



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA (INMA)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA



CLEIDE RIBEIRO MOTA ARINOS

ARTICULAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES EM GEOMETRIA:
VISUALIZAÇÃO E DISCURSO COMO POSSIBILIDADES PARA A
APRENDIZAGEM

CAMPO GRANDE – MS

2025

Cleide Ribeiro Mota Arinos

**ARTICULAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES EM GEOMETRIA:
visualização e discurso como possibilidades para a aprendizagem**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito para à obtenção ao título de doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

CAMPO GRANDE – MS

2025

**TESE APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA DA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas - Orientador
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof^a. Dr^a. Marilena Bittar (Interno)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof^a. Dr^a. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato (Interno)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. Mércles Thadeu Moretti (Externo)
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof^a. Dr^a. Mariana Moran (Externo)
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Mustapha Rachidi (Suplente interno)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof^a. Dr^a. Cintia Melo dos Santos (Suplente externo)
Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD

**ESTUDO FINANCIADO PELA FUNDAÇÃO DE APOIO E
DESENVOLVIMENTO DO ENSINO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO ESTADO
DE MATO GROSSO DO SUL – FUNDECT**



AGRADECIMENTOS

À Deus por me guardar e guardar minha família durante todo esse período de doutoramento, onde passamos por uma pandemia em isolamento durante dezoito meses em casa.

Gratidão ao meu esposo e filhas por sempre me incentivarem, por sonharem comigo e por estarem presentes durante todo esse processo.

Obrigada ao meu orientador José Luiz Magalhães de Freitas. Você permitiu que eu deslumbrasse uma pequena nuvem no início do mestrado. Eu acreditava que essa nuvem estava lá, ao longe no horizonte. Com o passar do tempo eu percebi que elas existiam. O deserto passou e ouço o som da chuva! E, você José Luiz contribuiu para que eu contemplasse esse horizonte com minhas lentes, respeitando meu alcance de visão.

Aos doutores Marilena Bittar, Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato, Mércles Thadeu Moretti e Mariana Moran por aceitarem compor a banca examinadora desta pesquisa de doutorado.

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, lugar onde realizei a graduação, mestrado e doutorado.

Ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) e ao Grupo de Pesquisas em Didática da Matemática (DDMat), obrigada pela oportunidade de aprender sobre a pesquisa em Educação Matemática e por me tornar uma pesquisadora nessa área.

À Fundação de apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciência e Tecnologia do estado de Mato Grosso do Sul (FUNDECT), pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

Aos diretores do colégio onde realizei a experimentação desta pesquisa e aos estudantes que participaram deixo aqui meus agradecimentos e meu muito obrigada pelos momentos vividos nessa instituição.

Ao Pedro Augusto Ignácio Silva, médico, psiquiatra, por me acompanhar neste processo.

À Naiara França psicóloga especializada em Teoria Cognitiva comportamental por me fornecer elementos para enfrentar os momentos difíceis pelos quais passei.

À minha mãe Maria Jandira de Fátima Ribeiro Mota por me dar toda a educação e ensino.

Ao meu pai Adair Pereira Mota, *in memoriam*, perdi-o recentemente. Hoje não posso dizer pessoalmente que sou “sua dotora”, mas creio que cumpri minha missão como filha.

COMO CITAR

ARINOS, C. R. M. **ARTICULAÇÕES DE REPRESENTAÇÕES EM GEOMETRIA:** visualização e discurso como possibilidades para a aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação Mestrado e Doutorado em Educação Matemática, Instituto de Matemática, Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Campo Grande, p. 238. 2025.

ERA UMA VEZ...

Uma discente da Educação Básica de ensino que estudava em uma escola da zona rural de um pequeno distrito.

Ela tinha por diversão a leitura, os estudos e ir à escola.

Era perfeccionista! Costumava medir os lados das figuras presentes nos livros didáticos que estavam representadas com suas respectivas medidas e, verificava, na maioria das vezes, que a medida apresentada não correspondia à medida real.

Que incômodo!

E quando o professor desenhava uma figura geométrica na lousa?

Levantava do seu lugar e media com sua régua os lados dessa figura. Quando ia desenhá-la em seu caderno percebia, quase sempre, que a figura não cabia na folha.

-Professor! A figura não cabe na minha folha!

-Não tem problema! Faz de conta!

Como assim fazer de conta?

Daí, não era a figura que o professor tinha desenhado e estava errado.

Era estranho que os colegas dessa estudante não tinham essas dúvidas.

RESUMO

Esta pesquisa, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e em dois elementos teóricos complementares desse autor, considera as apreensões e os olhares para a aprendizagem em geometria, foi realizada com a finalidade de investigar contribuições da visualização icônica e da visualização não icônica, articuladas aos registros de representação semiótica e ao discurso para a aprendizagem de geometria por meio de atividades com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Como procedimentos metodológicos, foram realizados nove encontros, no contraturno escolar, onde aconteceram aplicações de sete atividades e contou com a participação de 21 estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio de uma escola privada de Campo Grande/MS. As atividades foram desenvolvidas por duplas de estudantes e às vezes trio. Estas foram desenvolvidas com o intuito de restringir as informações visuais, variando os registros, mobilizando a apreensão discursiva com a finalidade de entrar no modo não icônico de ver uma figura em geometria. As resoluções das atividades realizadas pelos estudantes foram analisadas considerando: os registros de representação semiótica, as apreensões, a visualização icônica, a visualização não icônica, a desconstrução dimensional, a desconstrução instrumental, a exploração heurística nas figuras e a análise do discurso por meio das funções discursivas. Alguns resultados obtidos nessa investigação apontam que a apreensão perceptiva ao se sobressair na resolução de uma atividade contribuiu para a apreensão discursiva ser negligenciada. Notou-se que o fenômeno da incongruência semântica foi minimizado quando a apreensão perceptiva se subordinou às apreensões discursiva e operatória e ao olhar inventor. Observou-se que a transição do olhar icônico para o olhar não icônico pode variar para cada estudante e que a desconstrução dimensional pode emergir da visualização icônica ou da visualização não icônica. Conclui-se que a passagem do olhar icônico para o olhar não icônico pode ser realizada articulando a apreensão discursiva, a desconstrução dimensional no olhar não icônico e às funções discursivas, destacando-se a função de expansão discursiva e a apreensão discursiva para o estudante permanecer no olhar não icônico. E assim, realizar outras conclusões e, em alguns casos, deduções matemáticas.

Palavras-chave: Aprendizagem de Geometria; Registro de Representação Semiótica; Visualização não icônica; Apreensão perceptiva e discursiva; Olhares.

ABSTRACT

This research, based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers and two complementary theoretical elements by this author, considers the apprehensions and perspectives on learning in geometry. It was conducted with the purpose of investigating contributions of iconic visualization and non-iconic visualization, articulated to the semiotic representation registers and discourse for geometry learning through activities with eighth and ninth-grade students of Elementary School and first-year students of High School. As methodological procedures, nine meetings were held in the after-school period, where seven activities were conducted, involving the participation of 21 eighth and ninth-grade students from Elementary School and first-year High School students from a private school in Campo Grande/MS. The activities were developed by pairs of students and sometimes in trios. These were developed with the intent to restrict visual information, varying the records, mobilizing discursive comprehension with the purpose of entering the non-iconic mode of seeing a figure in geometry. The solutions to the activities carried out by the students were analyzed considering: the records of semiotic representation, the apprehensions, iconic visualization, non-iconic visualization, dimensional deconstruction, instrumental deconstruction, heuristic exploration in the figures, and discourse analysis through discursive functions. Some results obtained in this investigation indicate that perceptual apprehension, when prominent in the resolution of an activity, contributed to discursive apprehension being neglected. It was noted that the phenomenon of semantic incongruity was minimized when perceptual apprehension was subordinated to discursive and operative apprehensions and to the inventive gaze. It was observed that the transition from iconic gaze to non-iconic gaze can vary for each student and that dimensional deconstruction can emerge from iconic visualization or non-iconic visualization. It is concluded that the transition from iconic gaze to non-iconic gaze can be achieved by articulating discursive apprehension, dimensional deconstruction in the non-iconic gaze, and discursive functions, highlighting the function of discursive expansion and discursive apprehension for the student to remain in the non-iconic gaze. Thus, it allows for other conclusions and, in some cases, mathematical deductions.

Keywords: Learning Geometry; Record of Semiotic Representation; Non-iconic Visualization; Perceptual and Discursive Understanding; Perspectives.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Congruência semântica	47
Figura 2 - Apreensões e congruência semântica	48
Figura 3 - Enunciado e figura congruentes.....	48
Figura 4 – Enunciado e figura não congruentes	49
Figura 5 – Não congruência entre enunciado e apreensão operatória	50
Figura 6 – Congruência semântica entre enunciado e figura.....	51
Figura 7 – Apreensão operatória não congruente com a figura.....	51
Figura 8 – Não congruência semântica por meio da apreensão perceptiva.....	52
Figura 9 – Congruência semântica entre enunciado e figura.....	52
Figura 10 – Apreensão operatória e congruência semântica	53
Figura 11 - As apreensões em uma atividade	60
Figura 12 – Transformação mereológica homogênea	64
Figura 13 - A apreensão perceptiva no quadrado	70
Figura 14 - A visualização icônica na propriedade	71
Figura 15 - A visualização icônica e não icônica	72
Figura 16 - A visualização não icônica na demonstração	76
Figura 17 - A visualização não icônica na demonstração	77
Figura 18 - A visualização icônica em uma atividade.....	80
Figura 19 - A visualização não icônica em uma atividade	81
Figura 20 - Desestabilizar a visualização icônica no GeoGebra	85
Figura 21 - Visualização icônica em uma atividade.....	87
Figura 22 - Visualização não icônica em uma atividade	88
Figura 23 – O destaque da figura por retas paralelas	103
Figura 24 – Construção do quadrado e do losango por dobraduras	108

Figura 25 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001A).....	110
Figura 26 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001A).....	111
Figura 27 - Protocolo dos estudantes (901A, 1001B)	115
Figura 28 - Protocolo dos estudantes (801A, 801E).....	115
Figura 29 - Tratamentos figurais realizados pela estudante 801G	121
Figura 30 - Protocolo dos estudantes (801A, 801E).....	122
Figura 31 - Protocolo dos estudantes (901F, 801G).....	123
Figura 32 - Protocolo dos estudantes (801A, 801E).....	124
Figura 33 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001A).....	126
Figura 34 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	136
Figura 35 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	137
Figura 36 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	138
Figura 37 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E).....	138
Figura 38 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E).....	140
Figura 39 Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	141
Figura 40 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	143
Figura 41 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E).....	149
Figura 42- Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	152
Figura 43 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	157
Figura 44 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	160
Figura 45 - Protocolo dos estudantes (801J,901F)	161
Figura 46 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	162
Figura 47 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	162
Figura 48 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	163
Figura 49 - Protocolo dos estudantes (801F,1001B)	163
Figura 50 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	164

Figura 51 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	164
Figura 52 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	165
Figura 53 Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	165
Figura 54 - Protocolo dos estudantes (801J,901F)	168
Figura 55 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)	170
Figura 56 Decomposição heterogênea no quadrado.....	171
Figura 57 - Divisão mereológica heterogênea.....	172
Figura 58 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B, 801J, 901F, 801A,901E)	172
Figura 59 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	173
Figura 60 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	177
Figura 61 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	178
Figura 62 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)	178
Figura 63 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E).....	180
Figura 64 – Divisão mereológica no triângulo ABC.....	187
Figura 65 – Protocolo dos estudantes (901D, 1001B).....	189
Figura 66 – Protocolo dos estudantes (801G, 801I)	193
Figura 67 – Protocolo dos estudantes (801G, 801I)	197
Figura 68 – Protocolo dos estudantes (801G,801I)	198
Figura 69 – Protocolo dos estudantes (901E, 901F).....	199
Figura 70 - Protocolo dos estudantes (801F).....	209

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Os traços na visualização não icônica	75
Quadro 2 - A distância entre a visualização icônica e a não icônica	80
Quadro 3 - Dois tipos de desconstrução instrumental	83
Quadro 4 – Participação dos estudantes nos encontros	94
Quadro 5 - Categorias de análise das atividades e os aspectos observados	100
Quadro 6 – Desconstrução dimensional realizada pelos estudantes (801J,901F)	151

SUMÁRIO

1	Introdução	13
2	Contextualização do objeto da pesquisa	16
2.1	Quando a tese começa	16
2.2	A matemática e a geometria	20
2.3	Registro de Representação Semiótica.....	21
2.4	Os registros de representação semiótica e a Base Nacional Comum Curricular	26
2.5	Pesquisas.....	30
3	O modo específico de pensar e de trabalhar em matemática	38
3.1	Característica e análise de uma atividade matemática.....	38
3.1.1	A dificuldade da conversão em matemática	40
4	Um olhar cognitivo para as figuras em geometria	42
4.1	As apreensões em geometria	42
4.2	Congruência semântica.....	46
4.3	As figuras em geometria.....	54
4.3.1	A visualização na geometria.....	55
4.3.2	As apreensões observadas em uma atividade de geometria	60
4.4	As funções discursivas e metadiscursivas de uma língua.....	63
5	Os olhares em geometria	67
5.1	A visualização icônica: olhares botanista e agrimensor	68
5.1.1	A visualização icônica: impasses para a aprendizagem	70
5.1.2	A visualização não icônica: olhares construtor e inventor.....	74
5.1.3	Um exemplo da visualização não icônica.....	76
5.2	A passagem da visualização icônica para a visualização não icônica	78

5.2.1 O hiato dimensional.....	79
5.3 A desestabilização da visualização icônica	82
5.3.1 Duas desconstruções instrumentais	83
5.4 Uma possibilidade de desestabilizar a visualização icônica.....	84
5.4.1. A passagem da visualização icônica para a visualização não icônica no livro didático	87
6 Procedimentos metodológicos	90
6.1 Pesquisa qualitativa	90
6.2 O desenvolvimento experimental da pesquisa.....	92
6.3 A produção e coleta dos dados	93
6.4 Elaboração das atividades.....	95
6.4.1. As variáveis didáticas	96
6.5 A aplicação das atividades.....	98
6.6 Instrumentos da pesquisa.....	99
6.7. Os pressupostos considerados para as análises	100
7 Apresentação e análise das atividades realizadas	107
7.1 Análise da atividade 7.....	108
7.1.1 A mobilização dos registros de representação semiótica	109
7.1.2 As apreensões	112
7.1.3 A visualização icônica e a visualização não icônica	118
7.1.4 As desconstruções e a heurística	125
7.1.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas.....	131
7.2Análise da atividade 6	132
7.2.1Análise do primeiro item da atividade 6	132
7.2.1.1 A mobilização dos registros de representação semiótica	134

7.2.1.2 As apreensões	139
7.2.1.3 A visualização icônica e a visualização não icônica	145
7.2.1.4 As desconstruções e a heurística	148
7.2.1.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas.....	154
7.2.2 Análise do segundo item da atividade 6	157
7.2.2.1 A mobilização dos registros de representação semiótica	160
7.2.2.2 As apreensões	168
7.2.2.3 A visualização icônica e a visualização não icônica	174
7.2.2.4 As desconstruções e a heurística	176
7.2.2.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas.....	184
7.3 Análise da atividade 03.....	186
7.3.1 A mobilização dos registros de representação semiótica	188
7.3.2 As apreensões	192
7.3.3 A visualização icônica e a visualização não icônica	195
7.3.4 As desconstruções e a heurística	199
7.3.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas.....	201
8 Considerações finais e perspectivas.....	203
REFERÊNCIAS	211
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE.....	218
APÊNDICE B.....	222
TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE.....	222
APÊNDICE C	225

1 Introdução

Esta pesquisa é uma continuidade de um estudo de mestrado¹ e tem como objetivo investigar contribuições da visualização icônica e da visualização não icônica, articulada aos registros de representação semiótica e ao discurso para a aprendizagem de geometria por meio de atividades com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Alguns estudos evidenciam aspectos que precisam ser discutidos nesta área do conhecimento, entre eles a passagem do físico, perceptível e palpável, para o abstrato no ensino e na aprendizagem de geometria.

A evidência perceptiva das figuras contribui, muitas vezes, para não mobilizar uma geometria axiomática. Isso porque nos primeiros anos de escolaridade os estudantes iniciam a aprendizagem geométrica por experiências sensoriais com resultados obtidos empiricamente. Contudo, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio os estudantes se deparam com uma geometria dedutiva.

Essas leituras nos impulsionaram a investigar a transição de uma geometria perceptual para uma geometria dedutiva. Para isso, formulamos a seguinte pergunta: *Como a articulação da visualização com o discurso matemático, mobilizados em atividades matemáticas variando os registros, pode contribuir com a aprendizagem em geometria nos anos finais do Ensino Fundamental e anos iniciais do Ensino Médio?*

Assim, estruturamos esta tese em oito seções.

A segunda seção², intitulada *Contextualização do objeto da pesquisa*, apresenta algumas razões que nos motivaram a escrever esta tese considerando as condições cognitivas para a aprendizagem de geometria segundo Duval, o objetivo geral e os específicos. Analisamos a transição de uma geometria Euclidiana palpável nos anos iniciais do Ensino Fundamental para uma geometria Euclidiana baseada em definições, axiomas, postulados e proposições nos anos finais do Ensino Fundamental.

Fazemos essas considerações porque entendemos que nessa transição ocorre a passagem da visualização icônica para a visualização não icônica (Duval, 2005). Para tratar sobre isso escrevemos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e sua aproximação com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

¹ ARINOS, C. R. M. (2018). **Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental** [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2018. Disponível em: < <https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/5448> > Acesso em fev. de 2023.

² Consideramos a introdução como a primeira seção.

A seção 3, *O modo específico de pensar e de trabalhar em matemática*, apresenta o modo específico de pensar e de trabalhar em matemática, com possibilidades de superar as dificuldades que os estudantes manifestam ao resolver atividades no ensino de matemática (Duval, 2018). Com base nesse autor detalhamos como é caracterizada uma atividade matemática e como deve ser analisada considerando a face oculta (*noesis*)³ e a face exposta (*semiose*)⁴. Nessa análise semiocognitiva pontuamos quais fatores considerar no cognitivo e no semiótico para compreender o sucesso e o insucesso dos estudantes na resolução de problemas.

Na quarta seção, *Um olhar cognitivo para as figuras em geometria*, são apresentadas as apreensões que as figuras geométricas mobilizam para a aprendizagem de geometria, esclarecendo a noção de figura geométrica que usamos neste estudo e de visualização geométrica.

Na quinta seção, *Os olhares em geometria*, baseados nos estudos de Duval (2005) e nos estudos de Mithalal e Balacheff (2019) mostramos uma possibilidade de desestabilizar a visualização icônica adentrando a visualização não icônica nas atividades matemáticas, trazendo alguns exemplos de atividades encontrados no livro didático do Ensino Fundamental que exigem essa passagem. Finalizamos essa seção com uma possibilidade de desestabilizar o olhar icônico dos estudantes por meio do software *GeoGebra 3D*.

Na sexta seção, *Procedimentos metodológicos*, explicitamos nossas escolhas dentro da pesquisa qualitativa, destacando como foram elaboradas as atividades e quais variáveis didáticas foram consideradas, mostrando os instrumentos da pesquisa e os pressupostos estabelecidos para as análises.

Na sétima seção, *Apresentação e análise das atividades realizadas*, detalhamos as atividades matemáticas desenvolvidas com os estudantes e os resultados obtidos de acordo com as categorias de análise.

Na oitava seção, apresentamos *Algumas considerações e perspectivas*, e em seguida as *referências* e os *apêndices*.

³ Para Duval (2012a), a *noesis* é pessoal, relacionada ao pensamento humano, são as ações pessoais referentes ao pensamento, visando compreender o conceito de um objeto matemático. Segundo Duval (2012, p. 270) “é a apreensão conceitual de um objeto”.

⁴ Para Duval (2012a), a *semiose* é social, equivale a compreender ou a produzir uma representação semiótica, é aprender a dar significado aos objetos. Duval (2012, p. 270), destaca que a *semiose* “é a apreensão ou produção de uma representação semiótica”.

Dando continuidade, na seção 2 a seguir contextualizamos o objeto desta investigação, a questão norteadora e os objetivos geral e específico. Pontuamos algumas especificidades sobre a geometria, apresentando a Teoria dos registros de representações semióticas usada neste estudo e sua aproximação com a Base Nacional Comum Curricular.

2 Contextualização do objeto da pesquisa

Nesta seção apresentamos algumas razões que nos motivaram a escrever esta tese voltada à aprendizagem em geometria. Trazemos reflexões sobre a geometria na Educação Básica em relação ao ensino e à aprendizagem, apresentando o objetivo geral e os específicos. Apresentamos elementos da teoria dos Registros de Representação Semiótica, relacionando-a com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), particularmente na competência específica 4⁵. Em seguida abordamos algumas pesquisas científicas que foram significativas para realizar este estudo.

2.1 Quando a tese começa

Terminando o Mestrado, continuando com as leituras, percebemos que muitas dificuldades na geometria ocorrem porque os estudantes permanecem no modo icônico de visualizar as figuras. O modo icônico corresponde a uma abordagem espontânea baseada na percepção de uma figura, é um olhar usual e intuitivo, identificando-as pelo seu contorno. Usamos essa visualização para nomear figuras, associando-a normalmente a um objeto já reconhecido. A visualização não icônica requer olhar as figuras por meio de suas propriedades. O cubo, por exemplo, pode ser visto por meio das arestas, das faces quadradas, dos vértices etc. Esse sólido também pode ser visto pelas unidades figurais tridimensionais, bidimensionais, unidimensional e adimensional. Para Duval (2022, p.9) a passagem do olhar icônico para o não icônico “constitui uma mudança profunda de olhar, que frequentemente é ignorada no ensino”.

Na geometria a principal característica de uma figura é a de não ser icônica. Para Duval (Duval, 2022, p.4) “Isso significa dizer de fato que o reconhecimento dos objetos representados não depende em primeiro lugar da discriminação visual das formas, mas de hipóteses que foram dadas e que vão comandar também o olhar sobre as figuras”. Isso exige a articulação da visualização não icônica com a linguagem⁶ (Duval, 2005, 2022). Entretanto, “O modo de ver as figuras depende da atividade em que ela é mobilizada” (Duval, 2022, p.2). Com isso começamos a pensar como deveriam ser essas

⁵ “Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (Brasil, 2018, p. 538)

⁶ A linguagem foi observada por meio da língua natural e da apreensão discursiva. Pois, na visualização não icônica o reconhecimento dos objetos representados depende de uma produção discursiva de enunciados seja para justificar, explicar ou demonstrar (Duval, 2005, 2022).

atividades. Isso nos impulsionou a realizarmos uma investigação buscando compreender como ocorre a passagem da visualização icônica para a visualização não icônica.

Segundo Duval (2005), para entrar no modo não icônico de ver uma figura em geometria a visualização icônica precisa ser neutralizada⁷ e isso ocorre por meio das atividades mobilizadas. Contudo, Duval não especifica quais atividades devem ser mobilizadas e não detalha como neutralizar a visualização icônica. Apenas, ressalta que isso ocorre por meio de atividades.

Isso nos levou a pensar: Como adentrar à visualização não icônica? Que tipo de atividade mobilizar?

São essas indagações que nos moveram nesses anos. Dando início a uma...

Tese...

A articulação da visualização não icônica com o discurso por meio de atividades visando a aprendizagem de geometria.

Lendo Duval (2005) não encontramos detalhes de como devem ser essas atividades para adentrar ao olhar não icônico. Pensamos: Será que ele não esclarece mesmo como devem ou podem ser essas atividades?

Até que...

Encontramos nos estudos de Colombo, Buehring e Moretti (2009) que de fato Duval (2005, 2022) não detalha como devem ser essas atividades. Colombo, Buehring e Moretti (2009), esclarecem que:

[...] nos mais diversos textos escritos por Duval não há de forma explícita alguma preocupação com a natureza das tarefas que podem ser conduzidas em sala de aula, o que ele apregoa é que elas devem ser implementadas de tal modo que o uso da hipótese⁸ de aprendizagem seja possível (Colombo; Buehring; Moretti, 2009, p. 92).

Duval também não detalha como devem ser as atividades para adentrar no modo não icônico de visualizar uma figura em geometria. Esse autor coloca duas questões: “[...] a maneira de ver de um tipo de atividade favorece a entrada em outras maneiras de ver necessárias a outros tipos de atividades?⁹ ” (Duval, 2022, p. 5). Será que existe algum tipo de atividade que pode favorecer a entrar em outros modos de ver?

⁷ Duval (2005), usa o termo neutralizar. Porém, na seção 4, conforme os estudos de Mithalal (2010), detalhamos que usamos o termo desestabilizar e não neutralizar.

⁸ Para Duval, a hipótese de aprendizagem consiste em coordenar, pelo menos, dois registros de representação para o mesmo objeto matemático.

⁹ Para Duval (2005), existem quatro modos de ver uma figura: o botânico e o agrimensor (olhar icônico), o construtor e o inventor (não icônico). Isso será detalhado na seção 4.

Apesar de não evidenciar uma resposta, as leituras realizadas indicavam que sim (Duval, 2005, 2022). Mas, como afirmar?

Essa inquietação gerou em nós uma busca por pesquisas. Foi quando...

Finalmente!

Encontramos uma resposta afirmativa para a pergunta de Duval nos estudos de Mithalal (2011).

“[...] a maneira de ver de um tipo de atividade favorece a entrada em outras maneiras de ver necessárias a outros tipos de atividades? ” (Duval, 2022, p. 5). Mithalal esclarece que **sim!** Na conclusão do artigo, encontramos uma resposta para essa pergunta. Mithalal afirma: “Nós vamos finalmente trazer uma resposta positiva e mostrar que as situações propostas permitem a emergência da desconstrução dimensional [...]” (Mithalal, 2011, p. 125, tradução nossa).

Mithalal (2011) destaca que as situações propostas em seu estudo por meio dos olhares icônico e não icônico no *Cabri3D* contribuíram para a desconstrução dimensional das figuras geométricas.

Isso nos impulsionou a realizar uma investigação nos baseando nos estudos de Duval (2005, 2009, 2011, 2012, 2012b, 2015, 2016, 2018, 2022) com a finalidade de desestabilizar o olhar icônico adentrando no olhar não icônico de visualizar uma figura em geometria. Assim, formulamos a seguinte pergunta: *Como a articulação da visualização com o discurso matemático, mobilizados em atividades matemáticas variando os registros, pode contribuir com a aprendizagem em geometria nos anos finais do Ensino Fundamental e anos iniciais do Ensino Médio?*

Com o intuito de encontrar resposta para essa questão escolhemos como objetivo geral: *Investigar contribuições da visualização icônica e da visualização não icônica, articulada aos registros de representação semiótica e ao discurso para a aprendizagem de geometria por meio de atividades com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio.*

Para alcançar esse objetivo estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar quais visualizações podem contribuir para elaborar estratégias ou justificar os procedimentos realizados ao resolver as atividades.
- Analisar a potencialidade da visualização não icônica articulada aos registros e ao discurso para a aprendizagem de geometria.
- Identificar entraves ou bloqueios nas atividades mobilizadas, assim como avanços em busca da apreensão conceitual na aprendizagem geométrica.

Resolvemos aplicar as atividades¹⁰ em um grupo constituído por estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, pelo fato de Duval (2005) detalhar que os resultados referentes aos anos finais do Ensino Fundamental em geometria, obtidos na França por meio das avaliações nacionais não são atingidos. Duval (2022, p. 3), ressalta que “[...] a geometria é também o domínio mais difícil de ensinar e um daqueles em que, mesmo quando os objetivos permanecem muito modestos, os resultados alcançados são decepcionantes”.

Nessas faixas de escolaridade, os estudantes trabalham com uma geometria mais dedutiva, na qual algumas demonstrações começam a fazer parte dos estudos. Entendemos que essa transição de uma geometria Euclidiana mais intuitiva para uma geometria mais axiomática pode favorecer a articulação da visualização icônica à visualização não icônica, articulada ao discurso e às representações semióticas para a aprendizagem de geometria.

Com a finalidade de alcançarmos os objetivos desta investigação, pensamos no tipo de atividade de modo que os estudantes desestabilizassem a visualização icônica adentrando a visualização não icônica. Por essa razão não temos neste estudo uma sequência de atividades, mas algumas possibilidades de atividades. Para isso, consideramos também os estudos de Mithalal (2010, 2011).

Mithalal (2010, 2011) elaborou atividades restringindo as informações visuais para desenvolver uma geometria dedutiva com vistas à aprendizagem de geometria. Isso nos conduziu a elaborar atividades em que as informações visuais não garantem a solução. Para as análises dessas atividades buscamos identificar os registros de representação semiótica mobilizados, observando como o ponto de vista matemático e o cognitivo podem ser considerados para a aprendizagem em geometria.

Para tanto, apresentamos a seguir algumas considerações sobre a matemática, adentrando para o campo da geometria com a finalidade de mostrar a evolução de uma geometria sensorial nos anos iniciais da Educação Básica para uma geometria axiomática nos anos finais do Ensino Fundamental.

¹⁰ Elaboramos sete atividades que foram aplicadas em nove encontros de 1:30h, no contraturno escolar, às sextas feiras, com conteúdo de geometria do oitavo ano do Ensino Fundamental.

2.2 A matemática e a geometria

A matemática é uma ciência em que suas demonstrações são construídas por meio de uma organização baseada em definições, axiomas, postulados e teoremas. Entretanto, no Ensino Fundamental é necessário que os estudantes realizem observações empíricas e associem isso a conceitos e propriedades (Brasil, 2018). Essas observações são realizadas por meio de explorações no espaço em que habitamos por meio de manipulações e visualizações de objetos do mundo físico. Para Bellemain e Lima (2010) o que ocorre é que se passa aos poucos desses conhecimentos intuitivos e perceptivos para um conhecimento estruturado. Sendo, a geometria essencial, no ensino de matemática, nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Uma das justificativas dessa área do conhecimento é a sua presença no cotidiano, pois as competências geométricas permitem o reconhecimento de objetos ao nosso redor, localização, orientação, deslocamento, representação de artefatos do mundo físico, classificação das figuras, sistematização do conteúdo, entre outros.

Esses autores destacam que grandes civilizações antigas, dentre elas a egípcia e a mesopotâmica, possuíam informações geométricas e as aplicavam na construção de figuras planas e espaciais, por meio de cálculos de comprimentos, áreas e volumes. Eles apontam que a civilização grega é a principal responsável pela organização da geometria como uma ciência dedutiva.

No entanto, estudos realizados mostram o desempenho insatisfatório dos estudantes nesse campo (Lorenzato, 1995; Pais; Freitas, 1999; Almouloud; Mello, 2000; Facco, 2003; Almouloud, 2004; Pavanello, 2004; Santana, 2006; Bellemain e Lima, 2010; Ferreira, 2010; Pessoa, 2010; Freitas, 2011).

Segundo Duval (2018) esse desempenho é percebido quando os estudantes estão resolvendo problemas, pois, normalmente, somente a resolução de problemas é considerada para a aquisição e utilização de conhecimentos matemáticos. Existem algumas explicações reiterando que essas dificuldades ocorrem também por conta da complexidade dos conceitos ensinados.

Para Bellemain e Lima (2010) as dificuldades geométricas não estão apenas relacionadas ao ensino e aprendizagem, mas também à complexidade dos conceitos envolvidos. Outros estudos como os de Almouloud e Mello (2000) e o de Almouloud (2004), destacam que o baixo desempenho dos estudantes no campo da geometria tem sido influenciado pelas práticas pedagógicas e escolhas que os professores fazem ao ensinar geometria.

Freitas (2011) ressalta que o ensino da geometria continua sendo problemático, pois muitos professores possuem dúvidas e ansiedades com relação ao que e como ensinar. Assim, geralmente, a geometria é apresentada aos estudantes de modo superficial e vago, sem aprofundamentos e relações com outros conceitos. Isso resulta em uma formação discente com dificuldades para perceber as relações, abstrair e justificar as propriedades geométricas.

A aprendizagem de geometria é importante, pois envolve conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento. Assim como, o desenvolvimento do pensamento geométrico contribui para investigar propriedades, fazer conjecturas, produzir argumentos e realizar provas matemáticas (Brasil, 2018).

Assim, a transição do físico, perceptível e palpável para o abstrato é um dos objetivos no processo de ensino e aprendizagem da geometria (Bellemain; Lima, 2010). Essa passagem exige evoluir do olhar icônico para o não icônico e isso ocorre por meio de atividades que são exploradas por meio de transformações de representações semióticas que mobilizam registros de representação semiótica.

2.3 Registro de Representação Semiótica

A teoria dos registros de representações semióticas foi desenvolvida pelo professor, filósofo e psicólogo, Raymond Duval e tem sido utilizada em pesquisas no campo de Educação Matemática, sua elaboração baseou-se na perspectiva semiótica e cognitiva, pois conforme esse autor o modo de se trabalhar em matemática difere de todas as ciências. Duval destaca que “Em matemática, não se pensa ou se trabalha, de modo algum, da mesma maneira como acontece em outros domínios do conhecimento” (Duval, 2018, p. 1-2).

Os sistemas produtores de representações semióticas possuem duas classes: os sistemas semióticos e os sistemas não semióticos. Os sistemas produtores de representações semióticas são: língua natural¹¹, gráficos, imagens, diagramas, esquemas, escritas algébricas, notações simbólicas, figuras geométricas, entre outros. Os sistemas produtores de representações não semióticas são os instrumentos que permitem fornecer imagens do que não se pode perceber diretamente, como: os

¹¹ Língua natural ou linguagem natural é o mesmo que língua materna (Duval, 2011). Refere-se à língua nativa do ser humano, quer dizer a primeira língua que o indivíduo aprende correspondente a um grupo étnico-linguístico ao qual ele pertence.

telescópios, os microscópios, os osciloscópios etc. Dentre esses sistemas não semióticos estão as redes neurais de uma região do cérebro, que permitem produzir imagens mentais, no caso a memória visual e auditiva (Duval, 2018).

