UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CÂMPUS DE CAMPO GRANDE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ALEX VINICIUS DE BASTOS RANGEL

Invariantes Operatórios e a Compreensão da Definição Formal de Limite de Função: Uma Análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais

CAMPO GRANDE - MS
2025

Alex Vinicius de Bastos Rangel

Invariantes Operatórios e a Compreensão da Definição Formal de Limite de Função: Uma Análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador(a): Profa. Dr.(a) Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato

CAMPO GRANDE - MS

2025

Alex Vinicius de Bastos Rangel

Invariantes Operatórios e a Compreensão da Definição Formal de Limite de Função: Uma Análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais

O presente trabalho em nível de Mestrado foi avaliado e aprovado, em 1 de setembro de 2025, pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato, Dr.(a)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof.(a) José Luiz Magalhães de Freitas, Dr.(a)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof.(a) Osnildo Andrade Carvalho, Dr.(a)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

Certificamos que esta é a versão original e final do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Insira neste espaço a assinatura digital

Prof. João Ricardo Viola dos Santos, Dr.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Insira neste espaço a assinatura digital

Prof.(a) Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato, Dr.(a)
Orientadora

Campo Grande - MS, 1 de setembro de 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, pelas forças renovadas diariamente e por me permitir chegar até aqui, realizando um sonho que por tantas vezes pareceu distante.

À minha esposa, Danielle Cáceres, meu amor, minha parceira de todas as horas, meu mais profundo agradecimento. Você acreditou em mim quando eu mesmo já não conseguia, me apoiou em cada momento desta caminhada e me deu a coragem necessária para seguir. Sem você, este mestrado teria sido muito mais difícil. Obrigado por sua paciência, seu carinho e por caminhar ao meu lado.

Aos colegas de curso Gleisson Santos, Eliete D'stefani, Vanuza Durães e Jesus Reinaldo, minha eterna gratidão. Em um momento difícil no curso, vocês estenderam a mão com empatia, dando-me forças para continuar. Esse gesto de amizade é muito maior do que qualquer sala de aula.

Às minhas colegas de orientação Vanessa Corsino, Vitória Luges, Michele Ventura e Maria Gabriela, que tanto me ajudaram no curso, seja auxiliando com a experimentação na pesquisa, tecendo comentários para melhora de meus textos ou me motivando, vocês são muito especiais e terão minha eterna gratidão.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS, meu respeito e admiração. Cada disciplina me trouxe algo novo, e saio deste percurso com aprendizados que levarei para a vida. Em especial, às professoras Marilena Bittar e Suely Scherer, que me acolheram com palavras e gestos no momento em que mais precisei. Obrigado por irem além do papel de professoras.

Aos meus pais, Agrinaldo Rangel e Dulciara Bastos, minha gratidão eterna. Desde cedo, vocês me ensinaram o valor da educação e me incentivaram a nunca desistir dos meus estudos. Essa conquista também é de vocês, que sempre estiveram presentes, mesmo nas ausências.

Agradeço ao professor Fredy González (UFRN), pelas contribuições importantes durante a elaboração da justificativa da pesquisa, especialmente pelas reflexões compartilhadas no EBRAPEM.

Ao professor doutor Claudemir Aniz, agradeço imensamente por me permitir acompanhar suas aulas de Cálculo I no curso de Física da UFMS. Depois de mais de uma década afastado da academia, foi participando de suas aulas e auxiliando os

estudantes que reencontrei o prazer do ensino e o entusiasmo pela matemática. Sua generosidade, domínio do conhecimento matemático e amor pelo que faz me inspiraram profundamente.

Agradeço aos professores doutores José Luiz Magalhães de Freitas e Osnildo Andrade Carvalho por aceitarem ajudar com a defesa e contribuir nesse importante momento.

Por fim, mas com um agradecimento especial, à minha orientadora, professora doutora Sonia Burigato. Obrigado por sua dedicação, por cada leitura cuidadosa, por cada retorno exigente, por sua paciência, e, principalmente, por não desistir de mim. A pesquisa tem seus desafios, e a senhora tornou esse caminho possível. Aprendi muito neste processo, e levarei comigo cada conselho, cada crítica e cada gesto de confiança.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse possível, meu muito obrigado.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes dos cursos de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul ao enfrentarem situações elaboradas para favorecer a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto. Fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, a investigação analisa os teoremas em ação expressos pelas representações e estratégias dos estudantes. A metodologia adotada é a Engenharia Didática, contemplando as etapas de análise preliminar, concepção e análise *a priori* da sequência didática, experimentação e análise *a posteriori* com validação. A sequência didática proposta foi aplicada a duas duplas de estudantes, uma do curso de licenciatura e outra do curso de bacharelado, e foi composta por onze atividades organizadas em três sessões, centradas na construção progressiva da noção de distância e suas representações algébricas e geométricas, culminando na notação característica da definição formal de Limite de funções. Os resultados evidenciaram que os estudantes mobilizaram diferentes teoremas em ação ao longo das atividades, manifestando filiações com conceitos trabalhados em situações vivenciadas anteriormente, especialmente no uso de desigualdades, intervalos, representações gráficas e operações com módulo. A análise *a posteriori* revelou também que alguns desses teoremas em ação, que não contribuíam para a compreensão dos elementos relacionados à definição formal de Limite, foram abandonados, houve ruptura, e substituídos por outros mais pertinentes, como, por exemplo, um que envolvia a noção de distância. Isso foi possível graças ao enfrentamento das atividades que exigiam a generalização algébrica da ideia de aproximação, via épsilon e delta, trabalhadas com os estudantes na sequência didática.

Palavras-chave: Teoremas em ação; Definição formal de Limite de uma função; Teoria dos Campos Conceituais; Filiações e Rupturas; Sequência Didática.

ABSTRACT

This research aims to investigate the operative invariants mobilized by Mathematics students at the Federal University of Mato Grosso do Sul when facing situations designed to foster the understanding of the formal definition of the limit of a function at a point. Grounded in Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields, the study analyzes the theorems-in-action expressed through the students' representations and strategies. The adopted methodology is Didactical Engineering, encompassing the stages of preliminary analysis, design and a priori analysis of the didactical sequence, experimentation, and a posteriori analysis with validation. The proposed didactical sequence was implemented with two pairs of students—one from the teaching degree program and the other from the bachelor's program—and consisted of eleven activities organized into three sessions. These activities focused on the progressive construction of the notion of distance and its algebraic and geometric representations, culminating in the characteristic notation of the formal definition of limit. The results showed that students mobilized different theorems-in-action throughout the activities, revealing affiliations with concepts previously encountered, especially in their use of inequalities, intervals, graphical representations, and operations involving absolute value. The a posteriori analysis also revealed that some of these theorems-in-action, which did not contribute to the understanding of elements related to the formal definition of limit, were abandoned—ruptured—and replaced by more pertinent ones, such as one involving the notion of distance. This shift was made possible through the challenges posed by activities requiring the algebraic generalization of the idea of approximation, by epsilon and delta, as developed with the students during the didactical sequence.

Keywords: Theorems-in-action; Formal Definition of the Limit of a Function; Theory of Conceptual Fields; Affiliations and Ruptures; Didactical Sequence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação Geométrica da Distância entre M e N 52
Figura 2 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3.....53
Figura 3 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3 menor que 2 unidades 56
Figura 4 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3 menor do que δ.....59
Figura 5 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3 menor do que $0{,}5$ ...59
Figura 6 - Representação geométrica da distância do intervalo $2{,}5 < x < 3{,}5$ 62
Figura 7 - Representação geométrica da associação de intervalos $6 < f(x) < 8$ e $2{,}5 < x < 3{,}5$ 64
Figura 8 - Representação geométrica do intervalo $2{,}7 < x < 3{,}3$ 69
Figura 9 - Representação geométrica da associação de intervalos $4{,}7 < f(x) < 5{,}3$ e $2{,}7 < x < 3{,}3$.....69
Figura 10 - Representação geométrica do intervalo $4{,}7 < y < 5{,}3$ 73
Figura 11 - Associação geométrica dos intervalos $4{,}7 < y < 5{,}3$ e $2{,}7 < x < 3{,}3$ 74
Figura 12 - Gráfico da função $f(x) = x + 2$ 75
Figura 13 - Representação geométrica do intervalo $-\epsilon + 5 < f(x) < \epsilon + 5$.....90
Figura 14 - Gráfico de uma função f descontínua em $x = p$ 92
Figura 15 - PERCURSO DO ESTUDANTE EL_1 201
Figura 16 - PERCURSO DO ESTUDANTE EL_2 201
Figura 17 - PERCURSO DO ESTUDANTE EB_1.....202
Figura 18 - PERCURSO DO ESTUDANTE EB_2.....203

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Resolução da primeira atividade - itens (a) e (b) 99
Quadro 2 - Resoluções dos estudantes na atividade 1, item (c)..... 103
Quadro 3 - Resoluções dos estudantes na atividade 1, item (d) 104
Quadro 4 - Resoluções dos estudantes nos itens (a) e (b) da atividade 2 . 107
Quadro 5 - Resolução da atividade 2 itens (c) e (d) 110
Quadro 6 - Resoluções da Atividade 3 itens (a) e (b)..... 112
Quadro 7- Resoluções da Atividade 3 itens (c) e (d) 115
Quadro 8 - Resoluções da Atividade 4 itens (a) e (b)..... 118
Quadro 9 - Resoluções da Atividade 4 itens (c), (d) e (e)..... 123
Quadro 10 - Resoluções da Atividade 5 itens (a), (b) e (c)..... 130
Quadro 11- Resoluções da Atividade 5 itens (d), e (e)..... 133
Quadro 12 - Resoluções da Atividade 6 itens (a), (b) e (c)..... 139
Quadro 13 - Resoluções da Atividade 6 itens (d), e (e)..... 142
Quadro 14 - Resoluções da Atividade 7 item (a)..... 147
Quadro 15- Resoluções da Atividade 7 item (b)..... 150
Quadro 16 - Resoluções da Atividade 7 item (c) 153
Quadro 17- Resoluções da Atividade 8 itens (a) e (b)..... 158
Quadro 18- Resoluções da Atividade 8 item (c) 161
Quadro 19 - Resoluções da Atividade 8 item (d)..... 164
Quadro 20 - Resoluções da Atividade 8 item (e)..... 167
Quadro 21 - Resoluções da Atividade 9 item (a)..... 169
Quadro 22 - Resoluções da Atividade 9 item (b)..... 171
Quadro 23 - Resoluções da Atividade 9 item (c) 174
Quadro 24 - Resoluções da Atividade 9 item (d)..... 177
Quadro 25 - Resoluções da Atividade 9 item (e)..... 179
Quadro 26 – Resoluções da Atividade 10 item (a) 181
Quadro 27 - Resoluções da Atividade 10 item (b)..... 183
Quadro 28 - Resoluções da Atividade 10 item (c) 185
Quadro 29- Resoluções da Atividade 10 item (d)..... 188
Quadro 30 - Resoluções da Atividade 10 item (e)..... 191
Quadro 31 - Resoluções da Atividade 11 item (a)..... 194
Quadro 32- Resoluções da Atividade 11 item (b)..... 196
Quadro 33- Resoluções da Atividade 11 item (c) 199

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

CAAE – Certificado de Apresentação de Apreciação Ética

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

DFL – Definição Formal de Limite de uma função

EB – Estudante do curso de Bacharelado em Matemática que não fez parte da análise

EB_1 – Estudante 1 do curso de Bacharelado em Matemática

EB_2 – Estudante 2 do curso de Bacharelado em Matemática

EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática

EL – Estudante do curso de Licenciatura em Matemática que não fez parte da análise

EL_1 – Estudante 1 do curso de Licenciatura em Matemática

EL_2 – Estudante 2 do curso de Licenciatura em Matemática

IFBA – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

MS – Mato Grosso do Sul

Scielo – Scientific Eletronic Library Online

T_1 – Teorema em Ação 1 (modelizado na pesquisa)

$T_{1.1}$ – Teorema em Ação 1.1 (modelizado na pesquisa)

T_2 – Teorema em Ação 2 (modelizado na pesquisa)

$T_{2.1}$ – Teorema em Ação 2.1 (modelizado na pesquisa)

T_3 – Teorema em Ação 3 (modelizado na pesquisa)

T_4 – Teorema em Ação 4 (modelizado na pesquisa)

T_5 – Teorema em Ação 5 (modelizado na pesquisa)

T_6 – Teorema em Ação 6 (modelizado na pesquisa)

T_7 – Teorema em Ação 7 (modelizado na pesquisa)

T_8 – Teorema em Ação 8 (modelizado na pesquisa)

T_9 – Teorema em Ação 9 (modelizado na pesquisa)

TCC – Teoria dos Campos Conceituais

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TF_1 – Teorema em Ação Falso 1 (modelizado na pesquisa)

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16
2 REFERENCIAL TEÓRICO 19
3 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O TEMA 22
3.1 Alguns Estudos sobre a Definição Formal de Limite de uma função em um ponto, em livros didáticos 30
4 METODOLOGIA DE PESQUISA 32
4.1 As análises prévias 33
4.2 Concepção e análise *a priori* 34
4.3 Experimentação 35
4.4 Análise *a posteriori* e validação 35
5 ELEMENTOS INTEGRANTES DA INVESTIGAÇÃO 36
5.1 Definição Formal de Limite 36
5.2 A evolução histórica e epistemológica da Definição Formal de Limite de uma função 38
5.3 Variáveis Didáticas 43
5.4 Justificativa para a escolha das atividades 44
5.5 Mediação do pesquisador na experimentação 45
5.6 Modelização dos Teoremas em Ação 47
6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE *A PRIORI* 50
6.1 1ª Sessão 51
6.1.1 1ª Atividade 51
6.1.2 2ª Atividade 54
6.1.3 3ª Atividade 57
6.1.4 4ª Atividade 60
6.2 2ª Sessão 65
6.2.1 5ª Atividade 65
6.2.2 6ª Atividade 70
6.2.3 7ª Atividade 75
6.3 3ª Sessão 79
6.3.1 8ª Atividade 79
6.3.2 9ª Atividade 83

6.3.3 10ª Atividade....88
6.3.4 11ª Atividade....91
7 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE *A POSTERIORI* e VALIDAÇÃO....94
7.1 Primeira Sessão....99
7.1.1 1ª Atividade - Itens (a) e (b)....99
7.1.2 1ª Atividade - Item (c)....102
7.1.3 1ª Atividade - Item (d)....104
7.1.4 2ª Atividade - Itens (a) e (b)....106
7.1.5 2ª Atividade - Itens (c) e (d)....110
7.1.6 3ª Atividade - Itens (a) e (b)....112
7.1.7 3ª Atividade - Itens (c) e (d)....115
7.1.8 4ª Atividade - Itens (a) e (b)....118
7.1.9 4ª Atividade - Itens (c), (d) e (e)....123
7.2 2ª Sessão....128
7.2.1 5ª Atividade - Itens (a), (b) e (c)....130
7.2.2 5ª Atividade - Itens (d), e (e)....133
7.2.3 6ª atividade - Itens (a), (b) e (c)....139
7.2.4 6ª atividade - Itens (d), e (e)....141
7.2.5 7ª atividade - Item (a)....147
7.2.6 7ª atividade - Item (b)....150
7.2.7 7ª atividade - Item (c)....152
7.2.8 Validação da segunda sessão (atividades 5 a 7)....155
7.3 3ª Sessão....156
7.3.1 8ª Atividade - Itens (a) e (b)....158
7.3.2 8ª atividade - Item (c)....161
7.3.3 8ª atividade - Item (d)....164
7.3.4 8ª atividade - Item (e)....167
7.3.5 9ª atividade - Item (a)....169
7.3.6 9ª atividade - Item (b)....170
7.3.7 9ª atividade - Item (c)....173
7.3.8 9ª atividade - Item (d)....176
7.3.9 9ª atividade - Item (e)....179
7.3.10 10ª atividade - Item (a)....180
7.3.11 10ª atividade - Item (b)....183

7.3.12 10ª atividade - Item (c) 185
7.3.13 10ª atividade - Item (d) 188
7.3.14 10ª atividade - Item (e) 191
7.3.15 11ª atividade - Item (a) 194
7.3.16 11ª atividade - Item (b) 196
7.3.16 11ª atividade - Item (c) 198
8 ANÁLISE DO PERCURSO DOS ESTUDANTES 200
9 CONCLUSÃO 204
REFERÊNCIAS 207
APÊNDICES 211

1 INTRODUÇÃO

Minha trajetória no mundo do ensino da matemática começou cedo, quando, ainda na adolescência, passei a ministrar aulas particulares para colegas das minhas turmas de sala de aula. Esse trabalho, inicialmente informal, revelou-se uma experiência transformadora para mim, haja vista a ojeriza de meus colegas quanto à matéria. Enfrentar o desafio de explicar conceitos abstratos a pessoas com diferentes níveis de entendimento e modos de pensar não apenas reforçou minha paixão pelo ensino, mas também despertou uma inquietação: como construir pontes entre as ideias intuitivas que os estudantes trazem e o formalismo característico da matemática? Essa questão, que já me instigava desde então, tornou-se ainda mais relevante à medida que avançava em minha formação acadêmica.

Ingressei no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Anhanguera Uniderp no ano de 2011, onde a riqueza e a complexidade da disciplina foram sendo desvendadas sob um viés técnico e rigoroso. No entanto, foi nesse período que identifiquei um aspecto que marcaria meu interesse por pesquisar o ensino e a aprendizagem de Limites. O conceito de Limite foi introduzido inicialmente de forma intuitiva, com exemplos numéricos e gráficos que ofereciam pistas sobre seu significado. No entanto, a formalização desse conceito com a definição $\epsilon - \delta$ abordada de maneira rápida e superficial, sempre foi desconectada, para mim, de algum entendimento mais profundo, assim como muitos dos conteúdos que eram trabalhados na ementa do curso na minha formação.

Em sua estrutura de ensino, a abordagem pedagógica priorizava listas de exercícios voltadas ao domínio de técnicas algébricas, relegando a aprendizagem da definição formal do Limite de uma função – DFL – por meio dos parâmetros $\epsilon - \delta$ a segundo plano. Essa forma de ensino, embora eficiente em desenvolver habilidade técnica, deixava lacunas no entendimento conceitual e de compreensão na prática para meu trabalho, algo que eu observava tanto em colegas quanto em mim mesmo. A prática constante de manipulações envolvendo produtos notáveis, fatoração, simplificação, quando dissociada da ideia de Limite como um conceito que descreve a tendência do valor de uma função, não apenas tornava o conteúdo abstrato, mas também desprovido de relevância para a compreensão mais ampla. Isso se refletia

diretamente no meu trabalho com aulas particulares de Cálculo[1], pois muitos estudantes que eu acompanhava decoravam procedimentos sem conseguir explicar o porquê das regras que aplicavam. O conteúdo era abordado, mas não era compreendido.

A constatação dessas lacunas aprofundou minha inquietação com relação ao ensino de matemática e despertou um desejo de entender melhor como os estudantes aprendem — ou deixam de aprender — conceitos com aspectos mais formais, envolvendo a dedução matemática. Ao avançar em minha formação e continuar ministrando aulas particulares, fui notando que essa dificuldade não era exclusiva de um ambiente específico, mas parecia um desafio recorrente em diferentes contextos.

Ao ingressar no Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), sob a orientação da professora Sônia, vi a oportunidade de transformar essa inquietação em uma pesquisa acadêmica estruturada. Foi nesse contexto que a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud emergiu como um referencial teórico robusto para compreender as dificuldades relacionadas ao aprendizado da definição formal de Limite de funções. Essa teoria, oferece uma estrutura para investigar as relações que os estudantes estabelecem ao lidarem com situações envolvendo o conceito de Limite de função, por meio do estudo dos esquemas mobilizados por eles ao enfrentar essas situações.

Esta dissertação, portanto, reflete a convergência de minha trajetória acadêmica, minha experiência prática no ensino e minha busca por respostas às questões que me acompanham desde a graduação. O objetivo desta pesquisa é investigar como estudantes do Curso de Matemática, de bacharelado e de licenciatura, enfrentam o desafio de compreender a definição formal de Limite de uma função, considerando as dificuldades associadas à transição entre uma abordagem intuitiva e a sua formalização. Dessa forma, surge minha questão de pesquisa: Quais invariantes operatórios são mobilizados por estudantes dos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática ao enfrentar situações para o favorecimento da compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto?

A escolha dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática para a realização da experimentação justifica-se por alguns aspectos importantes dessa

[1] Quando citamos “Cálculo”, referimo-nos à disciplina de graduação “Cálculo Diferencial e Integral”.

definição no contexto da formação matemática. Em primeiro lugar, por sua fundamentação teórica: a definição de Limite constitui um dos pilares do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática, fornecendo as bases para a construção de conceitos fundamentais, como continuidade, derivadas e integrais. A partir dela, estabelece-se propriedades e teoremas[2] amplamente utilizados na formulação de modelos e na resolução de problemas matemáticos e científicos.

Em segundo lugar, trata-se de uma definição que exige precisão e rigor matemático, ao passo que proporciona uma abordagem analítica refinada do comportamento de funções. A utilização da notação $\epsilon - \delta$, por exemplo, permite estabelecer critérios formais para a convergência de sequências e séries, assim como a existência de Limites. Nesse sentido, essa definição favorece o desenvolvimento da linguagem e do raciocínio matemático abstrato, competências centrais à formação de qualquer estudante de matemática, tanto na vertente do bacharelado quanto na licenciatura.

Além disso, a definição formal de Limite possibilita a análise detalhada do comportamento de funções reais e sequências, à medida que suas variáveis se aproximam de determinados pontos do domínio ou tendem ao infinito. Esse tipo de análise contribui para a compreensão de tendências, restrições e comportamentos específicos de funções — como a existência de assíntotas, crescimento ou decrescimento ilimitado e oscilações — sendo assim, uma ferramenta importante para aqueles que pretendem atuar, seja na docência ou em áreas de modelagem matemática.

Apesar de sua importância, diversos estudos nacionais e internacionais, como os trabalhos de Zuchi (2005), Burigato (2019), Doumbia (2020), Carvalho (2022) e o artigo de Burigato e Rachidi (2021), apontam que a definição formal de Limite apresenta um alto grau de dificuldade de compreensão para os estudantes. Entre os principais motivos, destacam-se: o distanciamento conceitual entre a noção intuitiva e a definição formal, a dificuldade com a notação e com o uso de quantificadores, a falta de familiaridade com conceitos como distância entre números reais, intervalos, desigualdades e valor absoluto, além da ausência de estratégias de ensino que

[2] Para Courant e Robbins (1996) e Polya (2004), uma propriedade é um atributo de um objeto matemático, ao passo que um teorema é uma afirmativa matemática provada ser verdadeira por meio de uma demonstração rigorosa.

favoreçam a construção de sentido para essa definição no decorrer do ensino de Cálculo.

Em particular, Burigato (2019) e Doumbia (2020) criticam a sequência de ensino tradicional que apresenta primeiro uma noção intuitiva (muitas vezes vinculada à metáfora cinemática do "x se aproximando de p") e, em seguida, introduz a definição formal sem qualquer ponte conceitual consolidada entre essas abordagens. Esse distanciamento dificulta a aprendizagem e contribui para a perpetuação de uma formação conceitual equivocada ou fragmentada sobre o Limite (Tall e Vinner, 1981).

Além disso, como apontam os estudos de Abreu (2011) e Carvalho (2022), muitos estudantes operam com a definição formal apenas de forma mecânica ou instrumental, sem se apropriar de sua estrutura lógica ou reconhecer sua importância dentro da arquitetura conceitual do Cálculo.

É diante desse cenário que esta pesquisa se insere, buscando compreender e modelizar os invariantes operatórios, em particular os teoremas em ação, presentes nos esquemas que estudantes de Licenciatura e Bacharelado mobilizam ao se depararem com situações construídas para favorecer a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto. A escolha por estudantes desses dois cursos justifica-se ainda pela possibilidade de análise comparativa entre trajetórias formativas distintas — uma com ênfase na docência e outra mais voltada à matemática pura — permitindo assim ampliar a compreensão sobre as dificuldades e as potencialidades didáticas envolvidas no ensino desse conceito.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Utilizaremos como referencial teórico a Teoria dos Campo Conceituais (TCC) desenvolvida por Gérard Vergnaud (1985) em que, um conceito é composto por três conjuntos:

> S - Situações que dão sentido ao conceito
> I - Invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações
> L - Representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráficas…) que permitem representar os conceitos e suas relações, e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam (Vergnaud, 2009).

As situações definidas por Vergnaud são entendidas como um conjunto de tarefas progressivamente mais complexas, cujo domínio depende de uma variedade de conceitos, procedimentos e representações conectadas entre si.

Os invariantes operatórios (constituídos por teoremas em ação e conceitos em ação) são os conhecimentos que o sujeito coloca em ação diante de um conjunto de situações referentes a um mesmo conceito.

Os teoremas em ação são as proposições tidas como verdadeiras na resolução da situação pelo sujeito. Todavia, eles podem ser falsos, mas o estudante o mobiliza acreditando estar correto, pois reconhece certa familiaridade na situação dada com alguma outra vivenciada anteriormente. O conceito em ação é o conceito abarcado na resolução da situação, e considerado pertinente pelo sujeito, estando imbricados aos teoremas em ação na ação deste sujeito (Bittar e Muniz, 2009).

Dessa forma, um conceito em ação é um conceito considerado pertinente pelo sujeito numa situação específica. Já um teorema em ação é uma proposição ou declaração do tipo "*se... então...*" que é considerada verdadeira e aplicável pelo sujeito quando este está agindo em uma determinada situação. É uma afirmação que faz sentido e é válida no contexto que está sendo usada pelo sujeito.

As representações linguísticas e simbólicas, na perspectiva da TCC, referem-se aos meios de expressão e comunicação que possibilitam a representação dos conceitos e suas relações. Essas representações podem assumir diversas formas, incluindo linguagem verbal, notações algébricas, representações geométricas, símbolos matemáticos, entre outros. Elas desempenham um papel fundamental ao permitir a externalização e a comunicação dos conhecimentos adquiridos, funcionando como ferramentas para expressar os invariantes operatórios que foram mobilizados pelo sujeito em resposta a situações específicas. Assim, as representações linguísticas e simbólicas são instrumentos que permitem aos sujeitos expressar, compartilhar e aprofundar seu entendimento sobre os conceitos matemáticos.

Podemos exemplificar uma situação envolvendo Limite em Cálculo Diferencial e Integral imaginando um estudante que está aprendendo sobre este conceito. Suponhamos que os estudantes da turma de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de Matemática estejam estudando Limites de funções à medida que a variável x se aproxima de um determinado ponto. A situação proposta pelo professor pode envolver a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

O professor apresenta a função $f(x)$ e pede aos estudantes para calcular $f(x)$ para valores de x próximos, mas diferentes de 1. Eles podem usar uma tabela de valores ou um *software* de computação.

Os estudantes observam que quando substituem x por 1, a expressão $\frac{x^2-1}{x-1}$ tende à forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Isso cria uma oportunidade para discutir o conceito de Limites e a necessidade de técnicas especiais para lidar com situações desse tipo. Considerando isto, o professor procura discutir com os estudantes o que acontece com valores aproximados em torno de x para verificar o comportamento da função.

O professor propõe aos estudantes encontrar uma expressão simplificada para $f(x)$ que permita calcular o Limite à medida que x se aproxima de 1 sem causar uma forma indeterminada, e dessa forma, os estudantes são incentivados a utilizar conhecimento envolvendo as representações que aparecem na situação, como fatoração e a simplificação algébrica, para manipular a expressão e tentar eliminar a indeterminação.

Nessa situação, por exemplo, o estudante pode mobilizar o conceito em ação: a fatoração e, vinculado a ele, alguns teoremas em ação, passíveis de serem corretos ou não. Nesse caso, um erro comum no estudo da fatoração é o estudante achar que se tenho $x^2 - 1$, então a forma fatorada é $(x - 1)^2$. Percebe-se que esse teorema em ação é falso, mas o estudante o mobiliza acreditando estar correto, por reconhecer certa familiaridade na situação dada com outra vivenciada anteriormente.

Para Vergnaud, estas representações linguísticas e simbólicas são essenciais para expressar, comunicar e compreender os conceitos matemáticos envolvidos na situação, desde a função original até a expressão simplificada e os Limites resultantes. Desta forma, essas representações contribuem para a construção de conhecimento matemático pelos estudantes, e são elas que vão nos permitir investigar os teoremas em ação mobilizados nas situações.

Indispensável tratar no presente trabalho, ainda, dentro da teoria dos campos conceituais de Vergnaud, as definições de filiações e rupturas. Estes são conceitos que descrevem o desenvolvimento do conhecimento em uma determinada área. Uma

filiação ocorre quando uma pessoa constrói uma nova ideia ou conceito com base em seu conhecimento anterior. A filiação é um processo de continuidade, no qual os conhecimentos anteriores são ampliados e refinados à medida que novos conceitos são adquiridos (Vergnaud, 2011).

Todavia, nem todas as filiações são mais adequadas para construção do novo conceito. Algumas vezes o sujeito precisa romper com algum conhecimento anterior, seja por encontrar uma discrepância, contradição, ou até mesmo erros como o teorema em ação falso exemplificado anteriormente para a fatoração, entre seu conhecimento anterior e uma nova informação. Nesse caso, é necessário revisar ou modificar suas escolhas anteriores para se adequarem à nova situação. A ruptura apresenta uma descontinuidade no desenvolvimento do conhecimento, pois exige uma reorganização das ideias prévias. É um momento de desequilíbrio cognitivo, no qual a pessoa precisa superar conflitos para alcançar uma compreensão mais aprofundada (Vergnaud, 2011).

Neste sentido, considerando o campo conceitual da definição formal de Limite de uma função em um ponto, iremos elaborar uma sequência didática composta por um conjunto de atividades visando identificar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no enfrentamento de situações para a compreensão da definição formal de Limite, para sua análise.

A seguir, apresentaremos algumas pesquisas sobre o tema que embasaram parte da nossa análise preliminar.

3 ALGUMAS PESQUISAS SOBRE O TEMA

Na busca pelos trabalhos, utilizamos as bases mais recorrentes encontradas nas pesquisas sobre o tema Limites, quais sejam, Google Acadêmico, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), *Scientific Eletronic Library Online* (Scielo), além dos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática – EBRAPEM, utilizando como filtro de busca os trabalhos realizados sobre o Limite de uma função real em um ponto, nas quais foram selecionadas as pesquisas, no lapso temporal dos últimos 20 anos, que utilizaram sequências didáticas em sua metodologia de pesquisa, mesmo que não as denominassem dessa forma, além de trabalhos que envolvessem a análise de livros didáticos, especificamente sobre o ensino de Limite de funções em um ponto. Apresentamos neste capítulo, as pesquisas mais

representativas encontradas sobre a temática a fim de justificar a elaboração de uma sequência didática para favorecimento da compreensão da Definição Formal de Limite de uma função em um ponto.

Inicialmente, é interessante citar que todos os trabalhos buscados nessa análise convergem no sentido de afirmar a dificuldade dos estudantes no ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em particular envolvendo o conceito de Limite de função, tanto em âmbito nacional como internacional.

Iniciando pela tese de Zuchi (2005), que abordou a aprendizagem da definição formal de Limite de uma função por meio de uma sequência didática:

> As dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem do cálculo são, frequentemente, objetos de pesquisa em nível nacional e internacional. Estas pesquisas abordam o problema sob diversas perspectivas e em vários contextos, oferecendo elementos que permitam a análise das dificuldades detectadas. (Zuchi, 2005, p. 5).

Sob esse viés, a autora parte da dificuldade dos estudantes na aprendizagem da definição formal de Limite de uma função, propondo um estudo para minimizá-la, envolvendo a Didática da Matemática e a Inteligência Artificial. Utilizando a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau como referencial, a autora elaborou uma sequência didática no ambiente lápis e papel e, posteriormente, num ambiente informatizado utilizando Inteligência Artificial.

Na aplicação da sequência didática, fase de experimentação, a análise dos resultados mostrou uma evolução positiva no entendimento da definição formal de Limite de funções. Os estudantes assumiram com responsabilidade as regras pertinentes ao contrato[3] estabelecido. A metodologia proposta propiciou um ambiente bastante rico de discussão entre as duplas e até mesmo entre a classe no momento da institucionalização do conteúdo em questão:

> Ao ser construído, por meio das situações problema, o conceito formal de limite, os alunos não demonstraram nenhum tipo de “aversão” ao formalismo matemático em questão. Numa situação de demonstração, onde freqüentemente os alunos apresentam dificuldades de resolução, percebemos a rapidez da aplicação do conceito de limite na resolução dessa questão. Todos os alunos apresentaram a relação entre ϵ e δ corretamente. (Zuchi, 2005, p. 115)

[3] O contrato didático, segundo Brousseau (1982), é um acordo implícito e explícito entre professor e estudante que define o que cada um espera do outro na relação de ensino-aprendizagem. É um conjunto de regras não escritas que orientam a interação e as expectativas mútuas dentro da sala de aula, tanto em relação aos comportamentos quanto aos papéis desempenhados.

Zuchi aponta os principais obstáculos[4] ao ensino e aprendizagem do conceito de Limites, aspectos históricos tais como a dificuldade em se trabalhar com grandezas infinitesimais e com a noção do infinito. Uma dificuldade bastante acentuada, segundo a autora, foi a relação entre épsilon e delta na definição de Limite pelo ponto de vista da aproximação. Constatou-se que essa dificuldade de aprendizagem era gerada por vários fatores, dentre os quais pode-se destacar: o obstáculo da linguagem matemática, a falha em conteúdos básicos como funções e inequações e, principalmente, o obstáculo presente na passagem da noção intuitiva, a qual utiliza-se do ponto de vista cinemático, diretamente para a definição de limite pelo ponto de vista da aproximação de uma maneira direta e formalizada.

Outra conclusão apontada é a de que o professor da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) se baseia na sequência utilizada pelos livros didáticos para apresentação do conceito de limite, o que gera um obstáculo à aprendizagem da definição de Limite de funções, uma vez que é apresentado ao estudante a noção intuitiva de Limite de funções (ou definição informal como nomeia a autora), e posteriormente, é apresentada a sua definição formal por meio de $\epsilon - \delta$ no qual os estudantes não conseguem associar a devida relação. E, para superar esse obstáculo, a autora faz uma experimentação em que, ao invés de apresentar diretamente a definição $\epsilon - \delta$, a sequência foi construída com atividades que exploravam progressivamente noções como distância entre números reais, intervalos e proximidade entre valores, permitindo que os estudantes amadurecessem o entendimento antes do contato com a linguagem formal.

Segundo a autora, com essa metodologia o estudante vai compreendendo, passo a passo as etapas necessárias para a construção da definição formal de Limite. Essa abordagem evitou o tradicional distanciamento conceitual e formalista da definição, e os resultados da experimentação mostraram que, ao final do processo, os estudantes não demonstraram aversão ao formalismo, algo frequentemente relatado em pesquisas sobre o ensino de Cálculo.

Outro aspecto de destaque foi o papel do professor como mediador na condução das discussões e institucionalizações, instigando os estudantes a

[4] Conforme proposto por Brousseau (2008), o termo obstáculo refere-se a um determinado conhecimento proposto anteriormente em contextos de domínio particular, contudo, teria de ser esquecido, à medida que não é válido em uma situação mais ampla.

desenvolverem melhor compreensão a partir das atividades propostas, sem a antecipação de conceitos prontos. Isso se alinha diretamente com a abordagem adotada nesta pesquisa, que, com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, busca compreender os invariantes operatórios mobilizados diante de situações envolvendo o conceito de Limite.

A experiência de Zuchi também reforça a importância de situações didáticas bem encadeadas. Sua sequência culmina com uma abordagem da definição formal de Limite de funções por $\epsilon - \delta$ em situações de demonstração, momento em que, segundo ela, percebeu-se a rapidez da aplicação do conceito (Zuchi, 2005), revelando ganhos no processo de aprendizagem.

Essas contribuições dialogam diretamente com a estrutura da sequência didática que propomos nesta dissertação. A ênfase dada à construção da noção de distância, à familiarização com desigualdades envolvendo módulo e à mobilização de representações algébricas e geométricas, visam justamente romper com o tratamento meramente técnico ou mecanizado do Limite de uma função e favorecer sua compreensão conceitual. Portanto, a pesquisa de Zuchi (2005) não apenas reforça a relevância dos caminhos adotados nesta pesquisa, mas confirma metodologicamente a opção por uma construção progressiva da definição de Limite a partir de situações cuidadosamente organizadas, nas quais a linguagem formal surge como necessidade decorrente da análise e generalização dos fenômenos observados pelos estudantes.

No período de busca destas pesquisas, um dos trabalhos que dialogam com a pesquisa de Zuchi (2005 é o artigo de Gontijo e Fontes (2022), no qual estes afirmam que, historicamente, a disciplina de CDI tem apresentado elevados índices de reprovação, e assim, desenvolveram uma pesquisa com o objetivo de analisar as concepções de estudantes dessa disciplina acerca do conceito de Limite a fim de identificar possíveis obstáculos para a sua aprendizagem. Os autores guiaram-se pela metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, e afirmam que, atualmente, é comum que o Limite seja explorado no início do curso, seja de modo intuitivo, utilitário ou operacional, mas não ter ligação com novas definições, como a de Derivada e de Integral, e nessa perspectiva o ensino de Limite torna-se desnecessário.

Além disso, os autores realizaram uma intervenção em uma sala de aula de Cálculo, com estudantes do curso de Física de uma instituição pública de ensino superior, na modalidade de ensino remoto. No desenvolvimento da disciplina com os estudantes, iniciou-se o trabalho com uma revisão sobre Funções, por meio de

atividades com o uso do GeoGebra para a introdução ao conteúdo Limites. Foi solicitado aos estudantes que escrevessem, sem consultar nenhum tipo de material, o que é Limite, a fim de conhecer suas concepções prévias sobre o assunto, de modo a identificar possíveis erros conceituais e estabelecer estratégias para a aprendizagem adequada desse conteúdo. Os estudantes enviaram suas anotações por meio da plataforma Google Classroom, como uma atividade. E, a partir das produções dos estudantes, foram identificados erros na aplicação de conceitos, organizados em quatro categorias: Limite como uma ferramenta, dificuldade de compreensão de funções matemáticas, dificuldade em compreender a definição de Limite e reprodução de conceitos.

Na intervenção realizada, a identificação de erros conceituais recorrentes, como a concepção de Limite como uma mera ferramenta de cálculo, a dificuldade na compreensão da estrutura funcional e a reprodução mecânica de conceitos, revela que grande parte dos estudantes internaliza o Limite de uma função apenas em seu aspecto técnico, com pouco ou nenhum entendimento sobre sua natureza conceitual. Esses resultados evidenciam que o ensino tradicional, centrado na resolução de exercícios com foco em técnicas algébricas, falha em promover a compreensão da definição formal de Limite em um ponto.

Essa análise se articula diretamente com a crítica de Rezende (2003), que aponta a prevalência da técnica sobre o significado no ensino de Limites de funções. Segundo este último autor, os estudantes desenvolvem maior habilidade em manipulações algébricas (como fatorações, simplificações ou manipulação de expressões racionais) do que na interpretação analítica da noção de Limite, o que evidencia uma algebrização exacerbada do conceito. Como consequência, o Limite acaba sendo reduzido a um conjunto de regras de cálculo desvinculadas de seus fundamentos teóricos, o que compromete a aprendizagem mais profunda e a capacidade de generalização.

A convergência entre as análises de Gontijo e Fontes (2022) e Rezende (2003) reforça a necessidade de um redirecionamento quanto à abordagem do ensino do Limite de funções reais em um ponto, privilegiando abordagens que promovam o engajamento conceitual dos estudantes, propondo situações, o trabalho com diferentes representações (numérica, geométricas, algébrica e verbal), e o uso de recursos que favoreçam o desenvolvimento progressivo do conceito. A presente pesquisa se alinha a essa perspectiva ao propor e analisar uma sequência didática

fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, com o intuito de identificar os invariantes operatórios mobilizados por estudantes diante de situações que exigem a compreensão da definição formal de Limite, partindo da noção de distância e da estrutura lógica da definição para, então, favorecer a construção conceitual do Limite como uma relação de aproximação controlada.

No artigo de Rachidi e Burigato (2021), é afirmado que um dos aspectos de difícil compreensão para os acadêmicos no início do estudo do Cálculo é a definição de Limite de uma função. Seja a definição utilizando aspectos intuitivos desse conceito, ou sua definição formal com épsilon e delta. Fato já discutido até este ponto de revisão.

Os autores fazem uma crítica sobre a forma de apresentação usual do conceito de Limite, iniciando pela sua noção intuitiva nos cursos de ensino superior, para posterior definição formal com ϵ e δ, pois é muito diferente do processo histórico e epistemológico de como se formou o conceito de Limite.

Os autores alegam ainda, segundo os vários estudos encontrados, que:

> De fato, vários estudos mostram que os alunos não conseguem relacionar a noção intuitiva com a definição por épsilon e delta, e alegam que só utilizam as manipulações algébrica e a noção intuitiva para resolver as atividades sobre limite de função (Burigato e Rachidi, 2021, p. 91).

E, dessa forma, afirma-se que são encontrados professores que se questionam sobre a necessidade de se trabalhar com a definição formal. Afinal ela não é compreendida pelos estudantes e seu uso acaba restringindo-se à apresentação das provas de alguns teoremas e propriedades, e neste sentido, os autores do artigo informam que a forma de apresentação de limite deve ser repensada pelo professor.

Nesse contexto, é importante destacar que a própria definição formal de Limite de funções de Weierstrass recorre ao conceito de valor absoluto (módulo), cuja formalização histórica e didática revela-se bastante complexa, e posterior à formalização da definição formal de Limite de funções. O valor absoluto só passou a ter notação estável no final do século XIX, estando fortemente ligado à problemática dos números negativos e à construção de um modelo consistente para a regra dos sinais (Freitas, Rachidi, Mongelli, 2020).

Para exemplificação, esses autores apresentaram e discutiram uma sequência de atividades para introdução do conceito de Limite finito de uma função em um ponto

com valores reais. Ela começou a ser elaborada a partir das perspectivas evidenciadas nas considerações finais de uma tese de doutorado.

No artigo, é argumentado que os estudantes não reconhecem o status matemático da definição formal de limite e preferem usar ostensivos gráficos e numéricos, sendo que a representação geométrica pode se tornar um obstáculo (Bloch, 2019), como também dificuldade relacionada ao conjunto dos números reais (Artigue, 1995, Burigato, 2019). Desse modo, a escolha das atividades foi fundamental para o processo de aprendizagem, sendo importante observar os aspectos do conceito que foram trabalhados em cada uma das atividades propostas.

Neste mesmo sentido, outra pesquisa que corroborou com a investigação de Burigato e Rachidi (2021) foi a dissertação de Abreu (2011), no qual o autor parte da dificuldade dos estudantes apontadas pelas pesquisas e apresenta algumas relações entre conceito imagem[5] e conceito definição[6], e entre intuição e rigor por estudantes de Cálculo I no estudo de Limites. O autor trabalhou com uma amostra de 56 estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto. Embasados nos conceitos de conceito imagem e conceito definição, foram apresentadas algumas considerações sobre as relações destas com, respectivamente, a intuição e o rigor.

O autor afirma, após a aplicação da primeira atividade de sua sequência didática, que as definições conceituais remetem a imagens conceituais conflitantes, como no caso da imagem de que “ter um Limite é assumir um valor”.

Outro apontamento importante do autor é a de que a notação rigorosa para Limites se revelou totalmente sem sentido para os estudantes, os quais não conseguiram minimamente perceber, nas definições formais, elementos intuitivamente corriqueiros no estudo de Limites que deveriam retomar imagens conceituais evocadas no início da atividade.

A citação apresentada destaca um aspecto recorrente nas pesquisas sobre o ensino de Limites: a tensão entre a formalização matemática e as imagens conceituais formadas pelos estudantes. A análise de Abreu (2011) evidencia como os estudantes frequentemente se apoiam em interpretações gráfico-geométricas intuitivas e

[5] Na perspectiva de Tall e Vinner (1981) o conceito imagem (ou imagem conceitual) refere-se ao processo e imagens mentais relacionados à aquisição de um conceito.

[6] Na perspectiva de Tall e Vinner (1981) o conceito definição (ou definição conceitual) refere-se ao processo formal e lógico relacionado à construção de um conceito.

enfrentam dificuldades quando precisam transitar para representações algébricas mais formais. A percepção de que a notação rigorosa “não faz sentido” reflete a ausência de articulação entre essas representações e aponta para a necessidade de um trabalho que favoreça a construção progressiva da formalização, ancorada em significados[7] previamente mobilizados. Em síntese, esse trecho reforça a importância de se propor situações didáticas que promovam o confronto produtivo entre as imagens conceituais dos estudantes e as definições formais, possibilitando assim uma reconstrução do conceito de Limite de funções.

A tese de Carvalho (2022) teve como problemática as dificuldades que os estudantes possuem na relação institucional com as noções de Limites e na desarticulação entre a noção intuitiva e a definição épsilon-delta de Limite. Além disso, normalmente, na organização didática existe uma naturalidade e automatização no processo de ensino (por parte dos professores de Matemática no nosso contexto) que, muitas das vezes, apenas sinaliza o não acerto do estudante nas tarefas propostas, deixando de promover uma reflexão e análise de tais erros ou equívocos, não evidenciando, assim, os motivos da não aprendizagem para que o estudante possa progredir nos seus estudos ou equívocos.

Para Carvalho, como o Limite de uma sequência, o Limite de uma função é frequentemente considerado como um processo dinâmico, em que x se aproxima de a, fazendo com que $f(x)$ se aproxime de c. Mais uma vez, os estudantes podem considerar $f(x) \neq c$ como parte da sua imagem conceitual. Por outro lado, Carvalho considerou importante tanto a abordagem intuitiva como a formal, trabalhando de forma paralela, ou mesmo simultânea, de modo que possibilite aos estudantes estabelecer uma relação mais adequada com o objeto Limite, corroborando para a compreensão sobre o conceito em construção.

A tese de Doumbia (2020) traz elementos adicionais fundamentais. Analisando o ensino de Limites na República do Mali, Doumbia evidencia que as dificuldades dos estudantes com a definição formal se devem à natureza da própria estrutura lógica e operacional da definição, em que uma das dificuldades dos estudantes reside na

[7] Na TCC, os significados, conjuntamente com os significantes, são elementos constituintes da representação de um conceito. Os significados referem-se aos princípios que se aplicam às situações pelo sujeito, a exemplo dos invariantes operatórios, regras de ação, inferências e predições. Já os significantes dizem respeito às ferramentas utilizadas pelo sujeito para expressar o conceito, a exemplo dos gestos, sua linguagem natural, desenhos, tabelas e expressões algébricas (Vergnaud, 1998).

articulação dos movimentos de aproximação (expressos por δ) e de controle (expressos por ϵ), exigindo uma gestão simultânea de duas variáveis, o que não é espontâneo para o aprendiz.

Para Doumbia, a ausência de trabalho prévio com as ideias de distância, aproximação e controle é um fator determinante nas dificuldades observadas, apontando a necessidade de sequências didáticas que antecipem esses conceitos antes de introduzir a definição formal propriamente dita.

Além disso, Doumbia (2020) identifica como obstáculos adicionais: a tendência dos estudantes a considerar a igualdade $|x - a| = \delta$ ao invés da desigualdade $|x - a| < \delta$, a incompreensão do papel do δ como garantia de aproximação controlada, e a concepção errônea de que o Limite seria simplesmente o valor da função no ponto. Esta última constatação, como o autor salienta, mostra a dificuldade dos estudantes em dissociar a análise do comportamento da função ao redor do ponto da análise do valor da função no ponto, o que remete diretamente à necessidade de trabalhar a ideia de distância e de comportamento em torno do ponto, o que é contemplado na sequência didática proposta nesta pesquisa.

Essas pesquisas reforçam a necessidade de sequências didáticas que antecedam a introdução formal com um trabalho conceitual sobre a noção de distância, como buscado na presente pesquisa. A proposta de Doumbia (2020), assim como as outras pesquisas analisadas nesta revisão, aponta para um caminho que rompe com a apresentação direta da definição formal, valorizando o amadurecimento prévio dos conceitos envolvidos. Para aprofundar essa discussão, a próxima etapa da revisão aborda a forma como os livros didáticos recomendados para o ensino de Cálculo I nas universidades apresentam essas noções preparatórias e a própria definição formal de Limite, contribuindo para identificar possíveis lacunas ou potencialidades nesses materiais no que tange à construção conceitual necessária para o aprendizado significativo do Limite.

3.1 Alguns Estudos sobre a Definição Formal de Limite de uma função em um ponto, em livros didáticos

Conforme já analisado nas pesquisas sobre o tema, os livros didáticos influenciam o trabalho do professor de Cálculo, e dessa forma, torna-se importante trazer uma análise sobre as pesquisas que versam sobre este tema, conforme segue.

A dissertação de Silva (2024) investigou a forma como livros didáticos indicados para a disciplina de Cálculo I articulam as definições intuitiva e formal de Limite. Utilizando como referencial a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a autora destaca que, embora alguns livros tentem introduzir a definição intuitiva de Limite a partir de noções físicas — como velocidade média e instantânea —, ainda prevalece uma forte orientação algébrica nos exemplos e atividades propostas. A autora observa que, mesmo nas obras que detalham aspectos intuitivos, como as de Stewart (2017) e Thomas (2012), a manipulação algébrica se sobressai tanto nos exemplos quanto nas atividades.

Esta prevalência da técnica sobre a compreensão conceitual do Limite converge com as críticas já evidenciadas por Rezende (2003) e Mateus (2006), reforçando o diagnóstico de que o ensino de Cálculo no Brasil ainda prioriza procedimentos em detrimento da construção de sua aprendizagem.

Outro aspecto relevante identificado por Silva (2024) é a ênfase desigual entre definição intuitiva e formal entre as obras analisadas. Enquanto Guidorizzi (2018), prioriza as demonstrações utilizando a definição formal de Limite em termos de épsilon e delta, Thomas (2012) apresenta uma abordagem mais detalhada para a noção intuitiva, mas, segundo a autora, sem garantir a efetiva ligação entre a intuição e a formalização. Esse quadro ressalta a necessidade de sequências didáticas que não apenas introduzam as definições de forma gradual, mas que também articulem a intuição e o rigor conceitual de modo sistemático e cuidadoso.

Corroborando com este entendimento, a pesquisa de Mateus (2006), o qual analisou oito livros de Cálculo, sendo o mais antigo de 1981, e o mais recente publicado em 2003, escolhidos por indicação de professores, seja: por ter grande publicidade, por ser muito utilizado nas universidades brasileiras, ou por ser citado em outros estudos sobre o tema, discorre:

> [...] os resultados apresentam-nos fatores relacionados com a organização praxeológica dos livros didáticos que interferem diretamente no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Esses fatores prendem-se com a formalização precoce dos conceitos, caracterizada pelo domínio do tecnicismo em detrimento da ênfase nos conceitos e na produção de técnicas, ênfase na algebrização durante a exposição do conteúdo, debilidade na articulação entre o algébrico e o visual-gráfico/figural. [...] Com este resultado, percebemos que algumas dificuldades do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão relacionadas com a organização praxeológica dos livros didáticos (Mateus, 2006, p. 175).

Portanto, o quadro delineado pela literatura mostra que as dificuldades na aprendizagem da definição formal de Limite não são apenas fruto da complexidade inerente ao conceito, mas também da forma como ele é historicamente e didaticamente apresentado: de maneira fragmentada, técnica e pouco articulada com significados construídos previamente.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa em questão possui natureza qualitativa. Observa-se a predominância desse tipo de pesquisa em Educação Matemática, considerando a natureza dos dados a serem produzidos, uma vez que está fortemente concentrada na compreensão aprofundada e na interpretação de fenômenos sociais, culturais ou humanos complexos. Ao invés de se concentrar em números e estatísticas, como na pesquisa quantitativa, a pesquisa qualitativa busca explorar a riqueza e a profundidade das experiências, percepções e significados subjacentes a um determinado contexto.

Nesta pesquisa, foi realizada uma investigação com estudantes dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). A escolha deste curso se deu devido à definição de Limite desempenhar um papel central na formação do bacharel e licenciado em matemática, fornecendo as bases teóricas, e as ferramentas lógicas importantes para explorar e compreender uma ampla gama de conceitos matemáticos envolvidos nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Análise.

Para enfrentamento das situações concebidas na sequência didática desta pesquisa, os estudantes, que já haviam cursado a disciplina de Cálculo I no ano anterior (2024), foram cadastrados em um Projeto de Ensino pela UFMS.

Esta pesquisa foi submetida e aprovada pelo Conselho de Ética da UFMS conforme Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) número 70502223.6.0000.0021 e Parecer número 6.149.478.

O objetivo geral desta pesquisa é **investigar invariantes operatórios mobilizados pelo estudante ao lidar com as situações para a compreensão da definição de Limite de uma função em um ponto.**

Para atingir o objetivo geral de pesquisa, elencamos os seguintes objetivos específicos: **Identificar e analisar teoremas em ação pertinentes, ou não,**

mobilizados nos esquemas; e **investigar filiações e rupturas no processo de compreensão da definição formal de Limite**.

Para alcançar os objetivos discriminados, utilizaremos a metodologia de pesquisa denominada engenharia didática conforme Artigue:

> A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em <<realizações didácticas >> na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequência de ensino. (Artigue, 1996, p. 196)

A engenharia didática possui 4 etapas, divididas em: 1. análises prévias; 2. concepção e análise *a priori* das situações, também denominadas de sequência didática; 3. A fase de experimentação ou aplicação da sequência didática e 4. análise *a posteriori* e validação, dos quais discorreremos sobre cada uma a seguir.

4.1 As análises prévias

As análises prévias, ou análise preliminar como também é conhecida, consistem na fase de sustentação teórico-didática geral e em conhecimentos prévios no domínio estudado. Consiste numa busca preliminar de trabalhos que são, na maior parte dos casos:

> - análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> - a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
> - a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> - a análise do campo de constrangimentos no qual a virá a situar-se a realização didáctica efectiva;
> - e naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos de investigação. (Artigue, 1996, p. 198)

Esta fase não é estanque, pois o investigador pode estar sempre retornando a fazer este trabalho conforme a necessidade de ajustes nas diferentes fases da pesquisa.

A análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino envolve uma investigação aprofundada dos conteúdos específicos que serão abordados no ensino. Isso inclui uma análise epistemológica, ou seja, uma compreensão da natureza e desenvolvimento do conhecimento que está sendo ensinado. O objetivo é ter uma visão clara do que os estudantes devem aprender e das características fundamentais desses conhecimentos.

Na análise do ensino habitual e dos seus efeitos, o pesquisador examina como os conteúdos são tradicionalmente ensinados. Ele observa as práticas pedagógicas, os métodos de ensino e as estratégias utilizadas pelos professores. Além disso, avalia os efeitos desse ensino nos estudantes, buscando entender o que tem sido eficaz e o que pode ser aprimorado.

Na análise das concepções dos estudantes, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução: o pesquisador investiga as concepções prévias dos estudantes sobre os temas abordados. Isso inclui a identificação de possíveis dificuldades e obstáculos que os estudantes enfrentam em sua evolução. Compreender as concepções dos estudantes é crucial para adaptar o ensino às suas necessidades específicas.

A análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva envolve a análise dos fatores externos que podem influenciar a implementação efetiva da situação didática. Isso pode incluir restrições institucionais, recursos disponíveis, políticas educacionais e outros fatores contextuais que podem afetar a eficácia da pesquisa.

Na consideração dos objetivos específicos de investigação durante todo o processo de análise, os pesquisadores mantêm em mente os objetivos específicos de sua investigação. Isso significa que cada parte da análise está alinhada com as questões de pesquisa e o objetivo geral do estudo.

4.2 Concepção e análise *a priori*

A concepção reside na escolha de situações a serem propostas aos sujeitos participantes da pesquisa, considerando os objetivos da pesquisa a serem alcançados e o campo de constrangimentos a ser tratado com a sequência de situações concebidas. As situações devem ser desafiadoras o suficiente para promover o pensamento matemático, mas também acessível aos participantes da pesquisa.

Nesta fase são selecionadas estratégias de ensino, incluindo métodos, materiais e recursos pedagógicos, que melhor se adequam aos objetivos da sequência. Isso pode incluir a escolha de atividades práticas, discussões em grupo, uso de tecnologia, entre outros.

Na análise *a priori* o pesquisador realiza uma análise antecipada das possíveis dificuldades e obstáculos que os estudantes podem encontrar durante a resolução das situações propostas na sequência didática. Isso envolve uma reflexão cuidadosa

sobre as concepções prévias dos estudantes, erros comuns e desafios específicos dos conceitos abordados.

O objetivo da *análise a priori* é, dessa forma “[...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos” (Artigue, 1996).

As escolhas referem-se a quais tarefas, estratégias de resolução destas tarefas ou recursos didáticos serão utilizados na fase de experimentação ou aplicação da sequência de situações. A análise busca entender de que maneira essas escolhas exercem controle sobre o modo como os estudantes se envolvem com os conceitos matemáticos propostos.

Além de entender como as escolhas influenciam o comportamento dos participantes da investigação, a análise *a priori* também visa compreender o significado desses comportamentos. Isso significa investigar não apenas o que os investigados fazem, mas também por que fazem, qual é o significado que atribuem às situações e como os conceitos são interpretados e internalizados.

Em resumo, a análise *a priori* é uma etapa reflexiva e investigativa que busca antecipar como as decisões pedagógicas feitas na concepção de uma sequência didática moldarão o comportamento dos investigados e a interpretação que eles darão às situações propostas. Isso permite uma abordagem mais efetiva na criação das situações, considerando o atingimento dos objetivos de pesquisa.

4.3 Experimentação

A fase de experimentação consiste basicamente na aplicação da sequência didática concebida na fase de concepção e análise *a priori*. Nesta fase, o pesquisador revisita as previsões feitas nas fases anteriores, comparando-as com os objetivos da pesquisa. É o momento em que serão produzidos os dados que servirão de insumo para a análise *a posteriori* e validação (Artigue, 1996).

4.4 Análise *a posteriori* e validação

A análise *a posteriori* refere-se à etapa de avaliação e reflexão que ocorre após a implementação de uma sequência didática. Durante essa fase, os pesquisadores examinam como a sequência foi efetiva em alcançar os objetivos pretendidos. Isso envolve analisar os resultados obtidos na experimentação, os desafios enfrentados pelos pesquisados e os impactos observados no processo.

Segundo Artigue (1996), a análise *a posteriori* dos dados recolhidos são frequentemente completados por dados obtidos por meio da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos da pesquisa ou no final.

A validação, por sua vez, refere-se à confirmação da eficácia da sequência didática com base nas evidências coletadas durante a análise *a posteriori* (Artigue, 1996).

A análise a posteriori e a validação não se confundem nesta etapa. A análise *a posteriori* materializa-se na retrospectiva realizada após a implementação da sequência didática. É o momento em que os pesquisadores examinam e avaliam como a sequência foi conduzida na prática, quais foram os resultados obtidos e como o processo aconteceu. A análise *a posteriori* concentra-se em compreender como as escolhas se traduziram na prática, identificando pontos fortes, desafios enfrentados pelos estudantes durante a aplicação da sequência didática, eventuais obstáculos e outros aspectos observados durante a experimentação. Enquanto, a validação consiste na comparação entre os dados obtidos na análise *a posteriori* com as conjecturas levantadas na análise *a priori*.

5 ELEMENTOS INTEGRANTES DA INVESTIGAÇÃO

Conforme metodologia utilizada nesta pesquisa, é necessário apresentar alguns elementos integrantes da investigação, quais sejam, as variáveis didáticas da sequência didática, e a Definição Formal de Limite de uma função em um ponto, com as formas de mediação e produção de dados.

5.1 Definição Formal de Limite

A definição formal de Limite possibilita a análise detalhada do comportamento de funções reais e sequências, à medida que suas variáveis se aproximam de determinados pontos do domínio ou tendem ao infinito. Assim como, contribui para a compreensão de tendências, restrições e comportamentos específicos de funções, como a existência de assíntotas, crescimento ou decrescimento ilimitado e oscilações, constituindo, portanto, uma ferramenta importante para aqueles que pretendem atuar, seja na docência ou em áreas de modelagem matemática.

Apesar de sua importância, diversos estudos, como os trabalhos de Zuchi (2005), Burigato (2019), Doumbia (2020), Carvalho (2022), apontam que a definição

formal de Limite de uma função em um ponto apresenta um alto grau de dificuldade de compreensão para os estudantes. Entre os principais motivos, destacam-se: o distanciamento conceitual entre a noção intuitiva e a definição formal, os conceitos de infinito e infinitésimo, a dificuldade com a notação e com o uso de quantificadores, a falta de familiaridade com conceitos como distância entre números reais, intervalos, desigualdades e valor absoluto, além da ausência de estratégias de ensino que favoreçam a construção de sentido para essa definição no decorrer do ensino de cálculo.

Conforme as pesquisas dos autores citados, o ensino habitual de Limite de uma função em um ponto inicia-se com a apresentação do conceito pelo ponto de vista cinemático, isto é, introduzido inicialmente por sua noção intuitiva:

> Intuitivamente, dizer que o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L que, simbolicamente, se escreve
>
> $$\lim_{x \to p} f(x) = L$$
>
> significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L. (Guidorizzi, 2012, p. 55)

E posteriormente, é apresentada a definição formal, também denominada nas pesquisas como definição pelo ponto de vista de aproximação:

Definição Formal de Limite de uma função em um ponto

Definição. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que *f tem limite L, em p*, se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$.

Assim

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

Fonte: Guidorizzi, 2012, p. 72.

Essa definição desempenha um papel importante no curso de bacharelado e de licenciatura em Matemática, fornecendo as bases teóricas e as ferramentas lógicas importantes para explorar e compreender uma ampla gama de conceitos.

Dentre esses conceitos, podemos citar o fundamento para o Cálculo Diferencial e Integral, pois a matemática frequentemente necessita de formalização rigorosa, e a definição de Limite utilizando $\epsilon - \delta$ mitiga o enunciado vago apontado pelas pesquisas na noção intuitiva de Limite, descrevendo com exatidão o comportamento de uma função à medida que a variável se aproxima de determinado valor, sem deixar margem para uma interpretação imprecisa, pois algumas expressões corriqueiras utilizadas no ensino e nos livros didáticos, a exemplo de "tão próximo quanto se queira", "cuja distância seja tão pequena quanto se queira" ou "x suficientemente próximo de" mostram-se problemáticas na prática de ensino devido à falta de rigor de sua notação (Cornu, 1991; Tall, 1993).

Além disso, a definição formal utilizando a notação $\epsilon - \delta$ é utilizada para provar propriedades e teoremas em Cálculo, a exemplo de continuidade, derivabilidade e convergência de sequências e séries, servindo de fundamentação teórica para a análise matemática.

Dessa forma, considerando a dificuldade constatada nas pesquisas para a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto pelos estudantes, torna-se importante investigar os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes do curso de bacharelado e de licenciatura em matemática nesse contexto, isto é, ao compreender melhor como esses estudantes aprendem a operar a definição formal de Limite de uma função em um ponto por meio do enfrentamento de situações envolvendo a noção de distância, e consequentemente outros elementos da definição, será possível obter um resultado importante sobre o processo cognitivo desenvolvido nessa abordagem.

No enfrentamento das situações presentes na sequência didática, a análise das proposições evidenciadas pelos estudantes pode, por exemplo, mostrar a aplicação incorreta da ideia de "proximidade" de forma puramente intuitiva, sem associação com a formalização com $\epsilon - \delta$ objetivada nas atividades.

5.2 A evolução histórica e epistemológica da Definição Formal de Limite de uma função

A fim de estruturar a análise preliminar desta pesquisa, trazemos um estudo, baseado principalmente nas pesquisas de Burigato (2019), Carvalho (2022) e Doumbia (2020), sobre a evolução histórica e epistemológica da definição formal de

Limite de uma função como ela é conhecida e ensinada hodiernamente, conforme segue.

A definição formal de Limite de uma função, tal qual é compreendida e ensinada na atualidade, é o resultado de um processo histórico e epistemológico vasto e complexo, permeado por inúmeras discussões e desafios conceituais. Contrariamente à ordem didática comum nos cursos de Cálculo I no Brasil, onde o Limite de funções é introduzido antes da derivada e da integral como seu alicerce, historicamente, o conceito de Limite só foi formalmente estruturado após o desenvolvimento dos conceitos de derivada e de integral. A definição pelos quantificadores épsilon (ϵ) e delta (δ), em sua forma precisa e clara, foi obtida muitos anos após o surgimento inicial do conceito, à medida que diversos matemáticos se dedicaram a conferir-lhe um aspecto formal. A compreensão desse trajeto é fundamental para desvendar sua origem, evolução e as dificuldades inerentes ao seu aprendizado.

