos de tamanho 7 são permitidos, há grafos com vértices de graus diferentes e um outro problema em aberto seria a caracterização destes grafos. De forma semelhante, também não temos, para cintura 7, uma caracterização de tais grafos. Uma vez que, para cintura pelo menos 8, grafos com estas propriedades já foram caracterizados [25], observamos que a dificuldade de caracterização está nos grafos com ciclos de tamanho 7, com cintura 6 ou 7.

Apresentamos uma outra conjectura sobre a relação entre as cardinalidades dos conjuntos independentes maximais em grafos com cintura pelo menos 7.

Conjectura 3.2 *Se $r \geq 2$ e $G \in \mathcal{M}_r$ é um grafo conexo com cintura pelo menos 7 e grau mínimo pelo menos 2, então $G \in I_r$.*

GRAFOS BEM-COBERTOS COM UM NÚMERO DE INDEPENDÊNCIA GRANDE

4.1 Introdução

O problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos está na classe co-NP-completo [17, 50] assim como o mesmo problema restrito a grafos livres de $K_{1,4}$ [16]. Logo, caracterizações estruturais e algoritmos de reconhecimento de complexidade polinomial de tempo somente podem ser esperados quando consideramos restrições adicionais. Nas seguintes classes, os grafos bem-cobertos podem ser reconhecidos por algoritmos de complexidade polinomial de tempo: grafos livres de $K_{1,3}$ [51, 52], grafos de cintura pelo menos 5 [23], grafos que não contêm ciclos de tamanho 4 ou 5 [24], grafos que não contêm ciclos de tamanho 3, 5 ou 7 [47], grafos com grau máximo limitado [14], grafos cordais, grafos arco-circulares [46], os grafos blocos e grafos unicíclicos [54]. Em [41] é apresentada uma conjectura de que também os grafos bem-cobertos que não contêm ciclos de tamanho 4 ou 6 podem ser reconhecidos eficientemente e ainda foram provados vários resultados relacionados.

A seguinte caracterização dos grafos bipartidos bem-cobertos foi dada por Ravindra [48].

Teorema 4.1 [48] *Se G é um grafo conexo bipartido, então G é bem-coberto se, e somente se, G contém um emparelhamento perfeito F tal que para toda aresta $e = uv$ em F , o subgrafo induzido por $N_G(u) \cup N_G(v)$ é um grafo bipartido completo.*

Como uma generalização da caracterização de grafos bem-cobertos bipartidos de Ravindra [48], Favaron [20] apresenta uma caracterização dos então chamados grafos muito bem-cobertos, os quais são grafos bem-cobertos G que são de ordem $n(G)$ par, e têm número de independência $\alpha(G)$ igual a $\frac{n(G)}{2}$. Como todo componente conexo de um grafo muito bem-coberto G é também muito bem-coberto, são considerados grafos sem vértices isolados. Claramente, se G é bem-coberto e em adição, bipartido, com

partições A e B , segue que A e B são conjuntos independentes maximais e, portanto, $|A| = |B| = \alpha(G) = |V(G)|/2$.

Para mostrar a caracterização de Favaron [20], foi definida uma propriedade de emparelhamentos.

Propriedade (P)

Seja G um grafo com um emparelhamento M . Dizemos que M satisfaz a propriedade (P) se, para toda aresta xy em M , temos $N_G(x) \cap N_G(y) = \emptyset$ e todo vértice em $N_G(x) \setminus \{y\}$ é adjacente a todo vértice em $N_G(y) \setminus \{x\}$.

O principal resultado de Favaron em [20] é o seguinte.

Teorema 4.2 (Favaron [20]) *Se G é um grafo, então as três sentenças seguintes são equivalentes.*

- (i) G é muito bem-coberto.
- (ii) G tem um emparelhamento perfeito e todo emparelhamento perfeito de G satisfaz a propriedade (P).
- (iii) G tem um emparelhamento perfeito que satisfaz a propriedade (P).

O Teorema 4.2 também implica que os grafos muito bem-cobertos podem ser reconhecidos por um algoritmo de complexidade polinomial de tempo.

O seguinte resultado de Berge [8] implica que o valor máximo possível do número de independência $\alpha(G)$ de um grafo bem-coberto G de ordem $n(G)$ sem um vértice isolado é $\frac{n(G)}{2}$; logo, os grafos muito bem-cobertos têm o número de independência máximo dentre os grafos bem-cobertos sem vértice isolado.

Teorema 4.3 (Berge [8]) *Se G é um grafo bem-coberto sem vértice isolado e I é um conjunto independente de G , então G tem um emparelhamento M tal que todo vértice de I é incidente a uma aresta em M .*

Estendemos estes dois resultados de duas maneiras diferentes.

Na Seção 4.2, estudamos a estrutura e o reconhecimento dos grafos bem-cobertos G sem vértice isolado que têm número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$, para algum inteiro não negativo k . Em outras palavras, consideramos grafos bem-cobertos cujo número de independência está perto do limite superior do resultado de Berge. Estendemos o teorema de Favaron nesta configuração. Para $k = 1$, apresentamos uma descrição estrutural completa destes grafos e para um k geral, porém fixo, descrevemos um algoritmo de reconhecimento de complexidade polinomial de tempo.

Na Seção 4.3, relaxamos as condições de bem-cobertura e consideramos grafos G sem vértice isolado para os quais o número de independência $\alpha(G)$ e o número de dominação independente $i(G)$ satisfazem $\alpha(G) - i(G) \leq k$, para algum inteiro k

não negativo. Como $\alpha(G)$ e $i(G)$ são a máxima e a mínima ordem de um conjunto independente maximal de G , respectivamente, um grafo G é bem-coberto exatamente se $\alpha(G) - i(G) = 0$. Provamos uma versão adequada do resultado de Berge para estes grafos, derivamos um limite superior sobre o número de independência como corolário e discutimos sua relação com a caracterização de Favaron.

4.2 Extensão dos resultados de Berge e Favaron sobre grafos bem-cobertos

Ao estendermos o teorema de Favaron para grafos bem-cobertos com número de independência grande, naturalmente obtemos a seguinte versão generalizada da propriedade (P) .

Propriedade (P_k)

Seja G um grafo com um emparelhamento M . Dizemos que M satisfaz a propriedade (P_k) se G não tem um conjunto independente X de ordem no máximo $2(k+1)$ para o qual há um conjunto N de $k+1$ arestas em M tal que todo vértice incidente a uma aresta em N tem um vizinho em X .

Em outras palavras, para um grafo G e um emparelhamento M , a propriedade (P_k) significa que no máximo k arestas de M não compartilham vértices com um conjunto independente maximal de G . Note que a propriedade (P) é equivalente à propriedade (P_0) . A propriedade (P_k) implica em um limite inferior sobre a ordem de conjuntos independentes maximais em termos de emparelhamentos de um dado grafo.

Lema 4.4 [12] *Se G é um grafo e M é um emparelhamento de G que satisfaz a propriedade (P_k) para algum inteiro não negativo k , então todo conjunto independente maximal de G intercepta todas as arestas de M , com exceção de no máximo k arestas.*

Prova. Por contradição, assumimos que I é um conjunto independente maximal de G tal que I não intercepta $k+1$ arestas $x_1y_1, \dots, x_{k+1}y_{k+1}$ de M . Claramente, todo vértice no conjunto $U = \{x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_{k+1}\}$ tem um vizinho em I . Selecionando um tal vizinho para cada vértice em U obtemos um subconjunto independente X de I de ordem no máximo $2(k+1)$, o qual contradiz a suposição que M satisfaz a propriedade (P_k) . \square

O resultado seguinte corresponde ao teorema de Favaron.

Teorema 4.5 [12] *Seja k um inteiro não negativo. Se G é um grafo sem um vértice isolado, então $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sendo as sentenças (i) , (ii) e (iii) as seguintes:*

- (i) G é bem-coberto e tem número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$.
- (ii) G tem um emparelhamento de tamanho $\frac{n(G)-k}{2}$ e todo emparelhamento de G de tamanho $\frac{n(G)-k}{2}$ satisfaz a propriedade (P_k) .
- (iii) G tem um emparelhamento de tamanho $\frac{n(G)-k}{2}$ que satisfaz a propriedade (P_k) .

Prova. (i) \Rightarrow (ii): Suponha que G satisfaz (i). Seja I um conjunto independente maximal de G . Pelo Teorema 4.3, o grafo G tem um emparelhamento M tal que todo vértice de I intercepta uma aresta em M . Note que $|M| = |I| = \frac{n(G)-k}{2}$.

Agora seja M um emparelhamento qualquer de G com $|M| = \frac{n(G)-k}{2}$. Denote por R o conjunto de vértices de G que não interceptam uma aresta em M . Note que $|R| = k$. Se M não satisfaz a propriedade (P_k) , então há um conjunto independente X de ordem no máximo $2(k+1)$ para o qual há um conjunto N de $k+1$ arestas em M tal que todo vértice que intercepta uma aresta em N tem um vizinho em X . Note que X não contém qualquer vértice que intercepta uma aresta em N . Se Y é um conjunto independente maximal de G que contém X , então Y não contém qualquer vértice que intercepta uma aresta em N . Além disso, Y intercepta toda aresta em $M \setminus N$ em no máximo um vértice. Isto implica em $|Y| \leq |M| - |N| + |R| = |M| - (k+1) + k = |M| - 1$. Como G é bem-coberto e tem número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$, obtemos $|M| > |Y| = \frac{n(G)-k}{2}$, o que é uma contradição.

(ii) \Rightarrow (iii): Esta prova é trivial. □

Na Figura 4.1, temos um exemplo de um grafo bem-coberto com $\alpha(G) = \frac{n(G)-3}{2} = 6$ com um emparelhamento M que satisfaz a propriedade (P_3) . Os vértices z_1, z_2 e z_3 não incidem sobre as arestas de M . É possível encontrar outros emparelhamentos em G , sendo que o emparelhamento máximo tem tamanho 7 e, neste caso, no máximo duas de suas arestas não possuem vértices em um conjunto independente maximal de G .

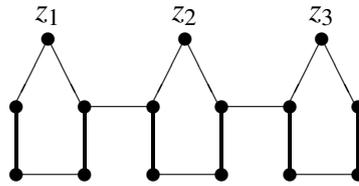


Figura 4.1: Um grafo bem-coberto G com $\alpha(G) = \frac{n(G)-3}{2}$ com um emparelhamento M que satisfaz a propriedade (P_3) .

Diferentemente do teorema de Favaron, o qual corresponde ao caso $k = 0$, a implicação (iii) \Rightarrow (i) não vale para um k geral. Por exemplo, o grafo C_6 tem um emparelhamento de tamanho 2 que satisfaz à propriedade (P_2) , porém não é um grafo bem-coberto. Note que, para $k = 0$, a implicação (iii) \Rightarrow (i) segue do Lema 4.4. Para $k \geq 1$, outras condições devem ser adicionadas a (iii) para garantir (i). No próximo resultado, determinamos estas condições adicionais explicitamente para o caso $k = 1$.

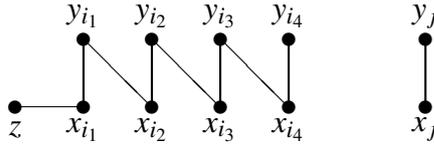


Figura 4.2: O caminho $x_{i_1}y_{i_1}x_{i_2}y_{i_2}x_{i_3}y_{i_3}x_{i_4}y_{i_4}$ é M -alternante e começa com a aresta $x_{i_1}y_{i_1}$ de M no vizinho x_{i_1} de z em I . Portanto, os vértices y_{i_1} , y_{i_2} , y_{i_3} e y_{i_4} pertencem a J . Se y_j não pertence a J , então x_j não é um vizinho de z em I e não há aresta entre um vértice em J e x_j .

Teorema 4.6 [12] Se G é um grafo de ordem $n(G)$ ímpar sem um vértice isolado, então as duas sentenças seguintes são equivalentes.

- (i) G é bem-coberto e tem número de independência $\frac{n(G)-1}{2}$.
- (ii) G tem um emparelhamento $M = \{x_1y_1, \dots, x_\alpha y_\alpha\}$ de tamanho α , onde $\alpha = \frac{n(G)-1}{2}$ tal que as seguintes condições são válidas, e z denota o único vértice de G que não intercepta uma aresta em M .
 - (a) $I = \{x_1, \dots, x_\alpha\}$ é independente.
 - (b) M satisfaz a propriedade (P_1) .
 - (c) Se $xy \in M$ e $u \in N_G(x) \cap N_G(y)$, então
 - * temos $u = z$ ou
 - * temos $z \notin N_G[u]$ e $N_G(z) \subseteq N_G(u)$.
 - (d) Se $xy \in M$, $v \in N_G(x) \setminus \{y\}$ e $w \in N_G(y) \setminus \{x\}$ são tais que v e w são distintos e não-adjacentes, então
 - * temos $z \in \{v, w\}$ ou
 - * temos $z \notin N_G[v] \cup N_G[w]$ e $N_G(z) \subseteq N_G(v) \cup N_G(w)$.
 - (e) Se J denota o conjunto de vértices em $\{y_1, \dots, y_\alpha\}$ que são alcançáveis sobre um caminho M -alternante começando com uma aresta de M em um vizinho de z em I , então J não é independente ou contém um vizinho de z . (Veja a Figura 4.2 para uma ilustração.)

Prova. (i) \Rightarrow (ii): Suponha que G satisfaz (i). Seja I um conjunto independente maximal de G . Pelo Teorema 4.3, o grafo G tem um emparelhamento M tal que todo vértice em I intercepta uma aresta em M . Note que $|M| = |I| = \frac{n(G)-k}{2}$. Sejam $I = \{x_1, \dots, x_\alpha\}$ e $M = \{x_1y_1, \dots, x_\alpha y_\alpha\}$. Pela construção, o conjunto I é independente e, pelo Teorema 4.5, o emparelhamento M satisfaz a propriedade (P_1) ; ou seja, (a) e (b) seguem.

Para provar (c), assumimos, por contradição, que $xy \in M$ e $u \in N_G(x) \cap N_G(y)$ são tais que $(u \neq z) \wedge ((z \in N_G[u]) \vee (N_G(z) \not\subseteq N_G(u)))$. Se $z \in N_G[u]$, então um conjunto independente maximal S de G que contém u , não contém nenhum dos três vértices x , y e z . Como S contém no máximo um vértice de cada das $\alpha - 1$ arestas em $M \setminus \{xy\}$ e u é um

destes vértices, isto implica na contradição $|S| \leq \alpha - 1 < \frac{n(G)-1}{2}$. Se $v \in N_G(z) \setminus N_G(u)$, então um conjunto independente maximal S de G que contém u e v , não contém nenhum dos três vértices x , y e z . Novamente S contém no máximo um vértice de cada uma das $\alpha - 1$ arestas em $M \setminus \{xy\}$ e u e v são dois destes vértices. Isto implica na contradição $|S| \leq \alpha - 1 < \frac{n(G)-1}{2}$ e completa a prova de (c). Como a prova de (d) é análoga à prova de (c), vamos proceder imediatamente para a prova de (e).

Seja J definido como em (e). Para uma contradição, assumimos que J é independente e não contém um vizinho de z . Pela possível renomeação dos vértices de M , assumimos que $J = \{y_1, \dots, y_k\}$. Seja $K = \{x_{k+1}, \dots, x_\alpha\}$. Pela definição de J , o conjunto K não contém vizinhos de z . Como K é um subconjunto de I , o conjunto K é independente. Se um vértice y_i em J é adjacente a um vértice x_j em K , então o vértice y_j é alcançável por um caminho M -alternante começando com uma aresta de M no vizinho de z em I , o que implica na contradição $y_j \in J$ para $j > k$. Logo, $J \cup K$ é um conjunto independente de G que não contém qualquer vizinho de z . Agora $J \cup K \cup \{z\}$ é um conjunto independente maximal de G de ordem $\frac{n(G)+1}{2}$, o que é uma contradição e completa a prova nesta direção.

(ii) \Rightarrow (i): Sejam G , M , I e J como em (ii). Seja S um conjunto independente maximal de G . Precisamos provar que S tem ordem exatamente $\frac{n(G)-1}{2}$. Por (b) e pelo Lema 4.4, o conjunto S intercepta todas as arestas de M , com exceção de no máximo k . Consideramos dois casos.

Caso 1 O conjunto S intercepta todas as arestas de M , com exceção de exatamente uma aresta, digamos xy .

Seja S_1 o conjunto dos vértices u em S com $u \in N_G(x) \cap N_G(y)$ e seja S_2 o conjunto de pares não ordenados $\{v, w\}$ de vértices distintos não adjacentes v e w em S com $v \in N_G(x) \setminus \{y\}$ e $w \in N_G(y) \setminus \{x\}$. Como S é um conjunto independente maximal que não contém x nem y , obtemos $|S_1| + |S_2| > 0$. Seja $T = S_1 \cup \left(\bigcup_{\{v,w\} \in S_2} \{v, w\} \right)$. Se $z \in T$, então $|S| = (|M| - 1) + 1 = \frac{n(G)-1}{2}$. Se $z \notin T$, então (c) e (d) implicam que $z \notin N_G[T]$ e $N_G(z) \subseteq N_G[T]$; ou seja, z é um vértice isolado do subgrafo induzido por $V(G) \setminus N_G[T]$. Já que S é um conjunto independente maximal, isto implica que z pertence a S e obtemos novamente $|S| = \frac{n(G)-1}{2}$. De modo geral, todos os conjuntos independentes maximais de G que interceptam todas as arestas de M , com exceção de uma aresta, têm a mesma ordem $\frac{n(G)-1}{2}$.

Caso 2 O conjunto S intercepta todas as arestas de M .

Note que $\frac{n(G)-1}{2} \leq |S| \leq \frac{n(G)+1}{2}$. Para uma contradição, assumimos que $|S| = \frac{n(G)+1}{2}$. Isto implica que S contém z e, portanto, nenhum vizinho de z .