Em outras áreas do conhecimento, quando não se tem acesso direto aos objetos, se faz uso de instrumentos que possibilitam o acesso, um exemplo disso são as observações que Galileu fez da lua utilizando luneta. Galileu, com o uso desse sistema de representação não semiótico, teve que interpretar as imagens para identificar o que representavam, visto que, o que se via com a luneta era diferente do que se podia distinguir a olho nu. Entretanto, na Matemática “Evidentemente não há um instrumento científico que permita observar os objetos matemáticos, a começar pelos números” (Duval, 2016, p. 16).

No caso dos objetos do conhecimento que se pode ver, tocar, manipular, agrupar, separar, deslocar, deformar, não vem à mente confundir o objeto com sua representação, sugerido, como exemplo o uso de cadeiras por Duval (2011). Nesse caso podemos ter acesso direto à cadeira, pois podemos nos sentar, ver sua imagem ou também, descrevê-la por meio de um texto. Exemplificando, conseguimos distinguir a cadeira de suas representações (não semiótica e semiótica). A cadeira poderia ser representada também por meio de peças separadas e um esquema com flechas indicando sua montagem.

Na matemática, no entanto, não se tem acesso direto aos objetos matemáticos, nem por meio de sistema não semióticos. Quer dizer, não podemos distinguir o objeto matemático de suas representações. Não se tem esse duplo acesso, ou seja, o único modo de acesso aos objetos matemáticos é por meio de representações semióticas.

Para compreender matemática é necessário distinguir objeto e representação (Duval, 2012a, 2018¹²). Por exemplo: $\sqrt{4}$, 2 e $\frac{4}{2}$, são três representações distintas que correspondem ao objeto matemático número dois. Assim como, $f(x) = 2x + 4$ representa uma função e, $(a + b)^2$ uma expressão algébrica. Isso constitui o paradoxo cognitivo sobre o fato de não confundir o objeto matemático com sua representação, uma vez que não se pode ter acesso diretamente aos objetos matemáticos, mas, somente por meio de representações.

¹² Este texto é uma tradução do artigo: Duval, R. (2014). Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques? Union, n.37, disponível em francês em: <http://www.fisem.org/www/union/revista37.php>.

Confundir o objeto matemático com sua representação pode acarretar incompreensões em matemática, além do que os conhecimentos adquiridos podem se tornar inutilizáveis para o discente, pelo fato de não lembrarem ou por não conseguirem realizar nenhum tratamento com suas representações. Distinguir o objeto de sua representação é um dos critérios para a compreensão em matemática.

As representações semióticas dos objetos matemáticos são necessárias, pois esses não são diretamente acessíveis **pelos órgãos do sentido**, sendo necessário **recorrer a** representantes. Isso para Duval (2012a) pode ser considerado um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, porque de um lado temos a apreensão conceitual dos objetos matemáticos e, por outro as representações semióticas, nas quais torna possível a atividade sobre os objetos matemáticos.

A apreensão conceitual corresponde às representações mentais, são “[...] as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação matemáticos e sobre o que lhe é associado” (Duval, 2012a, p. 269). As representações semióticas são representações constituídas por signos pertencentes a um sistema de representação com regras específicas de funcionamento e significação¹³. Um enunciado, uma figura geométrica, uma tabela são exemplos de representações semióticas que possuem diferentes sistemas semióticos. Assim, “O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação” (p. 270). A apreensão conceitual de um objeto matemático é chamada de *noesis* e de *semiose* “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica” (p. 270), em que a *noesis* e a *semiose* são inseparáveis.

Contudo, nem todo sistema semiótico é um registro de representação semiótica. Para Duval (2016), os sistemas semióticos “[...] são utilizados e desenvolvidos para preencher a função de comunicação, enquanto os registros são unicamente utilizados para calcular, deduzir, demonstrar e modelar” (2016, p.14). Para um sistema de representação ser um registro devem ocorrer três atividades cognitivas associadas à semiose, que são: formar uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A formação de uma representação identificável ocorre por meio de: imagem de uma figura geométrica, um texto, o enunciado de uma atividade, um gráfico, uma expressão algébrica, entre outros. Essa formação pode ser comparada a uma descrição, em que operam regras específicas de operacionalização, ou seja, regras estabelecidas em uma

¹³ Ato humano de dar significado aos objetos.

sociedade, por exemplo, para um enunciado de uma atividade temos as regras gramaticais e para as figuras geométricas, suas propriedades.

Essas regras permitem reconhecer e identificar o objeto matemático, além de oportunizar os tratamentos. Este consiste em transformar uma representação em outra, dentro do mesmo registro de representação. As figuras geométricas, por exemplo, permitem os tratamentos figurais, que ocorrem quando dividimos um triângulo em dois triângulos e, com esses formamos um paralelogramo. Esse procedimento de reconfiguração, para Duval (2012a), concede às figuras geométricas um tipo de tratamento específico, que é uma das operações que podemos realizar nas figuras geométricas.

Por outro lado, a conversão de uma representação implica mudar de registro de representação. Como exemplo, temos a conversão quando se lê o enunciado de uma atividade matemática em língua natural e utilizamos o sistema de numeração decimal na sua resolução. A conversão ocorreu do registro em língua natural para o de numeração decimal. Duval (2011, p. 83) destaca que “A língua constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento”. Isso é de suma importância porque a matemática possui uma linguagem interna que atua para representar os objetos matemáticos (letras, palavras, figuras, gráficos, números etc).

Duval (2012a) lembra que das três atividades cognitivas relacionadas à semiose, somente a formação de uma representação identificável e o tratamento “[...] são levados em conta no ensino, mesmo em se tratando da organização de sequências de aprendizagem ou da construção de questionários de validação” (p. 277). Considera-se, muitas vezes, que a capacidade de realizar a conversão acontece, automaticamente, quando o estudante consegue formar uma representação identificável e realizar tratamentos em um registro. E que, a conversão, por se limitar a mudar de registro não tem importância para a compreensão dos conteúdos ou dos objetos representados. Para Duval (2012a):

Esse ponto de vista é justificado desde que uma certa “autonomia” seja atingida no que concerne à atividade matemática. Mas, mascara a característica fundamental desta atividade para a **noesis** e, de maneira mais geral, para a compreensão. Além disso, negligencia o fato de que na aprendizagem a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização [...]. (p. 277, **negrito do autor**).

Os tratamentos e a conversão entre registros são importantes para a aprendizagem em matemática, pois cada tratamento possui seu custo e, cada registro possui limitações representativas específicas. Por exemplo, uma frase em língua natural não oferece as mesmas possibilidades que uma representação figural.

Conforme Duval (2012a, p. 278), a conversão “[...] tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada”. A mudança de registros é importante, também, pela complementaridade dos registros. Assim, mais importante que o estudante dar “boas respostas” às atividades são estes aspectos que devem ser considerados: a rapidez nos tratamentos, a espontaneidade em realizar as conversões e a potência dessas transferências.

Sem as representações semióticas a construção do conhecimento se torna impossível em matemática. Duval enfatiza que a aquisição do conhecimento ocorre quando o estudante consegue mobilizar espontaneamente diferentes registros para resolver uma atividade. Com isso, o importante não são os registros que estão sendo utilizados, mas o modo como estão sendo aplicados. Normalmente, os estudantes conseguem realizar tratamentos em determinado registro, sem conseguir realizar a conversão.

Para Duval (2012a) a conversão “é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática” (p. 276). Assim, os Registros de Representação Semiótica, os tratamentos e as conversões são importantes em nosso estudo e, por percebermos alguns elementos dessa teoria na BNCC do Ensino Médio, como por exemplo, na competência quatro, ao explicitar os termos: representar, converter e registro de representação, resolvemos identificar possíveis relações da teoria com este documento. Para isso, baseamo-nos nos estudos de Simonetti e Moretti (2021) e, de Hillesheim, Anjos e Thiesen (2021).

Hillesheim, Anjos e Thiesen (2021), destacam que o termo “representar” não é caracterizado na BNCC dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Sendo assim, esse documento, nesta etapa de escolaridade, não esclarece se essa representação é mental, simbólica ou semiótica. Talvez, concordando com Simonetti e Moretti (2021), essa distância entre os termos “representar” ocorreu pelo fato de a base ter sido elaborada por partes, mas será detalhado no tópico a seguir.

2.4 Os registros de representação semiótica e a Base Nacional Comum Curricular

A BNCC serve como um instrumento fundamental para garantir um nível comum de aprendizagem a todos os estudantes no Brasil. Na TRRS pode-se falar em aprendizagem em relação a um objeto matemático quando o estudante consegue coordenar vários registros de representação ao resolver uma atividade matemática, ou seja, maior será a possibilidade de apreensão conceitual de um objeto matemático quanto maior for a mobilidade com os registros de representação semiótica na resolução da atividade.

Segundo Colombo, Buering e Moretti (2009), há um crescente interesse pela TRRS desde o início da década de 1990. Para esses autores “De lá para cá apenas algumas tímidas contribuições dos registros de representação semiótica começam a surgir nos currículos de matemática em documentos oficiais” (p. 92).

Hillesheim, Anjos e Thiesen (2021) ao analisarem as competências específicas de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental na BNCC, perceberam que há nesse documento uma preocupação com a aplicação dos conhecimentos matemáticos na sociedade ou no desenvolvimento da cidadania. Embora a BNCC proponha o desenvolvimento de diferentes competências “ela não deixa explícita a importância dos processos cognitivos presentes na aprendizagem da matemática, que são responsáveis pelo desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização” (Hillesheim; Anjos; Thiesen, 2021, p. 12).

Na BNCC, para o ensino médio, vemos que:

As competências que estão diretamente associadas a **representar** pressupõem a elaboração de **registros** para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, uma vez que todas as áreas têm seus processos de representação, em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos **registros de representação** e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam **diversos registros de representação** e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da Matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio (Brasil, 2018, p. 529, grifos nossos).

A competência específica quatro da matemática¹⁴, do Ensino Médio, não explicita claramente o que significa representar. Entretanto os termos: representar, objeto matemático e registro de representação, parecem estar embasados na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (Brasil, 2018; Simonetti & Moretti, 2021).

De fato, esses termos assemelham-se ao que aparece no modelo teórico da TRRS. Para Duval as representações “[...] estão ‘no lugar dos’ objetos ou os ‘evocam’, quando esses não são imediatamente acessíveis” (Duval, 2011, p. 23). Essa citação, ao mencionar o uso de diferentes registros de representação, se refere à atividade cognitiva de conversão da teoria de registros de representação semiótica. Para Simonetti e Moretti (2021, p. 107), não restam dúvidas que “[...] o verbo representar condiz com a teoria de Duval, apesar de não ser utilizado adequadamente no decorrer do documento o tempo todo”.

Os Registros de representação para Duval (2009, 2011, 2012a), envolvem a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. Essas operações são fundamentais para a compreensão em Matemática, “[...] principalmente, para o professor analisar as produções dos alunos, pois estão intrinsecamente conectadas à compreensão em Matemática” (Simonetti; Moretti, 2021, p. 102).

Esses autores ressaltam que, como os registros de representação semiótica são indispensáveis para o ensino da Matemática, os professores devem considerar esses gestos intelectuais¹⁵ para que os estudantes aprendam Matemática. Duval destaca que os gestos intelectuais são constituídos pelas operações semióticas próprias de cada registro mobilizado na Matemática, independentemente da atividade. Esse autor explica que o gesto intelectual consiste em reconhecer o mesmo objeto matemático em, pelo menos, duas representações diferentes. Caso seja dada somente uma representação “[...] *é preciso poder pensar, espontaneamente, a substituição na outra representação por essa que é dada*” (Duval, 2018, p. 9). Esse gesto antecede a resolução de todas as atividades, pois “para começar a procurar a solução é preciso de imediato converter as representações iniciais dos dados do problema apresentados em um registro, em

¹⁴ Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018, p. 531).

¹⁵ Na seção a seguir detalhamos no que consiste o gesto intelectual conforme Duval.

representações de um outro registro e, com isso, poder trabalhar e avançar à solução do problema” (p. 9).

Reconhecer o mesmo objeto em, pelo menos duas representações diferentes, refere-se ao ponto de vista cognitivo na atividade matemática. Esse reconhecimento consiste em realizar a conversão nos dois sentidos nessas representações. Para a conversão, trata-se de um ir e vir entre representações diferentes para o mesmo objeto matemático. Contudo, a conversão nem sempre é fácil de ser realizada nos dois sentidos pelo estudante. Ela pode ser facilmente realizada em um sentido e não ser obtida no outro pelo estudante. Nesse aspecto foi que Simonetti e Moretti (2021) analisaram a BNCC para o Ensino Médio, ou seja, como a BNCC considera a aprendizagem de matemática para a formação e para o desenvolvimento intelectual dos estudantes.

Na BNCC o seguinte excerto: “[...] aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (Brasil, 2018, p. 529), enfatiza a aprendizagem dos conceitos. Simonetti e Moretti (2021), apoiando-se em Duval, salientam que o mais importante nesse processo é a aprendizagem dos objetos matemáticos e não somente conceitos, representações e procedimentos cada vez mais elaborados. Conforme Duval, para a aprendizagem não adianta o estudante ser capaz de resolver de modo sofisticado ou com novos procedimentos a atividade, pois se ele não consegue realizar a operação de conversão nos dois sentidos de modo coordenado entre os registros não há aprendizagem.

A Base Nacional destaca que “A conversão de um registro para outro nem sempre é simples, apesar de, muitas vezes, ser necessária para uma adequada compreensão do objeto matemático em questão, pois uma representação pode facilitar a compreensão de um aspecto que outra não favorece” (Brasil, 2018, p. 538). Nesse documento, observa-se que a competência quatro¹⁶ de matemática no Ensino Médio se aproxima da teoria de registros de representação semiótica de Duval ao citar diferentes registros de representação. No entanto, de acordo com Simonetti e Moretti (2021), “a etapa do Ensino Fundamental não chega a considerar a teoria” (p. 114).

¹⁶ Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes **registros de representação** matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2018, p.531, grifos nosso).

As habilidades (EM13MAT401)¹⁷ e (EM13MAT402)¹⁸ da BNCC, da competência específica quatro, iniciam-se com os verbos converter. Essas conversões ocorrem entre as representações algébricas e geométricas de funções polinomiais do 1º e 2º graus, respectivamente. Porém, para Simonetti e Moretti (2021, p.107), “[...] outras competências também carregam traços próximos da teoria, o que pode ser percebido quando se analisa as habilidades associadas, [...]”. Mas, somente a competência quatro aborda de modo explícito os termos da teoria de Duval.

Para Simonetti e Moretti (2021, p. 108) “Não há dúvidas de que a quarta competência do modo que está escrita, implicitamente refere-se à teoria de Duval”. Porém, somente um leitor familiarizado com o modelo teórico dos Registros de Representações Semióticas pode compreender os termos: **representar**, **converter** e **registro de representação**¹⁹, percebendo seus significados específicos que não são tratados na BNCC. Contudo, essa teoria não pode ser aprofundada, considerando que a BNCC não possui referências ou citações de pesquisadores, mas, somente, uma ficha técnica.

Esses autores destacam que a aproximação da teoria de Registros de Representação Semiótica com a educação básica no Brasil é um ponto positivo. Com isso, percebe-se que vestígios de uma teoria do campo da Educação Matemática têm chegado, de certo modo, às escolas.

Duval lembra que para compreender matemática os estudantes devem ter consciência dos gestos intelectuais. Entretanto, a partir do que está posto na BNCC, Simonetti e Moretti (2021), questionam-se sobre o papel que desempenha a aprendizagem da matemática na educação básica, pois para que haja aprendizagem é necessário ter claro os objetivos do ensino da matemática para essa etapa.

A seguir trazemos algumas pesquisas científicas que contribuíram para delinear nossa investigação.

¹⁷ “Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica” (Brasil, 2018, p. 539).

¹⁸ “Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais” (Brasil, 2018, p. 539).

¹⁹ Esses termos aparecem na BNCC (Brasil, 2018, p. 529), é a citação direta feita anteriormente.

2.5 Pesquisas

Pesquisas nacionais e internacionais têm sido realizadas com a finalidade de aprimorar o ensino e a aprendizagem de geometria. Estas contribuem para termos uma visão mais ampla do que está sendo valorizado e o que está sendo deixado de lado no processo de ensino e aprendizagem de geometria.

Scheifer (2017) ao analisar questões de geometria da Prova Brasil, embasou-se na teoria de Registros de Representação Semiótica que considera as especificidades para a aprendizagem em matemática, dentre elas, a distinção do objeto matemático das suas representações. Essa autora considerou as seguintes categorias de análise: o nível escolar, evolução dos olhares, as apreensões das figuras, as conexões entre as apreensões, o tipo de registro no enunciado das atividades e o tipo de registro em suas resoluções.

Scheifer (2017) observou, no recorte dessas atividades, que as questões geométricas presentes nessas provas são elementares, com resoluções diretas e que não exigem um raciocínio elaborado do estudante. Estas exigem conhecimentos elementares de geometria, similares às atividades realizadas pelos discentes em sala de aula. Os resultados dessas avaliações mostram o baixo desempenho obtido pelos estudantes. Veja:

E isto não é questão do aluno saber ou não saber fazer, mas que o aluno não recebeu uma formação que permitisse o desenvolvimento das atividades cognitivas que os problemas contemplam, ou seja, os gestos intelectuais requeridos não foram privilegiados no ensino (Scheifer, 2017, p. 104-105).

Para essa autora o olhar inventor²⁰, de Duval (2005), foi outro aspecto pouco contemplado nas questões da Prova Brasil. Com isso, as atividades não exigem que os estudantes criem ou inventem soluções para as atividades. Essa autora pontua que esse olhar poderia ser contemplado para motivar os discentes, para desenvolver neles um espírito criativo, autônomo e de superação das dificuldades. Ela destaca também que as questões analisadas da Prova Brasil não são suficientes para avaliar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes pois, as especificidades para a aprendizagem de geometria são contempladas de modo incompleto. Isso é um reflexo de um ensino de geometria debilitado e sem fundamentação teórica, resultante também de livros didáticos mal elaborados.

²⁰ Isso será detalhado na seção 3.

Dionizio (2019) estudou como tem se constituído a aprendizagem em geometria pelos docentes dos anos iniciais. Ele observou também como tem sido o papel das formações para a mobilização dos saberes e conhecimentos geométricos para a prática pedagógica em sala de aula. Constatou-se que tanto os processos de formação como os de autoformação não têm dado conta das aprendizagens docentes em geometria para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Com isso, processos formativos em geometria têm sido necessários.

Para Dionizio ficou evidente a necessidade de se investir em processos formativos que possibilitem aprendizagens geométricas para os professores que trabalham nos anos iniciais da Educação Básica, explorando as potencialidades existentes na geometria. Esse autor destaca que essa etapa de escolaridade é propícia para o desenvolvimento do pensamento geométrico e para a construção de conhecimentos, no entanto, isso requer um trabalho específico.

Moran (2015) realizou um estudo com professores de matemática da Educação Básica de uma rede pública de ensino, com o intuito de analisar as influências dos registros figurais²¹ nas apreensões: perceptivas, operatórias e discursivas de Duval. Os resultados desse estudo mostram que os tratamentos figurais podem ser influenciados pelos tipos de registros figurais disponíveis (material manipulável, software de geometria e expressões gráficas). As expressões gráficas e as representações mobilizadas por meio do software de geometria *GeoGebra* foram os registros que mais se manifestaram nas tarefas que exigiam deduções matemáticas.

O estudo de Souza (2018) com estudantes do Instituto Federal de Santa Catarina, considerou as atividades que exigem desconstruções dimensionais em geometria (Duval, 2005). Essa autora pontua que estudos sobre essas operações são recentes e atividades solicitando as desconstruções ainda não são propostas nos livros didáticos. Talvez isso explique alguns bloqueios que os estudantes enfrentam ao resolver problemas com essa intencionalidade.

Os resultados obtidos por Souza (2018) apontam que a desconstrução dimensional, constitui-se como um gesto intelectual inerente à aprendizagem de geometria. Essa autora, observou que a resolução de problemas no *GeoGebra*, com os questionamentos do docente, proporcionou aos estudantes um avanço em suas

²¹ Moran (2015) considera como tipos de registros figurais os materiais manipuláveis (MM), os softwares de geometria (SG) e as expressões gráficas (EG). Os registros figurais são detalhados na seção 3 deste estudo.

observações e desconstruções à dimensões inferiores. Em nosso estudo, apresentamos o que caracteriza esse gesto intelectual e do que é constituído na matemática. Concordando com Duval, entendemos que esse gesto é importante em nosso estudo porque sem sua aquisição não há aprendizagem em matemática.

Sabel (2021) investigou as contribuições da linguagem na resolução de problemas por meio das funções discursivas com vistas à aprendizagem matemática com estudantes do Ensino Médio. Esse autor concluiu “[...] que não podemos separar aprendizagem matemática do domínio da língua natural, formal e especializada. É na sinergia e no complemento do uso dos diferentes recursos discursivos que se encontra um ponto chave para a aprendizagem matemática” (p. 89). Esse autor destaca que as funções e operações discursivas contribuem primeiramente para o discente externalizar seus conhecimentos, sendo instrumentos que podem manifestar a compreensão de determinado objeto matemático, permitindo ao professor analisar as incompreensões, inferindo na natureza dos erros. Em nosso estudo as funções e operações discursivas foram mobilizadas para analisar o ponto de vista cognitivo e semiótico do estudante considerando sua produção matemática, incluindo os argumentos.

Para Passos e Nacarato (2014) os professores continuam deixando os conhecimentos geométricos de lado ao ensinarem conteúdos matemáticos nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Talvez, os professores tenham insegurança ao ensinar geometria, devido às lacunas em seus processos de formação. Isso foi constatado no estudo de Dionizio (2019) em que se observou que os professores priorizam outros conteúdos matemáticos e não os geométricos.

Novak e Brandt (2020) utilizaram o *GeoGebra* como recurso didático em seus estudos, baseando-se nos estudos Duval para compreender quais aspectos seriam fundamentais considerar nas atividades para o ensino e aprendizagem de geometria. Eles constataram que esse software contribuiu para estimular a apreensão perceptiva e que a apreensão discursiva foi mobilizada ao articularem o que os estudantes viam na interface do *GeoGebra* com os enunciados das atividades. Porém o olhar icônico²², descrito por Duval (2005), foi o mais evidente.

Souza (2018) pontua que existe, no Brasil, uma escassez de pesquisas considerando a desconstrução dimensional. Em sua pesquisa a desconstrução dimensional “[...] se apresentou como um gesto intelectual não espontâneo e sim

²² Esse olhar será detalhado na seção 3.

constituído no tratamento figural numa junção entre a orientação intencional, as apreensões, e as funções da língua” (p.123-124). Em suas análises essa autora acredita ser possível desenvolver o gesto intelectual por meio de atividades com os discentes. Amparando-nos neste estudo, elaboramos atividades abordando intencionalmente a desconstrução dimensional com vistas à aprendizagem.

Assim, em nosso estudo detalhamos os aspectos semiocognitivos envolvidos na atividade matemática²³. Segundo Souza (2018, p. 129-130) essas operações considerando as figuras geométricas “[...] podem levar os sujeitos a desenvolverem o gesto intelectual da desconstrução dimensional que é intrínseca ao desenvolvimento do conhecimento geométrico”. Segundo essa autora essa intencionalidade viabiliza o ir e vir entre as dimensões de uma figura geométrica. Contudo, essa percepção didática, importante para a aprendizagem, muitas vezes, não é considerada na docência. Talvez isso explique, um pouco, as dificuldades observadas nas produções dos estudantes ao transitar entre as dimensões em uma figura.

Quanto à desconstrução dimensional, Souza e Moretti (2020), perceberam que há uma tendência de os estudantes ficarem enclausurados na maior dimensão da figura. Por exemplo, na atividade envolvendo perímetro, o aspecto perceptivo do quadrado em 2D, fez com que os estudantes respondessem automaticamente a área da figura. Para esses autores “Esse gesto de se manter na mesma dimensão acarreta dificuldades para a aprendizagem de geometria, de perceber as figuras geométricas em seus aspectos transitórios considerando seus elementos e propriedades” (p.234-235).

Concordamos com Souza e Moretti (2020) que problemas que envolvem figuras podem abordar intencionalmente a desconstrução dimensional, desde que sejam consideradas as variáveis didáticas²⁴ necessárias na elaboração dessas atividades. Para Souza e Moretti (2020), a desconstrução dimensional nas figuras, ao resolver atividades, é uma operação fundamental para a aprendizagem em geometria. E por isso ela deve ser considerada, mas em relação ao ensino, falta-se conhecimento sobre essa complexidade cognitiva, segundo Raymond Duval.

Conforme Souza e Moretti (2020) a desconstrução dimensional deve ser realizada por meio de ações didáticas específicas, com atividades envolvendo figuras. Para isso, a atividade e a figura disponibilizadas aos estudantes devem ter intencionalidade, envolvendo a desconstrução dimensional das formas e coordenando

²³ Detalharemos na próxima seção (Duval, 2006b, 2011b, 2012, 2016, 2018).

²⁴ As variáveis didáticas fazem parte de nossa metodologia detalhada no capítulo 5 desta pesquisa.

diferentes registros de representação semióticos. Esses aspectos deveriam perpassar todo o ensino de matemática continuamente, especialmente na educação básica. Mas, para isso, faz-se necessário ocorrer uma mudança nos processos de ensino e aprendizagem da geometria.

Em nosso estudo propusemos algumas atividades pensando nas variáveis didáticas²⁵, para que os estudantes pudessem adentrar no olhar não icônico. Para isso consideramos também o ambiente de geometria dinâmica por permitir manipular e explorar heurísticamente as figuras, conjecturando algumas provas matemáticas e possibilitando aos estudantes um pouco da matemática dedutiva.

Conforme a BNCC, ao conjecturar, os estudantes também devem procurar contraexemplos quando necessário. Partindo de argumentações empíricas, espera-se que busquem argumentações mais formais, incluindo pequenas demonstrações diretas. Isso deve contribuir para o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo da matemática.

Ao elaborar as atividades consideramos os estudos de Souza e Moretti (2020, p.236), que pontuam que “Os estudantes precisam mudar a forma de ver as dimensões, aprender a quebrar o que se impõe perceptivelmente, enxergar o implícito e as possibilidades de operações numa figura em dimensões inferiores”. Assim, ao promovermos a desconstrução dimensional nas figuras, pretendemos também formar uma base conceitual em geometria visando a aprendizagem.

Filho e Moretti (2020) realizaram um estudo de caso com um estudante de 16 anos, diagnosticado com discalculia, dislexia e distúrbio do processamento auditivo central, apoiando-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, focando na análise do discurso. Entendemos, concordando com esses autores, que o discurso pode fornecer subsídios importantes para compreendermos os processos cognitivos para a aprendizagem em geometria, considerando que a matemática é uma ciência em que as características da linguagem são mais complexas que em outras áreas do conhecimento.

Segundo Duval, para compreender matemática é essencial dominar a linguagem matemática. É por meio dessa linguagem que o pensamento matemático pode ser externalizado. Por conta disso, Sabel e Moretti (2020) acreditam que o campo da linguagem pode contribuir para a aprendizagem matemática no campo aditivo. Sendo assim, sugerem que a compreensão do discurso deve ser expandida para outros

²⁵ Página 95.

contextos do ensino da matemática. Esses autores destacam que ao não considerar a língua natural, dentre os registros mobilizados, desconsideram-se análises importantes do funcionamento cognitivo. Isso colaborou para que a linguagem fosse considerada em nosso estudo como um dos registros de representação semiótica. Na linguagem, o discurso matemático nos interessa, pois observamos, baseados em Duval, que as produções matemáticas perpassam pela utilização de diferentes registros de representação semiótica e, neste caso, principalmente por essa potencialidade da língua natural.

Para Langwinski, Bassoi e Brandt (2020) o modo como o professor concebe o objeto matemático influencia ao ensinar matemática. Esses autores realizaram um estudo com cinco professores de Matemática de escolas públicas, que ministravam aulas no oitavo²⁶ ano do Ensino Fundamental há pelo menos dez anos. Observou-se que os procedimentos usados pelos professores estudados foram exercícios de fixação com registros algébricos, sem abordar a representação geométrica, apesar de o livro didático conter essa abordagem.

Pinho e Moretti (2020) ao estudarem a criatividade em geometria no ensino superior, utilizando o *GeoGebra*, constataram que esse software de geometria dinâmica pode ser útil para elaborar e resolver problemas de matemática. Contudo, seu potencial semiótico deve ser explorado. Em nosso estudo esse software foi utilizado para visualizar e movimentar as figuras, conjecturando algumas propriedades, verificando sua veracidade e validando-as. Um exemplo disso foi inscrever um triângulo em uma semicircunferência, observando que sempre será retângulo.

Observamos, nessas investigações realizadas no Brasil, que nenhuma delas consideraram como adentrar no olhar não icônico²⁷, em função do papel que as figuras geométricas desempenham. Vimos que “O leque das atividades possíveis para fazer os alunos trabalharem com as figuras de geometria ou sobre as figuras de geometria é extremamente vasto” (Duval, 2022, p.6).

Mithalal (2010)²⁸ realizou um estudo com estudantes do Ensino Secundário na França com a finalidade de desestabilizar o olhar icônico, que vem ao encontro de nossa

²⁶ Os conteúdos abordados nas aulas observadas foram: expressões algébricas, divisão de monômios, potenciação de monômios, produtos notáveis e, adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios (Langwinski; Bassoi; Brandt, 2020).

²⁷ A distinção de visualização icônica e de visualização não icônica será detalhada na seção 3, conforme Duval (2005).

²⁸ Foi orientado por Nicolas Balacheff. Mithalal trabalhou com geometria dinâmica, usando o *Cabri 3D*, com estudantes do primeiro ano do Lycée (referente ao segundo ano do ensino médio no Brasil).

pesquisa. Esse autor utilizou em sua pesquisa o trabalho de Duval (2005)²⁹, distinguindo visualização icônica da não icônica, com o intuito de analisar as condições para emergir a desconstrução dimensional nas atividades geométricas propostas aos estudantes, observando o papel da demonstração na resolução de problemas de geometria. Para isso, incluiu nas atividades geométricas os conceitos e as relações teóricas dos objetos geométricos envolvidos, limitando a evidência visual nas figuras.

Mithalal e Balacheff (2019), em seu estudo exploraram algumas tensões entre “ver” no desenho e provar, com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, considerando os estudos de Duval sobre visualização e desconstrução dimensional. Esses autores observaram que os desenhos possuem um papel fundamental para a aprendizagem de geometria, porém, muitas vezes, colaboram para não mobilizar uma geometria dedutiva, pois, quando os estudantes veem resultados em um desenho isso contribui para não demonstrar alguns resultados.

Duroisin, Beauset e Lucchese (2020)³⁰, verificaram que quando a visualização icônica é a exercida no ensino primário, a aquisição da visualização não icônica, fundamental para a geometria dedutiva, fica sob a responsabilidade exclusiva do estudante desde o início do ensino secundário. Entretanto, os resultados obtidos mostram que é possível desenvolver a visualização não icônica nos estudantes no final do ensino primário, considerando no processo de ensino e aprendizagem o desenvolvimento da desconstrução dimensional nas figuras geométricas.

Em nosso estudo estamos considerando o estudo de Mithalal (2010), de Mithalal e Balacheff (2019) e os pressupostos teóricos de Duval, buscando um modo de neutralizar³¹ a visualização icônica adentrando a não icônica com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e, do primeiro ano do Ensino Médio.

Como pretendemos elaborar atividades buscando adentrar o olhar não icônico, analisaremos na próxima seção o modo específico de pensar e de trabalhar em matemática, o que caracteriza uma atividade matemática e suas duas faces, a exposta e a oculta. Finalizamos apresentando o gesto intelectual necessário para a aprendizagem

²⁹ Utilizou também em seu quadro teórico a noção de paradigma geométrico (Houdement; Kuzniak, 2006), (Kuzniak, 2009), a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1998) e, a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990).

³⁰ Este trabalho foi realizado na Bélgica com estudantes da classe “Sixième et dernière année de l’enseignement primaire”, que corresponde ao quinto e sexto ano do ensino fundamental no Brasil. Este estudo também cita experimentação realizada com estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental.

³¹ Duval (2005) utiliza o termo neutralizar.

em matemática, bem como algumas dificuldades relacionadas a conversão em matemática que ocorre por conta do fenômeno da não congruência semântica.

3 O modo específico de pensar e de trabalhar em matemática

Segundo Duval há estudos apontando caminhos para superar as incompreensões em matemática. Alguns sugerem “[...] introduzir os conhecimentos matemáticos seguindo o processo natural e comum da sua formação a partir de observações e experiências concretas” (Duval, 2018, p. 1). Enquanto outros apontam para o aspecto prático dos conhecimentos matemáticos, visto que são muitas vezes utilizados em atividades profissionais e cotidianas.

Duval aponta-nos um caminho para superar as incompreensões que os estudantes enfrentam no ensino de matemática. Incompreensões estas que muitas vezes se revelam duradouras e algumas vezes definitivas para alguns estudantes. Na matemática essas dificuldades de compreensão se manifestam quando os estudantes estão resolvendo atividades. A resolução, em matemática, “[...] é a atividade considerada por excelência na aquisição e utilização de conhecimentos matemáticos” (Duval, 2018, p. 1).

Assim, iremos analisar a seguir o que caracteriza uma atividade matemática e como analisá-la segundo Duval.

3.1 Característica e análise de uma atividade matemática

O que caracteriza uma atividade matemática, comparada com outras atividades científicas ou intelectuais, “*é a transformação de representações semióticas do mesmo registro para fins de cálculo ou de demonstração por derivação dedutiva de uma proposição, ou exploração de processos de transformação, ou heurísticos na resolução de problemas, ou ainda em modelagem*” (Duval, 2016, p. 25).