As primeiras noções de Limite remontam à Antiguidade Grega, por volta de 300 a.C., caracterizadas por argumentações vagas e até filosóficas sobre o infinito. Nesse período, matemáticos como Eudoxo (c. 370 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.) desenvolveram o método da exaustão para o cálculo de áreas de figuras curvilíneas, como o círculo. Esse método envolvia a inscrição e circunscrição de polígonos regulares, aumentando sucessivamente o número de lados “até que a diferença entre a área da figura e a do polígono inscrito se tornasse menor do que qualquer quantidade dada”. Embora os gregos não possuíssem a noção explícita de Limite como a conhecemos hoje, o método da exaustão já continha os embriões dos conceitos de Limites e de infinito. Arquimedes, ao aperfeiçoar as ideias de Eudoxo, demonstrou a capacidade de aproximar-se arbitrariamente do valor da área, aproximando os polígonos inscritos e circunscritos da figura inicial. Essa abordagem grega, contudo, lidava diretamente com magnitudes geométricas e razões entre elas, sem a associação explícita a números, devido às limitações conceituais aritméticas da época.

A antiguidade grega também foi marcada pelos paradoxos de Zenão (c. 450 a.C.), como a dicotomia e a flecha, que desafiaram as intuições sobre a divisibilidade infinita e o movimento. Esses paradoxos, ao questionarem a soma de quantidades infinitas e a natureza do movimento, contribuíram para a exclusão dos infinitésimos da geometria demonstrativa grega. Paralelamente, a descoberta de grandezas incomensuráveis, como a diagonal e o lado de um quadrado, que não admitiam uma

unidade de medida comum, desencadeou a primeira crise nos fundamentos da Matemática. Essa crise abalou a teoria pitagórica e impulsionou a adoção do método axiomático.

No Renascimento e no século XVII, as ideias de Arquimedes ressurgiram na Europa, influenciando matemáticos como Simon Stevin e Luca Valerio, que tentaram uma passagem mais direta ao Limite. Johann Kepler (1571-1630) utilizou ideias de infinitésimos em seus trabalhos sobre áreas e volumes, adotando métodos heurísticos que priorizavam a eficiência em detrimento do rigor excessivo. O marco mais significativo, contudo, foi a invenção do Cálculo Diferencial e Integral de forma independente por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) por volta de 1670. Eles buscavam resolver problemas como o de encontrar a tangente a uma curva em um ponto específico. Previamente, Pierre de Fermat (1607-1665), em 1629, já se aproximava do cálculo da derivada ao raciocinar que, próximo a um máximo ou mínimo, os incrementos de uma função se tornam infinitesimais. Adicionalmente, Isaac Barrow (1630-1677) foi o primeiro a perceber a estreita relação entre integrais e derivadas, conhecida posteriormente como o Teorema Fundamental do Cálculo.

Newton desenvolveu sua teoria das “fluxões” (velocidades de variação) e "fluentes" (quantidades variáveis), utilizando quantidades infinitamente pequenas "*o*". Ele tentou esclarecer sua posição através da teoria das "primeiras e últimas razões", que já envolvia o conceito de Limite, embora de maneira de difícil compreensão. Por outro lado, Leibniz focou nas propriedades de sistemas que se alteram e no somatório de infinitesimais, considerando o diferencial como uma quantidade infinitamente pequena. Ele promovia o uso dos infinitesimais para descobrir novas verdades. Ambos os desenvolvedores do Cálculo, contudo, enfrentavam problemas graves de consistência lógica em seus conceitos fundamentais, como a natureza das quantidades infinitamente pequenas. Apesar das inconsistências, os algoritmos de Newton e Leibniz produziam resultados corretos, o que garantiu a continuidade do uso e desenvolvimento do Cálculo.

A fragilidade dos fundamentos do Cálculo levou à segunda crise nos fundamentos da Matemática, marcada pelas críticas do filósofo e bispo George Berkeley (1685-1753). Em sua obra "O Analista" (1734), Berkeley atacou a obscuridade e a falta de clareza das "fluxões" e das quantidades infinitamente pequenas, questionando a legitimidade do Cálculo infinitesimal. Essa crítica evidenciou a necessidade de um rigor maior para as bases do Cálculo. Em 1754,

Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783) já havia recomendado o desenvolvimento de uma teoria dos Limites bem estruturada para firmar os fundamentos da análise, mas sua sugestão não foi amplamente seguida pelos seus contemporâneos. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) também tentou uma rigorização baseada em séries de Taylor (1797), mas sua abordagem falhou por ignorar questões de convergência e divergência, que dependem do conceito de Limite. Durante o século XVIII, a principal preocupação dos matemáticos era a procura de novos resultados, e não tanto o rigor ou a busca por fundamentos.

O século XIX foi, então, a "idade do rigor", impulsionada pela necessidade de resolver as inconsistências e os problemas surgidos com o ensino do Cálculo. O grande avanço foi liderado por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que em 1821 publicou "Cours d'analyse". Cauchy buscou o máximo rigor possível, apresentando uma definição de Limite que se tornou um marco: "Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a acabar diferindo tão pouco quanto você quer, o último é chamado o Limite de todos os outros". Embora essa definição ainda não utilizasse os quantificadores épsilon e delta, ela marcou o início da formalização. Cauchy também foi fundamental ao definir continuidade, diferenciabilidade e integral em termos do conceito de Limite, substituindo o vago método dos infinitésimos pelo preciso método dos Limites e dando os primeiros passos para a superação da segunda crise dos fundamentos da Matemática.

Ainda no século XIX, a busca por rigor foi aprofundada por Karl Weierstrass (1815-1897) e sua "escola de Weierstrass", a partir de aproximadamente 1860. Weierstrass estabeleceu um rigor matemático baseado em noções aritméticas, que viriam a se tornar predominantes. Ele introduziu a definição rigorosa de continuidade e Limite em termos de épsilon e delta. Sua abordagem, reescrita simbolicamente com inequações e módulos (por exemplo, $\forall \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0, |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$), é a forma amplamente utilizada nos livros didáticos atuais. Weierstrass defendeu a aritmetização da análise, buscando tornar o próprio sistema dos números reais rigoroso para garantir a segurança de tudo o que dele decorresse na análise. Essa iniciativa foi crucial para que a segunda crise dos fundamentos da Matemática fosse considerada superada. Exemplos de funções contínuas mas não deriváveis (Weierstrass) ou contínuas apenas em irracionais (Riemann) desafiaram a intuição e

tornaram ainda mais evidente a necessidade de uma fundamentação sólida para a análise, que ia além do que Cauchy havia alcançado.

Neste ponto, reiteramos o já verificado por Burigato (2019) quanto à transposição didática[8] da definição formal de Limite de uma função em um ponto para o ensino ter se mostrado desafiadora, sobretudo pelas exigências conceituais envolvidas em sua constituição. A complexidade da definição com quantificadores do tipo “para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$” não reside apenas na abstração dos símbolos, mas na articulação entre conceitos que, individualmente, já apresentam problemas à aprendizagem. Pesquisas como as de Artigue (1991), Cornu (1991), Burigato (2019), Carvalho (2022) e Doumbia (2020) indicam que muitos estudantes mostram dificuldades com os próprios objetos matemáticos mobilizados na definição, tais como números reais, funções reais de variável real, desigualdades envolvendo módulo, e, especialmente, a compreensão da noção de distância entre elementos da reta numérica. Soma-se a isso a presença de quantificadores e operadores lógicos, frequentemente ausentes nas etapas anteriores da escolarização, que tornam a estrutura da definição formalmente densa, o que contribui para o caráter problemático de sua aprendizagem. A ausência de uma base sólida nesses conceitos, quando somada à apresentação abrupta da definição, frequentemente dissociada de situações que favoreçam sua aprendizagem, não contribui para a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

A evolução do conceito de Limite, portanto, pode ser sintetizada em três estágios: inicial (Grécia Antiga), intermediário (séculos XVI e XVII, com a invenção do Cálculo) e formal (século XIX). Cada estágio superou obstáculos e contribuiu para a compreensão da complexa noção de Limite. A terceira crise nos fundamentos da Matemática, surgida com a Teoria dos Conjuntos de Cantor no final do século XIX, apesar de não estar diretamente ligada à definição de Limite, ilustra a contínua busca por rigor e consistência na Matemática.

A definição formal de Limite com os quantificadores épsilon e delta, enquanto resolveu a questão do rigor para a comunidade matemática, criou um desafio. A transposição didática, ao “retirar os percalços” do desenvolvimento histórico, muitas vezes apresenta a definição formal de forma abrupta, resultando em dificuldades para

[8] Segundo Chevallard (1991), a transposição didática consiste no processo de transformação que um saber matemático, originalmente produzido e validado pela comunidade de matemáticos, sofre para ser adaptado como conteúdo a ser ensinado.

os estudantes, que frequentemente não veem relação entre as noções intuitivas e a definição formal. Obstáculos como o "horror ao infinito", dificuldades com o conceito de função, obstáculos geométricos e lógicos (como a ordem dos quantificadores) e o obstáculo simbólico, são enfrentados pelos alunos. Compreender essa evolução histórica e epistemológica do conceito de Limite é crucial para que tanto professores quanto alunos possam aceitar e compreender melhor essas ideias, identificando as dificuldades de aprendizado e instigando a curiosidade pela busca de conexões entre os saberes relacionados ao Limite.

5.3 Variáveis Didáticas

Artigue (1996) ressalta que, durante a investigação, o pesquisador faz escolhas referentes a um conjunto específico de variáveis de comando com o intuito de alcançar seus objetivos. Essas variáveis são classificadas em macrodidáticas e microdidáticas, sendo que as microdidáticas estão vinculadas à organização local da engenharia, como em um problema específico ou em uma sessão de ensino. A seleção dessas variáveis contribui para o cumprimento dos objetivos de pesquisa, pois influencia e pode provocar mudanças nas estratégias que os estudantes utilizam ao resolver problemas (Bittar, no prelo). Isto é, são elementos da situação que, ao serem alterados, implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos estudantes. Dessa forma, elenco as seguintes variáveis microdidáticas, que a partir daqui chamaremos somente de variáveis didáticas, para esta sequência:

Uso de Representação Geométrica[9] - Considerando o objetivo desta investigação e as evidências de pesquisas utilizando sequências didáticas demonstrarem que a transição entre a representação gráfico-algébrico e algébrico-gráfico são importantes para a compreensão da definição de Limite pelos estudantes (Abreu, 2011; Amorim, 2011; Burigato, 2019) e ainda, conforme Vergnaud (1985), as representações são essenciais para a compreensão conceitual, e portanto, a transição entre a linguagem algébrica e a interpretação geométrica das situações pode

[9] Para diferenciação entre representação geométrica e gráfica neste texto, estamos considerando a representação gráfica como o esboço de uma função no plano cartesiano, e representação geométrica, por sua vez, possuindo sentido mais amplo, abrangendo qualquer forma ou construção que envolva entes da Geometria, não necessariamente associadas a um sistema de eixos. Assim, consideramos toda representação gráfica como geométrica, mas nem toda representação geométrica , necessariamente, será gráfica.

favorecer a compreensão da definição de Limite por meio das sessões desta sequência didática.

Uso de exemplos numéricos e valores específicos para parâmetros - A escolha de exemplos numéricos (por exemplo, |3-5|) e valores específicos para parâmetros (como $\epsilon = 0{,}5$ e sua progressiva diminuição) são variáveis microdidáticas que servem para ilustrar e testar a compreensão dos conceitos pelos estudantes. Pesquisas de Tall e Vinner (1981) sugerem que o uso de exemplos específicos facilita a transição de um entendimento operacional para um entendimento conceitual mais profundo.

Generalização dos parâmetros - Após a utilização de valores numéricos, serão utilizados parâmetros para condições mais gerais, usando ϵ e δ conforme a definição formal ao invés de valores fixos, com o objetivo de promover a abstração e a capacidade de generalização dos estudantes. Artigue (1996) destacou a importância de criar a oportunidades para que os estudantes explorem e generalizem conceitos matemáticos, o que se coaduna com a utilização destes parâmetros, após a utilização dos exemplos numéricos e valores específicos.

5.4 Justificativa para a escolha das atividades

Baseado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), serão propostas atividades aos estudantes do curso de bacharelado e licenciatura em matemática de forma que os mesmos possam aprender em situação. Conforme Vergnaud, podemos distinguir as seguintes classes de situações para o sujeito:

> 1- classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2- classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (Vergnaud, 1996, p. 156).

Para estudantes de bacharelado e licenciatura em matemática, essas atividades podem incluir problemas de aplicação direta de conceitos que estudaram e possuem relativa facilidade de iniciação, como a interpretação de uma expressão matemática ou a representação de uma função polinomial do 1º grau. E finalmente atividades que demandarão reflexão e exploração, o que leva à necessidade de tempo

para reflexão, exploração, hesitação, e até tentativas que podem não ser bem-sucedidas. Aqui, os estudantes são desafiados a estender seu entendimento e aplicar conceitos a novas situações. Os desafios envolvem o fornecimento de *feedback* e questionamento sobre a forma de resolução apresentada pelo estudante para resolução da situação. Por exemplo, o pesquisador pode perguntar ao estudante: "Como você resolveria uma inequação modular do tipo $|x - a| < k$? Com k real positivo. É possível que a inequação $|x - a| < k$ possua k negativo? Por quê?" Este tipo de intervenção não oferece uma solução direta, mas pode fornecer ao estudante um estímulo para abordar a situação de um modo mais eficaz para resolução da tarefa.

Conforme apontado nas pesquisas (Cornu, 1983; Doumbia, 2020; Burigato, Rachidi, 2021) o ensino da definição formal de Limite de uma função em um ponto é precedido pelo ensino de sua noção intuitiva, no entanto, existe um distanciamento conceitual entre as duas. A noção intuitiva envolve a noção de aproximação dinâmica, com aproximação de x ao ponto p no domínio, o que corresponde à aproximação de $f(x)$ ao Limite L na imagem da função, sendo que na definição formal, o Limite é abordado por meio de um $\epsilon > 0$ dado, tal que a distância entre $f(x)$ e L será menor que ϵ, sempre que existir um δ, tal que a distância entre x e o ponto p no domínio da função procurado seja menor que este δ. Essas pesquisas apontam que esta proposta de ensino gera problemas de compreensão da definição formal para os estudantes, sendo necessário que o ensino proponha situações envolvendo os elementos da definição que levem o estudante à sua compreensão (Artigue, 1995; Burigato, 2019; Cornu, 1983; Zuchi, 2005).

5.5 Mediação do pesquisador na experimentação

Conforme Zuchi (2005), o papel do professor não é apenas o de transmitir o conceito de forma pronta e acabada, mas agir como um mediador, instigando, questionando e provocando os estudantes a construírem ativamente o conhecimento.

As atividades serão propostas de forma que os estudantes possam lidar com as mesmas de forma autônoma. A intervenção do pesquisador se dará na forma de questionador quando os mesmos apresentarem dúvidas, utilizando situações semelhantes às apresentadas, de forma que os estudantes possam enfrentar por si próprios as situações, sem respostas prontas.

Após a realização da primeira sessão, será feita a institucionalização das situações na própria sala de realização da experimentação, em que os próprios estudantes, de forma voluntária, resolverão as atividades com o auxílio do quadro e giz. Os estudantes serão incentivados, por parte do pesquisador, a participarem ativamente na solução conjunta das situações.

Conforme Artigue (2000), esse tipo de mediação com fornecimento de exemplos e contraexemplos pode ajudar os estudantes a verificarem onde suas formas de resolução são aplicáveis e onde elas precisam ser ajustadas. Essa forma de mediação, que propõe um desafio reflexivo ao participante, tem por objetivo promover o processo investigativo possibilitando o atingimento dos objetivos de pesquisa, possibilitando a identificação de invariantes operatórios e os processos de filiações e rupturas em relação à compreensão da definição formal de Limite com a noção de distância proposta nas atividades.

Quando o estudante questionar sobre algum problema presente na situação ou expressar dúvida sobre a resolução da atividade, o pesquisador fornecerá um *feedback* na forma de uma pergunta reflexiva ou um novo problema que remeta à questão original do estudante. Por exemplo, ao invés de explicar diretamente o que fazer, o pesquisador poderá propor um contraexemplo, pedindo aos estudantes para analisar por que aquele caso específico não se encaixa na solução esperada e como isso se relaciona ao problema original. Essa estratégia visa estimular os estudantes a reconsiderar seu raciocínio e reformular sua estratégia.

Por exemplo, se um estudante perguntar: “Como posso encontrar δ para este ϵ?” o pesquisador pode responder com uma pergunta do tipo: “E se ϵ fosse maior? Como isso alteraria o valor de δ?” ou ainda propor um contraexemplo: “Se esta função tivesse uma descontinuidade, como você poderia ajustar δ?”.

Essa forma de mediação, proposta por Brousseau (1986), e que Artigue (2000) também ressalta, estimula a reflexão e a reavaliação do raciocínio, permitindo aos estudantes confrontar suas soluções com exemplos e contraexemplos. O objetivo é que eles percebam a aplicabilidade de suas estratégias, ajustando-as quando necessário. Esse tipo de mediação promove o processo investigativo e favorece a identificação de invariantes operatórios (teoremas em ação e conceitos em ação), ao mesmo tempo em que revela os processos de filiações e rupturas em relação à compreensão da definição formal de Limite e à noção de distância presente nas atividades.

5.6 Modelização dos Teoremas em Ação

Com base nos trabalhos realizados com sequências didáticas voltadas para o aprendizado da definição formal de Limite encontrados na análise preliminar desta pesquisa (Abreu, 2011; Amorin, 2011; Burigato, Rachidi, 2021; Carvalho, 2022; Doumbia, 2020; Zuchi, 2005) foram modelizados alguns possíveis teoremas em ação que poderão ser mobilizados pelos estudantes participantes da pesquisa ao realizar as atividades em oito categorias:

T_1: Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos;

Este teorema em ação reflete a compreensão de que a distância entre dois pontos em uma reta numérica é sempre uma medida não negativa, podendo ser expressa pelo valor absoluto da diferença entre as coordenadas dos pontos. Os estudantes podem mobilizar esse conceito ao trabalharem com expressões como $|x - a|$, reconhecendo que essa notação fornece a distância entre os pontos x e a. Este teorema em ação é importante para a formalização do conceito de Limite, onde a distância desempenha um papel importante na definição com ϵ e δ.

$T_{1.1}$: Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números;

Este teorema em ação, decorrente de T_1, trata da propriedade da distância, como uma medida de separação entre dois números, intrinsecamente positiva. Os estudantes podem utilizar esse teorema ao calcular distâncias entre pontos, compreendendo que $|x - y| = |y - x|$ e que ambas representam a mesma medida de separação, apoiando a compreensão das propriedades dos Limites, como a necessidade de que δ e ϵ sejam valores positivos.

T_2: Se a desigualdade $|x - a| < \delta$ define um intervalo, então esse intervalo é centrado em a e tem raio δ;

Na sequência didática apresentada por Zuchi (2005), revelou-se que os estudantes fazem esta interpretação referindo-se à representação geométrica da desigualdade envolvendo valores absolutos. Os estudantes podem compreender que a expressão $|x - a| < \delta$ representa todos os pontos x que estão a uma distância menor do que δ de a, o que geometricamente forma um intervalo aberto centrado em

a, com raio δ (raio é o termo utilizado pelos estudantes na pesquisa supracitada). Essa compreensão é elementar na definição formal de Limite, onde é necessário identificar e trabalhar com intervalos em torno de pontos no domínio da função. A mobilização desse teorema em ação ajuda os estudantes a compreenderem como a proximidade de x a um ponto afeta o comportamento da função.

$T_{2.1}$: Se necessitamos desenvolver a inequação $|x - a| < \delta$, então devemos transcrevê-la para a forma $a - \delta < x < \delta + a$;

Consequência do teorema em ação T_2, ainda baseado na pesquisa de Zuchi (2005), percebe-se que os estudantes estão habituados a desenvolver a inequação modular utilizando a propriedade e, salvos os erros matemáticos recorrentes evidenciados nas pesquisas quando abordado este objeto, os mesmos mostram certa habilidade, devido à forma tradicional de ensino da disciplina de Cálculo I, ao desenvolver a inequação na forma $|x - a| < \delta$, o que traz este teorema em ação para a modelização.

T_3: Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta;

O objetivo das situações propostas nesta investigação é o de levar os estudantes a compreender a distância como um conceito geométrico que pode ser visualizado na reta numérica. Eles podem interpretar distâncias como segmentos na reta, o que facilita a compreensão da definição de Limite em termos geométricos, encontrando o teorema em ação categorizado em T_3.

No entanto, é importante ressaltar que a representação geométrica é apenas um dos elementos que compõem o campo conceitual de Limite. A internalização da definição formal exige que os estudantes mobilizem não apenas representações geométricas, mas também habilidades algébricas e interpretativas que envolvem a noção de distância em diferentes contextos. Conforme Vergnaud (1996), o enfrentamento de situações que integrem essas representações e o trabalho com símbolos matemáticos ajuda a consolidar o entendimento do conceito, mas não garante por si só a internalização completa da definição formal de Limite.

T_4: Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função;

Baseado nos estudos de Burigato e Rachidi (2021), este teorema em ação aborda a relação dinâmica entre as variações em x e as mudanças na imagem da

função $f(x)$. Os estudantes podem entender que pequenas variações em torno de um ponto no domínio da função causam mudanças na imagem da função, o que é pertinente para a compreensão da definição de Limite. Na prática, isso se traduz na ideia de que ao nos aproximarmos de um ponto, a imagem da função também se aproxima de um determinado valor.

No entanto, este teorema em ação não possuirá domínio de validade em todos os casos, haja vista, por exemplo, o caso em que temos uma função real constante do tipo $f(x) = c$, em que qualquer variação em torno de um ponto do domínio não alterará a imagem da função.

T_5: Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função;

Esse teorema em ação, modelizado a partir das resoluções dos estudantes em atividades voltadas à análise da imagem da função e sua relação com o domínio, reflete a ideia de que a proximidade de valores no contradomínio da função depende diretamente do intervalo adotado no domínio. Ou seja, dada uma função f, se fixamos uma proximidade desejada em torno da imagem $f(x)$, representada por ϵ, a determinação do intervalo correspondente em x dependerá da natureza da função.

Essa compreensão foi observada, por exemplo, em estudantes que associaram os intervalos na imagem aos intervalos correspondentes no domínio ao lidarem com valores atribuídos a ϵ, fazendo a leitura inversa da variação de $f(x)$ para a variação de x, o que também foi registrado por Burigato e Rachidi (2021) em sua análise sobre o movimento bidirecional necessário à compreensão da definição formal de Limite. Esse teorema em ação é fundamental para dar sentido à noção de controle da variação da imagem da função a partir de um controle no domínio, e sua mobilização se mostra compatível com a lógica de raciocínio subjacente à definição formal de Limite.

T_6: Se um intervalo é centrado em um ponto L e tem uma amplitude ϵ, então ele pode ser expresso na forma $|f(x) - L| < \epsilon$.

Este teorema em ação expressa uma generalização fundamental para a formalização do conceito de Limite. Ele traduz, de modo simbólico, a ideia de que todos os valores de $f(x)$ que estão a uma distância menor do que ϵ do valor Limite L pertencem ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$, o qual é representado por $|f(x) - L| < \epsilon$.

A mobilização deste teorema em ação foi prevista com base nas análises de Abreu (2011), Zuchi (2005) e Doumbia (2020), que destacam a dificuldade dos estudantes em compreender o papel da desigualdade envolvendo módulo na definição formal. Entretanto, quando este teorema em ação é de fato mobilizado, ele revela que o estudante já está atribuindo um significado mais elaborado à noção de aproximação no contradomínio da função, antecipando inclusive elementos essenciais da definição formal.

Sua presença nas resoluções indica um nível de compreensão mais avançado do papel de ϵ como margem de variação da imagem da função e contribui para o processo de abstração necessário à construção do rigor matemático.

Esses teoremas em ação serão utilizados na análise *a priori* das atividades que serão apresentadas a seguir.

6 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE *A PRIORI*

A primeira sessão iniciar-se-á com uma breve explanação sobre a noção de distância. A aplicação da sequência didática será precedida por exemplos, como a distância entre números reais na reta numérica, questionando aos estudantes sobre situações que envolvem distância, principalmente envolvendo a notação de módulo, para iniciar a discussão sobre este elemento do campo conceitual da definição formal de Limite.

O objetivo dessa explanação inicial é começar a formular conjuntamente a ideia de noção de distância, variando entre as representações algébrica e geométrica. Durante o diálogo, em que os estudantes serão estimulados a participar conjuntamente do debate inicial, serão discutidos exemplos de como representar distâncias, entre cidades, por exemplo, até culminar na distância entre números, buscando construir com eles, e retomar, a noção de módulo como distância que será importante para as situações que serão propostas.

A construção da sequência didática proposta neste trabalho foi guiada pela intenção de criar situações de aprendizagem que favorecessem a construção progressiva do conceito de Limite formalizado a partir da noção de distância. Tendo como referencial a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, buscou-se elaborar atividades que permitissem aos estudantes mobilizarem invariantes operatórios pertinentes à definição formal de Limite, transitando entre diferentes representações.

A organização da sequência respeitou a necessidade de um encadeamento de situações, em que os estudantes fossem gradativamente levados a enfrentar novas exigências conceituais, partindo da noção de distância entre números reais até a formalização dos parâmetros ϵ e δ. Essa opção metodológica fundamenta-se na constatação, evidenciada nos estudos analisados na revisão preliminar, de que o distanciamento brusco entre abordagens intuitivas e formais constitui um dos principais fatores de incompreensão da definição formal de Limite de funções.

Além disso, cada atividade foi elaborada considerando as variáveis didáticas específicas anteriormente, com o objetivo de favorecer a construção de significados e o estabelecimento de relações registradas pelos participantes da pesquisa. No que segue, serão detalhadas as 3 sessões que compõem a sequência didática, os objetivos de cada etapa e os fundamentos teóricos que orientaram suas escolhas.

6.1 1ª Sessão

6.1.1 1ª Atividade

1. Considerando a definição de distância entre dois números reais, responda:

a) Como você faria a leitura da expressão $|3 - 5|$, explicando seu significado?

b) Como você faria a interpretação geométrica, numa reta numérica, do item a, considerando M o ponto de abscissa 3 e N o ponto de abscissa 5?

c) Considere uma reta graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3?

d) Considere agora que a distância entre x e 3 na reta numérica seja igual a 2 unidades. Como você expressaria essa situação em valor absoluto (ou módulo)?

Análise *a priori*

O objetivo desta primeira atividade é a introdução da noção de distância, presente na definição formal de Limite e essencial para todas as demais atividades. Ela guia os estudantes a interpretar a distância entre números reais, tanto algebricamente, quanto geometricamente, preparando-os para a construção desta noção com as demais. As variáveis didáticas utilizadas são a utilização específica de valores numéricos e a visualização geométrica da distância. Primeiramente, utilizando os números 3 e 5 para expressar a distância entre eles, tanto algebricamente, quanto geometricamente e após utilizamos a generalização para um ponto x, no eixo das

abscissas, a fim de incutir na resolução do estudante a utilização da notação de distância com um parâmetro genérico, conforme notação da definição formal de Limite de funções.

A escolha de introduzir a noção de valor absoluto desde o início possui a intenção de familiarizar os estudantes com a notação que será utilizada em toda a sequência didática.

Nesta situação, os estudantes podem utilizar os Teoremas em ação T_1 (*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*) e $T_{1.1}$ (*Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números*).

Possíveis soluções

Embasado nas pesquisas com a utilização de sequências didáticas para compreensão da definição formal de Limite (Abreu, 2011, Carvalho, 2022; Doumbia, 2020; Zuchi, 2005), foram descritas as possíveis soluções mobilizadas pelos estudantes em cada atividade desta sequência didática, conforme segue.

Quanto ao item (a), espera-se que os estudantes interpretem $|3-5|$ como a distância entre 3 e 5 na reta numérica, fazendo a leitura de $|3-5|$ sendo o valor absoluto da diferença entre 3 e 5. Diante da possibilidade de dúvidas dos estudantes para a resolução do item (a), o pesquisador poderá fazer os seguintes questionamentos ao estudante na forma de mediação: “Como podemos determinar a distância entre dois pontos na reta numérica?”, “Como você faz a leitura da distância de um número real qualquer até 0 na reta numérica?” ou “O valor da distância entre dois números reais qualquer pode ser um número negativo?”. Esses questionamentos convidam o estudante a mobilizar o Teorema em Ação T_1 na resolução do item a sem entregar diretamente a resposta.

No item (b), o objetivo é fazer com que o estudante trace uma reta numérica graduada, marcando os pontos 3 e 5, e explicitando a distância entre esses pontos, na forma de um segmento de reta, relacionando com o item (a), conforme exemplo a seguir:

Figura 1 - Representação Geométrica da Distância entre M e N

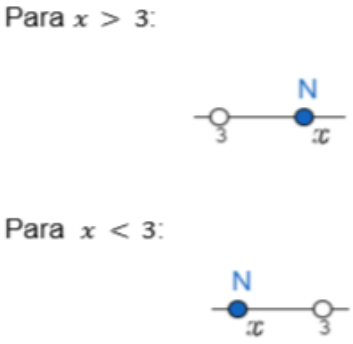
Fonte: elaborado pelo autor

No caso de os estudantes apresentarem dificuldades de resolução, hesitações ou ainda dúvidas ao pesquisador, pode-se introduzir questões do tipo: “Se você imaginar a reta numérica, onde você colocaria os pontos 3 e 5? E de qual forma você representaria a distância entre eles geometricamente?”, instigando-os a pensar e formar a visualização objetivada.

O item (c) objetiva que o estudante relacione a noção de distância entre dois números na reta numérica para um ponto genérico x e outro número real, neste caso, especificamente, ao ponto de abscissa $x = 3$. Espera-se que os estudantes tracem a reta numérica e demarquem o ponto x, qualquer, e marquem o ponto 3, relacionando o segmento de reta entre x e 3 como a distância entre eles. Neste caso, o estudante deverá atentar-se ao fato de x estar à direita (maior do que 3) ou à esquerda (menor do que 3) para fazer a representação.

Segue representação esperada:

Figura 2 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3



Fonte: elaborado pelo autor

Ainda é possível que o estudante faça a representação da reta com x à direita e à esquerda de 3 ao mesmo tempo, compreendendo a possibilidade de o valor ser maior ou menor que 3.

As pesquisas apontam para a dificuldade dos estudantes em esboçar a representação de intervalo, dentre elas, a dificuldade de representar o intervalo

geométrico aberto ou fechado no ponto de abscissa 3. Neste caso específico, o pesquisador pode mediar a situação questionando sobre quais números satisfazem a expressão encontrada, e se 3 faria parte deste conjunto, levando o estudante a refletir sobre sua resposta e sobre seu registro.

Caso a dúvida persista, o pesquisador pode, ainda, mediar a situação com a seguinte pergunta: "*Se você já encontrou a distância entre 3 e 5 usando valor absoluto, como poderia expressar isso agora para um ponto genérico x e o número 3*?", incentivando-os a utilizar o valor absoluto e, no caso, o Teorema em Ação $T_{1.1}$.

No item (d), espera-se que os estudantes tracem a reta graduada e determinem o ponto x, genérico nessa reta. O objetivo é que o estudante consiga fazer a interpretação geométrica de distância entre dois pontos quaisquer.

O estudante pode observar o segmento de reta que une 3 a x e expressar a medida desse segmento como $|x-3|$ ou $|3-x|$, verificando que o ponto x pode estar à esquerda ou à direita de 3, isto é, interpretando que x pode ser igual a 1 ou 5. Ou ainda, pode fazer a reta numérica, demarcando os pontos x e 3, mas identificando o ponto x apenas à direita ou à esquerda de x, sem maior atenção quanto às possibilidades de simetria em relação a 3 na reta numérica para a distância cuja medida é de 2 unidades. Neste último caso, o pesquisador pode fazer a mediação questionando aos estudantes: "Se a distância entre x e 3 é de 2 unidades, quais os valores que x pode assumir? Seriam quantos valores? Esses valores são iguais?" instigando o estudante a observar a simetria em torno de 3 para fazer a representação geométrica da situação.

6.1.2 2ª Atividade

2. Agora considere que a distância entre x e 3 na reta numérica seja menor do que 2 unidades.

a) Como você expressaria essa situação de modo algébrico?

b) De qual forma você representaria, numa reta numérica, a expressão encontrada no item a?

c) O que a representação geométrica realizada no item b apresenta?

d) Como você escreveria o conjunto obtido com a inequação do item (a)?

Análise *a priori*

Esta atividade visa expandir a compreensão dos estudantes sobre a noção de distância, introduzindo o conceito de desigualdades para descrever conjuntos de pontos que estão a uma distância limitada de um ponto fixo, o que os prepara para a construção de intervalos e, posteriormente, o entendimento de aproximações e Limites.

A utilização das variáveis didáticas envolve a utilização do número específico 3 como distância até um ponto genérico x. Aquele parâmetro numérico é utilizado conjuntamente como o raio da distância (termo utilizado pelos sujeitos da pesquisa de Zuchi, 2005) de 2 unidades, a fim de habituar os estudantes à notação da definição formal de Limite quanto à distância do domínio da função. Quanto à variável didática da representação geométrica, ao trabalhar com $|x-3|<2$, os estudantes devem ser capazes de representar essa situação tanto algebricamente quanto geometricamente, facilitando a conexão entre essas duas abordagens.

Nesta situação, os estudantes podem acionar o Teorema em ação T_1 (*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*); T_2 (A interpretação geométrica da desigualdade $|x-a|<\delta$ define um intervalo ao redor de a), além do Teorema em ação $T_{2.1}$ (*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta<x<\delta+a$).

Possíveis soluções

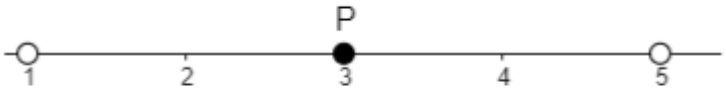
No item (a), espera-se que os estudantes interpretem a distância entre x e 3 menor que 2 unidades algebricamente como $|x-3|<2$ ou $|3-x|<2$, a partir da definição apresentada na primeira situação e a partir do que foi trabalhado pelos estudantes na primeira situação. Porém, os estudantes podem apenas expressar a distância entre x e 3 como $x-3<2$ ou $3-x<2$, sem maior cuidado ou preocupação com o valor absoluto da diferença.

Caso os estudantes apresentem dificuldades em formular a inequação, o pesquisador poderá sugerir um exemplo análogo, conforme este exemplo: “Lembre-se de como expressamos a distância entre dois números, como fizemos na primeira atividade. Se sabemos que a distância entre x e 3 é menor que 2 unidades, o que isso nos diz sobre x em relação a 3? Você pode utilizar a noção de valor absoluto que

discutimos.” orientando os estudantes a pensarem em termos de valor absoluto para expressar a distância de um ponto x a 3.

No item (b), é demandado que o estudante trace uma reta numérica graduada e marque os pontos x e 3 nesta reta, e que ele expresse como entende a simetria quanto a x para a distância menor que 2 unidades, tanto à direita como à esquerda de 3, conforme imagem:

Figura 3 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3 menor que 2 unidades



Fonte: elaborado pelo autor

Dessa forma, o estudante pode entender a distância menor que 2 unidades entre x e 3 como o conjunto de pontos, que distam até 2 unidades de 3 na reta numérica. Neste item, caso haja alguma dificuldade, é possível estabelecer a seguinte provocação do pesquisador como intervenção: “*Pense no que isso significa em termos de distância. Se o ponto x está a menos de 2 unidades de distância do ponto 3, onde ele pode estar na reta numérica? Lembre-se de que temos um intervalo em torno de 3, então quais seriam as fronteiras desse intervalo?*”, a fim de facilitar a representação solicitada ao estudante no item, permitindo-o transitar da representação algébrica para a geométrica.

No item (c), objetiva-se que o estudante consiga fazer a interpretação do conjunto de pontos que distam até duas unidades de 3 na reta numérica com base nas situações que ele enfrentou até o momento. Caso o estudante tenha dificuldade na realização desta atividade, o pesquisador pode fazer a mediação com alguns questionamentos, como: “*Agora que você desenhou o intervalo, o que ele nos diz sobre todos os valores possíveis de x? Como isso se relaciona com a ideia de estar a menos de 2 unidades de distância de 3? Que números fazem parte dessa condição?”*

Quanto ao item (d), o objetivo é que o estudante resolva algebricamente as inequações $|x-3|<2$ ou $|3-x|<2$, aplicando a propriedade de módulo, conforme segue:

$$|x-3|<2 \Rightarrow -2<x-3<2 \Rightarrow 1<x<5$$

colocando a solução na forma do intervalo $1 < x < 5$.

Porém, os estudantes podem não lembrar da propriedade do módulo para colocar as inequações $|x - 3| < 2$ ou $|3 - x| < 2$ na forma de intervalo, o que pode ser inclusive uma das causas de dificuldade para a correta compreensão da definição formal de Limite de funções. Desta forma, uma das formas de mediação para esta dificuldade poderá ser a recorrência da ideia de intervalo pelo pesquisador: "*Pense no intervalo que você desenhou. Quais são os valores que x pode assumir? Como você pode descrever isso na forma de um conjunto? Será que estamos lidando com um intervalo aberto, ou fechado, neste caso? Por quê?*"

Pode ocorrer ainda, no caso de os estudantes tomarem a inequação $|3 - x| < 2$, aplicar corretamente a propriedade, porém, não concluírem o desenvolvimento, conforme segue:

$$|3 - x| < 2 \Rightarrow -2 < 3 - x < 2 \Rightarrow -5 < -x < -1$$

Neste caso, o estudante pode não expressar corretamente o intervalo em torno de 3 na reta numérica por não concluir o desenvolvimento da inequação $-5 < -x < -1$. Neste caso, o pesquisador pode fornecer um *feedback* ao estudante com o seguinte questionamento: "O intervalo procurado está ao redor de qual incógnita?" e ainda: "A incógnita x e -x representam o mesmo valor?" e ainda: "O que acontece com uma inequação do tipo quando multiplicamos seus membros por um número negativo?", a fim de fazer o estudante refletir sobre o resultado encontrado e proceder ao devido ajuste.

6.1.3 3ª Atividade

3. Considere agora o número real positivo δ, tal que a distância entre 3 e x seja menor do que δ na reta numérica.

a) De qual forma você escreveria a situação exposta no enunciado de forma algébrica?

b) Como você faria a representação do item a na reta numérica?

c) Considere, nesta situação, que $\delta = 0{,}5$. De qual forma você reescreveria a expressão encontrada no item a com esse novo parâmetro e faria a representação algébrica (na forma de intervalo) e geométrica? Quais números estão nas extremidades em torno de 3 quando $\delta = 0{,}5$?

d) De qual forma você faria o item c, adotando-se agora $\delta = 0{,}05$? E para $\delta = 0{,}005$?

Análise *a priori*

O objetivo desta atividade é introduzir a noção de intervalo ao redor de um ponto com o uso de um parâmetro $\delta > 0$. Pretende-se, nesta situação, que os estudantes compreendam como o intervalo ao redor de um ponto pode ser ajustado utilizando um parâmetro variável, o que é um importante para a definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Nesta atividade, as variáveis didáticas em foco são a introdução de um parâmetro genérico $\delta > 0$ para a descrição do intervalo e a visualização geométrica desse intervalo em torno de um ponto fixo (neste caso, o ponto 3). Ao trabalhar com $\delta > 0$, os estudantes são levados a generalizar a ideia de distância menor que um valor específico e a adaptá-la para qualquer distância representada por δ. Isso os prepara para trabalhar com aproximações e noções de proximidade que são importantes na definição formal de Limite de funções.

Nesta situação, analogamente à atividade anterior, os estudantes podem acionar o Teorema em ação T_2 (*A interpretação geométrica da desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo ao redor de* a), e o Teorema em ação $T_{2.1}$ (*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$*), então devemos transcrevê-la para a forma* $-\delta + a < x < \delta + a$).

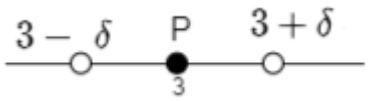
Possíveis soluções:

No item (a), o objetiva-se que os estudantes formalizem a escrita do enunciado, por meio da inequação modular $|x - 3| < \delta$ identificando por "x" o ponto genérico da reta e $|x - 3|$ a distância entre x e 3 na reta numérica, uma vez que já abordada esta definição nas duas primeiras atividades. A notação $|3 - x| < \delta$ também é uma possibilidade. Escolheu-se o parâmetro genérico δ a fim de habituar os estudantes com a notação da definição formal utilizada para a distância no eixo das abscissas, e por este mesmo motivo a distância estar relacionada a "x". No caso de algum estudante sentir dificuldade em transcrever a situação exposta na forma algébrica, o pesquisador pode fazer uma provocação da espécie: "*Como você expressou a distância entre dois pontos na reta nas atividades anteriores? Isso poderia ser útil*

aqui?" a fim de fazer o estudante revisitar o que já realizou nas atividades anteriores e relacionar com a nova situação.

Espera-se na resolução do item (b) que o estudante represente a reta numérica identificando o ponto e escreva o intervalo em torno de 3, mobilizando os teoremas em ação T_2 e $T_{2.1}$ observando o raio de medida δ que satisfaz a desigualdade $|x-3| < \delta$, conforme imagem:

Figura 4 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3 menor do que δ

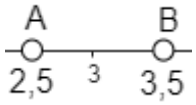


Fonte: elaborado pelo autor

Caso os estudantes encontrem dificuldades em fazer a representação geométrica da inequação $|x-3| < \delta$, o pesquisador pode fazer o seguinte questionamento: "*O que significa dizer que a distância entre dois números é menor do que um valor específico? Como isso seria visível na reta?*", levando os estudantes à visualização do intervalo sem fornecimento da solução.

O item (c) visa ancorar o entendimento abstrato da situação com a visualização da inequação $|x-3| < 0{,}5$ de forma mais concreta, no qual os estudantes mobilizem os teoremas em ação T_2 e $T_{2.1}$, e utilizem a propriedade de módulo, de modo que os mesmos possam visualizar o intervalo $2{,}5 < x < 3{,}5$. Abaixo, segue a representação geométrica esperada dos estudantes para o intervalo em torno de x:

Figura 5 - Representação Geométrica da Distância entre x e 3 menor do que $0{,}5$



Fonte: elaborado pelo autor

Caso os estudantes encontrem dificuldade na visualização do intervalo, o pesquisador pode perguntar: "*Como a expressão algébrica e o intervalo que você encontrou no item anterior mudam quando $\delta = 0{,}5$? O que muda na reta numérica?*"

Para o item (d), atribuiu-se valores cada vez menores como parâmetros para δ a fim de que os estudantes possam visualizar a generalização da distância entre a variável do domínio e um parâmetro específico (neste caso, o valor 3), incentivando os estudantes a perceberem como a variação de δ afeta o intervalo. Uma forma de mediação do pesquisador caso o estudante tenha dificuldade na resolução desta situação pode ser o questionamento: "*O que você percebe sobre o intervalo à medida que δ diminui de 0,50, para 0,05 e depois para 0,005?*", levando os estudantes a refletirem sobre o conceito de aproximação, fazendo-os perceber, que à medida que o valor de δ diminui, o intervalo que representa os valores de x fica mais estreito ao redor de x.

6.1.4 4ª Atividade

4. Seja $f: R \to R$ uma função real, tal que sua lei de formação seja dada por $f(x) = 2x + 1$, considere as seguintes situações:

a) Seja x um ponto do domínio da função, considere que a distância entre x e 3 seja menor do que:

- $0{,}5$;
- 0,05;
- 0,005.

a) De qual forma você faria a representação algébrica desta situação na notação de módulo para cada um dos valores das distâncias acima?

b) Como você faria para colocar as inequações do item (a) na forma de intervalo e faria a representação geométrica destes intervalos encontrados em segmentos de reta?

c) Qual o valor de $f(x)$ quando $x = 3$? Isto é, qual a imagem de $x = 3$ na função f?

d) Construa o gráfico da função f. Considerando os intervalos encontrados no item b, quais os intervalos correspondentes na imagem da função?

e) Considerando a imagem encontrada para $x = 3$, qual é a distância deste ponto às extremidades do intervalo da imagem da função?

Análise *a priori*

O objetivo da quarta atividade é relacionar a distância e o intervalo na imagem de uma função ao correspondente intervalo e distância no domínio, porém, neste primeiro momento, não fazendo a transição da imagem para o domínio, conforme determina a definição formal de Limite (com δ dependendo de ϵ), mas do domínio para a imagem. Isso pode ser mais natural para o estudante, haja vista que pesquisas mostram que, em geral, o ensino introduz o estudo de Limites pela noção intuitiva, o qual faz a transição assim. Desta forma, ao estender o conceito de distância ao contexto de funções, preparamos os estudantes para entenderem como a proximidade na imagem da função se relaciona com a proximidade no domínio, um conceito presente na definição de Limite de uma função.

As variáveis didáticas nesta situação são a utilização de valores numéricos e específicos como parâmetros para a distância, no caso, utilizando o parâmetro $\delta = 0{,}5$ e a utilização da interpretação geométrica e posterior construção gráfica com a consequente associação dos intervalos.

Para esta atividade, os estudantes poderão mobilizar os teoremas em ação T_1 (*A distância entre dois pontos na reta numérica pode ser expressa por um valor absoluto*), T_2 (*A interpretação geométrica da desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo ao redor de* a), $T_{2.1}$ (*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$) e T_4 (*A variação em torno de um ponto no domínio da função altera a imagem da função*).

Possíveis soluções

A quarta atividade dá continuidade à terceira atividade abordando novamente a noção de distância na construção do intervalo ao redor de um ponto. A partir desta quarta atividade, é utilizada uma função real para conseguir relacionar o intervalo e a distância no domínio de uma função ao correspondente intervalo e distância na imagem da função.

No item (a), é retomado o conceito de distância, no qual objetiva-se que o estudante consiga escrever a distância entre x e 3 na forma algébrica $|x - 3|$ ou $|3 - x|$, e compreenda esta distância menor do que 0,5, chegando à inequação modular $|x - 3| < 0{,}5$ ou $|3 - x| < 0{,}5$. No entanto, ele pode interpretar a distância entre x e 3 nas formas algébricas $x - 3$ ou $3 - x$, sem considerar a notação de módulo por não ter compreendido a definição apresentada na primeira atividade, ou

simplesmente por estar mais envolvido com a resolução da situação do que com a aplicação da definição apresentada na primeira situação, e dessa forma, não se atentando ao fato de x estar à direita ou à esquerda de 3 na reta numérica, podendo encontrar um valor negativo para a distância entre x e 3 nas expressões $x - 3$ ou $3 - x$. Outra possibilidade de resposta no item (a), é ele encontrar corretamente a forma $|x - 3| < 0{,}5$, no entanto, devido ao fato de estar acostumado a aplicar a propriedade de módulo para resolução da inequação, desenvolvê-la já no item (a), o que não está sendo solicitado neste momento.

Para as dificuldades citadas acima, ou outras porventura existentes, o pesquisador pode fazer o seguinte comentário e questionamento de mediação: "*Vamos começar relembrando como expressamos a distância entre x e 3 na notação de módulo. Se a distância entre x e 3 for menor que 0,5, como representamos isso? E se for menor que 0,05 ou 0,005?*"

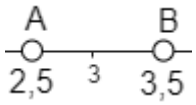
Ao reintroduzir a noção de módulo, objetiva-se reforçar o entendimento dos estudantes sobre como essa notação se relaciona com o conceito de distância.

Na situação apresentada no item (b), objetiva-se que o estudante aplique a propriedade à inequação modular $|x - 3| < 0{,}5$, desenvolvendo-a:

$$|x - 3| < 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 < x - 3 < 0{,}5 \Rightarrow 2{,}5 < x < 3{,}5$$

E assim, represente o intervalo destacando os pontos 2,5 e 3,5 num segmento de reta, conforme imagem:

Figura 6 - Representação geométrica da distância do intervalo $2{,}5 < x < 3{,}5$



Fonte: elaborado pelo autor

Contudo, cabe destacar que apesar de os estudantes consigam realizar esta situação corretamente, existe a hipótese de não estarem interpretando este intervalo como o conjunto de todos os pontos que distam menos de 0,5 unidades até 3 na reta numérica. Isto poderá ser verificado nos áudios realizados no momento da experimentação.

Há ainda a possibilidade de não colocarem o intervalo com as extremidades abertas na interpretação geométrica, haja vista não se atentarem que o intervalo $2{,}5 <$

$x < 3{,}5$ desconsidera os pontos 2,5 e 3,5 devido à distância entre x e 3 ser menor do que 0,5 unidades. Isto corrobora a dificuldade dos estudantes em trabalhar com intervalo apontado nas pesquisas.

Considerando a postura questionadora do pesquisador quando suscitadas dúvidas pelos estudantes ou apresentadas dificuldades de resolução, é possível levantar a seguinte provocação na forma de *feedback* ao estudante para resolução dos possíveis embaraços na solução do item (b): "*Agora que temos a inequação* $|x - 3| < 0{,}5$*, como podemos convertê-la na forma de intervalo? Como o valor de* x *fica restrito dentro desse intervalo?*", "*O que está acontecendo com os intervalos conforme o valor das distâncias se estreita?*".

No item (c), o objetivo é que o estudante calcule a imagem de $x = 3$ utilizando a lei de formação da função dada no enunciado, $f(x) = 2x + 1$, substituindo o valor de x:

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

Concluindo que a imagem de 3 é igual a 7, ou ainda, afirmando que quando $x = 3$, $f(x) = 7$. Espera-se que não haja muitos problemas quanto à resolução desta situação, pois as pesquisas indicam que os estudantes estão acostumados a realizar este cálculo procedimental, fazendo a transição do domínio para a imagem da função na educação básica.

Entretanto, os estudantes podem não compreender a situação proposta devido a uma incompreensão da notação, por estarem acostumados a encontrar y para o valor da imagem ao invés de $f(x)$ quando é dado o valor de x, pois podem estar acostumados com a notação y em sua escolarização, ou se confundir quanto ao termo "imagem" utilizado no enunciado do item (c), deixando o item em branco. Neste caso, o pesquisador pode fazer a mediação, intervindo com a seguinte indagação ao estudante: "*O que representam as notações* $f(x)$ *e* y *quando estamos trabalhando com funções? Você consegue explicar a diferença?*", com o intuito de verificar que o estudante perceba seu equívoco, ou lacuna para sua dúvida.

Outros questionamentos aos estudantes, em caso de dúvidas na resolução do item que podem auxiliar são: "*Agora, considerando o intervalo de* x *encontrado no item anterior, como isso se reflete na imagem da função* $f(x)$*? Quais são os valores de* $f(x)$ *quando* x *varia dentro desse intervalo?*" ou "*Vamos marcar esses intervalos no gráfico da função. Como o intervalo no domínio afeta a amplitude do intervalo*

correspondente na imagem? O que você percebe quando comparamos o intervalo inicial com os subsequentes?"

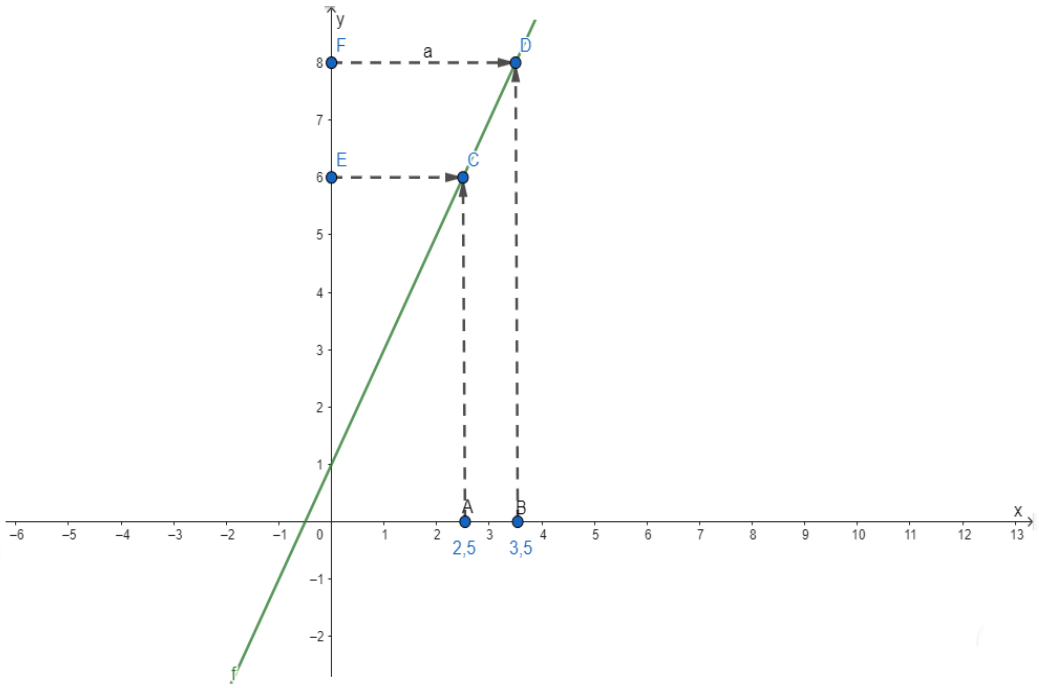
A representação geométrica do item (d) tem o objetivo de permitir aos estudantes visualizarem a relação da variação de x e $f(x)$. Neste item os estudantes dificilmente conseguirão construir o gráfico da função do enunciado caso não estejam familiarizados com os elementos de uma função polinomial do 1º grau. O objetivo é que eles construam a reta que representa graficamente a função e destaquem o intervalo, no eixo das ordenadas, associado a $2{,}5 < x < 3{,}5$. Uma das estratégias utilizadas pode ser o cálculo das imagens das extremidades do intervalo $2{,}5 < x < 3{,}5$, conforme segue:

$f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 + 1 = 5 + 1 = 6$ e $f(3{,}5) = 2 \cdot 3{,}5 + 1 = 7 + 1 = 8$

Os estudantes podem então esboçar o gráfico e verificarem o intervalo estritamente crescente da função em $2{,}5 < x < 3{,}5$, representado na imagem pelo segmento CD, encontrando o intervalo $6 < f(x) < 8$ no eixo das ordenadas correspondente, representado pelo segmento EF.

Segue representação geométrica:

Figura 7 - Representação geométrica da associação de intervalos $6 < f(x) < 8$ e $2{,}5 < x < 3{,}5$



Fonte: elaborado pelo autor

No item (e), o objetivo é que o estudante consiga encontrar a distância entre as extremidades 6 e 8 do intervalo $6 < f(x) < 8$ à imagem de $x = 3$ encontrada anteriormente no item (c), isto é, $f(3) = 7$. Eles podem ter facilidade em encontrar a distância das extremidades até esse ponto, sendo de 1 unidade. Porém, caso não tenham encontrado o intervalo $6 < f(x) < 8$ no item anterior, é possível que deixem o item em branco por não conseguirem associar nenhum intervalo à imagem de f em $x = 3$. Há ainda a possibilidade de sentirem dificuldade de compreender o que significa a distância das extremidades de um intervalo ao ponto solicitado.

A mediação feita pelo pesquisador não entregará a solução de forma pronta, mas provocará os estudantes por meio de indagações que os auxiliem a resolver as situações propostas. No caso do item (d), podemos fazer alguns questionamentos, como: "*Agora que temos o intervalo na imagem, qual é a distância entre* $f(3) = 7$ *e as extremidades desses intervalos? Como isso muda à medida que o intervalo no domínio da função fica mais estreito?*" ou "*Se o intervalo no domínio se torna muito pequeno, como isso afeta o intervalo na imagem da função? Podemos esperar que as extremidades do intervalo da imagem também fiquem muito próximas?*" ou no caso dos estudantes conseguirem resolver o item (c): "*No gráfico, veja como os intervalos* $2{,}5 < x < 3{,}5;\ 2{,}95 < x < 3{,}05;\ 2{,}995 < x < 3{,}005$ *se traduzem em variações correspondentes na imagem da função. O que isso nos diz sobre a aproximação de* $f(x)$ *à medida que se* x *aproxima de 3?*".

6.2 2ª Sessão

6.2.1 5ª Atividade

5. Considerando a definição de distância construída na sessão anterior, responda os itens abaixo para a função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$.

a) Agora, considere o ponto de abscissa 3. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3?

b) Agora, escolha um valor positivo qualquer e o nomeie δ (por exemplo, δ = 0,3). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre x e 3 seja menor do que δ?

c) Agora, escolha outros dois valores positivos para δ, menores que o escolhido por você no item anterior (por exemplo $\delta = 0{,}03$ e $\delta = 0{,}003$). De

qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre x e 3 seja menor do que δ?

d) De qual forma você colocaria as expressões dos itens (b) e na forma de intervalo?

e) De qual forma você faria a representação geométrica dos intervalos encontrados no item anterior no gráfico da função f?

Análise *a priori*

O objetivo desta atividade é o de introduzir a relação entre o intervalo para a distância na imagem da função ao correspondente intervalo no domínio da função, dando continuidade à quarta atividade da sessão anterior, agora, trabalhando com a notação usual da definição formal de Limite (com δ dependendo de ϵ), sem no entanto, proceder a esta inversão nesta atividade. Neste sentido, temos um ponto crítico apontado pelas pesquisas: a incompreensão dos estudantes quando realizada essa inversão do modo como é apresentado o tema de forma usual no ensino, fazendo a transição da aproximação do domínio para a imagem da função na noção intuitiva.

A utilização dos valores numéricos específicos a serem escolhidos pelo estudante tem o objetivo de facilitar a visão sobre o comportamento da função em torno de um ponto específico, a fim de facilitar a transição da ideia intuitiva de aproximação para a notação rigorosa de Limite. A manipulação dessa notação para diferentes valores de δ, e sua conversão em intervalos, introduz a possibilidade de generalização para esse parâmetro. A interpretação geométrica para associação dos intervalos nos eixos do domínio da função para a respectiva imagem, possui o objetivo de reforçar o entendimento do estudante para a relação entre ϵ e δ.

Analogamente à atividade 4, os estudantes poderão mobilizar os teoremas em ação T_1 (*A distância entre dois pontos na reta numérica pode ser expressa por um valor absoluto*), T_2 (*A interpretação geométrica da desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo ao redor de a*), $T_{2.1}$ (*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$) e T_4 (*A variação em torno de um ponto no domínio da função altera a imagem da função*).

Possíveis soluções

Esta atividade inicia abordando novamente a noção de distância entre dois pontos, porém, neste caso, o estudante deve escolher o valor desta distância. Ela tem

por objetivo introduzir a generalização do valor da distância nos eixos de uma função. A escolha de uma função polinomial do 1º grau para a realização da atividade objetivou facilitar a visualização geométrica dos estudantes da pesquisa na resolução das atividades, pois as pesquisas que utilizaram sequências didáticas abordando o tema Definição Formal de Limite de funções em um ponto (Abreu, 2011, Amorim, 2011, Burigato, 2019, Zuchi, 2005) mostram esta facilidade de construção pelos estudantes este tipo de função.

Conforme andamento da 1ª sessão, é possível que iniciemos as atividades retomando alguns pontos trabalhados anteriormente, como, por exemplo, a definição de distância. No item (a), objetiva-se que o estudante utilize a definição trabalhada anteriormente e expresse a distância entre x e 3 na notação algébrica $|x-3|$ ou $|3-x|$. Aqui, observa-se a utilização de um parâmetro numérico específico para construir a noção de distância, qual seja, o número 3. Esta variável didática, isto é, a escolha do número inteiro 3 para que o estudante trabalhe com a notação de distância, tem o objetivo de não confundir o estudante no momento da manipulação da propriedade com módulo, facilitando o cálculo no momento do desenvolvimento da desigualdade do tipo $|x| < k$. No entanto, considerando a definição apresentada, o estudante pode interpretar a distância entre x e 3 na forma $x-3$, caso imponha $x > 3$, ou $3-x$ para $x < 3$. Porém, caso o estudante não deixe clara a imposição, $x > 3$ ou $x < 3$, para representar a distância entre x e 3 nas formas $x-3$ ou $3-x$, não estará desconsiderando os inconvenientes valores negativos para a distância. Neste caso, o pesquisador poderá mediar a situação fornecendo exemplos com diferentes valores de x, maiores, menores ou igual a 3, a exemplos de $x = 2$, $x = 3$ ou $x = 4$, e comentando sobre suas distâncias ao número 3, e solicitando que os mesmos verifiquem se suas escritas possuem domínio de validade para todos estes casos. Há ainda a possibilidade de fazer questionamentos na forma de *feedback* às resoluções dos estudantes, conforme os exemplos: “O que acontece com a distância se x for menor que 3? E se for maior? O que significa dizer que a distância é sempre positiva?” objetivando guiar os estudantes à escrita do valor absoluto.

No item (b), objetiva-se que o estudante utilize a expressão $|x-3|$ ou $|3-x|$ encontrada no item (a) para denotar a distância entre x e 3 na forma de uma inequação modular, em que $|x-3|$ ou $|3-x|$ será menor que um valor arbitrário escolhido pelo estudante. Esta situação visa familiarizar o estudante a associar o valor δ a um certo

nível de arbitrariedade, isto é, para qualquer que seja o valor ϵ, da distância existente entre o valor do Limite e os valores da imagem numa função, será possível encontrar um valor δ correspondente no intervalo do domínio da função. Nesta situação, o estudante poderá tomar um valor qualquer, podendo inclusive se apropriar do valor colocado de exemplo no enunciado e impor δ = 0,3, chegando à inequação $|x-3| < 0{,}3$ ou $|3-x| < 0{,}3$. Porém, nos casos de representação da distância entre x e 3 nas formas $x-3$ ou $3-x$, sem atenção ao fato de x estar à direita ou à esquerda de 3 na reta numérica, o estudante chegará às formas $x-3 < 0{,}3$ ou $3-x < 0{,}3$, que são inconvenientes para a resolução da situação. Uma forma de mediação, neste caso, poderá ser a indicação de um exemplo numérico ao estudante, com a utilização de um outro parâmetro específico, a exemplo de $\delta = 1$ e perguntar como seria a escrita desse caso, e ir mudando gradualmente os valores e questionando: "O que significa o valor de δ em termos de proximidade do ponto $x = 3$? Como ele influencia o intervalo ao redor de 3 no domínio?" Caso apareça alguma escrita do tipo $x-3 < 0{,}3$ por exemplo, questionar o que acontece com o valor da distância se o valor de x for menor do que 3, para que o estudante reflita sobre sua resposta, possibilitando ao mesmo corrigi-la.

No item (c), objetiva-se que o estudante utilize a propriedade de módulo para desenvolver as inequações $|x-3| < \delta$ ou $|3-x| < \delta$ encontradas para a distância entre x e 3 no item (b) e coloque-as na forma de intervalo. Considerando o desenvolvimento correto de quaisquer das inequações pelo estudante e tomando o valor δ = 0,3 como parâmetro escolhido, espera-se:

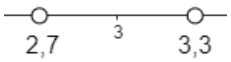
$$|3-x| < 0{,}3 \Rightarrow -0{,}3 < 3-x < 0{,}3 \Rightarrow -3{,}3 < -x < -2{,}7 \Rightarrow 2{,}7 < x < 3{,}3$$

Considerando que o estudante possua dificuldade de desenvolver a forma $-3{,}3 < -x < -2{,}7$ devido ao valor negativo presente na variável da inequação, o pesquisador pode mediar a situação questionando o que acontece com uma desigualdade quando multiplicamos seus termos por um valor negativo, fornecendo exemplos numéricos para ilustrar o conceito, por exemplo, o questionamento "O que acontece com a desigualdade $-2 < 1$ quando multiplicamos ambos os membros da desigualdade por -1? Outra possibilidade de *feedback,* ao estudante caso insista na dificuldade, é questioná-lo quais possíveis valores de x satisfazem a inequação $-3{,}3 < -x < -2{,}7$, solicitando-o substituir para verificar se seus exemplos estão corretos, perguntando-o se a forma está adequada para visualização da solução. Por

exemplo, pedindo-o para substituir os valores de $x = 2{,}9$ e $x = -2{,}9$ na inequação para verificar a satisfação da inequação.

Considerando que o estudante chegue à forma $2{,}7 < x < 3{,}3$, deseja-se que faça a representação do intervalo:

Figura 8 - Representação geométrica do intervalo $2{,}7 < x < 3{,}3$



Fonte: elaborado pelo autor

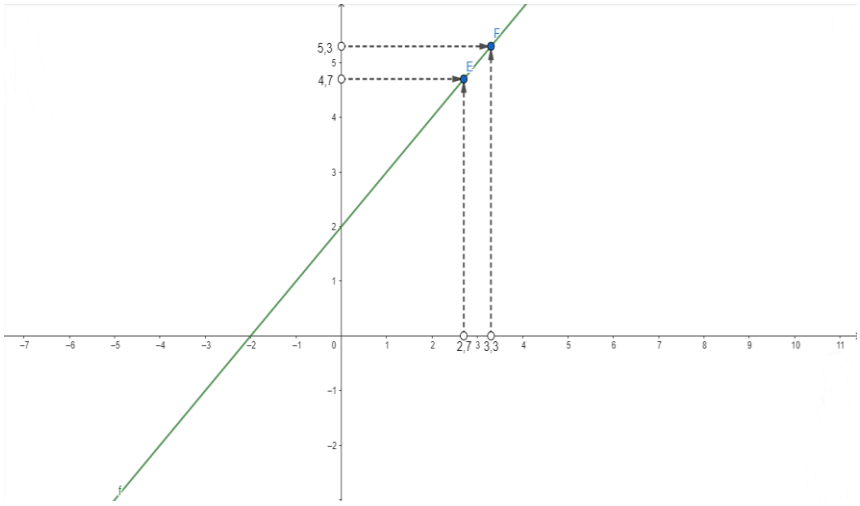
Deve-se observar o fato de o estudante representar o intervalo com as extremidades abertas em 2,7 e 3,3. Este é um dos itens que o estudante pode não considerar. Como forma de mediação, podemos questionar quais os possíveis valores de x que satisfazem a desigualdade $|3 - x| < 0{,}3$, solicitando que os mesmos interpretem o intervalo fechado representado por eles nestes valores.