Se $x_{i_1}y_{i_1}x_{i_2}y_{i_2} \dots x_{i_\ell}y_{i_\ell}$ é um caminho M -alternante começando com a aresta $x_{i_1}y_{i_1}$ de M no vizinho x_{i_1} de z em I , então, como S intercepta todas as arestas de M , o

conjunto S contém os vértices $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_\ell}$. Pela definição de J , isto implica que J é um subconjunto de S , o que leva a uma contradição sobre (e) . Isto completa a prova. \square

Na Figura 4.3, há um exemplo de um grafo G bem-coberto com $n(G) = 15$ e $\alpha(G) = \frac{n(G)-1}{2}$. O grafo G tem um emparelhamento M que satisfaz a propriedade (P_1) e z é o único vértice que não intercepta uma aresta de M .

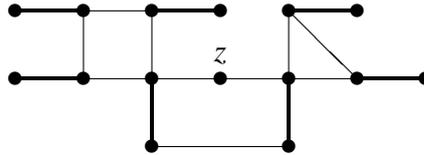


Figura 4.3: Um grafo bem-coberto G com $\alpha(G) = \frac{n(G)-1}{2}$ com um emparelhamento M que satisfaz a propriedade (P_1) .

Em vista das complicações já expostas no caso $k = 1$, é improvável que o Teorema 4.6 estenda de uma forma simples para valores maiores de k . No entanto, o Teorema 4.5 produz estrutura suficiente para desenvolver um algoritmo eficiente para o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos sem vértice isolado, com número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$, para um k fixo.

Na prova do Teorema 4.7, formamos uma instância de um problema de *satisfatibilidade Booleana* (SAT). Variáveis que podem assumir um dos valores VERDADEIRO e FALSO são chamadas de *variáveis Booleanas*. Os operadores Booleanos E e OU são representados por (\vee) e (\wedge) , respectivamente; se x é uma variável \bar{x} é a sua negação. Uma fórmula Booleana é *satisfatível* se alguma associação de valores às variáveis torna a fórmula VERDADEIRA. O problema de satisfatibilidade Booleana consiste em testar se a fórmula Booleana é satisfatível.

O problema 2SAT (2-satisfatibilidade) é um caso especial de SAT em que as fórmulas estão na forma normal conjuntiva, isto é, elas são a conjunção (\vee) de cláusulas, onde cada cláusula é uma disjunção (\wedge) de duas variáveis.

BEM-COBERTO_k

Entrada: Um grafo G sem um vértice isolado.

Questão: Decidir se G é bem-coberto e tem número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$.

Teorema 4.7 Para um inteiro fixo e não negativo k , há um algoritmo de complexidade polinomial de tempo que resolve BEM-COBERTO_k.

Prova. Descrevemos um algoritmo eficiente para BEM-COBERTO_k. Seja G uma instância do problema. Em tempo polinomial, determinamos um conjunto independente maximal arbitrário I de G . Se I não tem ordem $\frac{n(G)-k}{2}$, então retornamos “Não” e paramos.

Caso contrário, em tempo polinomial, determinamos um emparelhamento máximo M do subgrafo bipartido de G formado pelas arestas de G entre I e $V(G) \setminus I$. Se M não tem ordem $\frac{n(G)-k}{2}$, então retornamos “Não” e paramos, que é a correta conclusão, em vista do Teorema 4.3. Caso contrário, pela consideração de todos os conjuntos X com no máximo $2(k+1)$ vértices de G , podemos determinar, em tempo polinomial, quando M satisfaz a propriedade (P_k) . Se M não satisfaz a propriedade (P_k) , então retornamos “Não”, que é a correta conclusão, em vista do Teorema 4.5 (ii). De agora em diante assumimos que M satisfaz a propriedade (P_k) .

Sejam $I = \{x_1, \dots, x_\alpha\}$ e $M = \{x_1y_1, \dots, x_\alpha y_\alpha\}$ onde $\alpha = \frac{n(G)-k}{2}$. Seja $R = \{z_1, \dots, z_k\}$ o conjunto de vértices de G que não interceptam uma aresta de M . Note que, pelo Lema 4.4, todo conjunto independente maximal de G intercepta todas as arestas de M , com exceção de no máximo k arestas.

Para cada (S, N) , onde S é um subconjunto independente de R e N é um subconjunto de M com $|N| \leq k$, explicaremos como decidir, em tempo polinomial, quando G tem um conjunto independente maximal $I(S, N)$ tal que

- $I(S, N)$ intercepta R exatamente em S ,
- $I(S, N)$ intercepta todas as arestas em $M \setminus N$ e
- $I(S, N)$ não intercepta qualquer aresta em N .

Note que $I(S, N)$ tem ordem exatamente $|M| - |N| + |S|$. Como há $O(n(G)^{2k})$ escolhas para o par (S, N) e todo conjunto independente maximal I de G tem a mesma ordem que algum conjunto $I(S, N)$, isto permite determinar todos os tamanhos de conjuntos independentes maximais de G ; ou seja, permite resolver BEM-COBERTO $_k$ para G . Se um conjunto com as propriedades desejadas não existe, então deixamos $I(S, N)$ indefinido.

Seja (S, N) um par como acima. Pela possível renomeação dos vértices, assumimos que $S = \{z_1, \dots, z_s\}$ e $N = \{x_1y_1, \dots, x_t y_t\}$. Seja $T = (\{z_{s+1}, \dots, z_k\} \cup \{x_1, y_1, \dots, x_t, y_t\}) \setminus N_G[S]$, ou seja, T contém todos os vértices que não estão em um conjunto independente maximal $I(S, N)$ de G e que também não possuem vizinhos em S . Seja $U = \{x_{t+1}, y_{t+1}, \dots, x_\alpha, y_\alpha\}$. Se algum vértice em T não tem vizinho em U , então um conjunto independente maximal $I(S, N)$ não existe. Logo, assumimos que todo vértice em T tem um vizinho em U . Note que $|T| \leq |R \setminus S| + 2|N| = (k - s) + 2t \leq k + 2k = 3k$. Seja o subconjunto T' de U obtido pela seleção de um vizinho em U para cada vértice em T . Note que há no máximo $O(n(G)^{3k})$ escolhas para T' . Formamos uma instância $C(S, N, T')$ do problema 2SAT como segue.

- Para cada i com $t + 1 \leq i \leq \alpha$,
 - se x_i está em T' ou y_i tem um vizinho em S , então adicione a cláusula x_i a $C(S, N, T')$ e

- se y_i está em T' ou x_i tem um vizinho em S , então adicione a cláusula \bar{x}_i a $\mathcal{C}(S, N, T')$.
- Para cada i e j com $t + 1 \leq i, j \leq \alpha$ e $i \neq j$,
 - se $x_i y_j$ é uma aresta de G , então adicione a cláusula $\bar{x}_i \vee x_j$ to $\mathcal{C}(S, N, T')$ e
 - se $y_i y_j$ é uma aresta de G , então adicione a cláusula $x_i \vee x_j$ to $\mathcal{C}(S, N, T')$.

Veja a Figura 4.4 para um exemplo.

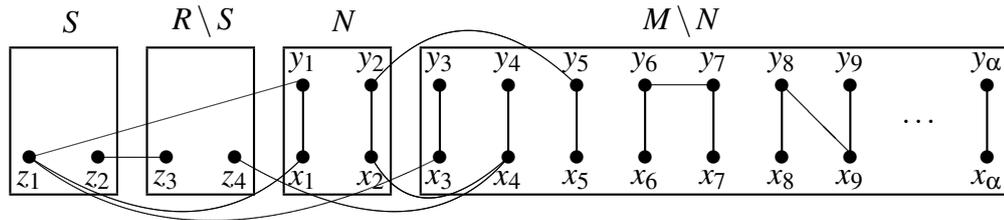


Figura 4.4: Por causa da aresta $z_1 x_3$, $\mathcal{C}(S, N, T')$ contém a cláusula \bar{x}_3 . Por causa das arestas $z_2 z_3$, $z_1 x_1$ e $z_1 y_1$, o conjunto T' não precisa conter vizinhos dos vértices z_3 , x_1 e y_1 . Por causa das arestas $z_4 x_4$ e $x_2 x_4$, o conjunto T' poderia conter x_4 como um vizinho de z_4 e x_2 . De forma similar, por causa da aresta $y_2 y_5$, o conjunto T' poderia conter y_5 como um vizinho de y_2 . Se $x_4, y_5 \in T'$, então $\mathcal{C}(S, N, T')$ contém as cláusulas x_4 e \bar{x}_5 . Por causa da aresta $y_6 y_7$, $\mathcal{C}(S, N, T')$ contém a cláusula $x_6 \vee x_7$. Por causa da aresta $y_8 x_9$, $\mathcal{C}(S, N, T')$ contém a cláusula $x_8 \vee \bar{x}_9$.

Uma atribuição satisfável para $\mathcal{C}(S, N, T')$ corresponde a um subconjunto independente de U que intercepta cada uma das arestas em $M \setminus N$ que contém todos os vértices em T' e nenhum vizinho de um vértice em S . Isto implica que um conjunto independente maximal $I(S, N)$ com $T' \subseteq I(S, N)$ existe se, e somente se, $\mathcal{C}(S, N, T')$ é satisfável. Logo, um conjunto independente maximal $I(S, N)$ existe se, e somente se, entre as $O(n(G)^{3k})$ escolhas para T' , há pelo menos uma para o qual $\mathcal{C}(S, N, T')$ é satisfável. Como precisamos considerar $O(n(G)^{3k})$ instâncias de 2SAT, cada uma delas pode ser resolvida em tempo polinomial, podemos decidir a existência de $I(S, N)$ em tempo polinomial. Como explicado acima, isto completa a prova. \square

Note que os grafos bem-cobertos G cujo número de independência é no máximo um inteiro fixo dado k , podem ser reconhecidos em tempo polinomial considerando todos os $O(n(G)^{k+1})$ conjuntos de no máximo $k + 1$ vértices de G .

4.3 Grafos G com $\alpha(G) - i(G) \leq k$

Para um inteiro fixo não negativo k , denotamos por $\mathcal{G}(k)$ a classe de todos os grafos G sem um vértice isolado e com $\alpha(G) - i(G) = k$.

Os seguintes dois resultados mostram que uma versão do teorema de Berge também é válida para $\mathcal{G}(k)$.

Lema 4.8 [12] *Seja $G \in \mathcal{G}(k)$. Se I é um conjunto independente maximal de G e J é um conjunto independente de G que é disjunto de I , então há vértices distintos u_1, \dots, u_p em I e uma partição J_1, \dots, J_p de J em conjuntos de ordem no máximo $k+1$ tal que $J_i \subseteq N_G(u_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.*

Prova. Seja A um subconjunto não vazio de J . Como $(I \setminus N_G(A)) \cup A$ é um conjunto independente de G e $G \in \mathcal{G}(k)$, obtemos $|I| + k \geq \alpha(G) \geq |I| - |N_G(A)| + |A|$, o que implica $|N_G(A)| \geq |A| - k$. Como $|A| \geq 1$ e I é independente maximal, temos $|N_G(A)| \geq 1$. Isto implica em $\frac{|N_G(A)|}{|A|} \geq \max \left\{ \frac{1}{|A|}, 1 - \frac{k}{|A|} \right\}$. Já que a função $x \mapsto \frac{1}{x}$ é decrescente em x , a função $x \mapsto 1 - \frac{k}{x}$ é crescente em x , e como ambas as funções produzem o mesmo valor para $x = k+1$, obtemos que $|N_G(A)| \geq \frac{1}{k+1}|A|$. Substituindo cada vértice u em I por um conjunto independente I_u de ordem $k+1$ de modo que todo vértice em I_u tenha exatamente os mesmos vizinhos que u , aplicando o teorema de Hall para obter um emparelhamento entre J e $\bigcup_{u \in I} I_u$ que satura J , e contraindo todos os vértices em I_u para um simples vértice de cada vértice u em I , produz-se a sentença desejada. \square

Teorema 4.9 [12] *Seja $G \in \mathcal{G}(k)$. Se J é um conjunto independente de G , então há vértices distintos u_1, \dots, u_p em $V(G) \setminus J$ e uma partição J_1, \dots, J_p de J em conjuntos de ordem no máximo $k+1$ tais que $J_i \subseteq N_G(u_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.*

Prova. A prova é por indução na ordem de J . Se J tem no máximo um elemento, então a sentença segue, porque G não tem vértice isolado. Agora consideremos que J contém pelo menos dois vértices. Seja $v \in J$. Seja I um conjunto independente maximal de G que contém um vizinho de v . Sejam $J' = J \setminus I$ e $J'' = J \cap I$. Já que $v \notin I$, o conjunto J'' é um subconjunto próprio de J . Aplicando o Lema 4.8 para I e J' implica a existência de vértices distintos u'_1, \dots, u'_p em I e uma partição J'_1, \dots, J'_p de J' em conjuntos de ordem no máximo $k+1$ tais que $J'_i \subseteq N_G(u'_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Pela indução aplicada ao conjunto J'' , há vértices distintos u''_1, \dots, u''_q em $V(G) \setminus J''$ e uma partição J''_1, \dots, J''_q de J'' em conjuntos de ordem no máximo $k+1$ tais que $J''_i \subseteq N_G(u''_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Como I é independente, temos $u''_1, \dots, u''_q \notin I$; ou seja, os $p+q$ vértices $u'_1, \dots, u'_p, u''_1, \dots, u''_q$ são todos distintos e a sentença desejada segue. \square

Note que para $k = 0$, o Lema 4.8 e o Teorema 4.9 levam à existência de certos emparelhamentos.

Vimos que o resultado de Berge implica em um limitante superior do número de independência de grafos bem-cobertos sem um vértice isolado. Como mostramos agora, o Teorema 4.9 tem uma consequência similar.

Corolário 4.10 [12] *Se $G \in \mathcal{G}(k)$, então*

$$\alpha(G) \leq \frac{k+1}{k+2}n(G). \quad (4-1)$$

Além disso, se $k \geq 1$, então a igualdade segue em (4-1) se, e somente se, G é obtido anexando-se $k+1$ vértices de grau 1 a cada vértice de uma clique de ordem $\frac{n(G)}{k+2}$.

Prova. Seja I um conjunto independente máximo de G . Seja $R = V(G) \setminus I$. Pelo Teorema 4.9, há vértices distintos u_1, \dots, u_p em R e uma partição I_1, \dots, I_p de I em conjuntos de ordem no máximo $k+1$ tais que $I_i \subseteq N_G(u_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Agora

$$(k+1)(n(G) - \alpha(G)) = (k+1)|R| \geq (k+1)p \geq \sum_{i=1}^p |I_i| = \alpha(G),$$

o qual imediatamente implica (4-1).

Agora, seja $k \geq 1$ e seja (4-1) satisfeita com igualdade. Isto implica em

$$(k+1)|R| = (k+1)p = \sum_{i=1}^p |I_i|$$

e portanto, $R = \{u_1, \dots, u_p\}$ e que $|I_i| = k+1$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Seja S um conjunto independente maximal de $G[R]$. Assumimos que $S = \{u_1, \dots, u_q\}$ para algum $q \leq p$. Seja J um conjunto independente maximal de G que contém S . Pela escolha de S , o conjunto J é um subconjunto de $S \cup (I \setminus (\bigcup_{i=1}^q I_i))$. Logo, $|J| \leq q + |I| - (k+1)q = \alpha(G) - kq$. Como $G \in \mathcal{G}(k)$, isto implica que $q = 1$ e que $J = \{u_1\} \cup (I \setminus I_1)$. Como S era um conjunto independente maximal arbitrário de $G[R]$, segue que $G[R]$ é completo e que todo vértice em I tem exatamente um vizinho em R , o que completa a prova. \square

4.4 Mais algumas considerações

Estendemos os resultados de Berge e Favaron de duas maneiras diferentes. Consideramos grafos bem-cobertos com número de independência perto do limite superior do resultado de Berge.

Provamos uma versão do resultado de Berge para grafos que satisfazem $\alpha(G) - i(G) \leq k$ para algum inteiro k não negativo. Derivamos um limite superior sobre o número de independência como corolário e discutimos sua relação com a caracterização de Favaron.

A estrutura muito restrita dos grafos extremos para (4-1) segue somente para $k \geq 1$. Para $k = 0$, que é o caso tratado para grafos muito bem-cobertos, os argumentos acima somente implicam que os grafos extremos para (4-1) tem um emparelhamento perfeito. A condição estrutural adicional que precisa ser imposta neste emparelhamento perfeito para caracterizar os grafos muito bem-cobertos é exatamente a propriedade (P) de Favaron. O Corolário 4.10 imediatamente implica que para $k \geq 1$, os grafos extremos para (4-1) que pertencem a $\mathcal{G}(k)$ podem ser reconhecidos por algoritmos de complexidade polinomial de tempo.

Além disso, observamos que os grafos extremos para (4-1) são grafos G que possuem apenas dois tamanhos de conjuntos independentes maximais, $\alpha(G)$ e $i(G) = \alpha(G) - k + 1$, e, portanto, formam uma subclasse de \mathcal{M}_2 . Se $k = 2$, então eles também pertencem a I_2 .

PRODUTOS COMPLEMENTARES

5.1 Introdução

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre produtos complementares. Os produtos complementares foram introduzidos por Haynes et al. [33]. Prismas complementares e produtos Cartesianos são tipos específicos de produtos complementares. Estes produtos foram previamente definidos e exemplificados na Seção 2.3.

Na Seção 5.2, mostramos que para um grafo fixo conexo H e um subconjunto fixo, não vazio e próprio S de seus vértices, pode ser decidido por um algoritmo de complexidade polinomial de tempo se, para um dado grafo F , há um grafo G tal que F é isomorfo a $G(V(G)) \square H(S)$. Além disso, se tal grafo G existe, então este grafo pode ser encontrado por um algoritmo de complexidade polinomial de tempo. O reconhecimento dos prismas complementares é um caso especial do algoritmo. Estes resultados dão uma resposta positiva a uma questão proposta por Haynes et al. [33].