A análise de uma atividade matemática, por meio de registros é uma análise cognitiva e esta deve ser feita considerando todas as conversões existentes entre os registros que são requisitados de modo explícito ou implícito. A face oculta consiste em coordenar espontaneamente, pelo menos, dois registros de representação, para compreender e utilizar os conhecimentos matemáticos. Essas coordenações precisam ser desenvolvidas nos estudantes de 6 a 16 anos, “[...] uma vez que o pensamento matemático é a sinergia de diversos registros, e o que se chama de “conceitualização” não é nada mais que do que a mobilização sinérgica de diversos registros [...]” (Duval, 2016, p. 34, grifos do autor).

Nesse processo, para compreender o ponto de vista cognitivo, deve-se verificar se o estudante é capaz de reconhecer imediatamente o mesmo objeto matemático em

representações semióticas distintas. Este reconhecimento requer a conversão de representações ao mudar de registro. Nesta conversão o reconhecimento do mesmo objeto matemático deve ser considerado nos dois sentidos de conversão, e não apenas no sentido que usualmente o professor considera.

Esse critério cognitivo pode ser percebido nas salas de aula quando o professor usa uma representação, diferente das situações típicas estudadas, de um objeto matemático e o estudante argumenta que o conteúdo não foi visto. Esse argumento mostra o insucesso que os estudantes encontram ao resolver situações novas em sala de aula.

O ponto de vista cognitivo para Duval (2018, p. 15, aspas do autor), torna-se necessário em geometria “quando for necessário apontar propriedades que “explicam” como se chega à solução de um problema e por que “funciona”, ou ainda, porque outras respostas “não funcionam” mesmo que pareçam ser perceptivamente evidentes”. Ao usar uma propriedade não é suficiente somente mencioná-la, sua justificação ocorre por meio das representações semióticas. Isso faz com que os estudantes vivenciem uma experiência intelectual que promove uma maneira de pensar que é específica da matemática.

A análise matemática, face exposta, corresponde aos conhecimentos matemáticos e se apresenta por meio de: métodos de cálculo, teoremas, definições, funções, algoritmos, entre outros. Nas atividades, normalmente, considera-se a exatidão nos cálculos e a justificação dos resultados obtidos. Entretanto esse critério é suficiente somente em tarefas que exigem o uso de algoritmos simples, por exemplo: um cálculo com números inteiros.

Do ponto de vista matemático, os problemas dados no ensino são elaborados com o objetivo de que o estudante aprenda determinada propriedade ou procedimento matemático. Assim, privilegia-se um procedimento que permite resolver todos os tipos de problemas, dados em sala de aula, utilizando a propriedade ou o procedimento.

Em suma, para Duval (2018, p.25):

Todas as observações que se pode fazer quanto a escolha dos objetivos de ensino de matemática, sobre a organização de ensino em escala de um nível de ensino e sobre a organização do trabalho em sala de aula convergem para a mesma conclusão: o lado oculto da matemática, quer dizer, a maneira de pensar e trabalhar que é própria da matemática, não tem lugar no ensino de matemática no nível fundamental.

Por isso que a teoria de registros de representação semiótica é considerada semiocognitiva, pois considera o ponto de vista matemático (*semiósis*) e o ponto de vista cognitivo (*noesis*)

A seguir analisamos alguns aspectos da conversão entre registros, concordando com o que Duval pontua sobre a mudança de registros “[...] o interesse de mudanças de registro depende do fato que cada registro tem tratamentos que lhes são próprios” (Duval, 2012a, p. 283).

3.1.1 A dificuldade da conversão em matemática

A mudança de registro deve ser espontânea, caso contrário, este gesto intelectual³² se torna a primeira dificuldade para a compreensão em matemática, “uma vez que esbarra na impossibilidade epistemológica e, em seguida, cognitiva de não confundir as representações utilizadas e o objeto matemático representado” (Duval, 2016, p. 18). Um dos fatores que pode contribuir para que essa mudança de registro não seja espontânea é a noção de não congruência semântica que detalhamos na próxima seção após as apreensões em geometria. Fizemos essa escolha porque esse fenômeno em geometria pode ocorrer por conta da não congruência semântica entre enunciado e figura. Segundo Moretti, Brandt e Almouloud (2022a) “[...] a *congruência semântica* vai determinar o caráter natural ou, ao contrário “arbitrário” de uma conversão” (p. 178, grifos dos autores). Ela mensura o grau de transparência entre duas representações semióticas.

Ao realizar a conversão o mesmo objeto matemático deve ser reconhecido em cada registro de representação semiótica, conhecendo o funcionamento específico de cada um, visto que cada um possui tratamentos específicos. Um exemplo disso são os tratamentos figurais que as figuras em geometria permitem. Dependendo da atividade, existe um registro em que os tratamentos podem ser realizados de modo mais econômico e poderoso. Para Damm (2015) a economia em um tratamento está relacionada com a aproximação com a língua natural e também com os procedimentos realizados para as resoluções. Existe ainda a complementariedade entre os registros. Por exemplo, a língua natural não possibilita as mesmas representações que um gráfico ou uma figura geométrica.

³² Duval (2018), denominou de gesto intelectual o reconhecimento de um mesmo objeto matemático em registros de representação diferentes.

Para Duval a coordenação entre registros de representação não é natural. Esse autor ressalta que “Pode-se observar, em todos os níveis de ensino, um **isolamento de registro de representação**” (Duval, 2012a, p. 283, grifos do autor). Dito de outro modo privilegiar somente um registro de representação. Esse autor lembra que a ausência de coordenação entre registros não impede toda compreensão. Porém,

[...] esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações em que deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito. (Duval, 2012a, p. 283, aspas do autor).

Além da dificuldade da conversão existe o fenômeno da congruência semântica. Esse fenômeno na geometria está relacionado ao modo de ver uma figura e depende do papel que ela desempenha na atividade matemática. Por esta razão a noção de congruência está na próxima seção, onde apresentamos quatro maneiras de ver uma figura: a apreensão perceptiva, a apreensão sequencial, a apreensão discursiva e a apreensão operatória. Quanto às apreensões e congruência Duval (2012b) destaca que a resolução de problemas em geometria exige por um lado que os estudantes passem de um tipo de apreensão a outro e, por outro lado que as dificuldades encontradas nas atividades ocorrem por conta “[...] de congruência entre os enunciados e a apreensão operatória, assim como entre enunciado e os enunciados e a apreensão discursiva” (p.118).

4 Um olhar cognitivo para as figuras em geometria

Nesta seção iremos mostrar que a figura possui um papel importante para a aprendizagem de geometria, detalhando que ela pode ser vista de quatro maneiras diferentes: a perceptiva, a sequencial, a discursiva e a operatória. Para Duval (2012b) para ver uma figura se faz necessário reconhecer além do que uma imagem mostra numa primeira vista, quer dizer, ver uma figura depende do papel que ela desempenha em uma atividade matemática.

Essas operações visuais possibilitam analisar uma atividade em geometria e compreender as possíveis dificuldades dos estudantes. Moretti e Brandt (2015, p. 599) pontuam que as apreensões em geometria são “Um caminho frutífero para compreendermos o modo como acontece a aprendizagem da geometria [...]”.

4.1 As apreensões em geometria

A *apreensão perceptiva* é automática e imediata, possui a função de identificar as figuras geométricas, trata-se de reconhecer imediatamente uma forma. No ensino de geometria normalmente os estudantes prendem-se à *apreensão perceptiva* sobre as figuras e isso pode contribuir em alguns casos, enquanto que em outros pode dificultar a compreensão em geometria. Por exemplo, nos anos iniciais é possível que os estudantes reconheçam como um quadrado somente quando suas arestas paralelas forem paralelas às arestas da forma retangular da folha em que ele esteja representado. Caso não esteja representado desse modo pode não ser identificado como um quadrado.

Conforme Duval (2004), essa apreensão também pode ser chamada de *apreensão gestáltica*. A Gestalt ou psicologia da forma busca compreender como as figuras são organizadas e o modo como os sujeitos as percebem. Considerando a forma uma figura pode se organizar de acordo com suas dimensões: adimensional, unidimensional, bidimensional e tridimensional. Moretti e Brandt (2015) com base em Gomes Filho (2008) destacam algumas leis Gestálticas importantes para a aprendizagem em geometria: unidade, pregnância da forma, fechamento, continuidade e proximidade.

Unidade: “Uma figura que pode ser consubstanciada em um único elemento, ainda que em um sentido mais amplo, pode ser entendida como um conjunto de vários elementos, configurando o todo como um único elemento” (Moretti; Brandt, 2015, p. 603). Um triângulo, por exemplo, pode ser visto como um todo (único elemento) ou por meio da reunião dos segmentos determinados por três pontos não colineares A, B e C (um conjunto de vários elementos).

Pregnância da forma: Indica a tendência de olharmos uma figura por meio de estruturas mais simples, homogênea, regular e com a menor complicação visual possível na organização de seus elementos. Por exemplo: dados dois triângulos, um equilátero indicando somente a medida do lado por l e o outro, escaleno indicando as medidas dos lados por l_1, l_2 e l_3 , e a dos ângulos por a_1, a_2 e a_3 ; a nossa percepção visual tende a nos dirigirmos espontaneamente para o triângulo regular e sem a denotação dos ângulos.

Fechamento: A percepção visual se dirige naturalmente para as linhas fechadas, mesmo quando são colocados elementos que parecem se completar. Essa lei evidencia continuidade da estrutura por meio de agrupamentos de elementos para formar uma figura mais completa. Por exemplo: dependendo do modo como um cubo está representado numa folha ele pode ser visto como um hexágono.

Continuidade: refere-se ao modo como nossa percepção visual organiza os elementos que formam um todo em um conglomerado coerente, seguindo uma direção contínua para constituir a melhor forma possível do objeto. Por exemplo: as linhas paralelas no desenho de um trilho de trem tendem a serem vistas em sua continuidade, dando a impressão de que se encontram no infinito.

Proximidade: é a capacidade perceptiva de agrupar os elementos visuais próximos uns dos outros de modo a compor um único elemento. Por exemplo a reunião de seis triângulos equiláteros em torno de um único vértice forma um hexágono regular.

A *apreensão discursiva* é controlada, necessita das hipóteses sobre a figura representada e requer um vocabulário específico que é a síntese das definições. Em relação a essas duas apreensões, a perceptiva e a discursiva, Duval (2012b, p. 119, grifos do autor) destaca que **“Estas duas atitudes se encontram, geralmente, em conflito, porque a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente”**.

A *apreensão sequencial* é requisitada quando se constrói ou se descreve uma figura, cujo objetivo é reproduzi-la. A *apreensão operatória* consiste em modificar a figura inicial e reorganizá-la de diferentes modos. Essas modificações podem ser realizadas mentalmente, graficamente, com recortes ou dobraduras, ou com representações figurais usando materiais manipuláveis como o tangram. Por exemplo, pode-se dividir um quadrado em dois triângulos congruentes e, com estes formar um triângulo ou um paralelogramo. Esses tratamentos figurais permitem evidenciar a equivalência de áreas de figuras planas. O tipo de apreensão operatória que iremos

abordar neste estudo é a modificação mereológica. Esta consiste em decompor a figura de partida em subfiguras, todas de mesma dimensão. (Duval, 2012b).

Duval (2012b) pontua que toda figura pode ser modificada de diversos modos graficamente ou mentalmente. “Mas, diferentemente da construção geométrica, o modo escolhido para a modificação da figura é neutro: ele não muda a apreensão, nem mesmo a análise que pode ser feita” (p. 125). Contudo, dependendo da modificação feita na figura, podem surgir tratamentos distintos sem relações, por exemplo repartir uma figura em subfiguras pode mostrar a equivalência de áreas, enquanto aumentar uma figura contribui para evidenciar o centro de homotetia.

As *apreensões perceptiva e discursiva* são fundamentais para a aprendizagem em geometria, pois a percepção é automática e autônoma e o discurso depende de uma interpretação comandada pelas hipóteses do problema. Assim, “os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver” (Duval, 2012b). Isso contribui para que os estudantes tenham dificuldades em resolver problemas com figuras, por muitos se apegarem a apreensão perceptiva. Essa observação pode ser notada quando os estudantes, ao resolver um problema de geometria, leem o enunciado, constroem a figura e se concentram nela, sem retornar ao enunciado. “Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura” (p. 124).

Para a aprendizagem em geometria normalmente se tem que “ver” a figura para compreender. No entanto, “ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra” (Duval, 2012b, p. 118). Por isso é que a apreensão perceptiva de uma figura pode se tornar um problema para a aprendizagem geométrica. Uma figura geométrica pode ser o que ela não mostra, mas o que o enunciado a leva a mostrar (Moretti; Brandt, 2015).

Os quatro modos de ver uma figura: a *apreensão perceptiva*, a *apreensão discursiva*, a *apreensão sequencial* e a *apreensão operatória*, independem um do outro. Contudo, subordinam-se à *apreensão perceptiva*. A *apreensão perceptiva* por ser imediata nas formas contribui para que essas não sejam modificadas. Porém, a mobilização de figuras para resolver problemas normalmente exige que a transforme em outras figuras. Essas operações concedem às figuras sua potencialidade heurística. Conforme Moretti e Brandt (2015, p.605) “A heurística e a demonstração resultam da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva [...]”.

Duval destaca que os tratamentos figurais dependem do que é dito no enunciado como hipótese. Isso mostra a subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva. Essa subordinação faz com que a figura se torne, de certo modo, um fragmento de um discurso teórico e, a compreensão dessa teorização contribui para a demonstração. Para ele:

De fato, a verdadeira representação correspondente a uma atividade de demonstração em geometria, não será uma figura, mas uma rede semântica de propriedades e objetos. É relativamente à representação de tal rede, que a distinção do estatuto dos enunciados (hipóteses, proposições a demonstrar, proposições utilizáveis) e a importância da ordem dos enunciados podem tomar todo o seu sentido para os alunos. Naturalmente, a elaboração de tais representações é complexa, e poucas tentativas foram feitas até o presente momento para desenvolver este tipo de representação (Duval, 2012b, p. 135, grifos do autor).

Contudo, sem mobilizar explicitamente ou implicitamente esse tipo de representação, não se tem a apreensão discursiva das figuras. **“A apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável”** (Duval, 2012b, p. 135). Essa apreensão requer relacionar a figura com as hipóteses enunciadas utilizando um vocabulário específico que é a síntese das definições.

A *apreensão discursiva* é importante para a aprendizagem em geometria porque os problemas geométricos exigem para a sua resolução um tipo de raciocínio que requer uma axiomática local, que se desenvolve por meio do registro da língua natural. Qualquer figura em uma atividade matemática é objeto de duas apreensões geralmente com funcionamentos cognitivos opostos: a *apreensão perceptiva* e a *apreensão discursiva*. A perceptiva é imediata e automática sobre as figuras, enquanto a discursiva é controlada pelas hipóteses enunciadas que viabilizam a aprendizagem em matemática (Duval, 2012b).

Para nós as apreensões *perceptiva* e *discursiva* são as mais importantes neste trabalho. Nas atividades que propusemos buscamos utilizar as definições, os axiomas, as proposições e os teoremas que fizessem parte dos conhecimentos adquiridos pelos estudantes. Também consideramos as conversões e os tratamentos existentes entre os registros: algébrico, figural e o da língua natural.

A apreensão discursiva também é importante para a visualização não icônica que será detalhada na próxima seção, porque segundo Duval (2005) para entrar no olhar

não icônico o olhar icônico precisa ser neutralizado. E, a *apreensão perceptiva* que atua na visualização icônica pode, segundo Duval (2012b), ser neutralizada pela apreensão discursiva.

Para Duval (2005) a falta de coordenação entre os registros figurais e discursivos e a dificuldade em realizar os tratamentos possíveis nessas representações, incluindo a noção de congruência semântica entre enunciado e figura, contribui para que impasses ocorram na aprendizagem da geometria. Para Moretti, Brandt e Almouloud (2022b, p.94), a congruência semântica promove as operações semióticas e cognitivas de tratamento e conversão e “[...] pode explicar algumas das incompreensões, as fragilidades, os erros, e levar o professor a organizar a prática educativa com foco nas rupturas que se fizerem necessárias”.

A coordenação de registros em matemática às vezes não é espontânea e isso pode ocorrer por conta da não congruência semântica. Essa noção será tratada a seguir, onde mostramos que a resolução de problemas em geometria mobiliza por um lado a passagem de um tipo de apreensão a outro e, por outro, depende da congruência semântica entre enunciado e figura.

4.2 Congruência semântica

A congruência semântica é a distância cognitiva entre duas representações de um mesmo objeto matemático sejam elas referente ou não ao mesmo registro, trata-se de um fenômeno semiótico e cognitivo que mensura a transparência entre duas representações semióticas. A congruência ocorre quando existe uma relação clara e translúcida entre os conteúdos que devem ser substituídos tanto intra-registro (transformações que ocorrem no interior de um mesmo registro, a saber os tratamentos) quanto inter-registro (transformações que ocorrem entre registros distintos: as conversões).

Quando ocorre a congruência semântica o estudante reconhece o mesmo objeto matemático nas duas representações, seja nos tratamentos ou nas conversões. Duval (2004) pontua que três condições devem ocorrer para haver a congruência semântica:

1. Relação semântica entre as unidades significantes de cada representação.
2. Cada unidade significativa de partida corresponder a somente uma unidade significativa no registro de chegada.
3. As unidades significativas de partida possuírem a mesma ordem que as unidades significativas de chegada.

Quando uma dessas situações não ocorre temos o caso da não congruência semântica, com isso a passagem de uma representação a outra não é imediata. Moretti, Brandt e Almouloud (2022b) destacam que “[...] a *congruência semântica* vai determinar o caráter natural ou, ao contrário, “arbitrário” de uma conversão (p. 178, grifos dos autores). Esses autores lembram que “Para um grupo de alunos de um certo nível de escolaridade, as operações de tratamentos ou de conversões podem ser congruentes, enquanto para alunos de outro nível de escolaridade essas operações podem não ocorrer do mesmo jeito” (2022, p. 96).

No exemplo a seguir (fig. 1) temos congruência semântica entre enunciado e cálculo numérico. Pois, ocorrem as três situações:

1. Existe correspondência semântica entre as unidades significativas no registro em língua natural (**perdeu**, **5 bolinhas**, **ganhou**, **4 bolinhas**) e no registro numérico (**-**, **5**, **+**, **4**).
2. Cada unidade significante no registro de partida corresponde a somente uma unidade significante no registro de chegada (-5+4).
3. Mantém-se a ordem entre as unidades significativas no registro de partida e no registro de chegada.

Figura 1 – Congruência semântica



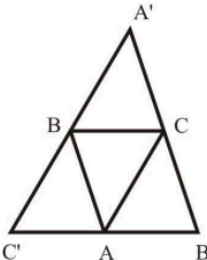
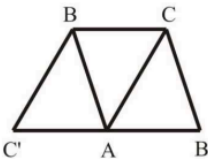
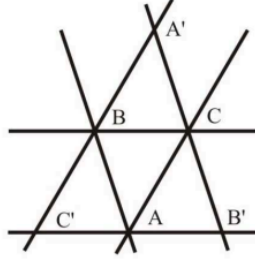
Fonte: Hillesheim e Moretti (2020, p. 105)

Neste estudo iremos considerar o fenômeno da congruência semântica entre enunciado e figura por conta da apreensão perceptiva que se impõe na resolução de atividades e que pode induzir ao erro. Consideramos que a não congruência semântica entre figura e enunciado por conta da apreensão perceptiva pode ser minimizada pelas operações discursiva e operatória.

Trazemos a seguir dois exemplos do estudo de Duval (2012b), no primeiro temos o enunciado congruente com a figura (fig. 3) e, no segundo o enunciado não é congruente com a figura (fig. 4). A figura (2a) abaixo evidencia por meio da apreensão perceptiva um triângulo (BCA) inscrito em outro triângulo (C'B'A'). A figura (2b)

mostra dois paralelogramos ($C'ACB$ e $AB'CB$) e, a (2c) parece ser um feixe de retas paralelas.

Figura 2 - Apreensões e congruência semântica

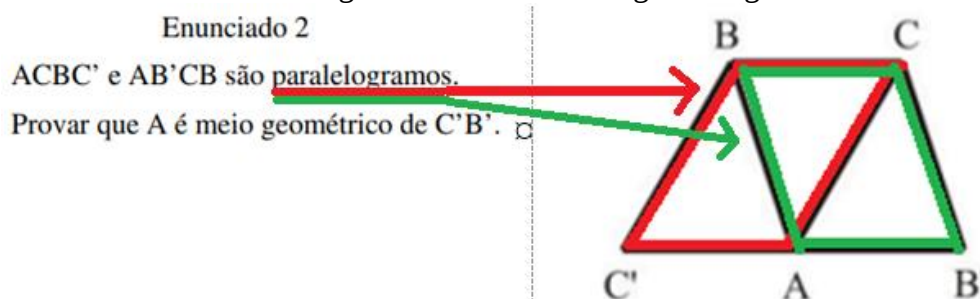
Figura 2 – Aplicações e congruência semântica		
Considerando as três figuras seguintes:		
Figura 2a 	Figura 2b 	Figura 2c 
Consideremos os enunciados seguintes:		
Enunciado 1 $A'C'$ e AC são paralelas; $A'B'$ e AB são paralelas; $B'C'$ e BC são paralelas; Provar que A é meio geométrico de $C'B'$.	Enunciado 2 $ACBC'$ e $AB'CB$ são paralelogramos. Provar que A é meio geométrico de $C'B'$.	

Fonte: Duval (2012b, p. 122)

Atividades combinando esses enunciados e figuras foram propostas para três grupos de estudantes de *troisième* na França, equivalente ao nono ano do Ensino Fundamental no Brasil.

O enunciado 2 com a figura 2b foi aplicada a dois desses grupos.

Figura 3 - Enunciado e figura congruentes



Fonte: Adaptado de Duval (2012b, p. 122)

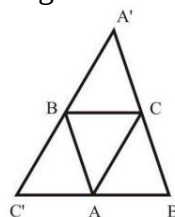
Nessa atividade (fig. 3) o objeto matemático paralelogramo está designado no enunciado e pode ser percebido na representação pois as unidades figurais de dimensão 2 são imediatamente visíveis. Com isso temos que o enunciado é congruente com a

figura. Isso contribuiu para perceber por meio da apreensão perceptiva os dois paralelogramos na figura ($\overline{ACBC'}$ e $\overline{AB'CB}$). Concluindo que A é ponto médio de $\overline{C'B'}$, pois $\overline{C'A} = \overline{BC} = \overline{AB'}$.

Antes de resolver essa atividade (fig. 3), esses estudantes resolveram a atividade combinando o enunciado 1 com a figura 2a (fig. 4). Para eles a atividade (fig. 4) não tinha o mesmo direcionamento que a atividade anterior (fig. 3). Nesta atividade, diferentemente da anterior, não se tem o objeto geométrico paralelogramo designado no enunciado e não pode ser visto perceptivamente na representação, assim o enunciado não é congruente com a figura. A apreensão perceptiva evidencia o triângulo BCA dentro do triângulo A'B'C' “ou como um mosaico de quatro triângulos pequenos independentes” (Duval, 2004, p. 163, tradução nossa). Entretanto, para resolver este problema o paralelogramo precisa ser visto por meio da apreensão operatória e articulado às suas propriedades pela apreensão discursiva.

Figura 4 – Enunciado e figura não congruentes

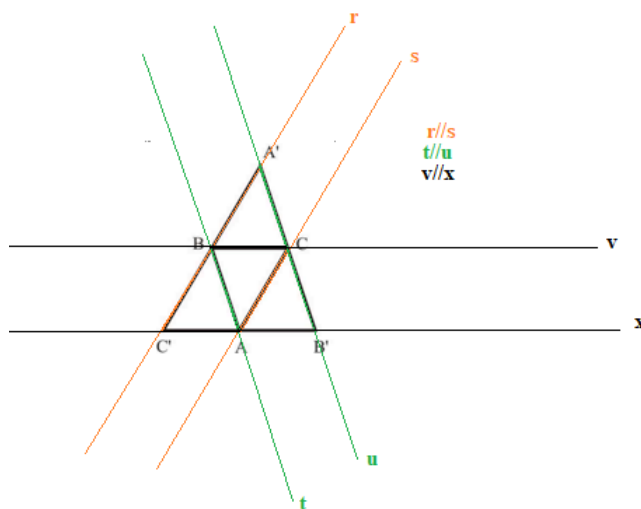
A'C' e AC são paralelas;
 A'B' e AB são paralelas;
 B'C' e BC são paralelas;
 Provar que A é meio geométrico de C'B'.



Fonte: Adaptado de Duval (2012b, p. 122)

Observe que a apreensão perceptiva (fig. 4) não evidencia os paralelogramos $C'ACB$ e $AB'CB$. Para visualizá-los é necessário traçar por meio da apreensão operatória as retas paralelas que contém os segmentos paralelos. Assim:

Figura 5 – Não congruência entre enunciado e apreensão operatória



Fonte: Adaptado de Duval (2012b, p. 122)

Essa articulação do enunciado (língua natural) para a figura (registro figural) mobiliza a apreensão discursiva para perceber que v e x são retas paralelas, assim $\widehat{BC'A} \equiv \widehat{BCA}$. Portanto, $C'ACB$ é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos. De modo análogo, percebe-se o paralelogramo $AB'CB$. A partir disso a resolução ocorre articulando a apreensão discursiva ao tratamento algébrico. Assim:

(I) $\overline{C'A} // \overline{BC}$ e que $\overline{C'A} \equiv \overline{BC}$.

Temos também que $AB'CB$ é um paralelogramo, logo:

(II) $\overline{AB'} // \overline{BC}$ e que $\overline{AB'} \equiv \overline{BC}$.

De (I) e (II), temos que:

$$\overline{C'A} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{AB'}$$

$$\text{Assim: } \overline{C'B'} \equiv \overline{C'A} + \overline{AB'} \equiv \overline{AB'} + \overline{AB'} \equiv 2\overline{AB'} \rightarrow \overline{AB'} = \frac{1}{2}\overline{C'B'}$$

Portanto, A é ponto médio de $\overline{C'B'}$

Comparando os resultados obtidos verificou-se que mais da metade dos estudantes que acertaram a primeira atividade (fig. 3) cujo enunciado é congruente a figura não reconheciam o mesmo problema (fig. 4), mobilizando os mesmos conhecimentos, cujo enunciado não é congruente com a figura.

Outra possibilidade de resolução (fig. 4) é reconfigurar os triângulos $C'AB$ e CAB , $B'AC$ e BAC reconhecendo respectivamente os paralelogramos $C'ACB$ e $AB'CB$.

Na atividade a seguir o objeto geométrico “retângulo” está presente no enunciado e por meio da apreensão perceptiva sugere um tratamento figural em detrimento de outros possíveis visualizando um retângulo grande repartido em seis retângulos menores, totalizando sete retângulos que não corresponde à solução. Trata-se de um exemplo onde o enunciado é congruente com a figura, porém esta congruência induz a visualizar erroneamente sete retângulos. A resolução requer a operação de reconfiguração, dividindo a figura inicial em retângulos menores.

Figura 6 – Congruência semântica entre enunciado e figura

Quantos retângulos têm nesta figura?

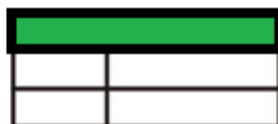


Fonte: Duval (2012b, p. 124) a partir de Balacheff (1982)

Essa apreensão perceptiva não contribui para ver outros retângulos, como o hachurado em verde, por exemplo.

Figura 7 – Apreensão operatória não congruente com a figura

Quantos retângulos têm nesta figura?



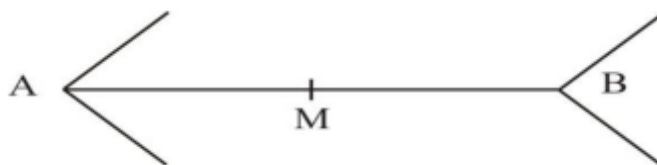
Fonte: Adaptado de Duval (2012b, p. 124) a partir de Balacheff (1982)

Para responder corretamente a atividade a apreensão discursiva precisa ser mobilizada junto com a apreensão operatória para determinar todos os retângulos existentes na figura, ou seja, 18 retângulos no total.

Muitas vezes o fenômeno da não congruência semântica ocorre em geometria pelo fato de a apreensão perceptiva ser imediata nas figuras. Assim:

Figura 8 – Não congruência semântica por meio da apreensão perceptiva

O segmento AM (Figura 2) é maior, menor ou igual ao segmento MB?



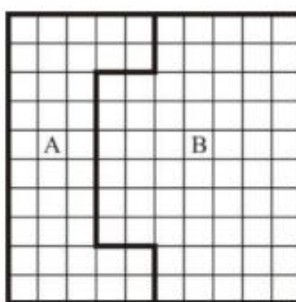
Fonte: Moretti, Brandt e Almouloud (2022b, p. 102) adaptado de Guillaume (1979, p. 91)

Neste exemplo, possivelmente, a apreensão perceptiva pode comandar as demais apreensões e assim contribuir para não mobilizar a apreensão operatória. Uma das operações que pode ser feita é traçar uma circunferência de raio $\overline{MB}$ com centro em M. Se o ponto A pertencer a esta circunferência temos que: $\overline{AM} = \overline{MB} = r$ (r é o raio da circunferência). Logo, os segmentos são congruentes.

A atividade a seguir (fig. 9) aplicada a 392 estudantes do Ensino Médio teve os seguintes resultados: “75,7% acertaram a questão sobre a área; 30,8% acertaram a questão sobre o perímetro; 27% acertaram ambos os itens; por fim, dos 75,7% que acertaram o item sobre área, 41% erraram sobre perímetro” (Moretti; Brandt; Almouloud, 2022, p. 102-103).

Figura 9 – Congruência semântica entre enunciado e figura

Assinale a resposta correta (adaptado de Capes/Cofecub, 1996).



- a)
- O perímetro da parcela A é igual ao perímetro da parcela B
 - O perímetro da parcela A é maior do que o perímetro da parcela B
 - O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B
 - Explique a escolha.
- b)
- A área da parcela A é igual a área da parcela B
 - A área da parcela A é maior do que a área da parcela B
 - A área da parcela A é menor do que a área da parcela B
 - Explique a escolha.

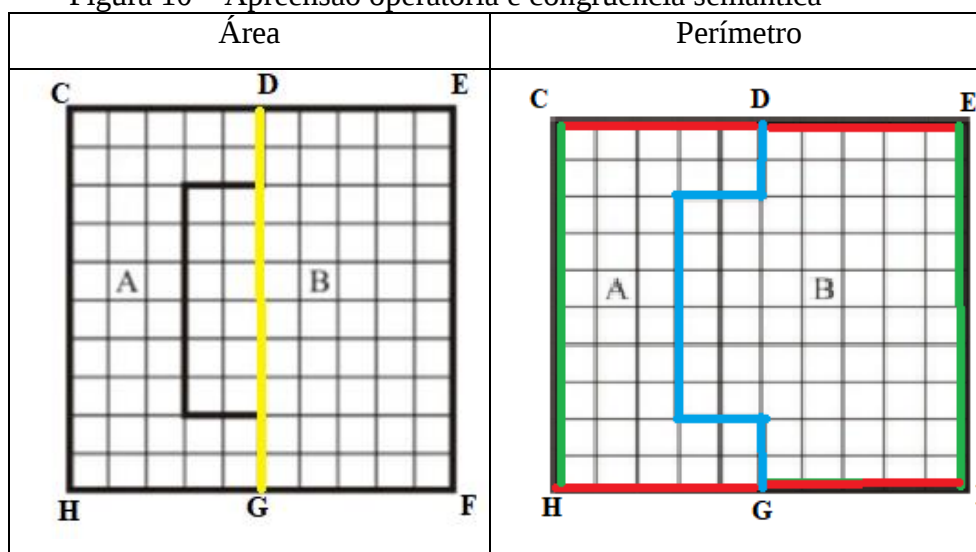
Fonte: Moretti, Brandt e Almouloud (2022b, p. 102)

Essa atividade sobre área e perímetro na malha quadriculada aparentemente não apresenta dificuldades para estudantes do Ensino Médio. Entretanto, a resolução exige a articulação das apreensões perceptiva e operatória. Essa relação mobiliza uma mudança dimensional na figura apresentada, do bidimensional (2D) para o unidimensional (1D) e para o adimensional (0D).

Para o cálculo de área temos que o enunciado é congruente com a figura e com o procedimento de resolução. Para a área é suficiente ver (fig. 10) um retângulo grande (CDFH), dividido em dois retângulos por meio da adição do traço amarelo (DEFG e CDGH). Esses dois retângulos possuem a mesma área. Observe que a figura B possui área maior que o retângulo DEFG. Logo a área da figura B é maior que a área da figura A.

Porém, para o perímetro o a congruência semântica relacionada à apreensão perceptiva induz o erro. A apreensão perceptiva induz a deduzir que o perímetro da figura B é maior que o perímetro da figura A, pois a dimensão maior 2D da figura B se impõe perceptivelmente dando a impressão que é maior. No entanto para determinar o perímetro é necessário sair da dimensão 2D e ir para a dimensão 1D (fig. 10), verificando que os perímetros são iguais pois: $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{HG} = \overline{GF}$, $\overline{CH} \equiv \overline{EF}$ e, o lado azul é comum às duas figuras (A e B). Logo, os perímetros são iguais.

Figura 10 – Apreensão operatória e congruência semântica



Fonte: Elaborado a partir de Moretti, Brandt e Almouloud (2022b, p. 102)

Esses exemplos mostram que a figura geométrica possui “[...] uma estrutura perceptiva autônoma: os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver” (Duval, 2012b, p. 124).