Quanto ao item (e), objetiva-se que o estudante encontre o intervalo correspondente a $2{,}7 < x < 3{,}3$ e seus respectivos intervalos na imagem da função. O estudante deve observar que se trata de uma função polinomial do 1º grau contínua em todo o intervalo $2{,}7 < x < 3{,}3$, ou no caso, no intervalo encontrado por ele em torno de x.

Dessa forma, deve-se calcular a imagem da função nas extremidades do intervalo $2{,}7 < x < 3{,}3$, isto é, $f(2{,}7) = 2{,}7 + 2 = 4{,}7$ *e* $f(3{,}3) = 3{,}3 + 2 = 5{,}3$ encontrando o intervalo $4{,}7 < f(x) < 5{,}3$.

E, dessa forma, represente os intervalos encontrados no gráfico da função, conforme segue:

Figura 9 - Representação geométrica da associação de intervalos $4{,}7 < \mathrm{f(x)} < 5{,}3$ e $2{,}7 < \mathrm{x} < 3{,}3$



Fonte: elaborado pelo autor

No entanto, o estudante deverá estar familiarizado com a construção gráfica de uma função polinomial para poder fazer esta associação dos intervalos. A escolha desta função deu-se por ser o tipo de representação geométrica que os estudantes mostraram ter mais facilidade de construção nas pesquisas realizadas com a utilização de sequências didáticas.

Algumas formas de mediação para o estudante conseguir associar a imagem associada ao intervalo $2{,}7 < x < 3{,}3$ é pedindo para calcular explicitamente as imagens de $x = 2$ e $x = 3$ questionando-os: “Qual o intervalo na imagem da função corresponde ao intervalo $2 < x < 3$?” solicitando que os mesmos façam a representação geométrica caso necessário. E analogamente, tentem solucionar a situação para o intervalo $2{,}7 < x < 3{,}3$.

6.2.2 6ª Atividade

6. Seja $f: R \to R$ uma função real tal que sua lei de formação seja dada por $f(x) = x + 2$.

a) Considere o ponto 5 no eixo das ordenadas. De qual forma você expressaria a distância entre y e 5?

b) Agora, escolha um valor positivo qualquer e o nomeie ϵ (por exemplo ϵ = 0,3). Como você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre y e 5 seja menor do que ϵ?

c) Agora, escolha outros dois valores positivos quaisquer menores que o escolhido por você no item anterior e os nomeie ϵ (por exemplo ϵ = 0,03 e

ϵ = 0,003). Como você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre y e 5 seja menor do que estes valores de ϵ?

d) Mostre a forma no qual você colocaria as expressões dos itens b e c notação de intervalo e faria a representação geométrica dos intervalos encontrados.

e) Quais os intervalos correspondentes no eixo x para as expressões encontradas no item c? Mostre o modo como você faria a representação geométrica da função f, indicando os intervalos encontrados.

Análise *a priori*

O objetivo desta atividade é a introdução efetiva da relação de dependência entre ϵ e δ (com δ dependendo do tamanho de ϵ), do modo apresentado na definição formal de Limite, porém, com inversão do processo dinâmico apresentado na noção intuitiva durante o ensino, "à medida que x se aproxima de p, $f(x)$ se aproxima de L", mostrado problemático nas pesquisas quando introduzido antes da definição formal de Limite (Burigato, 2019; Doumbia, 2020). Assim, a inversão do processo de relação entre as distâncias no eixo das ordenadas e abscissas é realizado por meio do enfrentamento desta situação.

A variável didática utilizada para cálculo da distância é o parâmetro específico 5, número inteiro, escolhido com o objetivo de facilitar o trabalho do estudante com a notação algébrica $|f(x) - L| < \epsilon$ e no desenvolvimento da propriedade.

O uso de um valor a ser escolhido pelo estudante para ϵ visa familiarizar o estudante com a arbitrariedade do valor da distância na definição de Limite, antecipando a notação "dado qualquer $\epsilon > 0$", presente na definição formal. O estudante pode inclusive, se apropriar do parâmetro sugerido no enunciado ($\epsilon = 0{,}3$).

Os possíveis teoremas em ação mobilizados pelos estudantes no enfrentamento desta situação podem ser T_1: "*Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números*"; T_2: "*A interpretação geométrica da desigualdade* $|y - 5| < \epsilon$ *define um intervalo ao redor de 5.*" e T_3: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta*".

Possíveis Soluções

A sexta atividade é análoga à quinta, todavia, nesta é proposta a inversão da transição da interpretação dos intervalos do modo que vinha sendo proposto até o momento. Desse modo, é dada continuidade ao objetivo de introduzir a generalização do valor da distância nos eixos de uma função para a definição de Limite.

No item (a), objetiva-se que o estudante utilize o módulo e expresse a distância entre y e 5 na notação algébrica $|y-5|$ ou $|5-y|$ presente na notação da definição formal de Limite. No entanto, é possível que algum estudante interprete a distância entre y e 5 na forma $y-5$ e imponha que $y>5$, ou $5-y$ para $y<5$. Se o estudante não deixar clara essa imposição, $y>5$ ou $y<5$, e utilize um desses casos, não estará considerando os inconvenientes valores negativos para a distância, e assim, não estará desenvolvendo uma estratégia eficiente para encontrar a forma algébrica de distância, o que pode acarretar num problema para a construção da definição formal de Limite. Nesses casos, o pesquisador pode indagar, se ele escreveu $y-5$, por exemplo, qual seria o valor da distância no caso de $y=4$, de forma a fazer com que ele perceba o valor negativo, provocando-o para a identificação do problema neste caso. Assim que o estudante perceber o inconveniente, questionar-se-á a existência de alguma forma de escrita para a distância que possa sanar esses casos em que se recai em um inconveniente valor negativo, retomando a definição de distância discutida com os estudantes.

No item (b), objetiva-se que o estudante utilize a expressão $|y-5|$ ou $|5-y|$ encontrada no item (a) para denotar a distância entre y e 5 na forma de uma inequação modular, em que $|y-5|$ ou $|5-y|$ será menor que um valor arbitrário escolhido por ele. Esta situação visa familiarizar o estudante a associar o valor ϵ a um certo nível de arbitrariedade, isto é, para qualquer que seja o valor ϵ da distância existente entre o Limite e a imagem numa função, cujo Limite exista, será possível encontrar um valor δ correspondente no intervalo do domínio da função. Nesta situação, o estudante poderá tomar um valor qualquer, podendo inclusive se apropriar do valor colocado de exemplo no enunciado e impor $\epsilon=0{,}3$, chegando à inequação $|y-5|<0{,}3$ ou $|5-y|<0{,}3$. Porém, nos casos de representação da distância entre y e 5 nas formas $y-5$ ou $5-y$ sem atenção ao fato de y estar à direita ou à esquerda de 5 na reta numérica (maior ou menor do que 5), ele chegará às formas $y-5<0{,}3$ ou $5-y<0{,}3$, que são inconvenientes para a resolução da situação. Algumas formas de

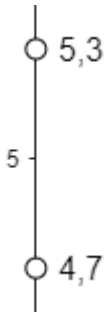
mediação para este problema são questionamentos e fornecimento de exemplos e contraexemplos para fazer o estudante refletir sobre sua resposta. Alguns exemplos: “Se ϵ é a distância permitida entre y e 5, qual seria o intervalo de valores de y que satisfazem $|y-5|<\epsilon$? Quais valores de y estariam dentro desse intervalo?” “Tomemos $\epsilon = 0{,}3$ e $\epsilon = 0{,}1$, questionando se $\epsilon = 0{,}3$, quais são os valores de y que ficam a $0{,}3$ unidades de distância de 5” fazendo o mesmo questionamento para $\epsilon = 0{,}1$, estimulando os estudantes a explorar a construção do intervalo com a variação de ϵ. Um contraexemplo interessante seria: “E se y estiver a uma distância maior que ϵ de 5, como $y = 5{,}5$ e $\epsilon = 0{,}3$? Isso ainda satisfaria $|y-5|<\epsilon$?, auxiliando o estudante a perceber que valores fora do intervalo não satisfazem a inequação.

No item (c), objetiva-se que o estudante utilize a propriedade de módulo para desenvolver as inequações $|y-5|<\epsilon$ ou $|5-y|<\epsilon$, encontradas para a distância entre y e 5 no item (b), e coloque-as na forma de intervalo. Considerando o desenvolvimento correto de quaisquer das inequações pelo estudante e tomando o valor $\epsilon = 0{,}3$ como parâmetro escolhido, espera-se:

$$|5-y|<0{,}3 \Rightarrow -0{,}3<5-y<0{,}3 \Rightarrow -5{,}3<-y<-4{,}7 \Rightarrow 4{,}7<y<5{,}3$$

E dessa forma, faça a representação do intervalo:

Figura 10 - Representação geométrica do intervalo $4{,}7<y<5{,}3$



Fonte: elaborado pelo autor

Mas no caso do estudante encontrar dificuldades de expandir quaisquer das inequações ($|y-5|<0{,}3$ ou $|5-y|<0{,}3$), o pesquisador pode mediar a situação questionando como utilizar a propriedade de desenvolvimento de uma inequação modular da forma $|x-a|<k$ e como aplicá-la na situação em tela, sempre fornecendo questionamentos caso ocorra algum erro de aplicação de propriedade com o desenvolvimento da inequação.

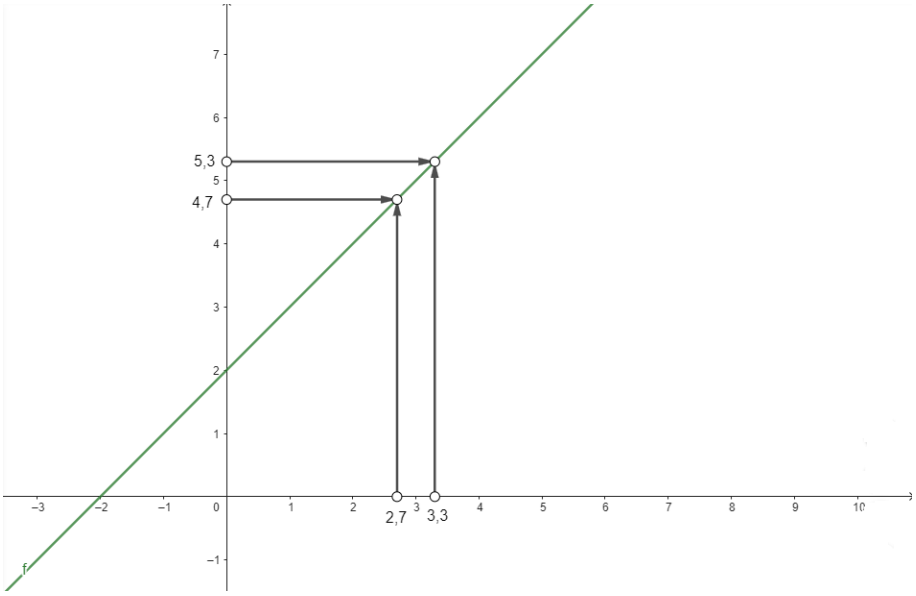
No item (d), o estudante deve adaptar a inequação modular encontrada no item anterior ($|y-5|<0{,}3$ ou $|5-y|<0{,}3$) para os novos parâmetros escolhidos pelo próprio estudante. Tomando os valores $\epsilon = 0{,}03$ e $\epsilon = 0{,}003$, como exemplos de possíveis candidatos escolhidos pelo estudante, temos as possibilidades $|y-5|<0{,}03$, ou $|5-y|<0{,}03$, e $|5-y|<0{,}003$, ou $|y-5|<0{,}003$, e aplicando a propriedade chega-se aos intervalos $4{,}97<y<5{,}03$ e $4{,}997<y<5{,}003$, respectivamente. O objetivo é que o estudante perceba a noção de aproximação arbitrária e infinitesimal acarretada pelo valor de ϵ no eixo das ordenadas, presente na definição formal de Limite de funções. Os erros ou dificuldades esperados e formas de mediação para este item são análogos aos comentados no item (c) desta atividade.

Quanto ao item (e), objetiva-se que os estudantes percebam que existe um intervalo no domínio da função associado aos intervalos encontrados por eles na imagem da função, percebendo que a variação da distância ϵ na imagem da função altera a distância δ do intervalo associado. Especificamente para o item em tela, o estudante deve perceber que a função linear $f(x)=x+2$ é contínua e crescente para todo $x\ \epsilon\ R$ do domínio, o que permite que calculem os pontos do domínio referente às imagens das extremidades do intervalo $4{,}7<y<5{,}3$, conforme segue:

$x+2=4{,}7 \Rightarrow x=2{,}7$ e $x+2=5{,}3 \Rightarrow x=3{,}3$

O procedimento será análogo para os dois outros intervalos a serem encontrados pelos estudantes no item (d). Será tomado como exemplo esse caso para escolha dos possíveis valores de distâncias a serem arbitrados ($\epsilon = 0{,}03$ e $\epsilon = 0{,}003$) para a representação geométrica a ser realizada:

Figura 11 - Associação geométrica dos intervalos $4{,}7<\mathrm{y}<5{,}3$ e $2{,}7<\mathrm{x}<3{,}3$



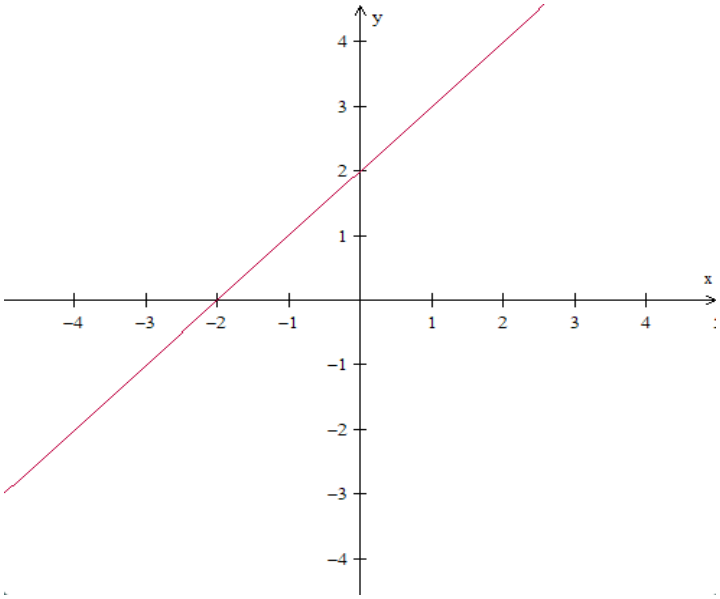
Fonte: elaborado pelo autor

Objetiva-se nesta atividade que os estudantes façam a representação da aproximação dos intervalos ao redor de $x = 3$ e $y = 5$, conforme a variação do valor da distância ϵ se reduz, semelhantemente ao enfrentado pelo estudante nos itens anteriores, de modo a conseguir enxergar a relação entre ϵ e δ.

6.2.3 7ª Atividade

7. Considere o gráfico da função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$:

Figura 12 - Gráfico da função $f(x) = x + 2$



Fonte: elaborado pelo autor

a) Como você resolveria algebricamente (utilizando a propriedade de módulo) as inequações, colocando-as na forma de intervalo em torno de $f(x)$:

- $|f(x) - 3| < 0{,}5$
- $|f(x) - 3| < 0{,}05$
- $|f(x) - 3| < 0{,}005$
- $|f(x) - 3| < \epsilon$

b) Interprete com suas palavras o significado das inequações do item a.

c) Como você relacionaria os resultados encontrados para $f(x)$ no item a com os valores do domínio da função, colocando-as na forma de intervalo em torno de x quando:

- $|f(x) - 3| < 0{,}5$
- $|f(x) - 3| < 0{,}05$
- $|f(x) - 3| < 0{,}005$
- $|f(x) - 3| < \epsilon$

Análise *a priori*

Esta atividade tem como objetivo aprofundar a relação entre as distâncias dos valores da imagem da função para o correspondente intervalo de pontos do domínio da função, observando o comportamento das variações na distância δ correspondente, à medida que ϵ diminui. E, com isso, ajudar o estudante a explorar essa variação, considerando o valor da distância ϵ e da distância δ.

A utilização de parâmetros específicos decrescentes para ϵ visa estabelecer a noção de aproximação entre os valores de $f(x)$ e o Limite L de uma função, e a consequente variação no conjunto de pontos do domínio da função em decorrência dessa aproximação, tornando a ideia de arbitrariedade para a distância ϵ mais facilmente visualizável. Além disso, é uma possibilidade, ainda que sutilmente, de introduzir a noção de aproximação infinitesimal presente na noção intuitiva e na definição formal de $f(x)$ de funções. Outra variável didática utilizada, consiste na escolha do número inteiro 3 para uso no cálculo da distância a $f(x)$ na situação, uma vez que pode facilitar os cálculos para o estudante no momento da manipulação da propriedade do módulo. Zuchi (2005) afirma que os estudantes possuem aversão a trabalhar com números irracionais, por exemplo, no momento das manipulações

algébricas e no desenvolvimento da propriedade com módulo, o que pode dificultar o trabalho de enfrentamento das situações para a compreensão da definição formal de Limite de funções.

Os possíveis teoremas em ação mobilizados pelos estudantes no enfrentamento desta situação podem ser T_2: "*Se a desigualdade* $|x-a|<\delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ" porém com a adaptação desse teorema em ação para os elementos da imagem da função presentes no item (a), da forma "*Se a desigualdade* $|f(x)-L|<\epsilon$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em L e tem raio* ϵ. Estabelecendo a distância entre os valores de $f(x)$ e 3, menor do que um valor arbitrário ϵ reconhecendo a desigualdade $|f(x)-3|<\epsilon$ correspondente ao intervalo $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$ no eixo das ordenadas e mobiliza o $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta<x<\delta+a$" coerente para o desenvolvimento da propriedade no item (b), com a devida adaptação para o item (a), na forma "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|f(x)-L|<\epsilon$ *na forma de intervalo, então devemos transcrevê-la na forma* $-\epsilon+L<f(x)<\epsilon+L$".

Possíveis soluções

No item (a), espera-se que o estudante encontre as soluções para $f(x)$ na forma de intervalo, compreendendo como as possíveis distâncias dos valores de $f(x)$ a 3 na reta numérica, que podem se aproximar cada vez mais, percebendo que é possível fazer isso tanto quanto seja possível, e assim construa a compreensão para o valor de ϵ da definição formal de Limite nas próximas atividades da sequência didática.

Para o item (a), por exemplo, espera-se que o estudante utilize a propriedade de módulo e faça o seguinte desenvolvimento: $|f(x)-3|<0{,}5 \Rightarrow -0{,}5<f(x)-3<0{,}5 \Rightarrow 2{,}5<f(x)<3{,}5$, realizando o desenvolvimento análogo para as demais distâncias, colocando o intervalo correspondente em torno de $f(x)$, até a consequente generalização quanto à distância ϵ no quarto caso ($|f(x)-3|<\epsilon$), isto é, desenvolvendo o intervalo $3-\epsilon<f(x)<3+\epsilon$. As possíveis dificuldades quanto à resolução da atividade envolvem a não compreensão da notação de módulo como a distância entre $f(x)$ e 3, ou ainda, a dificuldade de visualização do intervalo correspondente dos valores para $f(x)$ em cada caso. É possível mediar a situação

com os questionamentos “Por que utilizamos o módulo para representar a distância? Como isso ajuda a garantir que estamos lidando apenas com valores positivos?”, auxiliando o estudante a compreender o módulo como representação positiva de uma distância. No caso de dificuldade de visualização dos intervalos, é possível fornecer alguns exemplos para $f(x)$ dentro e fora dos intervalos, como tomando $|f(x) - 3| < 0{,}5$ e usando $f(x) = 3{,}4$ e $f(x) = 2{,}2$ e/ou outros valores análogos, questionando quais valores satisfazem a inequação e quais não, demandando que o estudante justifique.

Para o item (b), espera-se que o estudante interprete as inequações do item (a) com a distância entre $f(x)$, ou um ponto genérico no eixo das ordenadas da função, ao ponto $y = 3$, cujo intervalo em torno de 3 está se comprimindo à medida que os valores tomados para a distância diminuem, de tal forma que os valores de $f(x)$ se aproxime de 3 tão perto quanto se queira, generalizando para a forma $|f(x) - 3| < \epsilon$, ou mesmo $|3 - f(x)| < \epsilon$, descrevendo-a como a distância entre os valores de $f(x)$ e 3 menor do que ϵ unidades. Caso não fique clara esta noção de aproximação arbitrária ao estudante, o pesquisador pode interagir com este por meio do questionamento “O que representa a diminuição dos valores para as distâncias entre os valores de $f(x)$ e 3? Seria possível utilizar distâncias ainda menores do que 0,005? O que isso representaria?” conduzindo o estudante a entender que menores valores de ϵ representam maior precisão em torno de 3. É possível ainda utilizar uma analogia de precisão para auxiliá-lo a fazer a devida interpretação, como informar que ϵ representa uma margem de erro numa medida, questionando qual valor para ϵ seria possível escolher se ele desejasse uma medida extremamente precisa.

Para o item (c), espera-se que o estudante calcule os intervalos para x correspondente a cada ϵ atribuído no item (a), fazendo o seguinte desenvolvimento com a utilização da propriedade:

$$|f(x) - 3| < 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 < f(x) - 3 < 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 < (x + 2) - 3 < 0{,}5$$

$$\Rightarrow -0{,}5 < x - 1 < 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 + 1 < x < 0{,}5 + 1 \Rightarrow 0{,}5 < x < 1{,}5$$

realizando o desenvolvimento análogo para os demais intervalos em torno de x.

Esta situação também possui o objetivo de fazer com que o estudante relacione os intervalos encontrados no item (a), fazendo a devida conexão entre as variações na imagem da função ao respectivo intervalo no domínio:

- Para $|f(x) - 3| < 0{,}5$ o intervalo correspondente $2{,}5 < f(x) < 3{,}5$ leva ao intervalo $0{,}5 < x < 1{,}5$ no domínio da função;
- Para $|f(x) - 3| < 0{,}05$ o intervalo correspondente $2{,}95 < f(x) < 3{,}05$ leva ao intervalo $0{,}95 < x < 1{,}05$ no domínio da função;
- Para $|f(x) - 3| < 0{,}005$ o intervalo correspondente $2{,}995 < f(x) < 3{,}005$ leva ao intervalo no domínio da função $0{,}995 < x < 1{,}005$ no domínio da função;
- Para $|f(x) - 3| < \epsilon$ o intervalo correspondente $-\epsilon + 3 < f(x) < \epsilon + 3$ leva ao intervalo $-\epsilon + 1 < x < \epsilon + 1$ no domínio da função.

Uma das possíveis dificuldades dos estudantes na resolução desta atividade é o desenvolvimento do intervalo em torno de x, sem, no entanto, fazer a devida correlação aos intervalos encontrados para $f(x)$ no item (a). Dessa forma, a medição do pesquisador pode consistir no questionamento "Como o intervalo em $f(x)$ se relaciona com os valores de x encontrados nesse intervalo?" na tentativa de fazer o estudante perceber a dependência entre o intervalo encontrado para o domínio e o valor de ϵ no item (a). É possível ainda perguntar o que aconteceria caso o estudante escolhesse um intervalo em x que não atendesse a inequação modular $|f(x) - 3| < \epsilon$, a exemplo de $x = 2$ para $\epsilon = 0{,}5$, explicitando o significado de escolher corretamente os valores para x que atendam o intervalo.

6.3 3ª Sessão

6.3.1 8ª Atividade

8. Considere novamente a função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$.

a) Considere o ponto $x = 3$ no domínio da função. De qual forma você calcularia $f(3)$ e expressaria a notação da distância entre $f(x)$ e $f(3)$?

b) Agora, escolha 5 (cinco) valores decrescentes para ϵ (por exemplo 0,2; 0,02; 0,002, 0,0002; e 0,00002). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre $f(x)$ e 5 seja menor do que cada um desses valores escolhidos por você para ϵ?

c) Como você expressaria sua resposta do item b na forma de intervalos na imagem da função e representaria geometricamente estes intervalos encontrados?

d) Para cada intervalo na imagem da função encontrado por você no item anterior, qual o intervalo correspondente no domínio da função?

e) Fazendo a interpretação do resultado nos itens anteriores, qual a relação entre tomarmos valores cada vez menores para ϵ e o intervalo em torno de $x = 3$?

Análise *a priori*

Esta atividade tem por finalidade a continuidade do aprofundamento da compreensão entre as relações dos intervalos no domínio e na imagem de uma função, especialmente para a compreensão da correlação entre a variação da distância no eixo das ordenadas da função afetar o comportamento do domínio no intervalo correspondente. Ou seja, analisar os valores de ϵ decrescentes e analisar o impacto no intervalo correspondente do domínio da função, buscando preparar os estudantes para a compreensão da definição formal sob a noção de proximidade aplicado aos valores ϵ e δ para as distâncias.

Dentre as variáveis didáticas, a justificativa para a escolha do número inteiro $x = 3$ é análoga ao da atividade 7, facilitando o trabalho de análise do estudante, permitindo-o fazer as devidas conexões entre a proximidade em torno de $f(3) = 5$ e o comportamento em torno de $x = 3$. Os valores decrescentes de ϵ são utilizados para mostrar que o raio do intervalo no domínio (valor de δ) depende do valor de ϵ, enfatizando a arbitrariedade da aproximação.

Os possíveis teoremas em ação mobilizados pelos estudantes no enfrentamento desta situação podem ser T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*"; T_2: "*Se a desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ" porém com a adaptação desse teorema em ação para os elementos da imagem da função presentes no item (b), da forma "*Se a desigualdade* $|f(x) - L| < \epsilon$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em L e tem raio* ϵ. Estabelecendo a distância entre $f(x)$ e $f(3)$ menor do que um valor arbitrário ϵ, reconhecendo a desigualdade $|f(x) - f(3)| < \epsilon$ correspondente ao intervalo $(5 - \epsilon, 5 + \epsilon)$ no eixo das ordenadas, uma vez que $f(3) = 3 + 2 = 5$ e mobiliza $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$, *então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$" coerente para o desenvolvimento da propriedade no item (c), com a devida adaptação, na forma "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|f(x) - L| < \epsilon$ *na forma de intervalo, então*

devemos transcrevê-la na forma $-\epsilon + L < f(x) < \epsilon + L$" e T4: "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*" com a composição de outro teorema em ação, invertendo a lógica de aproximação (δ dependendo de ϵ): T5"*Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função"*.

Possíveis Soluções

Na resolução do item (a) pelo estudante, espera-se a substituição do ponto $x = 3$ na lei de formação da função fornecida no enunciado, $f(x) = x + 2$, calculando a imagem do ponto, isto é, realizando o devido desenvolvimento:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Quanto a este procedimento, é apontado nas pesquisas que este movimento de cálculo da imagem da função quando conhecida a sua lei de formação é natural para o estudante (Burigato e Rachidi, 2021), e dessa forma, não se espera grandes dificuldades, haja vista inclusive a escolha de se trabalhar com uma função polinomial do 1º grau na atividade, indicada por pesquisas como de fácil manipulação pelos estudantes. Realizado o procedimento, o estudante deve expressar a distância conforme trabalhado nas atividades anteriores:

$|f(x) - f(3)| = |f(x) - 5|$ ou $|f(3) - f(x)| = |5 - f(x)|$

Observa-se que a definição formal de Limite utiliza a notação para esta distância na forma $|f(x) - L| < \epsilon$, sendo L o Limite da função $f(x)$ quando x tende ao ponto p do domínio. Um ponto a observar é a possibilidade de conexão entre esta situação, o qual serve ao propósito de favorecimento da compreensão, tanto da definição formal de Limite, quanto de continuidade de uma função, haja vista que a função é contínua em $x = 3$, e a notação $|f(x) - L| < \epsilon$ ou $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ serem ambas coerentes para representação. Trazemos a condição de continuidade para corroborar o exposto:

f é contínua em $p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. (Guidorizzi, 2012, p. 73)

Na próxima atividade será proposta a mesma lei de formação para a função, porém, com descontinuidade para o ponto $x = 3$ (função por partes) a fim de fazer o estudante agir em situação na vizinhança em torno de $x = 3$, considerando o Limite $L = 5$.

No item (b), uma vez que já expressada a distância entre $f(x)$ e $f(3)$ na forma de valor absoluto no item anterior, o estudante deve impor a distância menor do que cada um dos valores para ϵ, de forma gradualmente menor, comprimindo a distância entre $f(x)$ e $f(3)$ cada vez mais. Tomando os valores fornecidos no enunciado do item como exemplos de possíveis candidatos para ϵ arbitrados pelo estudante, seguem as formas esperadas de representação das distâncias:

- Para $\epsilon = 0{,}2$, tem-se $|f(x) - 5| < 0{,}2$ ou $|5 - f(x)| < 0{,}2$;
- Para $\epsilon = 0{,}02$, tem-se $|f(x) - 5| < 0{,}02$ ou $|5 - f(x)| < 0{,}02$;
- Para $\epsilon = 0{,}002$, tem-se $|f(x) - 5| < 0{,}002$ ou $|5 - f(x)| < 0{,}002$;
- Para $\epsilon = 0{,}0002$, tem-se $|f(x) - 5| < 0{,}0002$ ou $|5 - f(x)| < 0{,}0002$;
- Para $\epsilon = 0{,}00002$, tem-se $|f(x) - 5| < 0{,}0002$ ou $|5 - f(x)| < 0{,}00002$.

À semelhança das demais atividades desta sessão, a redução gradativa dos valores da distância ϵ no eixo das ordenadas entre $f(x)$ e $f(3) = 5$ pelo sujeito participante da pesquisa possui como objetivo a noção de aproximação dinâmica presente na noção intuitiva, preparando o estudante à ideia de generalização para esta notação de distância presente na definição formal de Limite na notação $|f(x) - L| < \epsilon$.

Um dos possíveis embaraços presentes na solução deste item é a escolha de valores negativos para ϵ, uma vez que não é explícita esta condição no enunciado, o que é feito de forma proposital para verificar a compreensão do estudante quanto à possibilidade de negatividade, ou não, quanto à noção de distância construída inicialmente. Neste caso, o pesquisador pode mediar a situação fornecendo um *feedback* ao estudante com os seguintes questionamentos: “O que significa o valor ϵ neste item?”, “É possível escrevermos um valor negativo ou nulo para uma distância? O que ϵ representa?” para levar o participante à reflexão de seu inconveniente valor negativo ou nulo arbitrado.

Quanto ao item (c), o estudante deve desenvolver cada inequação modular utilizando a propriedade. Tomando novamente as inequações do item anterior como exemplo, considerando os possíveis candidatos ao valor da distância ϵ a serem arbitrados pelo estudante, segue:

- Para $\epsilon = 0{,}2$, tem-se $|f(x) - 5| < 0{,}2 \Rightarrow -0{,}2 < f(x) - 5 < 0{,}2 \Rightarrow 4{,}8 < f(x) < 5{,}2$ ou desenvolvendo a segunda opção de inequação a ser trazida pelo estudante $|5 - f(x)| < 0{,}2 \Rightarrow -0{,}2 < 5 - f(x) < 0{,}2 \Rightarrow 4{,}8 < f(x) < 5{,}2$.

O desenvolvimento será análogo para as demais inequações, verificando intervalos cada vez mais estreitos para $f(x)$ à medida que o estudante diminui o valor de ϵ. Nos demais casos:

- Para $\epsilon = 0{,}02$, tem-se $4{,}98 < f(x) < 5{,}02$;
- Para $\epsilon = 0{,}002$, tem-se $4{,}998 < f(x) < 5{,}002$;
- Para $\epsilon = 0{,}0002$, tem-se $4{,}998 < f(x) < 5{,}0002$;
- Para $\epsilon = 0{,}00002$, tem-se $4{,}9998 < f(x) < 5{,}00002$.

E prossiga com a devida representação geométrica dos intervalos:

No item (d), objetiva-se que o estudante tome os intervalos encontrados em $f(x)$ e faça os devidos desenvolvimentos em torno de x, encontrando o intervalo correspondente:

- Para $\epsilon = 0{,}02$, tem-se $4{,}98 < f(x) < 5{,}02 \Rightarrow 2{,}98 < x < 3{,}02$;
- Para $\epsilon = 0{,}002$, tem-se $4{,}998 < f(x) < 5{,}002 \Rightarrow 2{,}998 < x < 3{,}002$;
- Para $\epsilon = 0{,}0002$, tem-se $4{,}9998 < f(x) < 5{,}0002 \Rightarrow 2{,}9998 < x < 3{,}0002$;
- Para $\epsilon = 0{,}00002$, tem-se $4{,}9998 < f(x) < 5{,}00002 \Rightarrow 2{,}9998 < x < 3{,}00002$.

No item (e), após o estudante fazer o desenvolvimento dos intervalos em torno de $x = 3$, este deve fazer a devida interpretação do estreitamento do intervalo no domínio da função à medida que valor de ϵ diminui, percebendo esta relação entre a distância ϵ e o estreitamento do intervalo no domínio da função (δ dependendo de ϵ). Espera-se, neste item, o surgimento da conclusão “Se o valor de ϵ diminui, então o intervalo correspondente no domínio da função também estreitará”, mobilizando o teorema em ação T_5 modelizado nesta pesquisa.

6.3.2 9ª Atividade

9. Considere a função real $f(x) = \{x + 2, se\ x \neq 3\ -7, se\ x = 3$, definida para $x \in R$.

a) Como você expressaria o intervalo $4{,}8 < f(x) < 5{,}2$ como uma notação da distância entre $f(x)$ e 5?

b) Agora, analogamente ao item a, como você expressaria a distância entre $f(x)$ e 5 para os intervalos $4{,}98 < f(x) < 5{,}02$; $4{,}998 < f(x) < 5{,}002$; $4{,}9998 < f(x) < 5{,}0002$ e $4{,}99998 < f(x) < 5{,}00002$ e faria a

representação geométrica de todos esses intervalos? O que você percebe na distância entre $f(x)$ e 5 considerando a variação dos intervalos?

c) Para cada intervalo na imagem da função encontrado no item anterior, qual o intervalo correspondente no domínio da função?

d) Como você expressaria os intervalos no item anterior na forma de distância de x a 3?

e) Fazendo a interpretação do resultado nos itens anteriores, qual a relação entre a diminuição do intervalo em torno de $f(x)$ e a proximidade de x em torno de 3?

Análise *a priori*

Esta atividade possui o objetivo de guiar o estudante ao reconhecimento da relação entre a escrita do intervalo e sua amplitude em torno de um valor numérico, percebendo este intervalo como a distância que a variável está de um ponto específico na função. Utilizou-se nesta atividade, o parâmetro específico 5, que representa o Limite $L = 5$ quando x se aproxima de 3. É proposta uma função por partes descontínua em $x = 3$ a fim de fazer o estudante perceber que o conceito de distância na definição formal de Limite reforça a dependência do comportamento da função $f(x)$ em torno de um ponto, e não do valor da função exatamente neste ponto, uma vez que os intervalos decrescentes ao redor de $L = 5$ correspondem ao comportamento da função próximos ao ponto $x = 3$, considerando $f(3) \neq 5$.

Em Zuchi (2005) verificou-se facilidade dos estudantes participantes da experimentação em colocar o intervalo fornecido em torno de x na forma de inequação modular após o enfrentamento de situações envolvendo as propriedades de valor absoluto e Limites, e analogamente, solicita-se ao estudante a realização desta operação.

Durante a resolução desta atividade, os estudantes podem mobilizar os teoremas em ação: T_1 - *Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*", pois no contexto dos itens da atividade o estudante usará a notação $|f(x) - 5|$ para escrever a distância entre o ponto genérico da imagem da função e o Limite $L = 5$; T_2 - *Se a desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ, fazendo a devida adaptação para o eixo das ordenadas considerando a presente situação: T_6"*Se um intervalo é centrado em um*

ponto L e tem uma amplitude ϵ, então ele pode ser expresso na forma $|f(x) - L| < \epsilon$"; e T_4 - "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*" e também o teorema em ação T_5"*Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função"*, ao fazer a associação entre a distância presente no intervalo da imagem da função e o respectivo intervalo no domínio.

Possíveis soluções

No item (a), espera-se que o estudante coloque o intervalo $4{,}8 < f(x) < 5{,}2$ na forma escrita da distância entre $f(x)$ e 5. Considerando a resolução correta do item pelo estudante, este desenvolverá a escrita $|f(x) - 5| < 0{,}2$ para o intervalo, uma vez que ele compreenda a expressão $|f(x) - 5|$ como a distância entre $f(x)$ e 5. Objetiva-se neste item, que o estudante perceba que a inequação modular, presente na definição formal de Limite, acarretará o intervalo $(-\epsilon + L, \epsilon + L)$, e introdutoriamente no item (a), espera-se que o estudante consiga estabelecer essa relação entre o intervalo e a notação de distância.

O estudante pode não conseguir visualizar a distância entre $f(x)$ e 5 e no intervalo $4{,}8 < f(x) < 5{,}2$, e dessa forma, não concluir pela escrita $|f(x) - 5| < 0{,}2$. Neste caso, o mediador pode indagar o estudante, fornecendo feedback para início do desenvolvimento: "O item solicita a distância entre $f(x)$ e 5, então de qual forma você faria esta representação? E após a escrita desta representação, de qual forma esta representação chegaria ao intervalo mencionado no item? O que está faltando?", incentivando o estudante a relembrar a notação da distância entre dois números reais. Com o fornecimento do *feedback*, é possível que o estudante consiga chegar à forma escrita $|f(x) - 5|$, no entanto, ainda não consiga visualizar a inequação $|f(x) - 5| < 0{,}2$ relacionado ao intervalo. O pesquisador pode mediar essa situação questionando ao estudante "Você conseguiu representar a distância entre $f(x)$ e 5, e como esta representação se desenvolveria no intervalo fornecido no item? Você se lembra de alguma propriedade de inequação modular que chegaria nessa forma de desenvolvimento?" fazendo o estudante refletir sobre as propriedades de módulo, especificamente a propriedade de desenvolvimento da inequação modular $|x| < k$,

para que o sujeito da pesquisa consiga relacionar a distância $|f(x) - 5|$ à inequação objetivada $|f(x) - 5| < 0{,}2$.

Para o item (b), o estudante pode expressar a distância entre $f(x)$ e 5 na notação $|f(x) - 5|$ e considerando cada intervalo proposto no item, o estudante denote esta distância em desigualdades, inclusive se embasando na resolução do item anterior, conforme segue:

- Para o intervalo $4{,}98 < f(x) < 5{,}02$ o estudante expressará a distância $|f(x) - 5| < 0{,}02$;
- Para o intervalo $4{,}998 < f(x) < 5{,}002$ o estudante expressará a distância $|f(x) - 5| < 0{,}002$;
- Para o intervalo $4{,}9998 < f(x) < 5{,}0002$ o estudante expressará a distância $|f(x) - 5| < 0{,}0002$;
- Para o intervalo $4{,}9998 < f(x) < 5{,}00002$ o estudante expressará a distância $|f(x) - 5| < 0{,}00002$.

E dessa forma, fará a representação geométrica dos intervalos, observando o estreitamento em torno de $f(x)$ à medida que a distância ϵ se diminui:

O item (b) solicita ao estudante, ainda, a interpretação do estreitamento dos intervalos, a fim de fazê-lo entender essa compressão à medida que a o valor da distância ϵ diminui.

No item (c), o estudante deve realizar o procedimento também realizado na atividade precedente, da segunda sessão, isto é:

- Para o intervalo $4{,}98 < f(x) < 5{,}02$ o estudante desenvolverá a inequação na forma $4{,}98 < x + 2 < 5{,}02 \Rightarrow 2{,}98 < x < 3{,}02$.

Realizando procedimento análogo para as demais inequações com valores cada vez menores para ϵ, chegando aos intervalos $2{,}998 < x < 3{,}002$, $2{,}9998 < x < 3{,}0002$, $2{,}9998 < x < 3{,}0002$, e $2{,}99998 < x < 3{,}00002$.

Para o item (d), o estudante deve realizar procedimento análogo ao dos itens (a) e (b), observando a distância entre x e 3 conforme a definição, ou seja, na notação $|x - 3|$. Após a escrita da notação de distância, o mesmo pode escrever a notação da inequação $|x - 3| < 0{,}2$ para o primeiro item, percebendo o intervalo ao redor do ponto $x = 3$ para representação da distância, conforme apresentado na definição formal de Limite: $(-\delta + p, \delta + p)$. Do mesmo modo, é esperada a representação para os demais intervalos nas formas $|x - 3| < 0{,}02$; $|x - 3| < 0{,}002$; $|x - 3| < 0{,}0002$, e $|x - 3| <$

$0{,}00002$. A mediação em caso de dificuldade dos estudantes será semelhante à descrita na análise do item (a).

Para o item (e), objetiva-se que o estudante compreenda a relação entre a compressão dos intervalos na imagem da função e a proximidade do valor de x ao ponto 3, que é o ponto de interesse no domínio da função. Esse reconhecimento é importante para consolidar a percepção de que o Limite de uma função em um ponto está associado ao comportamento da função nas proximidades desse ponto, ao invés do valor da função nesse ponto em si, especialmente considerando que, na função por partes proposta, o valor $f(3)$ é distinto de $L = 5$.

Dentre as possíveis soluções corretas, estudante pode identificar que, ao diminuir o intervalo ao redor de $L = 5$. (ou seja, o Limite pretendido), ocorre uma redução correspondente no intervalo de valores de x que satisfazem a relação imposta. Ele formaliza essa relação observando que a diminuição da distância em torno de L implica diretamente em uma redução mais severa do intervalo sobre x, aproximando-o do ponto 3. Esse entendimento leva o estudante a formular que, para cada ϵ decrescente escolhido em torno de $L = 5$, deve existir um δ igualmente reduzido que delimita a proximidade de x a 3.

Ao contrário, uma das possíveis soluções incorretas para o item está na interpretação $\epsilon - \delta$ (tamanho das distâncias), em que o estudante reconheça a necessidade de uma relação entre o intervalo em torno de $f(x)$ e o domínio, mas não entenda que o valor de δ deva se ajustar a ϵ de forma que se estabeleça uma correspondência de aproximação em x para alcançar o valor $f(x)$ próximo a 5. Nesse caso, uma mediação eficaz pode incluir uma discussão sobre como a distância entre $f(x)$ e $L = 5$ restringe progressivamente o intervalo em torno de x, motivando o estudante a identificar a dependência mútua entre δ e ϵ. Uma intervenção do pesquisador pode trazer questões como: “Se diminuirmos o intervalo em torno de $f(x)$, o que acontece com os valores de x que atendem a esse intervalo? Como isso se relaciona com a noção de proximidade em x?”. De outro modo, alguns estudantes podem tentar estabelecer uma relação direta, linear e fixa, entre os intervalos em torno de $L = 5$ e $x = 3$, o que não reflete adequadamente a complexidade da aproximação que a definição de Limite requer. Nesse caso, o pesquisador pode mediar a situação orientado o estudante a observar que não há uma relação fixa de escala entre ϵ e δ e que é a variabilidade e adaptabilidade da escolha de δ para cada ϵ que fundamenta a

definição. Essa mediação pode ser auxiliada pelo questionamento: “Ao variar os valores de ϵ, você acha que a mesma quantidade de δ será sempre suficiente para todos os intervalos?”.

6.3.3 10ª Atividade

10. Considere novamente a função real $f(x) = \{x + 2, se\ x\ \neq 3\ -7, se\ x = 3$, definida para $x \in R$.

a) De qual forma você representaria a distância entre $f(x)$ e 5 menor que um valor positivo ϵ de todas as maneiras possíveis, tanto algebricamente quanto geometricamente?

b) Atribuindo 3 valores diferentes e decrescentes para ϵ, no qual você escolha estes valores, como você refaria o item b com estes 3 novos parâmetros?

c) Considerando sua resolução do item anterior, quais conjuntos de valores para x satisfazem a distância entre $f(x)$ e 5 em cada um dos casos escolhidos por você para ϵ?

d) Mostre como você faria a representação dos intervalos escolhidos por você nos itens b e c no gráfico da função f, mostrando a relação entre os intervalos em torno de x e $f(x)$.

e) Como você escreveria os intervalos em torno de x encontrados por você na notação de distância com módulo, considerando esta distância menor que um número δ? Você consegue associar esta distância com a expressada por você no item a? Como você faria isto?

Análise *a priori*

O objetivo desta é a introdução da generalização dos parâmetros ϵ e δ para as distâncias presentes na notação da definição formal de Limite, a partir da notação de escrita dos intervalos em torno de x e $f(x)$ e módulo enfrentadas pelos estudantes ao longo das atividades da sequência didática. Esta notação com o propósito de generalização das distâncias enfrentadas com valores numéricos específicos até este ponto das atividades, pode ajudar o estudante a atribuir significado para a escrita da definição formal de Limite, mostrada desconexa da noção intuitiva para ele (Abreu, 2011, Amorim, 2011, Burigato, 2019). Esta atividade objetiva ainda, continuar

trabalhando a relação entre as notações de módulo e intervalo conforme apresentado na definição formal, relacionando estes intervalos no domínio e imagem da função.

Dentre as variáveis didáticas utilizadas para a atividade, destaca-se a utilização de parâmetros numéricos e decrescentes a serem escolhidos arbitrariamente pelos estudantes para a interconexão com a utilização de ϵ e δ, estes últimos escolhidos para a generalização dos valores das distâncias, assim representadas na definição formal de Limite. Essa estratégia utilizando valores sucessivamente menores para o valor da distância entre $f(x)$ e o Limite $L = 5$ induz o estudante a visualizar a contração dos intervalos ao longo dos valores decrescentes, aproximando-se da noção de uma vizinhança infinitesimal[10] e fazendo esta interdependência entre ϵ e δ.

Dentre os possíveis teoremas em ação mobilizados pelo estudante para realização da atividade, o estudante pode mobilizar T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos.*", uma vez que ele utilize a notação $|f(x) - 5|$ para expressar a distância entre $f(x)$ e o Limite $L = 5$, T_2: "*Se a desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ", T_4: "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*", pois o estudante estará trabalhando com a relação entre os intervalos e as alterações correspondentes entre domínio e imagem da função, e T_5: "*Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função".*

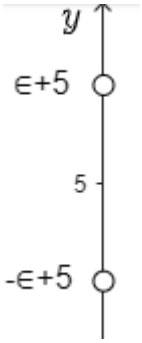
Possíveis Soluções

No item (a), a primeira possibilidade vislumbrada de resolução pelo estudante é a utilização da notação $|f(x) - 5| < \epsilon$ para a distância entre $f(x)$ e o Limite $L = 5$, já utilizando a generalização do parâmetro ϵ para a distância entre estes termos, conforme notação da definição formal de Limite. Caso o estudante se atente à possibilidade de desenvolvimento da inequação $|f(x) - 5| < \epsilon$ e utilize corretamente a propriedade, ele a desenvolverá na forma $|f(x) - 5| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon + L < f(x) < \epsilon + L$, compreendendo corretamente as duas formas algébricas para a representação da

[10] Em Cálculo, o termo **infinitesimal** refere-se a uma quantidade infinitamente pequena, menor que qualquer número real positivo, mas maior que zero.

distância entre $f(x)$ e o Limite $L = 5$, quando esta é menor do que o parâmetro genérico ϵ. De igual modo, compreendendo todas as possíveis representações possíveis, espera-se do estudante a utilização da interpretação geométrica do intervalo $-\epsilon + 5 < f(x) < \epsilon + 5$, este no eixo das ordenadas da função, conforme segue:

Figura 13 - Representação geométrica do intervalo $-\epsilon + 5 < f(x) < \epsilon + 5$



Fonte: elaborado pelo autor

É possível observar que a representação está sendo feita no eixo vertical, pois o estudante está habituado com esta representação na forma tradicional do ensino, considerando que este perceba a representação da distância no eixo das ordenadas da função, e ainda, o intervalo aberto em $(-\epsilon + 5, \epsilon + 5)$.

No item (b), espera-se que os estudantes escolham valores numéricos decrescentes para ϵ (por exemplo, $1, 0{,}5$ e $0{,}1$), repetindo o procedimento do item (a) com esses novos parâmetros. O estudante poderá desenvolver as desigualdades $|f(x) - 5| < \epsilon$ para cada valor, encontrando os respectivos intervalos $(5 - \epsilon, 5 + \epsilon)$ no eixo das ordenadas. A depender do seu nível de compreensão, poderá ou não perceber a redução sucessiva do intervalo e a aproximação dos valores em torno do Limite, mas espera-se que, ao menos, consiga formalizar corretamente as representações algébricas.

No item (c), o estudante deve identificar, a partir dos valores de ϵ escolhidos, quais os conjuntos de valores para x garantem que a distância entre $f(x)$ e 5 seja. Espera-se que o estudante desenvolva a desigualdade $| f(x) - 5 | < \epsilon$ para encontrar intervalos no domínio. Um estudante que percebeu a articulação entre domínio e imagem reconhecerá que, ao diminuir ϵ, os valores de x que satisfazem a desigualdade também se concentram progressivamente ao redor do ponto $x = 3$.

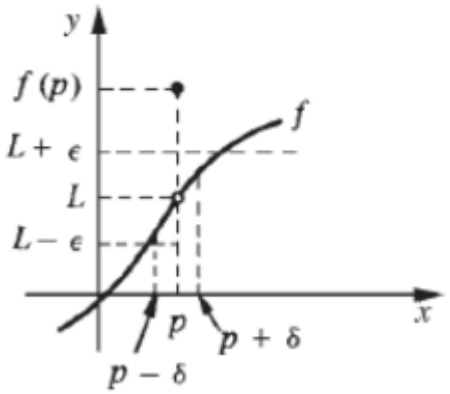
No item (d), espera-se que o estudante represente graficamente os intervalos obtidos, marcando os intervalos em torno de 5 no eixo das ordenadas e, simultaneamente, os intervalos correspondentes em torno de 3 no eixo das abscissas. Aqui, a percepção da relação entre o “estreitamento” dos intervalos no gráfico será fundamental. Os estudantes que avançaram na compreensão tendem a perceber visualmente que, quanto menores os valores de ϵ, menores são também os intervalos no domínio. Dificuldades podem surgir na leitura e transposição entre os eixos, especialmente se o estudante não tiver familiaridade prévia com a interpretação gráfica de desigualdades. Um bom *feedback* seria pedir que o estudante mostre graficamente, com cores ou setas, as duas relações ao mesmo tempo, reforçando a conexão entre domínio e imagem.

No item (e), espera-se que o estudante escreva os intervalos encontrados em notação de módulo, expressando-os como $|x - 3| < \delta$, estabelecendo, idealmente, uma relação entre δ e ϵ que generalize a situação trabalhada anteriormente. A principal dificuldade aqui pode residir na transição do ϵ para o δ e na percepção de que o parâmetro δ depende de ϵ, conceito central na definição formal de Limite de funções. Para auxiliar na superação de dificuldades, o pesquisador pode propor exemplos de pares (δ, ϵ), e solicitar que o estudante explique a relação de interdependência por trás da escolha, estimulando-o a percebê-la entre essas duas quantificações de distâncias.

6.3.4 11ª Atividade

11. Considere agora uma função real $f: R \to R$, tal que o gráfico da função esteja representado a seguir:

Figura 14 - Gráfico de uma função f descontínua em $x = p$



(Guidorizzi, 2012, pág. 71)

a) Seja p um ponto do domínio de f. Considerando o gráfico apresentado, como você representaria, de todas as formas possíveis, a distância entre o ponto genérico x, também do domínio, e p?
b) Seja L o ponto representado no contradomínio da função. De qual forma você expressaria a distância entre $f(x)$ e L?
c) Você relacionaria as distâncias dos itens a e b? Se sim, de qual forma?

Análise *a priori*

O objetivo desta última atividade é a consolidação dos conceitos enfrentados pelo estudante nas atividades anteriores quanto à definição formal de Limite com base na relação entre as distâncias $|x - p|$ no domínio e $|f(x) - L|$ no contradomínio a partir da representação geométrica da função, promovendo a transição entre as formas algébricas e geométricas.

Nesta atividade, são generalizados os parâmetros a fim de concluir a compreensão da definição formal de Limite com base nas atividades anteriores, nas quais foram utilizados os valores numéricos, podendo visualizar a relação entre os intervalos correspondentes conforme a definição formal de Limite.

Essa atividade final da sequência didática tem papel de síntese, ao articular graficamente e simbolicamente a definição formal de Limite e aproximar o estudante do núcleo conceitual da relação entre as distâncias nos eixos do domínio e da imagem. Com isso, espera-se que as estratégias mobilizadas anteriormente se articulem em

uma organização mais abrangente, favorecendo a compreensão da definição formal conforme os aspectos do campo conceitual ativado nas atividades.

Nesta atividade, consideramos que todos os teoremas em ação modelizados *a priori* podem ser mobilizados.

Possíveis Soluções

No item (a), objetiva-se que o estudante reconheça a distância entre dois pontos no domínio da função, denotando-a como $|x-p|$, utilizando a notação algébrica de módulo. Estudantes que apresentarem domínio das representações podem expressar isso também na forma intervalar, desenvolvendo a desigualdade $|x-p|<\delta$ na forma $p-\delta<x<p+\delta$. Geometricamente, espera-se a representação de um intervalo ao redor de p na reta numérica por meio de um segmento de reta com extremidades em $p-\delta$ e $p+\delta$. Alguns estudantes podem ainda utilizar expressões do tipo $x \in R/|\, x-p \,|<\delta$, indicando variedade de representações mobilizadas.

Um dos possíveis erros que ainda poderão ser verificado na resolução da atividade é a representação algébrica da distância na forma $x-p$, sem a utilização do módulo, e, neste caso, novamente o mediador pode questionar o participante da pesquisa, em caso de dúvida: “Se você tivesse que representar essa distância sem saber se x é maior ou menor que p, como faria?” ou “A distância entre dois números pode ser negativa?”.

No item (b) espera-se que os estudantes associem a distância entre $f(x)$ e L, no contradomínio, com a notação $|f(x)-L|$. A depender das estratégias desenvolvidas nas atividades anteriores, é possível que alguns já representem diretamente a desigualdade $|f(x)-L|<\epsilon$, desenvolvendo-a como $L-\epsilon<f(x)<L+\epsilon$. Geometricamente, poderão representar um intervalo centrado em L na reta vertical por meio de um segmento de reta com extremidades em $L-\epsilon$ e $L+\epsilon$, associando-o com a imagem da função.

O erro e as formas de mediação possíveis para o item são análogos ao descrito para o item anterior.

No item (c), objetiva-se o reconhecimento da relação entre as duas distâncias apresentadas: a de x a p, e a de $f(x)$ a L. Essa conexão corresponde ao núcleo da definição formal de Limite e espera-se que os estudantes verbalizem, representem ou apontem que, para cada intervalo ao redor de L, é possível associar um intervalo ao

redor de p tal que, se x estiver nesse intervalo, então $f(x)$ estará dentro do intervalo em torno de L. Representações como “para todo ϵ, existe $\delta > 0$” podem emergir, embora o foco aqui seja a transição geométrica e algébrica dessa interpretação.

No entanto, é possível que o estudante responda que as distâncias não se relacionam, e o pesquisador pode mediar a situação com o seguinte questionamento: “Imagine que você está ajustando a régua para medir em torno de L. Como isso afeta os pontos de x ao redor de p?” ou “Você conseguiria encontrar um valor para x que está próximo de p mas $f(x)$ não estar próximo de L? Isso é possível neste gráfico?”.

A sequência foi organizada em sessões interdependentes, cada uma com atividades estruturadas para provocar o enfrentamento de situações centradas na noção de distância — elemento nuclear da definição de Limite. As atividades iniciais permitiram o tratamento da distância entre números reais, transição para a distância entre variáveis e, por fim, entre função e valor Limite, articulando representações algébricas, geométricas e verbais.

A escolha da função $f(x) = x + 2$, com descontinuidade pontual em $x = 3$, bem como da função $f(x) = 2x + 1$, possibilitou explicitar a dissociação entre o valor da função no ponto e o comportamento da função em torno desse ponto. Tal decisão visou induzir a noção de que o Limite depende do comportamento da função ao redor de um ponto, e não necessariamente do valor da função nesse ponto.

A seguir, apresentamos a experimentação realizada com os estudantes dos cursos de graduação em Matemática-Licenciatura e Matemática-Bacharelado, dos quais todos já haviam cursado a disciplina de Cálculo I, e estudado, nesta disciplina, o tema Limite de função em um ponto. Também apresentaremos a análise *a posteriori* e a validação.

7 EXPERIMENTAÇÃO, ANÁLISE *A POSTERIORI* E VALIDAÇÃO

Antes de adentrarmos na experimentação realizada com os estudantes do curso de Matemática da UFMS em 2025, é importante trazer a realização de uma experimentação piloto com 8 (oito) estudantes do curso de Bacharelado em Física da UFMS no segundo semestre de 2024, pois ela teve papel fundamental no refinamento da experimentação conduzida em 2025 com os estudantes dos cursos de Matemática, especialmente no que diz respeito à abordagem inicial e *feedback* fornecido diante das dúvidas dos estudantes. Esta experimentação piloto foi baseada em Carvalho

(2022), em que este instrumento de pesquisa foi utilizado para refinamento de coleta de dados antes da experimentação principal.

A experimentação piloto permitiu repensar como intervir sem antecipar soluções, refletindo sobre a mediação que seria realizada na experimentação, contribuindo para a construção autônoma do conhecimento pelos estudantes.

Considerando a abordagem na experimentação piloto, foi discutido em orientação coletiva, não detalharmos muito sobre as formas de resolução das equações e inequações modulares na discussão inicial com os estudantes, a fim de verificar quais estratégias seriam mobilizadas por eles, e permitir a identificação dos invariantes operatórios no início da aplicação da sequência didática. O teste foi fundamental também nas escolhas das atividades por sessão, e também, na organização temporal.

A construção conceitual da noção de distância realizada na abordagem inicial da experimentação foi essencial como base para a compreensão da definição formal de Limite de funções em um ponto, objetivo central da sequência didática envolvendo situações, no caso 11 atividades, planejadas sob a luz da Teoria dos Campos Conceituai. A noção de distância, formalizada nesta etapa inicial, foi explorada e mobilizada nas atividades subsequentes, o que permitiu modelizar os teoremas em ação manifestados pelos estudantes.

No total, foram realizadas 3 sessões da experimentação, organizadas com duas horas e meia de duração por dia, em 4 dias de aplicação no período da manhã, no mês de março de 2025, com a seguinte forma de aplicação: 4 atividades na primeira sessão precedidas pela abordagem inicial, 3 atividades na segunda sessão precedidas pela institucionalização da sessão anterior, na qual cada atividade desta segunda sessão exigiu o esboço de gráficos de funções reais e demandaram um pouco mais de tempo para resolução pelos estudantes, 4 atividades na terceira sessão, precedidas pela institucionalização da sessão anterior. Na quarta sessão, foi proposta uma atividade para se provar um Limite de uma função polinomial do primeiro grau, no caso utilizando a definição formal de Limite, envolvendo os elementos trabalhados pelos estudantes ao longo das 3 sessões anteriores, buscando, com isso, institucionalizar os elementos da definição formal de Limite trabalhados.

A experimentação envolveu um grupo de 7 estudantes do curso de Matemática, sendo 3 do curso de Licenciatura e 4 do curso de bacharelado, todos da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, que foram convidados a participar da

pesquisa. Para análise das atividades, abordaremos as resoluções de duas duplas que participaram de todas as situações propostas, sendo 2 estudantes do curso de Licenciatura, que cursavam o 7º semestre, doravante denominados EL_1 e EL_2 e 2 estudantes do curso de bacharelado, do 3º semestre, identificados como EB_1 e EB_2 a partir deste ponto.

A sessão foi iniciada com o objetivo de introduzir a noção de distância entre dois números reais, explorando diferentes perspectivas e formalizando a definição por meio do módulo da diferença. Toda a experimentação foi gravada em áudio, e a transcrição dessa gravação constitui uma das principais fontes de dados para a análise apresentada neste capítulo, bem como as resoluções realizadas nas folhas das atividades. Importante registrar que todos os participantes da experimentação já haviam tido contato com a definição formal de Limite na disciplina de Cálculo em seus respectivos cursos.

O pesquisador mediador iniciou então a experimentação com um questionamento sobre a distância entre números, partindo de um resultado numérico positivo e posteriormente negativo. Essa situação inicial teve como objetivo explicitar a necessidade de uma definição de distância que sempre resulte em um valor não negativo, antecipando a introdução do conceito de módulo.

A discussão inicial focou no questionamento quanto à possibilidade de obter-se uma distância negativa. A resposta dos estudantes, confirmando a impossibilidade de uma distância negativa, levou à introdução do módulo como ferramenta para garantir um valor não negativo para a distância calculada.

O professor então questionou sobre outras maneiras de calcular a distância entre -1 e 0, além do uso direto do módulo. Para o cálculo da distância entre estes dois números, foi introduzido o conceito de “final menos inicial” pelos estudantes. A aplicação desse conceito foi explicitada com o exemplo da distância entre -1 e 0, em que o final (0) menos o inicial (-1) resultou em $0-(-1)=1$.

Após essa discussão, foi proposta a inversão da ordem do cálculo da distância entre -1 e 0, buscando calcular a distância na forma inversa ao sugerido pelos estudantes, na forma $-1-0=-1$, conforme transcrição a seguir:

Pesquisador Mediador: - Calculando a distância entre -1 e 0 na forma $-1-0=-1$*, encontramos algum inconveniente? Podemos deixar o resultado dessa maneira?*

Estudante EL_2: - Não.

Pesquisador Mediador: - Por quê?

Estudante EL_2: - Porque não existe distância negativa.

Pesquisador Mediador: - O que eu devo fazer então?

Estudante EL_2: - Utilizar o módulo.

A partir da resposta fornecida, isto é, a utilização do módulo para driblar o inconveniente valor negativo obtido para o resultado do cálculo da distância entre os números, os demais estudantes concordaram com a estratégia.

Para consolidar a compreensão, um segundo exemplo foi apresentado: a distância entre 1 e 3. Os estudantes prontamente identificaram a distância como sendo 2. A formalização deu-se por meio da aplicação do cálculo "final menos inicial" sugerida pelos estudantes: $3 - 1 = 2$. Em seguida, o professor propôs o cálculo invertendo a ordem $(1 - 3)$, o que gerou um resultado negativo (-2), o qual foi questionado aos estudantes pelo professor em relação à sua adequação e prontamente identificado como inconveniente pelos estudantes. Essa situação reforçou a necessidade do uso do módulo para obter um valor positivo para a distância, isto é, $|1 - 3| = |-2| = 2$.

A discussão avançou para a representação geométrica da distância na reta numérica. O pesquisador questionou onde estaria representada a distância entre 1 e 3 na reta graduada. A resposta dos estudantes mudou para a identificação do intervalo entre os dois números. No entanto, o pesquisador buscou refinar essa ideia, direcionando o foco para o tamanho desse intervalo, ou seja, a distância propriamente dita. A analogia com a distância entre dois pontos geográficos (Campo Grande e Bonito) foi utilizada para introduzir a ideia da menor distância ou o segmento de reta que os une. A partir dessas explorações, buscou-se formalizar uma definição para o cálculo da distância entre dois números. A ideia de tomar dois pontos como extremidades de um segmento de reta, cujo comprimento representaria a distância, foi apresentada e validada pelos estudantes.

Na tentativa de construir uma definição proposta pelos estudantes, EL_2 sugeriu o módulo do começo menos o fim. O professor explorou essa sugestão, questionando se o uso do módulo tornaria a ordem da subtração irrelevante. A conclusão foi que, utilizando o módulo, a ordem não importava, enquanto sem o módulo, a ordem ("final menos inicial" ou "maior menos o menor" em uma reta orientada) seria crucial.

Assim, a discussão inicial culminou na construção da definição de distância entre dois números reais x e y como sendo o módulo da diferença entre eles, denotado por $|x - y|$ ou $|y - x|$. O áudio não formalizou explicitamente a definição escrita, mas

a discussão e as anotações no quadro conduziram a essa compreensão, a qual se revelou no enfrentamento das situações propostas na sequência didática. Essa definição incorpora a propriedade fundamental de não negatividade da distância e a equivalência da distância entre dois pontos, independentemente da ordem considerada.

Durante a abordagem inicial, foi possível observar alguns teoremas em ação mobilizados pelos estudantes em relação à noção de distância. Inicialmente, a concepção de distância estava ligada à ideia de um valor positivo. A dificuldade em aceitar um resultado negativo para a diferença entre dois números revelou a identificação desse conceito.

A introdução da fórmula "final menos inicial" revela um teorema em ação relacionado à orientação da reta numérica e ao cálculo de deslocamentos da espécie, no caso o teorema em ação T_1 modelizado na análise *a priori*. A percepção de que a ordem da subtração influencia o sinal do resultado, mas não a magnitude da distância, mostrou-se um passo importante para a compreensão da necessidade do módulo.

A representação geométrica da distância como o comprimento de um segmento de reta e a identificação do intervalo entre os pontos mostram a conexão entre a álgebra e a geometria na compreensão do conceito de distância. A analogia com a distância geográfica também evocou a ideia de menor caminho entre dois pontos.