Na Seção 5.3, são apresentados alguns resultados sobre prismas complementares bem-cobertos. Apresentamos uma caracterização não estrutural para os prismas complementares bem-cobertos e mostramos que se $G\bar{G}$ é bem-coberto e G não é bem-coberto, então G tem somente dois tamanhos de conjuntos independentes maximais que são consecutivos. Apresentamos outros resultados sobre prismas complementares bem-cobertos e também um limite para o número de conjuntos independentes maximais em função do número de conjuntos de G e de \bar{G} .

Na Seção 5.4, apresentamos resultados sobre as grades cilíndricas, que são o produto Cartesiano de um grafo caminho P_n com um ciclo C_m . Mostramos um método para obtenção de conjuntos independentes maximais em grades cilíndricas e um limite inferior para a quantidade de conjuntos independentes maximais nestes grafos.

5.2 O reconhecimento de alguns produtos complementares

Haynes et al. em [33] questionam se os prismas complementares podem ser reconhecidos por algoritmos de complexidade polinomial de tempo. Foi dada uma resposta positiva para esta questão. Para um grafo fixo H e um subconjunto fixo S de seus vértices, foi considerado o seguinte problema mais geral, que contempla o reconhecimento dos prismas complementares como um caso especial.

PRODUTO COMPLEMENTAR COM $H(S)$

Instância: Grafos F e H e $S \subseteq (V(H))$.

Questão: Determinar se há um grafo G tal que F é isomorfo a $G(V(G)) \square H(S)$ e determinar tal grafo, se ele existe.

Provamos o resultado seguinte.

Teorema 5.1 [11] *Para um grafo fixo conexo H e um subconjunto próprio não vazio e fixo S de seu conjunto de vértices, o PRODUTO COMPLEMENTAR COM $H(S)$ pode ser resolvido por algoritmo de complexidade polinomial de tempo.*

É conveniente repetir aqui os resultados relacionados às questões de complexidade sobre o produto Cartesiano. Sabidussi [49] e Vizing [55] mostram que todo grafo conexo tem uma fatoração em fatores primos com relação ao produto Cartesiano que é única a menos da permutação dos fatores. Um primeiro algoritmo de complexidade polinomial de tempo para determinar esta fatoração é proposto por Feigenbaum et al. [22]. Consideráveis simplificações de tempo de execução e melhoramentos são obtidos por Winkler [57], Feder [21] e Aurenhammer et al. [1], culminando em um algoritmo de tempo linear apresentado por Imrich et al. [37]. Para grafos desconexos, fatorações relativas ao produto Cartesiano é pelo menos tão difícil quanto o problema de isomorfismo. Para um excelente levantamento, sugerimos [28].

Em vista de PRODUTO COMPLEMENTAR COM $H(S)$ e o Teorema 5.1, as discussões acima têm várias implicações. Se $S \in \{\emptyset, V(H)\}$, então o produto complementar $G(V(G)) \square H(S)$ se reduz ao produto Cartesiano. Portanto, requerer que S seja um subconjunto próprio e não vazio de vértices de H é uma restrição razoável. Se $H = \overline{K}_2$ e $|S| = 1$, então um algoritmo de tempo polinomial para PRODUTO COMPLEMENTAR COM $H(S)$ levaria a um algoritmo de tempo polinomial para o problema de isomorfismo. De fato, dados dois grafos G_1 e G_2 , eles são isomorfos se, e somente se, $G_1 \cup \overline{G}_2$ é da forma $G(V(G)) \square \overline{K}_2(S)$ com $|S| = 1$. Logo, faz sentido requerer que H seja conexo.

Para provar o Teorema 5.1, descrevemos um algoritmo eficiente correspondente. Até o restante desta seção, consideramos:

- H um grafo fixo e conexo,
- S um subconjunto próprio, fixo e não vazio dos vértices de H ,
- $V(H) = \{v_1, \dots, v_h\}$,
- $S = \{v_1, \dots, v_s\}$,
- $\bar{S} = V(H) \setminus S$ e
- $v_s v_{s+1}$ é uma aresta de H (já que H é conexo).

Seja o grafo F uma instância de PRODUTO COMPLEMENTAR COM $H(S)$. Nossa abordagem é assumir que F é igual a $G(V(G)) \square H(S)$ para algum grafo G e tentar reconstruir eficientemente G tendo um esforço polinomial para cada uma de um número polinomial de soluções parciais.

Seja $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, a i -ésima linha de $G(V(G)) \square H(S)$ é o subgrafo de $G(V(G)) \square H(S)$ induzido por $\{u_i\} \times V(H)$, que é isomorfo a H . De forma similar, para $j \in \{1, \dots, h\}$, a j -ésima coluna de $G(V(G)) \square H(S)$ é o subgrafo de $G(V(G)) \square H(S)$ induzido por $V(G) \times \{v_j\}$, que é isomorfo a G se $j \in \{1, \dots, s\}$ e a \bar{G} se $j \in \{s+1, \dots, h\}$. Uma aresta de $G(V(G)) \square H(S)$ entre vértices em diferentes linhas é *vértical* e uma aresta de $G(V(G)) \square H(S)$ entre vértices em diferentes colunas é *horizontal*. Seja $w(i, j) = (u_i, v_j)$. Veja a Figura 5.1 para uma ilustração da forma geral do grafo $G(V(G)) \square H(S)$.

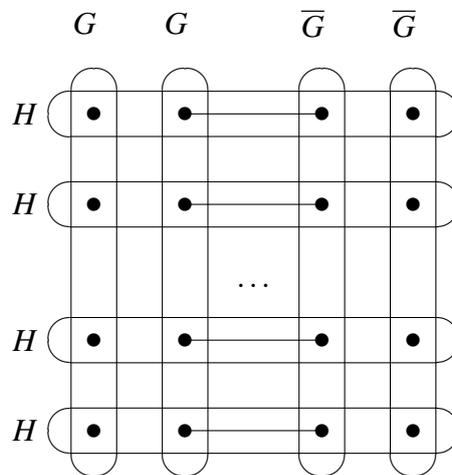


Figura 5.1: Forma geral do grafo $G(V(G)) \square H(S)$.

Para solucionar PRODUTO COMPLEMENTAR COM $H(S)$ para F precisamos identificar os vértices de F que correspondem a $w(i, j)$, para cada $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, h\}$, ou descobrir que nenhuma identificação conduz à fatoração desejada. Dizemos que um vértice de F foi *identificado*, uma vez que nós decidimos qual vértice $w(i, j)$ corresponde a ele.

Ao expormos o algoritmo, ilustramos a informação extraída até um certo ponto utilizando tabelas retangulares como nas Figuras 5.2 a 5.5. As linhas e colunas destas tabelas correspondem às linhas e às colunas de $G(V(G)) \square H(S)$ e cada entrada é inicialmente preenchida com um “?”. Quando um vértice de F é identificado como correspondente a algum $w(i, j)$, substituímos o “?” na linha i e coluna j por “ $w(i, j)$ ”.

O algoritmo procede ao longo dos passos seguintes.

- Determinamos quais dos h vértices de F correspondem à primeira linha $(w(1, 1), \dots, w(1, h))$.
Claramente há $O(n^{O(h)})$ escolhas para tais vértices.
- Identificamos todos os vizinhos dos vértices na primeira linha que estão nas linhas 2 até n .
Este passo requer tempo $O(n^{O(h)})$.
- Se um vértice de F que ainda não foi identificado tem pelo menos dois vizinhos identificados em uma mesma coluna, então ele deve estar nesta coluna. Iterativamente os vértices são identificados até que cada vértice não identificado tenha no máximo um vizinho identificado em cada coluna. Até este momento, todos, com exceção de $O(h)$ vértices que estão ou nas primeiras s colunas ou nas últimas $h - s$ colunas, foram identificados.
Este passo requer tempo $O(n^{O(h)})$.
- Até este ponto assumimos, por simetria, que todos, com exceção de $O(h)$ vértices nas últimas $h - s$ colunas, foram identificados. Estes $O(h)$ vértices são identificados através das possíveis escolhas.
Claramente, há $O(n^{O(h)})$ tais escolhas.
- Agora, podemos assumir que todos os vértices nas últimas $h - s$ colunas foram identificados. Para simplicidade da exposição, descartamos todo o conhecimento sobre os vértices identificados nas primeiras s colunas.
- Para cada conjunto de vértices U de um componente conexo de G , identificamos o conjunto correspondente $U \times V(H)$ de vértices de F . Escolhemos as s entradas não identificadas de alguma linha correspondente para U e então identificamos todos os vértices em $U \times V(H)$.
Há $O(|U|^{O(h)})$ tais escolhas e para cada escolha gastamos tempo $O(|U|^{O(h)})$.

Note que há três níveis de escolhas no algoritmo e temos que considerar todas as $O(n^{O(h)}) \cdot O(n^{O(h)}) \cdot O(n^{O(h)}) = O(n^{O(h)})$ combinações de escolhas. Para cada tal combinação de escolhas, gastamos tempo $O(n^{O(h)})$. Ao todo, estes passos levam a um algoritmo de tempo de execução polinomial. A corretude do algoritmo segue do fato de que todas as possibilidades de escolhas foram consideradas e, ou a solução parcial é completada com sucesso, ou é decidido que é impossível completar tal solução. Para a detalhada exposição abaixo, assumimos que todo passo é bem-sucedido. Se algo em

algum passo der errado, então a combinação correspondente de escolhas não pode levar a uma solução.

Enquanto fixamos a ordem das colunas, podemos arbitrariamente permutar linhas que correspondem aos automorfismos de G .

5.2.1 Escolha da primeira linha

Consideramos todos os candidatos para a h -tupla de vértices

$$(w(1, 1), \dots, w(1, h))$$

que formam a primeira linha. Note que cada candidato é uma h -tupla (x_1, \dots, x_h) cujas entradas são vértices distintos de F tal que $V(H) \rightarrow \{x_1, \dots, x_h\} : v_j \mapsto x_j$ define um isomorfismo entre H e $F[\{x_1, \dots, x_h\}]$. Logo, há $O(n^h)$ candidatos.

5.2.2 Identificação dos vizinhos da primeira linha

Assumimos agora que já identificamos todos os vértices de F na primeira linha.

Para $j \in \{1, \dots, h\}$, seja

$$N_j = N_F(w(1, j)) \setminus \{w(1, 1), \dots, w(1, h)\}.$$

Pela definição do produto complementar, o conjunto N_j contém todos os vizinhos de $w(1, j)$ na coluna j . Pela permutação das linhas, assumimos que há algum $r_2 \in \{1, \dots, n-1\}$ com

$$N_j = \begin{cases} \{w(2, j), \dots, w(1+r_2, j)\}, & \text{se } j \in \{1, \dots, s\} \\ \{w(2+r_2, j), \dots, w(n, j)\}, & \text{se } j \in \{s+1, \dots, h\}. \end{cases}$$

Seja

$$R = V(F) \setminus (\{w(1, 1), \dots, w(1, h)\} \cup N_1 \cup \dots \cup N_h).$$

Ou seja, o número r_2 indica quantas linhas da tabela foram preenchidas com vizinhos dos vértices em $\{(1, 1) \dots, (1, s)\}$. Os vizinhos dos vértices em $\{(1, s+1) \dots, (1, h)\}$ estão nas $n-1-r_2$ linhas restantes, já que todos os vértices na primeira linha já foram identificados. O conjunto R contém os vértices que até o momento ainda não foram identificados.

A Figura 5.2 ilustra o conhecimento atual sobre $G(V(G)) \square H(S)$. Todos os elementos na primeira linha já foram identificados. Além disso, para as primeiras s colunas, já está determinado o conjunto contendo todos os vértices nas linhas 2 até $1+r_2$ e para as últimas $h-s$ colunas, também já está determinado o conjunto contendo todos os vértices nas linhas $2+r_2$ até n . Os $nh - h - |N_1| - \dots - |N_h|$ vértices em R ainda não

foram representados na figura. Um ponto de interrogação indica que não sabemos quais vértices de R pertencem à área correspondente.

$w(1,1)$	$w(1,2)$	\dots	$w(1,s)$	$w(1,s+1)$	$w(1,s+2)$	\dots	$w(1,h)$
N_1	N_2	\dots	N_s	?	?	?	?
?	?	?	?	N_{s+1}	N_{s+2}	\dots	N_h

Figura 5.2: *Conhecimento atual sobre $G(V(G)) \square H(S)$.*

Como H é conexo, os dois números

$$s_0 = \min\{|U| : U \subseteq V(H) \text{ e } H[S \cup U] \text{ é conexo}\} \text{ e}$$

$$\bar{s}_0 = \min\{|\bar{U}| : \bar{U} \subseteq V(H) \text{ e } H[\bar{S} \cup \bar{U}] \text{ é conexo}\}$$

são bem-definidos.

Lema 5.2 [11] *Se $x_j \in N_j$ para $j \in \{1, \dots, s\}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, então os vértices x_1, \dots, x_s pertencem à i -ésima linha, ou seja,*

$$(x_1, \dots, x_s) = (w(i,1), \dots, w(i,s))$$

se e somente se há um conjunto $\{x_{s+1}, \dots, x_{s+s_0}\}$ de s_0 vértices em R tal que $F[\{x_1, \dots, x_{s+s_0}\}]$ é conexo.

Prova. Se todos os vértices x_1, \dots, x_s pertencem à i -ésima linha, então o conjunto de s_0 vértices na i -ésima linha correspondente ao conjunto U na definição de s_0 tem a propriedade desejada pela definição de s_0 .

Reciprocamente, seja o conjunto $\{x_{s+1}, \dots, x_{s+s_0}\}$ de s_0 vértices em R tal que $F[\{x_1, \dots, x_{s+s_0}\}]$ é conexo. Para $j \in \{1, \dots, s+s_0\}$, seja x'_j o vértice na primeira linha e na mesma coluna que x_j , ou seja, x'_j é a projeção de x_j na primeira linha. Pela definição do produto complementar e como $F[\{x_1, \dots, x_{s+s_0}\}]$ é conexo, segue que $F[\{x'_1, \dots, x'_{s+s_0}\}]$ é conexo. Note que $x'_j = w(1, j)$ para $j \in \{1, \dots, h\}$. Como todos os vértices x'_j pertencem à primeira linha, o que induz uma cópia de H , a definição de s_0 implica que $\{x'_1, \dots, x'_{s+s_0}\}$ contém $s+s_0$ vértices, ou seja, quaisquer dois vértices em $\{x_1, \dots, x_{s+s_0}\}$ não estão na mesma coluna. Como $F[\{x_1, \dots, x_{s+s_0}\}]$ é conexo, isto implica que quaisquer dois vértices em $\{x_1, \dots, x_{s+s_0}\}$ não estão em diferentes linhas. \square

Uma declaração simétrica relaciona as últimas $h - s$ colunas.

Lema 5.3 [11] *Se $x_j \in N_j$ para $j \in \{s+1, \dots, h\}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, então todos os vértices x_{s+1}, \dots, x_n pertencem à i -ésima linha, ou seja,*

$$(x_{s+1}, \dots, x_h) = (w(i, s+1), \dots, w(i, h))$$

se, e somente se, há um conjunto $\{x_1, \dots, x_{\bar{s}_0}\}$ de \bar{s}_0 vértices em R tais que $F[\{x_1, \dots, x_{\bar{s}_0}\} \cup \{x_{s+1}, \dots, x_h\}]$ é conexo.

Pela utilização dos Lemas 5.2 e 5.3 podemos identificar em tempo polinomial todos os vértices em $N_1 \cup \dots \cup N_h$.

O conhecimento adicional correspondente está ilustrado na Figura 5.3.

$w(1,1)$	$w(1,2)$	\dots	$w(1,s)$	$w(1,s+1)$	$w(1,s+2)$	\dots	$w(1,h)$
$w(2,1)$	$w(2,2)$	\dots	$w(2,s)$?	?	?	?
$w(3,1)$	$w(3,2)$	\dots	$w(3,s)$?	?	?	?
\vdots	\vdots	\dots	\vdots	?	?	?	?
$w(1+r_2,1)$	$w(1+r_2,2)$	\dots	$w(1+r_2,s)$?	?	?	?
?	?	?	?	$w(2+r_2,s+1)$	$w(2+r_2,s+2)$	\dots	$w(2+r_2,h)$
?	?	?	?	$w(3+r_2,s+1)$	$w(3+r_2,s+2)$	\dots	$w(3+r_2,h)$
?	?	?	?	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
?	?	?	?	$w(n,s+1)$	$w(n,s+2)$	\dots	$w(n,h)$

Figura 5.3: Todos os elementos de $N_1 \cup \dots \cup N_h$ foram identificados. A questão preenche a mesma área da Figura 5.2.

5.2.3 Identificação dos vértices com muitos vizinhos em partes conhecidas de uma coluna

Em vista da Subseção 5.2.2, podemos assumir a existência de três inteiros não negativos, r_1 , r_2 e r_3 , com $r_1 \geq 1$ e $n = r_1 + r_2 + r_3$, tais que temos identificado todos os vértices $w(i, j)$ com

- $i \in \{1, \dots, r_1\}$ e $j \in \{1, \dots, h\}$, ou
- $i \in \{r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2\}$ e $j \in \{1, \dots, s\}$, ou
- $i \in \{r_1 + r_2 + 1, \dots, n\}$ e $j \in \{s+1, \dots, h\}$.

A Figura 5.3 corresponde a uma situação com $r_1 = 1$.

Seja R o conjunto de vértices de F que ainda não foram identificados, isto é,

$$R = \{(w(i, j)) : i \in \{r_1 + r_2 + 1, \dots, n\} \text{ e } j \in \{1, \dots, s\}\} \cup \{(w(i, j)) : i \in \{r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2\} \text{ e } j \in \{s+1, \dots, h\}\}.$$

Se para algum $j \in \{1, \dots, s\}$, algum vértice x_j em R tem pelo menos dois vizinhos em

$$\{w(1, j), \dots, w(r_1 + r_2, j)\},$$

então x_j deve estar na j -ésima coluna. Como as primeiras s colunas induzem grafos isomorfos, há, de fato, $s - 1$ outros vértices $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_s$ em R tais que para cada $i \in \{1, \dots, r_1 + r_2\}$ e cada $j' \in \{1, \dots, s\} \setminus \{j\}$, o vértice $w(i, j)$ é um vizinho de x_j se, e somente se, $w(i, j')$ é um vizinho de $x_{j'}$.