Moretti e Brandt (2015) pontuam que a impressão inicial que temos sobre uma figura é pessoal e por isso a apreensão *perceptiva* deve ser considerada quando o objetivo for ensinar ou aprender geometria. Para isso, precisamos compreender o que caracteriza uma figura em geometria.

4.3 As figuras em geometria

Na geometria as figuras podem aparecer de modo explícito ou implícito. Contudo elas diferem de todos os demais desenhos³³, pois permitem as desconstruções dimensionais, a exploração heurística e formam um registro de representação específico. Duval (2011, p.90) pontua que “A desconstrução dimensional é onipresente em toda definição, em todo raciocínio como em toda explicação em relação às figuras em geometria”. Na desconstrução dimensional considera-se o aspecto das dimensões de uma figura e a mudança no número de suas dimensões.

As figuras permitem os tratamentos figurais, “independentemente ou mesmo antes, a utilização de uma propriedade matemática” (Duval, 2011, p. 85). Essas operações permitem transformar uma figura em outra, com a finalidade de resolver algum problema ou mesmo ser apresentada como um contraexemplo. (Duval, 2011). Porque “toda figura é geradora de uma outra, seja por extensão de seu procedimento de construção ou pela reorganização visual das formas imediatamente reconhecidas” (Duval, 2022, p. 12). Outra especificidade das figuras geométricas é que elas podem ser construídas mobilizando instrumentos como régua, compasso, softwares. Esses procedimentos quase sempre exigem as desconstruções dimensionais 1D/2D e 0D/2D.

Para Moretti e Brandt a figura geométrica “é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir do que é dito e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes” (Moretti; Brandt, 2015, p. 600).

³³ “Segundo Laborde e Capponi, uma figura é uma associação de um referente teórico definido por uma conjunção de propriedades geométricas, o objeto geométrico, e um conjunto de desenhos, suas representações. Assim, um desenho pode ser considerado por si só, como um objeto gráfico, ou como uma das possíveis representações de um objeto geométrico. Então resolver problemas de geometria nunca é puramente dedutivo, mas envolve ir e voltar entre ambos” (Parzysz, 2006, p. 128, *apud* Mithalal; Balacheff, 2019, p.163, tradução nossa).

Para Duval uma figura geométrica:

É uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto e contínuo. As zonas caracterizam-se pela sua forma, quer dizer, pelo seu contorno: um traço fechado ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo. (Duval, 2012b, p. 121).

Duval (2011, p. 91) “O ‘desenho’ é uma configuração particular que mostra no papel, no quadro negro ou no monitor do computador”. Enquanto a figura é constituída pelas propriedades representadas pelo desenho (Duval, 2011). Assim, visualizar uma figura consiste em identificá-la conforme suas propriedades que não podem ser vistas “porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade” (Duval, 2011, p. 91).

4.3.1 A visualização na geometria

Para Duval a característica fundamental da visualização³⁴ geométrica consiste em considerar as dimensões numa figura geométrica e não suas formas. Isso é importante, pois conforme Duval (2005, 2016), a compreensão em geometria ocorre quando os estudantes conseguem realizar desconstruções dimensionais em figuras. Contudo o reconhecimento do que uma figura geométrica representa não é espontâneo ou imediato (Duval, 2016). A visualização é baseada “no reconhecimento perceptivo de formas enquanto contornos fechados e no reconhecimento de suas relações topológicas” (Duval, 2016, p. 12). Para Mithalal e Balacheff (2019), visualização significa ver uma figura e interpretar o que é percebido. Essa interpretação depende de definições, conceitos, teoremas, entre outros.

Para Duval:

[...] um trabalho específico sobre a visualização é necessário antes de introduzir os triângulos e os quadriláteros uma vez que o estudo das suas propriedades geométricas pressupõe a coordenação da linguagem e do desenho das formas percebidas, com esses dois registros culturalmente comuns sendo, então, utilizados contrariamente ao seu emprego espontâneo. (Duval, 2016, p. 28).

Fora da geometria a visualização e a identificação das formas são indissociáveis, pois o objeto corresponde imediatamente a forma (Duval, 2005). Porém,

³⁴ Para Duval (2016), na visualização geométrica as operações semióticas são as figurais.

na geometria, na maioria das vezes, para distinguir um objeto é necessário recorrer a uma enunciação explícita ou implícita. A linguagem possui um papel fundamental para essa conscientização no estudante, para isso os gestos intelectuais devem ser desenvolvidos para a aprendizagem (Duval, 2016). Para Duval (2005), a geometria é um domínio do conhecimento que exige a atividade cognitiva de articular o gesto, com a linguagem e com o olhar, pois nesta os estudantes precisam construir, raciocinar e ver indissociavelmente. Por esta razão é que se faz necessário associá-los para a aprendizagem em geometria (Duval, 2005).

Duval pontua que a visualização nas formas geométricas pode ser feita de três modos distintos:

- por referência, quer dizer, pela indicação verbal de propriedades dadas a título de hipótese;
- por semelhança, quer dizer, por semelhança das formas ou das disposições espaciais que se pode perceber na realidade; e
- por desconstrução dimensional ou por decomposição mereológica, para obter outra configuração. Segundo a desconstrução ou a decomposição praticada, uma figura parece então poder referenciar outras propriedades do que aquelas dadas a título de hipótese na figura inicial. Dito de outro modo, *o conteúdo de uma figura intencionalmente construída é potencialmente multirreferencial*. (Duval, 2016, p.30-31, grifos do autor).

Do ponto de vista matemático o primeiro modo de visualizar as figuras é o único que é considerado. O segundo modo relaciona as figuras com a realidade. E o terceiro modo é o único “que permite verdadeiramente utilizar figuras para descobrir uma solução para o problema” (Duval, 2016, p. 31). Segundo Duval (2016), ocorre um equívoco didático no ensino de geometria devido a essas três maneiras de visualizar as figuras. Isso ocorre pelo fato de pressupor que se pode transferir um desses modos de visualizar as figuras para os outros dois, entretanto essa possibilidade não existe (Duval, 2016). Para Duval “De um ponto de vista cognitivo, uma conscientização do funcionamento de cada uma dessas três maneiras e o desenvolvimento de coordenação são necessários para que se possa fazer um pouco de geometria.” (Duval, 2016, p.31).

Duval (2005) destaca que existe muita complexidade nos modos de “ver” as formas em geometria. Assim, pontua que:

Ver uma figura, em geometria, exige dissociar o que diz respeito à grandeza e, portanto, aquilo que depende da escala de grandeza onde se efetua o ato de ver, e o que concerne às formas discriminadas, as quais são independentes da escala de grandeza. A relação com as figuras, ou seja, a maneira de olhar para

o que elas fornecem para ver, concerne à discriminação das formas e não a grandeza ou a mudança da escala de grandeza. (Duval, 2005, p.3).

Para Duval (2005), as figuras geométricas possuem três aspectos que dão a elas uma análise cognitiva particular. O primeiro é a intuição sobre o que “se vê na figura”. Essa intuição não exige explicações complementares. Uma das dificuldades que o ensino da geometria enfrenta ocorre por conta dessa intuição nas figuras geométricas baseada na percepção. O segundo é que as figuras “dão lugar a um reconhecimento quase imediato dos objetos que elas apresentam como imagens desenhadas: imagens de quadrinhos (desenhos animados), croquis, caricatura, esquema, etc.” (Duval, 2011b, p. 84). O terceiro é que as figuras diferem de todas as imagens, pois permitem sua construção instrumentalmente, com régua, compasso e com softwares (Duval, 2011).

Em geometria, a utilização das figuras, depende dos dois primeiros aspectos. O que as figuras permitem “ver” depende da atividade em que são mobilizadas (Duval, 2005, 2011). O terceiro aspecto é considerado no ensino para explicar as propriedades que as figuras possuem. A construção instrumental das figuras, inclusive utilizando softwares, proporciona uma confiabilidade e uma objetividade a elas, evidenciando verificações e observações. Contudo, para essas atividades o modo de “ver” as figuras também é importante, pois antes de serem construídas instrumentalmente as figuras exigem que se antecipem as produções que devem ser realizadas (Duval, 2011).

Duval (2005), considera que a análise cognitiva das figuras na resolução de problemas, no reconhecimento ou dedução de propriedade remete ao modo de “ver” que elas permitem. Assim, a maneira de ver as figuras em geometria é diferente do modo como vemos as imagens e os objetos reais.

O modo matemático de “ver” as figuras em geometria ocorre por meio da conscientização das operações figurais que as figuras em geometria permitem. “Ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados, justapostos ou os contornos de objetos da realidade” Duval (2011b p. 85, grifos do autor). Para ver matematicamente as figuras geométricas ou desenhos é necessária uma mudança no olhar, sem que mude a representação destes. Duval (2011) pontua que existem vários modos de reconhecimento das unidades figurais, mesmo quando o reconhecimento de uma impossibilita o reconhecimento de outras.

A análise do funcionamento cognitivo dessa mudança de olhar deve ser realizada considerando as dimensões das unidades figurais. As unidades figurais podem ser: cubos, pirâmides, esferas, ... (3D); triângulos, quadrados, círculos, ... (2D); retas,

curvas, ... (1D); e, pontos (0D). Porém não basta somente identificar essas unidades figurais. Para Duval, é necessário também diferenciar as representações físicas dessas unidades figurais. Como: “[...] as maquetes de cubo (3D/3D) ou os gabaritos (2D/3D) ou os fios estendidos ou um raio de laser (1D/3D) e as representações semióticas em perspectiva (3D/2D) ou os traçados de curvas e retas (1D/2D)” (Duval, 2005, p.3).

Nesse modo de ver geralmente a unidade figural de maior dimensão se impõe perceptivelmente, isso gera um bloqueio em reconhecer as unidades figurais de dimensões menores. Assim, para “ver” geometricamente uma figura é necessário “*operar uma desconstrução dimensional das formas* que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e *isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel*”³⁵ (Duval, 2011, p. 87, grifos do autor).

O modo matemático de “ver” as figuras geométricas solicita a passagem espontânea ou rápida de uma maneira de ver para outra. Somente as figuras geométricas exigem esse modo de ver. Duval pontua que:

Na maneira normal de ver, não levamos jamais em conta a dimensão das unidades figurais que reconhecemos e não temos preocupação de fazer variar essa dimensão para reconhecer outras unidades figurais que não vemos, mas que vão se tornar mais importante que aquelas que vemos. *Isso é uma variação que se opera no olhar e não por um deslocamento do monitor. Naturalmente, isso exige um longo treinamento, pois vai contra o funcionamento automático do reconhecimento perceptual das formas.* (Duval, 2011, p.88, grifos do autor).

Para Duval (2011) as definições, propriedades e teoremas são fundamentados nesse modo de ver as figuras em geometria. Assim, como devemos “ver” um triângulo para justificar que a soma dos seus ângulos internos é 180° ? Detalharemos um pouco dessa visualização por meio das apreensões e, na sequência retornaremos a este exemplo, mostrando a visualização não icônica. Pontuamos que ao realizar uma prova matemática a partir de axiomas e postulados os aspectos visuais de uma figura não comandam, ela serve apenas como um suporte para os raciocínios, representando a generalidade e não apenas um caso particular. Assim como, essas provas mobilizam pelo menos dois registros de representação, a língua natural e o figural e, muitas vezes, o algébrico.

³⁵ Daremos exemplos desse modo de ver na próxima seção.

Krakecker e Freitas (2018) observaram como os estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental conjecturam e validam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Estes pesquisadores distribuíram diversos triângulos aos estudantes com a finalidade de medir, com o auxílio de um transferidor, seus ângulos internos e somá-los, justificando seu raciocínio. Em um segundo momento, para justificar a soma dos ângulos internos, os estudantes deveriam pintar e recortar os ângulos internos de um triângulo qualquer, juntando esses ângulos recortados em torno de um único vértice. Note que, esse procedimento consiste em realizar um tratamento figural, uma exploração heurística no triângulo, por meio de uma divisão mereológica (2D).

Os estudantes ao realizarem esses procedimentos conjecturaram e concluíram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . A validação dessa conjectura foi sustentada pelas medidas obtidas com o transferidor e/ou pela observação de que os ângulos justapostos formavam um ângulo raso. Quer dizer, as “[...] conclusões foram obtidas tomando por base exemplos singulares, manipulações, dentre outros, sem haver elementos relacionados à generalização” (Krakecker; Freitas, 2018, p. 133). Isso também foi observado no estudo de Pais e Freitas (1999) com professores licenciados em matemática ou ciência, que estavam ministrando aulas para os anos finais do Ensino Fundamental. Nesse estudo, Pais e Freitas observaram que as ideias mais gerais e abstratas explicitadas pelos professores eram “[...] fortemente aprisionadas ao mundo dos objetos concretos” (Pais; Freitas, 1999, p. 4). Esses autores perceberem que os conhecimentos geométricos eram frequentemente relacionados a objetos físicos, não sendo muitas vezes concebidos como conteúdos geométricos abstratos, prevalecendo a visualização icônica.

Krakecker e Freitas (2018) pontuaram que os discentes encontraram dificuldades na escrita em linguagem matemática. Os estudantes, basicamente, “[...] escreviam nos protocolos como se estivessem nos contando como ou porque acreditavam que sua resposta estivesse correta” (p. 135). Nessas verificações, é possível observar que a constatação empírica foi suficiente pelo fato de a apreensão perceptiva sobressair à apreensão discursiva. Para Pais e Freitas (1999) a predominância desse aspecto experimental pode corroborar para uma visão inadequada do processo dedutivo da geometria. Com isso, não se tem a compreensão de que as validações dos conhecimentos geométricos ocorrem por meio das demonstrações geométricas.

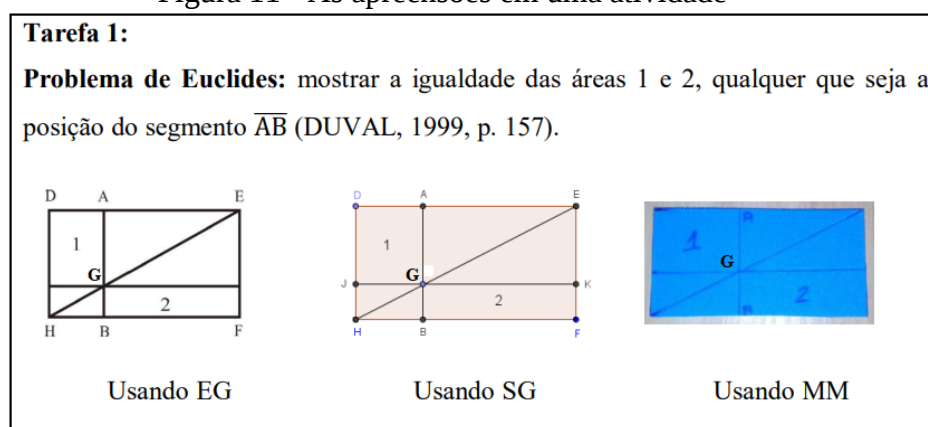
Possivelmente a dificuldade em escrever as respostas nos protocolos na linguagem matemática ocorreu pelo fato de os estudantes não conseguirem articular as

propriedades geométricas necessárias para justificar seu raciocínio. Isso, conforme Pais e Freitas (1999) pode ser influenciado pela dificuldade de generalização e abstração em geometria. Esse entrave pode contribuir para que os estudantes não mobilizem definições e propriedades geométricas em seus raciocínios.

4.3.2 As apreensões observadas em uma atividade de geometria

As apreensões em uma figura geométrica podem influenciar ao resolver uma atividade. A atividade a seguir (fig. 11, abaixo) foi realizada com professores de matemática da educação básica e, para resolvê-la os professores podiam representar a figura por meio de Expressões Gráficas (EG), Softwares de Geometria (SG) e Materiais Manipuláveis (MM).

Figura 11 - As apreensões em uma atividade



Fonte: Duval (2012b, p. 129) e Moran (2015, p. 77)

Para Moran (2015), as expressões gráficas (EG) são “[...] as figuras construídas manualmente com o uso de materiais para desenhos e para figuras em geral, materiais como régua, transferidor, esquadro, compasso, lápis, etc.” (Moran, 2015, p.61). Conforme Moran (2015) essa representação é a mais comum nas aulas com construções geométricas na Educação Básica e no Nível Superior. Os Materiais manipuláveis (MM) são os materiais que podem ser manuseados, como poliedros e recortes de cartolina. Os *Softwares* de Geometria (SG), por exemplo, o *GeoGebra* e o *Cabri Gèomètre 3D*.

Moran (2015), observou na tarefa 1 (fig. 11, acima) que a *apreensão perceptiva* se sobressaiu à *apreensão discursiva* quando os professores utilizaram o MM para recortar na cartolina a figura enunciada. Um professor considerando o aspecto visual das figuras pontuou que as áreas 1 e 2 não eram iguais, contradizendo as hipóteses do problema.

Ao predominar a *apreensão perceptiva* uma tendência foi o ponto G ser o ponto médio da diagonal $\overline{HE}$ (fig. 11, acima). Isso fez com que alguns professores intuitivamente percebessem as igualdades das áreas 1 e 2. Nesses raciocínios não foram notadas demonstrações dedutivas, ocorreram simplesmente comprovações empíricas para mostrar a igualdade dessas áreas. No MM a *apreensão perceptiva* influenciou um professor a recortar somente os retângulos 1 e 2. Decompondo o retângulo 1 em duas subfiguras para formar o retângulo 2, contudo, desconsiderou a mobilidade do segmento $\overline{AB}$.

Segundo Moran (2015), a *apreensão perceptiva* no MM e na EG colaborou para que alguns professores realizassem medidas com régua nos polígonos 1 e 2, comprovando a igualdade de suas áreas por meio do registro numérico. No MM a constatação perceptual “induziu os sujeitos a realizarem medidas das subfiguras, considerando-as suficientes para provar a igualdade das áreas solicitadas no enunciado da tarefa ao invés de utilizar um raciocínio lógico dedutivo” (Moran, 2015, p. 85). No entanto, esse procedimento de medir não é aceitável, visto que o segmento $\overline{AB}$ não é fixo e o enunciado solicita mostrar as igualdades das duas áreas, sem medidas.

Para Moran (2015), a percepção imediata na figura também contribui para que alguns professores não relacionassem a figura com o enunciado, por hipótese as áreas 1 e 2 são iguais qualquer que seja a posição do segmento $\overline{AB}$. A tendência do segmento $\overline{AB}$ na *apreensão perceptiva* foi mais a de ser fixo (Moran, 2015).

Para resolver essa tarefa a *Apreensão discursiva* é necessária para justificar a igualdade das áreas 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento $\overline{AB}$, pois essa atividade exige que o professor visualize que DHEF é um retângulo e que o segmento $\overline{HE}$ é a sua diagonal. Assim, os triângulos DHE e EFH são congruentes. Esta visualização deve também ser realizada nos retângulos JHBG e AGKE. Essas propriedades articuladas a *apreensão operatória* e a *apreensão discursiva* contribuem para concluir as igualdades das áreas 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento $\overline{AB}$.

Moran (2015) observou que a *apreensão discursiva* no *GeoGebra*, algumas vezes, não foi necessária, pois os professores utilizaram a ferramenta de calcular áreas e se convenceram que as áreas 1 e 2 eram iguais. Um professor efetuou tratamentos figurais na EG e descreveu a solução por meio de um raciocínio dedutivo, realizando uma conversão do registro figural para o registro da língua natural. Assim, mobilizou a

apreensão discursiva e operatória. Após, esse professor ao utilizar o MM, realizou decomposições na figura de partida de modo diferente dos demais. Ele recortou todas as subfiguras (quatro triângulos dois a dois congruentes e dois retângulos) e, por sobreposição dos triângulos congruentes concluiu a igualdade das áreas 1 e 2 (Moran, 2015).

Nesse protocolo, percebemos que a articulação do registro figural com a linguagem contribuiu para resolver de modo dedutivo a atividade. Constatamos a *apreensão discursiva* ao mobilizar a propriedade que a diagonal de um retângulo o divide em dois triângulos congruentes nos três retângulos (DHFE, JHBG e AOKE). São esses registros figurais, a linguagem, os tratamentos, as *apreensões discursiva e operatória* que contribuem na solução dessa atividade qualquer que seja a posição do segmento $\overline{AB}$.

A *apreensão operatória* é requerida quando se decompõe o paralelogramo DHEF em subfiguras (quatro triângulos e dois paralelogramos). Conforme Duval, essa é uma modificação figural do tipo mereológica. Essa decomposição mereológica pode ser de três tipos:

- 1) Estritamente homogênea: quando as unidades figurais das figuras obtidas na decomposição possuem a mesma forma da figura inicial.
- 2) Homogêneas: quando as unidades figurais das figuras obtidas na decomposição são diferentes da figura inicial, porém elas são iguais entre si.
- 3) Heterogêneas: quando as figuras obtidas na decomposição são todas diferentes entre si.

Entendemos que muitos não conseguiram relacionar a hipótese com os tratamentos figurais, assim como, perceber que o segmento $\overline{AB}$ não era fixo pelo fato de não identificarem as desconstruções dimensionais que podem ser realizadas na figura inicial e, por não articularem a visualização não icônica com a linguagem. Em nosso estudo, buscamos articular a visualização com a linguagem, considerando as desconstruções dimensionais, no olhar não icônico que podem ser realizadas nas figuras em geometria. Supomos que isso pode potencializar ainda mais a aprendizagem em geometria, visto que, no estudo de Moran, um professor conseguiu visualizar a figura no SG e ao visualizar elementos figurais importantes “abandonou a ideia de medidas, tentando interpretar a figura geometricamente” (Moran, 2015, p. 96).

Considerando que os professores participantes do estudo de Moran são professores de matemática, entendemos que o raciocínio lógico dedutivo praticamente

não apareceu nas resoluções pelo fato de a *apreensão perceptiva* predominar na figura inicial, independentemente de sua representação (MM, EG, SG). A constatação perceptual na figura levou os professores a não realizarem provas lógico-dedutivas, pois a percepção visual já os convencia da resolução. Moran esclarece que no MM “Essa reação imediata não favorece um raciocínio dedutivo” (Moran, 2015, p. 89). Essa autora pontua que a *apreensão perceptiva* no MM direcionou os professores para um modo natural de ver a figura.

Essas dificuldades ocorrem em geometria porque a resolução das atividades mobiliza o registro figural e o registro em língua natural. Mas, muitas vezes, os tratamentos nesses registros e as conversões não são suficientes para chegar à solução, sendo necessária a coordenação desses registros com um discurso teórico em língua natural para definir os objetos que as figuras representam. Isso ocorre porque uma mesma figura pode representar situações matemáticas diferentes, mobilizando raciocínios diferentes. “Isto quer dizer que a introdução a uma figura geométrica necessariamente é discursiva” (Duval, 2004, p. 168, tradução nossa).

Nosso interesse pelo discurso teórico é para compreendermos como eles são mobilizados e como podem contribuir para a aprendizagem em matemática. Moretti, Brandt e Almouloud (2022a, 2022b) destacam que a congruência semântica pode ocorrer nos tratamentos, nas conversões e nas operações discursivas. Por isso, a seguir detalhamos as funções discursivas de uma língua.

4.4 As funções discursivas e metadiscursivas de uma língua

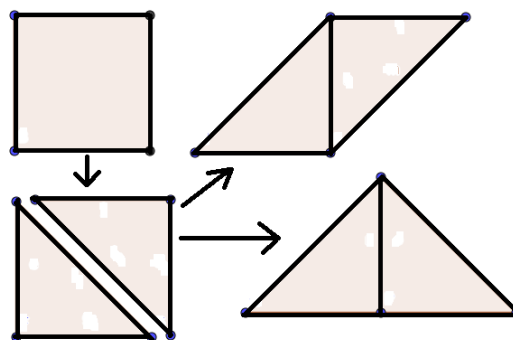
A língua é de suma importância para a aquisição de conhecimentos matemáticos e o seu papel deve ser analisado em função da variedade de discursos possíveis. É próprio de uma língua permitir um discurso de modo que possa ser compartilhado entre indivíduos que queiram se comunicar e é por meio dele que ocorre a interação social entre os indivíduos. Para Duval (2004, p. 86, tradução nossa) “O discurso é o emprego de uma língua para dizer alguma coisa”. Assim a prática de um discurso é indissociável de um funcionamento cognitivo.

Para possibilitar uma variedade de discursos possíveis a língua deve cumprir funções metadiscursivas (comum a todo sistema de representação) e discursivas (possui funções específicas na mobilização de uma língua). A base de análise da variedade de discursos possíveis ocorre distinguindo essas diferentes finalidades da língua e o funcionamento específico de cada uma.

As três funções cognitivas metadiscursivas são irreduzíveis entre si e comuns a todos os registros de representação, são elas: a comunicação, o tratamento e a objetivação. A **comunicação** é uma função necessária que todo sistema de representação deve desempenhar. Sua finalidade é transmitir informações e permitir a socialização entre os indivíduos. A língua natural é o sistema semiótico conveniente para cumprir este papel, podendo ser por meio de conversa, de declaração, de comentário, de exposição, de conferência etc. Duval (2004) ressalta que existem “[...] outros sistemas além das línguas naturais que podem cumprir esta função social de comunicação e que às vezes pode substituí-la. Por esta razão, todos os sistemas semióticos podem servir de “língua” sem ser línguas” (p. 87, tradução nossa, grifos do autor). Um exemplo são as notações simbólicas em álgebra.

O **tratamento** é necessário para a atividade do conhecimento. Toda informação recebida deve ser transformada de modo a extrair novas informações sejam elas explícitas ou implícitas. De modo análogo à comunicação, o tratamento pode operar em sistemas não linguísticos, por exemplo o figural. No registro figural, o tratamento abaixo ocorre ao transformar o quadrado em dois triângulos congruentes e com estes formar um paralelogramo e um triângulo.

Figura 12 – Transformação mereológica homogênea



Fonte: Autora

A **objetivação** é uma função importante para o desenvolver o controle que o sujeito pode ter sobre suas atividades e experiências. É a possibilidade de o indivíduo ter consciência do que até o momento era inconsciente, percebendo que aprendeu. Normalmente, a objetivação ocorre por meio de uma fala, uma expressão, uma escrita, uma figura etc.

Para Duval (2004) “As funções discursivas são as funções cognitivas que um sistema semiótico deve cumprir para que seja possível um discurso” (p. 88, tradução

nossa). Esse autor estabeleceu quatro funções discursivas para que se tenha um discurso. São elas: **função referencial** (designação de objetos), **função apofântica** (falar sobre os objetos designados por meio da constituição de enunciados completos), **função de expansão discursiva** (articular aos enunciados completos) e **função de reflexividade discursiva** (“transformação potencialmente recorrente de um enunciado completo” (p. 89, tradução nossa)). Cada uma dessas funções possuem as operações associadas a elas que não iremos detalhar aqui por não fazerem parte dos objetivos da pesquisa.

A **função referencial** em um discurso tem por finalidade designar objetos por meio da utilização de signos (números, letras, palavras...) para representar os objetos matemáticos. Por exemplo: o uso das letras A, B e C para designar os vértices de um triângulo, quando dizemos A, B, C, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, para indicar respectivamente: aos vértices, lados e ângulos de um triângulo.

A **função apofântica** serve para criar falas, escritas e expressões sobre os objetos de modo coerente. Para Duval “A possibilidade de designar objetos não é suficiente para permitir uma atividade discursiva” (p. 104, tradução nossa). Para cumprir essa função se faz necessário dizer qualquer coisa sobre os objetos, permitindo atribuir às frases valor lógico (verdadeiro ou falso), valor epistêmico (frases de acordo com as regras internas da matemática, situadas em um contexto teórico) e valor social (o motivo da construção da frase). Sabel e Moretti (2022, p. 342) observam que:

Um exemplo disso seria quando um estudante diz que o “triângulo ABC é um retângulo, pois possui um ângulo reto”, pois está se referindo a algo relacionado a um determinado triângulo designado como ABC por meio de uma frase. Essa expressão pode ser validada como verdadeira (valor lógico), caso o retângulo em questão seja de fato um retângulo, assim como é coerente, pois respeita as regras da matemática, uma vez que um ângulo reto implica no triângulo ser retângulo (valor epistêmico). O motivo da criação da frase dependerá do contexto (valor social), embora, geralmente, busque atender a uma pergunta ou problema proposto pelo professor.

A função de **expansão discursiva** é a mais importante porque “[...] corresponde a possibilidade de articular diversos enunciados completos na unidade coerente de uma narração, de uma descrição, de uma explicação ou de um raciocínio” (Duval, p. 94, tradução nossa). Dionizio, Brandt e Moretti (2014) lembram que essa função permite relacionar, coordenar e concatenar frases de um modo coerente, o que possibilita o desenvolvimento do discurso e a elaboração de novas informações e deduções acerca do objeto matemático considerado.

A função de **reflexividade discursiva** consiste em “[...] assinalar o valor, o modo ou o *status* combinado para uma expressão por parte de quem enuncia” (Dionizio; Brandt; Moretti, 2014, p. 516).

As três primeiras funções discursivas foram usadas para realizar a análise do discurso dos estudantes ao resolver as atividades propostas.

5 Os olhares em geometria

Existem quatro modos de ver uma figura em geometria: *botânico*, *agrimensor*, *construtor* e *inventor* (Duval, 2005). O *botânico* é um modo de ver imediato nas figuras. Consiste em reconhecer e nomear as figuras na geometria plana, observando as diferenças e semelhanças de acordo com as características visuais. O *agrimensor* é solicitado quando, por exemplo, realizam-se medidas em um terreno e essas medidas são representadas no papel. O *construtor* é solicitado quando as figuras geométricas são construídas com instrumentos (régua e compasso) ou com softwares. O *inventor* é requisitado quando se adiciona traços à figura enunciada na atividade ou está é construída a partir do enunciado com a finalidade de descobrir nesta alguma possibilidade de resolução.

Duval (2005) cita dois exemplos clássicos para o inventor. O primeiro é dividir um triângulo em dois triângulos e com estes formar um paralelogramo. O segundo é construir um quadrado com o dobro da área de um quadrado enunciado. Esses dois problemas exigem a desconstrução dimensional das formas visuais percebidas e permitem a utilização heurística das figuras.

Porém a passagem de um modo de ver a outro exige uma mudança no olhar, pelo fato de que cada um exige um funcionamento cognitivo diferente. Segundo Duval (2005, p.9), cada um desses modos de ver “induz um tipo particular e limitado de compreensão”, assim como cada olhar desenvolve um conhecimento específico. Contudo, a predominância de um tipo de olhar pode contribuir para que os estudantes encontrem dificuldades para a aprendizagem de conceitos geométricos.

Para Duval (2005), os olhares *botânico* e *agrimensor* correspondem à visualização *icônica* e, os olhares *construtor* e *inventor* à visualização não icônica. Essas visualizações possuem funcionamento cognitivo oposto e para a aprendizagem em geometria é necessário ir do olhar icônico ao não icônico. Moretti e Brandt (2015) lembram que o passo inicial para a aprendizagem em geometria é o olhar icônico, porém considerando atingir o não icônico. Contudo, conforme Duval (2005), essa passagem pode ser difícil para muitos estudantes.

Duval (2005) pontua que fora da geometria essas visualizações são simultâneas, por isso não precisam ser dissociáveis. Porém, na geometria, essa indissociação da visualização icônica e visualização não icônica, baseada na percepção das formas, pode explicar algumas dificuldades encontradas no ensino da geometria de modo recorrente. Por isso, tratamos a seguir da diferença entre essas visualizações.

Também iremos considerar os estudos de Mithalal (2010) que buscou em seu estudo realizar a passagem da visualização icônica para a não icônica.

5.1 A visualização icônica: olhares botanista e agrimensor

Mithalal (2010) pontuou que a introdução da geometria nos primeiros anos de escolaridade é basicamente sensorial, por materiais manipuláveis, dobraduras, entre outros. O ensino de geometria é realizado muitas vezes com apoio em objetos materiais, onde o conhecimento é validado pelo empirismo. Porém, nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio ocorre uma mudança radical, os resultados muitas vezes não podem mais ser somente mostrados, mas devem ser justificados matematicamente.

Há na BNCC uma orientação de que os estudantes devem relacionar “[...] observações do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e [...]” associarem “[...] essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas” (Brasil, 2018, p. 265). As provas matemáticas, aparecem, por exemplo, no nono ano do Ensino Fundamental, onde um dos objetos do conhecimento é a realização de experimentações com o Teorema de Pitágoras e sua demonstração. Assim, os estudantes devem ser capazes de realizar demonstrações cada vez mais formais para validar as conjecturas. Este documento preconiza que os conceitos e propriedades matemáticas “[...] podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo” (p. 540). Ao investigar os estudantes devem conjecturar, buscando contraexemplos para refutá-las ou argumentos para validá-las. Para os anos finais do Ensino Fundamental “Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais “formais”, incluindo a demonstração de algumas proposições” (p. 540, grifos do autor). Esse documento preconiza que “A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental” (p. 265).

Para Mithalal a visualização icônica sobre os objetos geométricos pode ser um obstáculo para a aprendizagem em geometria, pois a representação de uma figura geométrica pode ser reconhecida como o próprio objeto a identificar. Supomos que mesmo que os livros didáticos utilizem o termo “representar” nas atividades para os objetos geométricos, a iconicidade por haver semelhança entre a forma reconhecida e o

objeto a identificar pode contribuir para que impasses ocorram na aprendizagem em geometria.

Esse autor destaca que na visualização icônica “A representação é assim identificada com algo já visto, objeto real, e a forma é um perfil estável que não pode ser transformado” (p. 13, tradução nossa. Uma consequência disso é que a representação de um cubo pode ser identificada como o objeto físico dado ou cubo mágico (perceptível e manuseável). Com isso, a representação do cubo pode ser vista como estável, não percebendo as desconstruções dimensionais que podem ser realizadas nesse objeto geométrico.