A sugestão de EL_2 de utilizar o módulo da diferença (“começo menos o fim”) e a discussão subsequente sobre a irrelevância da ordem com o uso do módulo evidenciam a progressiva formalização do conceito de distância, incorporando a propriedade de simetria $d(x, y) = d(y, x)$.

A partir desta explanação inicial, foram propostas as atividades aos estudantes em 3 sessões de aplicação, organizados em 3 duplas, em que estudantes da Licenciatura e Bacharelado não se misturaram. Foi orientado pelo pesquisador que eles resolvessem inicialmente as situações presentes nas atividades individualmente, comentando com sua dupla suas formas de resolução e resultados somente ao fim de uma atividade, ou comunicando-se com sua dupla apenas em caso de surgir alguma dúvida durante a resolução da atividade. Foi informado aos sujeitos participantes, ainda, que o pesquisador estaria à disposição para auxiliar na compreensão dos enunciados. As atividades foram resolvidas à caneta em papel, sem disponibilização de lápis ou qualquer meio de escrita em grafite, ou seja, eventuais registros

considerados errôneos ou inadequados pelos estudantes ficaram marcados no papel de resolução dos estudantes, e também serviram como fonte de produção de dados.

A seguir, trazemos a análise *a posteriori* das atividades aplicadas na experimentação.

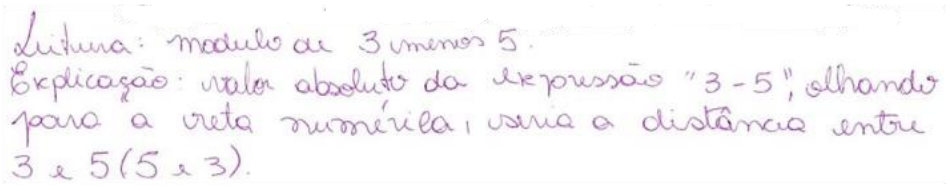
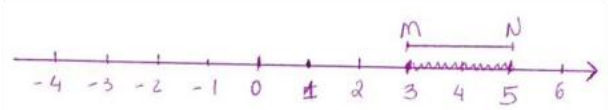
7.1 Primeira Sessão

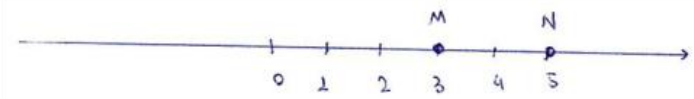
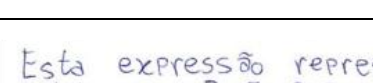
7.1.1 1ª Atividade - Itens (a) e (b)

Conforme o previsto na análise *a priori*, identificamos nas resoluções dos estudantes o teorema em ação T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos.*" e o desenvolvimento de representações geométricas consistentes com esse entendimento (T_3).

A seguir, no Quadro 1, trazemos as resoluções dos estudantes da licenciatura e do bacharelado na atividade 1 nos itens (a) e (b).

Quadro 1 - Resolução da primeira atividade - itens (a) e (b)

1. Considerando a definição de distância entre dois números reais, responda: a) Como você faria a leitura da expressão $\|3-5\|$, explicando seu significado? b) Como você faria a interpretação geométrica, numa reta numérica, do item a, considerando M o ponto de abscissa 3 e N o ponto de abscissa 5?	
EL_1	a)  b) 

EL2	**a)** Eu leria como "o módulo de 3-5", pensando em algum significado para isso, eu diria que é a distância do 3 ao 5 na reta real. **b)**  Minha interpretação geométrica viria da geometria plana e seria $\overline{MN}$ (o tamanho do segmento de reta que liga M a N).
EB1	**a)** Valor absoluto da expressão 3 - 5, ou seja, a distância entre cinco e três, ressaltando que tanto a distância quanto a definição do módulo são restritos a valores positivos (tendo em vista a definição formal de valor absoluto, que é dada por $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$) **b)** ~~(Seja)~~ Sendo ~~M (3, 0)~~ e ~~N (5, 0)~~ os pontos dados, podemos M = 3 N = 5 colocá-los na reta numérica correspondente ao conjunto dos números reais como segue:  Podemos interpretar o resultado de $\lvert 3 - 5 \rvert$ como a distância geométrica entre eles, em linha reta (2).
EB2	**a)** Esta expressão representa o módulo de uma expressão obtida por 3-5, que, embora possa ser tratada como um número arbitrário, também pode ser a representação da distância entre 3 e 5, apesar de ~~não ser~~ ter sido utilizada uma notação que não explicita esse tipo de uso. **b)** Desenharia ~~uma~~ segmento de reta graduado, necessariamente em M e N e arbitrariamente em outros pontos; destacaria a região do segmento entre M e N.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes da licenciatura (EL_1 e EL_2) apresentaram resoluções nas quais a expressão $|3 - 5|$ foi diretamente relacionada à ideia de distância entre dois pontos,

confirmando a mobilização do teorema em ação T_1. A forma como verbalizaram a interpretação da expressão algébrica e representaram geometricamente essa distância reforça a mobilização também do teorema em ação T_3, previsto *a priori* para enfrentamento das situações destes itens: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta.*".

O mesmo padrão foi observado nos estudantes da turma do curso de bacharelado (EB_1 e EB_2). Todavia, EB_1 apresenta uma pequena ambiguidade inicial ao interpretar a expressão $|3-5|$ tanto como módulo quanto como distância, mas, ao construir corretamente a representação geométrica solicitada no item (b), mostra uma filiação produtiva quanto à noção de distância construída na abordagem inicial da experimentação, ainda que sua linguagem algébrica pareça inicialmente hesitante. Isso sugere que a ação de EB_1 se filia em uma rede de conceitos já disponível, como a definição de módulo citada por ele, e a notação $\sqrt{a^2} = |a|$, ambos conceitos não previstos *a priori* para enfrentamento das situações nos itens (a) e (b).

Esse enfrentamento, exigindo a mobilização de teoremas em ação previstos *a priori* (T_1; $T_{1,1}$ e T_3), permite identificar elementos dos esquemas dos sujeitos, os quais podem favorecer a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto, quais sejam, a compreensão do conceito de módulo como uma distância a partir da leitura da expressão $|3-5|$ e sua respectiva interpretação geométrica. No caso desta atividade, o fato de os estudantes mobilizarem os teoremas T_1, $T_{1.1}$ e T_3 indica a presença de um esquema já parcialmente constituído para lidar com situações que envolvem distância entre números reais. A utilização correta da representação geométrica, como foi solicitado, por exemplo, sugere que os estudantes conseguem se apoiar em conhecimentos anteriores importantes para o andamento das atividades, evitando problemas em lidar com situações envolvendo variadas representações. Reportamo-nos, neste ponto, à constatação de Abreu (2011), em que os estudantes parecem apenas interpretar a existência do Limite a partir de uma intuição gráfico-geométrica e alerta para um possível desequilíbrio entre as representações algébrica e geométrica quando desafiados a interpretar a Definição formal de Limite de funções, mas neste caso, verifica-se que os estudantes conseguiram, neste início, fazer a articulação entre as duas representações (algébrica e geométrica).

7.1.2 1ª Atividade - Item (c)

A partir do item (c), é alterada a variável didática da situação, do cálculo da distância entre parâmetros numéricos específicos para a generalização de um dos pontos, inserindo a variável x, conforme enunciado: "*c) Considere uma reta graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3?*". Neste momento, surgiu uma dúvida em uma dupla de participantes do curso de bacharelado, uma que não está sendo analisada nesta dissertação, mas que estava próxima a todos os estudantes, e, a seguir, registramos a transcrição do áudio da discussão realizada e que pode ter influenciado as resoluções de outros participantes:

Estudante EB[11]: - Professor, quanto a este item c, o que eu devo fazer? Eu gerei uma reta graduada e um ponto genérico de abscissa x, ou seja, um ponto de abscissa x, certo?

Pesquisador Mediador: - Certo. E de qual forma você expressaria a distância entre x e 3? Eu faço esta pergunta pois, diferentemente do item anterior, agora temos um número genérico x para cálculo da distância.

Estudante EB: - Sim, x.

Pesquisador Mediador: - E como você calcularia a distância entre x e 3? Vamos considerar que x não fosse um número genérico e sim um parâmetro numérico específico, como 1, por exemplo. Como você calcularia a distância entre 1 e 3?

Estudante EB: - Subtraindo o número final menos o inicial, colocando entre módulo.

Pesquisador Mediador: - Exato, porém, quando utilizamos o parâmetro genérico x, não é possível saber quem é o número final ou inicial. Discutimos isso no início, e há um modo de driblar esse inconveniente. Qual seria esse modo? Isto é, o que podemos usar?

Estudante EB: - Podemos utilizar o módulo. Eu calcularia módulo de $x - 3$.

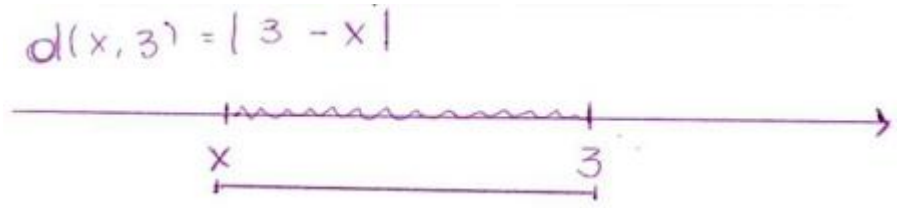
Após esta mediação**,** ocorrida conforme previsto na análise *a priori*, todos os estudantes apresentaram a expressão $|x - 3|$ ou $|3 - x|$ para representar a distância entre o ponto genérico x e o ponto fixo 3, consoante solicitado no item. A seguir, vejamos, no Quadro 2, as resoluções desses estudantes.

Em análise sob a lente da TCC, é possível verificar que esta mediação já permite identificar a desestabilização de um esquema do estudante, uma vez que ele se vê forçado à utilização do significante na forma de módulo para cálculo da distância

[11] Este estudante não faz parte do grupo de estudantes analisados nesta dissertação (EL_1, EL_2, EB_1 ou EB_2), uma vez que este estudante não iniciou e concluiu a experimentação em todas as sessões, e assim, quando algum destes estudantes figurar nesta pesquisa, nomeá-lo-emos por EB, quando pertencer ao curso de bacharelado e EL, quando pertencer ao curso de licenciatura.

quando é alterada a variável didática da situação, em que ele deve substituir sua forma de cálculo “número final menos inicial numa reta numérica” quando lida com parâmetros numéricos específicos, para mobilização do teorema em ação T_1 com a generalização de um dos parâmetros.

Quadro 2 - Resoluções dos estudantes na atividade 1, item (c)

c) Considere uma reta graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3?	
EL_1	
EL_2	Como X é um ponto genérico, não saberia dizer onde inicia e onde terminaria, então usaria o módulo para garantir que a distância fosse positiva, assim, d(x,3) = |x -3|
EB_1	Uma vez que a distância é positiva sempre, se $x \geq 3$: $d = x - 3$ (I) Se $x < 3$: $d = 3 - x$ (II) De (I) e (II), como $d = \|-d\| = \|d\|$, podemos expressar a distância entre x e 3 como $\|x - 3\| = \|3 - x\|$ para quaisquer x real.
EB_2	Provavelmente assim como no item anterior; no caso $x = 3$, no entanto, uma representação geométrica não me parece intuitiva, enquanto a definição de distância como o módulo da diferença pode extender esse conceito.

Fonte: Dados da pesquisa.

Destas resoluções, constata-se a mobilização dos teoremas em ação T_1: “*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*”; e $T_{1.1}$:

"*Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números*", previstos *a priori*.

Os estudantes entendem que o valor absoluto garante uma medida de distância não negativa, independentemente da posição de x em relação a 3, o que é importante para compreensão da definição formal de Limite de funções: a distância entre dois pontos na reta como uma quantidade não negativa, representada por módulo, o que também foi previsto *a priori*.

Um fator importante e que pode ter contribuído, foi a mediação realizada pelo pesquisador — conforme a transcrição descrita anteriormente — teve papel relevante neste movimento, especialmente para EL_2 e EB_2, conforme se depreende de suas resoluções no quadro 2, que inicialmente registraram dúvida quanto ao procedimento. A mediação explicitou a necessidade de recorrer ao valor absoluto ao lidar com uma variável genérica, o que pode ter influenciado os demais estudantes, como sugerido pela proximidade das carteiras e pela natureza coletiva do momento de discussão.

Essas mobilizações validam as previsões da análise *a priori* e também se alinham à pesquisa de Doumbia (2020) que aponta a necessidade de antecipação e construção progressiva de conceitos como distância e aproximação para favorecer a aprendizagem da definição formal de Limite de função em um ponto. A apropriação da utilização de módulo como representação de distância reflete uma filiação importante com este conceito pelos estudantes, como, por exemplo, o caso do EB_1 que mantém essa escolha na resolução deste item.

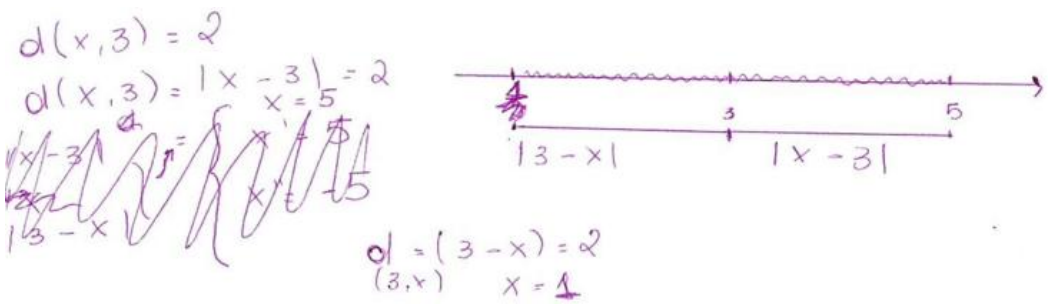
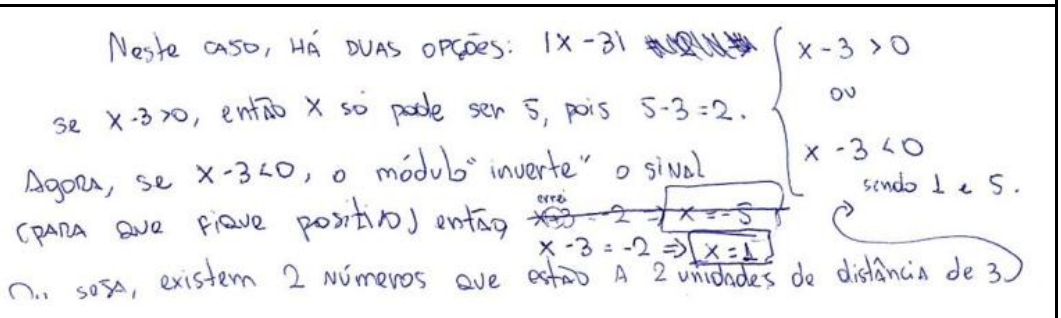
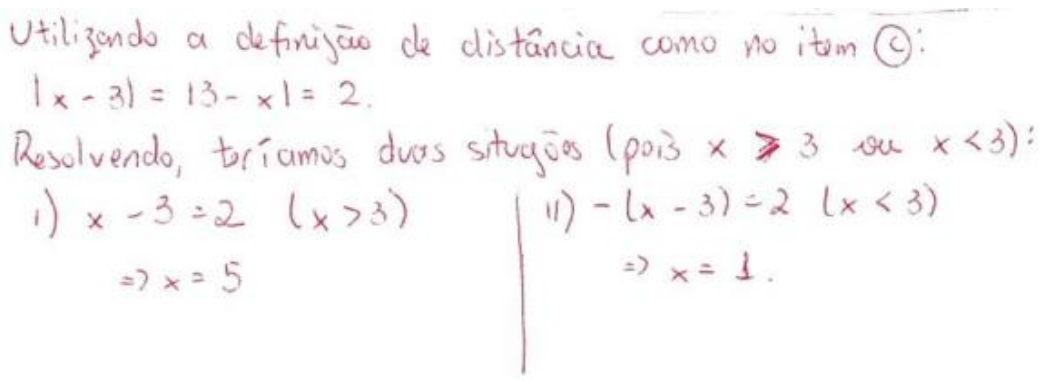
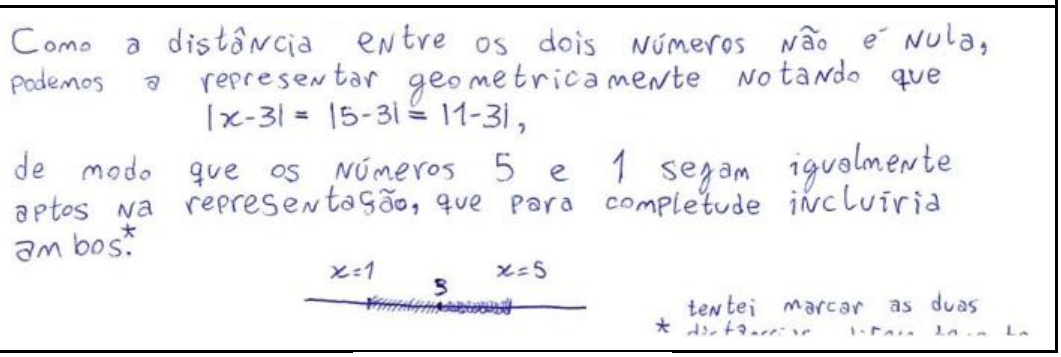
7.1.3 1ª Atividade - Item (d)

Na resolução do item (d) por todos os participantes analisados, EL_1, EL_2, EB_1 e EB_2 revelaram uma aderência significativa à previsão da análise *a priori*, com variações e semelhanças importantes nas representações e justificativas utilizadas.

A seguir, vejamos, no Quadro 3, as resoluções desses estudantes neste item.

Quadro 3 - Resoluções dos estudantes na atividade 1, item (d)

d) Considere agora que a distância entre x e 3 na reta numérica seja igual a 2 unidades. Como você expressaria essa situação em valor absoluto (ou módulo)?

EL1	
EL2	
EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Inicialmente, observa-se que todos mobilizaram o teorema em ação T_1 para representar as distâncias entre x e 3 igual a 2 unidades, em que a notação $|x-3|$ foi representada por todos, com variação por EB_1, que também registrou a notação $|x-3| = |3-x|$. É importante observar que todos os estudantes procederam à descoberta dos pontos $x = 1$ e $x = 5$ que satisfaziam a condição de distância do enunciado, mesmo que não solicitado pelo item.

Verifica-se que EL_2 e EB_1 trazem estratégias não previstas *a priori* para enfrentamento do item, no qual EL_2 filia-se a uma propriedade de equação modular para descobrir quais valores de x satisfazem a condição do enunciado, e EB_1 novamente filiando-se à definição de módulo para encontrar tais valores, o que revela seu apego a esta estratégia, o que nos permite concluir, conforme a TCC proposta por Vergnaud (1985), que este estudante possui este esquema já estável para enfrentamento de situações desta espécie em seu repertório.

EL_2 revela a compreensão de que o módulo pode ser desdobrado em duas equações: $x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2$, resultando nos valores $x = 1$ ou $x = 5$. Isso também indica uma filiação importante a procedimentos algébricos formais, característica comum aos estudantes que passaram por formações com ênfase na técnica algébrica (ABREU, 2011; BURIGATO & RACHIDI, 2021, REZENDE, 2003).

Já EB_2 e EL_1 utilizaram-se de uma representação geométrica da reta, posicionando o número 3 ao centro e identificando os pontos 1 e 5 como equidistantes de 3. Identificamos em suas resoluções o teorema em ação T_3: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta*" previsto na análise *a priori.*

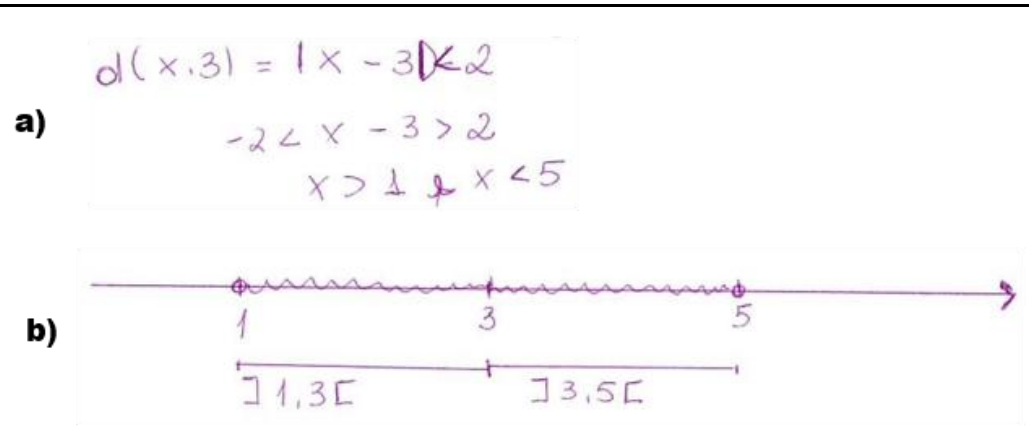
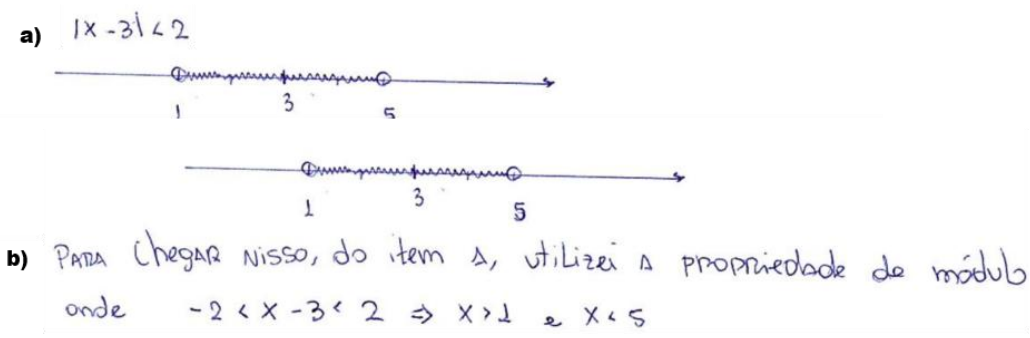
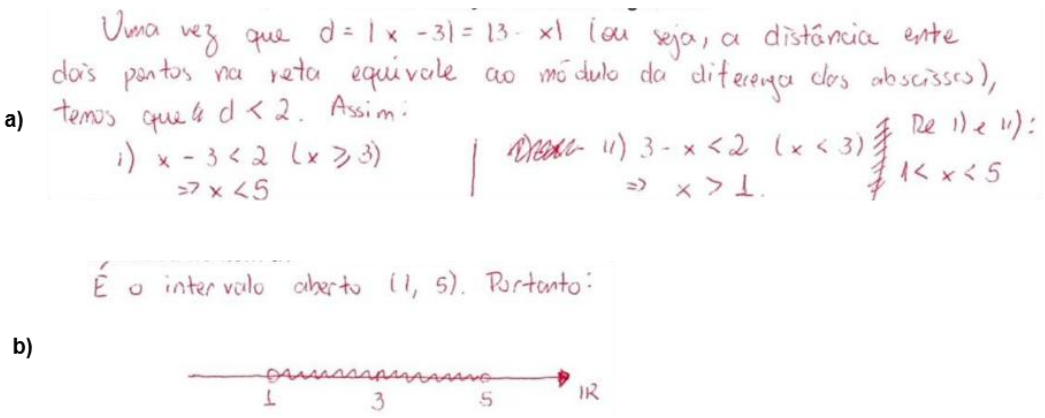
A presença desses teoremas indica que os sujeitos estão construindo esquemas que envolve a distância, a simetria e a relação entre formas algébricas e geométricas de representação, como já defendido por Zuchi (2005) e Doumbia (2020), ao destacar a importância de se trabalhar com essas ideias de forma sistematizada antes da apresentação da definição formal de Limite.

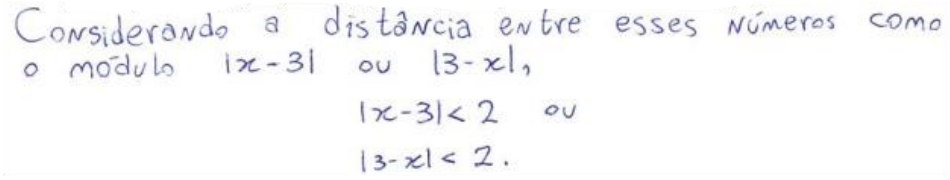
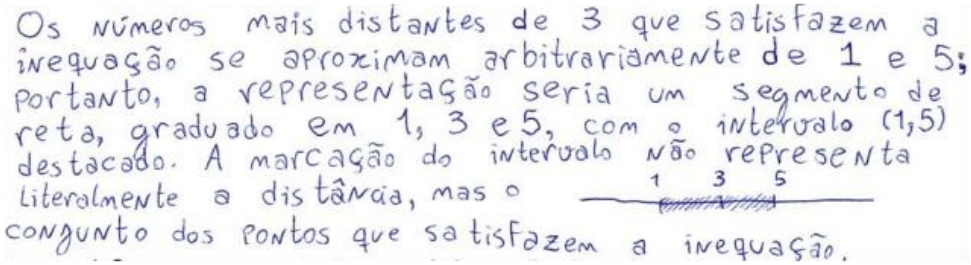
7.1.4 2ª Atividade - Itens (a) e (b)

Nesta segunda atividade da primeira sessão, foi solicitada a representação algébrica da condição de que a distância entre um número genérico x e o número 3 seja menor que duas unidades. A análise *a priori* previa que os estudantes recorreriam ao valor absoluto da diferença entre os números envolvidos e utilizariam a desigualdade nas notações $|x - 3| < 2$ ou $|3 - x| < 2$. Além disso, previa-se que para a resolução da inequação, poderiam mobilizar a propriedade da desigualdade modular prevista no teorema em ação $T_{2.1}$, o que não foi necessariamente mobilizado por todos os estudantes.

No Quadro 4, a seguir, trazemos as resoluções desses estudantes para esses dois itens.

Quadro 4 - Resoluções dos estudantes nos itens (a) e (b) da atividade 2

<table>
<tr><td colspan="2">2. Agora considere que a distância entre x e 3 na reta numérica seja menor do que 2 unidades.
a) Como você expressaria essa situação de modo algébrico?
b) De qual forma você representaria, numa reta numérica, a expressão encontrada no item a?</td></tr>
<tr><td>EL1</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>EL2</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>EB1</td><td> 
</td></tr>
</table>

EB2	a)  b) 

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme verificado nas resoluções, EB1 recorreu novamente à definição de módulo, separando a inequação $|x-3|<2$ em dois casos. Essa escolha representa uma filiação com estratégias algébricas usualmente ensinadas no ensino médio e nos cursos introdutórios de Cálculo. Vemos a mobilização de T1 em que o estudante distingue os casos $x \geq 3$ e $x < 3$, obtendo os dois intervalos e a intersecção como solução. Embora essa estratégia seja mais longa, ela é correta e indica domínio da noção de módulo e sua relação com desigualdades e não foi prevista na análise *a priori.*

Já EB2, por sua vez, não desenvolve os dois casos, mas indica a representação da distância como $|x-3|<2$ ou $|3-x|<2$ conforme previsto na análise *a priori* e, posteriormente, apresenta corretamente o intervalo correspondente. Nessa resolução identificamos a mobilização de T1, e T2, e uma compreensão da relação entre a desigualdade modular e um intervalo simétrico em torno do ponto 3.

A resolução de EL1, por sua vez, apresenta uma situação mais ambígua. Embora ele tenha utilizado corretamente a notação $|x-3|<2$, ao desenvolver a inequação, cometeu um erro algébrico e propôs a forma incorreta $-2 < x-3 > 2$, o que foi modelizado como o teorema em ação falso TF1: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$ *na forma de intervalo, então devemos transcrevê-la para a forma* $-\delta < x-a > \delta$". O uso incorreto da forma composta com dois sinais pode apontar para uma incompreensão do desenvolvimento da inequação modular em intervalo, e será acompanhado durante esta análise do percurso do estudante, pois

não fez com que ele apresentasse o resultado incorreto, e, por isso, pode ter sido só falta de atenção do participante.

O estudante EL_2 apenas representa a desigualdade por meio da notação $|x-3|<2$, sem desenvolvimento posterior. Isso indica o domínio do conceito algébrico de distância (mobilização de T_1) conforme previsto na análise *a priori*. No entanto, o mesmo explica no item (c) que utilizou a propriedade da inequação modular $|x-a|<\delta$ para desenvolvimento do intervalo que satisfaz a condição $|x-3|<2$, isto é, mobilizando o teorema em ação $T_{2.1}$, conforme previsto *a priori*.

Todos os participantes realizaram a representação dos intervalos corretamente, utilizando segmentos de reta hachurados entre os pontos 1 e 5, o que corresponde à solução da inequação $|x-3|<2$. Essa representação, de hachurar os segmentos não foi solicitada na atividade, o que mostra que seus esquemas se filiam em situações vivenciadas anteriormente envolvendo inequações.

As representações geométricas de todos os participantes evidenciam a mobilização dos teoremas em ação T_2 e T_3, que associam a distância entre dois pontos à visualização de um segmento na reta. Os estudantes apontam explicitamente para a simetria dos pontos 1 e 5 em relação a 3, sugerindo que esses pontos estão "a 2 unidades de distância" de 3 e que todos os x no intervalo satisfazem a condição dada.

A interpretação geométrica por EL_1 e EB_2 é similar, ainda que suas representações não tenham explicitado as extremidades como abertas, o que pode ser atribuído a uma questão de notação. Ainda assim, sua resolução indica que compreendeu a ideia de distância simétrica, o que reforça a mobilização de T_2 e T_3.

Destaca-se, a filiação de EB_1 à definição de módulo ao separar a inequação modular em dois casos distintos — $x-3\geq 0$ e $x-3<0$ — para desenvolver a solução algébrica. Esta escolha será acompanhada nas suas resoluções subsequentes e, caso persista, poderá ser modelizado como um novo teorema em ação.

Nos itens (a) e (b) analisados *a posteriori*, é possível observar a continuidade de filiações na primeira atividade, principalmente no que se refere à noção de distância entre números reais expressa por meio do valor absoluto da diferença entre eles. Essas filiações contribuem para uma consolidação progressiva do conhecimento dos estudantes diante de situações que exigem o reconhecimento da condição $|x-3|<2$ como uma restrição sobre os valores de x na reta real.

7.1.5 2ª Atividade - Itens (c) e (d)

O item (c) solicitava aos estudantes a interpretação da desigualdade modular já construída no item (b). Esperava-se que, ao recorrerem ao conceito de distância e à ideia de intervalo aberto centrado em um número real, os estudantes fossem capazes de compreender a relação entre o valor de δ (2 unidades nesta atividade) e a amplitude do intervalo, assim como o sentido da desigualdade na reta numérica. E o item (d) propõe aos estudantes que expressem, por meio da notação de desigualdade, os valores de x cuja distância ao ponto 3 seja menor que 2.

A seguir trazemos, no Quadro 5, as resoluções dos estudantes da licenciatura e do bacharelado nesses itens da atividade 2.

Quadro 5 - Resolução da atividade 2 itens (c) e (d)

2. Agora considere que a distância entre x e 3 na reta numérica seja menor do que 2 unidades. c) O que a representação geométrica realizada no item b apresenta? d) Como você escreveria o conjunto obtido com a inequação do item (a)?	
EL1	**c)** Apresenta números, distância entre dois pontos, intervalos abertos entre estes dois números. **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x < 5\}$
EL2	**c)** ~~Representa os~~ Apresenta os possíveis valores que esta distância pode assumir **d)** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ denotei A como o conjunto apenas.

EB1	**c)** Todos os valores de x possíveis, tais que x é real, para que a distância entre x e 3 seja menor que 2. (Isso inclui o caso onde a distância é nula, ou seja, x = 3). **d)** Nomeando como D o conjunto dado, D = {x ∈ IR | 1 < x < 5}.
EB2	**c)** O conjunto de todos os números reais x tais que ~~|x − 3| =~~ |x − 3| < 2, que contém o intervalo (1,5) e está contido nele. **d)** De maneira implícita (meu primeiro pensamento), {x | |x − 3| < 2}; mais explicitamente, em termos da relação <, {x | 1 < x < 5}.

Fonte: Dados da pesquisa.

Observou-se que todos os participantes buscaram algum tipo de interpretação para a desigualdade, ainda que em níveis diferentes de generalização. Os estudantes EL1 e EL2, por exemplo, interpretam o intervalo como os possíveis valores de x que satisfazem a condição de distância modular menor do que 2 em relação ao ponto 3. EL1 faz isso mencionando os "números" entre dois pontos (1 e 5), mas sem explicitar com clareza a noção de distância como um conceito geométrico ou algébrico. EL2, por sua vez, aproxima-se mais da noção esperada, associando a desigualdade aos "valores de x" que satisfazem a condição estabelecida.

Já os estudantes do bacharelado, EB1 e EB2, mostram maior domínio da linguagem matemática ao relacionarem explicitamente a desigualdade $|x-3|<2$ com a escrita do intervalo $(1;5)$.

Todos os participantes chegaram a representações algébricas corretas, notadamente na forma do conjunto $\{x \epsilon R/1<x<5\}$, com uma pequena variação pelo participante EL1, o qual acreditamos que está expressando os pontos que distam em menos do que 2 unidades do número 3 por meio do conjunto de números reais que satisfazem a inequação modular $|x-3|<2$, isto é, para EL1, os números (pontos)

que distam em menos do que duas unidades de 3 na reta numérica pertencem à intersecção dos intervalos $x > 1$ *e* $x < 5$.

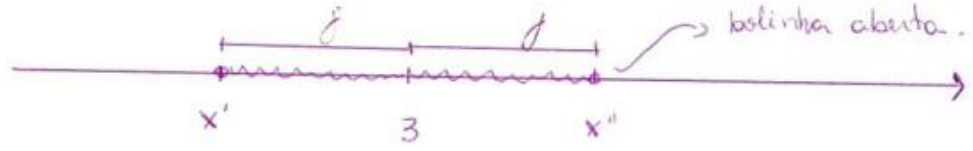
A ausência de justificativa formal nos registros, porém, impede a identificação direta de todos os teoremas em ação mobilizados. Contudo, a regularidade observada entre as produções dos quatro estudantes indica a presença dos Teoremas em Ação T_1 (representação da distância como valor absoluto) e T_2 (interpretação do intervalo centrado em 3 com raio 2).

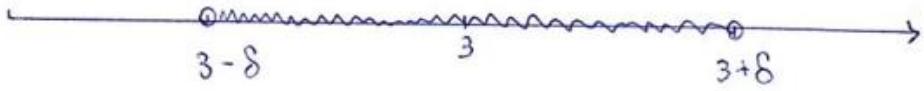
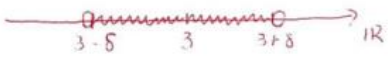
7.1.6 3ª Atividade - Itens (a) e (b)

A atividade 3 marca um momento importante na sequência didática ao introduzir, pela primeira vez, o parâmetro δ como variável genérica de distância em torno de um ponto do domínio. A análise *a priori* previa que os estudantes utilizariam a representação algébrica da distância como $|x - 3| < \delta$, transcrevendo-a para uma forma intervalar e, posteriormente, representando graficamente essa condição, o que foi confirmado na resolução dos estudantes.

A seguir trazemos, no Quadro 6, as resoluções dos estudantes da licenciatura e do bacharelado nesses itens da atividade 3.

Quadro 6 - Resoluções da Atividade 3 itens (a) e (b)

<table>
<tr><td colspan="2">3. Considere agora o número real positivo δ, tal que a distância entre 3 e x seja menor do que δ na reta numérica.
a) De qual forma você escreveria a situação exposta no enunciado de forma algébrica?
b) Como você faria a representação do item a na reta numérica?</td></tr>
<tr><td>EL1</td><td>a) $d(x,3) = |x-3| < \delta$
$-\delta < x - 3 > \delta$
b)  </td></tr>
</table>

EL2	a) $\|3-x\|<\delta \Rightarrow -\delta < 3-x < \delta \Rightarrow x < 3+\delta$ e $x > 3-\delta$ b)  (AJUDA NO VERSO DA FOLHA)
EB1	a) A distância entre 3 e x é dada por $d = \|x-3\| = \|3-x\|$. Para δ real positivo, temos que: i) $x-3 < \delta$ $(x \geq 3)$: $\Rightarrow x < 3+\delta$. ii) $3-x < \delta$ $(x < 3)$: $\Rightarrow x > 3-\delta$. De i) e ii): $3-\delta < x < 3+\delta$ b) É o intervalo aberto $(3-\delta, 3+\delta)$, pois δ é um valor real positivo. Então: 
EB2	a) Não encontrei nenhum motivo para não reciclar o item a) da segunda atividade; então, $\|x-3\|<\delta$ ou $\|3-x\|<\delta$. b) Como δ não é nulo, podemos desenhar um segmento graduado em $3+\delta$, 3 e $3-\delta$ e prosseguir como na segunda atividade:

Fonte: Dados da pesquisa.

No item (a), todos os estudantes representaram corretamente a condição como $|x-3| < \delta$. Trata-se de uma filiação ao conceito de distância construído nas atividades anteriores, em que a distância entre dois números foi expressa como valor absoluto da diferença entre eles.

A mobilização de teoremas em ação previstos na análise *a priori* também pôde ser observada: T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta*

numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos"; T_2: "*Se a desigualdade* $|x-a|<\delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ"; $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta<x<\delta+a$".

Os estudantes EL_1, EL_2 utilizaram diretamente a propriedade de desenvolvimento da desigualdade modular, conforme o teorema $T_{2.1}$. No entanto, EL_1 persiste em seu erro no desenvolvimento algébrico do intervalo na passagem de $|x-3|<\delta$ para a forma $-\delta<x-3>\delta$, mobilizando novamente o que modelizamos como um teorema em ação falso TF_1: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$ *na forma de intervalo, então devemos transcrevê-la para a forma* $-\delta<x-a>\delta$". Já EB_1, diferentemente, optou por retomar a definição de módulo, tratando separadamente os casos $x\geq 3$ e $x<3$, como já havia feito em atividades anteriores, o que corrobora o que já comentado, para a modelização de um novo teorema em ação que está sendo mobilizado por EB_1, pois vemos que ele faz essa filiação desde o início quando precisa encontrar o intervalo para desenvolvimento de inequações modulares na forma $|x-a|<\delta$.

No item (b), que solicita a representação geométrica da desigualdade algébrica obtida no item (a), todos os estudantes utilizaram a reta real, marcaram o ponto 3 no centro e delimitaram os pontos $3-\delta$ e $3+\delta$, representando corretamente o intervalo aberto $(3-\delta,\ 3+\delta)$ conforme previsto, mas com hachura adequada para a visualização não prevista *a priori*.

Este tipo de representação está associado aos teoremas em ação T_2: "*Se a desigualdade* $|x-a|<\delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ*"* e T_3: "Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta".

Ademais, ao considerar a abordagem empregada por EB_1, ao desenvolver separadamente os casos positivos e negativos do módulo para encontrar os valores de x, nota-se que ele compreende a noção de distância como uma diferença com sinal dependente da posição de x em relação a 3.

A mediação registrada na transcrição — quando o pesquisador instiga um estudante a recordar como calcular a distância entre dois números sem saber qual é maior — pode ter influenciado a escolha pela notação com módulo, reforçando a

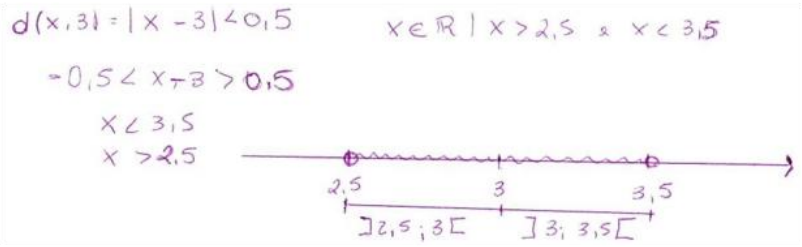
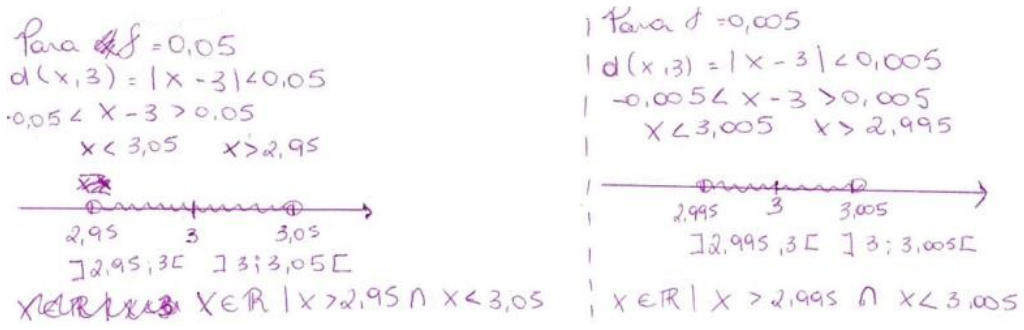
compreensão de que a representação $|x-3|<\delta$, driblando a indefinição sobre quem é o maior ponto na representação. Isso confirma a importância das representações utilizadas nas situações (notações, símbolos, linguagem verbal) são o que Vergnaud (2009) denomina de significantes, e que servem como facilitadores do acesso ao significado (o conceito) de distância, fundamentais no processo de aprendizagem.

7.1.7 3ª Atividade - Itens (c) e (d)

Nos itens (c) e (d), os estudantes foram convidados a considerar valores específicos para o parâmetro δ, e a partir disso, reescrever a inequação da distância entre x e 3 expressa no item (a), bem como representá-la algebricamente (na forma de intervalo) e geometricamente.

A seguir trazemos, no Quadro 7, as resoluções dos estudantes.

Quadro 7- Resoluções da Atividade 3 itens (c) e (d)

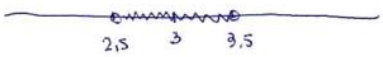
c) Considere, nesta situação, que $\delta = 0{,}5$. De qual forma você reescreveria a expressão encontrada no item a com esse novo parâmetro e faria a representação algébrica (na forma de intervalo) e geométrica? Quais números estão nas extremidades em torno de 3 quando $\delta = 0{,}5$? d) De qual forma você faria o item c, adotando-se agora $\delta = 0{,}05$? E para $\delta = 0{,}005$?	
EL_1	**c)**  **d)** 

EL2

c)

$d(x,3) = |3-x| < 0{,}5 \Rightarrow$ ~~0,5~~ do item A: $x < 3 + 0{,}5 \Rightarrow x < 3{,}5$

$x > 3 - 0{,}5 \Rightarrow x > 2{,}5$

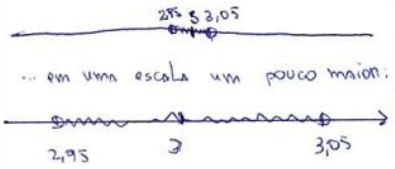


O intervalo é o seguinte: $\{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 < x < 3{,}5\}$

d)

I) $x < 3 + 0{,}05 \Rightarrow x < 3{,}05$

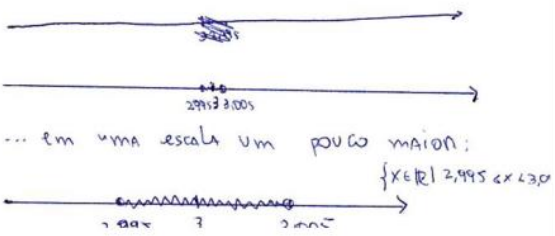
$x > 3 - 0{,}05 \Rightarrow x > 2{,}95$



$\{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}95 < x < 3{,}05\}$

II) $x < 3 + 0{,}005 \Rightarrow x < 3{,}005$

$x < 3 - 0{,}005 \Rightarrow x < 2{,}995$



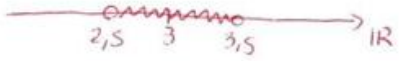
EB1

c)

Para $\delta = 0{,}5$, a expressão do item (a) dar-se-ia como:

$3 - 0{,}5 < x < 3 + 0{,}5 \Rightarrow 2{,}5 < x < 3{,}5$.

Geometricamente:



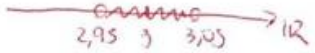
Para $\delta = 0{,}5$, estão nas extremidades todo x real tal que $x \in (2{,}5;\ 3{,}5)$.

d)

Para $\delta = 0{,}05$:

Intervalo: $3 - 0{,}05 < x < 3 + 0{,}05 \Rightarrow 2{,}95 < x < 3{,}05$

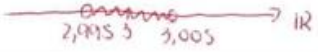
Rep. Geométrica:

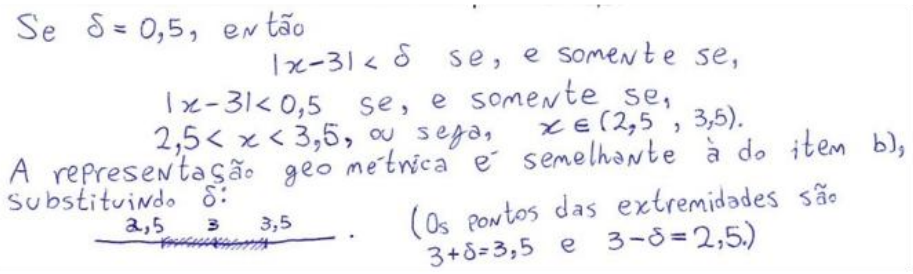
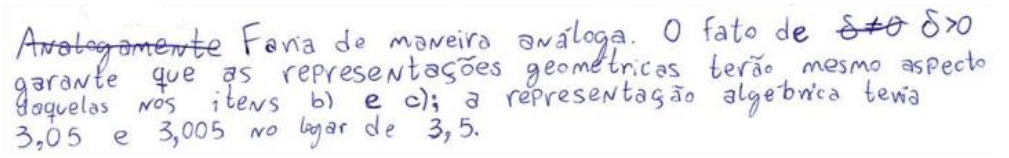


Para $\delta = 0{,}005$:

Intervalo: $3 - 0{,}005 < x < 3 + 0{,}005 \Rightarrow 2{,}995 < x < 3{,}005$

Rep. Geométrica:



EB2	**c)**  **d)** 

Fonte: Dados da pesquisa.

Observou-se que todos os estudantes mobilizaram corretamente a ideia de que a expressão $|x-3|<\delta$ representa um intervalo centrado em 3, com raio δ, desenvolvendo essa expressão em sua forma equivalente: $3-\delta<x<3+\delta$. Esse desenvolvimento evidencia a mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$, inclusive por EB_1 que até então estava se filiando à definição de módulo para encontrar os intervalos relacionados, modelizado a partir de pesquisas anteriores, como a de Zuchi (2005), e confirmado no enfrentamento dessa situação.

Além disso, o reconhecimento da distância como valor absoluto da diferença entre dois números foi mobilizado pelos sujeitos, o que se relaciona aos teoremas em ação T_1 e T_2. A representação geométrica das distâncias na reta, com o uso de segmentos e intervalos abertos indicados por hachuras entre os pontos $2{,}5$ e $3{,}5$, corrobora a mobilização do teorema em ação T_3, ligado à visualização da distância como segmento.

Destaca-se ainda a correção algébrica e de representação dos estudantes EL_1, EL_2 e EB_1, que, mesmo ao lidarem com valores numéricos, não cometeram equívocos, indicando domínio do conceito de intervalo e sua notação, além da consciência da exclusão das extremidades (com exceção de EB_2) — reforçando uma possível filiação com o conceito de distância como medida de proximidade estrita.

Durante a análise da resolução dos itens (c) e (d) da terceira atividade, observou-se que o estudante EL_1, ao desenvolver a inequação $|x-3|<\delta$, mobiliza novamente o teorema em ação falso TF_1: “Se necessitamos desenvolver a inequação $|x-a|<\delta$, então podemos transcrevê-la para a forma $a-\delta<x>a+\delta$”. Esse tipo de equívoco, indicado pela presença desse teorema incorreto, presente no esquema

acionado pelo estudante, no caso, uma forma mal estruturada de desenvolvimento da inequação modular, pode indicar um problema na manipulação dos significantes simbólicos da desigualdade, mais especificamente na coerência lógica da estrutura composta. No entanto, é importante destacar que, se for uma incompreensão ou somente falta de atenção, EL_1 representa corretamente o intervalo no final de seu desenvolvimento da inequação. Da análise das gravações dos estudantes durante o enfrentamento da situação, não foi possível identificar o que ocasionou a percepção de seu erro e correção do seu procedimento. Uma possibilidade é a de que ele tenha discutido com seu parceiro de dupla EL_2, ou observou a resposta desse colega e fez similar, mas em todo caso algo influenciou a sua resposta final. Também pode ter ocorrido de o estudante possuir o conceito apropriado de intervalo centrado em torno de um ponto e desenvolvido a partir de uma desigualdade com módulo e o problema fosse na escrita na forma de inequação. Continuaremos a monitorar se este teorema em ação se trata de uma filiação recorrente (e, portanto, parte de um esquema do participante) ou de uma falta pontual de atenção.

Como aponta Doumbia (2020), dificuldades no manuseio da notação matemática envolvendo desigualdades e intervalos aparecem com frequência entre estudantes que ainda não consolidaram as ideias de distância e de manipulação algébrica, o que reforça a importância da análise de resoluções como esta.

7.1.8 4ª Atividade - Itens (a) e (b)

A análise *a posteriori* dos itens (a) e (b) da quarta atividade permite observar a consolidação de importantes conceitos e filiações previstas na análise *a priori*.

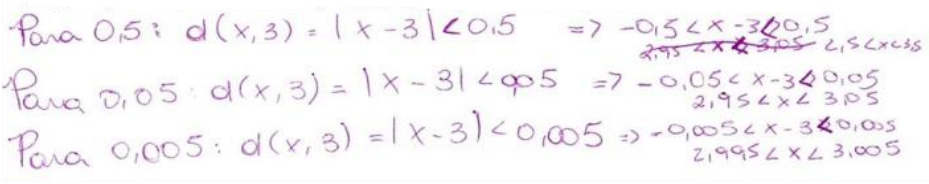
Segue no Quadro 8 as resoluções dessas atividades.

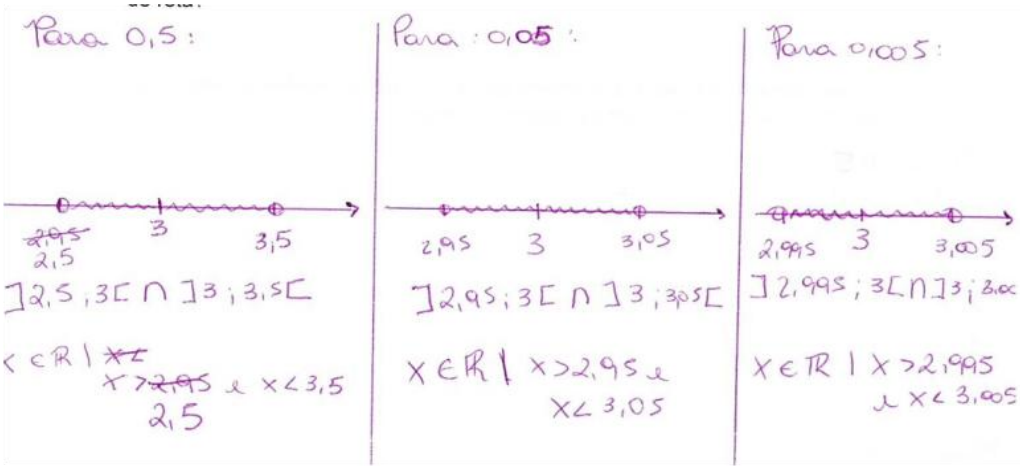
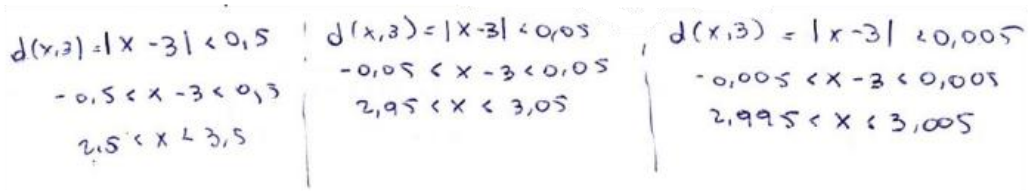
Quadro 8 - Resoluções da Atividade 4 itens (a) e (b)

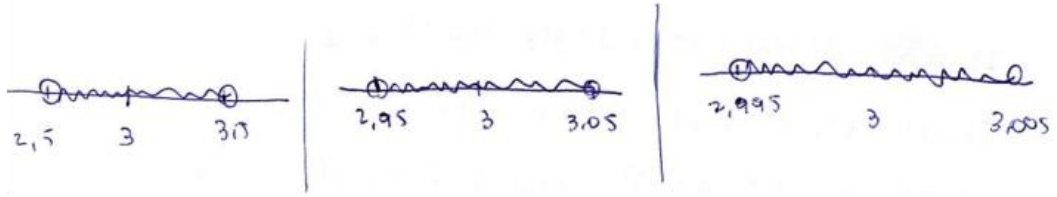
4) Seja $f: R \to R$ uma função real, tal que sua lei de formação seja dada por $f(x) = 2x + 1$, considere as seguintes situações:

a) Seja x um ponto do domínio da função, considere que a distância entre x e 3 seja menor do que:

- 0,5;
- 0,05;
- 0,005.

<table>
<tr><td colspan="2">De qual forma você faria a representação algébrica desta situação na notação de módulo para cada um dos valores das distâncias acima?
b) Como você faria para colocar as inequações do item (a) na forma de intervalo e faria a representação geométrica destes intervalos encontrados em segmentos de reta?</td></tr>
<tr><td>EL1</td><td>a)
 

b)
 
</td></tr>
<tr><td>EL2</td><td>a)
 

Já estão em um intervalo. A representação geométrica é:
b)
 
</td></tr>
</table>

EB1

a)

Das atividades anteriores, definimos a distância como
$d = |x - 3| = |3 - x|$.
Então, podemos expressen. (em módulo) as distâncias menores que os valores acima como:

- $d < 0,5 \Rightarrow |x - 3| < 0,5$
- $d < 0,05 \Rightarrow |x - 3| < 0,05$
- $d < 0,005 \Rightarrow |x - 3| < 0,005$.

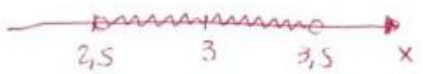
Tendo em vista que as distâncias dadas referem-se ao domínio da função, utilizaremos o eixo x como referência.

Para $d < 0,5$, temos que $|x - 3| < 0,5$. Então:

i) $x - 3 < 0,5$ $(x \geq 3)$; ii) $3 - x < 0,5$ $(x < 3)$:
$\Rightarrow x < 3,5$ $\Rightarrow x > 2,5$.

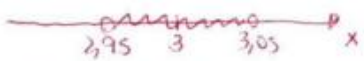
b)

De i) e ii), $2,5 < x < 3,5 \Leftrightarrow |x - 3| < 0,5$. Geometricamente:

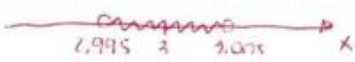


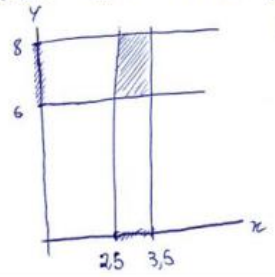
Os casos onde $d < 0,05$ e $d < 0,005$ são análogos. Logo:

$d < 0,05 \Rightarrow |x - 3| < 0,05 \Leftrightarrow 2,95 < x < 3,05$



$d < 0,005 \Rightarrow |x - 3| < 0,005 \Leftrightarrow 2,995 < x < 3,005$



EB2	(A função f não foi mencionada na pergunta, mas imagino que a intenção era perguntar sobre isso.) Como, no caso da distância menor do que 0,5, temos $\|x-3\|<0,5 \iff 2,5<x<3,5$, **a)** tomamos a imagem do intervalo dado por $2,5<x<3,5$ sob f, determinada ~~por (f)2~~ pelo intervalo entre a imagem das extremidades (pois f é monótona e sobregetiva), isto é, entre $f(2,5)=5+1=6$ e $f(3,5)=7+1=8$, mas o intervalo é aberto, logo a imagem de (2,5 , 3,5) sob f é (6,8). Analogamente para distâncias menores do que 0,05 e 0,005. **b)** Como $2,5<x<3,5$ e $6<f(x)<8$, temos (no caso $\|x-3\|<0,5$) $x \in (2,5 , 3,5)$ e $f(x) \in (6,8)$. Para a representação geométrica, desenhaia segmentos de reta perpendiculares e graduados em 2,5 e 3,5 e 6 e 8, respectivamente, ~~Por f ser uma~~ marcando os intervalos (2,5 , 3,5) e (6,8) e retas perpendiculares que formam uma cruz que delimita a curva naquele trecho:  (Não desenhei a função, pois o enunciado não demanda isso). Novamente, analogamente para os casos $\|x-3\|<0,05$ e $\|x-3\|<0,005$.

Fonte: Dados da pesquisa.

No item (a), os estudantes foram solicitados a representar a distância entre um número genérico x e o ponto fixo 3, considerando três diferentes valores para essa distância. Nesse contexto, observou-se, conforme previsto na análise *a priori*, a mobilização do teorema em ação T_1: "*Se temos a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*", utilizado por todos os participantes na escrita da inequação modular $|x-3|<\delta$. Em adição, foi mobilizado o teorema em ação T_2: "*Se a desigualdade* $|x-a|<\delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ", com todos os estudantes associando essa expressão à ideia de vizinhança.

Temos que, de início, dois dos quatro estudantes EL_2 e EB_2) desenvolveram corretamente as expressões modulares na forma de intervalos por meio da mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta<x<\delta+a$". Esse desenvolvimento revela que eles estão fazendo cada vez mais filiações com as representações algébricas das desigualdades no enfrentamento das situações,

indicando que a abordagem adotada nesta primeira sessão contribuiu para a estruturação desse esquema.

O estudante EB_1 novamente utiliza à definição de módulo para representação dos intervalos, o que não representa erro, mas pode ser interpretado como uma filiação que ele fez em função das situações vivenciadas anteriormente e que, naquele momento, era a escolha estratégica do estudante para enfrentamento deste tipo de situação. Ainda assim, este participante mobiliza os teoremas em ação T_1 e T_2 ao reconhecer que $|x-3|<\delta$ expressa a condição desejada, mesmo sem transformá-la em intervalo, conforme previsto *a priori*.

No item (b), os estudantes foram desafiados a representar geometricamente os intervalos identificados no item (a). EL_1, por exemplo, utilizou não apenas a forma tradicional dos intervalos, como também a representação por interseção, mobilizando um novo teorema em ação, o qual modelizamos por T_7: *"Se a inequação* $|x-a|<\delta$ *representa uma condição de distância entre* x *e* a*, então ela pode ser expressa como a intersecção dos intervalos* $x<a+\delta$ *e* $x>a-\delta$*, qualquer que seja o valor positivo de* δ*."*. A presença desse teorema indica compreensão do conceito de intervalo centrado em um ponto, e de flexibilidade algébrica no enfrentamento da situação.

É possível observar ainda que neste item, o EL_1 percebe seu erro de notação ao escrever as três inequações incorretamente, vemos que ele risca o símbolo de "maior" nas inequações e escreve "menor". Corrigindo o desenvolvimento do intervalo na passagem da forma $|x-a|<\delta$ para a inequação $a-\delta<x<a+\delta$. Identificamos uma primeira ruptura, qual seja, o abandono do teorema em ação falso TF_1: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$ *na forma de intervalo, então devemos transcrevê-la para a forma* $-\delta<x-a>\delta$". E, assim, ele mobiliza $T_{2.1}$, este sim, previsto *a priori* para enfrentamento da situação. Tal ruptura pode ser atribuída à percepção de EL_1 quanto ao erro em seu registro para o intervalo na observação do desenvolvimento do item (a) por sua dupla EL_2, o qual vinha desenvolvendo a propriedade (mobilização de $T_{2.1}$) desde o início.

A representação geométrica dos intervalos sobre a reta numérica, realizada por todos os participantes, indica a mobilização do teorema em ação previsto *a priori* T_3: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta*". Essa mobilização mostra que os estudantes estão compreendendo a desigualdade modular como um intervalo em torno de um ponto fixo, sendo esta uma forma

importante de representação, para compreensão da definição formal de Limite, associada ao conceito de distância.

O estudante EB_2, além de realizar o desenvolvimento algébrico esperado para $|x-3|<0{,}5$, estabelece uma conexão entre o intervalo no domínio e sua imagem sob a função $f(x)=2x+1$, indicando a mobilização do teorema em ação T_4: “Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função”. Essa associação evidencia o estabelecimento de uma relação dinâmica entre os eixos, essencial para a compreensão da definição formal de Limite, conforme discutido por Burigato e Rachidi (2021) e Zuchi (2005).

7.1.9 4ª Atividade - Itens (c), (d) e (e)

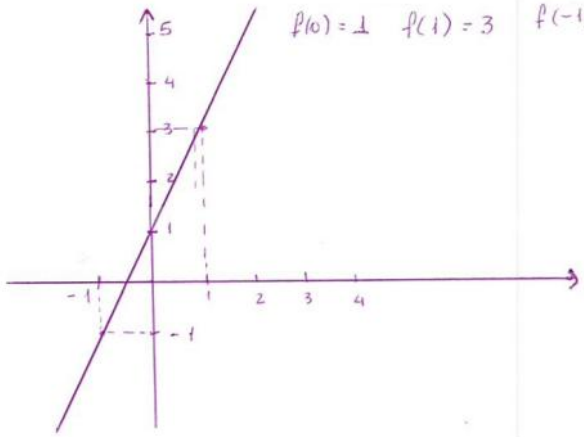
A quarta atividade da sequência didática dá continuidade ao trabalho com a função $f(x)=2x+1$, aprofundando a articulação entre os intervalos no domínio e na imagem da função, e explorando a noção de distância entre valores específicos no contradomínio. Após a manipulação algébrica dos intervalos envolvendo módulo no item (b), os itens (c), (d) e (e) conduzem os estudantes à consolidação da relação funcional entre x e $f(x)$, representada graficamente e explorada por meio de distâncias numéricas.

Segue no Quadro 9 as resoluções dessas atividades.

Quadro 9 - Resoluções da Atividade 4 itens (c), (d) e (e)

c) Qual o valor de $f(x)$ quando $x=3$? Isto é, qual a imagem de $x=3$ na função f? d) Construa o gráfico da função f. Considerando os intervalos encontrados no item b, quais os intervalos correspondentes na imagem da função? e) Considerando a imagem encontrada para $x=3$, qual é a distância deste ponto às extremidades do intervalo da imagem da função?	
EL_1	**c)** $f(x)=2x+1$ $f(3)=2.3+1$ $f(3)=7$

d)



$f(0) = 1 \quad f(1) = 3 \quad f(-1) = -1$

Para 0,5:
$f(2,5) = 6$
$f(3,5) = 8$
$x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 8$

Para 0,05:
$f(2,95) = 6,9$
$f(3,05) = 7,1$
$x \in \mathbb{R} \mid 6,9 < x < 7,1$

Para 0,005:
$f(2,995) = 6,99$
$f(3,005) = 7,01$
$x \in \mathbb{R} \mid 6,99 < x < 7,01$

e) Para 0,5:

$d(f(3), f(2,5)) = |6 - 7| = 1$
$d(f(3), f(3,5)) = |8 - 7| = 1$

Para 0,05:

$d(f(3), f(2,95)) = |6,9 - 7| = 0,1$
$d(f(3), f(3,05)) = |7,01 - 7| = 0,1$

Para 0,005:

$d(f(3), f(2,995)) = |6,99 - 7| = 0,01$
$d(f(3), f(3,005)) = |7,01 - 7| = 0,01$

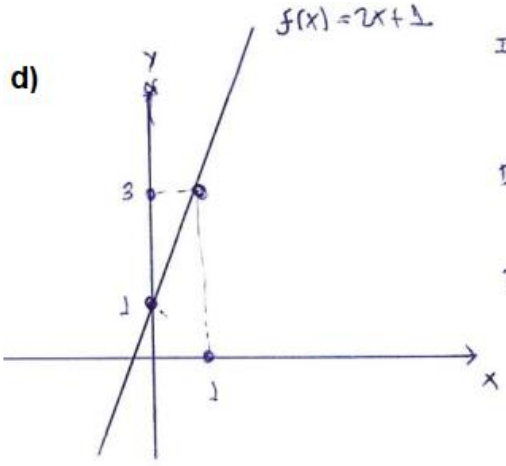
EL2

c) $f(x) = 2x + 1$

$f(3) = 2(3) + 1$

$f(3) = 7$

d)



I) $f(2,5) = 6 \quad I = \{]6; 8[\}$
$f(3,5) = 8$

II) $f(2,95) = 6,9 \quad I = \{]6,9; 7,1[\}$
$f(3,05) = 7,1$

III) $f(2,995) = 6,99 \quad I = \{]6,99; 7,01[\}$
$f(3,005) = 7,01$

e) I) $d(f(3); f(2,5)) = d(f(3); f(3,5)) = 1$

II) $d(f(3); f(2,95)) = d(f(3); f(3,05)) = 0,1$

III) $d(f(3); f(2,995)) = d(f(3); f(3,005)) = 0,01$

Como são equidistantes e a conta sai fácil, poupei os cálculos de ambas.