Lema 5.4 [11] *Se x_1, \dots, x_s são vértices em R , tais que para cada $j \in \{1, \dots, s\}$, o vértice x_j tem pelos menos dois vizinhos em $\{w(1, j), \dots, w(r_1 + r_2, j)\}$, então*

$$(x_1, \dots, x_s) = (w(i, 1), \dots, w(i, s))$$

se e somente se $F[\{x_1, \dots, x_s\} \cup \{w(i, s+1), \dots, w(i, h)\}]$ é conexo.

Prova. Pela observação feita anteriormente ao lema, o vértice x_j está na j -ésima coluna, com $j \in \{1, \dots, s\}$, e portanto o conjunto $\{x_1, \dots, x_s\} \cup \{w(i, s+1), \dots, w(i, h)\}$ contém exatamente um vértice de cada coluna. Pela definição de prisma complementar e pelo fato de H ser conexo, este conjunto induz um subgrafo conexo de F exatamente se todos os elementos estão na mesma coluna. \square

Uma aplicação do Lema 5.4 permite identificar outros s vértices $w(i, 1), \dots, w(i, s)$ em R , para algum $i \geq r_1 + r_2 + 1$, em tempo polinomial. A remoção destes vértices de R e sua inserção em uma posição correspondente dentro da tabela na Figura 5.3, corresponde a um incremento de r_1 por 1 e um decremento de r_3 de 1.

Novamente há uma declaração simétrica em relação aos vértices em R com pelos menos dois vizinhos em

$$\{w(1, j), \dots, w(r_1, j)\} \cup \{w(r_1 + r_2 + 1, j), \dots, w(n, j)\}$$

para algum $j \in \{s+1, \dots, h\}$. Iterativamente usando o Lema 5.4 e esta declaração podemos identificar outros vértices em R e portanto incrementar r_1 pelo decremento de r_2 ou r_3 até que todo vértice em R tenha

- no máximo um vizinho em cada um dos conjuntos $\{w(1, j), \dots, w(r_1 + r_2, j)\}$ para $j \in \{1, \dots, s\}$ e
- no máximo um vizinho em cada um dos conjuntos $\{w(1, j), \dots, w(r_1, j)\} \cup \{w(r_1 + r_2 + 1, j), \dots, w(n, j)\}$ para $j \in \{s+1, \dots, h\}$.

O próximo lema mostra que nesta situação um dentre r_2 e r_3 deve ter um valor pequeno.

Lema 5.5 [11] *Se $\min\{r_2, r_3\} \geq 3$, então algum vértice em R tem pelo menos dois vizinhos em um dos dois conjuntos $\{w(1, s), \dots, w(r_1 + r_2, s)\}$ e $\{w(1, s + 1), \dots, w(r_1, s + 1)\} \cup \{w(r_1 + r_2 + 1, s + 1), \dots, w(n, s + 1)\}$.*

Prova. Por contradição, assumimos que nenhum vértice em R tem ao menos dois vizinhos em um dos conjuntos dados. Relembramos que assumimos que $v_s v_{s+1}$ é uma aresta de H , o que implica que $w(i, s)w(i, s + 1)$ é uma aresta em $G(V(G)) \square H(S)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Além disso, os grafos nas colunas s e $s + 1$ são complementares. Logo, todo vértice $w(i, s)$ em $\{w(r_1 + r_2 + 1, s), w(r_1 + r_2 + 2, s), w(r_1 + r_2 + 3, s)\}$ tem exatamente um vizinho comum a todo vértice $w(i', s + 1)$ em $\{w(r_1 + r_2 - 2, s + 1), w(r_1 + r_2 - 1, s + 1), w(r_1 + r_2, s + 1)\}$, e este vizinho comum é $w(i', s)$ ou $w(i, s + 1)$.

Por simetria, assumimos que $w(r_1 + r_2, s)$ é o vizinho comum de $w(r_1 + r_2 + 1, s)$ e $w(r_1 + r_2, s + 1)$. Isto implica que $w(r_1 + r_2 + 1, s + 1)$ é o vizinho comum de $w(r_1 + r_2 + 1, s)$ e $w(r_1 + r_2 - 1, s + 1)$ assim como o vizinho comum de $w(r_1 + r_2 + 1, s)$ e $w(r_1 + r_2 - 2, s + 1)$. Isto implica que $w(r_1 + r_2 - 1, s)$ é o vizinho comum de $w(r_1 + r_2 + 2, s)$ e $w(r_1 + r_2 - 1, s + 1)$. Agora, se $w(r_1 + r_2 - 2, s)$ é o vizinho comum de $w(r_1 + r_2 + 2, s)$ e $w(r_1 + r_2 - 2, s + 1)$, então $w(r_1 + r_2 + 2, s)$ tem dois vizinhos em $\{w(1, s), \dots, w(r_1 + r_2, s)\}$, e se $w(r_1 + r_2 + 2, s + 1)$ é o vizinho comum de $w(r_1 + r_2 + 2, s)$ e $w(r_1 + r_2 - 2, s + 1)$, então $w(r_1 + r_2 - 2, s + 1)$ tem dois vizinhos em $\{w(1, s + 1), \dots, w(r_1, s + 1)\} \cup \{w(r_1 + r_2 + 1, s + 1), \dots, w(n, s + 1)\}$. Esta contradição completa a prova. \square

O Lema 5.5 implica que depois de um tempo polinomial podemos chegar a uma situação na qual $\min\{r_2, r_3\} \leq 2$.

5.2.4 Escolha do preenchimento completo de algumas colunas

Por simetria, assumimos que $r_2 \leq 2$. Consideramos todos os $O(n^{2(h-s)})$ possíveis candidatos para a seleção dos vértices $w(i, j)$ com $i \in \{r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2\}$ e $j \in \{s + 1, \dots, h\}$.

Para simplificar a exposição, é realmente razoável descartar todo o conhecimento sobre os vértices identificados nas primeiras s colunas.

5.2.5 Identificação de todos os vértices restantes

A Figura 5.4 resume nosso conhecimento atual.

?	?	?	?	$w(1, s+1)$	$w(1, s+2)$...	$w(1, h)$
?	?	?	?	$w(2, s+1)$	$w(2, s+2)$...	$w(2, h)$
?	?	?	?	\vdots	\vdots	...	\vdots
?	?	?	?	$w(n, s+1)$	$w(n, s+2)$...	$w(n, h)$

Figura 5.4: Os vértices nas primeiras s colunas não foram identificados e todos os vértices nas últimas $h - s$ colunas foram identificados.

Sejam V_1, \dots, V_k os conjuntos de vértices dos componentes de G . Pela definição do produto complementar, os conjuntos de vértices dos componentes do grafo que é obtido de F pela remoção de todas as arestas entre os vértices nas últimas $h - s$ colunas são exatamente

$$V_1 \times V(H), \dots, V_k \times V(H).$$

Note que nosso conhecimento atual permite identificar as arestas que precisam ser removidas.

Descrevemos como identificar todos os vértices não identificados em $V_1 \times V(H)$ em tempo $O(|V_1|^{O(h)})$.

Como identificamos completamente todos os vértices nas últimas $h - s$ colunas, o grafo G está completamente determinado. Pela permutação de linhas, assumimos que V_1 corresponde às primeiras n_1 linhas. Além disso, como $G[V_1]$ é conexo, assumimos que para cada $i \in \{2, \dots, n_1\}$, o vértice $w(i, 1)$ tem pelo menos um vizinho em $\{w(1, 1), \dots, w(i-1, 1)\}$. Consideramos todos os $O(|V_1|^{O(h)})$ candidatos para a seleção dos vértices

$$(w(1, 1), \dots, w(1, s)).$$

Assumimos que já identificamos todos os vértices nas primeiras $r_1 \in \{1, \dots, n-1\}$ linhas. Veja a Figura 5.5.

$w(1, 1)$	$w(1, 2)$...	$w(1, s)$	$w(1, s+1)$	$w(1, s+2)$...	$w(1, h)$
$w(2, 1)$	$w(2, 2)$...	$w(2, s)$	$w(2, s+1)$	$w(2, s+2)$...	$w(2, h)$
\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots
$w(r_1, 1)$	$w(r_1, 2)$...	$w(r_1, s)$	$w(r_1, s+1)$	$w(r_1, s+2)$...	$w(r_1, h)$
?	?	?	?	$w(r_1+1, s+1)$	$w(r_1+1, s+2)$...	$w(r_1+1, h)$
?	?	?	?	\vdots	\vdots	...	\vdots
?	?	?	?	$w(n, s+1)$	$w(n, s+2)$...	$w(n, h)$

Figura 5.5: Todos os vértices nas últimas $h - s$ colunas e nas primeiras r_1 linhas foram identificados.

Lema 5.6 [11] *Se x_1, \dots, x_s são vértices em $\{w(i, j) : i \in \{r_1 + 1, \dots, n\} \text{ e } j \in \{1, \dots, s\}\}$ tais que*

- *para cada $j \in \{1, \dots, s\}$, o vértice x_j é adjacente a algum vértice em $\{w(1, j), \dots, w(r_1, j)\}$ e*
- *$F[\{x_1, \dots, x_s\} \cup \{w(r_1 + 1, s + 1), \dots, w(r_1 + 1, h)\}]$ é conexo,*

então

$$(x_1, \dots, x_s) = (w(r_1 + 1, 1), \dots, w(r_1 + 1, s)).$$

Prova. Para cada $j \in \{1, \dots, s\}$, o vértice x_j tem um vizinho que está na j -ésima coluna e um vizinho das primeiras r_1 linhas, mas x_j não está nas primeiras r_1 linhas. Logo, x_j deve estar na coluna j . Portanto, $\{x_1, \dots, x_s\} \cup \{w(r_1 + 1, s + 1), \dots, w(r_1 + 1, h)\}$ contém exatamente um vértice de cada coluna, o que imediatamente implica o resultado desejado.

□

Note que a suposição sobre a ordem das linhas implica a existência de vértices x_1, \dots, x_s como no Lema 5.6 para cada $r_1 \in \{1, \dots, n_1 - 1\}$. Logo, o Lema 5.6 permite identificar todos os vértices em $V_1 \times V(H)$ com base na escolha inicial para $(w(1, 1), \dots, w(1, s))$ em tempo $O(|V_1|^{O(h)})$.

Como a mesma abordagem se aplica a todos os componentes restantes, isto completa a descrição de nosso algoritmo e a prova do Teorema 5.1.

5.2.6 Exemplificação do algoritmo de reconhecimento

Nesta subseção, é exemplificada a execução do algoritmo de reconhecimento de alguns produtos complementares, descrito previamente nas Subseções 5.2.1 a 5.2.5.

Como já especificado, o grafo F é o grafo de entrada, juntamente com o grafo H que é conexo e S um subconjunto próprio e não vazio de seus vértices. O algoritmo deve determinar se existe um grafo G tal que F é isomorfo a $G(V(G)) \square H(S)$.

Na Figura 5.6, podemos ver os grafos F e H . Temos $S = \{a, b, c\}$ e, portanto, $\bar{S} = \{d, e\}$. É considerada $1, 2, \dots, 30$ a rotulagem dos vértices de F , conforme sua representação na figura, da esquerda para a direita, de cima para baixo.

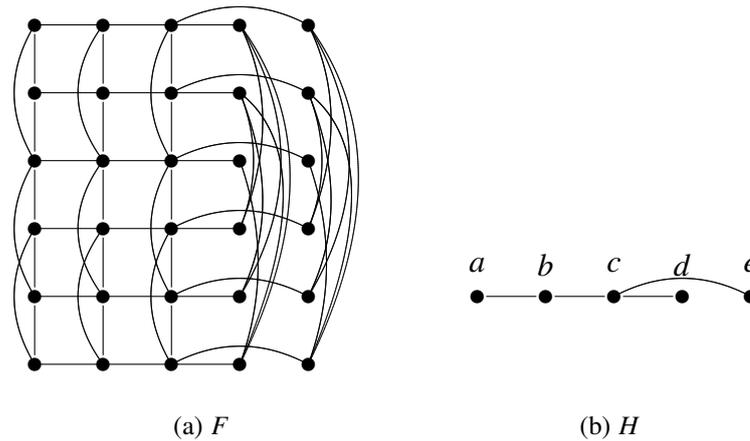


Figura 5.6: Os grafos F e H com $S = \{a, b, c\}$.

Na Figura 5.7, encontra-se a exemplificação da aplicação dos primeiros passos do algoritmo. Todos os vértices na primeira linha foram identificados. Eles correspondem a uma cópia do grafo H . Além disso, para as primeiras 3 colunas foi identificado o conjunto que contém os vértices das linhas 2 e 3, para as últimas duas colunas e também o conjunto contendo os vértices das linhas 4 até 6. Cada conjunto corresponde aos vizinhos do vértice que está na primeira linha. Até o momento ainda não se sabe especificamente, a que linha cada vértice pertence, com exceção da primeira.

Os dois números, s_0 e \bar{s}_0 , definidos na Subseção 5.2.1, são, respectivamente, a cardinalidade de um menor subconjunto U de H tal que o subgrafo de H induzido por $S \cup U$ seja conexo e a menor cardinalidade de um subconjunto \bar{U} de H tal que o subgrafo de H induzido por $\bar{U} \cup \bar{S}$ seja conexo. Logo, $s_0 = 0$, já que S é conexo e $\bar{s}_0 = 1$, pois \bar{S} não é conexo e é necessário pelo menos 1 vértice de R para que seja encontrado um subgrafo conexo de H tal que \bar{S} seja um subconjunto.

1	2	3	4	5
{6, 11}	{7, 12}	{8, 13}	?	?
?	?	?	{19, 24, 29}	{20, 25, 30}

Figura 5.7: Foram identificados os vértices da primeira linha e seus respectivos vizinhos.

Neste ponto, $R = \{9, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 26, 27, 28\}$. Como $s_0 = 0$, é necessário identificar, conforme o Lema 5.2, um subgrafo conexo com 3 vértices, x_1, x_2, x_3 , tal que cada x_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, pertence a um N_j distinto. São identificados os vértices 11, 12 e 13 na linha 2 e os vértices 6, 7 e 8 na linha 3. Como $\bar{s}_0 = 1$, de forma

análoga, é preciso identificar, conforme o Lema 5.3, um subgrafo conexo com 3 vértices, x_3, x_4, x_5 , tal que cada x_j , $j \in \{4, 5\}$, pertence a um N_j distinto e $x_3 \in R$. São identificados os vértices 19 e 20 na linha 4, os vértices 29 e 30 na linha 5 e os vértices 24 e 25 na linha 6, utilizando, de R , os vértices 18, 28 e 23, respectivamente, para obter grafos conexos. O conhecimento atual está representado na Figura 5.8.

1	2	3	4	5
11	12	13	?	?
6	7	8	?	?
?	?	?	19	20
?	?	?	29	30
?	?	?	24	25

Figura 5.8: *Os vizinhos dos vértices da primeira linha foram identificados.*

Até este ponto, $r_1 = 1$, pois há uma linha com vértices totalmente identificados. Como há 2 linhas com vértices identificados somente da coluna 1 até a coluna 3, $r_2 = 2$ e, finalmente, $r_3 = 3$, pois há 3 linhas com vértices identificados somente da coluna 4 até a coluna 5.

Pela utilização do Lema 5.4 e da declaração de simetria posterior, pode-se identificar o vértice 9 e o vértice 10, que estão em R . Estes vértices têm, cada um, pelo menos 2 vizinhos na respectiva coluna. Eles estão na mesma linha porque são a única possibilidade de formação de um subgrafo conexo com os vértices da linha 3. As linhas foram reorganizadas. Agora, $r_1 = 2$ e $r_2 = 1$. Esta situação está representada na Figura 5.9.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	?	?
?	?	?	19	20
?	?	?	29	30
?	?	?	24	25

Figura 5.9: *Mais alguns vértices foram identificados.*

Assim como estabelece o Lema 5.5, $r_2 = 1$ é um valor pequeno. Até o momento, há apenas uma linha não identificada nas colunas 4 e 5. É possível escolher o preenchimento completo destas colunas considerando todos os possíveis candidatos em R para ocupar estas posições. Ao fazer esta escolha e descartar o conhecimento nas primeiras $s = 3$ colunas, obtém-se o conhecimento representado na Figura 5.10. Neste ponto, sabe-se qual é o grafo G , pois o seu complemento já é conhecido. Cada uma das colunas 4 e 5

contém os vértices que induz em F uma cópia do complemento de G . O grafo G é o da Figura 5.11.

?	?	?	4	5
?	?	?	9	10
?	?	?	14	15
?	?	?	19	20
?	?	?	24	25
?	?	?	29	30

Figura 5.10: O conhecimento sobre G foi descartado e \bar{G} foi totalmente identificado.



Figura 5.11: O grafo G que foi totalmente identificado.

Finalmente, pela utilização do Lema 5.6, é possível identificar todos os vértices restantes. Como G é conexo, não é necessário remover arestas do grafo. Seleciona-se $s = 3$ vértices x_j , $j = 1, 2, 3$ tais que cada um tenha um vizinho na coluna j nas r_1 primeiras linhas e, ainda, se o subgrafo de F induzido por $\{x_1, x_2, x_3\} \cup \{(i, 4), (i, 5)\}$ é conexo, então, x_1 , x_2 e x_3 devem estar na linha i . Pela repetição deste procedimento, r_1 é incrementado até que todas as linhas restantes sejam totalmente identificadas. A Figura 5.12 mostra o conhecimento atual quando $r_1 = 2$.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
?	?	?	14	15
?	?	?	19	20
?	?	?	24	25
?	?	?	29	30

Figura 5.12: Todos os vértices nas últimas 2 colunas e nas primeiras 2 linhas foram identificados.