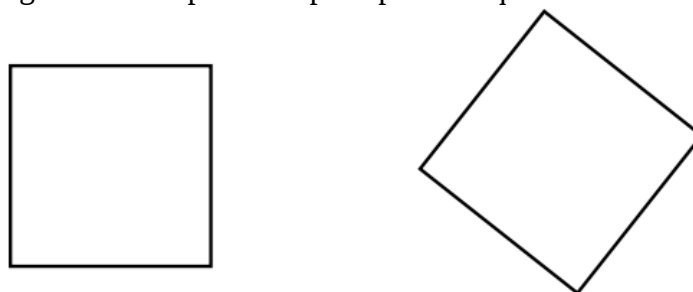
Entretanto, nos anos finais do Ensino Fundamental a visualização icônica não resolve muitos dos problemas de geometria, porque as provas empíricas diminuem e iniciam-se as demonstrações. Nessa mudança ocorre a passagem da visualização icônica para a não icônica, pois a “**VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA** é uma **SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES** que permite reconhecer as propriedades geométricas, por impossibilidade de obter certas configurações, ou por invariância das configurações obtidas” (Duval, 2022, p. 12, grifos do autor).

Para Duval (2005) e Mithalal (2010), essa transição que a geometria exige do concreto ao abstrato, do icônico ao não icônico, contribui para que muitos estudantes encontrem dificuldades na geometria. A visualização icônica predomina nos olhares *botânico* e *agrimensor*. Essa visualização consiste em reconhecer de modo discriminativo as formas geométricas, independentemente das operações figurais que podem ser realizadas nelas. Nessa visualização a forma geométrica é vista como estável, não podendo ser transformada em outras (decomposição mereológica) ou desconstruídas dimensionalmente ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D$). Perceptivelmente é identificar imediatamente a forma. Algumas vezes a visualização icônica é suficiente para resolver a atividade, em outras, a visualização não icônica é necessária. Assim, veremos alguns impasses para a aprendizagem em geometria quando, muitas vezes, permanecemos na visualização icônica. Assim como, “a predominância dada a uma dessas quatro entradas, com o desconhecimento de articulação entre ver e dizer podem criar obstáculos que, a médio e longo prazo vão se revelar intransponíveis para o progresso dos alunos” (Duval, 2022, p. 10).

5.1.1 A visualização icônica: impasses para a aprendizagem

Conforme Lima e Carvalho (2010), muitos estudantes têm dificuldade de identificar que as duas figuras abaixo são quadrados. Essa dificuldade talvez ocorra pelo fato de o quadrado ser representado, na maioria das vezes, somente na posição padrão. Isso ocorre porque no olhar botanista “UMA forma particular é privilegiada como TÍPICA” (Duval, 2022, p. 7, grifos do autor). Nesse olhar a constatação perceptiva é imediata, é o que se vê sobre; a fonte cognitiva de confiança pode ser realizada por superposição, no olhar ou utilizando um modelo. Essa intuição que se baseia na percepção é uma das dificuldades que o ensino de geometria enfrenta.

Figura 13 - A apreensão perceptiva no quadrado



Fonte: (Lima; Carvalho, 2010, p. 166)

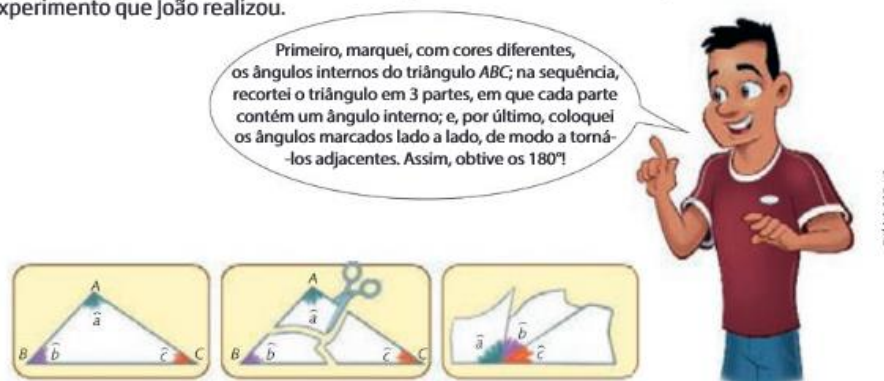
No campo da geometria a orientação para minimizar esse bloqueio é usar diferentes representações para o mesmo objeto matemático. Estudos em didática da Matemática apontam que alguns estudantes podem ter dificuldade em nomear e classificar os objetos geométricos porque tiveram acesso limitado dessas representações (Lima; Carvalho, 2010). Para Duval (2022, p.3) isso pode ocorrer pelo fato de “[...] o corpo das figuras onde os programas escolares podem demandar conhecimento é muito restrito, e corresponde às formas que são perceptivelmente notáveis e culturalmente familiares”.

O olhar icônico no exemplo abaixo pode não contribuir, por exemplo, para realizar uma demonstração para a propriedade das somas dos ângulos internos de um triângulo.

Figura 14 - A visualização icônica na propriedade

● **Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono**

Já vimos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Observe o experimento que João realizou.



Fonte: (Silveira; Marques, 2018, p. 103)³⁶

O olhar icônico nessa experimentação empírica pode induzir os estudantes a confundirem essa constatação perceptual com demonstração matemática. Para Mithalal (2010), a evidência visual nas figuras pode ser um bloqueio para a geometria dedutiva. Esse autor pontua que quando as propriedades podem ser percebidas na figura, como no exemplo acima, pode-se confundir o objeto geométrico com a representação.

Por essa razão em nosso estudo estamos considerando a articulação da visualização (icônica e não icônica) com o discurso. Entendemos que para suprir essa dificuldade não basta representar as figuras em posições diferentes, mas estas devem ser articuladas ao discurso. Por exemplo, o quadrado (Fig. 13) é um quadrilátero onde “os lados são iguais entre si e os ângulos são retos” (Lima; Carvalho, 2010, p. 157). Compreendemos que essas articulações contribuem para identificar que as duas representações são de quadrados.

Diante disso, percebemos que a visualização icônica, (Figura 15, abaixo), pode ter contribuído no estudo de Moran (2015)³⁷, para:

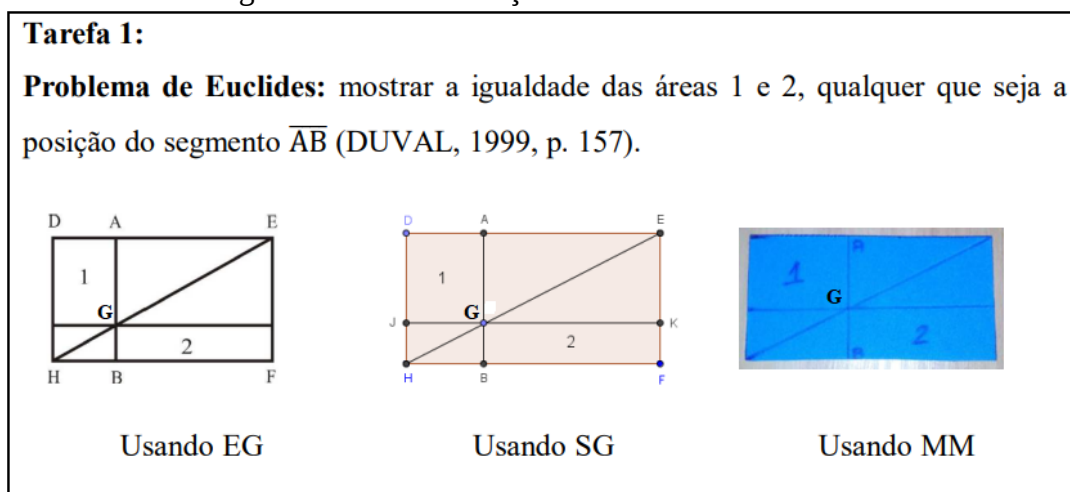
- Que os professores medissem com a régua os lados dos polígonos 1 e 2 (Figura 4, abaixo), calculando numericamente as áreas. Duval (2005) pontua que para aprender a ver em geometria “os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer aos aspectos métricos” (Duval, 2011, p. 92).
- Na EG a conversão mais realizada ser a do registro figural para o numérico.

³⁶ SILVEIRA, E; MARQUES, C. Matemática: compreensão e prática. 8º ano. -5. ed. -São Paulo: Moderna, 2018.

³⁷ Moran (2015) estudou como as apreensões em geometria podem influenciar os professores ao resolver atividades de matemática. Nosso estudo considera a visualização e o discurso (Duval, 2005).

- Considerarem o segmento $\overline{AB}$ fixo. Assim como, olharem somente para as figuras 1 e 2, desconsiderando as demais.
- O ponto G ser o ponto médio do segmento $\overline{HE}$. Isso se trata de um caso particular.
- Um professor desconsiderar a igualdade das áreas, contradizendo a hipótese do problema. Observe: “Não, acho que não são iguais” (Moran, 2015, p. 95).

Figura 15 - A visualização icônica e não icônica



Fonte: Duval (2012b, p. 129) e Moran (2015, p. 77)

Ao prevalecer a visualização icônica percebemos que esses professores não utilizaram raciocínio lógico dedutivo para produzir uma prova matemática, pois a percepção visual foi suficiente. Moran (2015, p. 88) pontuou que: “[...] P13 recortou a área 1 em duas partes e sobrepôs à área 2, afirmando que esta seria coberta pelas partes da área 1, e “demonstrando” a igualdade das áreas”. Duval (2009) reforça que esses tratamentos figurais não se constituem como justificativas matemáticas. Estes somente podem ser usados como suporte para uma formalização matemática. Essa constatação perceptual como demonstração também foi observada no estudo de Lorenzato (2006).

Para Mithalal (2010, p. 14, tradução nossa) “No caso em que a visualização icônica predomina, o valor epistêmico da demonstração é muito baixo. Assim, é perfeitamente possível rejeitar seu resultado sob o pretexto de que ele parece contraditório com a observação visual”.

Duval reforça que a iconicidade se impõe de modo autônomo nas atividades de geometria, porém nem sempre é suficiente para compreender o que as formas representam. Segundo Duval, “Às vezes é necessário recorrer a uma **enunciação**

implícita ou explícita” (2005, p. 11, **negrito do autor**). Para Lima e Carvalho (2010, p. 137), muitas vezes “[...] as atividades de movimentação, manuseio, visualização e representação gráfica não são suficientes [...]” para resolver uma atividade em geometria.

Além disso, esses autores destacam que:

[...] é imprescindível que, simultânea e progressivamente, sejam propostas, aos alunos, atividades que favoreçam o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos associados aos fenômenos e aos objetos físicos, bem como às suas representações. Tais conceitos e as relações entre eles, fornecem **modelos abstratos** de objetos do mundo físico ou de representações gráficas de objetos físicos. (Lima; Carvalho, 2010, p. 140, **negrito do autor**).

Esses modelos abstratos são os objetos matemáticos que fazem parte do conhecimento matemático sistematizado que os estudantes devem adquirir no decorrer de sua escolaridade. Na geometria os objetos matemáticos são denominados de: ponto, reta, plano, triângulo, polígono, cubo, cilindro, entre outros. Por exemplo: para o objeto matemático reta temos as relações: paralelismo e perpendicularismo (Lima; Carvalho, 2010).

Esses autores lembram que os objetos gráficos, como desenhos e imagens, “constituem-se como um importante nível intermediário de abstração entre os objetos físicos e as entidades puramente matemáticas” (p. 141). Com isso, “A passagem do físico, perceptível e palpável, para o abstrato, é um dos objetivos centrais do ensino e da aprendizagem da geometria, e isso nunca deve ser perdido de vista” (p. 141). Eles pontuam que os objetos abstratos podem ser idealizados mentalmente, porém só podem ser representados em duas ou três dimensões imperfeitamente.

Permanecer na visualização icônica no ensino de geometria pode contribuir para que a evidência visual sobre as figuras ocupe o lugar da demonstração e, consequentemente os estudantes podem não compreender a geometria dedutiva. Por isso, é que nossa hipótese é a de que a visualização não icônica articulada com o discurso geométrico pode contribuir para não confundir a representação com o objeto matemático e para a aprendizagem de conceitos da geometria dedutiva.

Duval (2022) destaca que o processo de ver em geometria é complexo, pois “Ver envolve sempre dois níveis de operações que são diferentes e independentes um do outro, mesmo que frequentemente se fundam na sinergia de um mesmo ato” (p. 11). Essas operações concernem às visualizações icônicas e não icônicas, que correspondem

respectivamente ao “**reconhecimento discriminativo das formas e a identificação dos objetos correspondentes às formas reconhecidas**” (p. 11, grifos do autor).

5.1.2 A visualização não icônica: olhares construtor e inventor

Uma das características de uma figura geométrica é a de não ser icônica, quer dizer “não parecer a um objeto visto e conhecido na realidade” (Duval, 2022, p. 4). Isso significa dizer que o reconhecimento dos objetos representados não depende da discriminação visual das formas, mas das hipóteses enunciadas que devem comandar o olhar sobre as figuras. Assim, a figura é uma das representações do objeto geométrico, considerando também suas dimensões ($3D \leftrightarrow 2D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 0D$).

Com isso a forma e a aparência da figura não são os aspectos mais relevantes. Pois,

O desenho é visto como a montagem de componentes de menor dimensão, as unidades figurais (pontos, linhas, segmentos, círculos). Portanto não há contradição entre modificar um desenho e considerar que ele permanece sendo uma representação do mesmo objeto (Mithalal, Balacheff, 2019, p. 164, tradução nossa).

Na visualização não icônica as figuras são vistas como geradoras de outras por procedimentos como: pela visualização das retas que passam pelos lados das figuras, por sua desconstrução dimensional ($3D/2D/1D/0D$), pela decomposição da figura inicial em subfiguras e suas reconfigurações possíveis. Essa visualização tem como operação identificar “[...] **os objetos correspondentes às formas reconhecidas**” (Duval, 2005, p. 11, negrito do autor). Isso exige a **neutralização da visualização icônica** e a **desconstrução visual das formas**. Trata-se de decompor as figuras que reconhecemos imediatamente em um conjunto de traços ou, em uma configuração de outras unidades figurais, sendo ou não da mesma dimensão. Conforme Duval (2022), decompor as formas geométricas discriminadas em outras unidades figurais é o pré-requisito para entrar na visualização não icônica.

Para Duval (2022), existem pelo menos dois modos diferentes de decompor toda figura de partida em unidades figurais: por introdução de traços suplementares e, sem introdução de traços suplementares. A adição dos traços suplementares consiste em adicionar traços em uma figura de partida ou em uma figura construída a partir do enunciado do problema para descobrir um procedimento de resolução. Esta é a condição para fazer as figuras exercerem seu papel heurístico.

Esses traços podem aparecer tanto no olhar construtor quanto no inventor.

Veja:

Quadro 1 - Os traços na visualização não icônica

Olhares	Visualização não icônica	
	Construtor	Inventor
Decomposição da figura:	Por introdução de <i>traços suplementares</i> auxiliares realizados por instrumentos para construir uma figura.	Por introdução de <i>traços reorganizadores</i> adicionados à figura inicial para resolver um problema.
Desconstrução dimensional na figura:	Depende dos instrumentos utilizados para construir uma figura.	Não depende de procedimentos de construção de figura e nem de instrumentos para construir uma figura.
Propriedades	As propriedades podem ser constatadas pelos instrumentos escolhidos.	As propriedades justificam os procedimentos realizados.

Fonte: Dados da pesquisa

Os traços auxiliares dependem dos instrumentos utilizados para construir uma figura, enquanto os reorganizadores são traços que contribuem para fazer aparecer outras formas não reconhecíveis na figura inicial. Assim, independem dos instrumentos utilizados para construir uma figura e do procedimento de construção. Para Duroisin, Beuset e Lucchese (2020), a mobilização dos traços auxiliares contribui para identificar que o estudante está percebendo as relações entre os elementos figurais na figura e isso permite o acesso a visualização não icônica. Segundo Duval (2022, p. 15, grifos do autor) “A utilização heurística de uma figura depende evidentemente da capacidade de “ver” os traços reorganizadores possíveis”.

No olhar construtor “[...] os instrumentos utilizados que comandam, dirigem ou controlam a decomposição visual das formas” (Duval, 2022, 16). Neste olhar as propriedades são mobilizadas para realizar a sequência de operações para construir uma figura. Isso requer a habilidade de ver o objeto como resultado de um processo construtivo, apoiado necessariamente nas propriedades geométricas. Esse processo começa pelas unidades figurais de menor dimensão e a percepção serve de controle para a construção (Mithalal, 2011).

Para Mithalal e Balacheff (2019) na desconstrução instrumental o desenho é visto como o resultado de um processo de construção geométrica referente a um objeto geométrico, com isso as propriedades mobilizadas podem parecer mais mecânicas que geométricas.

A desconstrução dimensional, para Mithalal (2011), consiste em olhar o objeto como um conjunto de unidades figurais por meio de propriedades geométricas. Essa

desconstrução requer separar em unidades figurais e organizá-las geometricamente de acordo com o papel que cada propriedade geométrica designa. Assim, um quadrado é visto formado por quatro segmentos de mesma medida, ortogonais, ou como quatro vértices A, B, C e D, tal que: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$. Essas formulações são duas desconstruções dimensionais diferentes do quadrado. Para Mithalal e Balacheff (2019) a desconstrução dimensional não se refere ao processo, mas é baseada nas propriedades do objeto geométrico onde o discurso é a principal representação do objeto geométrico.

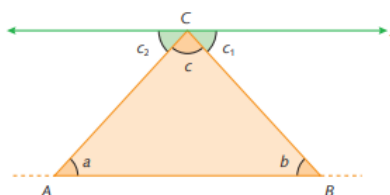
No olhar inventor as propriedades são mobilizadas para a utilização heurística na figura. O olhar inventor e a heurística devem ser mobilizados para os estudantes serem capazes de “ver” os traços reorganizadores nas figuras, caso contrário as explicações ou justificativas dos problemas podem permanecer puramente verbais. Porque o objeto geométrico representado pode ser mudado alterando somente as hipóteses do problema, onde as propriedades justificam as formas discriminadas (Duval, 2005).

5.1.3. Um exemplo da visualização não icônica

Observe o olhar inventor e a heurística na demonstração da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer:

Figura 16 - A visualização não icônica na demonstração

Considere o triângulo ABC , cujos ângulos internos medem a , b e c . Traçamos uma reta s , paralela à reta suporte do lado $\overline{AB}$, passando pelo vértice C .



Nessa figura, podemos notar que:

$$c_2 + c_1 + c = 180^\circ$$

Como:

$c_1 = b$ (ângulos alternos internos) e

$c_2 = a$ (ângulos alternos internos), temos que:

$$a + b + c = 180^\circ$$

Então:

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° .

Fonte: (Silveira; Marques, 2019b, p. 384)

No triângulo ABC ³⁸ (2D), traçam-se as retas r , u e t (1D), passando respectivamente pelos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo (fig. 17, abaixo). Para isso usamos um axioma da geometria “Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos” (Barbosa, 1995, p. 1). Usamos o axioma “Por um ponto fora de uma reta m pode-se traçar uma única reta paralela à reta m ” (Barbosa, 1995, p. 72). E, adicionamos a reta s (1D), passando pelo ponto C (0D) e paralela à reta r (1D).

Pelo corolário “Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra” (Barbosa, 1995, p. 73), traçamos a reta t (1D). Pela proposição “Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são iguais” (Barbosa, 1995, p. 75), temos que:

(I) $b = c_1$ e $a = c_2$. Observe que usamos a proposição de ângulo oposto pelo vértice.

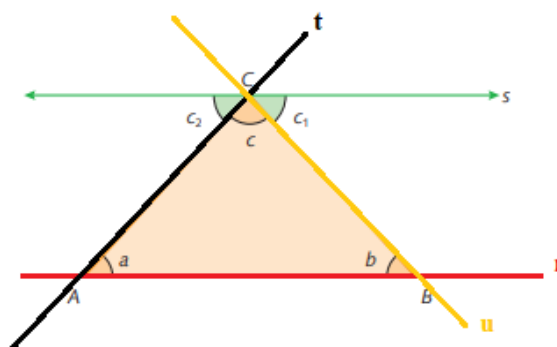
Como c_2 , c e c_1 formam um ângulo raso temos que:

(II) $c_2 + c + c_1 = 180^\circ$ (registro algébrico).

De (I) e (II) temos que: $a + b + c = 180^\circ$.

Nessa demonstração o olhar inventor foi mobilizado quando traçamos a reta s e, a heurística corresponde em descobrir que essa reta deve passar pelo ponto C . Assim, essa demonstração é constituída pela junção da hipótese, da figura, da apreensão perceptiva, do discurso matemático e do olhar inventor.

Figura 17 - A visualização não icônica na demonstração



Fonte: Adaptado de (Silveira; Marques, 2019b, p. 384)

³⁸ Figura 16 a seguir.

Contudo, como passar da visualização icônica à não icônica? Nessa passagem há uma questão cognitiva importante que deve ser considerada para a aprendizagem em geometria. Duval destaca que “Passar de uma maneira de ver a uma outra constitui uma mudança de olhar, que frequentemente é ignorada no ensino” (Duval, 2005, p. 9). Porque as figuras geométricas podem ser vistas por uma “maneira natural de ver” e por “uma maneira matemática de ver”. A “maneira natural de ver” corresponde à visualização icônica, que é o modo como vemos as imagens e percebemos os objetos reais. A visualização não icônica corresponde a “maneira matemática de ver”. Nesta as figuras dependem de conhecimentos conceituais. A análise cognitiva de uma figura corresponde ao modo de “ver” que elas requerem “[...] para que sejamos capazes de utilizá-las na resolução de um problema ou no reconhecimento de uma aplicação das propriedades geométricas em uma situação real” (Duval, 2011, p. 85).

Para Mithalal (2011, p. 113, tradução nossa) “motivar a demonstração, que é uma prova intelectual, diante da evidência visual e da possibilidade de realizar provas pragmáticas, constitui um grande desafio para o ensino secundário”. Percebemos que a visualização não icônica articulada ao discurso matemático pode contribuir para a aprendizagem de uma geometria axiomática. Em Duval (2005) vimos que o olhar botânico é a primeira entrada para todos os conhecimentos geométricos. Assim, é necessário saber como realizar a passagem da visualização icônica para a visualização não icônica.

5.2 A passagem da visualização icônica para a visualização não icônica

Para Duval um problema cognitivo importante é saber como ocorre a passagem da visualização icônica à não icônica, visto que o funcionamento cognitivo é oposto entre esses modos de visualizar uma figura. Segundo esse autor “A passagem repousa em uma **“semelhança”** entre a forma visualmente discriminada e a forma típica do objeto representado” (Duval, 2005, p. 11, grifo do autor). Esta semelhança serve para reconhecer imediatamente as formas³⁹, como na percepção que temos fora do campo da geometria. Contudo, para identificar o objeto representado⁴⁰ se tem que recorrer a uma enunciação explícita ou implícita.

³⁹ É semelhante a um objeto real. A figura é vista como um objeto que não pode ser modificado (Duval, 2005).

⁴⁰ A figura se destaca em uma rede de retas, ou de organizações mais complexas. Para isso, realiza-se uma sequência de operações sobre a figura que contribuem para reconhecer as propriedades geométricas (Duval, 2005).

Porém, a visualização icônica e a visualização não icônica possuem uma distância cognitiva importante, porque fora da geometria esses dois níveis de operações são indissociáveis. Duval (2005) denominou por *hiato dimensional* esse afastamento existente entre as duas visualizações. O *hiato dimensional* nos interessa, pois ele deve ser considerado para a visualização não icônica.

5.2.1 O hiato dimensional

O *hiato dimensional* para Duval (2005) é a oposição existente entre os dois modos de visualizar uma figura. Para Mithalal (2011) o *hiato dimensional* permite esclarecer algumas dificuldades em geometria, visto que na visualização não icônica as unidades figurais de menor dimensão e não as formas gerais devem ser vistas. Isso vai contra a evidência perceptiva, sobretudo quando esta é insuficiente para identificar o objeto representado. Segundo Duval trata-se de um *hiato dimensional* porque não existe nenhuma relação entre a visualização icônica e a não icônica.

Para Mithalal e Balacheff (2019) o *hiato dimensional* contribui para não mobilizar uma geometria dedutiva, porque a passagem de objetos de dimensões maiores a dimensões menores é o modo espontâneo da visualização, porém identificar primeiro os componentes de dimensões menores para as dimensões maiores em um objeto é específico da matemática e exige treinamento.

Para Duval (2005) as relações entre os objetos geométricos e suas propriedades não podem ser aprendidas perceptivelmente, quer dizer pela iconicidade. Contudo, a porta de entrada para a não iconicidade consiste em decompor as formas, mesmo as que parecem simples, em unidades figurais.

A passagem da visualização icônica para a não icônica requer o gesto reflexo que consiste em “[...] **decompor toda forma**, que reconhecemos de imediato em um conjunto de traços ou em qualquer figura de partida, **em uma configuração de outras unidades figurais** do mesmo número de dimensões ou de um número inferior de dimensões” (Duval, 2022, p. 13, grifos do autor). No quadro abaixo, pontuamos sobre essa transição.

Quadro 2 - A distância entre a visualização icônica e a não icônica

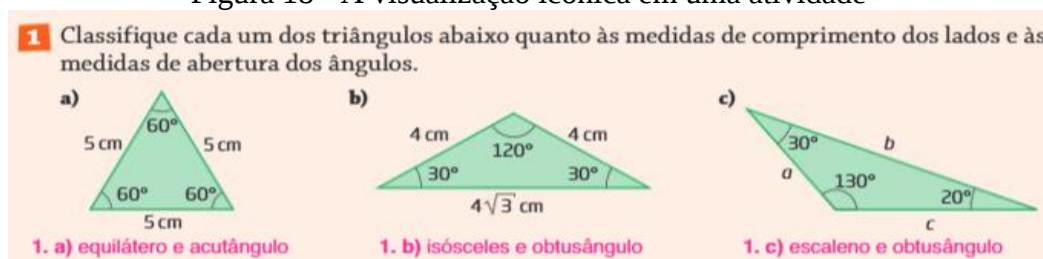
Visualização icônica	<i>Hiato dimensional</i>	Visualização não icônica
O reconhecimento é centrado na maior dimensão.	Gesto reflexo	Desconstrói-se a figura em dimensões menores.
As figuras são estáveis, semelhante a um objeto real, independente das operações que podem ser efetuadas sobre ela.		A figura é uma configuração que se destaca “[...] de uma rede ou de uma organização mais complexa” (Duval, 2022, p. 12).
Considera-se uma forma típica para cada objeto.		As figuras podem ser transformadas em outras semelhantes ou diferentes.
As definições ⁴¹ , propriedades, teoremas e/ou proposições centradas na(s) dimensão(ões) menores podem ser menos mobilizadas se o enunciado da atividade não as explicitarem.		As definições, propriedades, teoremas e/ou proposições centradas na(s) dimensão(ões) menor (es) podem ser mobilizadas.
As definições, propriedades, teoremas e/ou proposições podem ser percebidas pelo olhar.		O enunciado da atividade pode não mencionar explicitamente as definições, propriedades, teoremas e/ou proposições.

Fonte: Dados da pesquisa

Mithalal e Balacheff (2019) pontuam que a tarefa solicitada desempenha um papel fundamental na transição da visualização icônica para a visualização não icônica. Assim, para mobilizar a visualização não icônica as informações visuais nas atividades matemáticas precisam ser menos confiáveis.

Para exemplificar o quadro acima trazemos dois exemplos de atividades do livro do oitavo ano do Ensino Fundamental. A visualização icônica é mobilizada para resolver a atividade abaixo, trata-se de uma aplicação direta da classificação dos triângulos quanto às medidas dos lados e sua classificação quanto às medidas dos ângulos.

Figura 18 - A visualização icônica em uma atividade



Fonte: (Silveira; Marques, 2019c, p. 177)

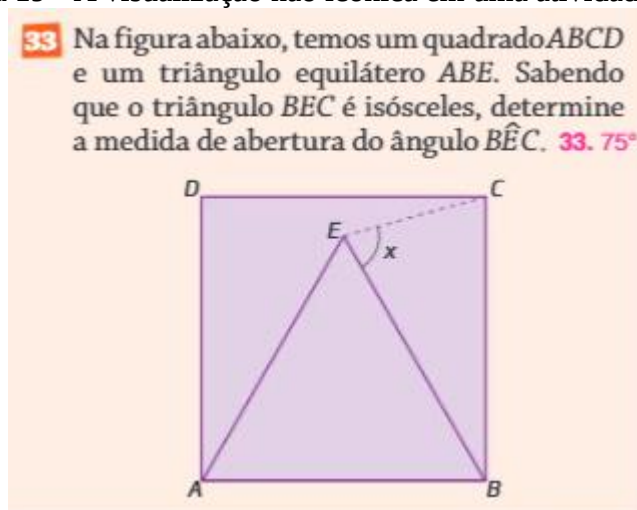
⁴¹ Definições, propriedades, teoremas, proposições podem ser mobilizados no plural, mas também, dependendo da atividade, podem ser mobilizadas no singular (definição, propriedade, teorema, proposição). Assim como podem ser mobilizadas no singular ou plural mobilizando por exemplo: definição e propriedade.

No item a) a figura possui todos os lados medindo 5cm e cada ângulo interno medindo 60° , quer dizer os três ângulos internos são agudos. Assim esse triângulo é equilátero e acutângulo.

No item b) o triângulo é isósceles, pois dois lados são congruentes. E é obtusângulo pois um ângulo é obtuso. No item c) as medidas dos lados do triângulo não são numéricas como os itens anteriores e como são representadas por três letras distintas, trata-se de medidas distintas, logo temos um triângulo escaleno e obtusângulo.

A atividade a seguir exige a visualização não icônica.

Figura 19 - A visualização não icônica em uma atividade



Fonte: (Silveira; Marques, 2018, p. 214)⁴²

Para resolver essa atividade a definição do quadrado e do triângulo equilátero devem ser mobilizadas ao ler e interpretar o enunciado da atividade em língua natural e realizar uma conversão para o registro figural. Observe que os lados e os ângulos da figura enunciada não possuem medidas, que é uma variável didática que detalharemos na parte metodológica.

(I) Como ABCD é um quadrado, por definição temos que: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$ e que $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = 90^\circ$.

(II) Como ABE é um triângulo equilátero, temos que: $\overline{AB} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{EA}$ e que $\widehat{EAB} = \widehat{ABE} = \widehat{BEA} = 60^\circ$.

⁴² SILVEIRA, E; MARQUES, C. Matemática: compreensão e prática. 8º ano. -5. ed. -São Paulo: Moderna, 2018.

De (I) e (II), temos que: $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{EA}$.

Assim o triângulo EBC é isósceles ($\overline{BE} \equiv \overline{BC}$). Como uma das propriedades do triângulo isósceles é a de que os ângulos da base são congruentes temos que: $B\hat{E}C = B\hat{C}E = x$.

Pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo temos que: $x + x + 30^\circ = 180^\circ$ ($E\hat{B}C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, pois $A\hat{B}C = 90^\circ$ e $A\hat{B}E = 60^\circ$).

Portanto $x = 75^\circ$.

Essa atividade mobilizou a desconstrução dimensional ($2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D$) e o discurso matemático ao articular a definição de quadrado, a definição de triângulo isósceles, a propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles e, a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Segundo Duval (2005) é esse modo de ver deve ser considerado para a aprendizagem em geometria. Isso exige ir da visualização icônica para a visualização não icônica. Contudo, para adentar a visualização não icônica a visualização icônica deve ser neutralizada.

Duval (2005) menciona que para adentar a visualização não icônica a visualização icônica precisa ser neutralizada. Neste estudo usamos desestabilizar e não neutralizar, concordando com os estudos de Balacheff e Mithalal.

5.3 A desestabilização da visualização icônica

A desconstrução dimensional das formas constitui o papel central na visualização não icônica. Porém, para entrar nesse modo de ver a visualização icônica precisa ser neutralizada. Contudo, essa neutralização não pode ser assegurada somente por meio da linguagem. Conforme Duval (2005, p. 12) “A identificação visual dos objetos é feita a partir das impossibilidades e invariâncias que uma sequência de transformações visuais, realizadas com ou sem instrumentos, permite descobrir”. Nesse processo essa constatação ocorre por meio da fecundidade da apreensão operatória e das variáveis didáticas que devem ser consideradas nas atividades de geometria. Estas variáveis fazem parte de nosso estudo e a detalharemos em nossa metodologia.

Para Mithalal (2010) a desconstrução instrumental e a desconstrução dimensional podem ser mobilizadas simultaneamente. Na instrumental o objeto geométrico resulta de um processo de construção usando instrumentos. A dimensional “[...] é uma atividade discursiva para descrever os objetos como um conjunto de

unidades figurais assegurada por um discurso que descreve o objeto constituído por unidades figurais cuja coerência é assegurada pelas propriedades matemáticas” (p. 256).

Mithalal e Balacheff (2019) ao observarem a evolução da desconstrução instrumental identificaram duas desconstruções instrumentais que podem ser realizadas nas figuras, uma na visualização icônica e a outra na visualização não icônica.

5.3.1 Duas desconstruções instrumentais

Mithalal e Balacheff (2019) identificaram dois tipos de desconstrução instrumental, conforme o quadro:

Quadro 3 - Dois tipos de desconstrução instrumental

Visualização icônica	Visualização não icônica
O controle visual serve para validar a desconstrução instrumental.	A fonte de convicção mobiliza as unidades figurais e as propriedades geométricas para justificar os procedimentos. As ferramentas podem ser controladas pelas propriedades.
As estratégias de resolução ocorrem por meio de tentativas e erros.	As estratégias consideram as relações entre os elementos figurais e as propriedades.
No software de geometria dinâmica 3D a desconstrução instrumental consiste em reproduzir uma figura, usando o controle visual.	No software de geometria dinâmica 3D a desconstrução instrumental consiste em um processo de construção passo a passo, onde a figura se destaca de uma rede de retas, segmentos, intersecções

Fonte: Dados da pesquisa baseado em Mithalal e Balacheff (2019)

Para Mithalal (2011, p. 120, tradução nossa) “[...] a desconstrução instrumental pode emergir da visualização icônica [...]”. Nesse quadro é possível perceber como ocorre a evolução da desconstrução instrumental da visualização icônica para a visualização não icônica. Mithalal e Balacheff (2019, p. 175, tradução nossa), perceberam em seu estudo que “Essa evolução durou uma hora, e nós não podemos supor que seja uma evolução estável”. Mas, contribuiu para identificar como ocorre a evolução da desconstrução instrumental da visualização icônica para a não icônica que parece ser complexa e a chave para fazer com que os estudantes avancem do estudo de geometria.