EB1

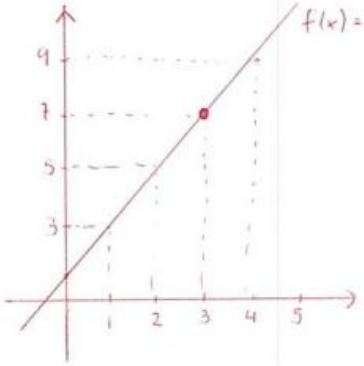
c) Do enunciado, $f(x) = 2x + 1$.

Para $x = 3$, substituímos na função e obtemos $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

Então, a imagem de $x = 3$ para a função f dada é 7.

d) Plotando os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano, temos:

x	f(x)
...	...
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
...	...



Os intervalos do item (b) referem-se ao domínio da função $f(x)$ em torno de $x = 3$. Então, para:
- $d < 0,5$;
- $d < 0,05$;
- $d < 0,005$;

temos que:

i) $d < 0,5 \Rightarrow |x - 3| < 0,5 \Leftrightarrow 2,5 < x < 3,5 \Rightarrow f(2,5) < f(x) < f(3,5)$
$\Rightarrow 6 < f(x) < 8$.

ii) $d < 0,05 \Rightarrow 2,95 < x < 3,05 \Rightarrow 6,9 < f(x) < 7,1$

iii) $d < 0,005 \Rightarrow 2,995 < x < 3,005 \Rightarrow 6,99 < f(x) < 7,01$.

e) $f(3) = 7$. Então, para cada situação descrito no item (d), e chamando a distância dos extremidades das imagens até a imagem encontrada para $x = 3$ como "h":

i) $d < 0,5 \Rightarrow 6 < f(x) < 8$

$h = |6 - 7| = |8 - 7| = 1$

ii) $d < 0,05 \Rightarrow 6,9 < f(x) < 7,1$

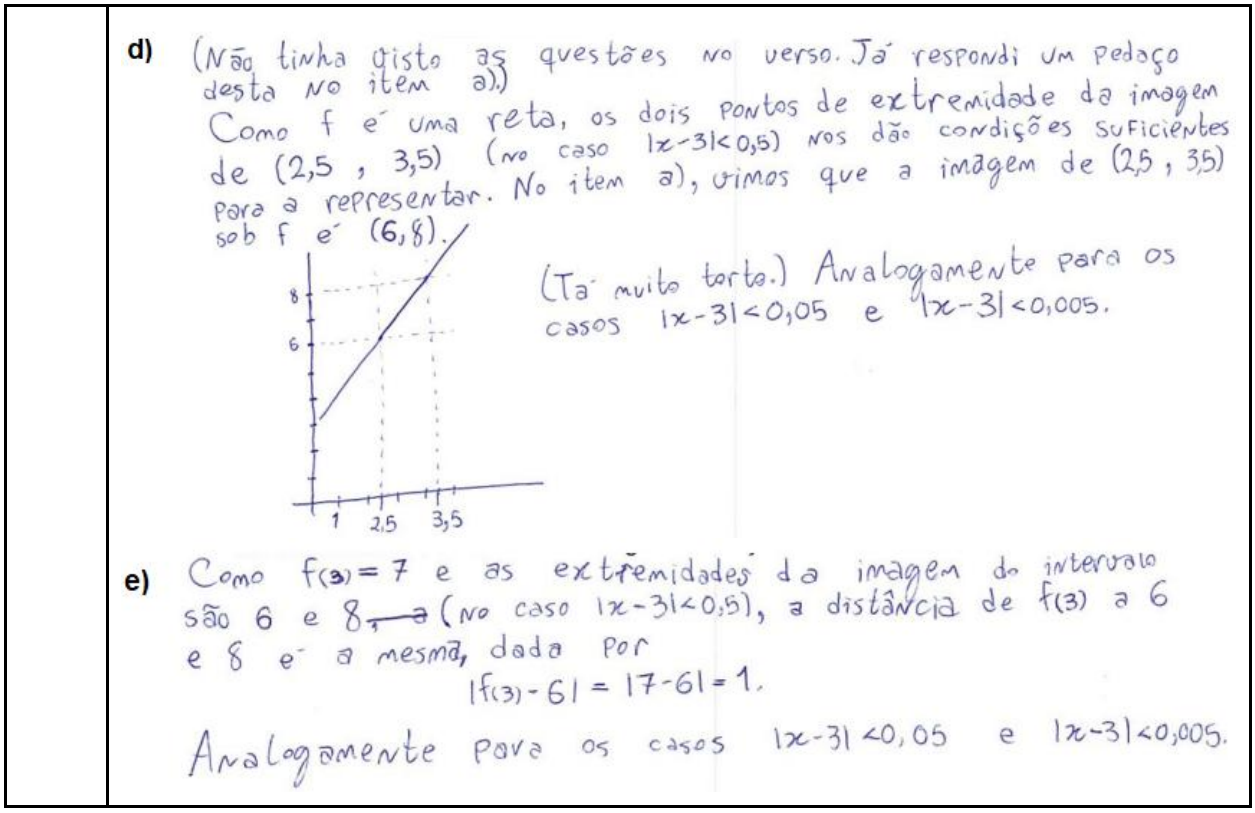
$h = |6,9 - 7| = |7,1 - 7| = 0,1$.

iii) $d < 0,005 \Rightarrow 6,99 < f(x) < 7,01$

$h = |6,99 - 7| = |7,01 - 7| = 0,01$.

EB2

c) $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$, substituindo x por 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na análise do item (c), observa-se a adequação da previsão realizada *a priori*, uma vez que todos os participantes aplicaram corretamente a lei de formação da função para obter $f(3) = 7$. A partir disso, registraram explicitamente que a distância a ser considerada nos próximos itens passa a ser em torno de 7, e não mais em torno de 3 como nos itens anteriores.

Todos os estudantes, tanto da licenciatura quanto do bacharelado, representaram corretamente o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ e, utilizando os intervalos em torno de $x = 3$, determinaram corretamente os intervalos na imagem por meio da aplicação da função aos extremos dos intervalos em x.

Na construção gráfica e associação dos intervalos realizadas no item (d), as ações dos estudantes evidenciam a mobilização do teorema em ação T_4: "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*", o que foi previsto *a priori*. O modo como os participantes constroem os intervalos na imagem confirma a compreensão de que pequenas variações em x implicam alterações proporcionais em $f(x)$, compatível com o comportamento de uma função linear crescente.

Além disso, o esboço gráfico realizado por todos os participantes aponta para a mobilização do teorema em ação T_3: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta*". Ainda que a atividade não exigisse a visualização geométrica explícita dos intervalos, os estudantes recorreram a essa representação para verificar a coerência de suas respostas. A análise destas resoluções confirma as previsões feitas *a priori* para a resolução dos itens.

Destaca-se a mobilização de $T_{2.1}$ (propriedade de módulo prevista *a priori*) por EB_1 para encontrar os intervalos na variável x do item (b), o qual vem, predominantemente, filiando-se à definição de módulo para desenvolvimento dos mesmos. Isto mostra que o estudante possui conhecimento da propriedade em seu repertório (teorema em ação $T_{2.1}$ previsto *a priori*), no entanto, atribui preferência à definição de módulo para enfrentamento deste tipo de situação, haja vista que a utilização da propriedade por ele ocorre com menor frequência até este ponto de enfrentamento da sequência didática.

Considerando isso, modelizamos um novo teorema em ação no esquema de EB_1, o qual denominamos T_8: *"Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$ *para encontrar os valores de* x *distantes de* a*, então devemos utilizar a definição* $|x-a|=x-a, se\ x-a\geq 0\ e\ |x-a|=-(x-a), se\ x-a<0$*"*. É um teorema em ação correto, mas que não evidencia, na notação, a simetria e a construção do intervalo centrado em *a*, como acontece com o $T_{2.1}$, Esse último é o teorema que queremos que ele mobilize, pois relaciona com o que aparece na definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Já no item (e) todos os estudantes calcularam corretamente as distâncias numéricas entre 7 e os extremos dos intervalos encontrados anteriormente, explicitando a noção de que o crescimento da função implica simetria na imagem em torno do valor central. Estas resoluções também validam a previsão realizada *a priori* para o item (e). As ações observadas neste item correspondem à mobilização do teorema em ação $T_{1.1}$: "*Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números*" previsto *a priori*. Com exceção de EL_2, os estudantes registraram em suas representações explicitamente o módulo, indicando corretamente os valores de distância como diferenças positivas entre os extremos dos intervalos e o valor 7. A simetria observada nas respostas evidencia uma possibilidade de favorecimento na

compreensão do papel de ϵ como um parâmetro de controle da aproximação em torno da imagem de um ponto, o que será explorado no enfrentamento das demais atividades.

Assim, em análise geral para esta primeira sessão da sequência didática, sob a lente da TCC, afirmamos que as resoluções apresentadas evidenciam a constituição de teoremas em ação estruturados em torno de conceitos, como: distância, intervalo e correspondência funcional, conforme objetivado para as resoluções das atividades na análise *a priori*. Os significantes mobilizados, as representações: nas expressões modulares, desigualdades e intervalos, foram utilizados com correção e adequação, o que mostra a coerência dos esquemas adotados. A diversidade de representações utilizadas pelos estudantes indica que eles estão fazendo filiações com conhecimentos relacionados à noção de vizinhança, que é um ponto importante da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Portanto, a análise *a posteriori* confirma as previsões feitas na análise *a priori*, com os estudantes mobilizando os teoremas em ação esperados (T_1, T_2, $T_{2.1}$, T_3 e T_4). Além disso, possibilitou a modelização de outros teoremas, sendo um teorema em ação correto (T_7) e um teorema em ação falso (TF1), a partir das representações por interseção observadas. Esses resultados confirmam a pertinência das escolhas didáticas da sequência proposta e contribuem para a validação parcial da primeira sessão da sequência didática à luz da TCC.

7.2 2ª Sessão

A segunda sessão envolveu as atividades de número 5 a 7 da sequência didática. Antes da aplicação das atividades, foi realizada institucionalização da sessão anterior, com discussão da terceira atividade, a qual envolvia os elementos presentes nas demais atividades.

O pesquisador iniciou a sessão com discussão coletiva, enunciado verbalmente a terceira atividade em sala de aula, e questionando aos participantes de qual forma deveria ser realizada a representação algébrica da distância entre x e 3 menor do que um parâmetro genérico δ. Segue transcrição do áudio da institucionalização:

Pesquisador Mediador*: — O enunciado informava que a distância de x até* 3 *era menor que δ. O que vocês fizeram? Consideraram a distância como a diferença entre os números, mas sem saber quem era o maior. Como driblaram isso?*

Estudante EB: — Módulo. Usamos o módulo de $x - 3$, porque a distância entre x e 3 tinha que ser menor que esse número positivo δ.

O pesquisador reforçou a importância de δ ser positivo, pois se fosse igual ou menor do que zero não faria sentido dentro do contexto de distância. Ele apontou que todos representaram corretamente o módulo na parte algébrica. Em seguida, abordou o item (b), que introduzia um valor específico para δ, no caso $0{,}5$ e questionou como os estudantes colocaram isso na forma de intervalo.

Pesquisador Mediador:*— Como fizeram a representação para o intervalo?*

Estudante EB$_1$: — Desenvolvemos os casos do módulo, dividindo em duas condições: $x - 3 \geq 0$ e $x - 3 < 0$.

Pesquisador Mediador:— Ah, então você usou a definição do módulo. Certo. Você desenvolveu os dois casos separadamente. Alguém fez diferente?

Estudante EL$_2$: — Eu usei a propriedade da inequação modular.

Pesquisador Mediador: — Ah, usou a propriedade. O que você fez?

Estudante EL$_2$: — O módulo tem que estar entre $-0{,}5$ e $0{,}5$, então $-0{,}5 < x - 3 < 0{,}5$.

Pesquisador Mediador: — Daí você foi desenvolvendo isso e isolando o x?

Estudante EL$_2$: — Isso. Somando três em todos os membros, obtendo $2{,}5 < x < 3{,}5$.

O pesquisador destacou que alguns preferiram usar a propriedade diretamente, enquanto outros usaram a definição, e argumentou que ambas as estratégias poderiam ser utilizadas, no qual seguiu o diálogo entre os estudantes:

Estudante EB$_1$: — Eu gostei mais usando a propriedade.

Pesquisador Mediador: — Também acho mais fácil utilizar a propriedade. Então, usando a propriedade, fica entre $3 + \delta$ à direita e $3 - \delta$ à esquerda.

A discussão avançou para a representação geométrica:

Pesquisador Mediador: — Como fica a interpretação geométrica?

Estudante EL$_2$: — Traçamos uma reta graduada, colocamos o 3 no centro, marcamos $3 + \delta$ e $3 - \delta$ à esquerda.

Pesquisador Mediador: — Quais valores satisfazem a inequação?

Estudante EL$_2$: — Todos os valores de x entre essas duas marcas, sem incluir as extremidades.

O grupo também discutiu os números na extremidade do intervalo.

Pesquisador Mediador: — Se eu disser $2{,}5$ *e* $3{,}5$*, eles fazem parte do intervalo?*

Estudante EL_2*: — Não fazem, mas estão na extremidade.*

Pesquisador Mediador: — Certo, depende se incluímos ou não as extremidades no intervalo.

O pesquisador encerrou destacando que surgiram duas formas principais de cálculo para encontrar o intervalo — usando a definição formal do módulo ou a propriedade da inequação modular — e que os estudantes poderiam escolher a que considerassem mais clara. Essa discussão foi importante para as atividades da segunda sessão.

Após a institucionalização da sessão anterior, transcrita acima, foi dada continuidade à resolução das atividades.

7.2.1 5ª Atividade - Itens (a), (b) e (c)

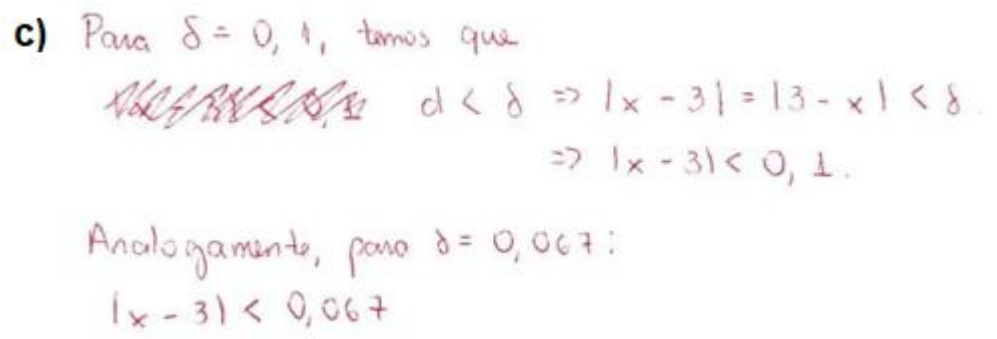
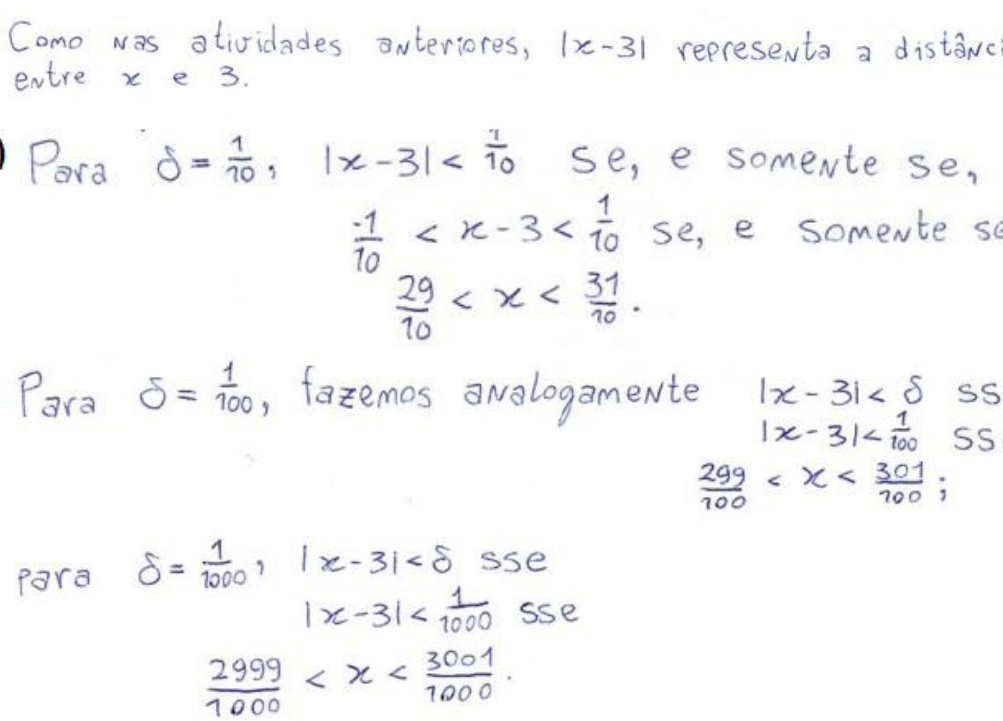
A quinta atividade objetivou consolidar o uso da desigualdade modular para expressar distâncias entre um ponto genérico x e o número 3, utilizando valores específicos e decrescentes para o parâmetro δ, avançando na construção de invariantes operatórios relacionados ao controle da proximidade de x em torno de 3, antecipando a estrutura que será utilizada na definição formal de Limite de funções.

A seguir, analisamos os itens com base nas resoluções dos participantes e na modelização dos teoremas em ação, conforme Quadro 10 abaixo.

Quadro 10 - Resoluções da Atividade 5 itens (a), (b) e (c)

5. Considerando a definição de distância construída na sessão anterior, responda os itens abaixo para a função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \epsilon R$. a) Agora, considere o ponto de abscissa 3. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3? b) Agora, escolha um valor positivo qualquer e o nomeie δ (por exemplo, δ = 0,3). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre x e 3 seja menor do que δ? c) Agora, escolha outros dois valores positivos para δ, menores que o escolhido por você no item anterior (por exemplo $\delta = 0{,}03$ e $\delta = 0{,}003$). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre x e 3 seja menor do que δ?

EL1	**a)** $d(x,3) = \|x-3\| = \delta$ $\delta > 0$; $\delta \in \mathbb{R}$ **b)** Tomando $\delta = 0,2$ $d(x,3) = \|x-3\| < 0,2$ **c)** Para $\delta = 0,02$ $d(x,3) = \|x-3\| < 0,02$ Para $\delta = 0,002$ $d(x,3) = \|x-3\| < 0,002$
EL2	**a)** Adotando a distância como δ, expressaria a distância: $\|x-3\| = \delta$, $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. **b)** Neste caso, tomando $\delta = 1$, teria: $\|x-3\| < 1$ **c)** Para tal, $\delta_1 = 0,1$ e $\delta_2 = 0,01$. Assim, para δ_1: $\|x-3\| < 0.1$ Semelhantemente, para δ_2: $\|x-3\| < 0,01$
EB1	**a)** Utilizando a definição de distância considerada nas atividades anteriores (valor absoluto da diferença entre dois pontos), podemos expressar a distância d como $d = \|x-3\| = \|3-x\|$. Sendo x qualquer ~~ponto~~ valor pertencente ao domínio **b)** Para δ real e positivo, $d < \delta \Rightarrow \|x-3\| = \|3-x\| < \delta \Leftrightarrow \|x-3\| < \delta$. Se $\delta = 0,3$, temos que $\|x-3\| < 0,3$.

	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Da análise do quadro 10, verifica-se que todos os participantes expressaram corretamente a distância entre x e 3 utilizando a notação $|x-3|$, em consonância com o teorema em ação T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*". O uso do módulo foi mobilizado por todos os estudantes. Essa representação, como já discutido por Zuchi (2005) e retomada na análise *a priori*, se tornou uma filiação importante para o estabelecimento da "distância" nos esquemas que estavam sendo construídos.

No item (b), os quatro estudantes representaram corretamente a condição como $|x-3| < 0{,}5$, revelando que eles continuam se filiando aos teoremas em ação já mobilizados no item anterior. No entanto, uma diferença importante nas estratégias

adotadas entre os estudantes se destacou: a institucionalização realizada antes da atividade, na qual o pesquisador retomou com os estudantes as duas formas possíveis de desenvolver $|x-3|<\delta$ — utilizando a definição formal do módulo, como fez EB_1 na terceira atividade, ou a propriedade da inequação modular, como defendeu EB_2 — foi determinante para as resoluções na quinta atividade, conforme se verifica a seguir.

EB_2 aderiu à mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta<x<\delta+a$". EB_2 representa corretamente os intervalos correspondentes a $\delta=\frac{1}{10}$ e repete o procedimento para valores decrescentes de δ, generalizando o procedimento.

No item (c), EL_1 e EL_2 repetem corretamente a estrutura da desigualdade com os novos valores de δ, mas não desenvolvem as inequações para a forma intervalar, comportamento semelhante ao de EB_1. Apenas EB_2 desenvolve os intervalos, seguindo o procedimento já adotado no item (b), e demonstra uma compreensão mais articulada do controle da proximidade em torno de 3 com diferentes "raios".

Essa mobilização de EB_2 é pertinente e reforça a filiação em conhecimentos, que compõem seu esquema, e que envolvem a compressão simétrica de um intervalo em torno de 3, sendo modelizável pelos teoremas T_1 e $T_{2.1}$. Como apontam Burigato e Rachidi (2021), esse raciocínio é importante para que os estudantes compreendam a ideia de controle da aproximação no eixo das abscissas.

7.2.2 5ª Atividade - Itens (d), e (e)

Essas duas últimas etapas da atividade buscavam promover a generalização e a interpretação gráfica das situações anteriores, favorecendo o trânsito entre representações algébricas e geométricas, e a compreensão dos conceitos a partir das distâncias envolvidas entre valores de x e $f(x)$ próximos a pontos dados.

Segue no Quadro 11 as resoluções dessas atividades.

Quadro 11- Resoluções da Atividade 5 itens (d), e (e)

d) De qual forma você colocaria as expressões dos itens b e c na forma de intervalo? e) De qual forma você faria a representação geométrica dos intervalos encontrados no item anterior no gráfico da função?

EL1

d)

Para $\delta = 0{,}2$: $d(x,3) = |x-3| < 0{,}2$

$-0{,}2 < x-3 < 0{,}2$

$2{,}8 < x < 3{,}2$

Para $\delta = 0{,}02$: $d(x,3) = |x-3| < 0{,}02$

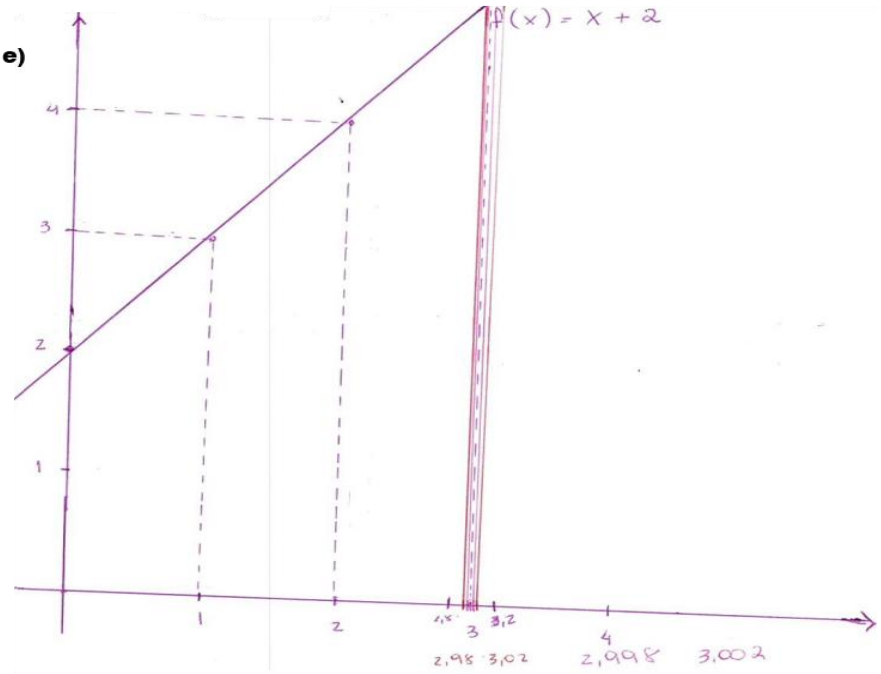
$-0{,}02 < x-3 < 0{,}02$

$2{,}98 < x < 3{,}02$

Para $\delta = 0{,}0002$: $d(x,3) = |x-3| < 0{,}0002$

$2{,}9998 < x < 3{,}0002$

e)



EL2

d) Para isso, primeiro vou desenvolver a conta genérica e irei usar os resultados para quando tiver valores, para facilitar o cálculo:

$$|x-3| < \delta$$

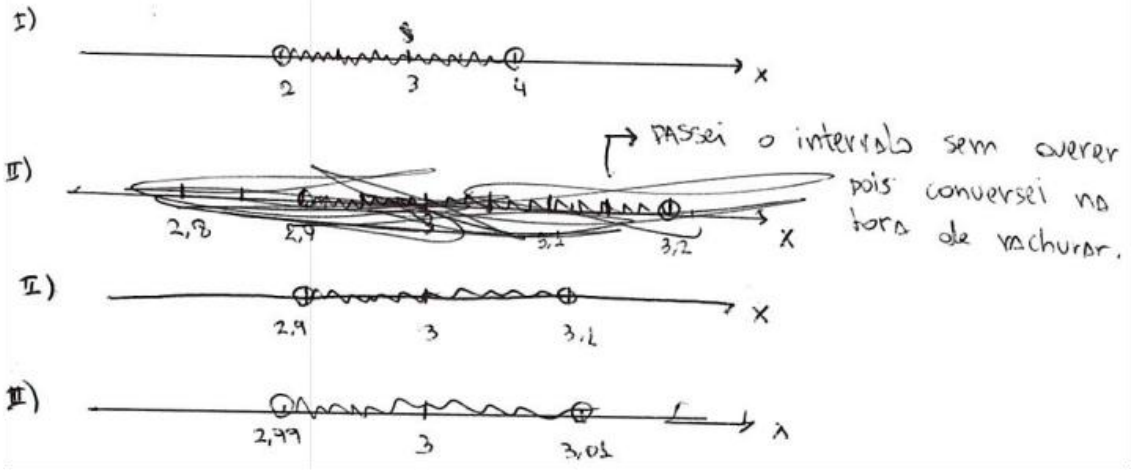
$$-\delta < x-3 < \delta \Rightarrow 3-\delta < x < 3+\delta$$

Assim, para o item b): $3-1 < x < 3+1 \Rightarrow 2 < x < 4$

para o item com δ_1: $3-0{,}1 < x < 3+0{,}1 \Rightarrow 2{,}9 < x < 3{,}1$

para o item com δ_2: $3-0{,}01 < x < 3+0{,}01 \Rightarrow 2{,}99 < x < 3{,}01$

e) Como não pede a imagem, não vejo necessidade de desenhar o gráfico, então me limitaria apenas ao eixo das abcissas:



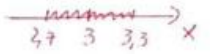
EB1

d) É possível utilizar a seguinte propriedade:

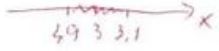
$|x - 3| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - 3 < \delta$.

Então, podemos colocar as expressões dos itens b e c como seguem:

(b): $|x - 3| < 0,3 \Leftrightarrow -0,3 < x - 3 < 0,3 \Leftrightarrow 2,7 < x < 3,3$

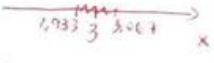


(c): i) $|x - 3| < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < x - 3 < 0,1 \Leftrightarrow 2,9 < x < 3,1$

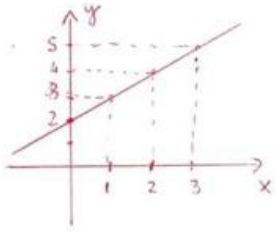
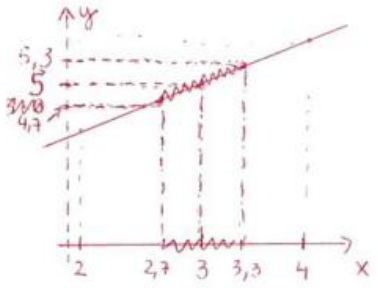
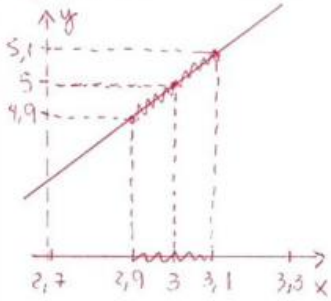
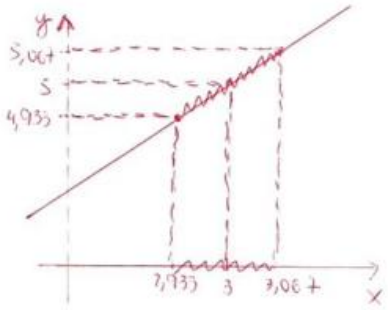


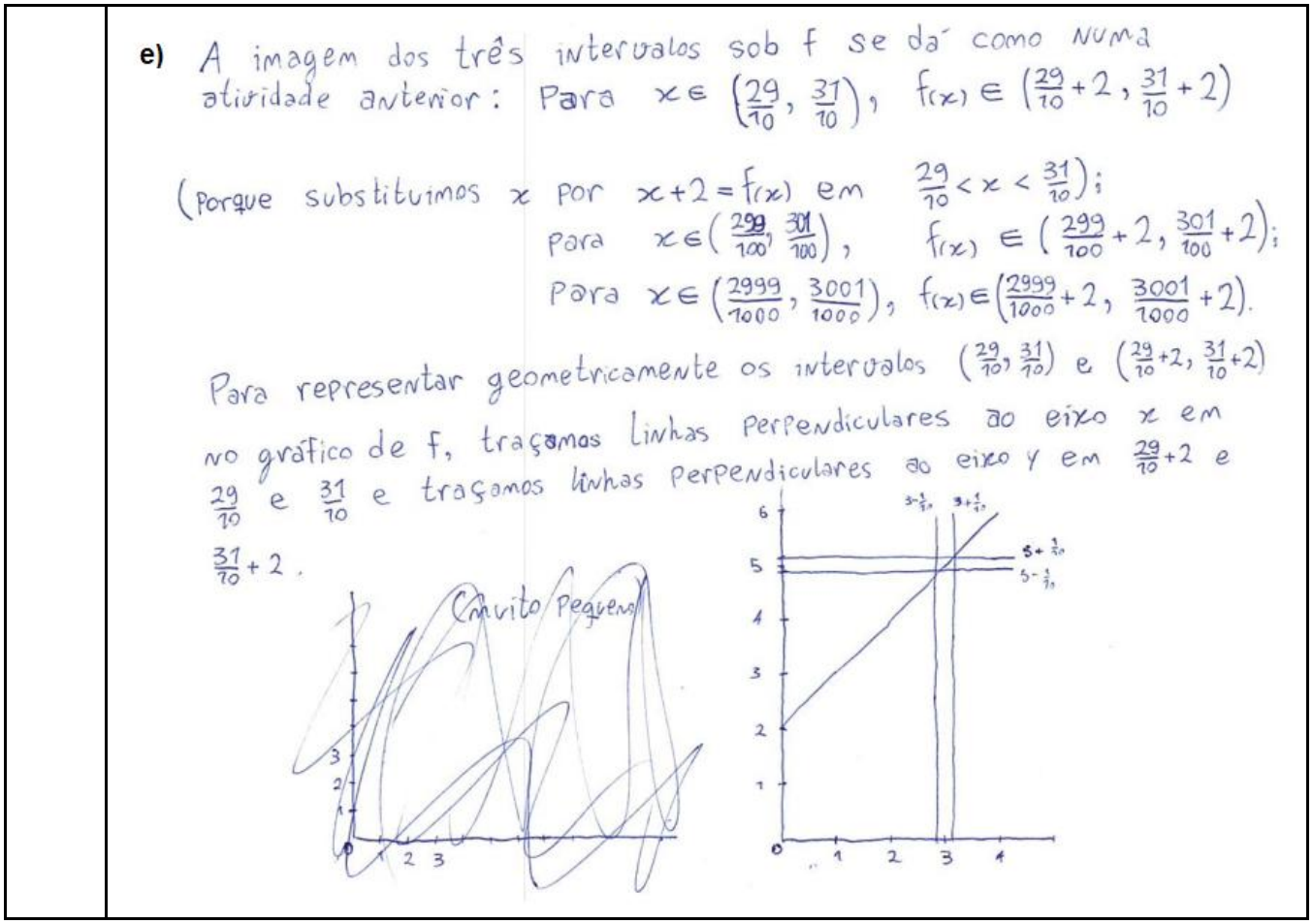
ii) $|x - 3| < 0,067 \Leftrightarrow -0,067 < x - 3 < 0,067$

$\Leftrightarrow 2,933 < x < 3,067$



Também pode-se utilizar a definição da função modular.

	e) Os intervalos encontrados até aqui dizem respeito as abscissas. Como f é uma função de x, eles são relativos ao domínio da função. Então, para $f(x) = x + 2$:  temos que: (b) $2,7 < x < 3,3$  (c) i) $2,9 < x < 3,1$  ii) $2,933 < x < 3,067$ 
EB2	**d)** (Novamente não tinha lido esta questão antes de resolver a anterior.) ~~$\frac{31}{10} < x < \frac{31}{10}$~~ $\frac{29}{10} < x < \frac{31}{10}$; $\frac{299}{100} < x < \frac{301}{100}$; $\frac{2999}{1000} < x < \frac{3001}{1000}$. Quando li pela primeira vez nas atividades a palavra intervalo, imaginei que significasse outra coisa. $x \in (\frac{29}{10}, \frac{31}{10})$; $x \in (\frac{299}{100}, \frac{301}{100})$; $x \in (\frac{2999}{1000}, \frac{3001}{1000})$.



Fonte: Dados da pesquisa.

No item (d), que solicitava a reescrita das expressões anteriores na forma de intervalo, todos os participantes – tanto da Licenciatura quanto do Bacharelado – mobilizaram o teorema em ação $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta < x < \delta + a$". Esta mobilização foi identificada nas resoluções e confirma a preferência e compreensão do uso da propriedade da desigualdade modular como ferramenta algébrica para encontrar intervalos de x satisfazendo a condição dada. Sendo que nenhum deles utilizou a notação de intervalo $]a-\delta;\ a+\delta[$ ou $(a-\delta;\ a+\delta)$, mas sim o que significava esse intervalo em termos de inequações.

Essa mobilização sistemática do $T_{2.1}$ por todos os participantes é resultado direto da institucionalização realizada no início da sessão, momento em que a discussão sobre o uso da propriedade versus o uso da definição de módulo possibilitou aos estudantes avaliarem qual estratégia lhes parecia mais eficiente. No caso de EB_1, que anteriormente se filiava à definição do módulo para desenvolver os intervalos por estudo de sinal, com uso do (T_8), agora muda de estratégia: o

participante reconhece, anota e passa a empregar ($T_{2.1}$) nas resoluções subsequentes. Essa mudança mostra uma ruptura com uso do teorema (T_8) evidenciando uma readaptação em seu esquema para lidar com essas situações, filiando-se ao teorema em ação ($T_{2.1}$) que será importante para compreensão da definição formal de Limite de funções.

Já no item (e) EL_1 utiliza o gráfico da função $f(x) = x + 2$ para indicar a correspondência entre os intervalos encontrados. Essa ação evidencia a mobilização do teorema em ação T_4: “Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função” conforme previsto *a priori* para resolução do item, indicando uma compreensão da relação funcional entre os dois conjuntos.

EL_2, por outro lado, opta por representar apenas os intervalos geometricamente em uma reta numérica, sem envolver o gráfico da função. Sua estratégia evidencia a mobilização do teorema em ação T_3: “Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta”. Embora não incorpore a representação gráfica da função, essa representação ainda é válida, pois se mantém coerente com os intervalos construídos nas inequações, embora não favoreça a integração entre domínio e imagem da função.

EB_1 realiza três esboços distintos do gráfico da função $f(x) = x + 2$, cada um correspondente aos intervalos dos itens (a), (b) e (c). Embora não represente com exatidão a abertura ou fechamento dos intervalos, sua escolha reforça a percepção da relação funcional entre os intervalos no domínio e na imagem. Assim como EL_1, mobiliza o teorema em ação T_4, e sua representação sugere que a noção de função como associação entre variáveis está sendo mobilizada em seus esquemas.

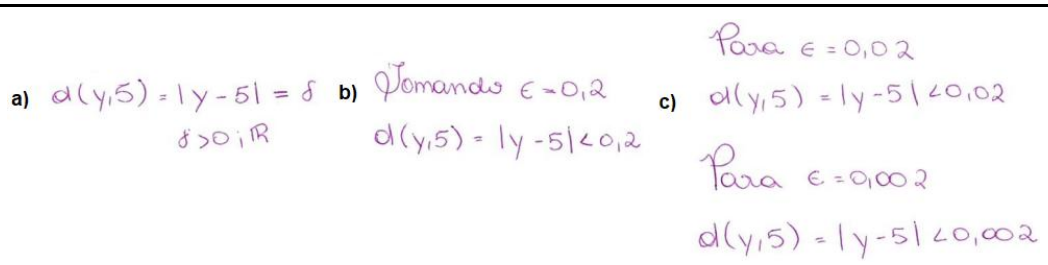
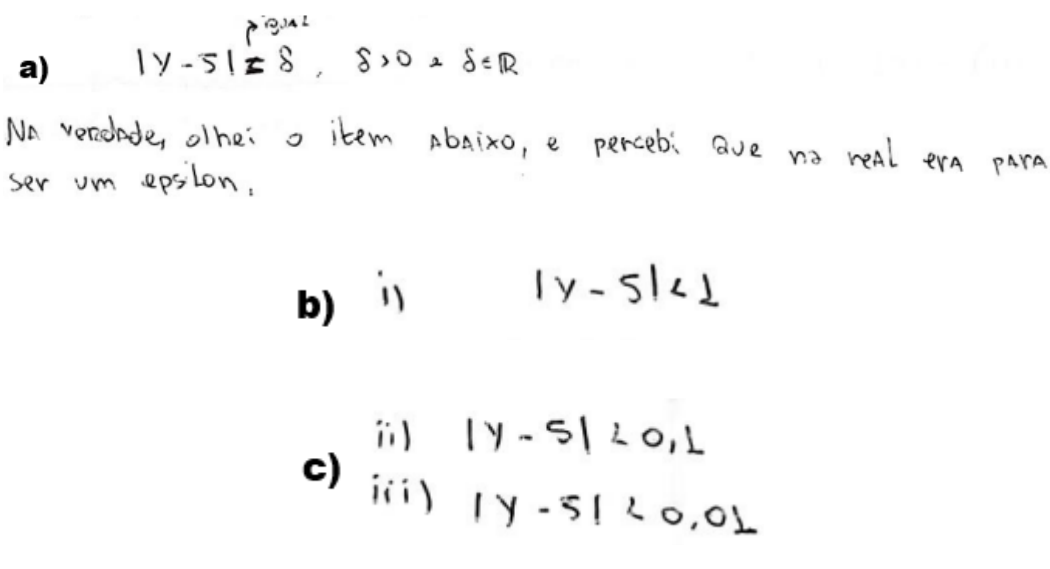
EB_2 opta por representar apenas o primeiro caso em gráfico (para $\delta = \frac{1}{10}$), mostrando a correspondência entre os intervalos considerados, utilizando linhas perpendiculares para indicar a projeção dos valores sobre os eixos. Apesar de não repetir o processo para os demais intervalos, o procedimento indica que ele pode estar tentando fazer uma generalização. E, nesse sentido, mobiliza também T_4, com indícios de desenvolvimento de um esquema que ele mobiliza, talvez por considerar mais econômico, para lidar com essas situações.

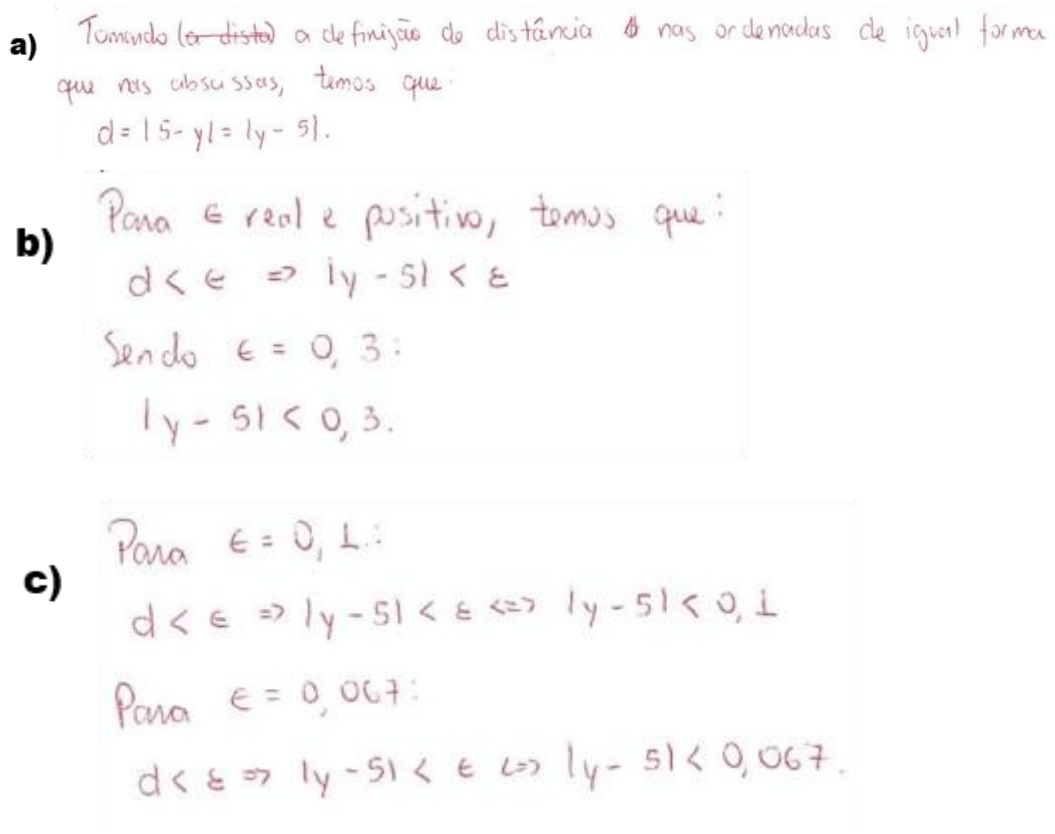
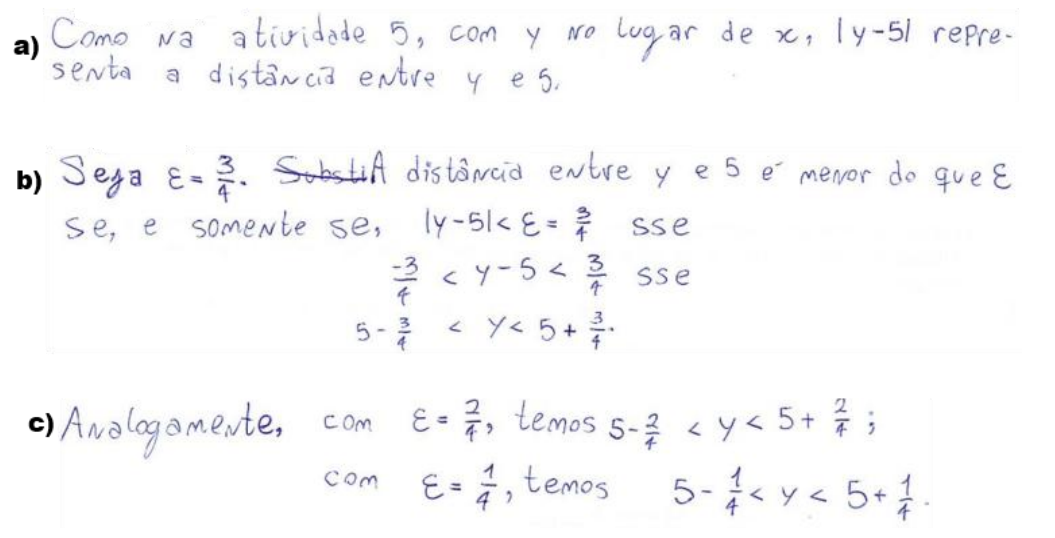
7.2.3 6ª atividade - Itens (a), (b) e (c)

A sexta atividade marca uma transição no percurso da sequência didática: os estudantes passam a atuar com distâncias no contradomínio da função, ou seja, sobre o eixo das ordenadas. Essa mudança de foco constitui uma variação importante, pois os estudantes já haviam trabalhado até então com distâncias no domínio.

Segue no Quadro 12 as resoluções dessas atividades.

Quadro 12 - Resoluções da Atividade 6 itens (a), (b) e (c)

<table>
<tr><td colspan="2">6. Seja $f: R \to R$ uma função real tal que sua lei de formação seja dada por $f(x) = x + 2$.
a) Considere o ponto 5 no eixo das ordenadas. De qual forma você expressaria a distância entre y e 5?
b) Agora, escolha um valor positivo qualquer e o nomeie ϵ (por exemplo $\epsilon = 0{,}3$). Como você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre y e 5 seja menor do que ϵ?
c) Agora, escolha outros dois valores positivos quaisquer menores que o escolhido por você no item anterior e os nomeie ϵ (por exemplo, $\epsilon = 0{,}03$ e $\epsilon = 0{,}003$). Como você escreveria algebricamente as situações em que a distância entre y e 5 seja menor que estes valores de ϵ?</td></tr>
<tr><td>EL1</td><td>  </td></tr>
<tr><td>EL2</td><td>  </td></tr>
</table>

EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

No item (a), todos os participantes representaram corretamente a distância entre $f(x)$ e 5 na forma $|f(x) - 5|$ ou $|(x + 2) - 5|$. Isso evidencia a mobilização do teorema em ação T_1: *"Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos."* conforme previsto *a priori.*

EB_2 declarou que se baseou no procedimento utilizado anteriormente para distâncias no eixo das abscissas, evidenciando uma filiação com o conceito da distância previamente desenvolvido. Essa continuidade é importante, segundo Vergnaud (1985), pois evidencia que seu esquema, já estabilizado em um contexto anterior, vem sofrendo alterações, se adaptando por meio de novas filiações, para lidar com as novas situações que estão sendo trabalhadas.

Nos itens (b) e (c), os estudantes passaram a introduzir um novo parâmetro positivo, representado por ϵ, estabelecendo a condição $|f(x) - 5| < \epsilon$, confirmando a resolução correta prevista na análise *a priori* para enfrentamento destas situações. EL_1, EL_2 e EB_1 utilizaram diretamente a notação de módulo com a desigualdade, no qual EB_1 generalizou previamente os parâmetros da notação em sua resolução, mostrando filiações que estão se tornando estáveis em situações que ele reconhece similaridade, o que pode favorecer a construção dos conceitos necessários à compreensão da DFL, no caso expressar a desigualdade de forma simbólica antes de substituir os valores; EB_2, por sua vez, desenvolveu a inequação na forma intervalar para cada um dos valores de ϵ arbitrados, utilizando a propriedade de desigualdade modular: $|f(x) - 5| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon + 5 < f(x) < \epsilon + 5$, o que evidencia a mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$: *"Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$", conforme previsto *a priori*.

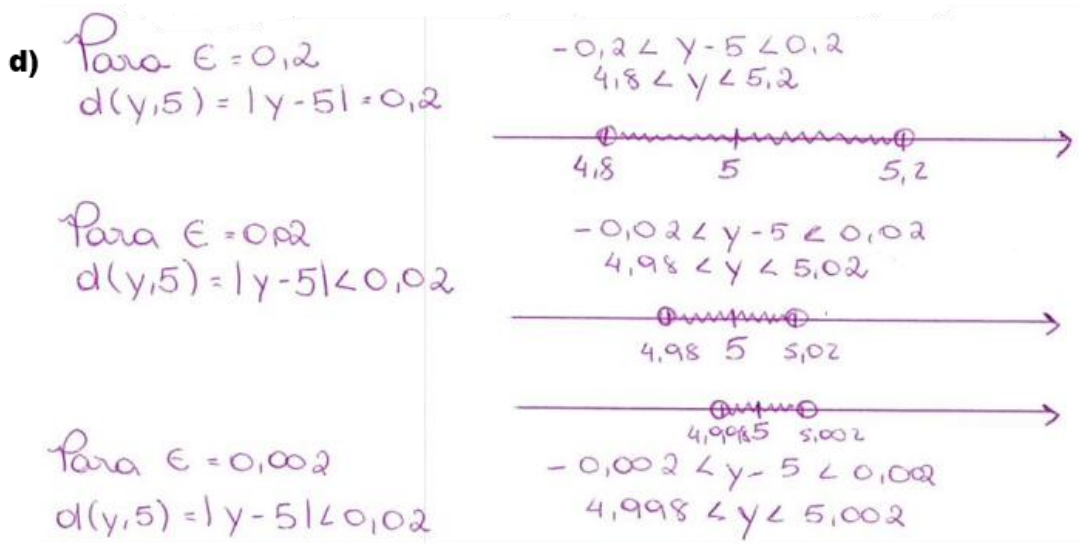
Esse procedimento confirma a utilização de uma técnica algébrica eficaz e generalizável, coerente com o objetivo da atividade previsto na análise *a priori*. A escolha de EB_1 em adotar $T_{2.1}$ após a institucionalização da sessão anterior (quando o uso dessa propriedade foi discutido e destacado como mais direta) sugere uma filiação que pode favorecer a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

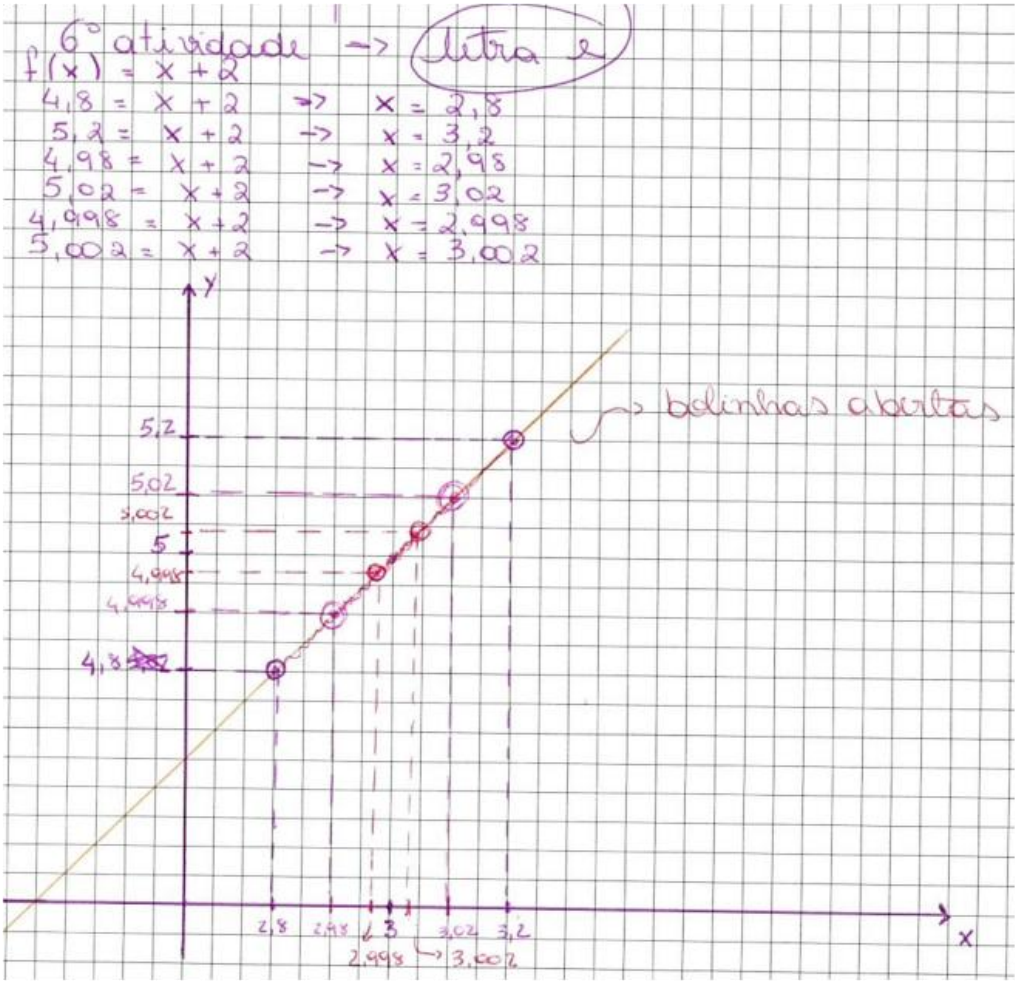
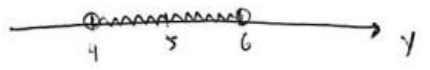
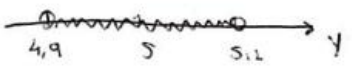
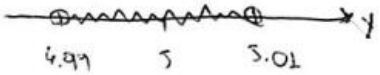
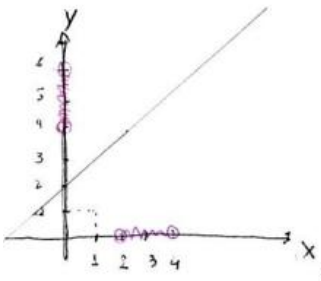
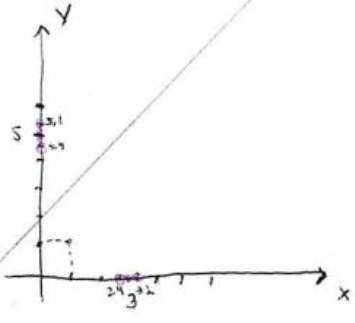
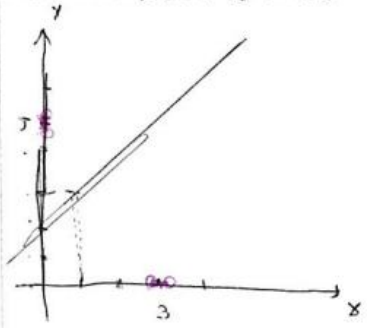
7.2.4 6ª atividade - Itens (d), e (e)

Os itens (d) e (e) continuam a explorar a transição entre a representação das distâncias do domínio para o contradomínio da função, no entanto, demandando dos estudantes suas representações na forma de intervalo e suas associações.

Segue no Quadro 13 as resoluções dessas atividades pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 13 - Resoluções da Atividade 6 itens (d), e (e)

d) Mostre a forma no qual você colocaria as expressões dos itens b e c na notação de intervalo e faria a representação geométrica dos intervalos encontrados. e) Quais os intervalos correspondentes no eixo x para as expressões encontradas no item c? Mostre o modo como você faria a representação gráfica da função f, indicando os intervalos encontrados.	
EL1	

	e) 6° atividade → letra e $f(x) = x + 2$ $4{,}8 = x + 2 \rightarrow x = 2{,}8$ $5{,}2 = x + 2 \rightarrow x = 3{,}2$ $4{,}998 = x + 2 \rightarrow x = 2{,}998$ $5{,}002 = x + 2 \rightarrow x = 3{,}002$ $4{,}9998 = x + 2 \rightarrow x = 2{,}9998$ $5{,}0002 = x + 2 \rightarrow x = 3{,}0002$ 
EL2	**d)** i) $-1 < y - 5 < 1 \Rightarrow 4 < y < 6$  ii) $-0.1 < y - 5 < 0.1 \Rightarrow 4.9 < y < 5.1$  iii) $-0.01 < y - 5 < 0.01 \Rightarrow 4.99 < y < 5.01$  i) $4 < y < 6$ e $2 < x < 3$ GRAFICAMENTE:  ii) $4.9 < y < 5{,}1$ e $2{,}9 < x < 3{,}1$ GRAFICAMENTE (FORA DE ESCALA)  iii) $4.99 < y < 5.01$ e $2.99 < x < 3.01$ GRAFICAMENTE (FORA DE ESCALA) 

EB1

d) De forma análoga à atividade anterior, pode-se usar a propriedade a seguir:

$|y - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < y - 5 < \varepsilon$.

Então, para as situações dos itens (b) e (c):

(b): $|y - 5| < 0,3 \Leftrightarrow -0,3 < y - 5 < 0,3 \Leftrightarrow 4,7 < y < 5,3$

(c): i) $|y - 5| < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < y - 5 < 0,1 \Leftrightarrow 4,9 < y < 5,1$

ii) $|y - 5| < 0,067 \Leftrightarrow -0,067 < y - 5 < 0,067 \Leftrightarrow 4,933 < y < 5,067$

e) Para encontrarmos as abscissas correspondentes às extremidades dos intervalos das ordenadas, podemos utilizar a função $f(x) = x + 2$, ~~(como y é uma função de)~~ sendo $f(x) = y$. Então, $y = x + 2$.

Substituindo nos intervalos encontrados:

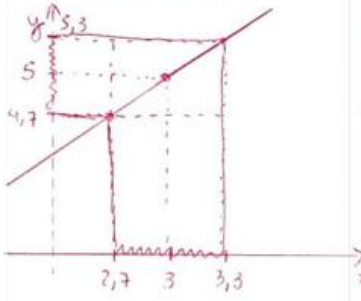
(b): $4,7 < y < 5,3 \Rightarrow 4,7 < x + 2 < 5,3 \Leftrightarrow 2,7 < x < 3,3$.

(c): i) $4,9 < y < 5,1 \Rightarrow 4,9 < x + 2 < 5,1 \Leftrightarrow 2,9 < x < 3,1$

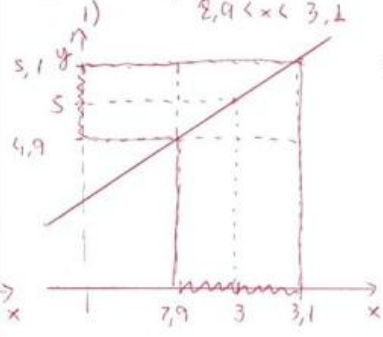
ii) $4,933 < y < 5,067 \Rightarrow 2,933 < x < 3,067$.

Representando as três expressões graficamente:

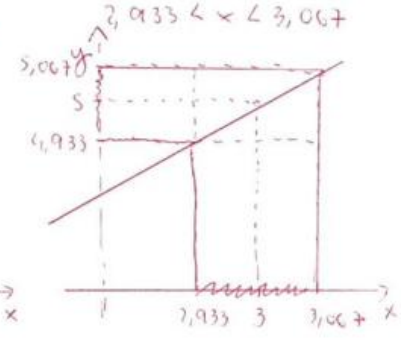
(b): $4,7 < y < 5,3$
$2,7 < x < 3,3$

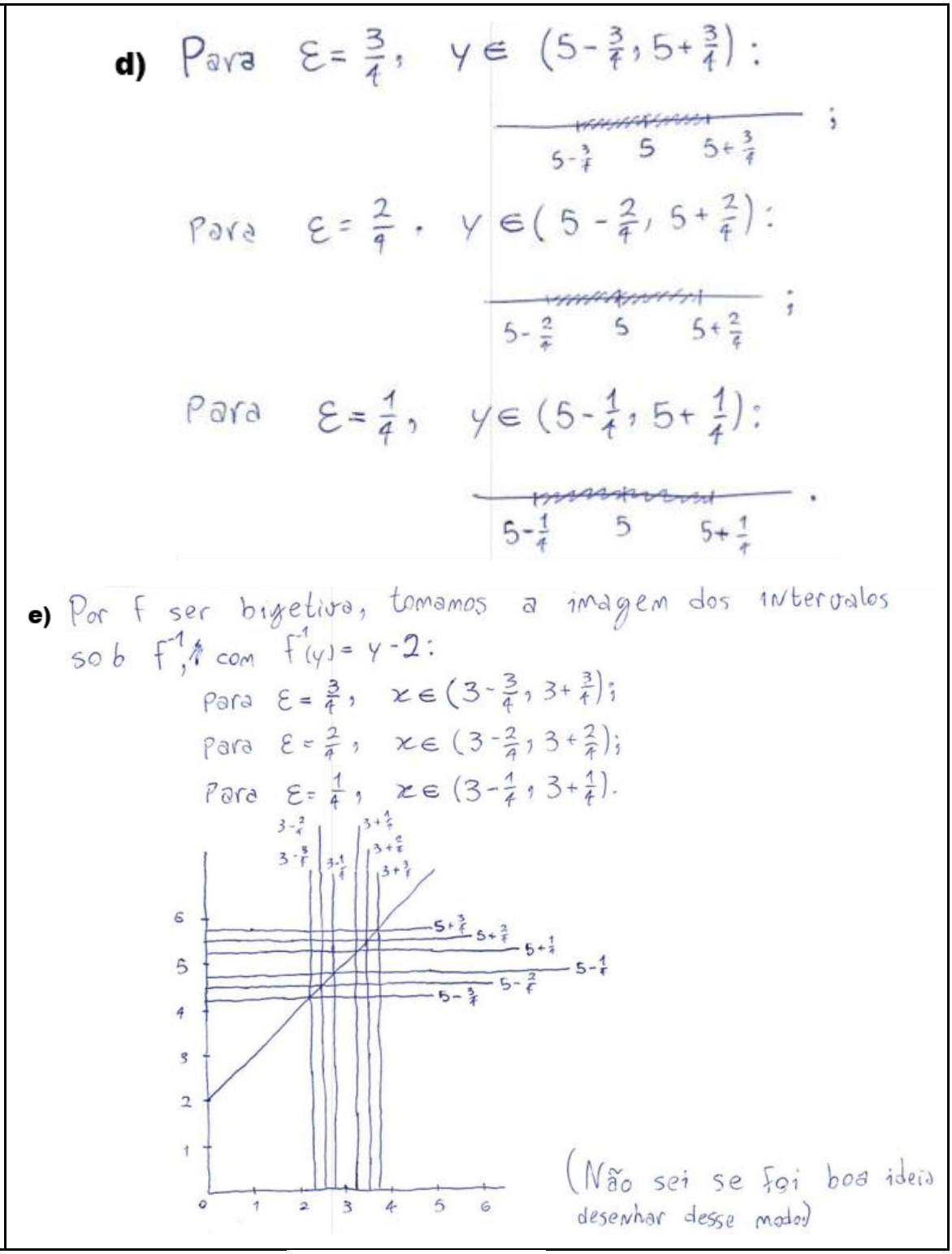


(c): i) $4,9 < y < 5,1$
$2,9 < x < 3,1$



ii) $4,933 < y < 5,067$
$2,933 < x < 3,067$



EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Nos itens (d) e (e), EL_1 e EL_2 recorreram sistematicamente à propriedade da inequação modular (mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$), desenvolvendo as expressões $|f(x) - 5| < \epsilon$ para três valores específicos de ϵ. As representações algébricas, seguidas da transposição para a forma de inequações, mostram a

consolidação dessa estratégia. Além disso, as representações geométricas dos intervalos (item d) evidenciam uma compreensão crescente da simetria dos intervalos em torno do ponto 5 no eixo das ordenadas e do ponto 3 no eixo das abscissas, o que implica a mobilização do teorema em ação T_2 (compreensão de que os intervalos são centrados em torno de um ponto com raio ϵ).

No item (e), EL_1 e EL_2 representaram graficamente os pares de intervalos no plano cartesiano, associando visualmente os intervalos em torno de 5 no contradomínio com os respectivos intervalos no domínio. Esta associação evidencia a mobilização do teorema em ação T_4: “Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função.”. EL_2, inclusive, registra graficamente a redução dos intervalos.

Observa-se que os estudantes mobilizaram esquemas que articulam as representações, os significantes, algébricos e geométricos (VERGNAUD, 1990), o que favorece a compreensão do papel da distância na definição formal de Limite de funções.

EB_1 segue procedimento semelhante ao de EL_2, indicando uma filiação com os conceitos predominantes entre os demais estudantes. No entanto, apesar de suas inequações estarem registradas na folha com sinais corretos (<), suas representações gráficas não identificam com clareza a abertura dos intervalos, assim não temos certeza se eles estão levando esse fato em consideração.

A resolução de EB_2 apresenta um deslocamento importante: ao invés de operar diretamente com a inequação $|f(x) - 5| < \epsilon$, utiliza a inversa da função para transpor a desigualdade para a variável x, observando que $f^{-1}(y) = y - 2$, visto que a função é bijetora. Apesar de matematicamente correta, essa escolha foi modelizada como o teorema em ação T_9: “Se uma função f é invertível e queremos encontrar um intervalo correspondente a uma desigualdade em $f(x)$, então podemos aplicar a função inversa para reescrevê-la em termos da variável x.”. Esta estratégia, embora correta, pode afastar o estudante da estrutura típica $|x - a| < \delta$ e, portanto, pode não contribuir para a compreensão do raciocínio requerido pela definição formal de Limite de funções.

A mobilização desse teorema (T_9) mostra como é importante a situação, pois é por meio dela que o sujeito reconhece familiaridade com outras vivenciadas e busca resolvê-las com esquemas que foram efetivos para tal situação. Todavia, nem toda filiação é interessante para a construção de um novo conceito. Como neste caso,

embora matematicamente válida, apresenta um possível desfavorecimento com o objetivo da sequência que é favorecer a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Os itens (d) e (e) da sexta atividade confirmaram a mobilização dos teoremas em ação previstos na análise *a priori*, como T_2, $T_{2.1}$ e T_4, ao mesmo tempo que revelaram novas estratégias não previstas, como o T_9, modelizado a partir da resolução de EB_2. As representações gráficas e as escolhas algébricas evidenciam e favorecem a construção, ou adaptação, destes esquemas entre os estudantes, ainda que com variações de estratégia entre os participantes da licenciatura e do bacharelado.