5.3 Prismas complementares bem-cobertos

Pela definição de prisma complementar, $V(G\bar{G}) = V(G) \cup V(\bar{G})$. Para simplificação, foram utilizados G e \bar{G} para referência aos subgrafos que são cópias de G e \bar{G} , respectivamente, em $G\bar{G}$. Para um vértice $v \in G$, denota-se por \bar{v} o vértice correspondente em \bar{G} e para um conjunto $X \subseteq V(G)$ denota-se por \bar{X} os vértices correspondentes em $V(\bar{G})$.

Haynes et al. [33] provam que para qualquer grafo G ,

$$\alpha(G) + \alpha(\bar{G}) - 1 \leq \alpha(G\bar{G}) \leq \alpha(G) + \alpha(\bar{G}), \quad (5-1)$$

e no Teorema 5.7 os autores caracterizam os grafos para os quais o limite superior é válido.

Teorema 5.7 [33] *Um grafo G tem $\alpha(G\bar{G}) = \alpha(G) + \alpha(\bar{G})$ se, e somente se, há conjuntos disjuntos S e T em $V(G)$ tais que S é um conjunto independente maximal e T induz uma clique máxima em G .*

Nos Lemas 5.8 e 5.9 são mostradas formas de encontrar conjuntos independentes maximais em $G\bar{G}$ pela utilização do grafo G . Por exemplo, o Lema 5.8 pode ser aplicado para verificar que os prismas complementares de C_5 e P_4 não são bem-cobertos, embora estes grafos e seus complementos sejam grafos bem-cobertos.

Lema 5.8 [3] *Sejam G um grafo e I um conjunto independente maximal em G . Se Q é uma clique no subgrafo induzido por $G \setminus I$, então $I \cup \bar{Q}$ é um conjunto independente maximal em $G\bar{G}$.*

Prova. Seja I um conjunto independente maximal em G . Logo, $N_G[I] = G \cup \bar{I}$. Uma clique Q em $G \setminus I$ corresponde a um conjunto independente maximal no subgrafo induzido por $\bar{G} \setminus \bar{I}$. Uma vez que I e Q são disjuntos em G , $I \cup \bar{Q}$ é um conjunto independente maximal em $G\bar{G}$. \square

Em um grafo G , um conjunto independente I é chamado de *quase-maximal* se $G \setminus N_G[I]$ induz um grafo completo não vazio. Na Figura 5.13 há um exemplo de tal conjunto, onde o subgrafo completo de $G \setminus N[I]$ é formado exclusivamente pelo vértice v .

Para um conjunto independente maximal I de $G\bar{G}$, é fácil verificar que $I \cap G$ ou é maximal ou quase-maximal em G . O Lema 5.9 provê uma forma de encontrar um conjunto independente maximal em $G\bar{G}$, pela verificação de G , quando $I \cap G$ é um conjunto independente quase-maximal em G .

Lema 5.9 [3] *Seja G um grafo e I um conjunto independente quase-maximal em G onde $Q = G \setminus N_G[I]$. Se Q' é uma clique em $G \setminus I$ que contém Q , então $I \cup \overline{Q'}$ é um conjunto independente maximal em $\overline{G\overline{G}}$.*

Prova. Suponhamos Q um grafo completo em $G \setminus N_G[I]$. O conjunto $N_G[I] = (G \setminus Q) \cup \overline{I}$. Toda clique em $G \setminus I$ é um conjunto independente maximal em $\overline{G} \setminus \overline{I}$. Como $Q \subseteq Q'$, $\overline{Q'}$ domina Q . Logo, $I \cup \overline{Q'}$ é um conjunto independente maximal em $\overline{G\overline{G}}$. \square

Pode-se observar que o prisma complementar do grafo G da Figura 5.13 não é bem-coberto, pela aplicação do Lema 5.9. O subgrafo completo Q de $G \setminus N_G[I]$ contém apenas o vértice v que está em cliques de tamanhos dois e três no subgrafo induzido por $G \setminus I$. Logo, $\overline{G\overline{G}}$ contém conjuntos independentes de tamanhos 4 e 5, já que a cardinalidade de I é dois. Com a aplicação apenas do Lema 5.8 ao grafo G não seria possível determinar que o grafo $\overline{G\overline{G}}$ não é bem-coberto.

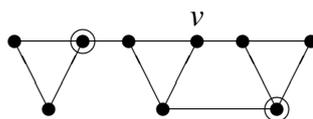


Figura 5.13: Grafo bem-coberto G onde os vértices circulos formam um conjunto independente quase-maximal I . O vértice v é o único que não contém um vizinho em I e está em cliques de tamanhos dois e três no subgrafo induzido por $G \setminus I$.

Pela utilização dos Lemas 5.8 e 5.9, o próximo resultado apresentado é uma caracterização não estrutural dos prismas complementares bem-cobertos.

Teorema 5.10 [3] *Para um grafo G , $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto com $\alpha(\overline{G\overline{G}}) = t$ se, e somente se, para todo conjunto independente maximal I de G ,*

- (i) *para toda clique Q em $G \setminus I$, temos $|I \cup Q| = t$, e*
- (ii) *se I' é um conjunto independente quase-maximal em G onde $Q = G \setminus N_G[I']$, então para cada clique Q' em $G \setminus I'$ contendo Q , temos $|I' \cup Q'| = t$.*

Prova. (\implies) Suponhamos que (i) não é válido. Logo, G tem conjuntos independentes maximais I_1 e I_2 e também cliques Q_1 em $G \setminus I_1$ e Q_2 em $G \setminus I_2$, tais que $|I_1 \cup Q_1| \neq |I_2 \cup Q_2|$. Pelo Lema 5.8, $\overline{G\overline{G}}$ tem conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes, o que implica que $\overline{G\overline{G}}$ não é bem-coberto. Agora, suponhamos I'_1 e I'_2 conjuntos independentes quase-maximais em G onde $G \setminus N_G[I'_1] = Q_1$ e $G \setminus N_G[I'_2] = Q_2$. Se (ii) não ocorre, há uma clique Q'_1 contendo Q_1 em $G \setminus I'_1$ e clique Q'_2 contendo Q_2 em $G \setminus I'_2$, tais que $|I'_1 \cup Q'_1| \neq |I'_2 \cup Q'_2|$. Pelo Lema 5.9, $I'_1 \cup \overline{Q'_1}$ e $I'_2 \cup \overline{Q'_2}$ são conjuntos independentes maximais de cardinalidades diferentes em $\overline{G\overline{G}}$.

(\Leftarrow) Para a recíproca, suponhamos que $G\bar{G}$ não é bem-coberto. Sejam I e J dois conjuntos independentes maximais de $G\bar{G}$ com cardinalidades distintas. Sejam $I_1 = I \cap G$, $J_1 = J \cap G$, $I_2 = I \cap \bar{G}$, e $J_2 = J \cap \bar{G}$. Uma vez que os vértices de qualquer conjunto independente de G induz um grafo completo na cópia de \bar{G} , segue que cada um dos conjuntos I_1 e J_1 é ou maximal ou quase-maximal em G . Há quatro combinações destes conjuntos que resultam em três casos.

Caso 1 I_1 e J_1 são ambos maximais em G .

Neste caso, \bar{I}_2 é uma clique em $G \setminus I_1$ e \bar{J}_2 é uma clique em $G \setminus J_1$. Como $I_1 \cup \bar{I}_2$ e $J_1 \cup \bar{J}_2$ têm cardinalidades diferentes, (i) não ocorre.

Caso 2 I_1 e J_1 são ambos quase-maximais em G .

Neste caso, $G \setminus N_G[I_1]$ e $G \setminus N_G[J_1]$ induz grafos completos, digamos Q_1 e Q_2 , respectivamente. Como I e J são maximais em $G\bar{G}$, os vértices em Q_1 e Q_2 são adjacentes aos vértices em I_2 e J_2 , respectivamente. Logo, \bar{I}_2 é uma clique em $G \setminus I_1$ contendo Q_1 e \bar{J}_2 é uma clique em $G \setminus J_1$ contendo Q_2 . Como $I_1 \cup \bar{I}_2$ e $J_1 \cup \bar{J}_2$ têm cardinalidades distintas, (ii) não ocorre.

Caso 3 Exatamente um dentre I_1 e J_1 é maximal.

Os dois últimos casos são análogos e ocorrem quando exatamente um dentre I_1 e J_1 é maximal e o outro quase-maximal. Pela simetria, consideramos que I_1 é maximal em G e J_1 é quase-maximal em G , \bar{I}_2 é uma clique em $G \setminus I_1$ e $G \setminus N_G[J_1]$ induz um grafo completo em Q . Todo vértice em Q é adjacente a algum vértice em J_2 . Logo, \bar{J}_2 é uma clique em $G \setminus J_1$ contendo Q . Mas, $|I_1 \cup \bar{I}_2| \neq |J_1 \cup \bar{J}_2|$. Portanto, ou (i) ou (ii) (possivelmente ambos) não ocorre. \square

Se G é uma coleção de grafos k_n -partidos completos com a mesma quantidade de partições, então $G\bar{G}$ é bem-coberto como provado na Proposição 5.11.

Proposição 5.11 [3] *Sejam k e t inteiros fixos e positivos. Se G é uma coleção disjunta de t grafos k_n -partidos completos, então $G\bar{G}$ é bem-coberto.*

Prova. Para $i = 1, \dots, t$, seja $G = \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_t\}$, onde cada \mathcal{H}_i é um grafo k_n -partido completo, para um inteiro fixo e positivo k . Sejam n_i e $I(\mathcal{H}_i)$, respectivamente, a ordem de cada parte de \mathcal{H}_i e um conjunto independente maximal em \mathcal{H}_i . Note que toda clique em G tem tamanho k e G é um grafo bem-coberto. Todo conjunto independente maximal I em G é formado como segue:

$$I = \bigcup_{i=1}^t I(\mathcal{H}_i)$$

onde $|I(\mathcal{H}_i)| = n_i$. Isto implica em

$$|I| = \sum_{i=1}^t n_i.$$

Além disso, todas as cliques de $G \setminus I$ têm tamanho $k - 1$, já que I tem exatamente todos os vértices de uma parte de \mathcal{H}_i , para todo $i \in \{1, \dots, t\}$. Logo, G satisfaz a condição (i) do Teorema 5.10.

Agora, suponhamos que I' é um conjunto independente quase-maximal em G . Portanto, há $j \in \{1, \dots, t\}$, tal que $I'(\mathcal{H}_j)$ é quase-maximal em \mathcal{H}_j e para todo $i \neq j$, $I'(\mathcal{H}_i)$ é maximal em \mathcal{H}_i , o que implica em algum $v \in \mathcal{H}_j$ onde $v \notin I'(\mathcal{H}_j)$ e para todo $u \in \mathcal{H}_j$ com $u \notin N_{\mathcal{H}_j}(v)$, $u \in I'(\mathcal{H}_j)$. Logo, o grafo completo Q induzido por $\mathcal{H}_j \setminus N_{\mathcal{H}_j}[I'(\mathcal{H}_j)]$ tem um vértice, se $n_j > 1$, ou ordem k , caso contrário. Como toda clique em G tem ordem k , há uma clique Q' de tamanho k em $\mathcal{H}_j \setminus I'(\mathcal{H}_j)$ que contém Q , o que implica que G satisfaz a condição (ii) do Teorema 5.10. Portanto, $G\bar{G}$ é bem-coberto, onde todo conjunto independente maximal tem cardinalidade $|I| + k - 1$. Isto completa a prova. \square

O Lema 5.12 está relacionado aos tamanhos das cliques em um grafo quando um conjunto independente de seus vértices é removido.

Lema 5.12 [3] *Sejam G um grafo e $S = \{t \in \mathbb{N} : t = |Q| \text{ e } Q \text{ é uma clique em } G\}$. Se $I \subseteq V(G)$ é um conjunto independente, então as cliques no subgrafo induzido por $G \setminus I$ têm somente tamanhos que estão no conjunto $S' = \{t - 1, t : t \in S\}$.*

Prova. Suponhamos G com uma clique Q de tamanho $q \in S$ e I é um conjunto independente em G . Como I é independente, no máximo um vértice de Q pertence a I . Se $Q \cap I = \emptyset$, $G \setminus I$ tem a clique Q de tamanho q e $q \in S'$. Se $Q \cap I = \{v\}$, há dois casos. No primeiro $Q \setminus \{v\}$ não é uma clique de $G \setminus I$. Logo $Q \setminus \{v\}$ é um subconjunto de uma ou mais cliques de G que contém tamanho s tal que $s \geq q$. Como $s \in S$, $s \in S'$. No segundo caso, $Q \setminus \{v\}$ é uma clique de $G \setminus I$ a qual contém tamanho $q - 1$, e $q - 1 \in S'$, o que conclui a prova. \square

Note que a remoção de um conjunto independente em um grafo G não pode aumentar o tamanho de uma clique de G , já que nenhuma aresta é adicionada. Também, se um vértice de uma clique Q com tamanho q é removido, e $Q \setminus \{v\}$ é uma clique de $G \setminus I$, Q deve ter tamanho pelo menos $q - 1$.

No Teorema 5.13 provamos que quando G não é bem-coberto e $G\bar{G}$ é bem-coberto, G tem somente conjuntos independentes maximais de dois tamanhos e estes tamanhos são consecutivos.

Teorema 5.13 [3] *Se G não é bem-coberto e $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto, então G tem somente dois tamanhos de conjuntos independentes maximais que são consecutivos.*

Prova. A prova é por contradição. Suponhamos que G não é bem-coberto, $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto e G tem pelo menos dois conjuntos independentes maximais de cardinalidades que diferem em pelo menos 2, digamos I_1 e I_2 . Sem perda de generalidade, consideramos $|I_1| > |I_2|$. Logo, $|I_1| - |I_2| \geq 2$. Os conjuntos I_1 e I_2 são independentes maximais o que implica que todo vértice em $G \setminus I_1$ tem um vizinho em I_1 e todo vértice em $G \setminus I_2$ tem um vizinho em I_2 . Seja H o subgrafo induzido por $G \setminus (I_1 \cup I_2)$. Se $H = \emptyset$, então $G \setminus I_1$ tem somente vértices isolados, assim como $G \setminus I_2$, e, pela aplicação do Lema 5.8, é possível encontrar conjuntos independentes maximais de diferentes tamanhos em $\overline{G\overline{G}}$ que contêm cardinalidades $|I_1| + 1$ e $|I_2| + 1$. Portanto, assumimos que $H \neq \emptyset$.

Pelo Teorema 5.10, todas as cliques em $G \setminus I_1$ têm um mesmo tamanho, digamos q_1 . Analogamente, todas as cliques em $G \setminus I_2$ têm um mesmo tamanho, digamos q_2 . Uma vez que $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto, concluímos que $|I_1| + q_1 = |I_2| + q_2$ e $q_2 \geq q_1 + 2$. As cliques em $G \setminus I_2$ têm tamanho q_2 e I_2 é independente. Estes fatos implicam que G tem alguma clique com tamanho pelo menos q_2 , pelo Lema 5.12. Como I_1 é independente, $G \setminus I_1$ tem pelo menos uma clique de tamanho pelo menos $q_2 - 1$, pelo Lema 5.12. Uma vez que as cliques de $G \setminus I_1$ têm o mesmo tamanho, $q_1 \geq q_2 - 1$ o que contradiz $q_2 - q_1 \geq 2$ e $|I_1| - |I_2| \geq 2$. Portanto, q_1 e q_2 são consecutivos, assim como $|I_2|$ e $|I_1|$, o que completa esta prova. \square

Sejam $\overline{G\overline{G}}$ um grafo bem-coberto e I um conjunto independente maximal em G . Como uma consequência do Lema 5.8, todas as cliques em $G \setminus I$ têm o mesmo tamanho. Agora, mostramos quais são os tamanhos destas cliques em G quando I tem ou não a cardinalidade máxima.

Na Figura 5.14 temos uma ilustração de grafos bem-cobertos cujos complementos não são bem-cobertos, mas seus prismas complementares são bem-cobertos.

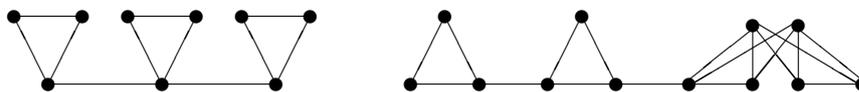


Figura 5.14: *Grafos bem-cobertos G tais que \overline{G} não é bem-coberto e $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto.*

Proposição 5.14 [3] *Seja G um grafo e seja I_1 um conjunto independente máximo em G . Seja $\alpha(\overline{G}) = q$. Se $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto, então*

- *todas as cliques em $G \setminus I_1$ têm tamanho $q - 1$ e*

- se G tem um conjunto independente maximal I_2 com tamanho $|I_1| - 1$, então todas as cliques em $G \setminus I_2$ têm tamanho q .

Prova. Suponhamos que $G\overline{G}$ é bem-coberto e que G e \overline{G} são como descritos acima. Seja I_1 um conjunto independente máximo em G . Primeiro suponhamos que G e \overline{G} são bem-cobertos. Uma vez que I_1 tem cardinalidade máxima, $I_1 \setminus \{v\}$ é quase-maximal, para todo $v \in I_1$. Seja $I' = I_1 \setminus \{v\}$, para algum $v \in I_1$. Note que $G \setminus N_G[I']$ é um subgrafo completo que está contido em uma clique de G , digamos Q . Como todas as cliques em G têm o mesmo tamanho e v não tem vizinho em I' , Q tem tamanho q . Pelo Lema 5.9, $I' \cup \overline{Q}$ é um conjunto independente maximal de $G\overline{G}$ com tamanho $\alpha(G) + q - 1$.

Agora, suponhamos que G não é bem-coberto. Pelo Teorema 5.13, G tem somente conjuntos independentes maximais de dois tamanhos consecutivos. Seja I_2 um conjunto independente maximal de G que não é máximo. Logo, $|I_2| = |I_1| - 1$. Cada clique em $G \setminus I_1$ tem um tamanho fixo, digamos q_1 ; caso contrário, pela utilização do Lemma 5.8, podemos encontrar em $G\overline{G}$ conjuntos independentes maximais de cardinalidades distintas. Analogamente, toda clique em $G \setminus I_2$ tem um tamanho fixo, digamos q_2 , e $q_1 = q_2 - 1$.