Segundo Mithalal e Balacheff (2019) os estudantes para se tornarem capazes de realizar as operações de desconstrução instrumental e de desconstrução dimensional devem mobilizar a visualização não icônica. Esses autores lembram que embora Duval (2005), considere essas duas desconstruções diferentes para serem conectadas, em seu estudo perceberam que é possível que os estudantes evoluam na desconstrução dimensional e, ao mesmo tempo, na desconstrução instrumental.

Para Mithalal (2010) a primeira desconstrução instrumental consiste em desconstruir um objeto geométrico e estabelecer um processo de construção com a finalidade de reproduzir uma forma. Nessa construção uma forma serve de controle, como o caso de “paralelo”, “perpendicular” ou “simétrico”. A segunda desconstrução instrumental requer a mobilização de propriedades para reproduzir uma forma. Nesta desconstrução, contrário a precedente, as unidades figurais podem ser identificadas de modo independente, não mais considerando como referência uma forma. Nesta desconstrução é possível adicionar novas unidades figurais por meio de uma geometria axiomática.

No estudo de Mithalal e Balacheff (2019) um dos resultados apontam que os ambientes de geometria dinâmica 3D, contribuem para reduzir as tensões entre desenho e figura, colaborando para uma geometria dedutiva. Assim, entendemos que uma possibilidade de desestabilizar a visualização icônica pode ser por meio do software *GeoGebra 3D*⁴³.

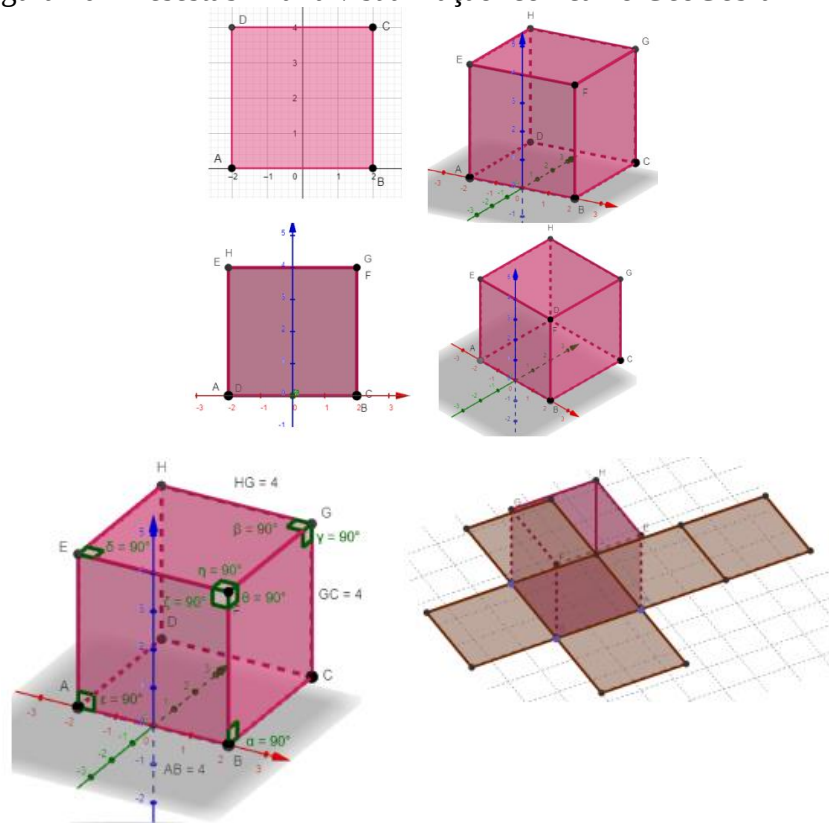
5.4 Uma possibilidade de desestabilizar a visualização icônica

Para Mithalal e Balacheff (2019), nos problemas de geometria 3D, a representação dos objetos tridimensionais em representações bidimensionais não é confiável e a percepção pode ser enganosa. Esses impasses tornam a visualização icônica insuficiente para os problemas de geometria 3D. Com isso, a resolução envolve a visualização não icônica, que emerge como um modo de tornar as informações visuais confiáveis. Contudo, essa emergência se torna difícil para um ambiente com papel e lápis, mas pode ser viável num ambiente de geometria dinâmica como o *GeoGebra 3D*, pois permitem a representação do objeto e a sua manipulação simulando objetos geométricos tridimensionais. Isso significa dizer, que é possível manipular o que parece ser uma representação bidimensional, mas que quando movimentado evocam as propriedades tridimensionais. Essa combinação de várias visualizações do mesmo objeto matemático em posições diferentes, com as ferramentas disponíveis, contribui para reduzir as percepções enganosas que podem existir nas representações bidimensionais. Isso minimiza a atribuição de propriedades errôneas para o objeto matemático, porque a representação mantém as suas propriedades quando movimentado.

⁴³ Nas atividades que propusemos trazemos outras ideias.

No *GeoGebra* 3D é possível construir o cubo, rotacioná-lo, medir as arestas e os ângulos de cada face e ver sua planificação. Este software permite a desconstrução (ferramenta planificação) e neste processo é possível verificar as propriedades por meio dos instrumentos disponibilizados. Nisto se mobiliza tanto a desconstrução instrumental quanto a dimensional. A iconicidade é neutralizada ao visualizar o cubo em diferentes posições, pois a percepção não serve mais de controle. Isso ocorre porque ao rotacionar o cubo, dependendo de sua posição, **perceptivelmente** as arestas podem não ter as mesmas medidas, os ângulos podem não ser todos retos e as faces podem não ser todas quadradas. Contudo, utilizando as ferramentas adequadas se pode constatar todas essas propriedades.

Figura 20 - Desestabilizar a visualização icônica no GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa

A desconstrução instrumental requer a desconstrução dimensional. A desconstrução instrumental, concordando com Mithalal (2010), mobiliza o olhar construtor e a apreensão sequencial. Para o olhar construtor no *GeoGebra* é necessário saber quais ferramentas utilizar. Para isso, os elementos figurais de dimensões menores é que devem ser considerados ($0D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 2D \leftrightarrow 3D$). A apreensão sequencial para

ordenar as operações figurais que depende das propriedades geométricas e das restrições dos instrumentos utilizados.

Para Mithalal e Balacheff (2019) um ambiente de geometria dinâmica 3D pode contribuir para emergir a visualização não icônica porque os estudantes procuram informações visuais mais eficientes e confiáveis e com isso podem realizar a desconstrução dimensional e a desconstrução instrumental mobilizando as propriedades geométricas para antecipar e gerenciar suas ações. As ferramentas disponíveis no software que se baseiam nas propriedades geométricas contribuem para identificar e relacionar as unidades figurais. Isso colabora para que os processos realizados na desconstrução instrumental estejam associados ao objeto geométrico. “Essa transição abre a possibilidade de uma mudança de provas pragmáticas para provas intelectuais, que ainda precisa ser confirmada por pesquisas específicas” (p. 15, tradução nossa).

Esses autores destacam que no ambiente de geometria dinâmica 3D a desconstrução instrumental se torna confiável e eficiente baseada na visualização icônica.

Então, a desconstrução instrumental passa a ser o lado operacional da desconstrução dimensional, que por si só fornece os fundamentos geométricos necessários para justificar o processo de construção. Isso modifica fortemente o modo como os problemas são apresentados, tornando-se mais teórico, o que torna a geometria significativamente dedutiva (Mithalal; Balacheff, 2019, p. 171, tradução nossa).

Porém, esses autores destacam que as evoluções das desconstruções dimensionais e instrumental nos estudantes são difíceis de descrever e analisar por que os dados relacionados a essas duas desconstruções são semelhantes. Eles ressaltam também que esses dois processos de desconstruções também podem ser usados para propósitos distintos e um objeto semelhante pode gerar estratégias de resoluções diferentes.

Percebemos que essa passagem deve ser considerada no ensino de geometria, pois algumas atividades podem a requerer. A seguir apresentamos duas atividades do livro didático onde essa passagem pode ser percebida.

5.4.1. A passagem da visualização icônica para a visualização não icônica no livro didático

Vamos ver a visualização icônica e a não-icônica em dois exemplos de atividades de um livro didático de matemática do 4º ano do Ensino Fundamental. Na atividade abaixo o paralelepípedo e o cubo (3D) estão representados em 2D. Nesta representação o paralelepípedo possui as três dimensões distintas e o cubo as três dimensões com a mesma medida. O cubo, dependendo da percepção do estudante, também pode ser visto como um hexágono.

Figura 21 - Visualização icônica em uma atividade

5 AS 3 DIMENSÕES EM UM SÓLIDO GEOMÉTRICO
ATIVIDADE EM GRUPO Em alguns sólidos geométricos podemos observar facilmente as 3 dimensões deles: **comprimento, largura e altura**.
 Veja essas 3 dimensões no paralelepípedo e no cubo.



Faça estimativas e registre na tabela. Depois, com os colegas, determine as medidas, registre e compare com suas estimativas. **Respostas pessoais.**

Medida das dimensões da sala de aula

Dimensão	Estimativa	Medida
Comprimento	m e cm	m e cm
Largura	m e cm	m e cm
Altura	m e cm	m e cm

Tabela elaborada para fins didáticos.

Fonte: (Dante, 2021d, p. 41)

A resolução dessa atividade é baseada nas formas dessas figuras e nas suas características perceptivas. A percepção serve de controle para validar a resposta. Nessas representações é possível verificar as medidas de cada aresta com a régua graduada e, para o cubo perceber que as arestas possuem as mesmas medidas. Um outro modo de validar isso é inscrevendo esse cubo numa circunferência.

Nesse mesmo livro didático, há outra atividade (fig. 22) onde o cubo (3D) está representado em 2D. Esta representação está em perspectiva. O tamanho e a posição do cubo não importam nesta representação. Neste caso, a percepção que se tem do cubo não serve de controle. A visualização icônica não é suficiente para resolver esta atividade. A resolução desta atividade exige a desconstrução dimensional (3D/2D). Na representação deste cubo os segmentos paralelos são congruentes e uma das faces é quadrada. Entretanto, sua planificação é constituída por seis quadrados que podem ser

constatados perceptivelmente. Para compreender esta atividade este cubo e a sua planificação requerem uma abordagem mais teórica e o uso das propriedades. A resolução desta atividade exige a desconstrução dimensional (3D/2D). A visualização não-icônica é necessária para essa desconstrução. Para Mithalal e Balacheff (2019) esse processo é inevitável para a construção de provas na geometria dedutiva.

Figura 22 - Visualização não icônica em uma atividade



Fonte: (Dante, 2021d, p. 45)

Entendemos que considerar esses tipos de visualização, transitando por meio de diferentes representações pode conferir à figura seu papel de representação, não a confundindo com o objeto geométrico. Para Duval (2005) a articulação da visualização com o discurso são condições necessárias para a aprendizagem que não podem ser ignoradas no ensino.

Para Duval (2022, p.5) “[...] é a tarefa solicitada que determina a relação com as figuras”. Esse autor questiona se o modo de ver de uma atividade contribui para entrar em outros modos de ver necessários para outras atividades?

Ele ressalta que é a tarefa solicitada que determina o modo de ver uma figura geométrica e, levanta uma questão que segundo ele raramente é abordada no ensino de geometria: a maneira de ver que um tipo de atividade favorece contribui para entrar em outros modos de ver necessários para outras atividades? Contudo, não responde essa questão. Para Mithalal (2011) o que Duval faz é questionar as possíveis relações entre os modos de ver uma figura geométrica.

Mithalal (2011) na conclusão de seu estudo retoma esse questionamento e responde: “Nós vamos finalmente trazer uma resposta positiva e mostrar que as situações propostas permitem a emergência da desconstrução dimensional [...]” (p. 125,

tradução nossa). Para ele o ambiente de geometria dinâmica tridimensional (Cabri 3D) desempenha um papel fundamental para emergir a desconstrução dimensional. Mas, a desconstrução instrumental é um processo mais complexo e pode emergir da visualização icônica ou da visualização não icônica. Assim, esse autor retoma o questionamento proposto por Duval enfatizando que para motivar as provas intelectuais é preciso interrogar sobre o estatuto da geometria axiomática e da desconstrução dimensional, pois elas aparecem nas atividades dos estudantes para a resolução prática de problemas e para interpretar instruções e resultados. Isso aponta para a necessidade de demonstrar criando condições favoráveis por meio da geometria axiomática e das evidências visuais.

Diante disso, entendemos que a desestabilização da visualização icônica e a emergência da visualização não icônica, articulada ao discurso matemático por meio de diferentes representações, pode contribuir para relacionar os conceitos aprendidos e para o desenvolvimento de uma geometria dedutiva com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Conjecturamos também que outras deduções matemáticas podem surgir se os estudantes permanecerem na visualização não icônica.

6 Procedimentos metodológicos

Nesta seção, descrevemos os procedimentos metodológicos desta tese. Caracterizamos uma pesquisa qualitativa, apresentamos o percurso deste estudo, a coleta de dados, os estudantes participantes e a elaboração e a aplicação das atividades. Além de um trabalho de revisão de literatura, detalhamos a seguir os instrumentos de pesquisa utilizados no desenvolvimento experimental da pesquisa e os pressupostos estabelecidos para as análises dos dados obtidos.

6.1 Pesquisa qualitativa

Com a finalidade de investigar contribuições da visualização icônica e da visualização não icônica, articuladas aos registros de representação semiótica e ao discurso para a aprendizagem de geometria por meio de atividades com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, elaboramos e aplicamos algumas atividades em um grupo constituído por estudantes⁴⁴ do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, no contraturno de suas aulas em uma escola privada de Campo grande – MS. As atividades foram aplicadas pela pesquisadora, durante nove encontros, de 1h30min cada um, numa sala de aula, às sextas-feiras, no período vespertino, totalizando 13h30min.

Nesta pesquisa qualitativa foram utilizados os seguintes procedimentos metodológicos: constituição de um grupo de estudantes; o desenvolvimento da coordenação entre visualização e discurso matemático⁴⁵ e, o processo central da visualização geométrica que é a desconstrução dimensional das formas.

Numa pesquisa qualitativa Bodgan e Biklen (1994) pontuam que os investigadores devem buscar compreender o pensamento dos participantes, sem utilizar seu ponto de vista. Os participantes do estudo devem ser questionados sobre como interpretam as experiências vivenciadas e como as estruturam. Para D'Ambrosio (2013, p. 21), a pesquisa qualitativa “Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas”.

Para Ludke e André (1986) a observação possui um lugar privilegiado nas pesquisas qualitativas, pois “Usada como o principal método de investigação ou associada a outras técnicas de coleta, a observação possibilita um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, o que apresenta uma série de

⁴⁴ Cerca de dez a quinze estudantes participaram dos encontros.

⁴⁵ Para Duval (2005) essa coordenação é tão importante quanto os conteúdos matemáticos.

vantagens” (p. 26). Assim, por ser a observação um dos principais instrumentos da investigação, o observador⁴⁶, no caso a pesquisadora deste estudo, “[...] pode recorrer aos conhecimentos e experiências pessoais como auxiliares no processo de compreensão e interpretação do fenômeno estudado” (p. 26).

Esses autores pontuam que a observação colabora para o pesquisador se aproximar mais das perspectivas dos sujeitos envolvidos na pesquisa. O pesquisador ao acompanhar “[...] *in loco* as experiências dos sujeitos, pode tentar apreender a sua visão de mundo, isto é, o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações” (Ludke; André, 1986, p. 26). Eles também destacam que o foco de interesse de uma observação depende dos objetivos do estudo, que se embasam em um quadro teórico, onde os procedimentos de observação podem contribuir para descobrir novos aspectos em um fenômeno. Para isso, o pesquisador precisa orientar sua observação de acordo com seu quadro teórico.

Assim, em cada encontro, procuramos compreender o percurso realizado pelo grupo de estudantes, assim como a trajetória que cada estudante realizou ao resolver cada atividade proposta, verificando quais aspectos mobilizados nas resoluções contribuíram para a aprendizagem em geometria considerando os estudos de Duval (2005).

Buscamos também analisar quais fatores deveriam ser considerados nas atividades matemáticas para articular o discurso com a visualização não icônica para a aprendizagem em geometria. Para a análise da mobilização do olhar não icônico nos embasamos nos estudos de Mithalal (2010), que buscou propor atividades de geometria com informações visuais limitadas. Ele destaca que não se trata de considerar as representações somente, mas de colocar alguns indicadores visuais numa perspectiva mais ampla nas atividades geométricas.

Entendemos que a abordagem qualitativa é adequada ao nosso estudo, pois segundo Ponte (2006) o objetivo de uma pesquisa qualitativa consiste em compreender certos fenômenos com aspectos que interessam ao investigador. Esse tipo de pesquisa possui os seguintes aspectos: permite analisar as aprendizagens de um ou mais estudantes, colabora para compreender o percurso realizado pelo estudante ou pelo grupo, permite utilizar vários instrumentos (textos escritos, comunicações orais,

⁴⁶ Como nesta investigação o observador é a pesquisadora deste estudo, daqui por diante iremos usar pesquisador ao invés de observador.

entrevistas, fotografia, discurso, vídeos) bem como estratégias com técnicas de recolha e análise dos dados diversos.

Para D'Ambrosio (2013) a pesquisa qualitativa tem como finalidade compreender e interpretar os discursos, mesmo quando se trata de um grupo de participantes. Bodgan e Biklen (1994, p.16), destacam que os investigadores nessa modalidade de pesquisa partem para a investigação munidos de conhecimentos e de suas experiências, com isso “A investigação qualitativa em educação assume muitas formas e é conduzida em múltiplos contextos” e permite “[...] uma variedade de maneiras de trabalhar e analisar os dados” (p. 206). Segundo esses autores em uma pesquisa qualitativa: o investigador é o elemento principal, a fonte dos dados é o ambiente natural, é descritiva, o interesse maior está mais no processo que nos resultados, os dados tendem a ser analisados de um modo indutivo e, o significado atribuído às questões de pesquisa possui um significado vital.

A seguir detalhamos o desenvolvimento deste estudo.

6.2 O desenvolvimento experimental da pesquisa

Considerando os estudos de Duval (2005) ao pontuar que as dificuldades de aprendizagem em geometria vêm inicialmente do modo como a visualização e a linguagem são utilizados e que o modo de ver uma figura depende da atividade na qual ela é mobilizada, pensamos em elaborar atividades específicas que procurassem adentrar a não iconicidade.

Esse autor destaca que na visualização não icônica “A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica” (p.2). Quer dizer, a centralidade do olhar geométrico sobre uma figura consiste na mudança do número de dimensões, contudo nessa abordagem também se mobiliza a produção discursiva para justificar, explicar ou demonstrar. Por isso, além de limitarmos as informações visuais sobre as figuras, conforme Mithalal (2010), também consideramos atividades que requeressem a apreensão discursiva.

Percebemos com as leituras realizadas que teríamos que elaborar atividades com essas particularidades que abordassem os conteúdos vistos pelos estudantes. Assim, optamos por constituir um grupo com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental porque queríamos aplicar algumas atividades que envolvessem deduções matemáticas.

No ano de 2022, encontramos uma escola privada de Campo Grande – MS que permitiu nossa investigação. Nesta escola tínhamos possibilidades maiores de conseguirmos um número expressivo de estudantes e de realizarmos nossos encontros no contraturno escolar, visto que alguns responsáveis pelos discentes consideravam importantes esses momentos de estudos.

Sendo assim, inicialmente fizemos o convite para estudantes do nono ano do Ensino Fundamental, mas poucos tiveram interesse em participar. Diante disso, ampliamos o convite para estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental e para os do primeiro⁴⁷ ano do Ensino Médio, onde conseguimos constituir um grupo formado por discentes desses três anos escolares. Eles demonstravam interesse pelo estudo e curiosidade em conhecer um pouco sobre como se realiza uma pesquisa em Matemática.

No dia 09 de setembro de 2022 tivemos o nosso primeiro encontro, apresentamos nossos objetivos e o que pretendíamos realizar, explicamos que as atividades deveriam ser realizadas em duplas escolhidas por eles e que poderiam ser trocadas em cada encontro.

Os nossos encontros ocorreram às sextas feiras das 13:30h às 15h, contudo em alguns encontros tiveram estudantes que permaneceram além desse tempo para tirar algumas dúvidas. Esses que permaneciam falavam que era interessante esse momento porque na sala de aula normalmente a dinâmica era a de o professor explicar e eles resolverem as atividades, sem muitos momentos de reflexões como as que realizávamos. Totalizamos nove encontros seguidos, que ocorreram nos dias 09, 16, 23 e 30 de setembro; nos dias 7, 14, 21 e 28 de outubro e no dia 04 de novembro de 2022. Um fator que contribuiu para termos os encontros seguidos se deu pelo fato de a escola não emendar nenhum feriado.

A seguir delineamos como produzimos e coletamos os dados deste estudo.

6.3 A produção e coleta dos dados

Os dados desta pesquisa foram obtidos por meio das resoluções de atividades impressas e entregues a duplas de estudantes numa folha sulfite e pelas gravações de áudios e de vídeos. Tudo foi realizado em conformidade com o Comitê de Ética em

⁴⁷ Não estendemos o convite aos estudantes do segundo e terceiro ano porque tinham aula em período integral.

Pesquisa com Seres Humanos– CEP⁴⁸, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Assim, duas cópias Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE foram entregues aos responsáveis pelos estudantes e, duas cópias do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE foram entregues aos estudantes explicando os encaminhamentos ético da pesquisa e as gravações.

Esta investigação contou com a participação de 21 estudantes, distribuídos entre integrantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio de uma escola privada de Campo Grande – MS. Cada encontro contou com a participação de treze a dezesseis estudantes. A relação de presentes está detalhada no quadro abaixo.

Na escola o oitavo ano correspondia à turma 801, a turma 901 ao nono ano do Ensino Fundamental, a 1001 ao primeiro ano do Ensino Médio e assim por diante. Assim, designaremos por 801A, 801B, ... os estudantes do oitavo ano, por 901A, 901B, ... os estudantes do nono ano e por 1001A, 1001B, ... os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. Essa será a identificação usada nas análises.

No quadro a seguir as produções dos estudantes que estão em vermelho foram as analisadas por encontro. Fizemos essa escolha pelo fato de os protocolos desses discentes ser os que mais contemplaram as categorias de análises estabelecidas.

Quadro 4 – Participação dos estudantes nos encontros⁴⁹

Estudantes/ Encontros	01	02	03	04	05	06	07	08	09
801A	X	X	X	X	X	X	X	X	X
801B	X	X	X	X	X	X	X	X	X
801C	X	X	X	X	X	X		X	X
801D	X	X	X	X	X	X	X	X	X
801E	X	X	X	X	X	X	X	X	X
801F	X	X	X	X	X	X	X	X	X
801G	X	X	X	X	X	X	X	X	X
801H	X	X	X	X	X	X			X

⁴⁸ O Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos – CEP, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, responsabiliza-se por apreciar os protocolos de pesquisas envolvendo seres humanos e desenvolvidas na instituição. O objetivo do comitê é resguardar a dignidade, os direitos, a segurança e o bem-estar dos sujeitos que fazem parte da pesquisa. Ver <https://cep.ufms.br>. O parecer substanciado do CEP foi recebido em 22/12/2021, sob CAAE No 53947221.6.0000.0021.

⁴⁹ O “X” indica os alunos presentes por encontro e destes os que estão em vermelho foram os que consideramos os protocolos para as análises.

801I	X	X	X	X	X			X	X
801J		X	X	X	X	X	X	X	X
801K				X	X	X	X	X	X
901 ^a		X	X	X	X	X		X	X
901B							X	X	X
901C	X		X	X	X		X	X	X
901D	X		X						
901E	X		X			X	X	X	
901F	X	X				X	X	X	X
1001 ^a	X	X	X		X	X	X	X	X
1001B	X	X	X	X	X	X	X	X	X
1001C	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2001A									X

Fonte: Dados da pesquisa

Consideramos importante fazer aqui algumas observações. O estudante 2001A não fazia parte do grupo, resolveu participar por curiosidade e por gostar de matemática.

Alguns discentes decidiram participar dos encontros por não gostar de matemática, por acreditarem que talvez com a experimentação pudessem mudar esse gosto. Os demais participaram por gostarem de matemática e porque tinham interesse em verificar como ocorre a pesquisa em Educação Matemática. O estudante 2001A participou somente do último encontro porque seu irmão do 901A disse que estes eram interessantes.

No quarto encontro os estudantes terminaram a atividade do encontro anterior.

No oitavo encontro os estudantes finalizaram a atividade do encontro anterior.

Feitas essas explanações mostramos a seguir o que consideramos para elaborar as atividades.

6.4 Elaboração das atividades

Vimos na seção 3 o que caracteriza uma atividade matemática e como deve ser realizada a sua análise (Duval, 2016). Esse delineamento foi realizado porque o objetivo desta é investigar olhares e apreensões dos alunos diante de atividades, tentando articular a visualização com a linguagem para a aprendizagem de geometria (Duval, 2005). Os estudos de Mithalal e Balacheff (2019) destacam que as tarefas que desestabilizam o olhar icônico podem contribuir para a aprendizagem de uma geometria

dedutiva. Duval (2005) ressalta que o modo de ver uma figura depende do exercício onde a figura é mobilizada e que a visualização não icônica e a desconstrução dimensional das figuras, possuem um papel importante para a aquisição de conceitos geométricos.

Assim, consideramos os estudos de Duval, Mithalal e Balacheff para: delinear nossos objetivos, a escolha das variáveis didáticas nas atividades, bem como a noção de congruência semântica entre enunciado e figura e para conceituarmos as funções discursivas da língua para analisar o discurso dos estudantes para a aprendizagem de geometria.

Os estudos de Duval e a tese de Mithalal (2010) contribuíram para pensarmos em utilizar os Registros de Representação Semiótica como elemento norteador, tanto da elaboração quanto da aplicação e análise das atividades propostas, possibilitando explorar algumas variáveis didáticas.

6.4.1. As variáveis didáticas

Para elaborar as atividades consideramos as variáveis didáticas pertinentes aos objetivos deste estudo (Artigue, 1996). Conforme Bittar (2017) as variáveis didáticas são “elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos” (p.104). Conforme Almouloud (2007) as variáveis didáticas podem promover mudanças nos processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático em jogo.

Segundo Artigue (1996) as variáveis didáticas se distinguem em dois tipos: as variáveis macro didáticas ou globais e, as variáveis micro didáticas ou locais. As variáveis macrodidáticas são concernentes a uma organização global da Engenharia Didática⁵⁰, enquanto as microdidáticas são referentes a uma organização local (de uma fase ou de uma sessão) da Engenharia Didática.

Almouloud (2017) destaca que as variáveis macrodidáticas e as microdidáticas podem ser de ordem geral ou depender do conteúdo matemático em questão e que suas análises devem considerar três dimensões: a dimensão epistemológica (diz respeito às características do saber), a dimensão cognitiva (referente ao cognitivo do estudante) e a dimensão didática (referente ao sistema de ensino dos estudantes).

⁵⁰ Em nosso estudo usamos elementos metodológicos da Engenharia Didática proposta por Michele Artigue, tais como: as **análises preliminares** nas leituras realizadas e, as variáveis didáticas que correspondem a segunda fase da Engenharia Didática, **concepção e análise a priori**.

Machado (2015) lembra que as variáveis microdidáticas possuem variáveis intrínsecas ao problema as quais dependem de uma organização local específica e que as variáveis macrodidáticas possuem as variáveis extrínsecas. Duval (2009) detalha que as variáveis intrínsecas são “[...] os fatores que comandam o funcionamento de um sistema, qualquer que seja o contexto em que ele se encontre” (p. 27) e que as variáveis extrínsecas são “os fatores dos arredores que influenciam o funcionamento desse sistema” (p.27). Moretti (2025) explicita que as variáveis intrínsecas são as referentes ao objeto matemático e as extrínsecas concernem aos procedimentos metodológicos.

Para Duval (2005) a variável didática em uma atividade permite estabelecer fatores que podem contribuir para a aprendizagem em geometria. Assim:

É preciso organizar as tarefas fazendo variar as figuras, depois a situação que ajuda a <<ver>>, a solução até aquelas em que, ao contrário, torna-se difícil ou impossível vê-la. Podemos, assim, identificar os fatores figurais que facilitam um tratamento figural do problema e aqueles que, ao contrário, o inibem. E podemos medir seu impacto na resolução de problemas muito diferentes (Duval, 2011, p. 93, grifos do autor).

Esse autor destaca que do ponto de vista matemático as representações metodologicamente não são as mais importantes, mas sim o critério de escolha delas que são **as variáveis didáticas**. Por exemplo, uma atividade pode apresentar figuras geométricas ou não no enunciado, onde os procedimentos de resolução podem ser idênticos. No entanto, a possibilidade de reorganizar visualmente as figuras geométricas em outras figuras, além de reproduzi-las com auxílio de instrumentos (régua, compasso, ...), contribui para a aprendizagem em geometria. Essa possibilidade de transformar visualmente as figuras possui uma função de exploração heurística na resolução de problemas.

Assim, as variáveis intrínsecas das atividades propostas neste trabalho foram: a posição da figura; a presença ou não de figura no enunciado para realizar a exploração heurística, os tratamentos figurais, as conversões e evidenciar ou não os fatores que contribuem para a visualização não icônica; a figura possuir ou não medidas dos lados e/ou dos ângulos; questões do tipo aberta ou fechadas; as questões abertas contribuem para que os estudantes criem suas estratégias ao resolver a atividade, buscando regularidades e padrões enquanto que as fechadas não permitem direcionamentos diversos na busca de respostas e resoluções; figuras bidimensionais e tridimensionais: uma representação figural é interessante quando se transforma em outra representação.

As variáveis extrínsecas foram: o tipo de instrumento usado para resolver a atividade: os instrumentos como régua e compasso e, o uso de software como o *Geogebra* constituem uma variável didática importante porque podem mobilizar propriedades geométricas nas figuras. Alguns instrumentos permitem o trabalho com unidades figurais 2D e outros permitem o trabalho com unidades figurais 1D como a régua não graduada e o compasso (Duroisin; Beauset; Lucchese, 2020). Realizar a atividade com dobraduras por meio do trabalho em duplas para favorecer a apreensão discursiva.

Ressaltamos que as atividades foram elaboradas no decorrer do processo⁵¹, exceto a primeira atividade que trabalhamos com vista à analisar as desconstruções dimensionais que as figuras permitem ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D$). Nessa atividade a pesquisadora levou diferentes embalagens que lembram sólidos geométricos e os estudantes construíram alguns a partir de planificações em folha sulfite (cubo, paralelogramo, pirâmide, cone, cilindro).

Os discentes foram questionados como poderiam classificar esses materiais, identificando semelhanças e diferenças e algumas propriedades, tais como: diferenciar as figuras geométricas espaciais das planas, como por exemplo cubo e quadrado, pirâmide e triângulos, paralelogramos e retângulos. Alguns estudantes nomearam os sólidos os separaram em duas categorias: os que rolam e os que não rolam.

Por meio dessas manipulações exploramos o que significa a palavra *poliedro* (*poli* significa vários e *edros* face). Por isso, usamos poliedro para denominar uma figura espacial que possui várias faces. Após, os estudantes classificaram esses sólidos em: prismas (cubo, paralelepípedo, prisma de base triangular, entre outros), pirâmide e outros poliedros, identificando as unidades tridimensionais, as bidimensionais, as unidimensionais e as adimensionais.

6.5 A aplicação das atividades

Os estudantes realizaram as atividades em duplas, contudo tiveram encontros onde alguns optaram por resolver individualmente. As duplas formadas variaram no decorrer dos encontros, por livre escolha, algumas vezes o grupo ficou constituído por

⁵¹ A cada sessão fomos identificando os conhecimentos dos estudantes e elaborando as atividades com a finalidade de atingir o objetivo geral desta investigação, que é *Investigar contribuições da visualização icônica e da visualização não icônica, articulada aos registros de representação semiótica e ao discurso para a aprendizagem de geometria por meio de atividades com estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio*.

discentes de anos escolares diferentes. Nessa constituição, um aspecto que ficou evidente foi a partilha de conhecimentos, pois os conteúdos abordados nas atividades correspondiam aos que os estudantes do oitavo ano estavam estudando. Percebemos que após o primeiro encontro, era comum os estudantes do oitavo ano, ao resolver as atividades, procurar os conceitos no livro didático usado por eles em sala de aula, com a finalidade de relembrar.

Escolhemos duplas porque pensamos que esse ambiente seria mais favorável à mobilização da apreensão discursiva, da exploração heurística e das desconstruções dimensionais nas figuras ao realizar as atividades, com maiores possibilidades de produção de conjecturas e talvez algumas provas.

No início de cada encontro organizávamos a sala de aula em duplas de estudantes e explicávamos alguns dos conceitos que seriam mobilizados nas atividades, mostrando os recursos que poderiam usar⁵². Durante a resolução das atividades a pesquisadora fazia perguntas e procurava, algumas vezes, relembrar em conjunto com os estudantes alguns conceitos estudados com vistas a articular a visualização com a linguagem para a aprendizagem em geometria. Esses questionamentos consistiam em validar a atividade mobilizando registros de representações distintos.