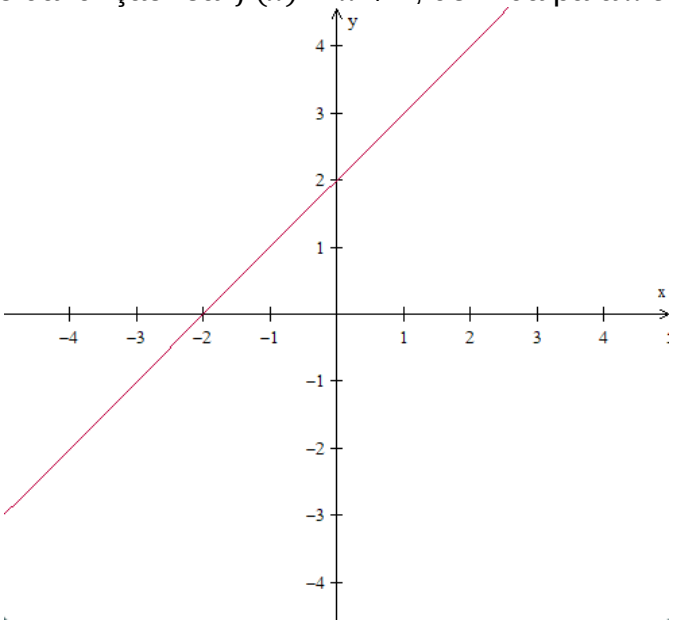
7.2.5 7ª atividade - Item (a)

A sétima atividade da sequência didática propõe a resolução de uma série de inequações modulares envolvendo a expressão $|f(x) - 3| < \epsilon$, com variação gradativa do parâmetro ϵ em que a função $f(x)$ é definida como $f(x) = x + 2$, a fim de estudar os esquemas dos estudantes, especialmente identificar os teoremas em ação mobilizados, para transcrever essas desigualdades na forma intervalar.

Segue no Quadro 14 as resoluções dessas atividades.

Quadro 14 - Resoluções da Atividade 7 item (a)

7. Considere o gráfico da função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \epsilon R$:



a) Como você resolveria algebricamente (utilizando a propriedade de módulo) as inequações, colocando-as na forma de intervalo em torno de $f(x)$:

- $|f(x) - 3| < 0{,}5$
- $|f(x) - 3| < 0{,}05$
- $|f(x) - 3| < 0{,}005$
- $|f(x) - 3| < \epsilon$

EL1

Para $|f(x) - 3| < 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 < f(x) - 3 < 0{,}5$
$2{,}5 < f(x) < 3{,}5$

Para $|f(x) - 3| < 0{,}05 \Rightarrow -0{,}05 < f(x) - 3 < 0{,}05$
$2{,}95 < f(x) < 3{,}05$

Para $|f(x) - 3| < 0{,}005 \Rightarrow -0{,}005 < f(x) - 3 < 0{,}005$
$2{,}995 < f(x) < 3{,}005$

Para $|f(x) - 3| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < f(x) < \epsilon$
$-\epsilon + 3 < f(x) < \epsilon + 3$

EL2

i) $-0{,}5 < f(x) - 3 < 0{,}5 \Rightarrow 2{,}5 < f(x) < 3{,}5$

ii) $-0.05 < f(x) - 3 < 0{,}05 \Rightarrow 2{,}95 < f(x) < 3.05$

iii) $-0.005 < f(x) - 3 < 0.005 \Rightarrow 2{,}995 < f(x) < 3.005$

iv) $-\epsilon < f(x) - 3 < +\epsilon \Rightarrow 3 - \epsilon < f(x) < 3 + \epsilon$

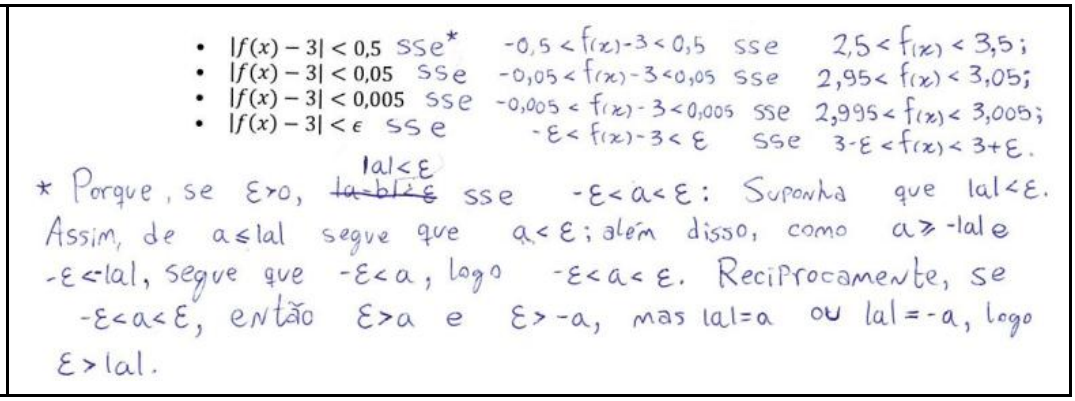
EB1

Utilizando a propriedade já mostrada nas atividades anteriores:

- $|f(x) - 3| < 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5 < f(x) - 3 < 0{,}5 \Leftrightarrow 2{,}5 < f(x) < 3{,}5$
- $|f(x) - 3| < 0{,}05 \Leftrightarrow -0{,}05 < f(x) - 3 < 0{,}05 \Leftrightarrow 2{,}95 < f(x) < 3{,}05$
- $|f(x) - 3| < 0{,}005 \Leftrightarrow -0{,}005 < f(x) - 3 < 0{,}005 \Leftrightarrow 2{,}995 < f(x) < 3{,}005$.
- $|f(x) - 3| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - 3 < \epsilon \Leftrightarrow 3 - \epsilon < f(x) < 3 + \epsilon$

ou ainda:

- $f(x) \in (2{,}5;\ 3{,}5)$
- $f(x) \in (2{,}95;\ 3{,}05)$
- $f(x) \in (2{,}995;\ 3{,}005)$
- $f(x) \in (3 - \epsilon,\ 3 + \epsilon)$

EB_2	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todos os participantes resolvem os quatro casos propostos utilizando a propriedade da inequação modular, convertendo corretamente as expressões $|f(x)-3|<\epsilon$ para a forma $-\epsilon+3<f(x)<\epsilon+3$, o que permite, a seguir, isolar $f(x)$ e, então, x, identificando assim os intervalos no domínio da função que satisfazem a condição dada. Esse procedimento evidencia a mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$, modelizado na análise *a priori* da pesquisa e previsto para a resolução do item.

É importante observar que nas sessões anteriores (especialmente na primeira), EB_1, mostrou preferência pela definição de módulo para desenvolver expressões similares. A resolução atual, entretanto, indica uma ruptura com esse caminho, sendo substituído por uma estratégia algébrica mais próxima ao tipo de situação proposta, o que revela uma alteração de seu esquema, provavelmente favorecida pela institucionalização realizada ao início da segunda sessão. Já EL_1 também apresentou ruptura quanto à mobilização dos teoremas em ação TF_1, corrigindo a manipulação do sinal da desigualdade no desenvolvimento do intervalo correspondente, preferindo desenvolver as inequações modulares diretamente pela propriedade (mobilização de $T_{2.1}$). EB_2 também não se filia ao conceito de função inversa nesta situação, conforme manifestava preferência nas atividades anteriores, mostrando compreensão e correção quanto ao desenvolvimento das inequações modulares pela propriedade (mobilização de $T_{2.1}$).

Além disso, a fidelidade às previsões da análise *a priori* confirma a eficácia das mediações propostas na sequência, alinhando-se à constatação feita por Zuchi (2005) de que o trabalho com situações envolvendo inequações modulares favorece uma internalização progressiva dos elementos constitutivos da definição formal de Limite. Conforme apontado por Burigato e Rachidi (2021), a familiaridade dos estudantes com

as estratégias algébricas de manipulação de desigualdades é um fator relevante no sucesso das abordagens iniciais da formalização.

Por fim, as resoluções apresentadas indicam que os estudantes não apenas reproduziram um procedimento mecânico, mas reconheceram uma estrutura comum às cinco expressões propostas, automatizando cognitivamente a forma intervalar resultante, o que corrobora a constituição de um esquema estável diante de variações dos valores de ϵ.

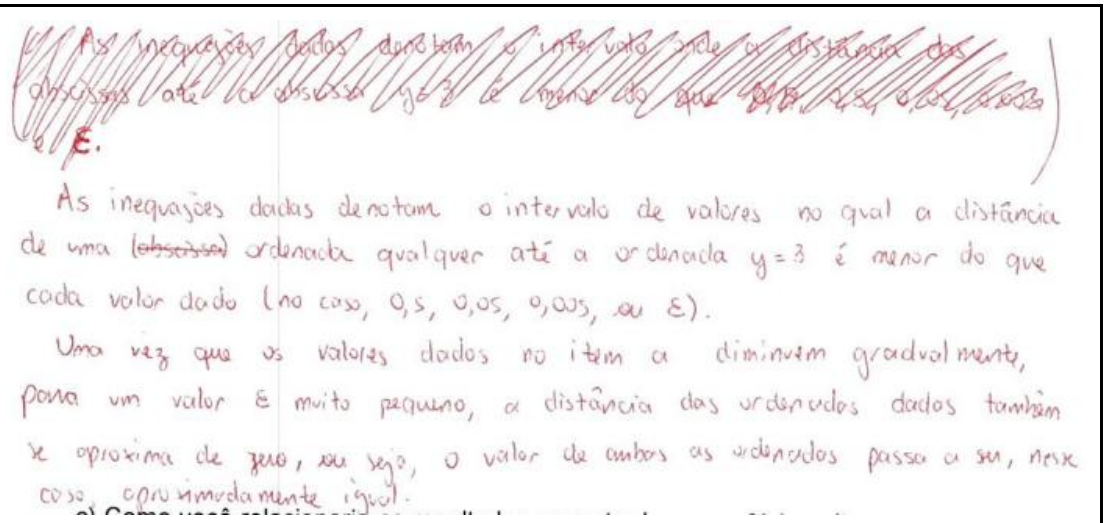
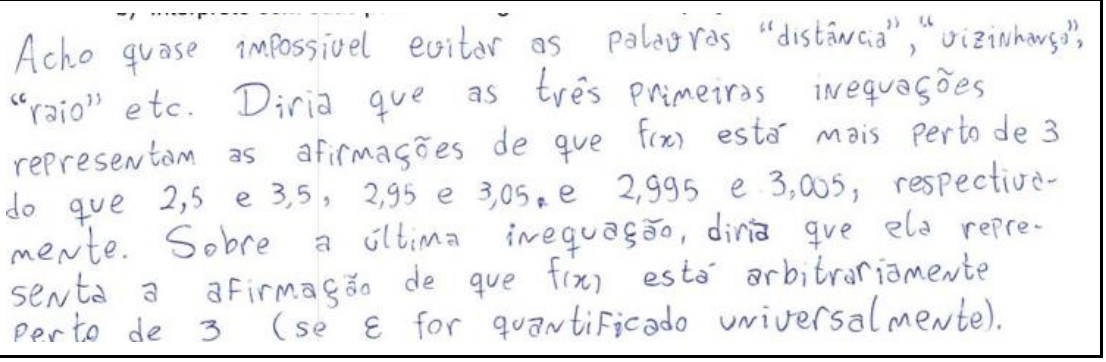
7.2.6 7ª atividade - Item (b)

Especificamente, o item (b) solicita que os estudantes interpretem, com suas palavras, o significado das inequações do item (a), as quais representam distâncias progressivamente menores entre $f(x)$ e 5. Na análise *a priori*, previa-se que eles identificariam o padrão de aproximação progressiva entre $f(x)$ e 5, reconhecendo que valores cada vez menores de ϵ impõem maior precisão à vizinhança em torno de 5 no contradomínio da função, e que isto deveria ser expresso em termos de distância e controle da aproximação.

Segue no Quadro 15 as resoluções dessa atividade.

Quadro 15- Resoluções da Atividade 7 item (b)

a) Interprete com suas palavras o significado das inequações do item a.	
EL_1	As inequações do item anterior representam a distância entre pontos do eixo x e a função.
EL_2	Como eu sempre penso em f(x) = y, eu interpretaria como na atividade anterior, isto é, a distância de y ou f(x) de 3 é menor que um número ε é dado.

EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

O participante EL1 não estabeleceu a relação de proximidade no contradomínio, limitando-se a afirmar que as inequações representavam a distância entre os pontos do eixo x e a função. Isso evidencia uma dificuldade na generalização do conceito de distância aplicada à imagem da função. Esse tipo de interpretação é semelhante a dificuldade apontada por Doumbia (2020) e Zuchi (2005), segundo os quais estudantes frequentemente confundem os domínios dos parâmetros envolvidos e não conseguem dissociar a variável independente x da função $f(x)$ na estrutura da definição formal de Limite de uma função em um ponto. Em termos da TCC, o sujeito apresenta esquemas que ainda não são efetivos para lidar com a situação. Eles estão em processo de construção, ou adaptação, sendo que as representações, os significantes, presentes nas situações são pontos importantes, e que podem contribuir nesse processo. Por outro lado, sua dupla, estudante EL2**,** expressou corretamente que as inequações representam a distância entre $f(x)$ e 5 sendo menor que determinados valores de ϵ, evidenciando seu entendimento de que esses valores controlam a aproximação de $f(x)$ a 5. Essa interpretação mostra o início da filiação a um conceito relacionado à ideia de “proximidade arbitrária”, e da mobilização do

teorema em ação T_6 (*Se um intervalo é centrado em um ponto L e tem uma amplitude ϵ, então ele pode ser expresso na forma* $|f(x) - L| < \epsilon$) — ainda que não explicitado com essa notação.

Entre os estudantes do bacharelado, EB_1 inicialmente comete o mesmo erro conceitual de EL_1, tratando os intervalos como distâncias no eixo x (eixo das abscissas). Contudo, revisa sua resposta, rasurando sua ideia inicial e registrando na folha uma resposta adequada, reconhecendo que se trata de valores no contradomínio cada vez mais próximos de 5, considerando a redução do parâmetro ϵ.

O participante EB_2, por sua vez, parece que não teve dúvida ao afirmar que as inequações representavam a aproximação de $f(x)$ a 5, utilizando termos como “distância”, “raio”, “vizinhança” e “aproximação arbitrária”. Além disso, foi o único participante a discutir explicitamente a ideia de quantificação universal sobre ϵ, antecipando um dos importantes elementos da definição formal de Limite de funções. Essa resolução aponta para a mobilização do teorema em ação T_6, mas também a da interpretação de ϵ como medida controlável e arbitrária, vinculado à precisão da aproximação, conforme previsto na análise *a priori*.

Abreu (2011) já discutiu que a interpretação da notação de distância no contradomínio, sem mediação, pode causar dificuldades. Isso afeta a compreensão dos conceitos envolvidos e gera confusões sobre a localização dos parâmetros na estrutura da definição formal de Limite de funções. No caso de EL_1 e da primeira resposta de EB_1, essa dificuldade também foi observada.

7.2.7 7ª atividade - Item (c)

O item (c) da sétima atividade solicitava que os estudantes relacionassem os intervalos construídos na imagem da função com os correspondentes intervalos no domínio, expressando-os na variável x. Neste ponto da sequência didática, os estudantes já haviam enfrentado situações análogas nas atividades 5 e 6, nas quais a transição entre intervalos em torno da imagem e do domínio da função foi trabalhada com o uso da lei de formação $f(x) = x + 2$.

Segue no Quadro 16 as resoluções dessa atividade.

Quadro 16 - Resoluções da Atividade 7 item (c)

Quadro 16 - Resoluções da Atividade 7 item (c)

<table>
<tr><td colspan="2">

- Como você relacionaria os resultados encontrados para $f(x)$ no item a com os valores do domínio da função, colocando-as na forma de intervalo em torno de x quando:
  - $|f(x) - 3| < 0{,}5$
  - $|f(x) - 3| < 0{,}05$
  - $|f(x) - 3| < 0{,}005$
  - $|f(x) - 3| < \epsilon$

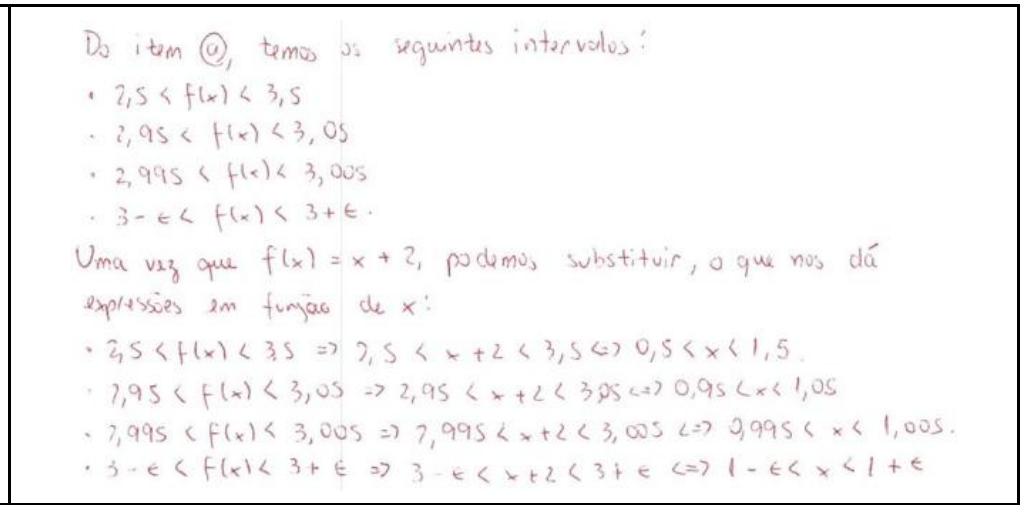
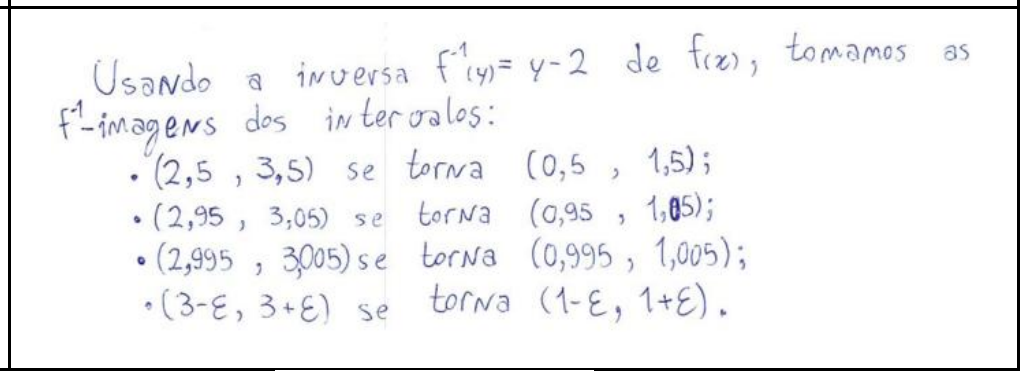
</td></tr>
<tr><td>EL1</td><td>

Para $|f(x) - 3| < 0{,}5$ Então, $-0{,}5 < x - 1 < 0{,}5$
$|(x+2) - 3| < 0{,}5$ $0{,}5 < x < 1{,}5$
$|x - 1| < 0{,}5$
De maneira análoga, teremos:
• $|(x+2) - 3| < 0{,}05$
$|x - 1| < 0{,}05$
$-0{,}05 < x - 1 < 0{,}05$
$0{,}95 < x < 1{,}05$
• $|(x+2) - 3| < 0{,}005$
$|x - 1| < 0{,}005$
$-0{,}005 < x - 1 < 0{,}005$
$0{,}995 < x < 1{,}005$
• $|(x+2) - 3| < \epsilon$
$|x - 1| < \epsilon$
$-\epsilon < x - 1 < \epsilon$
$-\epsilon + 1 < x < \epsilon + 1$

</td></tr>
<tr><td>EL2</td><td>

i) $-0.5 < (x+2) - 3 < 0.5 \Rightarrow 0.5 < x < 1.5$
ii) $-0.05 < x - 1 < 0.05 \Rightarrow 0.95 < x < 1.05$
iii) $0.995 < x < 1.005$
iv) $-\varepsilon < x - 1 < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < x < \varepsilon + 1$

</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Todos os participantes desenvolveram suas resoluções considerando as inequações obtidas no item (a), colocando-as inicialmente na variável $f(x)$, e em seguida utilizando estratégias para expressar as condições em x. Os participantes EL1, EL2 e EB1 mobilizaram o teorema em ação T2.1, que modeliza a propriedade da inequação modular $|f(x) - 5| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon + 5 < f(x) < \epsilon + 5$, e, ao substituírem $f(x) = x + 2$, encontraram os respectivos intervalos na variável x.

Esse percurso mostra não só a filiação com esses conceitos, envolvidos no teorema em ação, como também confirma as previsões feitas na análise *a priori* da pesquisa para esse item, especialmente no que se refere à compreensão algébrica da distância e ao domínio do desenvolvimento de inequações modulares na forma intervalar.

Já o participante EB2 manteve a escolha e o uso da função inversa, como nas atividades 5 e 6, optando por um caminho distinto: partiu da ideia de que $x = f^{-1}(x) = y - 2$, e utilizou essa função inversa para transformar os intervalos na imagem de volta ao domínio. Assim, ele reescreveu cada inequação do tipo $4{,}9 < f(x) < 5{,}1$ na forma $2{,}9 < x < 3{,}1$, por exemplo. Essa estratégia está de acordo com o teorema em ação

T_9, modelizado a partir da resolução do participante como: *"Se uma função f é invertível e queremos encontrar um intervalo correspondente a uma desigualdade em y, então podemos aplicar a função inversa para reescrevê-la em termos da variável x."*.

Esta atividade cumpriu papel fundamental na transição entre a compreensão da distância no contradomínio e a preparação para o enfrentamento da estrutura $\epsilon - \delta$, presente na definição formal de Limite de uma função em um ponto. A análise reforça, conforme argumenta Vergnaud (1990), a aprendizagem de conceitos matemáticos dependendo do confronto reiterado com situações variadas que demandem sua mobilização.

7.2.8 Validação da segunda sessão (atividades 5 a 7)

A segunda sessão teve início com uma importante institucionalização da sessão anterior, consolidando a noção de distância na forma algébrica e geométrica, e estabelecendo duas estratégias predominantes para o enfrentamento das situações: o uso da definição do módulo e a utilização da propriedade da inequação modular. Esse momento de mediação foi decisivo para as resoluções das atividades subsequentes.

Nas atividades 5 a 7, a maioria dos estudantes mobilizou teoremas em ação previstos na análise *a priori*, como T_2, $T_{2.1}$ e T_4. Observa-se que os participantes EB_1, EL_1 e EL_2 mantiveram as resoluções mais próxima das mediações propostas, adotando predominantemente a propriedade da inequação modular para desenvolver os intervalos na variável x, revelando filiações importantes para a compreensão dos elementos que estruturam a definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Entretanto, a trajetória do participante EB_2 revela uma filiação diferente, baseada no conceito de função inversa, o que deu origem ao teorema em ação T_9. Essa regularidade na resolução das atividades mostra um conhecimento algébrico sólido, porém menos vinculado à construção conceitual por meio da noção de distância. A mobilização sistemática desse teorema evidencia uma possível tensão entre diferentes formas de compreender o conceito de Limite — uma centrada no comportamento algébrico da função e outra na relação entre aproximações controladas e distância.

Dessa forma, a validação da segunda sessão confirma que os objetivos da sequência didática foram parcialmente alcançados. Os estudantes avançaram na

mobilização de teoremas em ação pertinentes para compreender a definição formal de Limite, mas também revelaram alternativas e filiações que, embora matematicamente corretas, podem não favorecer a compreensão dos elementos envolvidos nesta definição. Isso evidencia a importância de intervenções direcionadas, com situações que valorizem a construção conceitual progressiva da noção de Limite como relação entre distâncias no domínio e na imagem da função, pois elas podem favorecer a construção de esquemas mais eficazes para lidar com situações que envolvem esta definição.

7.3 3ª Sessão

Antes do início da aplicação das atividades da terceira sessão, realizou-se institucionalização das três atividades da sessão anterior em conjunto com todos os estudantes em sala de aula. Abaixo, inserimos a transcrição do áudio desta abordagem:

Pesquisador Mediador: *— Eu gostaria de retomar algo: ontem, ao final das atividades, fizemos um breve resumo, e queria começar a aula de hoje com uma reflexão. O que vocês perceberam de diferente entre as atividades da primeira sessão, lá no primeiro dia, e as atividades de ontem? Quais foram as dificuldades? O que conseguiram trazer como resumo? E qual é o significado daquele δ para vocês? E do ϵ? O que foi possível perceber?*

Estudante EB$_1$: — Não sei se consigo comparar com a primeira sessão, mas da atividade três para a quatro, percebi que, em vez de trabalhar com o x, passamos a trabalhar com o y. Na hora de construir a resposta, acabei me confundindo. O que também me confundiu foi que, no enunciado, foi apresentada a função, mas a pergunta era sobre a distância até $x = 3$, não sobre y. No começo achei que já era para envolver a função, mas depois percebi que ela só deveria ser usada na última questão, quando era necessário desenhar o gráfico. Essa confusão surgiu logo no início.

Pesquisador Mediador: *— Entendi. E você percebeu alguma relação entre a distância no eixo das abscissas e no eixo das ordenadas?*

Estudante EB$_1$: — Sim. Quando temos um intervalo em x, ele afeta a imagem da função, o que gera um intervalo também no eixo y.

Pesquisador Mediador: *— Perfeito. E vocês, o que têm a dizer a respeito disso?*

Estudante EB₂: — A principal diferença está na mudança da variável, mas no fim das contas estamos trabalhando praticamente a mesma ideia, só que agora com os dois eixos ao mesmo tempo. Basta perceber que há uma relação entre eles. Como estávamos lidando com uma função do primeiro grau, foi mais fácil perceber isso. Quando o valor de x aumenta, o de y também aumenta, e vice-versa.

Pesquisador Mediador: *— Certo. Se eu perguntasse a vocês qual é a relação entre o valor de ϵ e o intervalo no eixo das ordenadas, o que diriam?*

Estudante EB₂: — Existe uma relação com o tamanho do intervalo. O ϵ é como o raio da vizinhança no eixo y.

Estudante EB₁: — Sim, exatamente. O significado é que, dependendo do valor de ϵ, o intervalo será maior ou menor. E da mesma forma, dependendo do valor de δ, o intervalo no eixo x também será maior ou menor. No entanto, o significado mais profundo ainda não está totalmente claro, especialmente quando falamos sobre a definição formal de Limite*, onde há uma diferença na quantificação entre ϵ e δ.*

Pesquisador Mediador: *— Perfeito.*

Estudante EL: — Por enquanto, o que percebemos é que ambos representam tamanhos de intervalos.

Pesquisador Mediador: *— Então você observa que ϵ afeta diretamente o tamanho do intervalo?*

Estudante EL: — Sim.

Pesquisador Mediador: *— E isso você percebeu ao resolver as atividades?*

Estudante EL: — Na verdade, eu já sabia disso. Mas resolver as atividades me ajudou a visualizar melhor essa relação.

Pesquisador Mediador: *— Entendi. Esse era justamente o objetivo das atividades: levar vocês a observar essa relação. Ao variar o valor de ϵ, há uma variação correspondente no intervalo, e esses intervalos estão conectados, como EL comentou, certo?*

Estudante EB₂: — Sim, entre a imagem da função e o que seria a imagem da inversa.

Pesquisador Mediador: *— Quando você menciona a "imagem da inversa", a que está se referindo?*

Estudante EB₁: — Neste caso, como as funções utilizadas são bijetivas, podemos usar suas inversas para relacionar os intervalos.

Estudante EB_2: — Exatamente. Ao aplicar a função inversa sobre o intervalo definido no eixo das ordenadas, obtemos o intervalo correspondente no eixo das abscissas, o qual é conveniente — ou suficiente — para determinar o intervalo associado ao valor de δ.

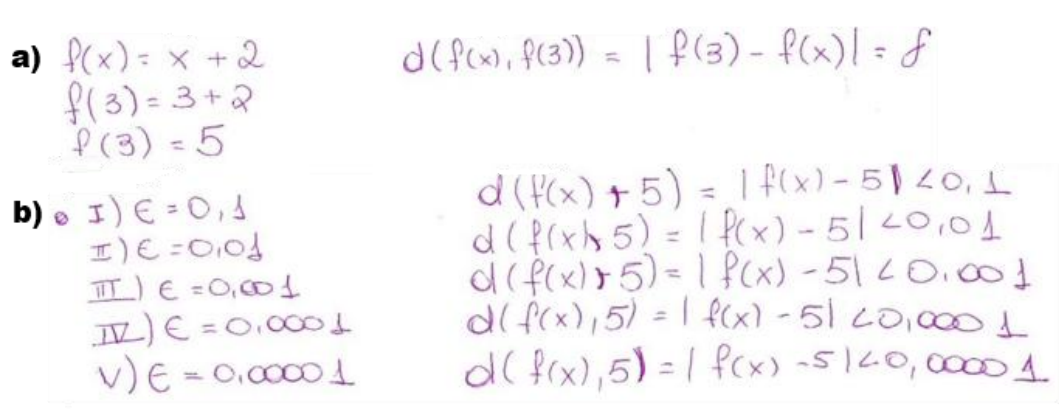
Após a institucionalização da segunda sessão, foram aplicadas as quatro atividades da terceira sessão aos participantes da pesquisa, no qual continuaremos a análise conforme método que vem sendo realizado.

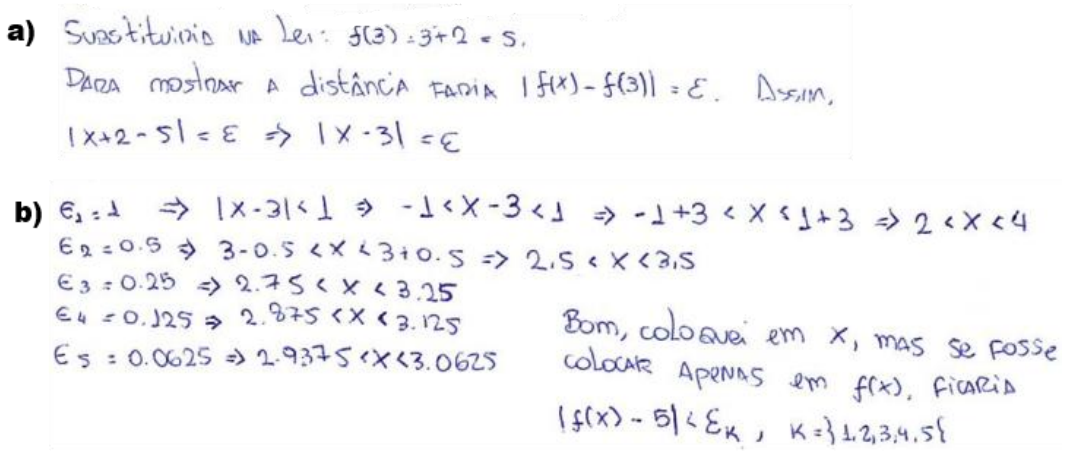
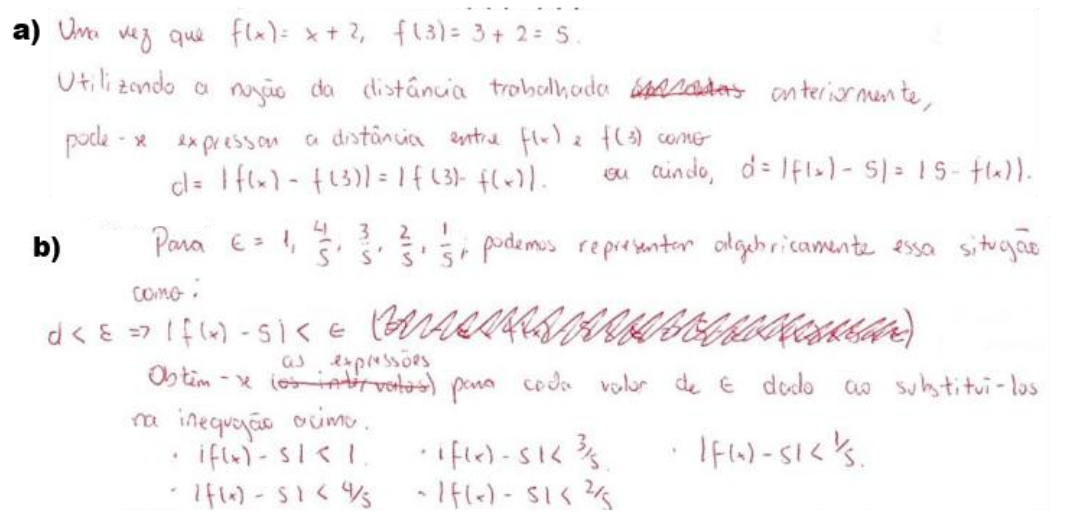
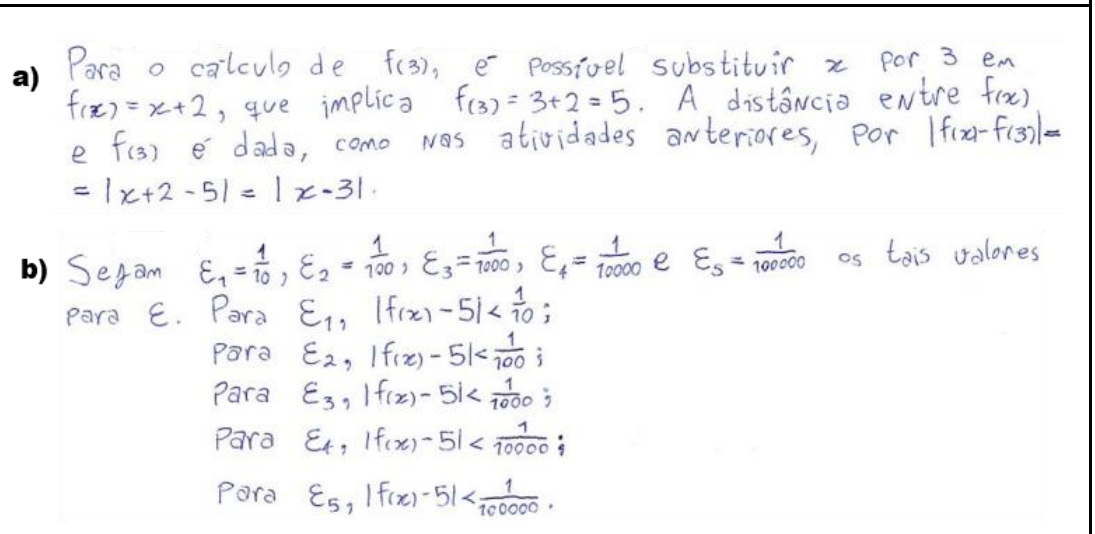
7.3.1 8ª Atividade - Itens (a) e (b)

Na oitava atividade os estudantes retomam a função $f(x) = x + 2$, já trabalhada anteriormente, com o objetivo de transitar entre diferentes formas de expressar a proximidade da imagem da função a um valor fixo $f(3) = 5$.

Segue no Quadro 17 as resoluções dessa atividade.

Quadro 17- Resoluções da Atividade 8 itens (a) e (b)

8. Considere novamente a função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$. a) Considere o ponto $x = 3$ no domínio da função. De qual forma você calcularia $f(3)$ e expressaria a notação de distância entre $f(x)$ e $f(3)$? b) Agora, escolha 5 (cinco) valores decrescentes para ϵ (por exemplo, $0{,}2$; $0{,}02$; $0{,}002$; $0{,}0002$ e $0{,}00002$). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre $f(x)$ e 5 seja menor do que cada um desses valores escolhidos para ϵ?	
EL_1	

EL2	
EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução do item (a), todos os participantes, tanto da licenciatura quanto do bacharelado, mobilizaram a regra de formação da função $f(x) = x + 2$ para calcular a imagem do ponto $x = 3$, reconhecendo que $f(3) = 5$, toda esta resolução

prevista *a priori*. Esse reconhecimento revela a compreensão esperada e o domínio básico da linguagem algébrica. Em seguida, os quatro estudantes expressaram corretamente a distância entre $f(x)$ e 5 utilizando o valor absoluto da diferença, na forma $|f(x) - 5|$, evidenciando a mobilização do teorema em ação T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*", previsto *a priori* para resolução da situação.

O estudante EL_2 ainda expressa essa distância como $|x + 2 - 5|$, indicando a substituição de $f(x)$ pela própria regra da função. Esse passo revela um domínio algébrico mais detalhado, provavelmente importante para o reconhecimento da pertinência da filiação realizada, permitindo o trânsito entre a expressão da função e sua representação em termos de distância.

No item (b), todos os participantes escolhem valores decrescentes para ϵ, compreendendo a variação do parâmetro que controla a distância entre $f(x)$ e 5. Os estudantes EB_1 e EB_2 escrevem diretamente a desigualdade $|f(x) - 5| < \epsilon$ para cada valor específico, sem desenvolver os intervalos correspondentes, o que mostra a apropriação da notação como instrumento de generalização da ideia de proximidade, mas ainda sem transitar plenamente para a linguagem intervalar ou para a análise no domínio da função.

O estudante EL_1 realiza procedimento semelhante, escrevendo diretamente as inequações com $|f(x) - 5| < \epsilon$. Já EL_2, além de representar essas desigualdades com o valor de ϵ, desenvolve os intervalos correspondentes na variável x, mobilizando corretamente o teorema em ação $T_{2.1}$: "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$", mesmo que isso não tenha sido requerido pelo enunciado. Essa mobilização revela a articulação entre as representações algébrica e intervalar, fundamental para compreender o vínculo entre a imagem da função e os valores de x que produzem essa imagem, no qual a compreensão é importante para favorecimento da definição formal de Limite de uma função em um ponto, como destacado por Burigato e Rachidi (2021).

Notamos, nesse momento, que a institucionalização feita no início da sessão — que discutiu a equivalência entre a definição de módulo e a propriedade da desigualdade modular — influenciou diretamente a resolução dos estudantes,

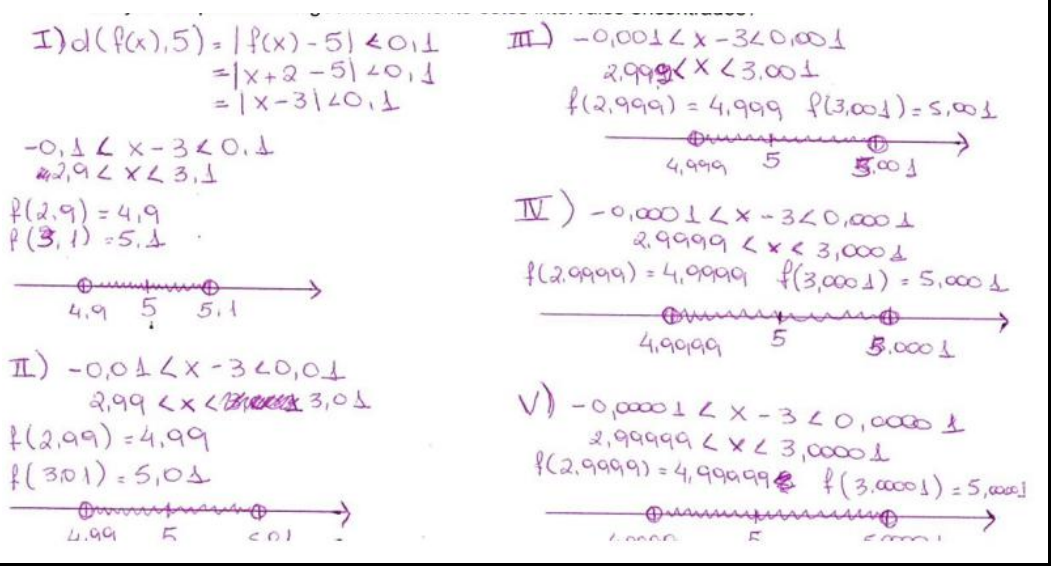
especialmente EL_2. A mobilização de $T_{2.1}$, que até então aparecia de forma pontual nos registros, surge agora com mais clareza, indicando uma possível ruptura em relação a estratégias anteriores baseadas exclusivamente no uso da definição de módulo, como a observada com EB_1 nas atividades iniciais da sequência.

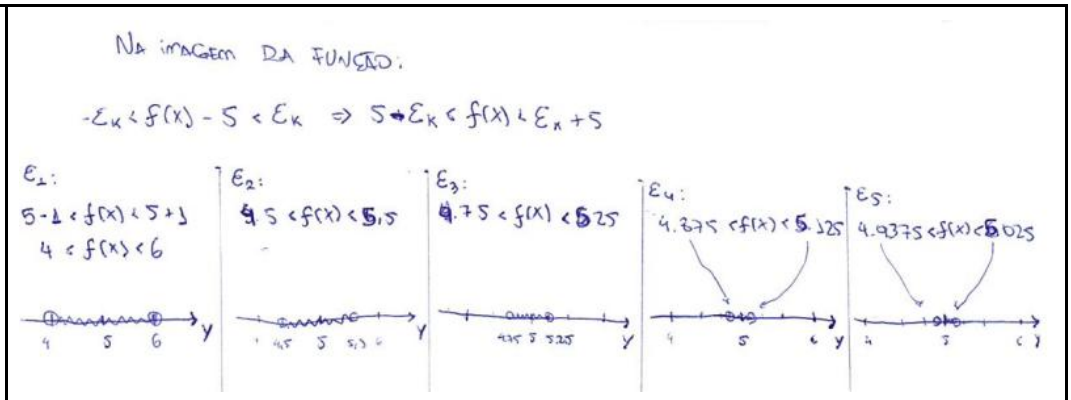
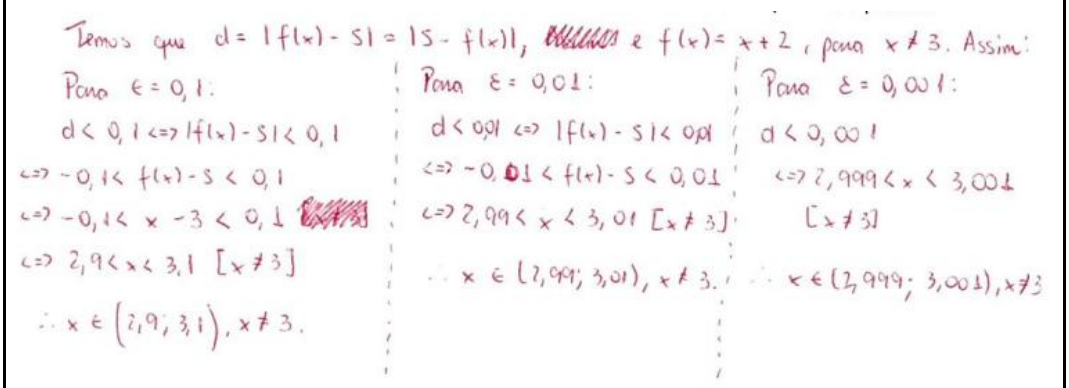
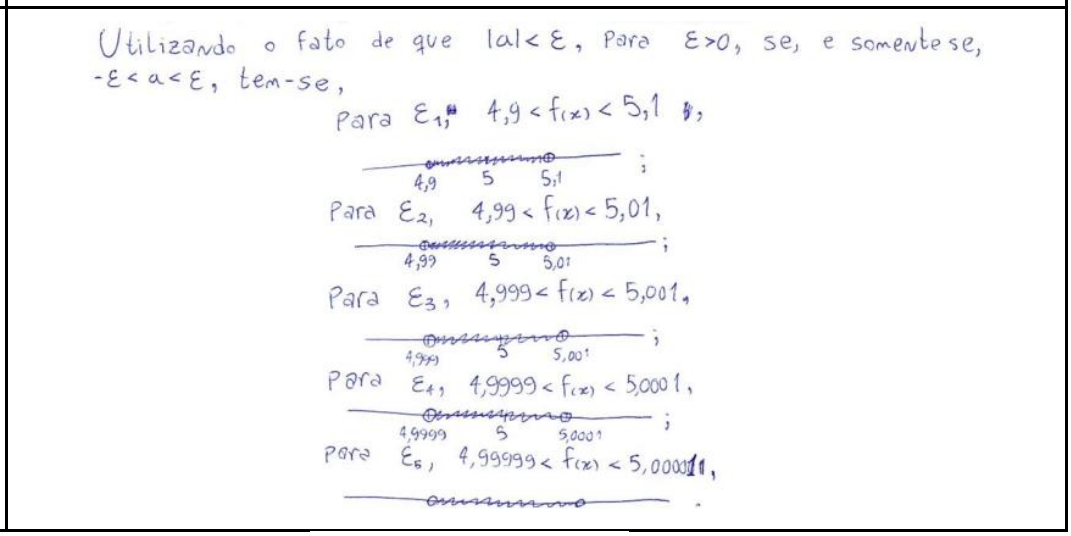
7.3.2 8ª atividade - Item (c)

O item (c) da oitava atividade propôs aos estudantes a situação de expressar os intervalos encontrados no item (b) — que tratava da distância entre $f(x)$ e $f(3)$ — na forma de intervalos na imagem da função, assim como representá-los geometricamente. Essa tarefa exigia que os estudantes transitassem entre representações algébricas e geométricas, uma competência apontada pelas pesquisas como fundamental à compreensão da definição formal de Limite, especialmente na sua dimensão de controle da imagem da função a partir da aproximação no domínio (Abreu, 2011, Burigato, 2019, Doumbia, 2020).

Segue no Quadro 18 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 18- Resoluções da Atividade 8 item (c)

c) Como você expressaria a sua resposta do item b na forma de intervalos na imagem da função e representaria geometricamente estes intervalos encontrados?	
EL_1	

EL2	
EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme previsto na análise *a priori* da pesquisa, esperava-se que os estudantes recorressem à propriedade da inequação modular (modelizada no teorema em ação T2.1) para desenvolverem as expressões do tipo $|f(x) - 5| < \epsilon$ na forma intervalar $5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon$. De fato, todos os quatro estudantes mobilizaram corretamente este teorema em ação, revelando que a institucionalização feita ao final da segunda sessão (na qual se discutiu detalhadamente as diferentes formas de desenvolvimento da inequação modular) favoreceu sua utilização.

Além disso, é possível constatar, a partir das representações realizadas, a mobilização do teorema em ação T_3 por todos os estudantes: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta.*" Os participantes demarcaram corretamente os intervalos encontrados em representações na reta real, hachurando os segmentos com extremidades abertas em torno de $f(3) = 5$, registrando a interpretação da distância exigida pela atividade, conforme previsto *a priori*, com a variação de esboçarem a reta na horizontal para o eixo y, e não na vertical como previsto.

A análise das resoluções no quadro 18 permite observar o favorecimento da compreensão para a ideia de controle da imagem da função com precisão arbitrária, conforme os valores de ϵ diminuem. Essa construção permite constatar a mobilização dos invariantes operatórios (Vergnaud, 1990) que refletem inferências e decisões reguladas pela experiência em situações no campo conceitual do Limite de funções, especialmente na relação entre aproximação e precisão.

No caso de EB_2, há uma retomada explícita do raciocínio de que a inequação modular envolve uma diferença de módulo menor do que ϵ, formalizando o desenvolvimento em torno de 5, e reconhecendo a simetria dos intervalos. Esse comportamento permite identificar a mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$.

O participante EB_1, por sua vez, representou os intervalos com utilização da propriedade, mobilizando $T_{2.1}$, e não fez a representação geométrica destes intervalos, conforme havia sido solicitado pelo item. Entretanto, inferimos que foi por escolha, pois no Quadro 13 observamos que, ao lidar com uma situação semelhante, ele conseguiu fazer a representação geométrica solicitada.

Já os estudantes da licenciatura (EL_1 e EL_2) apresentaram respostas sistemáticas e completas, tanto na forma algébrica quanto na gráfica, mobilizando de $T_{2.1}$ e T_3, com destaque para a preocupação em expressar explicitamente os extremos de cada intervalo. Esse detalhamento pode ser em função do curso que eles fazem, pois na licenciatura há um enfoque maior em explicitar os passos realizados, o que contribui para nos dar indícios de uma construção de representações mais estáveis em torno da estrutura da definição formal.

No conjunto, esta atividade favoreceu a mobilização dos teoremas em ação $T_{2.1}$ e T_3, fornecendo aos estudantes condições para refletirem sobre como a noção de proximidade na imagem da função se expressa por meio da distância em torno de um

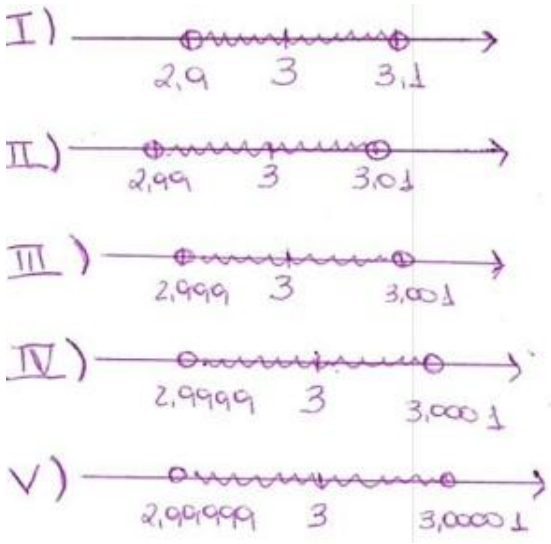
valor numérico específico, conforme previsto e objetivado na análise *a priori* Doumbia (2020) aponta que esse é um elemento importante da definição formal de Limite de uma função em um ponto e favorece a compreensão de controle da imagem em função da aproximação no domínio.

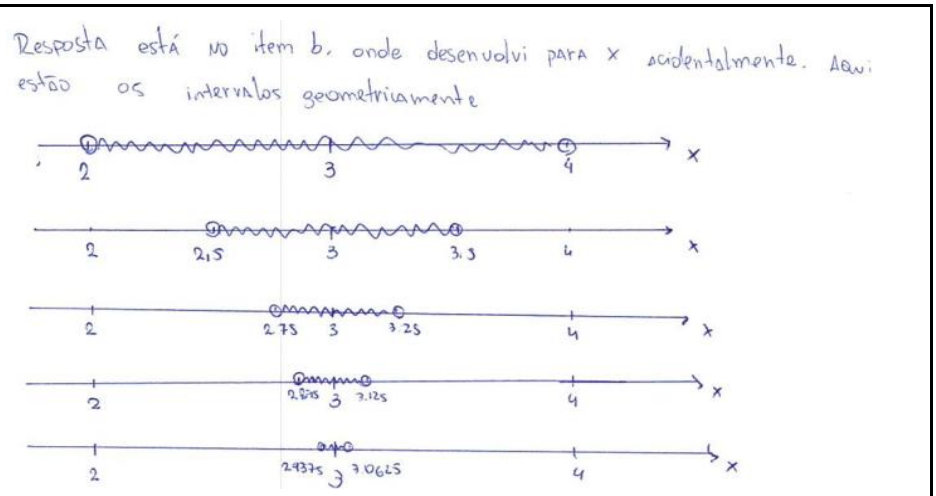
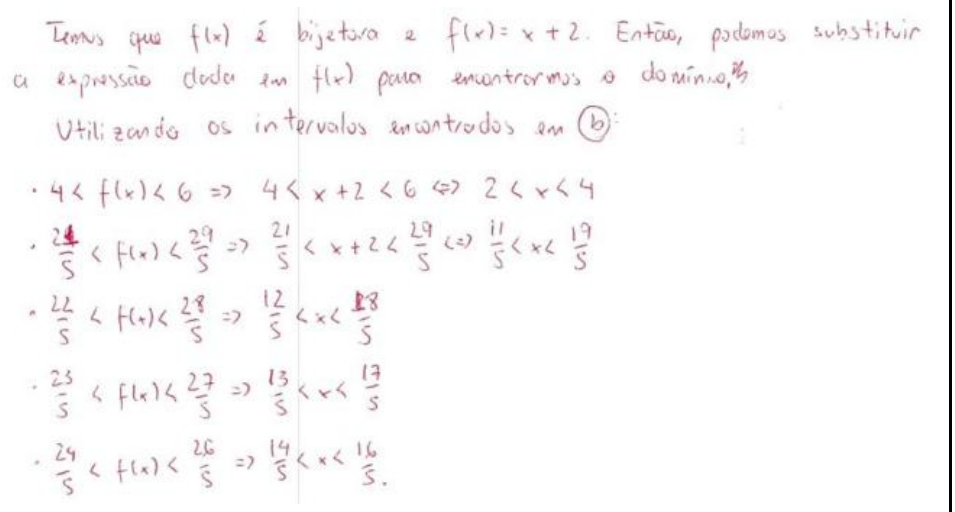
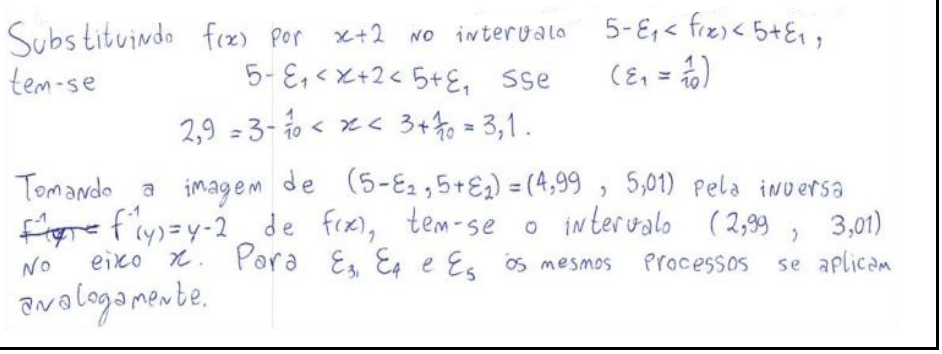
7.3.3 8ª atividade - Item (d)

A oitava atividade, item (d), da sequência didática solicitou aos estudantes que determinassem os intervalos no domínio da função.

Segue no Quadro 19 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 19 - Resoluções da Atividade 8 item (d)

d) Para cada intervalo na imagem da função encontrado por você no item anterior, qual o intervalo correspondente no domínio da função?	
EL_1	

EL_2	
EB_1	
EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme previsto *a priori* para resolução do item, ambos os estudantes do curso de licenciatura, EL_1 e EL_2, representaram corretamente os intervalos na variável x, expressando geometricamente as relações previamente obtidas. Embora os intervalos já estivessem algebricamente indicados no item (c), a solicitação do item (d) exigiu dos participantes uma transposição para a linguagem geométrica, retomando a noção de distância expressa como a amplitude de um segmento com extremidades abertas. Ambos os estudantes utilizaram o número 3 como centro dos

segmentos, o que denota a permanência do conceito de “distância em torno de 3”, construído desde as primeiras atividades da sequência didática. As estratégias utilizadas confirmam a mobilização do teorema em ação T_3: *“Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta.”* previsto *a priori* para representação geométrica da situação.

A forma de representação dos estudantes reforça a construção progressiva para compreensão de intervalo como conjunto de pontos que satisfazem uma condição de proximidade e sua relação com a variável δ. Isso corrobora o que Vergnaud (1996) destaca quanto à constituição das representações: a internalização conceitual exige a construção de significantes diversos — como expressões algébricas e representações gráficas — que no contexto desta pesquisa servem de suporte à compreensão progressiva da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Já os estudantes EB_1 e EB_2 demonstraram estratégias distintas, de cunho mais algébrico. EB_1 substituiu a expressão $f(x) = x + 2$ diretamente nos intervalos encontrados anteriormente em $f(x)$, utilizando a transformação inversa da função para isolar x. Esse procedimento revela a mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$: “*Se necessitamos desenvolver a inequação $|x - a| < \delta$, então devemos transcrevê-la para a forma $a - \delta < x < \delta + a$”*.

Já EB_2, além de repetir o procedimento de substituição, realizou explicitamente o cálculo dos intervalos no domínio da função filiando-se novamente ao conceito de função inversa, mobilizando T_9: “*Se uma função f é invertível e queremos encontrar um intervalo correspondente a uma desigualdade em $f(x)$, então podemos aplicar a função inversa para reescrevê-la em termos da variável x.*”, que, conforme já abordado, entendemos não favorecedor da compreensão da simetria em relação a um ponto fixo, haja vista a melhor adequação, neste sentido, com a mobilização de $T_{2.1}$, no qual EB_2 já revelou possuir domínio de desenvolvimento. Além disso, nem toda função que tem Limite em um ponto admite inversa, assim, essa filiação pode não contribuir para lidar com as situações envolvidas na construção da definição formal de Limite de funções.

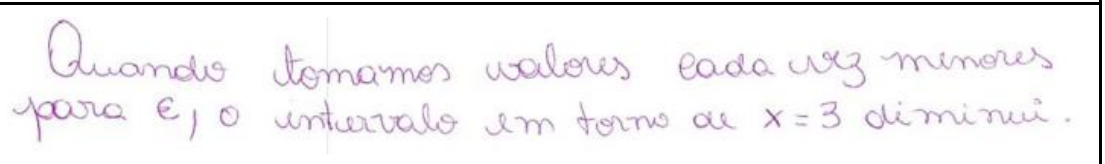
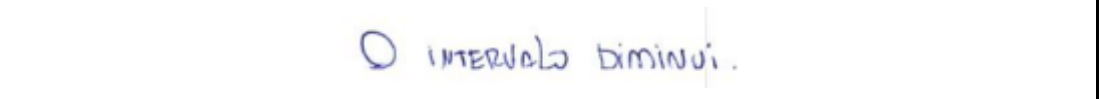
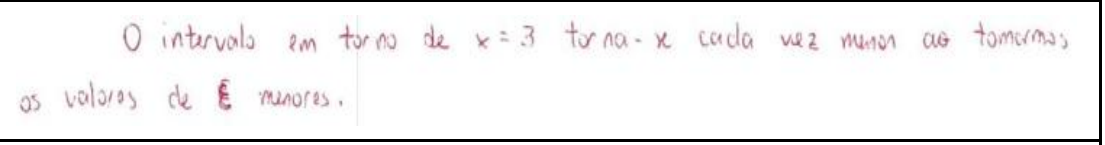
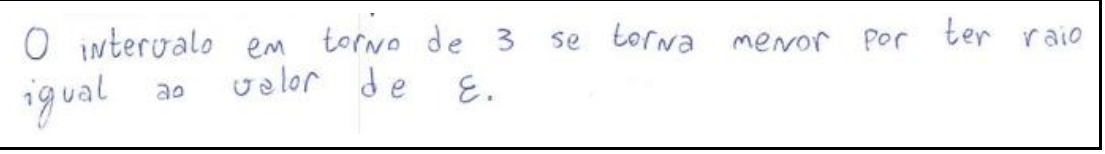
7.3.4 8ª atividade - Item (e)

A análise *a posteriori* do item (e) da oitava atividade revela elementos importantes do desenvolvimento conceitual dos estudantes quanto à relação entre a redução do parâmetro ϵ e o comportamento do intervalo no domínio em torno do ponto $x = 3$.

Essa atividade solicita uma interpretação das relações trabalhadas nos itens anteriores, exigindo que os estudantes articulem a variação de ϵ — parâmetro que expressa a distância entre $f(x)$ e 5 — com os intervalos correspondentes no domínio da função $f(x) = x + 2$. Assim, mais do que a aplicação mecânica de propriedades algébricas, o item exige uma compreensão da noção de controle da proximidade em uma situação de Limite, o que se relaciona com os elementos matemáticos atribuídos aos parâmetros envolvidos.

Segue no Quadro 20 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 20 - Resoluções da Atividade 8 item (e)

e) Fazendo a interpretação do resultado nos itens anteriores, qual a relação entre tomarmos valores cada vez menores para ϵ e o intervalo em torno de $x = 3$?	
EL1	
EL2	
EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme registrado no Quadro 20 do documento, os estudantes EL1 e EL2 (licenciatura) interpretam corretamente que, à medida que ϵ diminui, o intervalo em torno de $x = 3$ também se torna menor. Essa interpretação evidencia a mobilização

do teorema em ação T_4: "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*", e também do teorema T_5: "*Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função*". Estes dois teoremas em ação, previamente modelizados na análise *a priori* para a resolução da situação presente neste item, foram validados nas resoluções de todos os sujeitos.

Os estudantes revelam aqui a mobilização de invariantes operatórios que articulam variações simultâneas no domínio e no contradomínio — isto é, compreendem a função como uma estrutura que preserva certa regularidade nas relações entre variáveis. Tal regularidade se expressa no fato de que, para que $f(x)$ permaneça dentro de um intervalo de precisão cada vez mais estreito em torno de $L = 5$, os valores de x precisam estar cada vez mais próximos de 3, uma vez que $f(x) = x + 2$ implica que as variações em $f(x)$ estão relacionadas com as variações em x.

No caso dos estudantes do bacharelado, EB_1 oferece resposta equivalente às respostas de EL_1 e EL_2, confirmando a mobilização de T_4 e T_5. Já EB_2, além de interpretar corretamente essa relação, acrescenta uma observação sobre a "*igualdade entre o raio do intervalo em torno de* $x = 3$" e o valor de ϵ, demonstrando não apenas a mobilização dos teoremas em ação T_4 e T_5, como também o desenvolvimento de uma estrutura relacional explícita entre as distâncias no domínio e contradomínio da função. Tal observação é compatível com a regularidade da função do primeiro grau, o que sugere o início da compreensão para generalização dos parâmetros de distância.

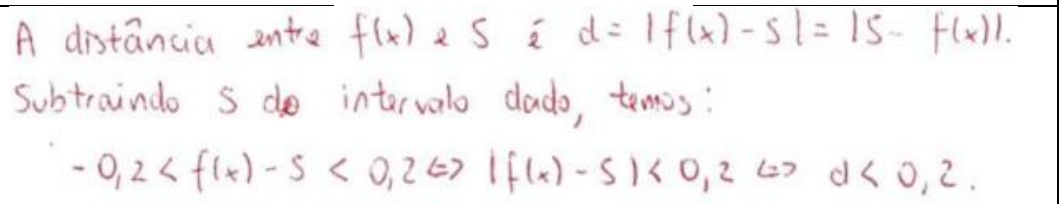
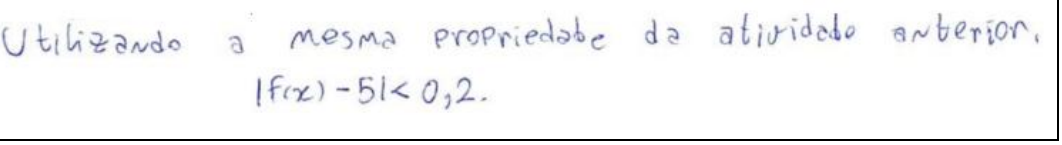
Assim, ao se depararem com a necessidade de justificar a compressão dos intervalos em x a partir da compressão em $f(x)$, os estudantes revelam estar sendo favorecidos neste processo de construção da aprendizagem quantos aos elementos do Campo Conceitual da Definição Formal de Limite de uma função em um ponto, ainda que sem recorrer diretamente à linguagem $\epsilon - \delta$. Conforme apontam pesquisas (Burigato e Rachidi, 2021; Doumbia,2020; Abreu,2011; Carvalho,2022), esse tipo de exploração algébrico-geométrica, com variações controladas, foi importante para a transição entre a compreensão intuitiva de aproximação e a formulação formal do Limite.

7.3.5 9ª atividade - Item (a)

O item (a) da nona atividade dá continuidade à construção da ideia de vizinhança, agora centrada em torno de um valor da imagem da função, exigindo dos estudantes o reconhecimento da estrutura algébrica da desigualdade modular e a generalização da ideia de distância como módulo da diferença.

Segue no Quadro 21 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 21 - Resoluções da Atividade 9 item (a)

9. Considere agora a função real $f(x) = \{f(x) = x + 2, se\ x = 3\ -7, se\ x \neq 3$, definida para $x\ \epsilon\ R$. a) Como você expressaria o intervalo $4{,}8 < f(x) < 5{,}2$ como uma notação de distância entre $f(x)$ e 5?	
EL_1	
EL_2	
EB_1	
EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

As resoluções dos estudantes participantes indicam, de modo geral, a mobilização de invariantes operatórios coerentes com a previsão feita na análise a priori, especialmente o teorema em ação T_1: “Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos” e T_6: “*Se um intervalo é centrado em um ponto L e tem uma amplitude ϵ, então ele pode ser expresso na forma* $|f(x) - L| < \epsilon$”. Esses teoremas se manifestam nas respostas por meio da escrita da desigualdade $|f(x) - 5| < 0{,}2$, a partir da qual os estudantes demonstram reconhecer que o intervalo dado é uma vizinhança em torno de 5 de raio $0{,}2$.

EL_1 e EL_2 expressam essa relação explicitamente com a desigualdade envolvendo módulo $|f(x) - 5| < 0{,}2$, indicando a mobilização do conceito de distância como módulo da diferença. Ambos os estudantes da licenciatura mostram, portanto, consistência com os invariantes operatórios desenvolvidos nas atividades anteriores, especialmente nas atividades da segunda sessão (atividades 5 a 7), indicando continuidade e aprofundamento na compreensão da noção de distância no contradomínio da função.