Temos que considerar dois casos. Primeiro, consideramos que \overline{G} é bem-coberto. Neste caso, G tem somente cliques de tamanho $q = \alpha(\overline{G})$. Pelo Lema 5.12, $G \setminus I_1$, assim como $G \setminus I_2$, têm somente cliques dos tamanhos que estão no conjunto $\{q - 1, q\}$. Como $G\overline{G}$ é bem-coberto, $|I_1| + q_1 = |I_2| + q_2$, o que implica $q_1 = q - 1$ e $q_2 = q$.

Agora, consideramos que \overline{G} não é bem-coberto. Logo, \overline{G} tem somente conjuntos independentes maximais de dois tamanhos consecutivos o que implica que G tem cliques de dois tamanhos consecutivos, $q = \alpha(\overline{G})$ e $q - 1$. Pelo Lema 5.12, $G \setminus I_1$, assim como $G \setminus I_2$, têm somente cliques de tamanhos que estão no conjunto $\{q - 2, q - 1, q\}$. Também, $q_1, q_2 \in \{q - 2, q - 1, q\}$. Como G tem alguma clique de tamanho q e com a remoção de um conjunto independente de G , o grafo resultante deve ter alguma clique de tamanho pelo menos $q - 1$, podemos concluir que $q_1 \neq q - 2$. Portanto, $q_1 = q - 1$ e $q_2 = q$, o que completa a prova. \square

Como uma consequência da Proposição 5.14 e de (5-1), todos os prismas complementares bem-cobertos têm $\alpha(G\overline{G}) = \alpha(G) + \alpha(\overline{G}) - 1$.

Corolário 5.15 [3] *Se G é um grafo tal que $G\overline{G}$ é bem-coberto, então $\alpha(G\overline{G}) = \alpha(G) + \alpha(\overline{G}) - 1$.*

Proposição 5.16 [3] *Seja G um grafo que não é bem-coberto, $G\overline{G}$ é bem-coberto e I é um conjunto independente maximal de G com $|I| = \alpha(G) - 1$, então todo subconjunto próprio de I está contido em um conjunto independente máximo de G .*

Prova. Suponhamos G , \overline{G} e I como descritos e $G\overline{G}$ é bem-coberto. Seja $q = \alpha(\overline{G})$ o tamanho de uma clique máxima de G . Pelo Corolário 5.15, todo conjunto independente maximal de $G\overline{G}$ tem tamanho $|I| + q = \alpha(G) - 1 + q$.

Seja $I^* = I \setminus \{v\}$, para algum $v \in I$ e $K_v = G \setminus N_G[I^*]$. Note que $K_v \neq \emptyset$. Primeiro, mostramos que $\alpha(K_v) = 2$. Suponhamos $\alpha(K_v) = 1$. Logo, $G \setminus N_G[I^*]$ induz um subgrafo completo Q e I^* é um conjunto independente quase-maximal de G . O subgrafo induzido por $G \setminus I^*$ tem uma clique de tamanho no máximo q , que contém Q , e então, pelo Lema 5.9, $G\overline{G}$ tem um conjunto independente maximal de tamanho até $|I| - 1 + q$ o que implica que ele não é bem-coberto. Agora, suponhamos $\alpha(K_v) = s \geq 3$. Podemos estender I^* a um conjunto independente maximal I' de G , de tamanho pelo menos $|I^*| + 3 = |I| + 2 > \alpha(G)$. Portanto, podemos concluir que $\alpha(K_v) = 2$.

Como I é um conjunto independente maximal de G com tamanho $\alpha(G) - 1$ e para todo $v \in I$, K_v tem exatamente dois vértices independentes, $I^* = I \setminus \{v\}$, para algum $v \in I$, pode somente ser estendido a um conjunto independente maximal de tamanho $\alpha(G)$. Isto completa a prova. \square

Quando G e \overline{G} são grafos bem-cobertos, tais que $G\overline{G}$ é também bem-coberto, há uma partição dos vértices de G em conjuntos independentes máximos, como provamos na Proposição 5.17.

Proposição 5.17 [3] *Sejam G e \overline{G} grafos bem-cobertos. Se $G\overline{G}$ é bem-coberto, então há uma partição $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ dos vértices de G , tal que para todo $i = 1, \dots, k$, J_i é um conjunto independente máximo de G .*

Prova. Sejam G , \overline{G} e $G\overline{G}$ como declarados. Seja $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ com $\bigcup_{i=1}^k J_i = V(G)$, onde cada J_i é um conjunto independente máximo de G e k é o mínimo possível. Todas as cliques de G têm o mesmo tamanho q . Logo $q \leq k$. Seja Q uma clique de G . Assumimos $|Q \cap J_i| = 1$ para $i = 1, \dots, k$, caso contrário, há algum conjunto independente maximal J_i tal que $Q \cap J_i = \emptyset$. Pelo Lema 5.8, $J_i \cup \overline{Q}$ é um conjunto independente maximal de $G\overline{G}$ com tamanho $\alpha(G) + q$. Esta é uma contradição em vista da Proposição 5.14.

Agora, mostramos que todos os conjuntos de \mathcal{J} são dois a dois disjuntos. Se $k = 1$, o resultado segue. Agora suponhamos $k > 1$. Para uma contradição, suponhamos que há dois conjuntos independentes máximos de \mathcal{J} , digamos J_1 e J_2 , que contém um vértice comum v . Seja Q' uma clique de G que contém v . Segue que $q < k$, o que contradiz que \overline{G} é bem-coberto e completa a prova. \square

Observamos que a recíproca da proposição 5.17 não é verdadeira. O grafo G da Figura 5.15 e seu complemento são ambos grafos bem-cobertos. Há uma partição $\mathcal{J} = \{\{a, c, f, h\}, \{b, d, e, g\}\}$ dos vértices de G , tal que cada partição é um conjunto independente máximo de G , porém $G\overline{G}$ não é bem-coberto.

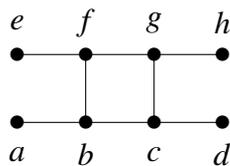


Figura 5.15: Grafo bem-coberto G tal que \overline{G} é bem-coberto, mas $G\overline{G}$ não é bem-coberto. É um exemplo de que a recíproca da Proposição 5.17 não é verdadeira.

Na Proposição 5.18 provamos que não há grafo não bem-coberto desconexo G tal que $G\overline{G}$ é bem-coberto.

Proposição 5.18 [3] *Se $G\overline{G}$ é um grafo bem-coberto e G é desconexo, então G é bem-coberto.*

Prova. Suponhamos que $G\overline{G}$ é um grafo bem-coberto, G é desconexo e não é um grafo bem-coberto. Logo, G tem apenas um componente H que não é bem-coberto. Sejam I_1 e I_2 dois conjuntos independentes maximais de H que possuem cardinalidades diferentes. Agora, seja J um conjunto independente maximal de $G \setminus H$. Seja Q uma clique em $G \setminus (H \cup J)$. Como $I_1 \cup J$ e $I_2 \cup J$ são conjuntos independentes maximais em G , $(I_1 \cup J \cup Q)$ e $(I_2 \cup J \cup Q)$ são conjuntos independentes maximais de $G\overline{G}$, pelo Lema 5.8 e eles têm cardinalidades diferentes. Isto é uma contradição e o resultado desejado segue. \square

Finalmente, apresentamos um limite superior para a quantidade de tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais em prismas complementares.

Teorema 5.19 [3] *Sejam r e s inteiros positivos. Se G e \overline{G} são grafos com r e s tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais, respectivamente, então $G\overline{G}$ tem no máximo $2rs$ tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais.*

Prova. Suponhamos G e \overline{G} como acima. Sejam t_1, \dots, t_r os diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais de G e w_1, \dots, w_s os diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais de \overline{G} . Seja $I(j)$ um conjunto independente maximal em G de tamanho j para $j \in \{t_1, \dots, t_r\}$ e $I'(k)$ um conjunto independente maximal em \overline{G} de tamanho k para $k \in \{w_1, \dots, w_s\}$. Seja I um conjunto independente maximal de $G\overline{G}$. Consideramos $I_1 = I \cap G$ e $I_2 = I \cap \overline{G}$. Uma vez que, para quaisquer conjuntos independentes maximais $I(j)$ and $I'(k)$ de G e de \overline{G} , respectivamente, temos $|I(j) \cap \overline{I'(k)}| \leq 1$, consideramos dois casos.

Primeiro, consideramos que I_1 e I_2 são ambos maximais em G e \overline{G} , respectivamente. Neste caso, $I = I(j) \cup I'(k)$ para algum $j \in \{t_1, \dots, t_r\}$ e para algum $k \in \{w_1, \dots, w_s\}$. Logo, $|I| = |I(j)| + |I'(k)|$. Como $|I(j)| \in \{t_1, \dots, t_r\}$ e $|I'(k)| \in \{w_1, \dots, w_s\}$, há, no máximo, rs opções de tamanho para I . No segundo

caso, ou I_1 é quase-maximal em G ou I_2 é quase-maximal em \overline{G} , mas não ambos. Pela simetria, consideramos que I_1 é maximal em G mas I_2 não é maximal em \overline{G} . Neste caso $I = I(j) \cup (I'(k) \setminus \{v\})$ para algum $v \in I'(k)$. Logo, $|I| = |I(j)| + |I'(k)| - 1$. Como $|I(j)| \in \{t_1, \dots, t_r\}$ e $|I'(k)| \in \{w_1 - 1, \dots, w_s - 1\}$, há, no máximo, outras rs opções de tamanho para I , o que resulta na sentença apresentada e conclui esta prova. \square

5.4 Conjuntos independentes maximais em alguns produtos Cartesianos

Topp e Volkman [54] apresentam alguns resultados sobre o produto Cartesiano de alguns grafos, incluindo os grafos bipartidos e ciclos. Fradkin [26] mostra que $G \square H$ não é bem-coberto quando G e H não são bem-cobertos e são livres de triângulo. Hartnell e Rall [30] generalizam este resultado, mostrando que se $G \square H$ é bem-coberto, então pelo menos um dentre G e H é bem-coberto.

Nandi et al. [43] estabelecem os resultados seguintes sobre o número de dominação de produtos Cartesianos de ciclos e caminhos.

Teorema 5.20 [43] *Para todo $m \geq 3$,*

- $\gamma(P_2 \square C_m) = \begin{cases} \frac{2m}{2}, & \text{se } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ \lceil \frac{m+1}{2} \rceil, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
- $\gamma(P_3 \square C_m) = \lceil \frac{3m}{4} \rceil$.
- $\gamma(P_4 \square C_m) = \begin{cases} m+1, & \text{para } m = 3, 5, 9, \\ m, & \text{caso contrário,} \end{cases}$
- *Para $m \geq 6$, $m + \lceil \frac{m}{5} \rceil \leq \gamma(P_5 \square C_m) \leq m + \lceil \frac{m}{4} \rceil$.*

De forma similar, para $m \geq 4$, determinamos o conjunto $\text{ccim}(P_2 \square C_m)$ e um limite inferior para r tal que $P_n \square C_m$ pertença a \mathcal{M}_r , quando $n \geq 3$.

Os números $0, 1, \dots, n-1$ denotam os vértices do caminho P_n ou do ciclo C_n . Para o produto $P_n \square C_m$, denotamos por $(C_m)_i$ o grafo $C_m \square \{i\}$ onde $i \in V(P_n)$.

É fácil verificar que $\alpha(P_n \square C_m) = n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, uma vez que $\alpha(C_m) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ e $P_n \square C_m$ tem n ciclos C_m . Um conjunto independente máximo I neste grafo pode ser obtido pela inserção de todos os vértices (i, j) tal que $i = 0, \dots, n-1$, $j = 0, \dots, 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$, e $i+j$ é um inteiro ímpar.

Pelo Teorema 5.20, para $m \geq 3$, $\gamma(P_2 \square C_m)$ é $\lceil \frac{m+1}{2} \rceil$ quando m não é um múltiplo de 4 e $\frac{m}{2}$, em caso contrário. Contudo, em alguns casos, este conjunto não é independente. A Proposição 5.21 estabelece os tamanhos de conjuntos independentes maximais de mínima cardinalidade em $P_2 \square C_m$.

Proposição 5.21 [2] *Seja $G = P_2 \square C_m$. Para $m \geq 3$, $i(G) = 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$.*

Prova. Seja $J = \{(0, i) : i \equiv 1 \pmod{4}\} \cup \{(1, i) : i \equiv 3 \pmod{4}\}$. Consideramos um conjunto I com $I = J$, se $m \equiv 0 \pmod{4}$; $I = J \cup \{(1, 0)\}$, se $m \equiv 3 \pmod{4}$, e $I = J \cup \{(1, 0), (0, m-1)\}$, caso contrário. Note que I é um conjunto independente maximal de G , e $|I| = 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Logo, $i(G) \leq 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Agora, vamos mostrar que $i(G) \geq 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Consideremos I um conjunto independente maximal em G . Vamos mostrar que tanto $|I \cap (C_m)_0|$ quanto $|I \cap (C_m)_1|$ é, no mínimo, $\lceil \frac{m}{4} \rceil$. Pela simetria, considere a cópia $(C_m)_0$. Sejam $X = I \cap (C_m)_0$ e $x = |X|$. Suponhamos $x < \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Seja H o subgrafo induzido por $(C_m)_0 \setminus N_G[I]$. Já que, no máximo $3 \lceil \frac{m}{4} \rceil - 3$ vértices estão em $N_G[I]$, H tem pelo menos $\lceil \frac{m}{4} \rceil$ vértices que formam, no máximo, x caminhos conexos disjuntos. Como $x < \frac{m}{4}$, pelo menos um destes caminhos tem tamanho dois. Logo, dois vértices adjacentes em $(C_m)_1$ estão em I , o que contradiz a sua independência. Portanto, $|I \cap (C_m)_i| \geq \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Como $|I \cap (C_m)_0| + |I \cap (C_m)_1| \geq 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$, o resultado desejado segue. \square

Observa-se que os conjuntos independentes maximais de $G = P_2 \square C_m$ têm cardinalidade par. Isto ocorre porque em um conjunto independente maximal I nestes grafos, $|I \cap (C_m)_0| = |I \cap (C_m)_1|$, como foi provado no Lema 5.22.

Lema 5.22 [2] *Seja $m \geq 3$ e $G = P_2 \square C_m$. Se I é um conjunto independente maximal em G , então I tem cardinalidade par.*

Prova. Seja I um conjunto independente maximal de G . Sejam $X_i = I \cap (C_m)_i$ e $x_i = |X_i|$, para $i = 0, 1$. Vamos mostrar que $x_1 = x_2$. Pela simetria, considere o subgrafo induzido por $(C_m)_0 \setminus X_0$, denotado por H . O grafo H tem exatamente x_0 caminhos conexos disjuntos. Denotamos estes caminhos por $P(k)$, $k = 1, \dots, x_0$. Se existe $P(k)$ com $k \in \{1, \dots, x_0\}$ com $|P(k)| > 3$, então $(C_m)_0 \setminus N_G[X_0]$ tem algum caminho de tamanho pelo menos dois, o que implica em dois ou mais vértices consecutivos em $I \cap (C_m)_1$. Logo, assumimos que $|P(k)| \leq 3$, para $k = 1, \dots, x_0$.

Sejam $v_1, \dots, v_{|P(k)|}$, os vértices de um caminho $P(k)$ e $v'_1, \dots, v'_{|P(k)|}$ os correspondentes em $(C_m)_1$. Note que exatamente x_0 vértices em $(C_m)_1$ estão em $N_G(X_0)$ e eles são separados por, no máximo, três vértices. Temos três casos para cada $P(k)$: Primeiro, $|P(k)| = 1$. Neste caso, v'_1 deve pertencer a I já que seus vizinhos no mesmo ciclo são dominados por I ; Se $|P(k)| = 2$, v_1 e v_2 pertencem a $N_G(I)$ e exatamente um dentre v'_1 e v'_2 deve pertencer a I ; Por último, $|P(k)| = 3$. Os vértices v_2, v'_1, v'_2 e v'_3 , não estão em $N_G(X_0)$. Logo, v'_2 deve estar em I . Portanto, em todos os casos, para $k = 1, \dots, x_0$, para cada caminho $P(k)$, há exatamente um vértice em X_1 , resultando em $|I \cap (C_m)_0| = |I \cap (C_m)_1|$. \square

Agora, podemos mostrar os diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais em $G = P_2 \square C_m$.

Teorema 5.23 [2] Para $m \geq 3$ e $G = P_2 \square C_m$, $G \in \begin{cases} \mathcal{M}_{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor}, & \text{se } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ \mathcal{M}_{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Prova. Temos $\alpha(G) = 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ e, pela Proposição 5.21, $i(G) = 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$. Apresentamos em G conjuntos independentes maximais de todas as cardinalidades pares entre $2 \lceil \frac{m}{4} \rceil$ e $2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, em vista do Lema 5.22.