6.6 Instrumentos da pesquisa

Realizamos sete atividades em nove encontros, pois em dois deles os estudantes optaram por terminar a atividade da seção anterior. A pesquisadora deixou em aberto duas alternativas: a de ir para uma nova atividade ou a de terminar a precedente. Nos dois casos, a maior parte dos estudantes optaram por terminar às resoluções iniciadas.

As atividades apresentadas na próxima seção foram elaboradas pela pesquisadora com base nos estudos de Duval, Mithalal e Balacheff, considerando os conceitos estudados pelos discentes e presentes no livro didático do oitavo ano do Ensino Fundamental⁵³ da escola. As resoluções foram realizadas numa folha sulfite entregue pela pesquisadora e contou com gravação de áudio e vídeo. Os estudantes

⁵² Sólidos geométricos, “esqueleto de um cubo” (construído por meio de uma impressora 3D), borrachas (do tipo de amarrar dinheiro), software *GeoGebra* (no celular, notebook ou tablete), régua, compasso, transferidor).

⁵³ SILVEIRA, E; MARQUES, C. Matemática: compreensão e prática. 8º ano. -6. ed. -São Paulo: Moderna, 2018c.

enquanto resolviam os exercícios podiam manipular: sólidos geométricos; o software *GeoGebra*; régua, transferidor e compasso.

Desse modo, as atividades tiveram como objetivo investigar contribuições do olhar icônico e do não icônico, coordenada aos registros de representação e ao discurso para a aprendizagem de geometria.

6.7. Os pressupostos considerados para as análises

As resoluções das atividades realizadas em duplas pelos estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, foram observadas considerando: a análise semiótica e cognitiva (incluindo a noção de congruência semântica); o olhar botanista e o agrimensor na visualização icônica; o olhar construtor e o inventor na visualização não icônica; a desconstrução instrumental e a dimensional; a exploração heurística nas figuras e, a análise do discurso por meio das funções discursivas.

No quadro abaixo detalhamos esses critérios de análise das atividades e os aspectos observados em cada uma.

Quadro 5 - Categorias de análise das atividades e os aspectos observados

Categorias de análises	Aspectos observados
A: A mobilização dos registros de representação semiótica.	A.1: O ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo.
B: As apreensões	B.1: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. B.2: Congruência semântica
C: A visualização icônica e a visualização não icônica.	C.1: O olhar botanista e o olhar agrimensor. C.2: O olhar construtor e o olhar inventor.
D: As Desconstruções e a heurística.	D.1: Dimensional, instrumental e a exploração heurística.
E: Análise do discurso por meio das funções discursivas.	E.1: Função referencial, apofântica e de expansão discursiva.

Fonte: Dados da pesquisa

Para cada unidade de análise consideramos os seguintes aspectos:

A: Os registros de representação semiótica foram necessários para analisar:

A.1: O ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo

A análise do ponto de vista matemático de cada atividade matemática foi realizada considerando: o(s) conhecimento(s) matemático(s)⁵⁴ externalizados por meio das representações semióticas, considerando o objeto matemático, os procedimentos realizados para a solução e a exatidão nos cálculos (caso tenha havido).

A análise cognitiva foi realizada considerando a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação para o mesmo objeto matemático representado. A mudança de registro deve ser espontânea nos dois sentidos da conversão. Esse *gesto intelectual*⁵⁵ foi um pré-requisito para identificarmos como o estudante compreendeu e utilizou os conhecimentos matemáticos envolvidos. Nessa análise cognitiva examinamos a congruência semântica nos tratamentos e nas conversões, pois quando há congruência semântica entre a representação de partida e a representação de chegada “[...] a transformação é trivial, e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código. Quando não há congruência, a transformação torna-se custosa em termos semiocognitivos” (Moretti; Brandt; Almouloud, 2022a, p. 178).

B: As apreensões foram observadas por meio das informações que os estudantes extraíram das figuras.

B.1: Perceptiva, discursiva, sequencial e operatória

Na apreensão perceptiva observamos as reações imediata e automática que os estudantes tiveram para identificar uma figura. Consideramos nessa apreensão como a organização gestáltica das figuras influenciou os discentes na resolução da atividade.

Para a apreensão discursiva consideramos como os estudantes estabeleceram seus raciocínios relacionando o enunciado com as figuras por meio de definições, propriedades, teoremas, corolários e proposições para resolver a atividade.

A apreensão sequencial foi observada nas atividades em que os estudantes tiveram que construir uma figura com régua e compasso ou no software *GeoGebra*. Essa apreensão também foi analisada na descrição de uma figura com a finalidade de reproduzir uma figura dada.

⁵⁴ “Do ponto de vista matemático, os conhecimentos matemáticos são as definições e os teoremas que estabelecem as propriedades dos objetos matemáticos, [...]” (Duval, 2018, p. 17).

⁵⁵ Para Duval (2018, p.10), as dificuldades associadas à conversão podem ser “[...] interpretadas como dificuldades ou erros associados a um conceito matemático”.

A apreensão operatória foi analisada por meio das modificações realizadas nas figuras enunciadas por divisão mereológica e, nas possíveis reorganizações dessas figuras. Assim, observamos os tipos de tratamentos figurais realizados de acordo com a modificação efetuada na figura.

B.2: Congruência semântica

Na congruência semântica observamos como a estrutura perceptiva autônoma e imediata que as figuras possuem interferem na resolução de atividades. Para isso observamos como as apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória foram mobilizadas nas atividades em que o enunciado e a figura eram congruentes e nas atividades em que o enunciado e a figura eram incongruentes.

Analizamos como os estudantes resolvem as atividades em que os tratamentos figurais e a apreensão operatória eram congruentes e, quando não eram congruentes. Observamos nesses casos quais fatores facilitaram ou inibiram a apreensão operatória que conduz à resolução da atividade.

C: A visualização icônica e a visualização não icônica

O olhar icônico foi observado quando os discentes reconheceram de modo imediato as figuras nas representações, vendo-as estáveis e considerando uma figura típica para cada objeto geométrico. Para Duval (2018, p. 11), as representações icônicas são as privilegiadas no ensino, pois dão “[...] acesso aos objetos de forma mais rápida e rica em informações do que qualquer explicação verbal”. Assim, nesta visualização, observamos como o reconhecimento perceptivo das figuras contribuiu ou não para solucionar a atividade. Para isso consideramos como associaram a representação figural ao objeto matemático e ao enunciado da atividade.

O olhar não icônico foi analisado quando os estudantes relacionaram as hipóteses da atividade com a(s) figura(s) identificando os objetos correspondentes à figura representada. Foi observado se a desconstrução dimensional foi mobilizada nessa visualização se a figura se destacou de uma rede de retas ou de uma organização mais complexa. No exemplo abaixo, detalhado na seção 4, ocorre o destaque a figura por retas paralelas duas a duas.

Figura 23 – O destaque da figura por retas paralelas

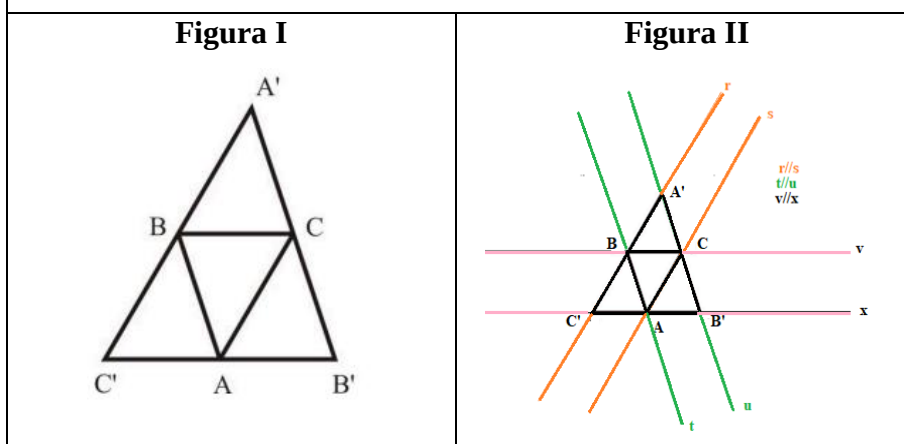
Na figura abaixo temos que:

$\overline{A'C'}$ e $\overline{AC}$ são paralelos;

$\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ são paralelos;

$\overline{B'C'}$ e $\overline{BC}$ são paralelos;

Prove que A é ponto médio de $\overline{C'B'}$.



Fonte: Elaborado pela autora a partir de Duval (2012b, p. 122)

No olhar icônico analisamos:

C.1: O olhar botanista e o olhar agrimensor

O olhar botanista foi observado quando o estudante realizou uma constatação imediata sobre a figura, no olhar ou utilizando alguma figura como modelo. Observamos também como esse olhar influenciou as representações realizadas.

O olhar agrimensor foi observado quando os discentes realizaram medidas nas figuras representadas para solucionar a atividade ou para reproduzi-las. Verificamos nesses procedimentos quais aspectos contribuíram ou não para solucionar a atividade. Para isso, consideramos a leitura do instrumento de medida utilizado e os valores numéricos obtidos empiricamente.

Para o olhar não icônico consideramos:

C.2: O olhar construtor e o olhar inventor

O olhar construtor foi analisado quando os estudantes construíram figuras com o auxílio de instrumentos como régua, compasso e software como o *GeoGebra*. Nesse olhar observamos como as propriedades geométricas foram mobilizadas para construir

a figura. Verificamos também a sequência de operações realizadas de modo a solucionar a atividade.

O olhar inventor foi observado diante das transformações realizadas nas figuras de modo a encontrar um procedimento de resolução para a atividade. Nessas transformações verificamos quais traços foram adicionados e quais desconstruções foram realizadas.

D: As desconstruções e a heurística

A figura possui um papel fundamental para a aprendizagem matemática pelo seu suporte intuitivo e por desempenhar uma função heurística. Assim, ela foi mobilizada neste estudo por meio das operações figurais realizadas por divisão mereológica ou por desconstrução dimensional. Também observamos como a exploração heurística nas figuras na desconstrução instrumental, no olhar icônico e no olhar não icônico, foram mobilizadas para validar os tratamentos figurais realizados.

D.1: Dimensional, instrumental e a exploração heurística

A desconstrução dimensional foi analisada por meio das relações entre as unidades figurais (3D/2D/1D/0D), ou seja, pela decomposição da figura inicial em outras unidades figurais de mesma dimensão ou de dimensões inferiores. Na desconstrução observamos qual dimensão se impôs na visualização geométrica e se foi adicionado traços reorganizadores⁵⁶ à figura inicial com o intuito de solucionar a atividade. Percebemos também como a desconstrução dimensional se subordina ou não ao discurso matemático⁵⁷ e, como os estudantes evoluíram de uma desconstrução a outra (dimensional e instrumental).

A desconstrução instrumental foi observada quando o estudante produziu a figura com o auxílio de instrumentos, como: régua, compasso e o *Geogebra*. Verificamos, conforme os estudos de Mithalal (2011), se os estudantes realizaram a desconstrução instrumental na visualização icônica ou na visualização não icônica.

Para a desconstrução instrumental na visualização icônica

Observamos que a fonte de confiança está nos instrumentos utilizados considerando o contorno da figura, validando os encaminhamentos por meio dos olhares

⁵⁶ Esses traços podem ser imaginados.

⁵⁷ “[...] a desconstrução dimensional é inteiramente subordinada a um discurso axiomático ou axiomatizável” (Duval, 2022, p. 23).

botanista e agrimensor. É visual, se apoiando numa figura típica e depende do instrumento utilizado. As unidades figurais não são vistas isoladas e não podem ser reorganizadas; não mobilizando as propriedades geométricas.

Para a desconstrução instrumental realizada na visualização não icônica

Verificamos que a fonte de confiança está nas propriedades mobilizadas onde a validade dos encaminhamentos ocorre pelos olhares construtor e inventor. Assim, a informação visual da figura obtida se subordina a um discurso e isso contribui para antecipar e controlar a construção realizada. Com isso, o objeto geométrico é percebido por meio de uma geometria axiomática e a figura é vista como uma representação de um objeto geométrico.

A exploração heurística nas figuras foi observada por meio das transformações das figuras geométricas. Verificamos como a exploração heurística na visualização icônica e não icônica contribuíram para resolver a atividade e contribuiu para a aprendizagem de uma geometria dedutiva.

No olhar não icônico observamos se a exploração heurística foi realizada no olhar construtor ou no olhar inventor e quais traços adicionados à figura contribuíram para a visualização em geometria. Constatamos também como a evidência perceptiva das figuras influenciaram a exploração heurística e como foi articulada ao discurso mobilizando as propriedades, estabelecendo conjecturas e validações ou demonstrações.

E: Análise do discurso por meio das funções discursivas

As funções discursivas serviram para analisar a produção dos discentes porque em um sistema semiótico elas são indispensáveis para produzir um discurso. Essa noção, concordando com Moretti (2023, p. 750, grifos do autor) nos possibilitou “[...] perceber o que o aluno de fato está “pensando” quando é provocado para produzir respostas”.

E.1: Função referencial, apofântica e de expansão discursiva

A função referencial serviu para perceber como os estudantes designam os objetos para representar os conceitos matemáticos. Isso pode ser verificado por meio do: uso de letras maiúsculas para designar os vértices das figuras e de letras minúsculas para designar retas.

A função apofântica foi mobilizada para falar dos objetos designados usando palavras, expressões e a escrita na folha sulfite para falar do objeto matemático envolvido.

A função de expansão discursiva foi observada quando os discentes articularam outros enunciados matemáticos para resolver as atividades explicitados por uma explicação, frases ou um raciocínio. Nesta função observamos como os estudantes articularam os enunciados com as figuras e com suas propriedades permitindo a aprendizagem de outros conceitos matemáticos.

Essas categorias listadas acima e os dados obtidos na experimentação, de acordo com o nosso referencial teórico, serão considerados para analisar os resultados desta investigação explicitados na próxima seção.

7 Apresentação e análise das atividades realizadas

Nesta seção apresentamos as atividades e a análise das produções realizadas por estudantes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio. Conforme apresentamos na seção anterior, mobilizamos sete atividades com os discentes envolvidos nesta pesquisa. Essas atividades abordaram conceitos já vistos de geometria no oitavo ano do Ensino Fundamental, como: relação de Euler, triângulo inscrito numa semicircunferência, teorema de Pitágoras, recíproca do teorema de Pitágoras, casos de congruência de triângulos, soma dos ângulos internos de um triângulo, classificação de triângulos quanto aos lados, classificação de triângulos quanto aos ângulos, propriedades do triângulo isósceles, secções no cubo, propriedades do quadrado e do losango.

O objetivo principal das atividades propostas foi possibilitar, por meio do discurso matemático e das representações mobilizadas (na folha, nos materiais manipuláveis e no *GeoGebra*) os aspectos destacados em cada unidade de análise.

Os estudantes durante os encontros podiam formar duplas distintas, sendo ou não do mesmo ano de escolaridade. Em alguns casos tivemos grupos constituídos por trios de estudantes e outras vezes o estudante por escolha própria resolveu a atividade individualmente.

A pesquisadora, antes de entregar a atividade impressa⁵⁸ aos estudantes, relembra de modo coletivo os conceitos que seriam abordados no encontro. Isso foi realizado considerando os seguintes aspectos: o fato de o grupo ser constituído por discentes de anos escolares distintos e por não se tratar de uma sequência de atividades, mas de atividades com o objetivo de mobilizar a visualização não icônica, articulando os registros de representação semiótica e o discurso matemático para a aprendizagem em geometria.

Na análise a seguir apresentamos as produções discentes ocorridas no nosso último encontro. Essa escolha foi feita pelo fato de a atividade matemática ser baseada na geometria plana, sendo um diferencial do estudo de Mithalal (2010) que foi realizado considerando o contexto da geometria dinâmica tridimensional.

⁵⁸ Apêndice C.

7.1 Análise da atividade 7⁵⁹

Atividade 7

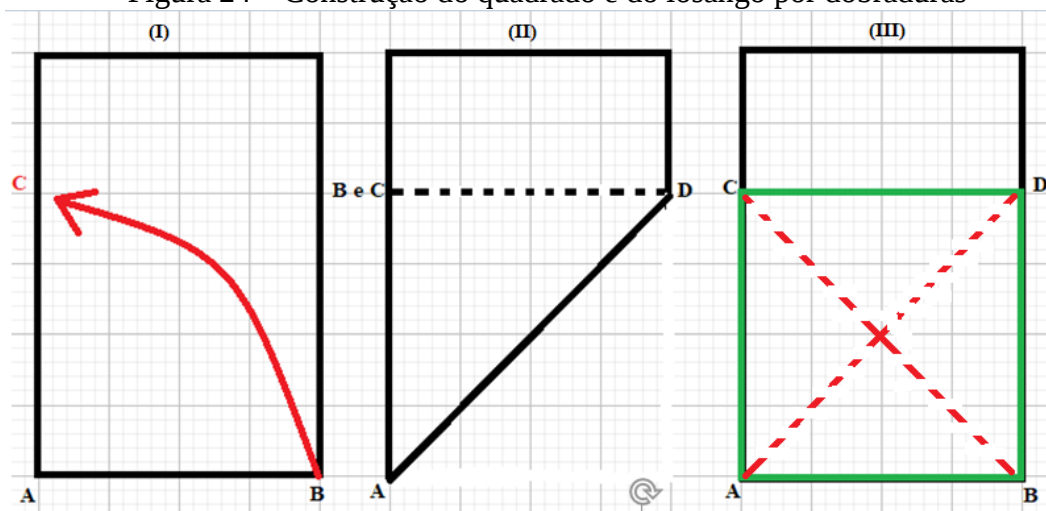
1) Em cada folha sulfite faça por meio de dobraduras e recortes um quadrado e um losango (que não seja quadrado). Após, justifique o procedimento realizado.

Fonte: Dados da pesquisa

O objetivo desta atividade é construir um quadrado e um losango⁶⁰ (que não seja quadrado) por meio da propriedade de suas diagonais. Trata-se de dois paralelogramos, onde no primeiro as suas diagonais são congruentes e no segundo não, temos a diagonal maior e a diagonal menor. Tanto no quadrado quanto no losango suas diagonais se interceptam nos seus pontos médios, sendo perpendiculares entre si.

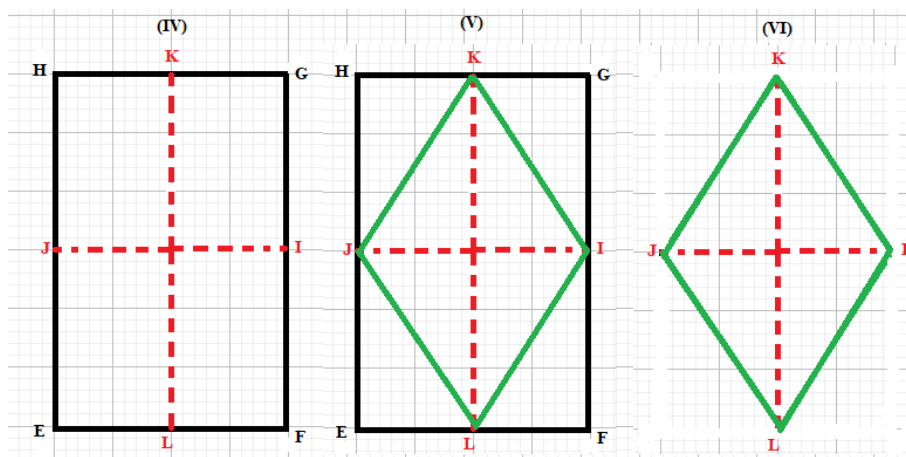
Essas propriedades das diagonais permitem construir o quadrado e o losango realizando o processo inverso da desconstrução dimensional, que é sair das dimensões menores e ir para as maiores. Observe:

Figura 24 – Construção do quadrado e do losango por dobraduras



⁵⁹ Os estudantes, para resolver cada atividade proposta, podiam utilizar: lápis, caneta, borracha, régua, compasso, transferidor, aplicativo do *GeoGebra* instalado no celular, materiais manipuláveis como embalagens e os materiais que usavam na escola como o livro didático. Para resolver essa atividade cada grupo de estudantes recebeu a folha com a atividade impressa e duas folhas sulfites em branco para construírem um quadrado e um losango que não fosse quadrado por meio de dobraduras. Após, registraram o raciocínio na folha impressa com a atividade 7.

⁶⁰ O losango que consideramos daqui por diante é o que não é quadrado.



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo fato de a folha sulfite ser um retângulo para fazer o quadrado um procedimento é dobrar a folha sulfite para determinar o ponto C e D (fig. 24, itens I, II, III). O polígono ABCD é um quadrado. Note que pelo processo de construção: $AB \cong AC$ e $BD \cong CD$, porque coincidem. Por outro lado, realizando a dobradura de modo de A e D coincidam temos que $AC \cong CD$ e $AB \cong BD$. Logo, $AB \cong BD \cong CD \cong AC$ e $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong 90^\circ$. Portanto, ABCD é um quadrado. Observe que suas diagonais são congruentes porque $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ pelo caso LAL (lado, ângulo lado) ou pelo caso LLL (lado, lado, lado).

Para fazer o losango um procedimento é dobrar a folha sulfite ao meio fazendo EF coincidir com HG e, FG com EH (fig. 24, itens IV, V, VI). Obtendo a diagonal menor JI e a diagonal maior KL. Pelo processo de construção essas diagonais são perpendiculares e se interceptam nos pontos médios das diagonais. Portanto, o quadrilátero JLIK é um losango.

A variável didática intrínseca é a ausência de figuras no enunciado e o losango não ser um quadrado. A variável didática extrínseca é construir o quadrado e o losango por meio de dobraduras.

A seguir detalhamos os procedimentos mobilizados pelos estudantes, separando-os de acordo com as categorias estabelecidas em nossa metodologia.

7.1.1 A mobilização dos registros de representação semiótica

O enunciado dessa atividade apresenta somente o registro em língua natural. A resolução exige dois registros: o registro em língua natural e o registro figural.

Observamos a seguir os procedimentos matemáticos mobilizados pelos discentes, as conversões e os tratamentos realizados.

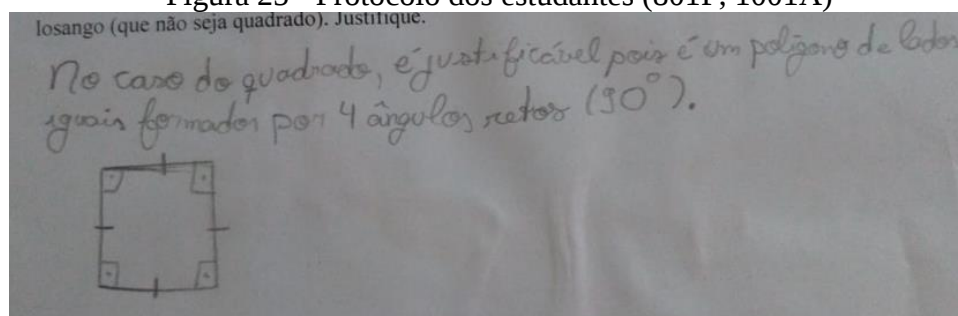
A1: O ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo

O ponto de vista matemático

Para o quadrado os estudantes (801A, 801E)⁶¹ escreveram na folha a definição de quadrado elaborada por eles: “Essa figura é um quadrado pois todos os lados e ângulos são iguais com ângulos de 90° ”. E também a do losango: “Essa figura é um losango pois todos os lados são iguais e tem dois pares de ângulos iguais”.

Os estudantes (801F, 1001A) observaram que as diagonais do losango são mediatrizes, escrevendo na folha: “Suas diagonais representam a mediatriz”, escreveram na folha sua definição por meio do registro em língua natural e figural. Assim:

Figura 25 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001A)



Fonte: Dados da pesquisa

O ponto de vista cognitivo

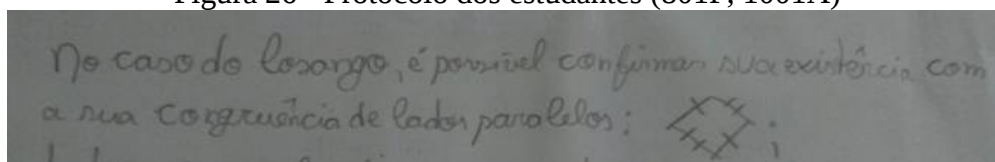
Observamos que os estudantes (801F, 1001A) tiveram dificuldades em realizar a conversão do registro em língua natural (enunciado da atividade) para o figural e coordená-los com a apreensão discursiva para construir o quadrado e o losango por dobraduras. Isso foi evidenciado pela construção do quadrado com lados medindo $9,5\text{cm}$, usando régua e transferidor. De acordo com o enunciado o quadrado deveria ser construído por meio de dobraduras e recortes, sem utilizar instrumentos de medida. Isso evidencia que ao construir o quadrado não voltaram ao enunciado, ficando presos perceptivelmente sua representação.

Para o losango observamos que os estudantes (801F, 1001A) tiveram dificuldades em coordenar o registro em língua natural com o registro figural por meio da apreensão discursiva. Pois, a congruência dos lados paralelos não ocorre somente

⁶¹ Designaremos daqui por diante por (801F, 1001A), o grupo constituído por um estudante do oitavo ano do Ensino Fundamental e um estudante do primeiro ano do Ensino Médio.

para o caso do losango, os lados paralelos do quadrado também são congruentes. Na imagem abaixo (Fig. 26) os traços adicionados à figura, “um risquinho e dois risquinhos”, mostram que os pares de lados paralelos são congruentes. Confrontando todos os protocolos desses discentes, observamos que a afirmação “no caso do losango” indica que compreendem que somente o losango possui os lados paralelos congruentes, não sendo todos congruentes entre si. Tanto o quadrado quanto o losango possuem os lados congruentes entre si, o que diferencia é que no quadrado os ângulos internos são todos retos e no losango não.

Figura 26 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001A)



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes (801G, 901F) conseguiram coordenar o registro em língua natural com o figural e com a apreensão discursiva, resolvendo a atividade corretamente. Observando a coordenação entre os registros mobilizados, externalizados pela apreensão discursiva verificamos que as relações estabelecidas sobre quadrado e o losango foram suficientes para resolver a atividade.

Considerações

Para resolver a atividade muitos dos estudantes recorreram ao livro didático do oitavo ano do Ensino Fundamental para relembrar a definição de quadrado e de losango e suas respectivas propriedades. Durante a resolução da atividade os estudantes do oitavo ano emprestaram o livro para os colegas do nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio. De modo geral, percebemos uma preocupação em buscar no livro didático os conceitos necessários para a resolução, por conta própria, na tentativa de solucionar a atividade, não questionando muito a pesquisadora. Esse movimento teve que ser realizado pela pesquisadora, questionando-os para que elaborassem raciocínios e interagissem com os colegas.

Os estudantes manuseavam o sumário do livro didático, procurando o respectivo conteúdo e iam à referida página, grifando com marca texto a parte que interessava. Com isso, verificamos que possuíam o hábito de estudar. Essas observações

são importantes porque sob o ponto de vista matemático analisando somente a escrita na folha, muitas vezes copiada do livro, sobre os conceitos geométricos, evidencia conhecimentos para elaborar conjecturas, realizar validações diferentes e principalmente, relacionar os conceitos envolvidos. Entretanto, observamos, em alguns discentes, que isso não condizia com o discurso elaborado por eles. Pelo livro eles sabiam das propriedades, porém não conseguiram mobilizar a apreensão discursiva para resolver a atividade.

A análise das conversões e dos tratamentos realizados no registro natural e figural contribuiu para identificarmos que os estudantes (801F, 1001A) não perceberam que o quadrado também é um quadrilátero cujos pares de lados paralelos são congruentes, assim como o losango.

Verificamos que o êxito dos estudantes (801A, 801E), (801G, 901F), na face oculta e exposta permitiu que adentrassem à visualização não icônica, resolvendo a atividade por meio de dobraduras, mobilizando a apreensão discursiva.

7.1.2 As apreensões

A construção do quadrado e do losango por dobraduras requer a apreensão discursiva para relacionar as definições desses paralelogramos com as propriedades de suas diagonais. A apreensão sequencial é necessária para descrever como as dobraduras devem ser realizadas. A apreensão operatória por meio da divisão mereológica homogênea nessas figuras. A apreensão perceptiva serve de controle para justificar a solução.

B1: Perceptiva, discursiva, sequencial e operatória

A apreensão perceptiva

Essa apreensão serviu de controle para que os estudantes (801F, 1001A), (801I, 801J) desenhasssem na folha um quadrado de lado $9,5\text{cm}$ e 8cm , respectivamente. Ao prevalecer a percepção perceptiva visualizaram o quadrado como um “polígono de lados iguais formados por 4 ângulos retos (90°)”.

Observamos que a predominância na apreensão perceptiva da lei gestáltica pregnância da forma fez com que os estudantes tivessem dificuldades em diferenciar quadrado de losango. Essa lei contribuiu para que alguns estudantes observassem somente a forma quadrangular com seus lados regulares, sem olhar para os ângulos internos. Enquanto outros consideravam que um quadrado podia ser o losango apenas

mudando sua posição. Um exemplo disso foi quando as estudantes (801I, 801J) disseram que construíram um quadrado e que ele também poderia ser o losango. Assim: *“Um quadrado, porque tem todos os lados iguais! Mas também pode ser um losango, apenas modificando a imagem”*.

Ao prevalecer essa lei na apreensão perceptiva observamos que os estudantes (801B, 801C, 801D, 801K, 901A, 901B, 901C, 1001C) não conseguiram resolver a atividade.

A apreensão Discursiva

A apreensão discursiva mobilizada pelos estudantes (801F, 1001A) evidenciou a dificuldade que eles tiveram em perceber que todo quadrado é um losango, porém nem todo losango é um quadrado. Para resolver a atividade o estudante 801F pegou o livro didático, utilizado em sala de aula, para lembrar a definição de quadrado e de losango, com suas respectivas propriedades. Mesmo com o livro didático em mãos o estudante 801F estava em dúvida quanto ao losango construído.

801F: *Isso aqui é um losango quadrado?*

P⁶²: *O que é um losango quadrado?*

801F: *É um losango que parece um quadrado, não? Que tem lados iguais...*

A pesquisadora antes de entregar a folha com a atividade tinha de modo coletivo conversado com os estudantes sobre a definição e as propriedades desses quadriláteros. Nesse diálogo o estudante 801A tinha esclarecido que todo quadrado é um losango, mas que a recíproca não é verdadeira. Sendo assim, a pesquisadora questionou o estudante 801F. Assim:

P: *Você se lembra do que o 801F disse no início da aula?*

801F: *O que o 801A disse no início da aula?*

P: *801A você consegue repetir o que disse no início da aula sobre o losango e o quadrado?*

801A: *Que um losango pode ser um quadrado, ... Não! Que um quadrado pode ser um losango, mas nem todo losango é um quadrado.*

Assim, a pesquisadora questiona o estudante 1001A se o losango construído é um quadrado. O estudante 1001A responde: *“Não. Para ser um quadrado esse ângulo tinha que ser de 90° e não é. Aí os lados paralelos aqui eles são iguais, só que são*

⁶² Pesquisadora.

congruentes aos outros pares de lados paralelos”. Observe que esse discente continua tendo a percepção que somente os pares de lados paralelos são congruentes no losango. Isso é evidenciado quando diz “*só que*”, entretanto, essa conjectura começa a ser mudada com a mobilização da apreensão discursiva quando percebem que o losango possui todos os lados congruentes.

Ao continuarem mobilizando a apreensão discursiva os estudantes (801F, 1001A) conseguiram distinguir quadrado e losango. O discente (801F) ao olhar somente para o lado do losango “*lados iguais*” afirmou que era um quadrado. A articulação da apreensão discursiva a apreensão perceptiva fez com que analisassem o ângulo interno, como não era reto perceberam que era um losango.

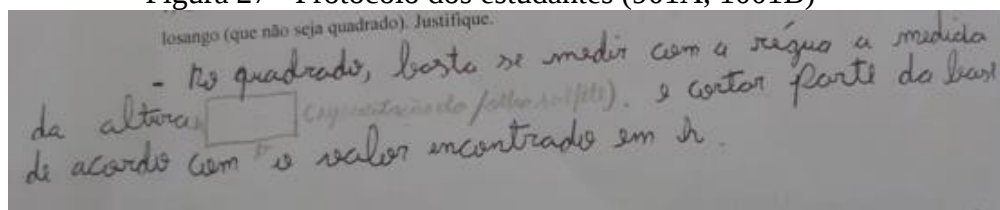
Observamos que a apreensão discursiva ocorrida na resolução desta atividade foi de suma importância para analisarmos o ponto de vista cognitivo e matemático. O discurso mobilizado junto às desconstruções dimensionais, visualizando as diagonais do losango e do quadrado, fez com que os estudantes olhassem para os lados desses polígonos e para que os estudantes permanecessem na visualização não icônica. Isso permitiu que observassem outras propriedades, por exemplo: que as diagonais do losango são mediatrizes “*Suas diagonais representam a mediatriz*” (801F, 1001A).

De modo geral, os estudantes tiveram dificuldades para elaborar um discurso. Os estudantes do oitavo ano foram os que mais conseguiram elaborar o discurso, talvez porque tinham acabado de ver esses conteúdos. O estudante 801A conseguiu resolver a atividade mobilizando a visualização não icônica, explicitando o registro figural e os tratamentos figurais realizados para o quadrado e para o losango. De modo imediato e automático, ele explicou as definições de quadrado e de losango, observando que todo quadrado é um losango, mas que nem todo losango é um quadrado, dando exemplos. Resolveu corretamente a atividade coordenando os registros, porém, não conseguiu elaborar um discurso junto a atividade. Com isso não conseguiu avançar em seus raciocínios, tirando outras conclusões, como por exemplo, os casos de congruência.