EB_1 também inicia a resolução apontando diretamente a inequação $|f(x) - 5| < 0{,}2$, mobilizando os teoremas em ação T_1 e T_6 evidenciando um domínio algébrico estável para representar intervalos centrados em torno de um ponto. EB_2, por sua vez, adota uma abordagem já recorrente em suas resoluções anteriores, expressando a desigualdade corretamente e citando estratégia abordada na situação anterior (oitava atividade), o que indica a mobilização do teorema em ação T_9: “Se uma função f é invertível e queremos encontrar um intervalo correspondente a uma desigualdade em $f(x)$, então podemos aplicar a função inversa para reescrevê-la em termos da variável x.”. Essa estratégia, previamente utilizada nas atividades anteriores, demonstra uma filiação consolidada com o uso do conceito de função inversa para enfrentamento destas situações, o que pode exigir a proposta de novas atividades que levem a um desequilíbrio quanto ao uso deste esquema em seu repertório como instrumento para a leitura algébrica e geométrica de vizinhanças.

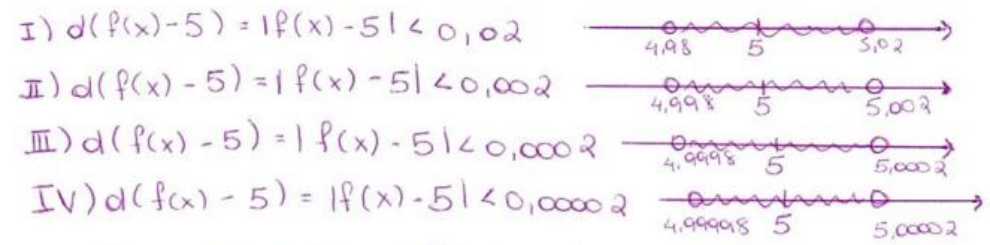
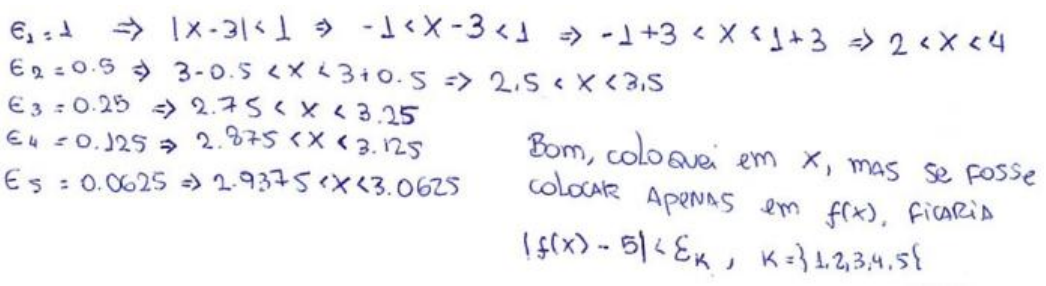
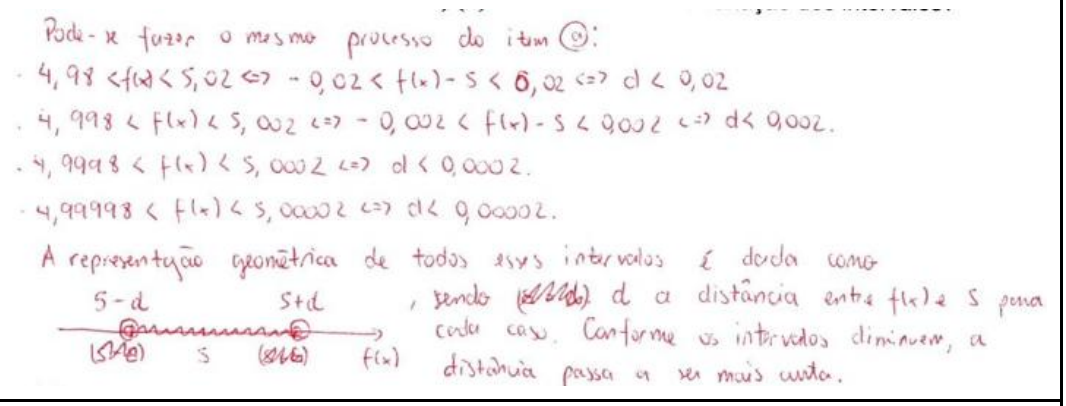
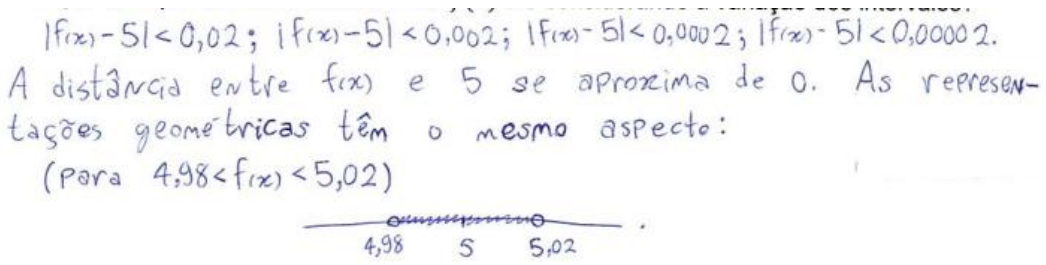
A análise do item (a) da nona atividade permite concluir que os participantes mobilizaram adequadamente os teoremas em ação previstos na análise *a priori*, com destaque para T_1, $T_{2.1}$ e T_6. Houve filiação a conceitos já observados nas sessões anteriores, sem rupturas conceituais relevantes. A estabilidade nos esquemas mobilizados por EL_1, EL_2 e EB_1 reforçam a proposta prevista na TCC e pesquisas de que o trabalho progressivo com situações envolvendo distância contribuiu para o fortalecimento dos invariantes operatórios necessários à compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

7.3.6 9ª atividade - Item (b)

A situação proposta no item (b) da nona atividade buscou fortalecer a compreensão da aproximação de $f(x)$ a um valor L, utilizando intervalos cada vez menores em torno de L, e expressando tais aproximações por meio de notações algébricas e geométricas.

Segue no Quadro 22 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 22 - Resoluções da Atividade 9 item (b)

b) Agora, analogamente ao item a, como você expressaria a distância entre $f(x)$ e 5 para os intervalos $4{,}98 < f(x) < 5{,}02$; $4{,}998 < f(x) < 5{,}002$; $4{,}9998 < f(x) < 5{,}0002$ e $4{,}99998 < f(x) < 5{,}00002$ e faria a representação geométrica de todos esses intervalos? O que você percebe na distância entre $f(x)$ e 5 considerando a variação dos intervalos?	
EL1	
EL2	
EB1	
EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

A análise *a priori* previa que os estudantes mobilizariam a notação de distância para representar situações do tipo $|f(x) - 5| < \epsilon$, compreendendo que a redução dos valores de ϵ corresponde a uma maior precisão na aproximação de $f(x)$ ao número 5. Esperava-se também que, ao realizar as representações geométricas, os estudantes identificassem os intervalos centrados em 5 com raio ϵ, marcando as extremidades e distinguindo corretamente se pertencem ou não ao intervalo, o que foi confirmado nas resoluções do quadro 22.

Na análise das resoluções, observou-se que os quatro participantes mobilizaram invariantes operatórios previstos, teoremas em ação T_1, T_2, $T_{2.1}$ e T_3 e T_6.

EL_1 mobiliza T_6 ao interpretar os intervalos fornecidos no enunciado para a notação $|f(x) - 5| < \epsilon$ e representa geometricamente os intervalos na reta real, com os pontos $4{,}8$, e $5{,}2$ corretamente posicionados e indicados com bolinhas abertas. Essa representação evidencia a mobilização do teorema em ação T_2, que registra o intervalo como um conjunto de pontos centrados no valor de interesse (no caso, 5) e com raio igual a ϵ, e de T_3, ao representar esses intervalos como segmentos de reta. Sua observação de que a distância entre $f(x)$ e 5 diminui conforme os valores de ϵ se tornam menores indica uma importante aproximação à noção de controle da precisão na definição de Limite. Além disso, a mobilização do conceito de distância com o uso da notação algébrica demonstra domínio na mobilização do teorema em ação T_1.

EL_2 também apresenta as desigualdades algébricas corretas, representando os intervalos conforme solicitado, embora sem realizar todas as representações geométricas. No entanto, descreve adequadamente o procedimento que realizaria, o que, associado às suas produções anteriores, indica a compreensão da forma geométrica dos intervalos. Sua justificativa de que os intervalos diminuem e que o ponto 5 pertence aos intervalos é coerente com o desenvolvimento da atividade. Seu comentário de que o valor central pertence ao intervalo demonstra atenção à inclusão ou não das extremidades, mesmo que não tenha desenhado os segmentos. Esta atitude pode indicar a formação de um esquema que relaciona o comportamento algébrico e gráfico das expressões de distância, o que, segundo Vergnaud (1985), constituem elementos importantes, proporcionados pelas situações, que permitirão uma aproximação do significado conceitual, no caso o conceito, pelo sujeito.

EB_1 mantém a estratégia utilizada no item anterior, generalizando o uso da notação algébrica com δ e expressando os intervalos como $5 - \delta < f(x) < 5 + \delta$, mesmo diante de valores específicos de ϵ propostos no item. Sua insistência na generalização evidencia a mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$, e reforça sua tentativa de compreender o conceito de Limite de maneira mais abstrata, sugerindo uma aproximação à estrutura formal da definição. Sua representação geométrica mostra o ponto 5 no centro de um intervalo hachurado, com marcações em $5 - \delta$ e $5 + \delta$, embora não tenha sido possível confirmar se as extremidades foram indicadas como abertas ou fechadas. A ausência de marcação explícita pode ser atribuída a um foco na simetria do intervalo mais do que nos detalhes da notação, o que revela uma compreensão parcial do conceito, mas também é possível que ele tenha marcado os pontos, e depois registrou uma bolinha maior no local, atentando-se de forma posterior.

EB_2, por sua vez, apresenta uma das resoluções mais próximas da formalização. Representa os intervalos por meio de inequações modulares, do tipo $|f(x) - 5| < \epsilon$, com diferentes valores de ϵ, indicando que compreende a notação de distância centrada no ponto 5. Para a representação geométrica, desenha o intervalo hachurado entre os extremos, com o ponto 5 centralizado, similar ao que fez no item anterior. Essa conduta mostra a mobilização de T_1, T_2, $T_{2.1}$ e T_3 e T_6, articulando representações algébricas e geométricas com clareza. Sua afirmação de que a distância entre $f(x)$ e 5 está diminuindo reforça o entendimento do controle de precisão exigido na definição de Limite, mostrando avanços na construção conceitual.

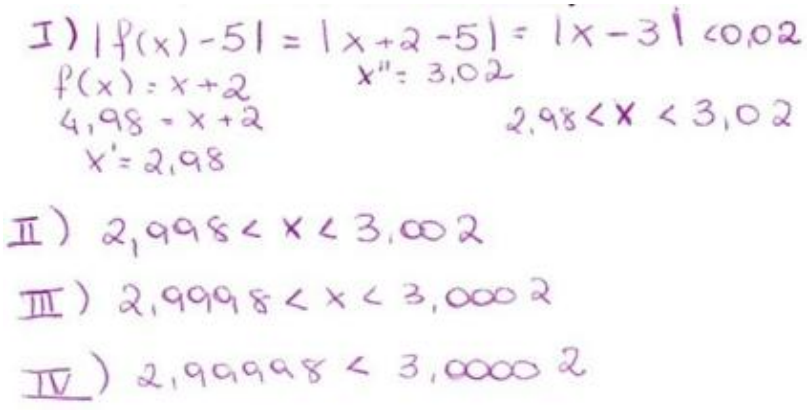
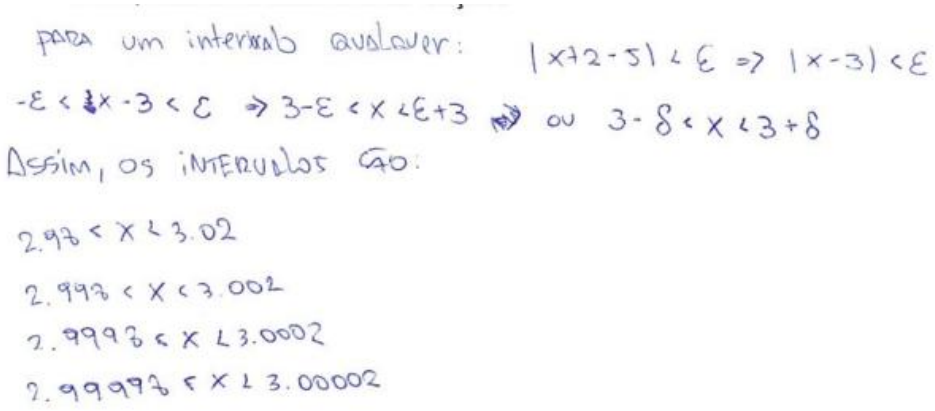
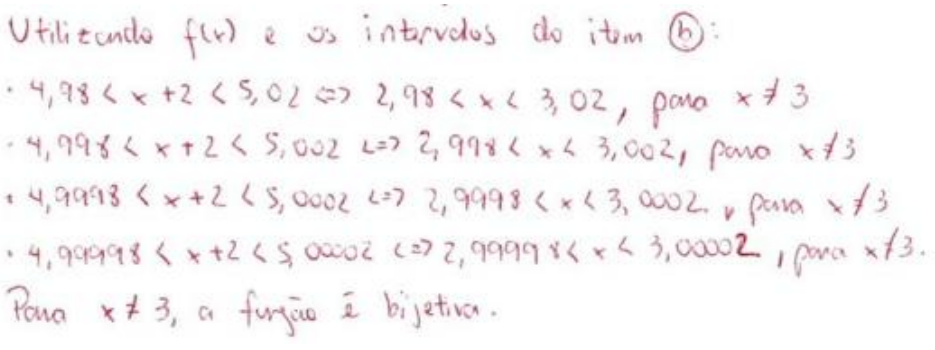
Dessa forma, a análise a posteriori do item (b) da nona atividade confirma as previsões da análise *a priori*, indicando que os sujeitos estão consolidando os invariantes operatórios necessários para compreender a definição formal de Limite de funções, a partir da construção e manipulação de intervalos simétricos com raio ϵ, tanto no plano algébrico quanto no geométrico.

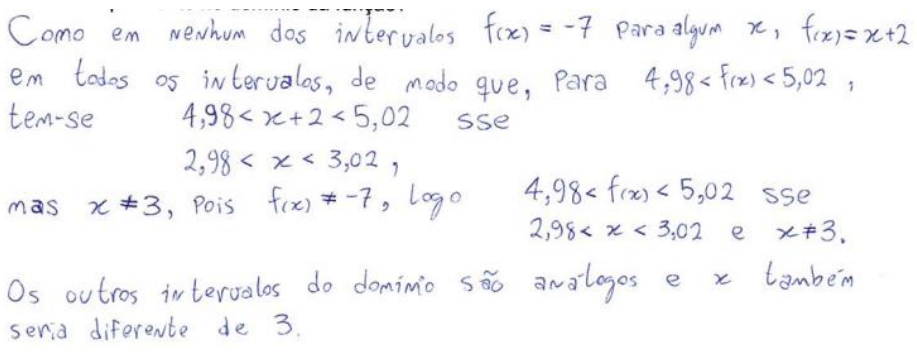
7.3.7 9ª atividade - Item (c)

A análise *a posteriori* do item (c) da nona atividade buscou identificar os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes ao transpor os intervalos previamente estabelecidos na imagem da função para a variável do domínio.

Segue no Quadro 23 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 23 - Resoluções da Atividade 9 item (c)

a) Para cada intervalo na imagem da função encontrado no item anterior, qual o intervalo correspondente no domínio da função?	
EL1	
EL2	
EB1	

EB2	

Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução de EL1 indica a mobilização do teorema em ação T6, previsto na análise *a priori*: “Se um intervalo é centrado em um ponto L e tem uma amplitude ϵ, então ele pode ser expresso na forma $|f(x) - L| < \epsilon$” e substituindo a expressão $x + 2$ por $f(x)$ nas inequações do item (a), conforme previsto *a priori*, e encontra, para cada intervalo, a respectiva expressão na variável x solicitados pela situação.

Ao desenvolver os intervalos para x, o estudante mostra coerência algébrica. Entretanto, não explicita a transição feita em cada subitem, o que limita a observação mais precisa do invariante operatório mobilizado, mas seus resultados são coerentes com a mobilização de T2.1.

EL2 apresenta uma estratégia semelhante à sua dupla EL1, iniciando com a representação algébrica $|f(x) - 5| < \epsilon$, e, colocando esta inequação na forma $3 - \epsilon < x < 3 + \epsilon$. O uso da propriedade algébrica da inequação modular confirma a mobilização do teorema em ação T2.1.

No entanto, há uma troca de variáveis nos registros de EL2, com o uso do parâmetro δ no lugar de ϵ, o que pode indicar confusão na utilização dos parâmetros da definição formal de Limite. Essa troca pode estar relacionada à memória da notação construída nas primeiras sessões, nas quais as distâncias no domínio foram invariavelmente representadas por δ, enquanto ϵ aparecia nas distâncias entre $f(x)$ e o Limite. Também pode ter percebido, no caso dessa função, que poderia tomar $\delta = \epsilon$. Todavia, não temos elementos para aprofundar nessa escolha, é um processo em que o estudante faz filiações com conhecimentos anteriores e com o que vinha lidando nas situações da nossa sequência, mas os valores de extremidade dos intervalos estão corretos, evidenciando domínio progressivo dessa estrutura algébrica. O estudante EB1 mostra domínio algébrico na transformação dos intervalos em $f(x)$ para x, utilizando a relação funcional direta para isolar x. Retoma a estratégia que vem

aplicando desde a atividade 5, mobilizando o teorema em ação $T_{2.1}$ e mostrando clareza na manipulação da inequação modular. Sua mudança de estratégia desde a primeira sessão — quando utilizava a definição de módulo (mobilização de T_8) — para a utilização recorrente da propriedade algébrica evidencia a consolidação da compreensão das relações entre distância, intervalo e função.

Importante destacar que EB_1 anota explicitamente que $x \neq 3$ para todos os intervalos encontrados. Esse registro evidencia a incorporação de um aspecto importante: a exclusão do ponto de descontinuidade do domínio da função em análise, coerente com a definição formal de Limite de uma função em um ponto, em que o valor da função no ponto $x = 3$ não deve interferir na análise do comportamento de $f(x)$ nas vizinhanças desse ponto.

EB_2 inicia sua resolução com um argumento: aponta que, em nenhum dos intervalos dados, o valor de $f(x)$ pode ser igual a 5, considerando a descontinuidade da função no ponto $x = 3$. Esse apontamento revela uma compreensão do comportamento da função como descontínua, exigindo o afastamento do ponto de salto.

A resolução apresentada por EB_2 para o primeiro intervalo mostra a aplicação correta do teorema em ação $T_{2.1}$, mobilizado com segurança. Apesar de não desenvolver os demais intervalos, justifica sua decisão com base na analogia do procedimento realizado para o primeiro caso.

As resoluções do item (c) da nona atividade confirmam a adequação da análise *a priori* quanto à mobilização esperada dos teoremas em ação $T_{2.1}$ e T_6. Todos os estudantes comprovam domínio crescente da relação funcional entre $f(x)$ e x, realizando transformações algébricas consistentes e apropriadas para obter os intervalos em torno de $x = 3$. A mudança de estratégias — da definição do módulo para o uso da propriedade de inequações modulares — reflete uma ruptura ao conceito mobilizado e ocasionado no decorrer do enfrentamento das situações promovidas nas sessões anteriores e nas institucionalizações conduzidas pelo pesquisador.

7.3.8 9ª atividade - Item (d)

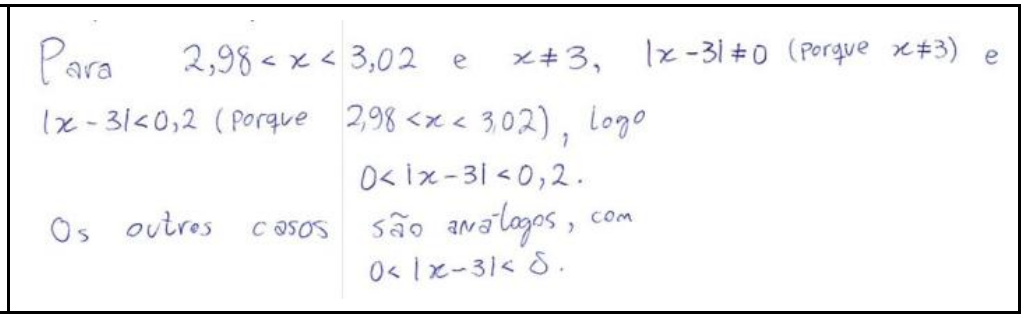
A análise *a posteriori* do item (d) da nona atividade tem como foco a capacidade dos estudantes de transitar entre representações algébricas de intervalos na imagem da função e representações formais da distância entre os elementos do domínio e um

ponto de referência. Neste caso, a atividade propunha que os intervalos previamente obtidos na imagem da função fossem expressos como distâncias entre a variável x e o ponto 3 do domínio.

Segue no Quadro 24 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 24 - Resoluções da Atividade 9 item (d)

c) Como você expressaria os intervalos do item anterior na forma de distância de x a 3?	
EL1	$d(f(x),3) = \lvert f(x) - 3 \rvert < \delta$ I) $d(x,3) = \lvert x-3 \rvert < 0{,}02$ II) $d(x,3) = \lvert x-3 \rvert < 0{,}002$ III) $d(x,3) = \lvert x-3 \rvert < 0{,}0002$ IV) $d(x,3) = \lvert x-3 \rvert < 0{,}00002$
EL2	$d(x,3) = \lvert x-3 \rvert < \varepsilon \delta_x$ onde δ_x seriam os intervalos dados, ou seja, 0.2; 0.02, ...
EB1	De forma parecida às ordenadas, a distância entre x e 3 pode ser dada como $d' = \lvert x-3 \rvert = \lvert 3-x \rvert$ Subtraindo 3 de cada intervalo de (c): • $2{,}98 < x < 3{,}02 \Leftrightarrow -0{,}02 < x-3 < 0{,}02$ $\Leftrightarrow \lvert x-3 \rvert < 0{,}02 \Leftrightarrow d' < 0{,}02$ • $2{,}998 < x < 3{,}002 \Leftrightarrow -0{,}002 < x-3 < 0{,}002$ $\Leftrightarrow \lvert x-3 \rvert < 0{,}002 \Leftrightarrow d' < 0{,}002$. • $2{,}9998 < x < 3{,}0002 \Leftrightarrow \lvert x-3 \rvert < 0{,}0002 \Leftrightarrow d' < 0{,}0002$. • $2{,}99998 < x < 3{,}00002 \Leftrightarrow d' < 0{,}00002$.

EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme apresentado no Quadro 24, todos os participantes mobilizaram o teorema em ação T_1, confirmando a previsão *a priori* para resolução do item: “Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos.” A mobilização desse teorema aparece de forma explícita nas notações adotadas pelos sujeitos na forma $|x - 3| < \epsilon$, em que ϵ varia conforme os valores dos intervalos obtidos anteriormente.

Os estudantes da licenciatura (EL_1 e EL_2) mostram coerência na transposição entre os intervalos construídos no item anterior (item c) e a notação algébrica da distância. EL_1 fez essa transposição de forma direta e correta, generalizando os intervalos na forma $|x - 3| < \epsilon$, para diferentes valores de ϵ. EL_2, embora inicialmente tenha feito a troca dos parâmetros nos registros, como citamos, evidenciou entendimento da estrutura correta da desigualdade de distância.

Já os estudantes do bacharelado também iniciaram com a generalização por meio de $|x - 3| < \epsilon$. EB_1 seguiu estratégia de subtrair o número 3 de cada termo dos intervalos obtidos anteriormente (mobilização de $T_{2.1}$), reproduzindo corretamente a estrutura do intervalo simétrico em torno de 3, ainda que não tenha apresentado todos os cálculos de forma detalhada. EB_2, por sua vez, revelou domínio da representação da distância entre x e 3, registrando corretamente o conceito de distância não nula, já que ele afirma corretamente que os valores de x tomados não incluem o ponto 3.

Em síntese, o enfrentamento deste item confirma a previsão da análise *a priori*, segundo a qual os estudantes deveriam recorrer ao módulo para representar distâncias e transpor intervalos da imagem da função para o domínio, mobilizando os teoremas em ação T_1 e $T_{2.1}$.

7.3.9 9ª atividade - Item (e)

A análise *a posteriori* do item (e) da nona atividade consiste na interpretação dos efeitos provocados pela diminuição do intervalo em torno de $f(x)$ sobre os valores de x, com vistas a antecipar a ideia de controle da aproximação.

Segue no Quadro 25 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 25 - Resoluções da Atividade 9 item (e)

	e) Fazendo a interpretação do resultado nos itens anteriores, qual a relação entre a diminuição do intervalo em torno de $f(x)$ e a proximidade de x em torno 3?
EL1	Os intervalos diminuem proporcionalmente.
EL2	ELES DIMINUEM PROPORCIONALMENTE NESTE CASO.
EB1	A diminuição do intervalo em torno de f(x) faz com que x fique cada vez mais próximo de 3. Entretanto, f(x) não tende x torna mais próximo de 7 ou x se aproxima de 3, mas e sim de 5, pois, para valores próximos de 3, f(x) = x + 2.
EB2	~~Para finalizar~~ Por x ser diferente de 3 em todos os casos, a diminuição do intervalo representa uma aproximação de 3 por x sem que este tome o valor de 3, ou seja, $3 < x < 3+\delta$ ou $3-\delta < x < 3$.

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando as resoluções constantes no quadro 25, é possível constatar que os estudantes da licenciatura, EL1 e EL2, interpretaram a relação entre a redução do intervalo na imagem e a aproximação de x em relação a 3 afirmando que a diminuição da amplitude do intervalo no eixo y implica uma diminuição proporcional no eixo x, embora não tenham quantificado matematicamente essa relação. Essa economia de expressão limita a precisão da inferência, mas é possível perceber a tentativa de articular a noção de controle da aproximação de x com base na variação do intervalo

em $f(x)$, o que sugere a mobilização dos teoremas em ação T_4: "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*" e T_5: "*Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função*". Tal inferência está em conformidade com o previsto na análise *a priori* da atividade, ainda que os registros dos licenciandos não nos deem muitos elementos para evidenciar um aprofundamento algébrico.

No caso dos participantes do curso de bacharelado, EB_1 apresenta uma explicação mais elaborada, registrando que a diminuição do intervalo em torno de $f(x)$ promove maior proximidade de x com o ponto 3. Além disso, EB_1 explicita que, como $f(x) = x + 2$, a aproximação de $f(x)$ a 5 corresponde à aproximação de x a 3, mostrando compreensão da estrutura da função. Essa resolução evidencia uma filiação direta à relação entre domínio e contradomínio no caso da função afim, consolidando a mobilização dos teoremas em ação T_4 e T_5 previstos *a priori* para resolução do item.

A institucionalização realizada na abertura da sessão anterior contribuiu para o fortalecimento de certas filiações observadas, especialmente a mobilização de $T_{2.1}$ por EB_2, que segue aplicando a propriedade da inequação modular para encontrar os intervalos. Essa escolha serviu como referência para a consolidação de estratégias entre os demais participantes, com destaque para o uso da simetria dos intervalos e da notação de distância entre valores no contradomínio da função. A ausência de equívocos conceituais relevantes e o uso sistemático da linguagem matemática esperada neste ponto da sequência reforçam a pertinência das atividades propostas.

Conforme destaca Vergnaud (2009), a compreensão de conceitos depende da mobilização reiterada de invariantes operatórios por meio da ação, e os sujeitos aqui demonstram que estão elaborando e estabilizando representações compatíveis com o esperado para o favorecimento da compreensão da Definição Formal de Limite de uma função em um ponto.

7.3.10 10ª atividade - Item (a)

A análise *a posteriori* do item (a) da décima atividade da sequência didática propõe-se a compreender como os estudantes dos cursos de Licenciatura e de Bacharelado mobilizaram invariantes operatórios e representar, tanto algebricamente

quanto geometricamente, a distância entre $f(x)$ e 5 sendo menor do que um valor positivo ϵ numa função descontínua.

Segue no Quadro 26 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 26 – Resoluções da Atividade 10 item (a)

10. Considere agora a função real $f(x) = \{f(x) = x + 2, se\ x = 3\ -7,\ se\ x \neq 3$, definida para $x \in R$. a) De qual forma você representaria a distância entre $f(x)$ e 5 menor que um valor positivo ϵ de todas as maneiras possíveis, tanto algebricamente quanto geometricamente?	
EL1	$d(f(x),5) = \lvert f(x)-5 \rvert < 0,2$
EL2	$\lvert f(x)-5 \rvert < 0.2$
EB1	A distância entre $f(x)$ e 5 é $d = \lvert f(x)-5 \rvert = \lvert 5-f(x) \rvert$. Subtraindo 5 do intervalo dado, temos: $-0,2 < f(x)-5 < 0,2 \Leftrightarrow \lvert f(x)-5 \rvert < 0,2 \Leftrightarrow d < 0,2$.
EB2	Utilizando a mesma propriedade da atividade anterior. $\lvert f(x)-5 \rvert < 0,2$.

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com a análise *a priori*, esperava-se que os estudantes compreendessem a expressão algébrica $|f(x) - 5| < \epsilon$ como uma representação adequada da condição de distância e que a interpretassem geometricamente por meio de um intervalo aberto em torno de 5, na imagem da função. Previámos ainda a mobilização de teoremas em ação relacionados à compreensão de distância (T_1), sua representação algébrica (T_2, $T_{2.1}$) e geométrica (T_3).

Inicialmente, verifica-se correção quanto à representação geométrica do intervalo com extremidades em $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$ por todos os estudantes analisados, o que estava previsto *a priori* para enfrentamento da situação neste item, e reforça o favorecimento da compreensão do intervalo como “vizinhança” simétrica ao redor de 5.

Os registros de EL_1 e EL_2 (Licenciatura) revelam que ambos representaram adequadamente a condição de distância com a notação de módulo. Ambos hachuraram corretamente o intervalo correspondente e utilizaram o número 5 como centro da representação geométrica. Esses aspectos comprovam a mobilização dos teoremas em ação T_1 (compreensão da distância como diferença absoluta), T_2 (interpretação da desigualdade como intervalo em torno de um ponto) e T_3 (representação geométrica da distância como segmento na reta). A coerência entre a forma algébrica e a representação gráfica sugere que os estudantes foram capazes de mobilizar esquemas pertinentes para lidar com situações do campo conceitual da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

Quanto aos estudantes do bacharelado, EB_1 faz menção explícita à positividade de ϵ, assim como EL_1 e EL_2 e conforme indicava o enunciado, que é importante para a compreensão do contexto associado ao conceito de distância, sendo esta sempre positiva. Ele registra tanto $|f(x) - 5| < \epsilon$ quanto $|5 - f(x)| < \epsilon$, estabelecendo implicitamente a conexão entre a imagem da função e seu domínio.

EB_2 apresenta registros mais econômicos, porém igualmente coerentes com o previsto. A representação algébrica e a construção geométrica condizem com a forma $5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon$, que traduz a propriedade da desigualdade modular, revelando mobilização do teorema em ação $T_{2.1}$. Sua escolha por essa forma algébrica mostra uma preferência por uma estrutura mais direta de resolução, no Quadro 14 vimos que ele já mobilizava essas notações de modo coerente. E, provavelmente influenciado pela institucionalização anterior, na qual houve valorização da representação da desigualdade com três membros, e resolução da atividade 7, item (a), essas filiações foram se consolidando.

Conforme apontam Zuchi (2005) e Abreu (2011), a consolidação da noção de vizinhança como representação da distância controlada entre valores da função e um ponto Limite é crucial para a aprendizagem da definição formal. A resolução deste item pelos participantes sugere que, neste momento da sequência, há mobilização de esquemas necessários para avançar para a formalização, embora com diferenças entre os níveis de explicitação e generalização entre os estudantes de cada curso.

Assim, a análise do item (a) da décima atividade indica que os participantes mobilizaram os teoremas em ação T_1, T_2, $T_{2.1}$ e T_3 (no caso do bacharelado) e T_1, T_2 e T_3 (na licenciatura), conforme previsto na análise *a priori*, e evidencia que a o trabalho com as situações e a institucionalização favoreceu filiações importantes para

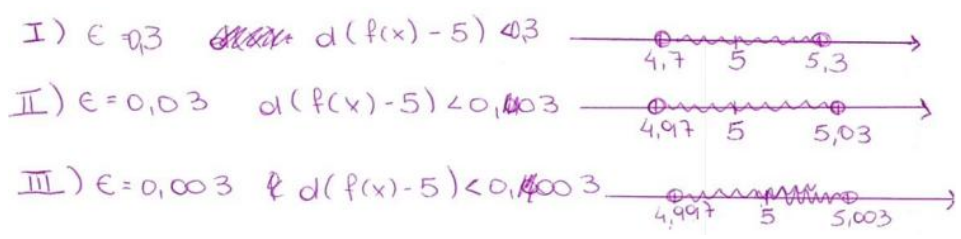
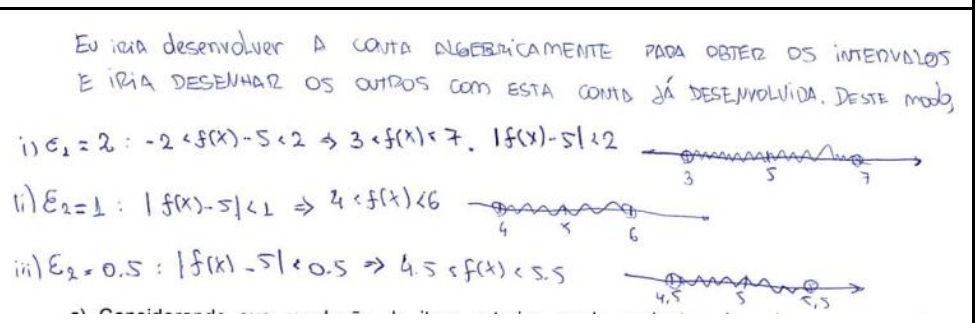
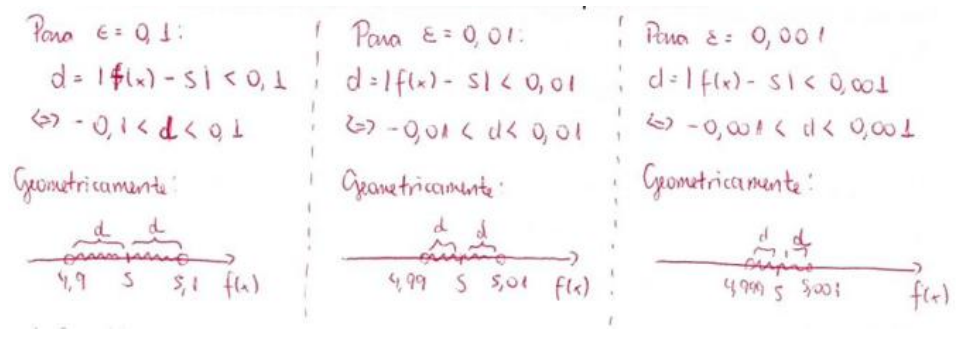
construção de esquemas, especialmente na adoção da propriedade algébrica da desigualdade modular como estratégia dominante entre os participantes.

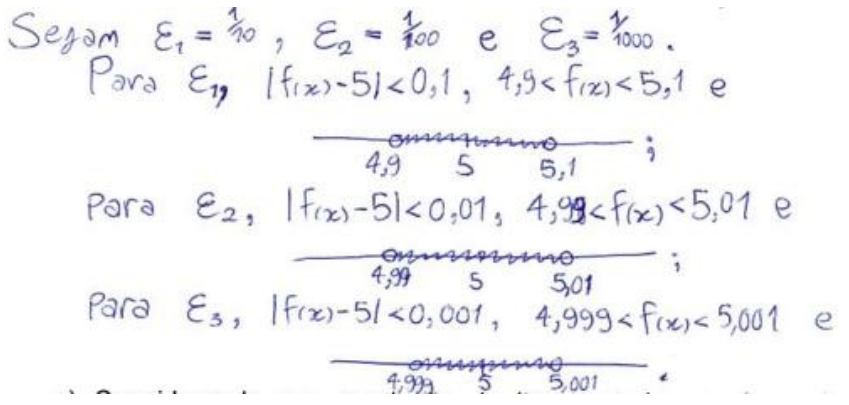
7.3.11 10ª atividade - Item (b)

A análise *a posteriori* do item (b) da décima atividade tem como objetivo identificar e interpretar os invariantes operatórios mobilizados pelos participantes da pesquisa ao enfrentarem a tarefa de atribuir novos valores decrescentes ao parâmetro ϵ e representar a condição de distância entre $f(x)$ e 5 de forma algébrica e geométrica.

Segue no Quadro 27 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 27 - Resoluções da Atividade 10 item (b)

a) Atribuindo 3 valores diferentes e decrescentes para ϵ, no qual você escolha estes valores, como você refaria o item b com estes 3 novos parâmetros?	
EL1	
EL2	
EB1	

EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes da licenciatura, EL_1 e EL_2, realizaram a atividade de forma coerente com o previsto na análise *a priori*. EL_1 escolheu os valores $0{,}3$; $0{,}03$ e $0{,}003$ para ϵ e, para cada um, escreveu a desigualdade $|f(x)-5|<\epsilon$, seguido da representação geométrica correspondente. Já EL_2 registrou na folha, além da escolha dos valores, a utilização da propriedade da inequação modular para transpor $|f(x)-5|<\epsilon$ para a forma algébrica do intervalo, antes de representá-los geometricamente.

Os estudantes EB_1 e EB_2, do bacharelado, apresentaram resoluções análogas. Ambos escolheram três valores decrescentes para ϵ, os representaram na forma algébrica por meio da propriedade da inequação modular, e produziram as representações geométricas com as extremidades abertas, evidenciando a exclusão destes pontos. A única diferença notada foi a preferência de EB_2 pela representação dos valores de ϵ em frações decimais, o que, embora não altere a interpretação matemática, pode indicar familiaridade com esta forma de representação possivelmente trabalhada na disciplina de cálculo.

As ações dos quatro estudantes revelam a mobilização teoremas em ação já previstos na análise *a priori*: T_1: "*Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*", mobilizado ao escrever $|f(x)-5|$; T_2: "*Se a desigualdade* $|x-a|<\delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ", na transcrição da desigualdade modular para a forma de intervalo; $T_{2.1}$: *"Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x-a|<\delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a-\delta<x<\delta+a$", identificada nas resoluções de EL_2 e dos estudantes do bacharelado; T_3: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma*

reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta", evidenciado nas representações geométricas feitas com o número 5 ao centro.

Estas resoluções, provavelmente, foram influenciadas pelas filiações realizadas nas situações vivenciadas, bem como pela institucionalização feita na sessão anterior, na qual foi discutida a equivalência entre o uso da definição do módulo e da propriedade da inequação modular. E, assim, todos os participantes optaram pelo uso da propriedade.

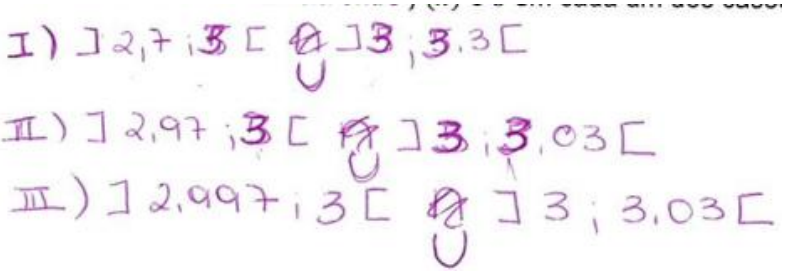
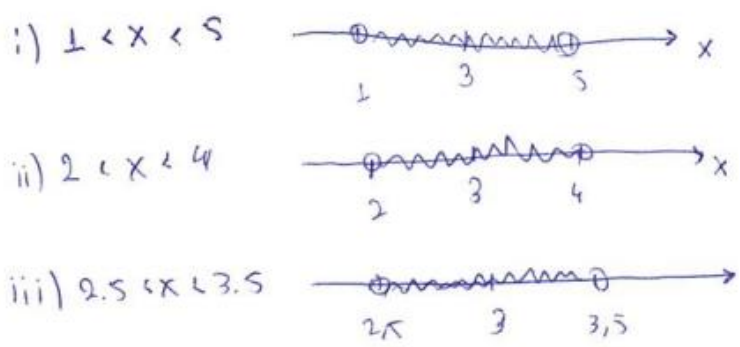
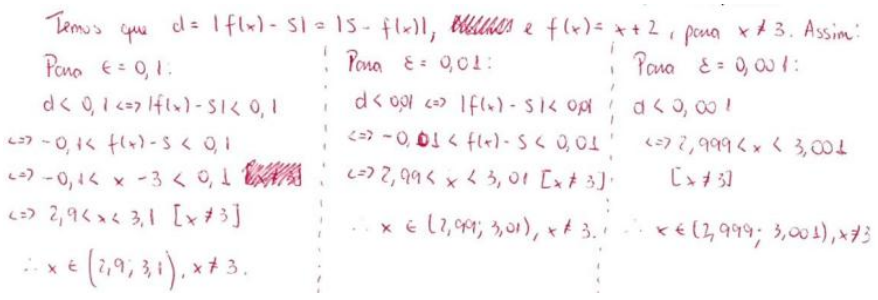
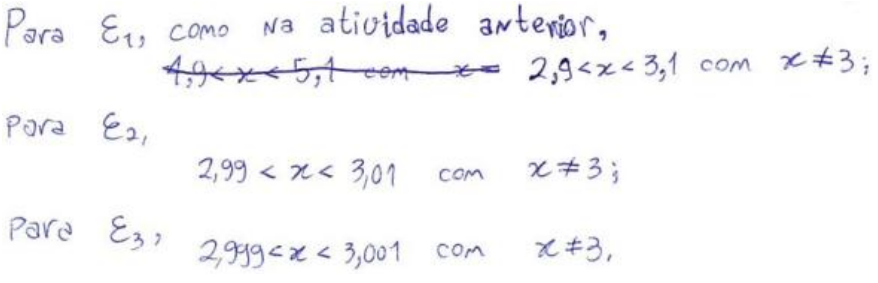
O enfrentamento deste item pelos participantes confirma as previsões da análise *a priori* quanto à mobilização dos teoremas em ação T_1, T_2, $T_{2.1}$ e T_3, e mostra que os estudantes começam a sistematizar suas formas de lidar com situações envolvendo a notação algébrica da distância e sua interpretação geométrica. A precisão das representações, o uso da simetria e a clareza nas delimitações dos intervalos apontam para avanços importantes na construção conceitual exigida para a compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto, embora ainda não se mobilize a noção de generalidade da relação $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$. Essa sistematização evidencia que eles estão fazendo filiações importantes para consolidação de esquemas cada vez mais elaborados e ajustados às demandas conceituais da definição formal.

7.3.12 10ª atividade - Item (c)

A análise *a posteriori* do item (c) da décima atividade, Quadro 28 abaixo, permite observar a mobilização de invariantes operatórios importantes para estabelecer conexões entre as distâncias em torno de $f(x)$ e os intervalos correspondentes na variável x, seguindo o que foi solicitado na atividade.

Quadro 28 - Resoluções da Atividade 10 item (c)

a) Considerando sua resolução do item anterior, quais conjuntos de valores para x satisfazem a distância entre $f(x)$ e 5 em cada um dos casos escolhidos por você para ϵ?

EL_1	
EL_2	
EB_1	
EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

No enfrentamento da situação, EL_1 mostra dificuldade inicial ao registrar os intervalos na variável x, inicialmente confundindo os símbolos de interseção e união entre conjuntos. A rasura e correção do símbolo indicam uma ação de regulação de erro (Vergnaud, 1985), o que mostra sua tentativa de adequação da tarefa. Apesar de não explicitar os cálculos, EL_1 representa corretamente os conjuntos que satisfazem os valores de ϵ, utilizando o recurso da linguagem algébrica com o devido cuidado quanto à exclusão do ponto $x = 3$, o que se justifica pela descontinuidade da função nesse ponto.

A mobilização do teorema em ação T_2: "*Se a desigualdade* $|x - a| < \delta$ *define um intervalo, então esse intervalo é centrado em* a *e tem raio* δ" é evidenciada pela forma como EL_1 constrói os intervalos, reconhecendo a centralidade em $x = 3$ e ajustando a amplitude conforme os valores de ϵ.

EL_2, por sua vez, representa os intervalos corretamente tanto algébrica quanto geometricamente, traçando retas graduadas com as extremidades dos intervalos destacados.

EB_1 generaliza corretamente a desigualdade $|f(x) - 5| < \epsilon$ como $|(x + 2) - 5| < \epsilon$, reconhecendo que $f(x) = x + 2$. Em seguida, resolve a inequação para obter o intervalo na variável x, transcrevendo-a como $|x - 3| < \epsilon$, a partir do qual obtém os intervalos em x. A substituição por valores específicos de ϵ mostra que EB_1 mobiliza os teoremas em ação T_1 — que trata da distância como valor absoluto — e $T_{2.1}$ — "*Se necessitamos desenvolver a inequação* $|x - a| < \delta$*, então devemos transcrevê-la para a forma* $a - \delta < x < \delta + a$".

O cuidado de EB_1 ao excluir o ponto $x = 3$, dado que $f(3) = -7$, mostra que ele interpreta a descontinuidade com a necessidade de coerência na construção do intervalo. EB_2, apesar de não apresentar os cálculos intermediários, obtém os mesmos intervalos que EB_1, o que sugere que mobilizou o mesmo teorema em ação $T_{2.1}$. A ausência do ponto de descontinuidade nos intervalos mostra que ambos os estudantes do bacharelado compreenderam sua influência sobre a validade do intervalo em torno de $x = 3$.

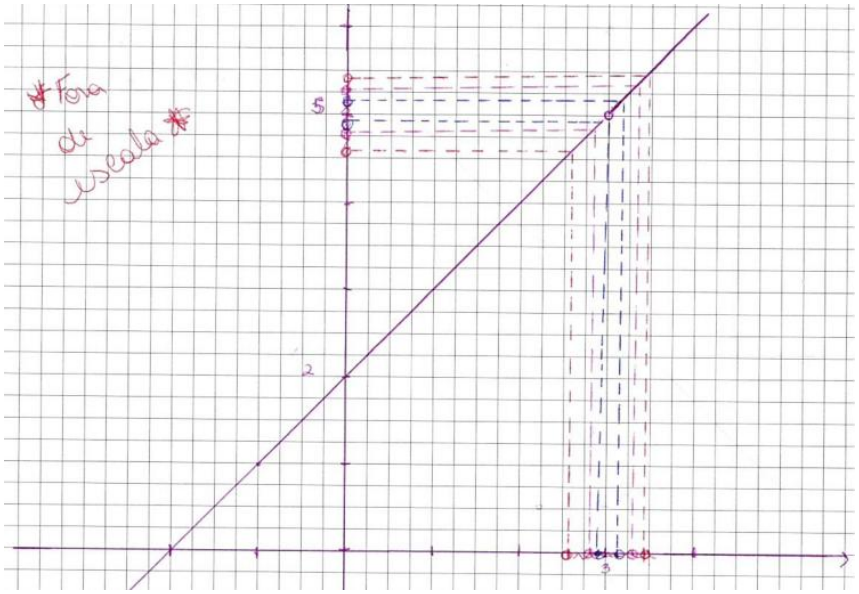
O enfrentamento da tarefa pelos quatro participantes evidencia o favorecimento da compreensão da articulação entre imagem e domínio da função frente a situações envolvendo valores arbitrariamente próximos a um ponto. A mobilização recorrente de T_2, $T_{2.1}$ e a partir de todas as resoluções, é possível constatar também a mobilização de T_5: "*Se houver uma variação em torno de um ponto na imagem de uma função, então essa variação altera correspondentemente o intervalo no domínio da função*" confirmando as previsões da análise *a priori* e mostra como os estudantes passaram a se filiar nas representações mais generalizadas e compactas para expressar a noção de distância em torno de um ponto.

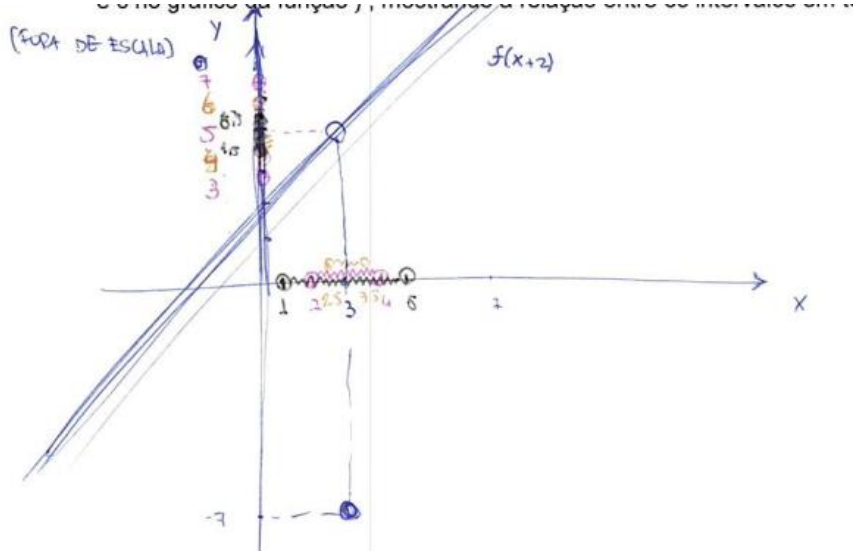
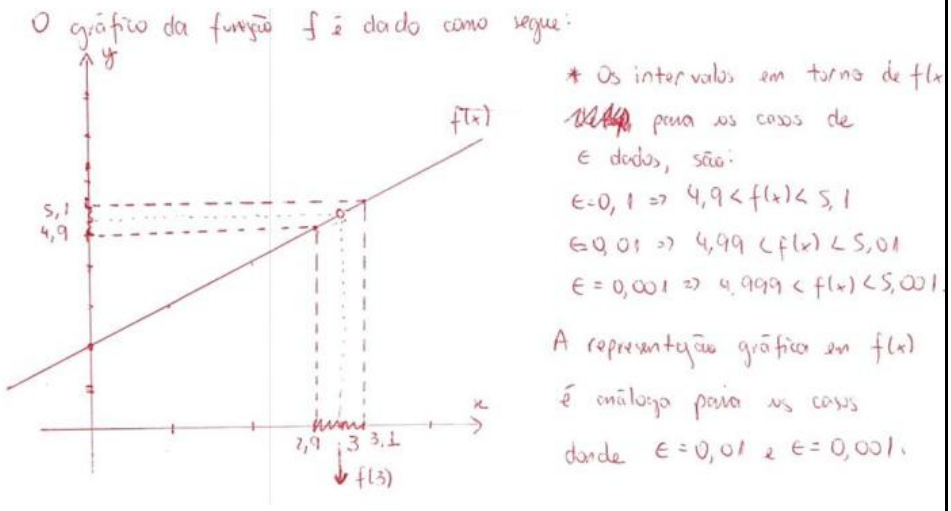
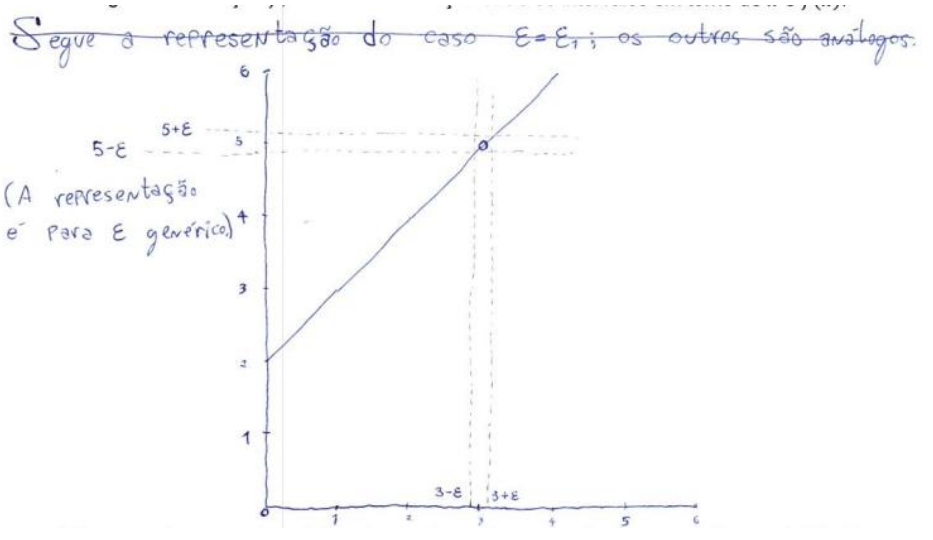
7.3.13 10ª atividade - Item (d)

O item (d) da décima atividade propôs aos estudantes que representassem graficamente, no plano cartesiano, os intervalos encontrados nos itens (b) e (c), estabelecendo a relação entre os intervalos em torno de x e de $f(x)$. Esperava-se que os sujeitos mobilizassem conceitos de função, distância e continuidade, articulando representações geométricas e algébricas no enfrentamento da atividade.

Segue no Quadro 29 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 29- Resoluções da Atividade 10 item (d)

d) Mostre como você faria a representação dos intervalos escolhidos por você nos itens b e c no gráfico da função f, mostrando a relação entre os intervalos em torno de x e $f(x)$.	
EL_1	

EL_2	
EB_1	
EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Conforme registrado no Quadro 29, as duplas dos cursos de Licenciatura e Bacharelado enfrentaram a situação com estratégias similares quanto à interpretação gráfica, embora com distinções quanto ao detalhamento na representação.

Os estudantes EL_1 e EL_2 representaram a função $f(x) = x + 2$ no plano cartesiano, traçando a reta correspondente. Em seguida, hachuraram os intervalos encontrados nos itens anteriores sobre os eixos do plano, demarcando a vizinhança de $x = 3$ no eixo das abscissas e as respectivas imagens no eixo das ordenadas. Ambos também destacaram graficamente a descontinuidade no ponto $x = 3$, sinalizando uma bolinha aberta, o que evidencia sua percepção da diferença entre o comportamento da função nos pontos adjacentes a 3 e seu valor pontual em 3.

Essa resolução revela a mobilização do teorema em ação T_4: "*Se houver uma variação em torno de um ponto no domínio de uma função, então essa variação altera a imagem da função*", modelizado *a priori*. Essa associação entre a variação em x e sua correspondência em $f(x)$ sugere que os estudantes passaram a operar com essa regularidade em seus esquemas no enfrentamento das tarefas da terceira sessão.

Além disso, a articulação entre os sistemas de significantes algébricos (como $2{,}9 < x < 3{,}1$) e geométricos (hachura dos intervalos e identificação visual de pontos abertos e fechados) revelam uma expansão da representação no plano simbólico, como discutido por Vergnaud (1985; 2009), sendo possível constatar a construção de significados (no plano da ação e da inferência) associados à noção de Limite.

Os participantes EB_1 e EB_2 também representaram graficamente a função $f(x) = x + 2$, com EB_1 optando por representar detalhadamente apenas o intervalo associado a $\epsilon = 0{,}1$, mas mostrando ter compreendido a relação análoga com os demais intervalos para $\epsilon = 0{,}01$ e $\epsilon = 0{,}001$. Essa decisão reflete uma forma de otimização da resolução, sem prejuízo conceitual, o que pode indicar uma compreensão da relação entre ϵ e os intervalos em torno de $x = 3$ e $f(x) = 5$. EB_1 também identifica corretamente a descontinuidade no ponto $x = 3$.

EB_2, por sua vez, representa o gráfico no primeiro quadrante, o que limita a interpretação global, mas ainda assim representa corretamente o intervalo com generalização dos parâmetros (utilização de ϵ), evidenciando a mobilização do mesmo teorema em ação T_4. A opção por uma representação mais sintética pode refletir uma filiação à estratégia já mobilizada nas atividades anteriores, o que mostra estabilidade no esquema utilizado.

A resolução dos participantes neste item (d) revela que todos os estudantes mobilizaram corretamente compreenderam a correspondência entre os intervalos no domínio e no contradomínio. A identificação da descontinuidade no ponto $x = 3$ mostra-se coerente com a função utilizada, o que é relevante, pois trata-se de uma função por partes, e tal percepção reforça filiações mais consistentes em relação ao comportamento de funções.

A representação gráfica dos intervalos confirma o domínio parcial da ideia de vizinhança simétrica e sua articulação com as variações da função, reforçando o papel desta atividade no favorecimento da compreensão da definição formal de Limite de uma função em um ponto. A utilização de diferentes sistemas de significantes (geométrico, algébrico e verbal) aponta, conforme Vergnaud (1985, 2009), para a complexificação progressiva dos esquemas dos sujeitos e o avanço da construção conceitual esperada.

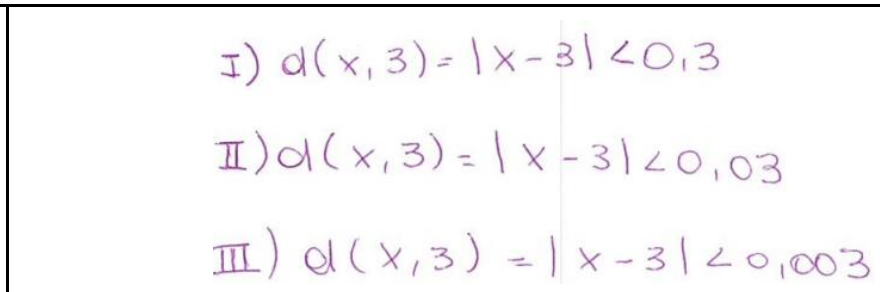
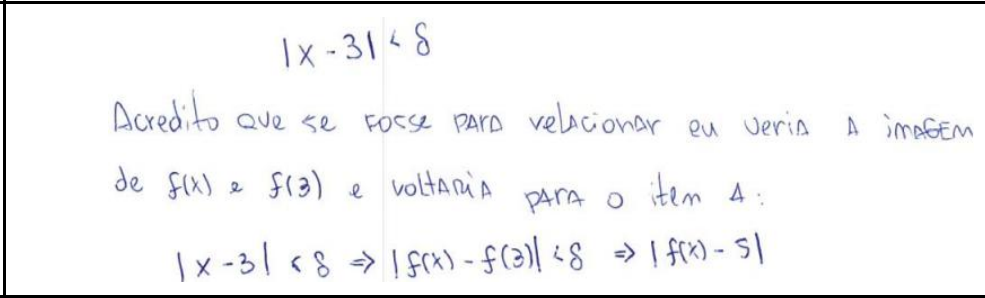
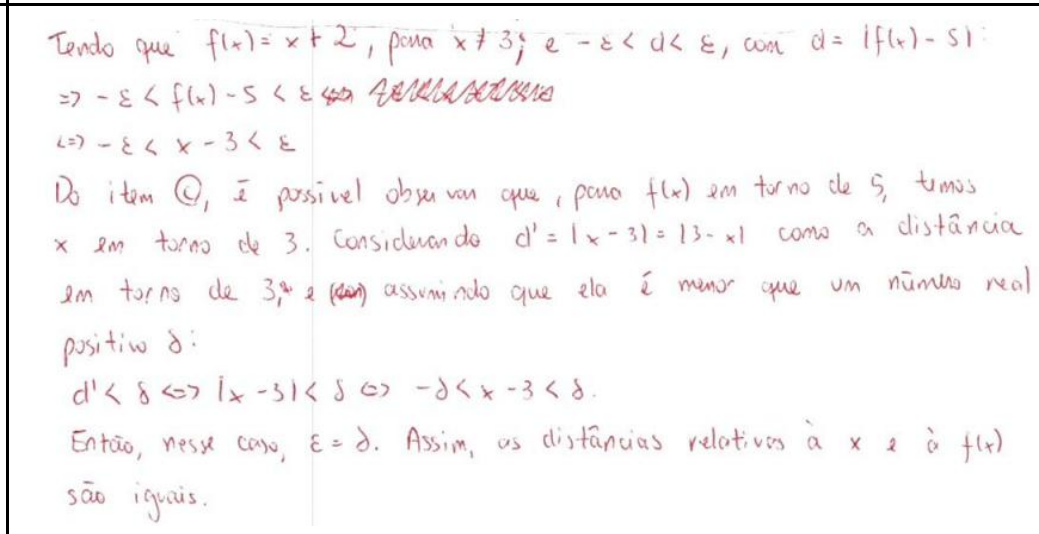
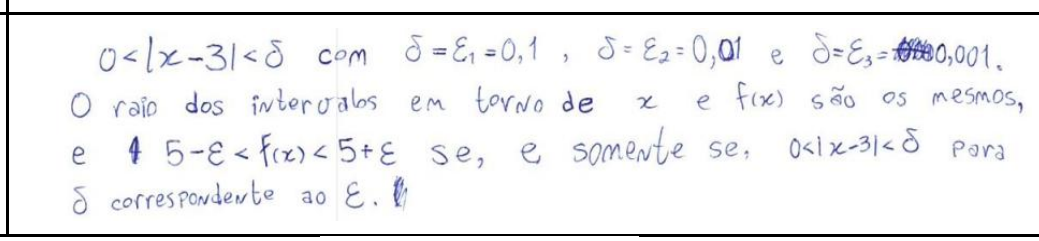
7.3.14 10ª atividade - Item (e)

A análise *a posteriori* do item (e) da décima atividade evidencia avanços na construção de relações essenciais à definição formal de Limite de funções, notadamente a correspondência entre as distâncias nos eixos das abscissas e das ordenadas, formalizadas na notação algébrica envolvendo o módulo. Essa etapa da sequência didática buscava levar os estudantes a generalizar, utilizando um parâmetro genérico ϵ, a representação das distâncias encontradas anteriormente, retomando e aprofundando os conceitos mobilizados nos itens anteriores.

Segue no Quadro 30 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 30 - Resoluções da Atividade 10 item (e)

e) Como você escreveria os intervalos em torno de x encontrados por você na notação de distância com módulo, considerando esta distância menor que um número δ? Como você faria para associar estas distâncias com a expressada por você no item a?

EL_1	
EL_2	
EB_1	
EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

No enfrentamento da situação, observou-se que os estudantes da licenciatura (EL_1 e EL_2) e do bacharelado (EB_1 e EB_2) apresentaram resoluções distintas, mobilizando os teoremas em ação modelizados *a priori* para resolução das situações do item, em especial T_1, $T_{2.1}$, T_4 e T_5. O estudante EL_1, apesar de não mobilizar explicitamente o parâmetro ϵ, retomou os valores utilizados no item (b), representando algebricamente as distâncias entre x e 3. Com isso, mobilizou T_1, ao expressar corretamente a distância entre dois números reais com o uso do módulo, ainda que

não tenha estabelecido uma relação explícita com a distância entre $f(x)$ e 5. Isso indica que, embora reconheça o conceito de distância, ainda não articulou completamente a relação entre os eixos coordenados e os parâmetros envolvidos na definição formal.

Já o estudante EL_2 apresentou uma relação algébrica que envolve o operador de implicação, associando a distância $|f(x) - 5|$ à distância $|x - 3|$. Essa escolha sugere que o participante começa a se apropriar da estrutura lógica da definição formal de Limite, ainda que tenha utilizado a notação $|x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \delta$, com incorreção ao utilizar o parâmetro δ duas vezes. Mesmo assim, observa-se um importante avanço na mobilização da implicação entre distâncias, conforme discutido em Doumbia (2020), que destaca a dificuldade dos estudantes em compreender a relação de dependência entre os parâmetros δ e ϵ. Isso revela a pertinência da proposta destas situações para superar esta dificuldade de compreensão quanto à dependência dos parâmetros envolvidos na definição formal de Limite de funções.

No bacharelado, EB_1 realizou uma resolução mais completa, identificando explicitamente os intervalos em x e $f(x)$, representando as distâncias com módulo e utilizando a notação $|x - 3| < \delta$ e $|f(x) - 5| < \epsilon$. Além disso, EB_1 reconheceu que, para a função $f(x) = x + 2$, essas distâncias são numericamente iguais, mobilizando corretamente $T_{2.1}$, T_4 e T_5 para estabelecer a correspondência entre os parâmetros nos dois eixos.

O estudante EB_2, por sua vez, conclui que $5 - \epsilon < f(x) < 5 + \epsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 3| < \delta$, fazendo uso da equivalência lógica e afirmando que os raios dos intervalos em torno de $x = 3$ e $f(x) = 5$ são os mesmos. Essa compreensão evidencia a consolidação dos teoremas em ação T_4 e T_5 previstos *a priori* para resolução da situação — que relacionam a variação no domínio com a variação na imagem — e também aponta para o desenvolvimento de uma estrutura de raciocínio coerente com a lógica da definição formal de Limite de uma função em um ponto. Ainda que EB_2 não tenha desenvolvido formalmente a implicação na estrutura usual, e tenha considerado só casos em que $\delta = \epsilon$, a noção de simetria entre as distâncias foi corretamente mobilizada.