Primeiramente, sejam

$$l = \begin{cases} m, & \text{se } m \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ m - 3, & \text{se } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ m - 2, & \text{se } m \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

e

$$k = \begin{cases} \lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1, & \text{se } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ \lfloor \frac{m}{4} \rfloor, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $i \leq l$, seja $I(0)' = \{(1, i) : i \equiv 0 \pmod{4}\} \cup \{(0, i) : i \equiv 2 \pmod{4}\}$ e

$$I(0) = \begin{cases} I(0)', & \text{se } m \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ I(0)' \cup \{(0, m-1), (1, m-2)\}, & \text{se } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ I(0)' \cup \{(0, m-1)\}, & \text{se } m \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Note que o conjunto $I(0)$ é independente maximal em G e $|I(0)| = 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil = i(G)$. Para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, seja $I(j) = I(j-1) \setminus \{(0, 4j-2)\} \cup \{(0, 4j-3), (0, 4j-1), (1, 4j-2)\}$. Para todo $j \in \{0, \dots, \frac{m}{4}\}$, $I(j)$ é um conjunto independente maximal em G e $|I(j)| = 2 \lceil \frac{m}{4} \rceil + 2j$. Logo, G tem conjuntos independentes maximais de $k+1$ tamanhos diferentes o que resulta em $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ se $1 \equiv m \pmod{4}$ ou $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1$, caso contrário. Isto completa a prova. \square

Antes de provarmos o Teorema 5.28, mostramos como construir recursivamente os grafos H_r e F_s , que serão utilizados na demonstração. Além disso, mostramos os diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais nestes grafos. Na prova do Teorema 5.28, utilizamos o seguinte método para mostrar os vários tamanhos de conjuntos independentes em uma grade cilíndrica $G = P_n \square C_m$: escolhemos um conjunto independente I de G de forma que o grafo induzido por $G \setminus I$ tenha somente componentes isomorfos a pelo menos um dos grafos H_r e F_s . Como sabemos quais são os tamanhos de conjuntos independentes maximais em H_r e F_s , determinamos os tamanhos dos conjuntos em G .

Seja o grafo H_1 com o conjunto de vértices $V^{(1)} = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_3^{(1)}\}$ e conjunto de arestas $E^{(1)} = \{v_1^{(1)}v_2^{(1)}, v_2^{(1)}v_3^{(1)}\}$. Para $r \geq 2$, seja o grafo H_r com conjunto de vértices

$$\begin{cases} V^{(r)} = V^{(r-1)} \cup \{v_1^{(r)}\}, & \text{para } r \text{ par,} \\ V^{(r)} = V^{(r-1)} \cup \{v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, v_3^{(r)}\}, & \text{para } r \text{ ímpar,} \end{cases}$$

e o conjunto de arestas

$$\begin{cases} E^{(r)} = E^{(r-1)} \cup \{v_1^{(r)} v_2^{(r-1)}\}, & \text{para } r \text{ par,} \\ E^{(r)} = E^{(r-1)} \cup \{v_1^{(r)} v_2^{(r)}, v_2^{(r)} v_3^{(r)}, v_2^{(r)} v_1^{(r-1)}\}, & \text{para } r \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Veja a figura 5.16 para uma ilustração.

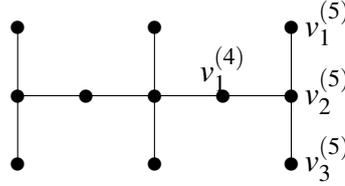


Figura 5.16: O grafo H_5 .

Pela construção recursiva, podemos determinar os tamanhos dos conjuntos independentes maximais em H_r , como provamos na Proposição 5.24.

Proposição 5.24 [2] Para $r \geq 2$, $H_r \in \mathcal{M}_r$. Além disso, $\text{ccim}(H_r) = \{\lceil \frac{r}{2} \rceil, \dots, \lceil \frac{3r}{2} \rceil - 2, \lceil \frac{3r}{2} \rceil\}$.

Prova. Provamos a sentença por indução sobre r . Para $r = 2, 3, 4$, o resultado é trivial. Agora seja $r \geq 5$. Temos dois casos. Se r é par, pela construção de H_r , foi adicionado a H_{r-1} o vértice $v_1^{(r)}$ e a aresta $v_1^{(r)} v_2^{(r-1)}$. Como $v_1^{(r)}$ é uma folha, todo conjunto independente maximal em H_n contém ou $v_1^{(r)}$ ou $v_2^{(r-1)}$. Considerando o primeiro caso, $H_r \setminus N_G[v_1^{(r)}]$ tem um componente isomorfo a H_{r-2} e dois vértices isolados. Pela hipótese de indução, $H_{r-2} \in \mathcal{M}_{r-2}$ e $\text{ccim}(H_{r-2}) = \{\frac{r}{2} - 1, \dots, \frac{3r}{2} - 5, \frac{3r}{2} - 3\}$. Pela adição dos vértices isolados e $v_1^{(r)}$ obtemos os conjuntos independentes maximais em H_r com tamanhos em $A = \{\frac{r}{2} + 2, \dots, \frac{3r}{2} - 2, \frac{3r}{2}\}$. O grafo $H_r \setminus N_G[v_2^{(r-1)}]$ é isomorfo a H_{r-3} . Pela hipótese de indução, $H_{r-3} \in \mathcal{M}_{r-3}$ e $\text{ccim}(H_{r-3}) = \{\frac{r}{2} - 1, \dots, \frac{3r}{2} - 6, \frac{3r}{2} - 4\}$. Pela adição de $v_1^{(r)}$ obtemos os conjuntos independentes maximais em H_r com tamanhos em $B = \{\frac{r}{2}, \dots, \frac{3r}{2} - 5, \frac{3r}{2} - 3\}$. Uma vez que $A \cup B = \text{ccim}(H_r) = \{\frac{r}{2}, \dots, \frac{3r}{2} - 2, \frac{3r}{2}\}$, a sentença desejada segue para r par.

Se r é ímpar, pela construção de H_r , foram adicionados a H_{r-1} os vértices $v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, v_3^{(r)}$ e as arestas $v_1^{(r)} v_2^{(r)}, v_2^{(r)} v_3^{(r)}, v_2^{(r)} v_1^{(r-1)}$. Como $v_1^{(r)}$ e $v_3^{(r)}$ são folhas, todo conjunto independente maximal em H_n contém ou os vértices $v_1^{(r)}$ e $v_3^{(r)}$, ou o vértice $v_2^{(r)}$. Considerando o primeiro caso, $H_r \setminus N_G[\{v_1^{(r)}, v_3^{(r)}\}]$ é isomorfo a H_{r-1} . Pela hipótese de indução, $H_{r-1} \in \mathcal{M}_{r-1}$ e $\text{ccim}(H_{r-1}) = \{\frac{r-1}{2}, \dots, \frac{3r-1}{2} - 3, \frac{3r-1}{2} - 1\}$. Pela adição de $v_1^{(r)}$ e $v_3^{(r)}$ temos conjuntos independentes maximais em H_n com tamanhos em $C = \{\frac{r+1}{2} + 1, \dots, \frac{3r+1}{2} - 2, \frac{3r+1}{2}\}$. O grafo $H_r \setminus N_G[v_2^{(r)}]$ é isomorfo a H_{r-2} . Pela hipótese

de indução, $H_{r-2} \in \mathcal{M}_{r-2}$ e $\text{ccim}(H_{r-2}) = \{\frac{r-1}{2}, \dots, \frac{3r+1}{2} - 5, \frac{3r+1}{2} - 3\}$. Pela adição do vértice $v_2^{(r)}$ obtemos conjuntos independentes maximais em H_r com tamanhos em $D = \{\frac{r+1}{2}, \dots, \frac{3r+1}{2} - 4, \frac{3r+1}{2} - 2\}$. Como $C \cup D = \text{ccim}(H_r) = \{\frac{r+1}{2}, \dots, \frac{3r+1}{2} - 2, \frac{3r+1}{2}\}$, o resultado segue para r ímpar. Isto completa a prova. \square

Proposição 5.25 [2] *Seja r um inteiro positivo fixo com $r \geq 2$. Se G é uma coleção não vazia de t grafos disjuntos H_r , então $G \in \mathcal{M}_{rt}$ e*

$$\text{ccim}(G) = \{t \lfloor \frac{r}{2} \rfloor, \dots, t(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + r) - 2, t(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + r)\}.$$

Prova. Indexe os subgrafos conexos por $1, \dots, t$ e para cada $j \in \{1, \dots, t\}$, seja $I(j)$ um conjunto independente maximal no subgrafo j . Para cada $j \in \{1, \dots, t\}$, $\bigcup_{j=1}^t I(j)$ é um conjunto independente maximal de G . Como, pela Proposição 5.24, $|I(j)| \in \{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + r - 2, \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + r\}$, $\binom{r}{t}$ resulta em rt valores distintos, os quais são $\{t \lfloor \frac{r}{2} \rfloor, \dots, t(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + r) - 2, t(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + r)\}$. \square

Agora, mostramos como construir o grafo F_s , recursivamente. O grafo F_1 tem o conjunto de vértices $V^{(1)} = \{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}\}$ e o conjunto de arestas $E^{(1)} = \{v_1^{(1)} v_2^{(1)}\}$. Para $s \geq 2$, o grafo F_s tem o conjunto de vértices $V^{(s)} = V^{(s-1)} \cup \{u_1^{(s)}, u_2^{(s)}\}$ e o conjunto de arestas

$$\begin{cases} E^{(s)} = E^{(s-1)} \cup \{u_1^{(s)} u_2^{(s-1)}, u_1^{(s)} u_2^{(s)}\}, & \text{para } r \text{ par,} \\ E^{(s)} = E^{(s-1)} \cup \{u_2^{(s)} u_2^{(s-1)}, u_1^{(s)} u_2^{(s)}\} & \text{para } r \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Proposição 5.26 [2] *Para $s \geq 1$, o grafo $F_s \in \mathcal{M}_{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor}$ e $\text{ccim}(F_s) = \{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1, \dots, s\}$.*

Prova. Uma vez que, pela construção, F_s tem $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$ folhas com talos distintos, $i(F_s) \geq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$. Para cada $i = 1, \dots, s$, no máximo um vértice de $\{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}\}$ pode estar em um conjunto independente maximal de F_s . Logo, $\alpha(F_s) \leq s$. Concluímos a prova mostrando como encontrar em F_s conjuntos independentes com tamanhos no conjunto $\{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1, \dots, s\}$. Seja $I(0)$ o conjunto contendo, para $i = 0, \dots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1$, os vértices $u_2^{(2i+1)}$. Se s é par, o vértice $u_2^{(s)}$ deve ser adicionado a $I(0)$. Note que $I(0)$ é um conjunto independente maximal em F_s . Para $j = 1, \dots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1$, seja $I(j) = (I(j-1) \setminus u_2^{(2j-1)}) \cup \{u_1^{(2j-1)}, u_1^{(2j)}\}$. Para $j = 0, \dots, \lfloor \frac{s}{2} \rfloor - 1$, $I(j)$ é um conjunto independente maximal em F_s e $|I(j)| = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + j + 1$, o que implica que $\text{ccim}(F_s) = \{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1, \dots, s\}$. \square

Lema 5.27 [2] *Seja $n \geq 3$, $m \geq 4$ e $G = P_n \square C_m$. Se m é par, então não existe conjunto independente maximal I em G tal que $|I| = \frac{nm}{2} - 1$;*

Prova. Sabemos que $\alpha(G) = \frac{nm}{2}$. Um conjunto independente máximo de G tem $\frac{m}{2}$ vértices de cada ciclo $(C_m)_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Suponhamos que existe um conjunto independente maximal I de G de tamanho $\frac{3m}{2} - 1$. Logo, existe algum i em $0, \dots, n-1$ tal que $|(C_m)_i \cap I| = \frac{m}{2} - 1$. O subgrafo induzido por $(C_m)_i \setminus N_G[I]$ é um vértice simples, digamos v , que deve ser dominado por algum vértice de $(C_m)_{i-1}$ ou de $(C_m)_{i+1}$. Note que um destes ciclos pode não existir. Como m é par e $|(C_m)_{i+1}| = |(C_m)_{i-1}| = \frac{m}{2}$, ambos os conjuntos $(C_m)_{i+1} \setminus N_G[I]$ e $(C_m)_{i-1} \setminus N_G[I]$ são vazios. Portanto, $v \notin N_G[I]$, o que implica que I não é maximal. Isto é uma contradição e o resultado desejado segue. \square

Agora, usamos os grafos H_n e F_n para mostrar um limite sobre os tamanhos dos conjuntos independentes maximais em $P_n \square C_m$, para $n \geq 3$ e $m \geq 4$.

Teorema 5.28 [2] *Seja $n \geq 3$ e $m \geq 4$. Se $G = P_n \square C_m$, então $G \in \mathcal{M}_t$ para algum*

$$t \geq \begin{cases} \frac{nm}{4}, & \text{se } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1, & \text{se } m \equiv 1 \pmod{4}, \\ n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor, & \text{se } m \equiv 2 \pmod{4}, \\ n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor + 1, & \text{se } m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Prova. Consideramos quatro casos.

Caso 1 $m \equiv 0 \pmod{4}$.

Seja $I = \{(k, i) : i \equiv 0 \pmod{4}, k \equiv 1 \pmod{2}\}$. O conjunto I é independente e tem tamanho $\frac{m}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Seja H o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices em $N_G[I]$. O grafo H tem $\frac{m}{4}$ componentes conexos, e cada um é isomorfo ao grafo H_n . Veja a Figura 5.17 para uma ilustração. Pela Proposição 5.25, $H \in \mathcal{M}_{n(\frac{m}{4})}$ e

$$\text{ccim}(H) = \left\{ \binom{m}{4} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \dots, \binom{m}{4} \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n \right) - 2, \binom{m}{4} \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n \right) \right\}.$$

Pela adição dos vértices de I , obtemos $\frac{nm}{4}$ diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais em G , os quais são $\{\frac{nm}{4}, \dots, \frac{nm}{2} - 2, \frac{nm}{2}\}$. Pelo Lema 5.27, G não tem um conjunto independente maximal de tamanho $|I| = \frac{nm}{2} - 1$.

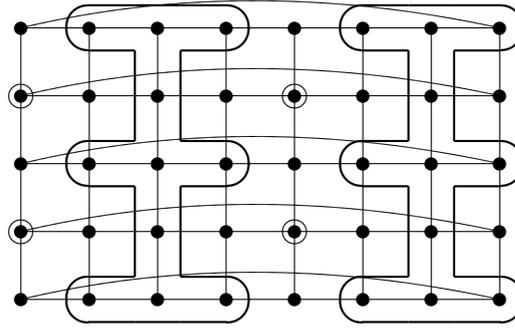


Figura 5.17: $G = P_5 \square C_8$. O conjunto independente I é formado pelos vértices circundados e $G \setminus N_G[I]$ tem dois componentes isomorfos ao grafo H_5 .

Caso 2 $m \equiv 1 \pmod{4}$.

Seja $I = \{(k, i) : i < m - 1, i \equiv 0 \pmod{4}, k \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{(n - j, m - 4), (n - l, m - 1) : j \equiv 1 \pmod{4}, l \equiv 3 \pmod{4}\}$. O conjunto I é independente e ele tem tamanho $((\frac{m-1}{4} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \frac{n}{2} \rceil)$. Seja H o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices em $N_G[I]$. Este grafo tem $\frac{m-1}{4}$ componentes conexos. Denote por H os $\frac{m-5}{4}$ componentes isomorfos ao grafo H_n . O último componente é isomorfo ao grafo F_n . Pela Proposição 5.25,

$$\text{ccim}(H) = \left\{ \left(\frac{m-5}{4}\right) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \dots, \left(\frac{m-5}{4}\right) \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n\right) - 2, \left(\frac{m-5}{4}\right) \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n\right) \right\}.$$

Pela Proposição 5.26, $\text{ccim}(F_n) = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, n\}$. Pela adição dos vértices de I , obtemos $n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor - 1$ diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais em G , os quais são $\{n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, 2n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor\}$.

Caso 3 $m \equiv 2 \pmod{4}$.

Seja $I = \{(k, i) : i \equiv 0 \pmod{4}, k \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{(n - j, m - 1) : j \equiv 1 \pmod{2}\}$. O conjunto I é independente e ele tem tamanho $((\frac{m+2}{4} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \lceil \frac{n}{2} \rceil)$. Seja H o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices $N_G[I]$. O grafo H tem $\frac{m-2}{4}$ componentes conexos e cada um é isomorfo ao grafo H_n . Pela Proposição 5.25,

$$\text{ccim}(H) = \left\{ \left(\frac{m-2}{4}\right) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \dots, \left(\frac{m-2}{4}\right) \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n\right) - 2, \left(\frac{m-2}{4}\right) \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + n\right) \right\}.$$

Pelo adição dos vértices de I , obtemos $n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais em G , os quais são $\{n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor, \dots, \frac{nm}{2} - 2, \frac{nm}{2}\}$. Pelo Lema 5.27, G não tem um conjunto independente maximal de tamanho $|I| = \frac{nm}{2} - 1$.

Caso 4 $m \equiv 3 \pmod{4}$.

Seja $I = \{(k, i) : i \equiv 0 \pmod{4}, k \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{(n - j, m - 1) : j \equiv 1 \pmod{2}\}$. O conjunto I é independente e tem tamanho $\frac{m+1}{4} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Seja H o grafo obtido de G pela remoção de todos os vértices em $N_G[I]$. O grafo H tem $\frac{m-3}{4}$ componentes conexos, os quais são isomorfos ao grafo H_n . Pela Proposição 5.25,

$$\text{ccim}(H) = \left\{ \left(\frac{m-3}{4} \right) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, \left(\frac{m-3}{4} \right) \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n \right) - 2, \left(\frac{m-3}{4} \right) \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n \right) \right\}.$$

Pela adição dos vértices de I , obtemos $n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ diferentes tamanhos de conjuntos independentes maximais em G , os quais são $\{n \lfloor \frac{m}{4} \rfloor, \dots, n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 2, n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$.

Além disso, G tem conjuntos independentes maximais de tamanhos $\frac{mm}{2} - 1$, os quais podem ser obtidos pela escolha do seguinte conjunto de vértices: $\{(1, i) : i \equiv 1 \pmod{2}, i < m - 4\} \cup \{(0, i), (2, i) : i \equiv 0 \pmod{2}, i < m - 4\} \cup \{(0, m - 4), (0, m - 2), (2, m - 3), (2, m - 1)\}$. \square

5.5 Mais algumas considerações

Mostramos que para um grafo fixo conexo H e um subconjunto fixo, não vazio e próprio S de seus vértices, pode ser decidido em tempo polinomial se, para um dado grafo F , há um grafo G tal que F é isomorfo a $G(V(G)) \square H(S)$. Além disso, se tal grafo G existe, então este grafo pode ser encontrado em tempo polinomial.

As principais questões deixadas em aberto em relação ao reconhecimento de produtos complementares são as seguintes.

- Quais grafos têm uma fatoração em fatores primos com relação ao produto complementar que seja única a menos da permutação dos fatores e a menos da recolocação de um fator $G(R)$ com $\overline{G}(V(G) \setminus R)$?
- Poderiam tais fatorações serem encontradas em tempo polinomial?

Sobre os prismas complementares, apresentamos as duas seguintes conjecturas.

Conjectura 5.1 *Se $\overline{G\overline{G}}$ é bem-coberto, então pelo menos um dentre G e \overline{G} é bem-coberto.*

Conjectura 5.2 *Se $\overline{G\overline{G}}$ é um grafo bem-coberto tal que G não é bem-coberto, então $\alpha(G) = 3$;*

Como um trabalho futuro, queremos provar a seguinte conjectura que implica que os limites apresentados no Teorema 5.28 são válidos quando $m \equiv 0, 3 \pmod{4}$.

Conjectura 5.3 *Sejam $n \geq 3$ e $m \geq 4$. Se $G = P_n \square C_m$, então*

$$i(G) = \begin{cases} \frac{nm}{4}, & \text{se } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ n \lceil \frac{m}{4} \rceil, & \text{se } m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta tese, foram considerados alguns problemas relacionados à independência de vértices em grafos. Investigamos grafos com r tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais. Estes grafos formam uma classe chamada \mathcal{M}_r . Se todas essas cardinalidades são consecutivas, então estes grafos também pertencem a uma classe chamada I_r . Consideramos grafos em \mathcal{M}_r e I_r com algumas restrições adicionais como cintura e grau mínimo. Consideramos também o produto complementar e dois casos especiais deste produto que são o prisma complementar e o produto Cartesiano.

Mostramos que se o grau máximo de um grafo em \mathcal{M}_r com cintura pelo menos 7 e grau mínimo pelo menos 2 é limitado, temos uma quantidade finita de grafos na respectiva classe. Provamos outros resultados que limitam o grau máximo destes grafos e que generalizam resultados já conhecidos. Uma motivação foi a nossa Conjectura 3.1, a qual expomos novamente na sequência.

Conjectura 3.1 *Há uma quantidade finita de grafos em \mathcal{M}_2 que são de grau mínimo pelo menos 2 e cintura pelo menos 7. Além disso, todos estes grafos têm $\Delta \leq 4$.*

Todos os exemplos encontrados na pesquisa de grafos em \mathcal{M}_2 com cintura 7 e grau mínimo pelo menos 2, conforme Figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9, possuem grau mínimo 2 e grau máximo 4. Um problema ainda em aberto é a caracterização desta classe de grafos. Mostramos que se G é um grafo de cintura pelo menos 6, grau mínimo pelo menos 2 e que não contém ciclo de tamanho 7, então G é isomorfo ao ciclo C_6 . Se retiramos a restrição do ciclo de tamanho 7, obtemos grafos com grau máximo maior do que 2. Para cinturas inferiores, como já mostramos, conseguimos construir infinitos grafos com grau mínimo pelo menos 2 que pertencem a \mathcal{M}_2 . Para cintura pelo menos 8, somente ciclos atendem a estas condições [25]. Portanto, concluímos que a maior dificuldade na obtenção de resultados em \mathcal{M}_2 quando consideramos grau mínimo pelo menos 2, está relacionada aos grafos que possuem ciclos induzidos de tamanho 7, para cinturas 6 e 7.

Todos os grafos G com exatamente 2 tamanhos de conjuntos independentes maximais que têm cintura pelo menos 6 e grau mínimo pelo menos 2, têm esses tamanhos consecutivos, ou seja se $G \in \mathcal{M}_2$, então $G \in I_2$. Isto é uma consequência da caracterização

dos grafos Z_m -bem-cobertos [15], os quais são grafos em que seus tamanhos de conjuntos independentes maximais são congruentes módulo m , para $m \geq 2$. Todos estes grafos, com exceção de C_7 , possuem vértices de grau 1. Se também os grafos pertencentes a \mathcal{M}_r com $r \geq 3$, cintura pelo menos 7 e grau mínimo pelo menos 2, pertencem a I_r , vale a conjectura 3.2 que apresentamos no Capítulo 3.

Conjectura 3.2 *Se $r \geq 2$ e $G \in \mathcal{M}_r$ é um grafo conexo com cintura pelo menos 7 e grau mínimo pelo menos 2, então $G \in I_r$.*

Os grafos bem-cobertos sem vértice isolado e com número de independência $\frac{n(G)}{2}$ são chamados de grafos muito bem-cobertos e foram caracterizados por Favaron [20]. Berge [8] prova que este é o limite máximo do número de independência para estes grafos. Como extensão destes conhecidos resultados, estudamos grafos bem-cobertos sem vértice isolado de ordem $n(G)$ com número de independência $\frac{n(G)-k}{2}$ para um inteiro fixo e não negativo k . Estendemos o teorema de Favaron. Para $k = 1$, apresentamos uma descrição estrutural completa destes grafos e para um k geral, porém fixo, descrevemos um algoritmo de reconhecimento de complexidade polinomial de tempo. Provamos uma versão do resultado de Berge para grafos que satisfazem $\alpha(G) - i(G) \leq k$ para algum inteiro k não negativo. Derivamos um limite superior sobre o número de independência como corolário e discutimos sua relação com a caracterização de Favaron.

Mostramos que alguns produtos complementares podem ser reconhecidos em tempo polinomial, o que inclui todos os prismas complementares. Esta questão havia sido proposta por Haynes et al. [33]. Ainda não se sabe quais grafos têm uma fatoração em fatores primos com relação ao produto complementar que seja única a menos da permutação dos fatores e a menos da recolocação de um fator $G(R)$ com $\overline{G}(V(G) \setminus R)$. Caso esta fatoração exista, uma outra questão seria determinar se ela pode ser encontrada em tempo polinomial.

Os grafos prismas complementares, definidos por Haynes et al. [33], formam uma classe de grafos para a qual muitos parâmetros ainda não foram investigados. Algumas propriedades de prismas complementares são estudadas em alguns poucos artigos [18, 27, 34–36, 39, 40]. Duarte et al. [19] apresentam resultados algorítmicos e de complexidade para os prismas complementares em relação a cliques, conjuntos independentes, dominação e convexidade. Apresentamos formas de construção de grafos prismas complementares bem-cobertos, o que mostra que esta classe tem infinitos grafos. Mostramos que quando G não é bem-coberto mas seu prisma complementar \overline{G} é bem-coberto, então G tem apenas dois tamanhos de conjuntos independentes maximais que são consecutivos. Para todos os prismas complementares bem-cobertos apresentados, notamos que pelo menos um dentre G e \overline{G} é bem-coberto. Caso seja uma condição para todos os grafos prismas complementares bem-cobertos, vale a nossa Conjectura 5.1.

Conjectura 5.1 *Se $G\bar{G}$ é bem-coberto, então pelo menos um dentre G e \bar{G} é bem-coberto.*

Apresentamos uma caracterização não estrutural de prismas complementares bem-cobertos. Como uma questão em aberto, pode-se apresentar uma caracterização estrutural destes grafos. Quando consideramos prismas complementares bem-cobertos $G\bar{G}$ com G não bem-coberto, observamos em todos os exemplos que encontramos na pesquisa que $\alpha(G) = 3$. Isto nos levou a apresentar a Conjectura 5.2.

Conjectura 5.2 *Se $G\bar{G}$ é um grafo bem-coberto tal que G não é bem-coberto, então $\alpha(G) = 3$;*

Uma grade cilíndrica é um grafo que é o produto Cartesiano de um caminho P_n , $n \geq 2$ e um ciclo C_m , $m \geq 3$, denotado por $P_n \square C_m$. Mostramos um método para encontrar conjuntos independentes maximais em grades cilíndricas e um limite inferior para a quantidade de conjuntos independentes maximais nestes grafos. Denotamos o tamanho do menor conjunto independente de um grafo G por $i(G)$. Para os casos em que m é congruente a 0 ou congruente a 3, apresentamos a Conjectura 5.3, cuja validade implica que os limites estabelecidos no Teorema 5.28 são os melhores possíveis para estes casos.

Conjectura 5.3 *Sejam $n \geq 3$ e $m \geq 4$. Se $G = P_n \square C_m$, então*

$$i(G) = \begin{cases} \frac{nm}{4}, & \text{se } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ n \lceil \frac{m}{4} \rceil, & \text{se } m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Finalmente, esperamos que a nossa contribuição seja útil na obtenção de outros resultados sobre independência de vértices e na divulgação da área de Teoria dos Grafos.

Referências Bibliográficas

- [1] AURENHAMMER, F.; HAGAUER, J.; IMRICH, W. **Cartesian graph factorization at logarithmic cost per edge.** *Comput. Complexity*, 2:331–349, 1992.
- [2] BARBOSA, R.; CAPPELLE, M. R. **On the sizes of maximal independent sets of cylindrical grid graphs.** Submetido, 2014.
- [3] BARBOSA, R.; CAPPELLE, M. R.; COELHO, E. M. M. **Maximal independent sets in complementary prism graphs.** Submetido, 2014.
- [4] BARBOSA, R.; HARTNELL, B. L. **Some problems based on the relative sizes of the maximal independent sets in a graph.** *Congr. Numerantium*, 131:115–121, 1998.
- [5] BARBOSA, R.; HARTNELL, B. L. **The effect of vertex and edge deletion on the number of sizes of maximal independent sets.** *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 70:111–116, 2009.
- [6] BARBOSA, R. M.; CAPPELLE, M. R.; RAUTENBACH, D. **On Graphs with Maximal Independents Sets of Few Sizes, Minimum Degree at least 2, and Girth at least 7.** *Discrete Math.*, 313:1630–1635, 2013.
- [7] BARBOSA, R. M.; R. CAPPELLE, M. **Produtos de Grafos Z_m -bem-cobertos.** *TEMA - Tend. Mat. Apl. Comput.*, 13:75–83, 2012.
- [8] BERGE, C. **Some common properties for regularizable graphs, edge-critical graphs and b-graphs.** *Annals of Discrete Math.*, 12:31–44, 1982.
- [9] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics).** Springer, New York, 2008.
- [10] CAPPELLE, M. R.; JOOS, F.; MÜTTEL, J.; RAUTENBACH, D. **Badly-covered graphs.** Aceito, 2014.
- [11] CAPPELLE, M. R.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D. **Recognizing Some Complementary Products.** *Theoretical Computer Science*, 521:1–7, 2014.

- [12] CAPPELLE, M. R.; RAUTENBACH, D. **Extending berge's and favaron's results about well-covered graphs.** *Discrete Math.*, 313(23):2742–2747, 2013.
- [13] CARO, Y. **Subdivisions, parity and well-covered graphs.** *J. Graph Theory*, 25:85–94, 1997.
- [14] CARO, Y.; ELLINGHAM, M.; RAMEY, J. **Local structure when all maximal independent sets have equal weight.** *SIAM J. Discrete Math.*, 11:644–654, 1998.
- [15] CARO, Y.; HARTNELL, B. **A Characterization of Z_m -well-covered graphs of girth 6 or more.** *J. Graph Theory*, 33:246–255, 2000.
- [16] CARO, Y.; SEBŐ, A.; TARSI, M. **Recognizing greedy structures.** *J. Algorithms*, 20:137–156, 1996.
- [17] CHVÁTAL, V.; SLATER, P. J. **A note on well-covered graphs.** *Annals of Discrete Math.*, 55:179–182, 1993.
- [18] DESORMEAUX, W. J.; HAYNES, T. W. **Restrained domination in complementary prisms.** *Util. Math.*, 86:267–278, 2011.
- [19] DUARTE, M. A.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D.; SOUZA, U. S. **Remarks on Complementary Prisms.** Submetido, 2014.
- [20] FAVARON, O. **Very well-covered graphs.** *Discrete Math.*, 42:177–187, 1982.
- [21] FEDER, T. **Product graph representations.** *J. Graph Theory*, 16:467–488, 1992.
- [22] FEIGENBAUM, J.; HERSHBERGER, J.; SCHÄFFER, A. A. **A polynomial time algorithm for finding the prime factors of cartesian- product graphs.** *Discrete Appl. Math.*, 12:123–138, 1985.
- [23] FINBOW, A.; HARTNELL, B.; NOWAKOWSKI, R. J. **A characterization of well-covered graphs of girth 5 or greater.** *J. Combin. Theory, Ser. B*, 57:44–68, 1993.
- [24] FINBOW, A.; HARTNELL, B.; NOWAKOWSKI, R. J. **A characterization of well-covered graphs that contain neither 4- nor 5-cycles.** *J. Graph Theory*, 18:713–721, 1994.
- [25] FINBOW, A.; HARTNELL, B.; WHITEHEAD, C. **A characterization of graphs of girth eight or more with exactly two sizes of maximal independent sets.** *Discrete Math.*, 125:153–167, 1994.
- [26] FRADKIN, A. O. **On the well-coveredness of Cartesian products of graphs.** *Discrete Math.*, 309(1):238–246, 2009.

- [27] GONGORA, J. A.; HAYNES, T. W.; JUM, E. **Independent domination in complementary prisms.** *Util Math.*, 91:3–12, 2013.
- [28] HAMMACK, R.; IMRICH, W.; KLAVŽAR, S. **Handbook of product graphs.** CRC Press, Boca Raton., 2a. ed edition, 2011.
- [29] HARTNELL, B.; PLUMMER, M. D. **On 4-connected claw-free well-covered graphs.** *Discrete Appl. Math.*, 64:57–65, 1996.
- [30] HARTNELL, B.; RALL, D. F. **On the Cartesian product of non well-covered graphs.** *CoRR*, abs/1204.6681, 2012.
- [31] HARTNELL, B. L. **Well-covered graphs.** *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 29:107–115, 1999.
- [32] HARTNELL, B. L.; RALL, D. **On graphs having maximal independent sets of exactly t distinct cardinalities.** *Graphs and Combinatorics*, 29:519–525, 2013.
- [33] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; J. SLATER, P.; VAN DER MERWE, L. C. **The complementary product of two graphs.** *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30, 2007.
- [34] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; VAN DER MERWE, L. C. **Domination and Total Domination in Complementary Prisms.** *J. Comb. Optim.*, 18:23–37, 2009.
- [35] HAYNES, T. W.; HOLMES, K. R. S.; KOESSLERV, D. R. **Locating-Domination in Complementary Prisms.** *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 72:163–171, 2010.
- [36] HAYNES, T. W.; HOLMES, K. R. S.; KOESSLERV, D. R.; SEWEL, L. **Locating-Domination in Complementary Prisms of Paths and Cycles.** *Congressus Numerantium*, 199:45–55, 2009.
- [37] IMRICH, W.; PETERIN, I. **Recognizing Cartesian products in linear time.** *Discrete Math.*, p. 472–483, 2007.
- [38] KARP, R. M. **Reducibility among combinatorial problems.** *In Complexity of Computer Computations (Yorktown Heights, NY)*, p. 85–104, 1972.
- [39] KATHIRESAN, K. M.; AROCKIARAJ, S. **Wiener indices of generalized complementary prisms.** *Bull. Inst. Comb. Appl.*, p. 31–45, 2010.
- [40] KAZEMI, A. P. **k -tuple total domination in complementary prisms.** *ISRN Discrete Mathematics*, 2011.

- [41] LEVIT, V.; TANKUS, D. **On related edges in well-covered graphs without cycles of length 4 and 6.** *Lecture Notes in Computer Science*, 5420:144–147, 2009.
- [42] MOON, J. W.; MOSER, L. **On cliques in graphs.** *Israel J. Math.*, 3:23–28, 1965.
- [43] NANDI, M.; PARUI, S.; ADHIKARI, A. **The domination numbers of cylindrical grid graphs.** *Applied Mathematics and Computation*, 217:4879–4889, 2011.
- [44] PLUMMER, M. D. **Well-covered graphs.** *J. Combin. Theory*, 8:91–98, 1970.
- [45] PLUMMER, M. D. **Well-covered graphs: a survey.** *Quaestiones Math.*, 16:253–287, 1993.
- [46] PRISNER, E.; TOPP, J.; VESTERGAARD, P. D. **Well-covered simplicial, chordal and circular arc graphs.** *J. Graph Theory*, 21:113–119, 1996.
- [47] RANDEPATH, B.; VESTERGAARD, P. D. **On well-covered graphs of odd girth 7 or greater.** *Discussiones Mathematicae, Graph Theory*, 22:159–172, 2002.
- [48] RAVINDRA, G. **Well-covered graphs.** *J. Combin. Inform. System Sci*, 2:20–21, 1977.
- [49] SABIDUSSI, G. **Graph multiplication.** *Math. Z.*, 72:446–457, 1960.
- [50] SANKARANARAYANA, R. S.; STEWART, L. K. **Complexity results for well-covered graphs.** *J. Combin. Inform. System Sci*, 2:20–21, 1997.
- [51] TANKUS, D.; TARSI, M. **Well-covered claw-free graphs.** *J. Combin. Theory, Ser. B*, 66:293–302, 1996.
- [52] TANKUS, D.; TARSI, M. **The structure of well-covered graphs and the complexity of their recognition problems.** *J. Combin. Theory, Ser. B*, 69:230–233, 1997.
- [53] TOPP, J.; VOLKMANN, L. **Well-covered and well-dominated block graphs and unicyclic graphs.** *Mathematica Panonica 1/2*, p. 55–66, 1990.
- [54] TOPP, J.; VOLKMANN, L. **On the well coveredness of Products of Graphs.** *Ars Combinatoria*, 33:199–215, 1992.
- [55] VIZING, V. G. **The Cartesian product of graphs (Russian).** *Vychisl. Systemy*, 9:30–43, 1963.
- [56] WHITEHEAD, C. A. **A characterization of well-covered claw-free graphs containing no 4-cycles.** *Ars Combinatoria.*, 39:189–198, 1995.
- [57] WINKLER, P. **Factoring a graph in polynomial time.** *Eur. J. Comb.*, 8:209–212, 1987.