Dessa forma, o item (e) da décima atividade se revela como culminância de um percurso de construção da noção de distância e sua implicação entre os eixos objetivada na análise *a priori*, estabelecendo as condições para a generalização da

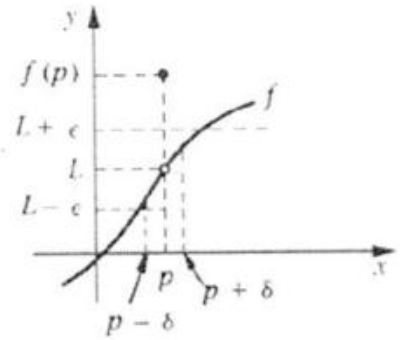
definição formal de Limite de funções. As resoluções indicam que os estudantes, em sua maioria, conseguem estabelecer a correspondência entre os intervalos e representar a situação com o uso adequado da linguagem algébrica e dos significantes matemáticos (módulo, desigualdades e relação de implicação).

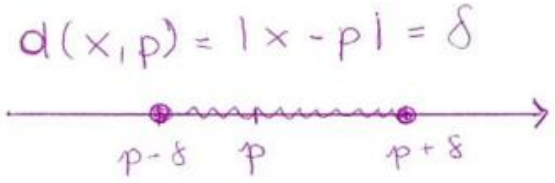
7.3.15 11ª atividade - Item (a)

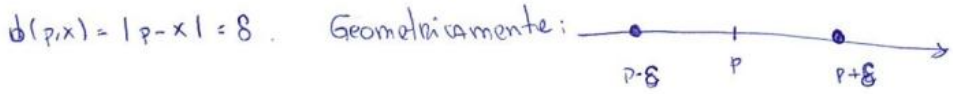
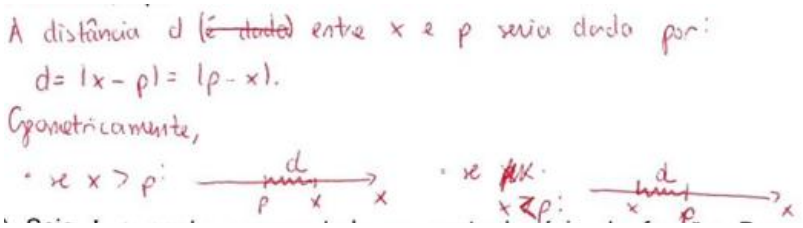
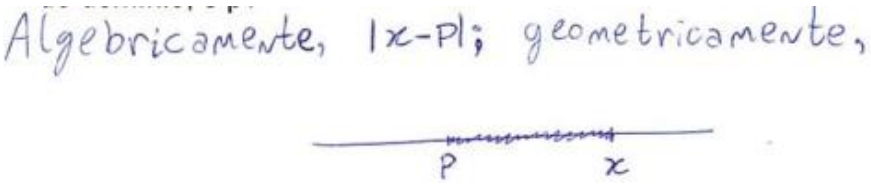
A análise *a posteriori* do item (a) da décima primeira atividade, última atividade da sequência didática, evidencia a consolidação de alguns invariantes operatórios construídos e mobilizados ao longo das sessões anteriores, especialmente os relacionados à noção de distância na reta real. O enunciado propôs aos estudantes que representassem, de todas as formas possíveis, a distância entre um ponto genérico x do domínio da função e um ponto fixo p, com base em um gráfico de função descontínua.

Segue no Quadro 31 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 31 - Resoluções da Atividade 11 item (a)

<table>
<tr><td colspan="2">11. Considere a função real $f: R \to R$, tal que o gráfico da função esteja representado a seguir:
 

(Guidorizzi, pág. 71)
a) Seja p um ponto do domínio de f. Considerando o gráfico apresentado, como você representaria, do todas a maneiras possíveis, a distância entre o ponto genérico x, também do domínio, e p?</td></tr>
<tr><td>EL1</td><td> 
</td></tr>
</table>

EL_2	
EB_1	
EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir das resoluções apresentadas pelos estudantes das duas duplas (EL_1 e EL_2, do curso de Licenciatura, e EB_1 e EB_2, do Bacharelado), constata-se que todos utilizaram a notação algébrica construída nas primeiras atividades da sequência didática por meio dos significantes algébricos na forma $|x - p|$ ou ainda $|p - x|$ para representar a distância entre dois pontos reais.

Diferentemente da dupla de estudantes do curso de bacharelado, EL_1 e EL_2 mobilizaram o teorema em ação T_2, compreendendo que essa desigualdade pode ser interpretada como um intervalo centrado em p.

Já na resolução dos participantes do bacharelado, há uma particularidade na forma como a distância é representada. EB_1, por exemplo, opta por decompor a desigualdade modular em dois casos distintos: $x > p$ e $x < p$, realizando para cada um deles uma representação geométrica diferenciada, o que remete a uma aproximação com a definição de módulo. Ainda assim, a representação geométrica segmentada demonstra domínio sobre o conceito de distância como separação entre pontos e mobilização clara dos teoremas em ação T_1 e T_3. EB_2, por sua vez, representa a distância por meio da notação $|x - p|$, traçando um segmento com extremidades em p e x, embora apenas no caso em que $x > p$, o que pode indicar uma interpretação parcial ou uma simplificação visual.

A comparação com o previsto na análise *a priori* permite validar que a maioria dos estudantes alcançou os objetivos desta atividade, especialmente no que se refere à representação da distância entre dois pontos reais. A ausência de erros notacionais

e o uso recorrente de representações algébricas e geométricas bem construídas indicam que se filiaram à noção de distância, elemento importante para a compreensão da definição formal de ϵ de uma função em um ponto.

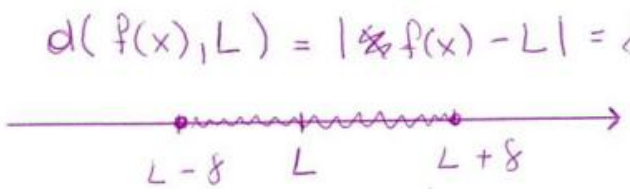
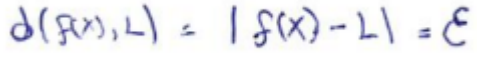
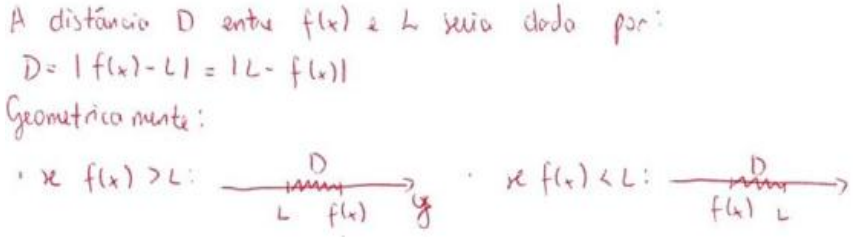
Em síntese, o item (a) da décima primeira atividade mostra estabilidade dos invariantes operatórios ligados à distância na reta, com filiações consistentes às formas algébrica e geométrica construídas ao longo da sequência. As pequenas lacunas de controle observadas são locais, confirmando a adequação da proposta da sequência didática planejada.

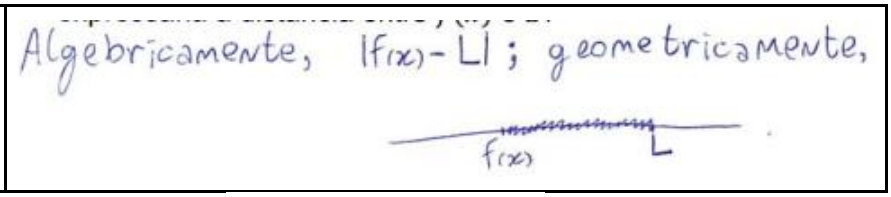
7.3.16 11ª atividade - Item (b)

O item (b) da décima primeira atividade propôs aos estudantes expressar a distância entre $f(x)$ e um ponto genérico L pertencente ao contradomínio da função. Essa situação dá continuidade à análise gráfica da função e à formalização das distâncias envolvidas na definição formal de ϵ, promovendo a articulação entre representações algébricas e geométricas, além de verificar a associação de parâmetros genéricos a essas distâncias, como o ϵ.

Segue no Quadro 32 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 32- Resoluções da Atividade 11 item (b)

b) Seja L o ponto representado no contradomínio da função. De qual forma você expressaria a distância entre $f(x)$ e L?	
EL1	
EL2	
EB1	

EB_2	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na análise *a priori*, previu-se que essa atividade levaria os estudantes a aplicar a noção de distância entre $f(x)$ e um ponto L, associando essa distância ao parâmetro ϵ, fundamental na definição formal de ϵ. Era esperado que os estudantes utilizassem o módulo para expressar tal distância, na forma $|f(x) - L|$, evidenciando o teorema em ação T_1.

A análise das resoluções revela que todos os participantes utilizaram representações algébricas que mobilizam T_1, indicando a consolidação desse invariante operatório desde as primeiras atividades. Contudo, divergências nas representações geométricas e associações aos parâmetros surgem, evidenciando diferentes níveis de compreensão.

A estudante EL_1 expressou corretamente a distância na forma algébrica com módulo, porém incorretamente igualou essa distância ao parâmetro δ, ao invés de ϵ, como seria esperado pela estrutura gráfica da função, em que a distância ocorre no eixo das ordenadas. Esse equívoco compromete a compreensão da relação entre os eixos no contexto da definição formal de Limite de uma função em um ponto. Tal associação inadequada indica um deslocamento na atribuição do parâmetro, que poderá se tornar um problema se persistir nas próximas atividades, como discutido por Doumbia (2020), ao apontar que a ausência de trabalho prévio com a ideia de controle por ϵ gera confusões no momento de sua introdução formal.

Apesar disso, EL_1 também mobilizou o teorema em ação T_2, previsto *a priori*. Sua representação geométrica mostra essa compreensão parcial, embora sem indicar abertura nas extremidades, o que pode indicar uma concepção ainda incipiente sobre a exclusão dos pontos de borda do intervalo definido, ou falta de atenção, pois em outras atividades da sequência, no Quadro 13, por exemplo, ele levou isso em consideração.

A estudante EL_2, por outro lado, expressou adequadamente a distância entre $f(x)$ e L como $|f(x) - L| = \epsilon$, associando corretamente o parâmetro do contradomínio, ainda que tenha deixado de produzir representação geométrica. Sua

resolução evidencia mobilização de T_1, embora sem indícios de outros teoremas em ação, o que limita o aprofundamento da análise, mas confirma a coerência da construção dos significantes algébricos e sua relação com o gráfico.

O estudante EB_1 representou a distância algebricamente e, na parte geométrica, utilizou uma abordagem criteriosa: separou a análise em dois casos, conforme a posição de $f(x)$ em relação a L, traçando segmentos para representar distância. Essa ação mostra mobilização tanto de T_1 quanto de T_3: "*Se queremos representar geometricamente a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos visualizar essa distância como um segmento na reta*". A divisão por casos também pode refletir ainda uma filiação ao teorema em ação T_8, associado ao uso da definição formal do módulo.

Já o estudante EB_2 representou corretamente a expressão $|f(x) - L|$ e indicou graficamente o segmento associado, mas desenhou apenas o lado esquerdo da simetria, o que pode sugerir uma compreensão parcial ou limitada da simetria do intervalo. Ainda assim, também mobilizou os teoremas T_1 e T_3, este último parcialmente.

Essa atividade cumpriu o papel previsto na análise *a priori*, proporcionando situações que exigem a generalização do conceito de distância entre a imagem da função e um valor Limite, e favorecendo o trânsito entre os eixos do gráfico. A institucionalização anterior à sessão também colaborou para a retomada da associação entre os parâmetros e os intervalos relacionados.

A maior dificuldade observada está na distinção e associação correta dos parâmetros ϵ e δ, como no caso de EL_1. Isso reforça apontamentos de autores como Reis (2001) e Gontijo e Fontes (2022) sobre o desafio da coordenação entre representações algébricas e geométricas e a compreensão dos parâmetros.

A análise também evidencia que, embora todos os participantes tenham consolidado T_1, apenas alguns mostraram domínio claro de T_3, sendo essa atividade um ponto-chave para observar tal desenvolvimento.

7.3.16 11ª atividade - Item (c)

Segue no Quadro 33 as resoluções dessa atividade pelos estudantes da licenciatura e do bacharelado.

Quadro 33- Resoluções da Atividade 11 item (c)

a) Você relacionaria as distâncias dos itens a e b? Se sim, de qual forma?	
EL1	Sim, a distância $d(f(x))$ está em função da distância de x.
EL2	Sim. $f(p-\delta) = L-\epsilon$ e $f(p+\delta) = L+\epsilon$ Ou seja, posso colocar o intervalo do domínio e achar sua respectiva no contradomínio, Apesar de que NÃO parece nesto gráfico, então talvez NÃO seja isso.
EB1	Seria possível expressar a distância D em termos da distância d, pois $f(x)$ é uma função de x.
EB2	Sim. Se $0<\|x-p\|<\delta$, então $\|f(x)-L\|<\epsilon$ (nesse caso, a recíproca também vale).

Fonte: Dados da pesquisa.

EL1 e EB1 identificam que a distância no eixo das ordenadas ($|f(x) - L|$) está em função da distância no eixo das abscissas ($|x - p|$), ou seja, reconhecem que a variação no domínio impacta a variação no contradomínio, mesmo sem recorrerem à notação formal.

EL2 também identifica essa relação, realizando o cálculo das imagens para justificar sua afirmação, embora demonstre insegurança na identificação exata da imagem da função no gráfico, indicando que as filiações que vem realizando em seus esquemas estão em processo de construções, com idas e vindas, conforme vem enfrentando as situações.

EB2, por sua vez, utiliza diretamente a notação formal da definição de Limite, registrando a implicação "Se $0 < |x - p| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$" e afirmando que a recíproca também vale.

A análise deste item (c) confirma que os estudantes avançaram na construção de alguns elementos conceituais importantes para compreender a definição formal de Limite de uma função em um ponto. A maioria já reconhece que há uma dependência entre a variação no domínio e a variação na imagem, mesmo na ausência de uma lei

explícita da função. A mobilização de representações algébricas e gráficas reforça esse avanço.

O uso da notação formal por EB_2, mesmo que pontual, revela um grau elevado de formalização e maturidade conceitual. Essa expressão da implicação lógica sinaliza que os estudantes estão se aproximando do momento de institucionalização da definição formal.

Nas últimas atividades, especialmente na Atividade 11, observa-se mobilização de T_4 e T_5, com destaque para a consolidação da ideia de controle da variação de $f(x)$ a partir de um controle sobre a variação de x, conforme previsto *a priori* para enfrentamento desta situação.

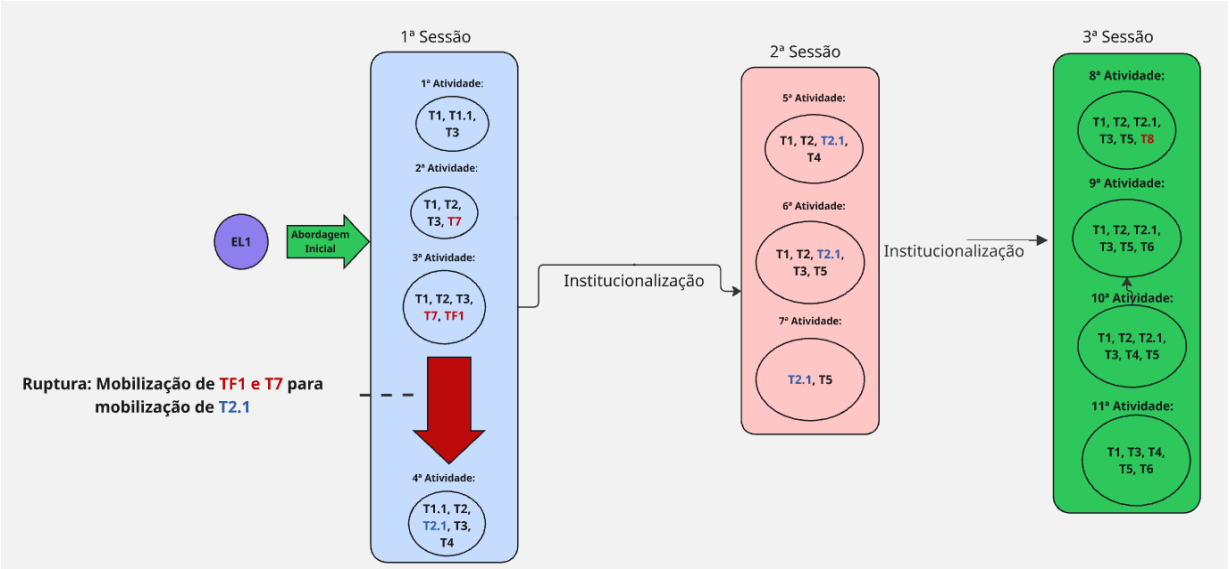
A notação algébrica passa a ser mais fluida e os gráficos passam a ser utilizados como meio de verificação e validação das expressões algébricas, estabelecendo um trânsito entre diferentes significantes (na linguagem de Vergnaud) associados ao conceito de Limite. Desse modo, a terceira sessão da sequência didática teve papel fundamental na consolidação de esquemas ligados à noção de distância e à articulação entre os pares (ϵ , δ). Um aspecto importante, destacado por Vergnaud, é o de que esses esquemas foram construídos por meio das atividades da sequência, ou seja, eles podem ser mobilizados por esses estudantes para novas situações em que eles identifiquem similaridade com o que foi trabalhado nesta sequência didática, contribuindo assim para aprofundamento desse campo conceitual envolvido na definição formal de Limite de funções.

A seguir, apresentaremos diagramas a fim de resumir o percurso dos estudantes quantos aos teoremas em ação mobilizados no decorrer do enfrentamento das situações previstas na sequência didática concebida para esta pesquisa, identificando as filiações e rupturas neste processo.

8 ANÁLISE DO PERCURSO DOS ESTUDANTES

A análise do percurso dos quatro participantes permitiu observar a complexidade envolvida na construção dos invariantes operatórios necessários à compreensão de elementos envolvidos na definição formal de Limite de uma função em um ponto. Ao longo da sequência didática, foram identificadas filiações distintas, e também equívocos pontuais, que revelam não apenas as estratégias adotadas pelos estudantes, mas também as dificuldades enfrentadas.

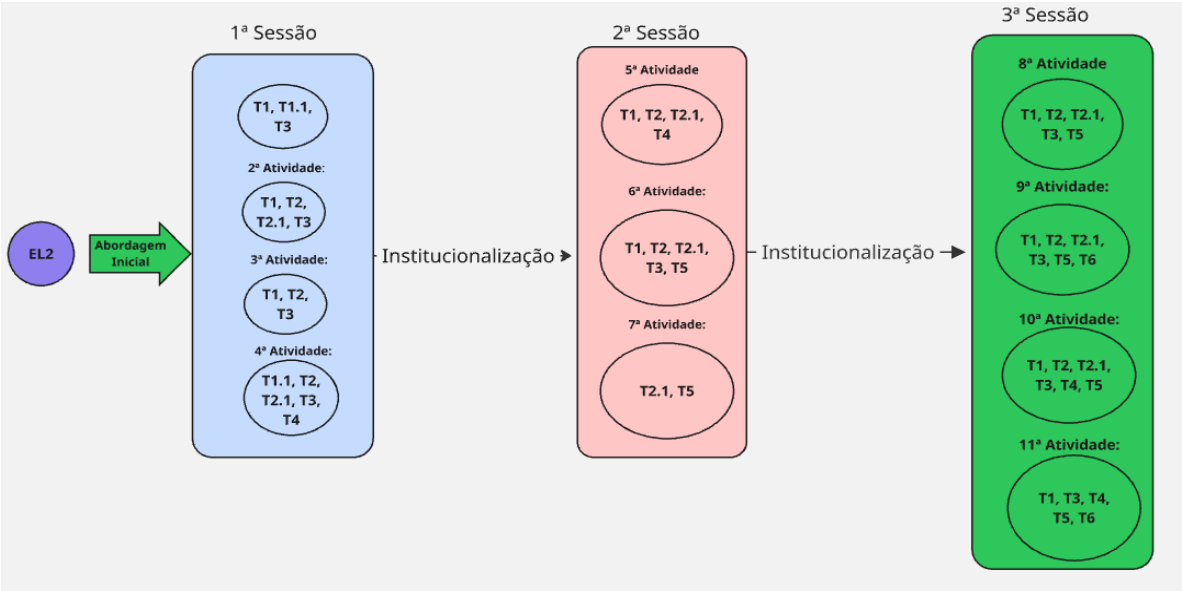
Figura 15 - PERCURSO DO ESTUDANTE EL_1



Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 15 evidencia um percurso marcado por avanços acompanhados de momentos de dificuldade, principalmente em relação ao desenvolvimento de inequações modulares, em que foi possível modelizar um teorema em ação falso não previsto *a priori*, mas posteriormente corrigido pelo próprio participante, o que já comentado nesta pesquisa, pode ter sido influenciado pela resolução de sua dupla, o qual segue diagrama do percurso a seguir.

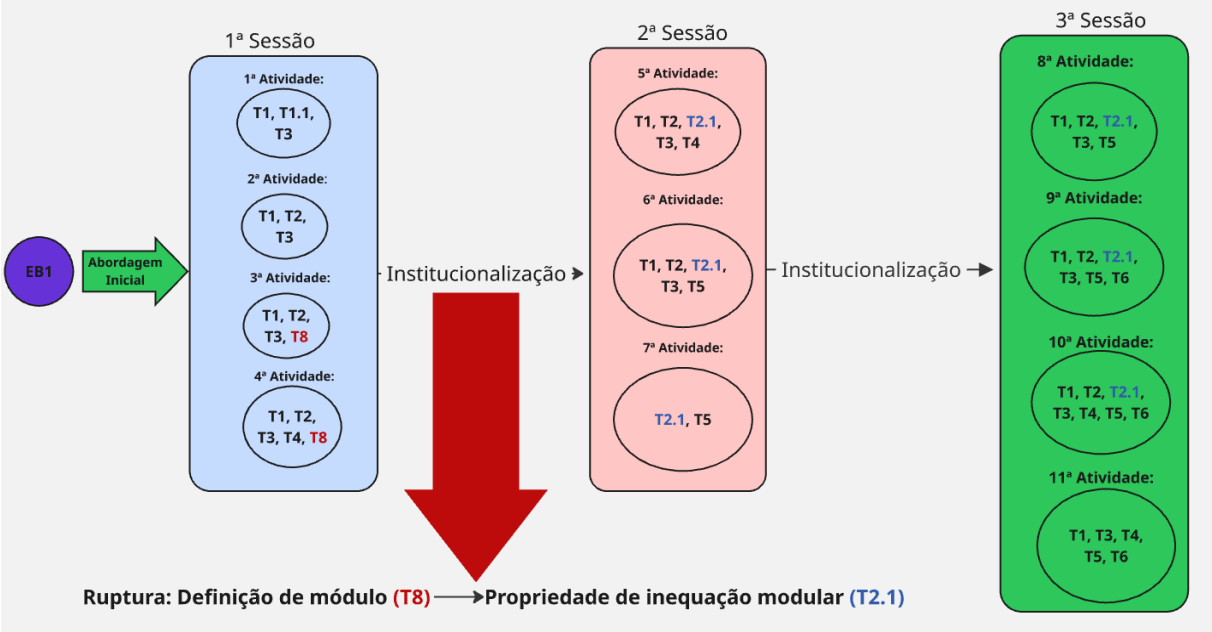
Figura 16 - PERCURSO DO ESTUDANTE EL_2



Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 16, do estudante EL_2, mostra um caminho mais estável, sem identificação de rupturas.

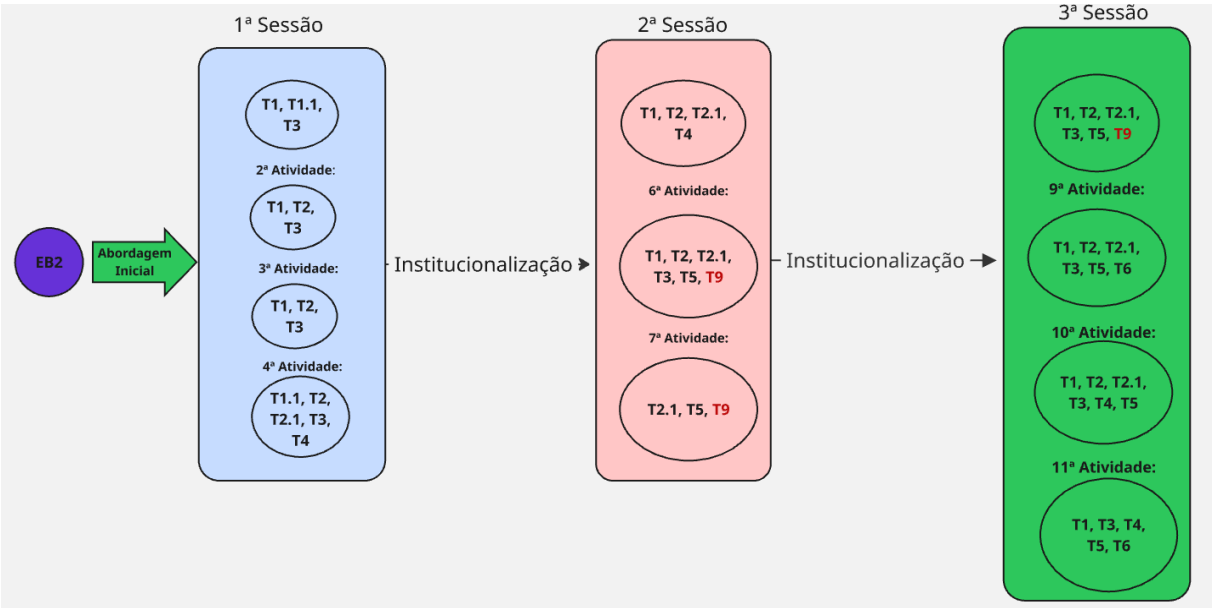
Figura 17 - PERCURSO DO ESTUDANTE EB_1



Fonte: Elaborado pelo autor

Já a figura 17, referente ao estudante EB_1, revela um percurso caracterizado pelo uso precoce da definição formal do módulo, o que constituiu uma filiação distinta dos demais estudantes analisados, e lhe permitiu resolver situações por meio da separação em casos, ainda que com risco de perda da melhor compreensão da simetria presente nas representações geométricas dos intervalos.

Figura 18 - PERCURSO DO ESTUDANTE EB_2



Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 18, referente ao percurso de EB_2, revela uma trajetória marcada pela consistência no uso da propriedade da desigualdade modular, permitindo um trânsito mais direto entre representações algébricas e geométricas. A partir da sexta atividade, entretanto, o estudante estabeleceu uma filiação adicional com o conceito de função inversa para justificar relações entre intervalos nos eixos das abscissas e das ordenadas. Embora essa estratégia tenha demonstrado criatividade e domínio conceitual, ela pode não favorecer plenamente a aprendizagem da definição formal de limite de uma função, uma vez que a mobilização de T_9 não possui validade universal, dado que nem todas as funções são invertíveis. Essa escolha de EB_2 evidencia como diferentes filiações podem se consolidar a partir das situações enfrentadas, mas também aponta para a necessidade de mediação e proposta de outras situações que destaquem as condições de aplicabilidade de cada esquema.

Observa-se na figura 17, o percurso de EB_1 que se destacou pela coerência e constância na mobilização de invariantes operatórios consistentes com a estrutura da definição formal após a ruptura identificada na passagem da primeira para a segunda sessão da experimentação. Todavia, esse rompimento não parece estável, pois na última atividade vimos indícios de uma filiação com algo próximo ao teorema T_8, indicando como algumas filiações podem ser fortes, e serem retomadas em outras situações similares. Enquanto isso, na figura 18, EB_2 apresentou hesitações iniciais, mas avançou consideravelmente ao final da terceira sessão. Já os estudantes EL_1

(figura 15) e EL_2 (figura 16), embora tenham mostrado inicialmente dificuldades com a transição entre representações e com a estrutura lógica dos quantificadores, evidenciaram progressos relevantes, especialmente no reconhecimento da relação entre os parâmetros e no uso da linguagem algébrica para expressar desigualdades com associação à respectiva representação geométrica.

Esses percursos, distintos entre si, reforçam a importância de um trabalho que considere a mobilização de diferentes invariantes operatórios a fim de contribuir para a compreensão da estrutura da definição formal de Limite de uma função em um ponto.

9 CONCLUSÃO

Um dos nossos objetivos nessa pesquisa foi identificar e analisar teoremas em ação mobilizados no enfrentamento das situações concebidas, e a análise dos dados permitiu identificar um conjunto de teoremas em ação modelizados *a priori* (T_1, $T_{1.1}$, T_2, $T_{2.1}$, T_3, T_4, T_5 e T_6), bem como outros modelizados *a posteriori* (T_7, T_8, T_9 e TF_1), a partir das resoluções dos estudantes, considerando a regularidade das estratégias e argumentações utilizadas, conforme proposto por Vergnaud (1996). O trabalho revelou que alguns teoremas em ação previstos na análise *a priori* foram confirmados ao longo da experimentação, especialmente os relacionados à construção da noção de distância, com destaque para T_1 (distância como valor absoluto da diferença entre dois pontos) e T_2 (interpretação geométrica de inequações envolvendo distância), que foram mobilizados desde a primeira sessão.

No decorrer das atividades, observou-se que os participantes, em especial EB_1 e EB_2, estabeleceram filiações com formas de tratamento mais formais ao desenvolver inequações modulares utilizando a definição formal do módulo, conforme modelizado em T_8. Essa estratégia, embora correta matematicamente, foi confrontada com abordagens que favoreciam a visualização geométrica e simétrica dos intervalos, como no caso da propriedade algébrica diretamente expressa em $T_{2.1}$. A mobilização de T_8 por EB_1, revelou filiações com o ensino tradicional do Cálculo Diferencial e Integral, conforme apontado em pesquisas, que evidencia a dificuldade dos estudantes em transitar entre representações algébricas e geométricas, e a tendência à utilização de procedimentos formais sem necessariamente compreendê-los conceitualmente.

Ao longo da segunda e terceira sessões, os estudantes passaram a articular progressivamente os parâmetros δ e ϵ, estabelecendo relações entre os intervalos no domínio e na imagem da função. A mobilização do teorema em ação T_5 (variação na imagem provoca variação no domínio), inicialmente modelizado *a priori* e posteriormente efetivado nas resoluções da oitava e décima atividades, foi central para que os participantes avançassem na compreensão da lógica condicional presente na definição formal de Limite. Além disso, observou-se uma tentativa de generalização do controle da aproximação por parte dos estudantes, o que revela o favorecimento da compreensão de conceitos fundamentais para a definição formal.

A presença de teoremas em ação falsos, como TF_1 — em que a desigualdade modular foi desenvolvida com erro de sinal — aponta a necessidade de mediações mais precisas ao longo do processo de aprendizagem, como destacado por Doumbia (2020), que também ressalta a importância de trabalhar previamente com os conceitos de distância, aproximação e controle. A partir das análises realizadas, observa-se que, mesmo com dificuldades iniciais, os estudantes avançaram consideravelmente na compreensão dos parâmetros ϵ e δ, assim como na visualização e representação de intervalos simétricos em torno de pontos do domínio e da imagem da função.

As regularidades observadas no comportamento dos estudantes frente às situações propostas indicam que os invariantes operatórios mobilizados são fortemente influenciados pela forma como a noção de distância é abordada e institucionalizada. O percurso permitiu verificar que a construção progressiva da compreensão da definição formal de Limite exige o enfrentamento de uma variedade de situações organizadas de forma articulada, com base no campo conceitual envolvido, indicando também a pertinência da TCC para a pesquisa.

Como recomendação para investigações futuras, sugere-se a ampliação deste estudo com a introdução de funções que apresentem descontinuidades, assíntotas e comportamentos não lineares (como funções racionais e irracionais, trigonométricas, polinomiais de graus diversos, por partes, exponenciais, logarítmicas e até a composição destas funções), o que pode favorecer a construção de novos esquemas, propiciando filiações e rupturas importantes, além de evidenciar outras dificuldades que podem surgir quando os estudantes enfrentam situações com maior grau de dificuldade de construção gráfica. Também se recomenda o aumento no número de sessões da sequência didática, a fim de acompanhar com mais profundidade o desenvolvimento das representações e estratégias dos participantes.

Conclui-se, assim, que a sequência didática concebida e aplicada nesta pesquisa foi eficaz no que se propôs: promover situações que permitissem a modelização de teoremas em ação, bem como de filiações, relacionados a elementos envolvidos na definição formal de Limite de uma função em um ponto, oferecendo, assim, subsídios importantes para o processo de favorecimento da aprendizagem de um conceito considerado de difícil compreensão numa disciplina tão importante para a formação do futuro professor e do bacharel em Matemática.

REFERÊNCIAS

ABREU, O. H. Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I. 2011. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2449. Acesso em: 28 abr. 2025.

AMORIM, L. I. F. A (re)construção do conceito de Limite do Cálculo para a Análise: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal do Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/items/186c7763-df16-4dfe-a3a9-75778787eae0. Acesso em: 01 ago. 2025.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 9, n. 3, p. 193-217, 1988.

ARTIGUE, M. Didactical design in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, v. 15, n. 1, p. 7-13, 1995.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: DOUADY, R.; MERCIER, A. *Recherches en didactique des mathématiques*, v. 16, n. 3, p. 5-42, 1996.

ARTIGUE, M. Teaching and learning calculus: What can be learned from educational research? In: *CBMS Issues in Mathematics Education*, v. 8, p. 1-15, 2000.

ARTIGUE, M. *Epistemologia e Didática*. In: BRUN, J. (Org.). **Didática da Matemática**. Lisboa: Instituto Piaget, 1990. p. 195–219.

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 5, n. 3, p. 245–274, 2000.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de Matemática. No prelo.

BLOCH I. L'enseignement de l'analyse : de la limite à la dérivée et au EDO, questions épistémologiques et didactiques. L'école d'été de didactique des mathématiques, XVIII, 2017, Paris. In Actes de la 18ème école d'été de didactiques des mathématiques. Editions La pensée sauvage, v. 1-2, 2019, p. 89-112.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. *Teoria das Situações Didáticas: Didática da Matemática, Ciências Cognitivas e Epistemologia*. Campinas: Autores Associados, 1997.

BURIGATO, S. M. M. S.; RACHIDI, M. Uma proposta para introdução do conceito de limite de funções reais. 2021. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/24067/. Acesso em: 28 abr. 2025.

BURIGATO, S. M. M. S.; RACHIDI, M.; MONGELI, M. C. J. G. *Conceitos básicos para a introdução ao Cálculo Diferencial e Integral*. 2023. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/bitstream/123456789/6092/1/CONCEITOS_B%C3%81SICOS_PARA_INTRODU%C3%87%C3%83O_AO_CALCULO.pdf. Acesso em: 28 abr. 2025.

BURIGATO, S. M. M. S. Um estudo sobre a aprendizagem do conceito de limite de função por estudantes nos contextos Brasil e França. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2019. Disponível em: https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/6246. Acesso em 01/08/2025.

BROUSSEAU, G. Ingéniere didactique. D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet : 1982.

CARVALHO, O. A. A noção de limite: um estudo da organização didática de um percurso formativo digital. 2022. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/35485. Acesso em: 28 abr. 2025.

Chevallard Y. La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado. La Pensée Sauvage, Argentina. (1991).

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (ed.). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Springer, 1991. p. 153–166.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. Tese (Doctorat de Troiseme Cycle de Mathematiques Pures) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, 1983.

COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 621 p.

DOUMBIA, C. O. Um modelo didático de referência para a construção e a atualização do conhecimento sobre a noção de limite no Mali. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/31999/1/Tese%20completa%20com%20ficha%20catalografica%20Cheick%20Oumar%20Doumbia%202020.pdf. Acesso em: 28 abr. 2025.

FERNANDES, J. A. N. *Ecologia do Saber: o ensino de limite em um curso de engenharia*. 2015. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém.

FONSECA, J. J. S. *Metodologia da pesquisa científica*. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

FONTES, L. S.; GONTIJO, C. H. O ensino de cálculo nas universidades brasileiras e a compreensão do conceito de limite. 2022. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/4242. Acesso em: 30 jun. 2025.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo. 5 ed., vol. 1, Rio de Janeiro: LTC, 2012.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo. 6 ed., vol. 1, Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HENRIQUES, A. Saberes universitários e as suas relações na educação básica: uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias. Ibicaraí: Via Litterarum, 2019.

MATEUS, P. *Cálculo Diferencial e Integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica*. 2006. 188 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, v. 2, p. 12, 1978. Disponível em: https://share.google/5MspsnaIga0SRc975. Acesso em: 04 ago. 2025.

RACHIDI, Mustapha; FREITAS, José Luiz Magalhães de; MONGELLI, Magda Cristina Junqueira Godinho. Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações. 1. ed. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2020. ISBN 978-65-86943-18-4. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3548. Acesso em: 3 set. 2025.

REIS, F .J. A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de cálculo e Análise: A visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. Tese (Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo). São Paulo, 2001. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/206743. Acesso em: 02 ago. 2025.

REZENDE, W. M. O ensino de cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica. São Paulo: USP, 2003. 450 p. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SILVA, V. L. L. LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: COMO AS DEFINIÇÕES SÃO TRABALHADAS NOS EXEMPLOS E ATIVIDADES PROPOSTAS PELOS LIVROS DIDÁTICOS? 2024. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2024.

STEWART, J. Cálculo. 8 ed. vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

TALL, D. Students' difficulties in calculus. In: *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME, 1993.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, n. 2, p. 151–169, 1981.

THOMAS, G. W. Cálculo. 12 ed. vol. 1. São Paulo: Pearson, 2012.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française*, v. 30, p. 245–252, 1985.

VERGNAUD, G. *La Théorie des Champs Conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 2-3, p. 133–170, 1990.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. Didáctica das matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1996. p. 155–191.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. Journal of Mathematical Behavior, 17(2): 167-181.
VERGNAUD BRASIL. *Página Oficial – Teoria dos Campos Conceituais e Ensino de Matemática*. Disponível em: https://vergnaudbrasil.com. Acesso em: 15 jul. 2025.

VERGNAUD, G. *O papel da Teoria dos Campos Conceituais no ensino das matemáticas e das ciências*. In: MACHADO, S. P. (Org.). **Teorias de Aprendizagem: Perspectivas para os Anos Iniciais**. São Paulo: Moderna, 2009. p. 11–29.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (org.). *Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. Curitiba: CRV, 2009. p. 11–32.

VINNER, S.; HERSHKOVITZ, R. *Concept Images and Common Cognitive Paths in the Development of Some Simple Mathematical Concepts*. In: *Proceedings of the 5th PME Conference*. Grenoble: PME, 1981. p. 177–184.

ZUCHI, I. A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/102893. Acesso em: 28 abr. 2025.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado participante, você está sendo convidado (a) a participar da pesquisa intitulada “Análise de Invariantes Operatórios na compreensão da definição formal de limite: Uma abordagem considerando elementos do Campo Conceitual desta definição”, desenvolvida pelo pesquisador Alex Vinicius de Bastos Rangel. O objetivo central do estudo é “identificar invariantes operatórios mobilizados pelo estudante ao lidar com situações para compreensão da definição formal de limite”. O convite para a sua participação se deve à necessidade de gravação de áudio da sua resolução das atividades propostas nesta pesquisa e a coleta do registro escrito de sua resolução dessas atividades. Sua participação é voluntária, isto é, ela não é obrigatória, e você tem plena autonomia para decidir se quer ou não participar, bem como retirar sua participação a qualquer momento. Você não terá prejuízo algum caso decida não consentir sua participação, ou desistir da mesma. Contudo, ela é muito importante para a execução da pesquisa. Serão garantidas a confidencialidade e a privacidade das informações por você prestadas. Qualquer dado que possa identificá-lo será omitido na divulgação dos resultados da pesquisa, e o material será armazenado em local seguro. A qualquer momento, durante a pesquisa, ou posteriormente, você poderá solicitar do pesquisador informações sobre sua participação e/ou sobre a pesquisa, o que poderá ser feito por meio dos contatos explicitados neste Termo.

A sua participação consistirá em resolver atividades de uma sequência didática para a pesquisa, divididas em 4 sessões. As resoluções das atividades da sequência didática serão feitas à mão em papel e o seu material escrito será recolhido para análise, assim como sua gravação de voz durante a resolução destas atividades. Sua resolução somente será gravada se houver a sua autorização. O tempo de duração da gravação e resolução das atividades em cada sessão é de aproximadamente duas horas. As gravações de áudio serão transcritas e armazenadas em arquivos digitais, mas somente terão acesso às mesmas o pesquisador. Ao final da pesquisa, todo material será mantido em arquivo, sob guarda e responsabilidade do pesquisador responsável, por pelo menos 5 anos, conforme Resolução CNS nº 466/2012. O benefício (direto ou indireto) relacionado com a sua colaboração nesta pesquisa é a investigação de situações que possibilitem a compreensão da definição formal de

limite, além de permitir conhecer quais teoremas em ação e conceitos em ação são mobilizados pelo estudante ao enfrentar estas situações. Esta pesquisa pode gerar os seguintes riscos:

1. Desconforto emocional: Os participantes podem enfrentar desconforto emocional ao lidar com conceitos matemáticos complexos ou ao tentar compreender a definição formal de limite. Isso pode causar frustração ou ansiedade durante o processo de aprendizagem.

2. Dificuldades de compreensão: Como a pesquisa envolve a investigação das dificuldades dos estudantes em compreender a definição formal de limite de função, é possível que os participantes enfrentem dificuldades em entender o material apresentado ou em resolver as atividades propostas. Isso pode levar a uma sensação de inadequação ou baixa autoestima.

3. Exposição de erros: Durante a participação na pesquisa, os estudantes podem ser solicitados a resolver problemas ou realizar atividades relacionadas ao tema. Nesse processo, é possível que cometam erros ou tenham dificuldades em chegar às respostas corretas. Isso pode causar constrangimento ou desconforto ao expor suas dificuldades perante os pesquisadores.

4. Sobrecarga de trabalho: A realização da sequência didática proposta no projeto de pesquisa pode exigir um esforço adicional dos participantes, envolvendo a resolução de atividades extras ou a dedicação de tempo fora das aulas regulares. Isso pode resultar em uma sobrecarga de trabalho, especialmente se os participantes já estiverem enfrentando uma carga acadêmica intensa.

5. Questões de privacidade e confidencialidade: Durante a pesquisa, podem ser coletados dados e informações pessoais dos participantes, como resultados de atividades ou respostas a questionários. No entanto, será garantida a privacidade e confidencialidade dessas informações, protegendo a identidade dos participantes e utilizando os dados apenas para fins de pesquisa.

Em caso de gastos decorrentes de sua participação na pesquisa, você (e seu acompanhante, se houver) será ressarcido. Em caso de eventuais danos decorrentes de sua participação na pesquisa, você será indenizado.

_____	_____
Rubrica do participante	Rubrica do pesquisador

Os resultados desta pesquisa serão divulgados em palestras dirigidas ao público participante, relatórios individuais para os entrevistados, artigos científicos e no formato de dissertação/tese.

Este termo é redigido em duas vias, sendo uma do participante da pesquisa e outra do pesquisador. Em caso de dúvidas quanto à sua participação, você pode entrar em contato com o pesquisador responsável por meio do e-mail: alex.rangel@ufms.br, do telefone (67) 99875-9921, ou por meio do endereço Avenida Costa e Silva, s/n, Bloco 8, Secretaria do Curso de Artes Visuais (Faculdade de Artes, Letras e Comunicação), próximo ao Estádio Morenão. Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFMS (CEP/UFMS), localizado no câmpus da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, prédio das Pró - Reitorias 'Hércules Maymone' – 1º andar, CEP: 79070900. Campo Grande – MS; e-mail: cepconep.propp@ufms.br; telefone: (67) 3345-7187; atendimento ao público: 07:30-11:30 no período matutino e das 13:30 às 17:30 no período vespertino. O Comitê de Ética é a instância que tem por objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos. Dessa forma, o comitê tem o papel de avaliar e monitorar o andamento do projeto de modo que a pesquisa respeite os princípios éticos de proteção aos direitos humanos, da dignidade, da autonomia, da não maleficência, da confidencialidade e da privacidade.

[ ] marque esta opção se você concorda que durante sua participação na pesquisa seja realizada a gravação.

[ ] marque esta opção se você **não** concorda que durante sua participação na pesquisa seja realizada a gravação.

_____

Alex Vinicius de Bastos Rangel

Campo Grande - MS, Data.

_____

Nome e assinatura do participante da pesquisa

Campo Grande - MS, Data.

APÊNDICE B - DESCRIÇÃO DOS ENUNCIADOS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS AOS ESTUDANTES

6.1 1ª Sessão

6.1.1 1ª Atividade

1. Considerando a definição de distância entre dois números reais, responda:

a) Como você faria a leitura da expressão $|3-5|$, explicando seu significado?

b) Como você faria a interpretação geométrica, numa reta numérica, do item a, considerando M o ponto de abscissa 3 e N o ponto de abscissa 5?

c) Considere uma reta graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3?

d) Considere agora que a distância entre x e 3 na reta numérica seja igual a 2 unidades. Como você expressaria essa situação em valor absoluto (ou módulo)?

6.1.2 2ª Atividade

2. Agora considere que a distância entre x e 3 na reta numérica seja menor do que 2 unidades.

a) Como você expressaria essa situação de modo algébrico?

b) De qual forma você representaria, numa reta numérica, a expressão encontrada no item a?

c) O que a representação geométrica realizada no item b apresenta?

d) Como você escreveria o conjunto obtido com a inequação do item (a)?

6.1.3 3ª Atividade

3. Considere agora o número real positivo δ, tal que a distância entre 3 e x seja menor do que δ na reta numérica.

a) De qual forma você escreveria a situação exposta no enunciado de forma algébrica?

b) Como você faria a representação do item a na reta numérica?

c) Considere, nesta situação, que $\delta = 0{,}5$. De qual forma você reescreveria a expressão encontrada no item a com esse novo parâmetro e faria a

representação algébrica (na forma de intervalo) e geométrica? Quais números estão nas extremidades em torno de 3 quando $\delta = 0{,}5$?

d) De qual forma você faria o item c, adotando-se agora $\delta = 0{,}05$? E para $\delta = 0{,}005$?

6.1.4 4ª Atividade

4. Seja $f: R \to R$ uma função real, tal que sua lei de formação seja dada por $f(x) = 2x + 1$, considere as seguintes situações:

a) Seja x um ponto do domínio da função, considere que a distância entre x e 3 seja menor do que:

- $0{,}5$;
- 0,05;
- 0,005.

a) De qual forma você faria a representação algébrica desta situação na notação de módulo para cada um dos valores das distâncias acima?

b) Como você faria para colocar as inequações do item (a) na forma de intervalo e faria a representação geométrica destes intervalos encontrados em segmentos de reta?

c) Qual o valor de $f(x)$ quando $x = 3$? Isto é, qual a imagem de $x = 3$ na função f?

d) Construa o gráfico da função f. Considerando os intervalos encontrados no item b, quais os intervalos correspondentes na imagem da função?

e) Considerando a imagem encontrada para $x = 3$, qual é a distância deste ponto às extremidades do intervalo da imagem da função?

6.2 2ª Sessão

6.2.1 5ª Atividade

5. Considerando a definição de distância construída na sessão anterior, responda os itens abaixo para a função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$.

a) Agora, considere o ponto de abscissa 3. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3?

b) Agora, escolha um valor positivo qualquer e o nomeie δ (por exemplo, δ = 0,3). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre x e 3 seja menor do que δ?

c) Agora, escolha outros dois valores positivos para δ, menores que o escolhido por você no item anterior (por exemplo $\delta = 0{,}03$ e $\delta = 0{,}003$). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre x e 3 seja menor do que δ?

d) De qual forma você colocaria as expressões dos itens (b) e na forma de intervalo?

e) De qual forma você faria a representação geométrica dos intervalos encontrados no item anterior no gráfico da função f?

6.2.2 6ª Atividade

6. Seja $f: R \to R$ uma função real tal que sua lei de formação seja dada por $f(x) = x + 2$.

a) Considere o ponto 5 no eixo das ordenadas. De qual forma você expressaria a distância entre y e 5?

b) Agora, escolha um valor positivo qualquer e o nomeie ϵ (por exemplo ϵ = 0,3). Como você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre y e 5 seja menor do que ϵ?

c) Agora, escolha outros dois valores positivos quaisquer menores que o escolhido por você no item anterior e os nomeie ϵ (por exemplo ϵ = 0,03 e ϵ = 0,003). Como você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre y e 5 seja menor do que estes valores de ϵ?

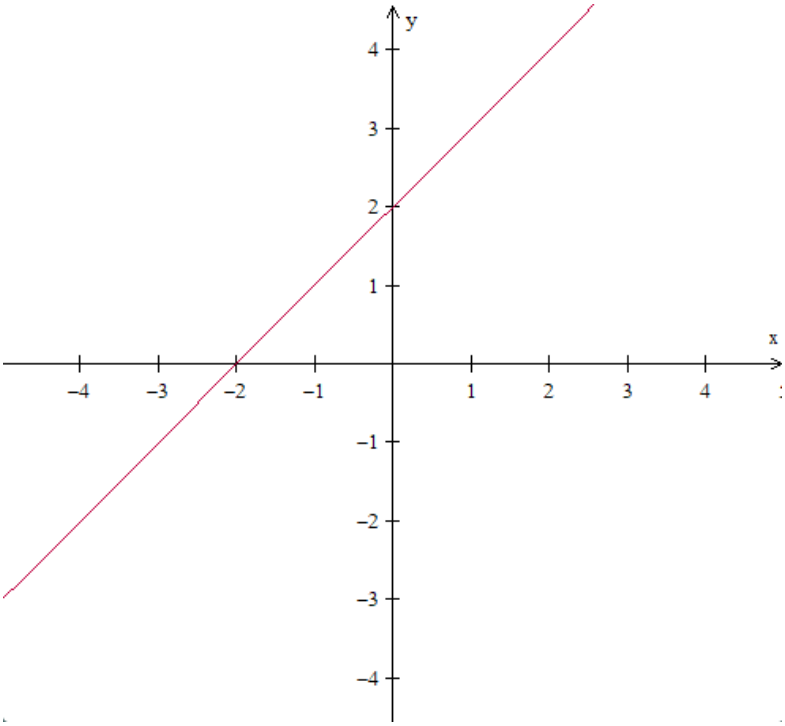
d) Mostre a forma no qual você colocaria as expressões dos itens b e c notação de intervalo e faria a representação geométrica dos intervalos encontrados.

e) Quais os intervalos correspondentes no eixo x para as expressões encontradas no item c? Mostre o modo como você faria a representação geométrica da função f, indicando os intervalos encontrados.

6.2.3 7ª Atividade

7. Considere o gráfico da função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$:

Figura 12- Gráfico da função $f(x) = x + 2$



Fonte: elaborado pelo autor

a) Como você resolveria algebricamente (utilizando a propriedade de módulo) as inequações, colocando-as na forma de intervalo em torno de $f(x)$:

- $|f(x) - 3| < 0{,}5$
- $|f(x) - 3| < 0{,}05$
- $|f(x) - 3| < 0{,}005$
- $|f(x) - 3| < \epsilon$

b) Interprete com suas palavras o significado das inequações do item a.

c) Como você relacionaria os resultados encontrados para $f(x)$ no item a com os valores do domínio da função, colocando-as na forma de intervalo em torno de x quando:

- $|f(x) - 3| < 0{,}5$
- $|f(x) - 3| < 0{,}05$
- $|f(x) - 3| < 0{,}005$
- $|f(x) - 3| < \epsilon$

6.3 3ª Sessão

6.3.1 8ª Atividade

8. Considere novamente a função real $f(x) = x + 2$, definida para $x \in R$.

a) Considere o ponto $x = 3$ no domínio da função. De qual forma você calcularia $f(3)$ e expressaria a notação da distância entre $f(x)$ e $f(3)$?

b) Agora, escolha 5 (cinco) valores decrescentes para ϵ (por exemplo 0,2; 0,02; 0,002, 0,0002; e 0,00002). De qual forma você escreveria algebricamente a situação em que a distância entre $f(x)$ e 5 seja menor do que cada um desses valores escolhidos por você para ϵ?

c) Como você expressaria sua resposta do item b na forma de intervalos na imagem da função e representaria geometricamente estes intervalos encontrados?

d) Para cada intervalo na imagem da função encontrado por você no item anterior, qual o intervalo correspondente no domínio da função?

e) Fazendo a interpretação do resultado nos itens anteriores, qual a relação entre tomarmos valores cada vez menores para ϵ e o intervalo em torno de $x = 3$?

6.3.2 9ª Atividade

9. Considere a função real $f(x) = \{x + 2, se\ x \neq 3\ \ -7,\ se\ x = 3$, definida para $x \in R$.

a) Como você expressaria o intervalo $4{,}8 < f(x) < 5{,}2$ como uma notação da distância entre $f(x)$ e 5?

b) Agora, analogamente ao item a, como você expressaria a distância entre $f(x)$ e 5 para os intervalos $4{,}98 < f(x) < 5{,}02$; $4{,}998 < f(x) < 5{,}002$; $4{,}9998 < f(x) < 5{,}0002$ e $4{,}99998 < f(x) < 5{,}00002$ e faria a representação geométrica de todos esses intervalos? O que você percebe na distância entre $f(x)$ e 5 considerando a variação dos intervalos?

c) Para cada intervalo na imagem da função encontrado no item anterior, qual o intervalo correspondente no domínio da função?

d) Como você expressaria os intervalos no item anterior na forma de distância de x a 3?

e) Fazendo a interpretação do resultado nos itens anteriores, qual a relação entre a diminuição do intervalo em torno de $f(x)$ e a proximidade de x em torno de 3?

6.3.3 10ª Atividade

10. Considere novamente a função real $f(x) = \{x + 2,\ se\ x \neq 3\ \ -7,\ se\ x = 3$, definida para $x \in R$.

a) De qual forma você representaria a distância entre $f(x)$ e 5 menor que um valor positivo ϵ de todas as maneiras possíveis, tanto algebricamente quanto geometricamente?

b) Atribuindo 3 valores diferentes e decrescentes para ϵ, no qual você escolha estes valores, como você refaria o item b com estes 3 novos parâmetros?

c) Considerando sua resolução do item anterior, quais conjuntos de valores para x satisfazem a distância entre $f(x)$ e 5 em cada um dos casos escolhidos por você para ϵ?

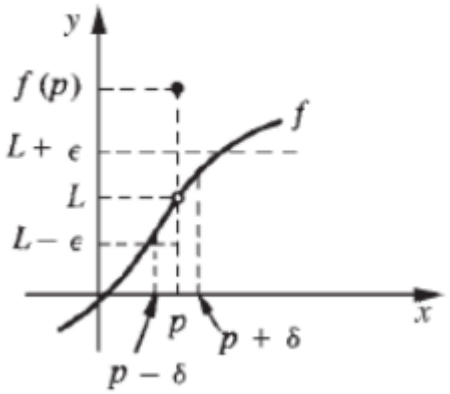
d) Mostre como você faria a representação dos intervalos escolhidos por você nos itens b e c no gráfico da função f, mostrando a relação entre os intervalos em torno de x e $f(x)$.

e) Como você escreveria os intervalos em torno de x encontrados por você na notação de distância com módulo, considerando esta distância menor que um número δ? Você consegue associar esta distância com a expressada por você no item a? Como você faria isto?

6.3.4 11ª Atividade

11. Considere agora uma função real $f: R \to R$, tal que o gráfico da função esteja representado a seguir:

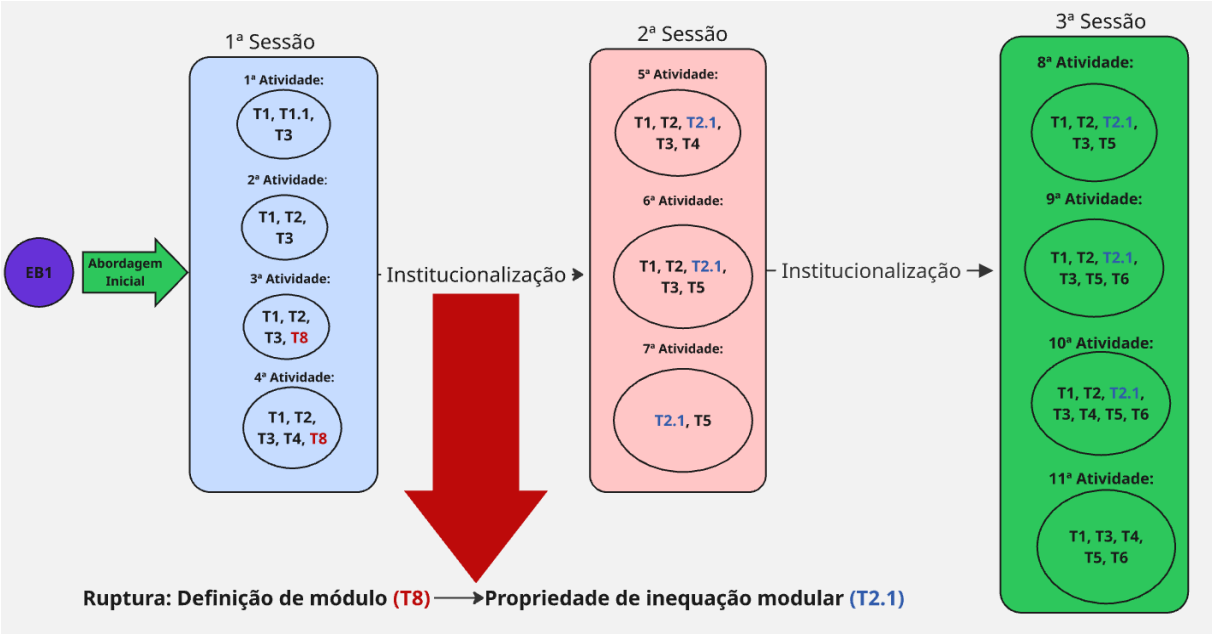
Figura 14 - Gráfico de uma função f descontínua em $x = p$



(Guidorizzi, 2012, pág. 71)

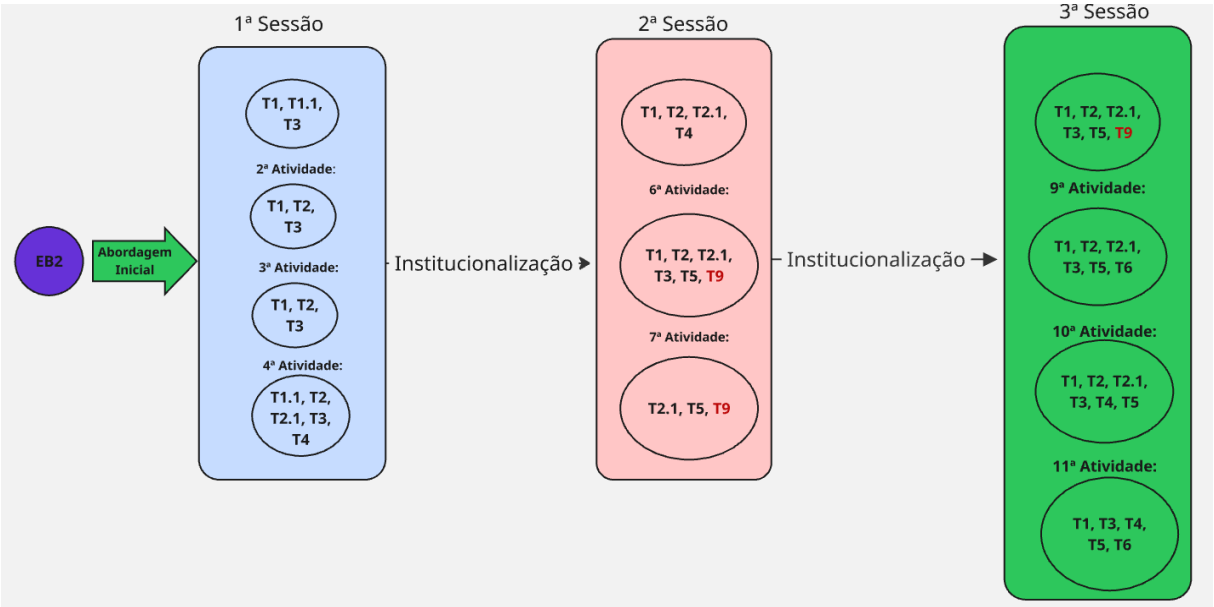
a) Seja p um ponto do domínio de f. Considerando o gráfico apresentado, como você representaria, de todas as formas possíveis, a distância entre o ponto genérico x, também do domínio, e p?
b) Seja L o ponto representado no contradomínio da função. De qual forma você expressaria a distância entre $f(x)$ e L?
c) Você relacionaria as distâncias dos itens a e b? Se sim, de qual forma?

APÊNDICE C - PERCURSO DO ESTUDANTE EB_1



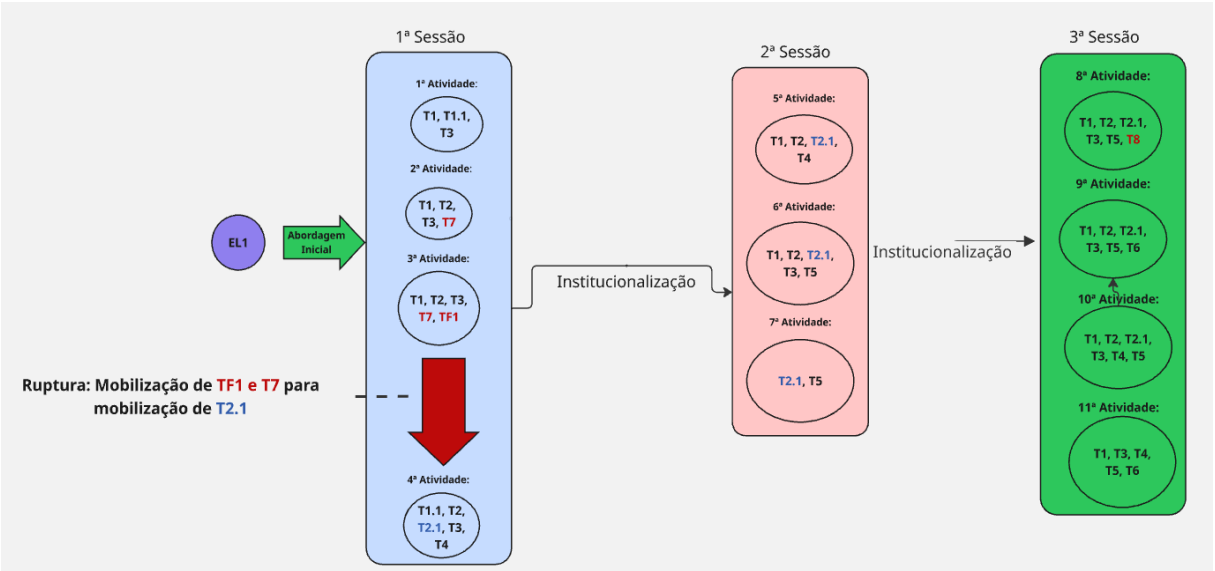
Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE D - PERCURSO DO ESTUDANTE EB_2



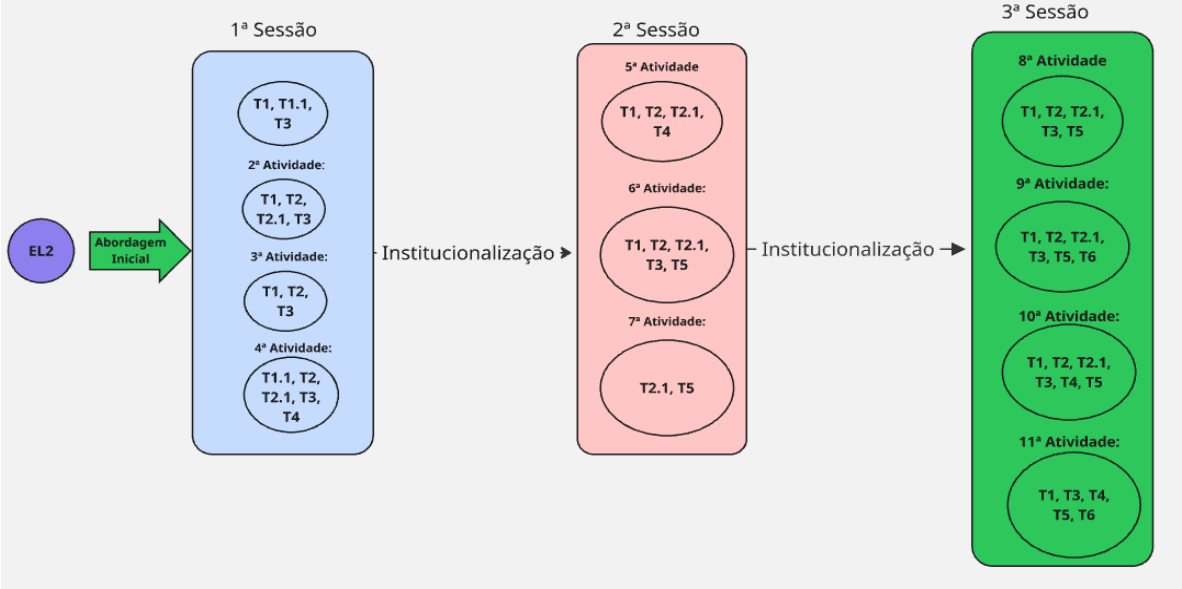
Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE E - PERCURSO DO ESTUDANTE EL_1



Fonte: Elaborado pelo autor

APÊNDICE F - PERCURSO DO ESTUDANTE EL_2



Fonte: Elaborado pelo autor