A apreensão sequencial

Foi mobilizada pelos estudantes (901A, 1001B) para descrever o procedimento realizado por eles para construir o quadrado em língua natural. Assim:

Figura 27 - Protocolo dos estudantes (901A, 1001B)



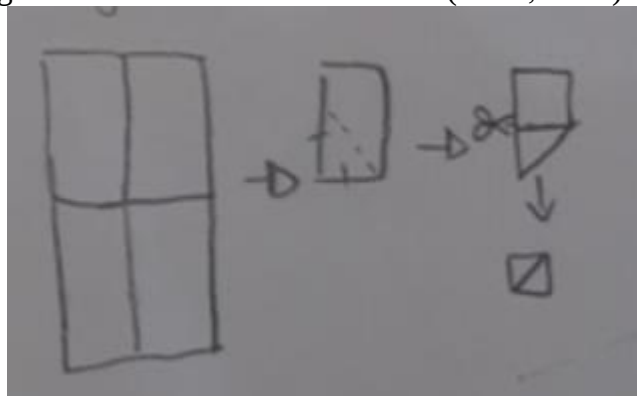
Fonte: Dados da pesquisa

Esses discentes consideraram o lado menor do retângulo como um dos lados do quadrado, transportando essa medida com o auxílio da régua para o lado maior da folha, considerando perceptivelmente a quina da folha como um ângulo reto.

A apreensão operatória

Essa apreensão foi mobilizada pelos estudantes (801A, 801E) para explicar os tratamentos figuraiis realizados para construir o quadrado (Fig. 28). Os tratamentos figuraiis realizados por eles foram diferentes do que previmos (Fig. 24). As setas indicam a sequência dos tratamentos figuraiis realizados por dobraduras.

Figura 28 - Protocolo dos estudantes (801A, 801E)



Fonte: Dados da pesquisa

Nesses tratamentos figuraiis realizados a folha sulfite retangular foi decomposta em quatro retângulos congruentes. A congruência pode ser percebida na segunda figura quando dobram a folha nos traços horizontal e vertical do interior da folha, fazendo coincidir os quatro retângulos. Após eles transferem a medida do lado do quadrado (lado menor do retângulo), por dobraduras, para o lado maior do retângulo, indicando por um traço que esses lados são congruentes. Indicam onde o corte foi realizado para obter o

quadrado, representando-o aberto na última figura, decomposto em dois triângulos retângulos isósceles.

Os estudantes (801A, 801E) realizaram a decomposição mereológica homogênea, no quadrado obtido pela decomposição em dois triângulos retângulos (Fig. 28). Observamos que essa decomposição foi realizada sem mobilizar o discurso matemático. Isso nos mostra que a exploração realizada no quadrado foi realizada pela apreensão perceptiva, sem mobilizar a apreensão discursiva. Essa resolução puramente visual os levou a validar sua resposta medindo os lados do quadrado (10,6) e constatando pelo olhar o ângulo reto (Fig. 30).

B2: Congruência semântica

O losango, a apreensão operatória e os tratamentos figurais são incongruentes semanticamente, enquanto para o quadrado há congruência semântica entre apreensão operatória e tratamento figurais. A incongruência para o losango pode ser minimizada pela apreensão discursiva de modo a indicar os tratamentos figurais que devem ser realizados para a resolução. Sobre isso Duval (2012) pontua que quando ocorre a incongruência semântica entre apreensão operatória e tratamentos matemáticos a apreensão discursiva se torna necessária. Nos protocolos analisados observamos que a não mobilização da apreensão discursiva contribuiu para os estudantes não conseguirem construir o losango por dobraduras.

Para o quadrado a congruência semântica entre apreensão operatória e tratamentos figurais sugere um tratamento figural para construí-lo (Fig. 24, itens (I), (II) e (III)). Sendo assim, é mais custoso realizar a exploração heurística no losango. Para ele desempenhar esse papel a propriedade de suas diagonais precisa ser mobilizada por meio da apreensão discursiva, visualizando as dimensões menores, diagonais e vértices do losango.

Duval (2012, p.136) pontua que quando a figura é congruente a um tratamento matemático, como no quadrado, “[...] a apreensão operatória tem um papel heurístico importante na resolução do problema”. Esse autor destaca que “Quando existe congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível do problema, a apreensão discursiva pode ser negligenciada” (p. 136). De fato, isso foi constatado nos protocolos analisados, ao observarmos que a apreensão discursiva foi menos mobilizada para o quadrado.

A incongruência semântica entre o losango e a apreensão operatória contribuiu para que os discentes (801F, 1001A) tivessem dificuldades em mobilizar a apreensão discursiva. Isso contribuiu para que percebessem o quadrado como um quadrilátero com todos os lados congruentes e o losango como um quadrilátero onde somente o par de lados paralelos são congruentes. Com isso, esses estudantes tiveram dificuldades em perceber que todo quadrado é um losango, mas que nem todo losango é um quadrado.

Considerações

Observamos que o discurso mobilizado, nas diferentes representações semióticas, contribuiu para que os estudantes diferenciassem quadrado de losango. Para o quadrado observamos que o discurso foi menos mobilizado, talvez por ser uma figura culturalmente familiar.

Considerando as conversas coletivas, observamos que o estudante 801A ao articular um discurso junto a atividade matemática, conseguiu relacionar a propriedade dos ângulos internos e a das diagonais para o quadrado e o losango, diferenciando-os. No entanto, percebemos que esse estudante 801A também confirmava sua resposta na visualização icônica.

Os estudantes (801F, 1001A) viram no livro didático do oitavo ano, “Paralelogramo é o quadrilátero que tem os dois pares de lados opostos paralelos” (Silveira; Marques, 2018c, p.208), e uma de suas propriedades “Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes” (Silveira; Marques, 2018c, p. 208). Contudo, não conseguiram coordenar as definições de paralelogramo, losango e quadrado escritas em língua natural no livro didático com o registro figural por meio da apreensão discursiva. Isso nos mostra que ter conhecimentos das propriedades não é suficiente para mobilizá-las nas atividades.

Como no quadrado a apreensão operatória era semanticamente congruente aos tratamentos figurais a apreensão discursiva não precisou ser mobilizada para a resolução, enquanto no losango pelo fato de a apreensão operatória ser semanticamente incongruente com os tratamentos figurais a mobilização da apreensão discursiva foi significativa para a resolução. Os estudantes que não conseguiram articular propriedades sobre esses objetos matemáticos também não obtiveram êxito nas dobraduras.

7.1.3 A visualização icônica e a visualização não icônica

O quadrado, por se tratar de uma figura culturalmente familiar, pode ser construído por meio da visualização icônica, baseando-se na apreensão perceptiva. Enquanto que o losango mobiliza para a sua construção a visualização não icônica. O losango precisa ser reconhecido a partir da propriedade de suas diagonais. Duval (2005) pontua que as formas típicas como o quadrado e as formas a reconhecer, como o losango, tolera uma distância cognitiva denominada de hiato dimensional.

Na visualização icônica o reconhecimento do quadrado é centrado em sua superfície. No losango esse olhar não permite construí-lo porque as propriedades que não estão diretamente relacionadas ao contorno, como as diagonais são menos mobilizadas, especialmente quando o enunciado da atividade não as menciona explicitamente.

C1: O olhar botanista e o olhar agrimensor

O olhar botanista

Esse olhar foi mobilizado para identificar o retângulo (folha sulfite), o quadrado, os triângulos retângulos no interior do losango, os triângulos retângulos na decomposição do quadrado e o ângulo reto do quadrado.

Ao prevalecer o olhar botanista no quadrado e no losango alguns estudantes não observaram que, assim como o losango, o quadrado também possui os lados opostos paralelos e congruentes, não realizando essas relações que são importantes para a aprendizagem em geometria.

A apreensão perceptiva ao comandar o olhar botanista fez com que identificassem o quadrado somente pelo seu contorno. Essa mesma identificação para o losango fez com que confundissem losango com o quadrado. Isso pode ser percebido quando o discente (801F) visualizou apenas o contorno do losango construído, observou os “*lados iguais*” e concluiu que era um quadrado, não observando os ângulos internos. A apreensão discursiva foi significativa para essa diferenciação.

Nos estudantes (901A, 1001B) observamos que o olhar botanista comandado pela apreensão perceptiva prevaleceu na construção do losango. Com isso, tentaram desenhar com lápis e régua um losango na folha, desenhando inicialmente um lado do losango com 5cm de medida e por tentativa e erro tentaram fazer os outros lados. Isso demandou tempo e não conseguiram construir o losango com 5cm de lado. O estudante (1001B) disse: “*Eu fui ajustando, no início eu fiz por dobradura e não tinha dado muito*”

certo. Aí agora eu fiz o desenho e aí eu vou tentar fazer a dobradura em cima dela. Deu tudo errado”. Isso nos chamou a atenção, porque este estudante (1001B) normalmente conseguia resolver os exercícios propostos em sala de aula.

O olhar agrimensor

Esse olhar foi mobilizado pelos estudantes para medirem os lados do quadrado e do losango e, os ângulos do quadrado para validar o procedimento realizado. Somente os estudantes (801A, 801E) mediram com o transferidor os ângulos do losango, para confirmar se os ângulos opostos são congruentes (120° e 60°). O estudante (801A) tinha conhecimento dessa propriedade.

Esse olhar também foi mobilizado pelos estudantes (801F, 1001A) para verificar que os quatro triângulos, obtidos após traçar as diagonais do losango, eram retângulos, usando o transferidor. Porém não conseguiram avançar com o raciocínio. Veja:

P: Eles são iguais ou diferentes?

801F: Bom eles são iguais se você parar para pensar.

Os estudantes (801A, 801E) fizeram o quadrado por dobraduras e recortes, mas o olhar agrimensor serviu de controle para validar a atividade, pois os estudantes utilizaram a régua para confirmar que seus lados mediam $10,6\text{ cm}$ e perceptivelmente concluíram que os ângulos eram retos. Observamos que esses estudantes permaneceram na visualização icônica analisando suas explicações orais, pois validaram a construção do quadrado realizado por dobraduras, medindo os lados, sem mobilizar as propriedades. Veja:

P: O que te garante que é um quadrado 801A?

801A: A régua.

P: Mas, você não está com a régua.

801A: É que a gente não está agora, mas a gente tinha antes.

Isso mostra que esses estudantes não adentraram na visualização não icônica.

Considerações

Ao prevalecer o olhar botanista no quadrado os estudantes (801F, 1001A), (801I, 801J) consideraram como modelo um quadrado em sua posição prototípica, não recorrendo ao livro didático para verificar sua definição. Para o losango não tinham uma

figura para considerarem como típica. Isso contribuiu para que os estudantes (801F, 1001A) buscassem sua definição no livro didático.

Os estudantes (801F, 1001A), (801I, 801J) mobilizaram parcialmente o olhar agrimensor, pois somente realizaram medidas no papel para o quadrado e para o losango. Para o quadrado utilizaram o transferidor para ter certeza de que era um ângulo reto, sem utilizar uma escala para representar essas figuras em outro material. Os estudantes (801A, 801E) fizeram o quadrado por meio de dobraduras. Mas, a validação ocorreu por meio da visualização icônica medindo os lados e os ângulos.

O olhar botânico foi mobilizado para perceberem que os triângulos obtidos, após traçar as diagonais no losango, eram iguais. Mas, ao permanecerem na visualização icônica, não conseguiram avançar com o raciocínio. Acompanhe: *“1001A: Eu não acho que a hipotenusa de cada um seja igual porque são dois lados paralelos e aqui os lados são diferentes, a gente pode falar em ângulo reto, mas aqui o valor da hipotenusa seria diferente”*. Nesse ponto o estudante não tinha mais certeza se os lados do losango eram congruentes. Com isso observamos que os estudantes não conseguiram evoluir no discurso enquanto permaneciam na visualização icônica. Mesmo conseguindo relacionar as definições e algumas propriedades do quadrado e do losango a validação dos raciocínios mobilizados na visualização icônica se deu por meio de medidas para os lados do losango e do quadrado. Nessa visualização observamos que somente uma dupla de estudantes utilizou o transferidor para verificar os ângulos do losango, para o quadrado a apreensão perceptiva e o olhar botanista foram suficientes, para a maior parte dos discentes, para constatar o ângulo reto no quadrado.

C2: O olhar construtor e o olhar inventor

O olhar construtor

Nesse olhar as figuras precisam ser construídas com régua não graduada e compasso ou por software geométrico. Assim ele não foi usado nesta atividade.

O olhar inventor

Esse olhar foi mobilizado traçando as diagonais do losango. Isso ocorreu porque, diferentemente do quadrado, os estudantes não conseguiram desenhar com régua e transferidor um losango que não fosse quadrado.

Os estudantes (801G, 901F) construíram o quadrado por dobraduras. A exploração heurística ocorreu por tentativas e erros, demandando tempo para resolver a atividade. Acompanhe o raciocínio de 801G:

P: Como você fez o quadrado?

801G: Eu juntei essas duas partes e depois essas (I)⁶³. Daí, eu pensei em dobrar no meio, mas fazendo de novo as mesmas coisas aqui e aqui com esse, ainda ficava um nada aqui. (II). Aí eu pensei e se eu dobrar um na metade, juntei esse aqui e, juntei aqui. E aí fui tentar fazer o losango e acabei fazendo o quadrado (III).

P: É um quadrado?

801G: Aham! Porque todos os lados são iguais e os ângulos também.

P: E as diagonais? Quantas diagonais tem esse quadrado?

801G: Tem uma, duas!

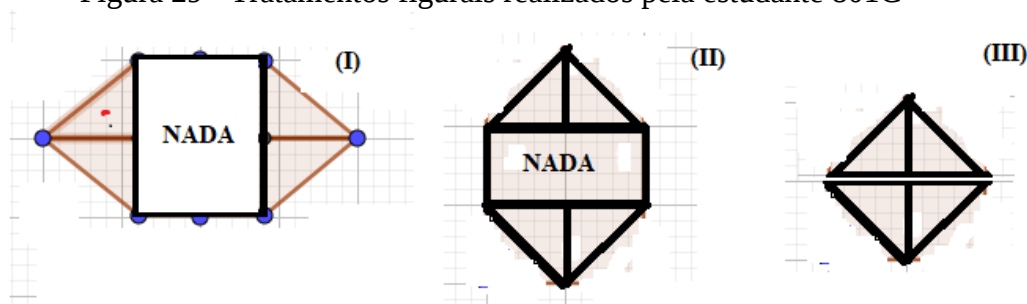
P: Como elas são?

801G: Congruentes, iguais.

P: E onde essas diagonais se cruzam? E formam que ângulo?

801G: Aqui! No ponto médio (apontando para a figura construída com dobradura (III)). Formando um ângulo reto. E se juntar todos esses ângulos dá 360°.

Figura 29 - Tratamentos figurais realizados pela estudante 801G



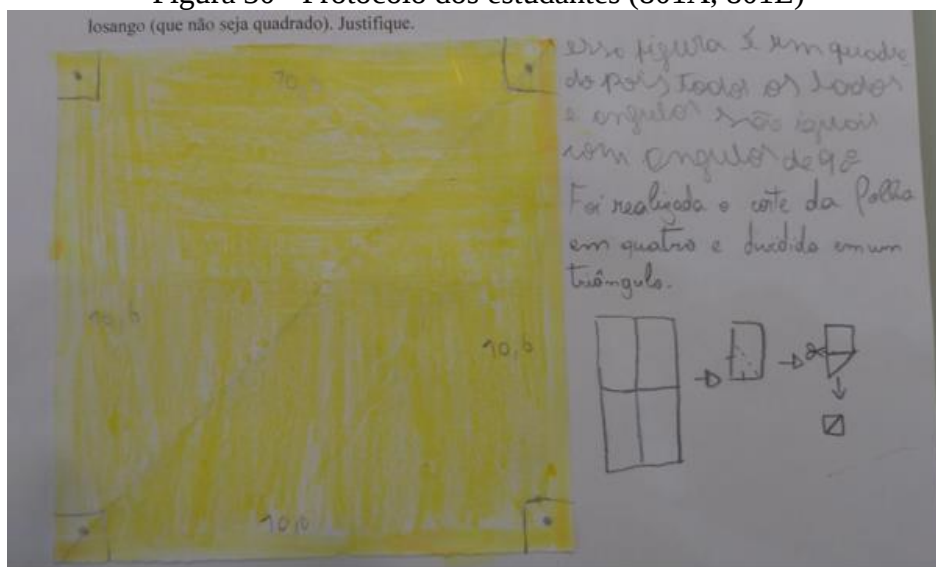
Fonte: Dados da pesquisa

Esses procedimentos ocorreram por meio de tentativas, sem articular o discurso. Depois que construíram o quadrado esses estudantes (801G, 901F) tiveram que pensar no procedimento que foi utilizado para a construção, estabelecendo uma ordem para descrever como fizeram. Analisando as gravações, os registros mobilizados e os tratamentos figurais, percebemos que o discurso não foi mobilizado para resolver a atividade, o que prevaleceu foi a apreensão perceptiva e o olhar botanista. O raciocínio exposto acima evidencia um discurso, porém este foi mobilizado quando a pesquisadora questionou se de fato era um quadrado.

Os estudantes (801A, 801E) construíram o quadrado (Fig. 30), descrevendo o registro figural e seus tratamentos utilizados para realizar as dobraduras.

⁶³ (Fig. 29).

Figura 30 - Protocolo dos estudantes (801A, 801E)

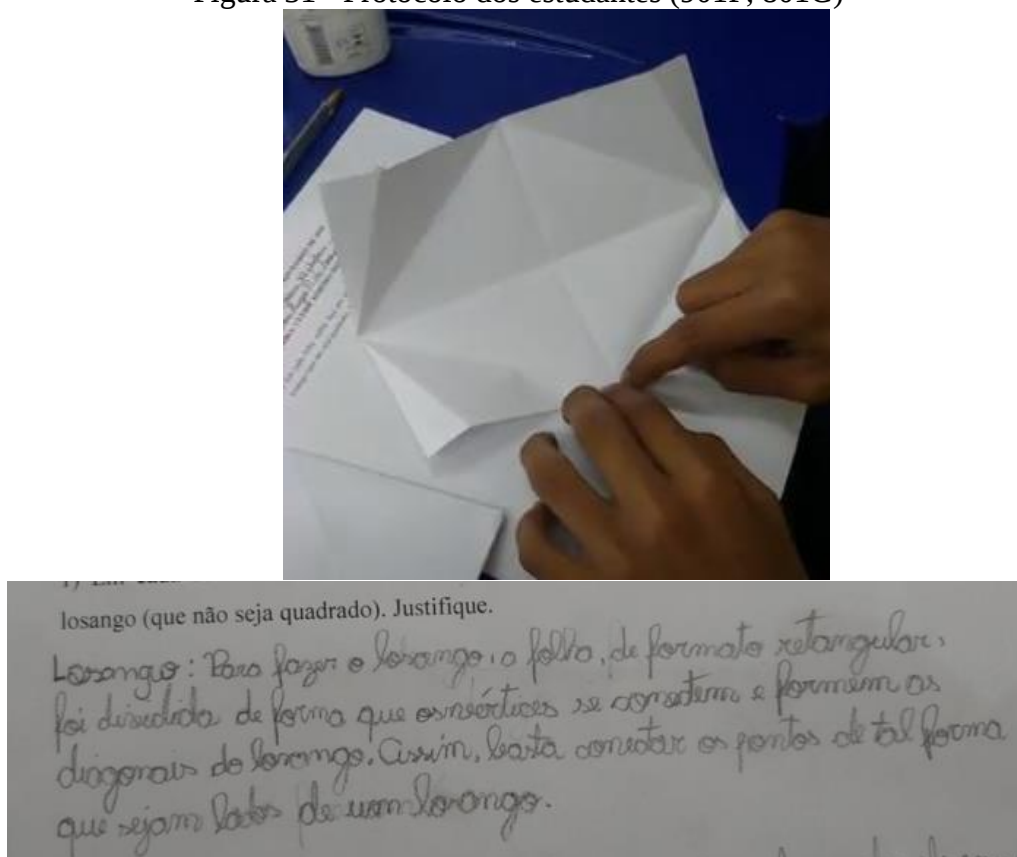


Fonte: Dados da pesquisa

Esses estudantes (801A, 801E) adentraram à visualização não icônica para construir o quadrado, coordenando os registros de representação em língua natural e figural. Percebe-se, no olhar inventor, as dobraduras que foram realizadas na folha para fazer o recorte. A última figura mostra o quadrado com uma de suas diagonais, ou seja, o quadrado decomposto em dois triângulos congruentes (Fig. 30). Entretanto, tiveram dificuldades em produzir um discurso matemático. Talvez, essa dificuldade em estabelecer um discurso justifique a validação dos seus raciocínios com base na visualização icônica.

Para o losango o estudante 901F pegou a folha sulfite observando que se tratava de um retângulo, com lados opostos paralelos e congruentes. Dobrou a folha ao meio no sentido horizontal, abriu a folha e verificou que o traço obtido com a dobradura, passava pelo meio da folha e que era paralelo ao menor lado do retângulo. Na sequência repetiu esse procedimento para o sentido vertical. Com isso, o estudante 901F determinou, com essas dobraduras, as diagonais do losango. Para finalizar a construção do losango ele conectou as pontas. Vejamos:

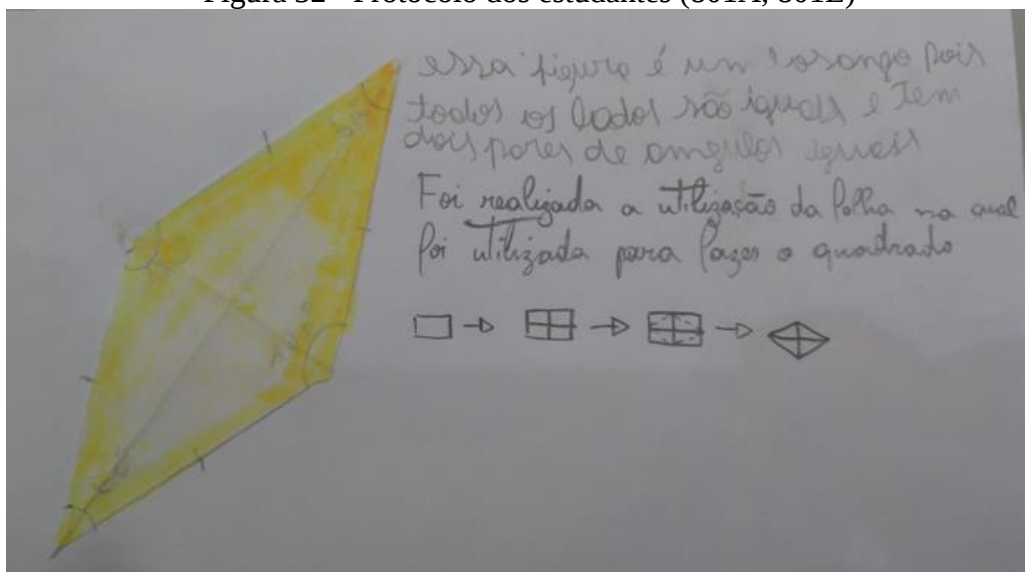
Figura 31 - Protocolo dos estudantes (901F, 801G)



Fonte: Dados da pesquisa

No registro em língua natural (Fig. 31) descrevendo os procedimentos para construir o losango por dobraduras não vemos a propriedade das suas diagonais. Entretanto, o estudante 901F mobilizou no discurso essa propriedade. Esses tratamentos figurais foram descritos pelos estudantes (801A, 801E) (Fig. 32). Esses discentes descreveram numa sequência de quatro figuras, seguidas por setas os tratamentos figurais realizados na folha sulfite, os tratamentos figurais realizados para construir o losango. Assim:

Figura 32 - Protocolo dos estudantes (801A, 801E)



Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que eles mediram os ângulos opostos do losango para confirmar a propriedade que o losango possui os ângulos opostos congruentes.

Considerações

A falta de coordenação entre os registros figural e discursivo fez com que os estudantes (801F, 1001A) percebessem os quatro triângulos internos após traçar as diagonais do losango, mas por meio da análise desses triângulos concluíram que os lados do losango não eram iguais. Quando eles viam somente as medidas das diagonais do losango, perpendiculares entre si e interceptando-se em seus respectivos pontos médios conjecturavam que era um losango por conta da propriedade, mas a fonte de confiança ocorria medindo seus lados e verificando que seus ângulos não eram retos.

Entretanto, quando viam o losango observando os quatro triângulos retângulos congruentes não tinham certeza se os lados do losango eram iguais e não conseguiam avançar com o raciocínio. Visualmente a hipotenusa desses triângulos retângulos não eram iguais, pareciam ser iguais somente às paralelas entre si. Esses estudantes ficaram presos nessa percepção visual (2D) dos triângulos, não conseguindo perceber que essas figuras eram congruentes. Embora soubessem dos casos de congruência, pois já tinham estudado, não conseguiram articular um discurso aos tratamentos figurais para justificar a igualdade dos lados.

Com isso, percebemos que esses estudantes realizaram a desconstrução dimensional, mas não conseguiram adentrar a visualização não icônica por não conseguir articular a desconstrução com a linguagem por meio da apreensão discursiva.

No olhar inventor os estudantes (801A, 801E) decompueram o retângulo (folha sulfite) em quatro retângulos congruentes e, construíram o losango em um desses retângulos, considerando suas diagonais (Fig. 32, acima). A decomposição do losango (2D) em unidades figurais de dimensão menor (1D) constitui o que Duval (2005) denomina de gesto reflexo. Segundo esse autor esse gesto é o pré-requisito para entrar no funcionamento próprio da visualização não icônica.

Observamos também que esses estudantes construíram o quadrado em outro retângulo. Eles validaram os raciocínios mobilizados para o quadrado por meio do olhar inventor articulado ao discurso. Assim:

P: O que te garante que os quatro lados são iguais e que tem os ângulos retos?

801A: Dobrando. Dobrando porque assim eu vou garantir que os lados são iguais e que tem os ângulos retos (Os lados são iguais porque coincidem, o ângulo é reto porque as diagonais do quadrilátero são iguais). As diagonais partem dos vértices opostos... São congruentes.

No desenvolvimento da atividade observamos que os estudantes (801A,801E) evoluíram de uma constatação puramente visual para o quadrado (Fig. 30) para uma validação comandada pelas hipóteses sobre o quadrado, evidenciado pela apreensão discursiva acima a partir do questionamento da pesquisadora. A resposta em língua natural foi realizada na folha após esse movimento.

A divisão mereológica realizada no quadrado de modo puramente visual fez com que não mobilizassem a apreensão discursiva. Os estudantes que conseguiram construir o losango por meio de dobraduras foram os que subordinaram a desconstrução dimensional à um discurso axiomático por meio da apreensão discursiva adentrando no modo não icônico de ver o losango.

7.1.4 As desconstruções e a heurística

A desconstrução dimensional é necessária para construir o losango, pois se deve visualizar suas diagonais (1D), interceptando-se em seus pontos médios, determinando a seguir seus vértices. Isso exige desconstruir o losango (2D) em segmentos (1D), posteriormente em pontos (0D), ligando-os se obtém o losango (2D).

Realizando a seguinte desconstrução dimensional: $(2D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 0D \leftrightarrow 2D)$. Saindo assim da maior dimensão, indo para as menores e voltando para a maior dimensão.

O quadrado pode ser construído na visualização icônica, pois seu reconhecimento discriminativo baseado na apreensão perceptiva considerando sua forma típica permite a solução. O losango mobiliza a visualização não icônica, sua construção requer identificá-lo por meio da propriedade de suas diagonais. Isso exige a desconstrução das formas que para Duval (2005, p.4) “[...] está no centro do olhar geométrico sobre as figuras” (p.4).

A utilização heurística do losango nessa atividade depende de ver suas diagonais. Isso implica em decompor o losango (2D) em quatro triângulos retângulos (2D) para justificar a congruência dos seus lados, onde a apreensão discursiva é mobilizada para justificar a congruência desses triângulos.

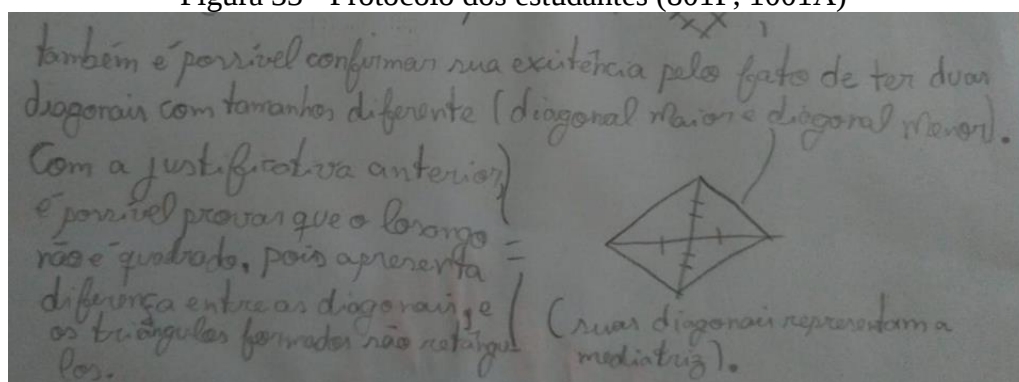
D1: Dimensional, instrumental e a exploração heurística

A desconstrução dimensional

Observamos que essa desconstrução foi mobilizada quando os estudantes (801F, 1001A), (801I, 801J) para construir o losango partiram de suas diagonais para explicar a solução da atividade. Eles realizaram a seguinte desconstrução dimensional: $(1D \rightarrow 0D \rightarrow 2D)$. Traçaram as diagonais (1D), suas extremidades determinaram os vértices do losango (0D), ligando-os construíram o losango (2D).

Esse procedimento pode ser visto no protocolo a seguir.

Figura 33 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001A)



Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que a desconstrução dimensional ($1D \rightarrow 2D$) realizada pelos estudantes (801F, 1001A) no losango (2D), partindo de suas diagonais (1D), contribuiu para diferenciar quadrado de losango. Observe:

801F: *Os lados paralelos de um losango são congruentes com os outros lados paralelos.*

P: *E o que mais você percebeu?*

801F: *E tem uma diferença de diagonal, a diagonal maior e a diagonal menor (aponta para a diagonal do losango e a do quadrado). As diagonais do quadrado são congruentes por si só. Não existe diagonal maior e diagonal menor.*

Essa desconstrução ($1D \rightarrow 2D$) visualizando as diagonais também foi percebida no discurso mobilizado pelos estudantes (801I, 801J). Acompanhe:

801I: *Aqui a gente consegue ver que é um losango, mas que não é um quadrado, porque as medidas aqui dá dois e aqui dá dois e, aqui dá quatro e aqui dá quatro. Somando aqui dá oito e aqui dá quatro (somaram as diagonais).*

P: *Por que vocês consideraram essas medidas?*

801I: *A gente tentou não usar todas as medidas iguais, porque todas as medidas iguais aqui seria o quadrado (o quadrado possui as diagonais congruentes).*

P: *O que esse segmento é do losango? (segmento de 8cm e de 4cm, perpendiculares entre si, interceptando-se em seus pontos médios)*

801I: *Esse aqui é a diagonal maior e esse aqui é a diagonal menor*

P: *E elas se cruzam formando que ângulo?*

801J: *Um ângulo médio... Oh!*

801I: *90°. Todos aqui dão ângulos de 90°, um ângulo reto (diagonais perpendiculares entre si).*

P: *Como vocês começaram? Pensando no lado ou na diagonal?*

801I: *Eu peguei a diagonal primeiro. Eu medi a diagonal, eu fiz uma cruz, ó! Eu peguei uma medida aleatória, daí, tipo o meio dela e fiz essa outra diagonal, a diagonal menor, aí eu só liguei.*

P: *O que leva vocês a se convencerem de que é um losango?*

801I: *As medidas!*

801J: *Éééé... as medidas e também as diagonais.*

Esses estudantes traçaram inicialmente uma cruz, que é o ponto onde as diagonais se interceptam, após prolongaram esses segmentos de modo que tivessem dois segmentos de tamanhos diferentes se cruzando em seus pontos médios. No protocolo percebemos que os estudantes notaram que as medidas dessas diagonais não eram fixas “aleatórias”. As extremidades desses segmentos determinaram os vértices do losango, ligando-os desenharam o losango. Para isso realizaram a desconstrução dimensional: ($1D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 0D \rightarrow 2D$), ou seja, por meio dos segmentos formando uma cruz (1D), determinaram o ponto onde as diagonais se interceptam (0D), a partir de ponto

prolongaram a cruz formando a diagonal maior e a diagonal menor se cruzando em seus respectivos pontos médios ($1D$), as extremidades desses segmentos determinaram os vértices do losango ($0D$), ligando esses vértices obtiveram o losango ($2D$).

Os estudantes (801G, 901F) realizaram a seguinte desconstrução dimensional ($2D \rightarrow 1D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$). Partindo da folha retangular ($2D$) esses estudantes dobraram a folha ao meio no sentido horizontal e no sentido vertical, determinando as diagonais do losango ($1D$), as extremidades desses segmentos são os vértices do losango ($0D$), ligando-os obtiveram os lados do losango ($1D$) e o losango ($2D$).

A desconstrução instrumental

Vimos nos estudos de Mithalal e Balacheff (2019) que existem dois tipos de desconstrução instrumental: uma no olhar icônico e outra no olhar não icônico. Assim, vamos analisar a desconstrução instrumental nas duas visualizações: icônica e não icônica.

A desconstrução instrumental na visualização icônica

Os estudantes (801F, 1001A), (801I, 801J) para construírem o quadrado com lados medindo respectivamente $9,5cm$ e $8cm$, realizaram uma desconstrução instrumental no olhar icônico, pois não visualizaram as unidades figurais de dimensões menores, permanecendo na maior dimensão, a do quadrado ($2D$). No registro figural observamos que esses estudantes representaram o quadrado com régua e transferidor, sem mobilizar as propriedades. A apreensão perceptiva com estratégias de tentativas e erros é que serviu de controle para validar essa construção.

Para construir o losango com régua e transferidor também percebemos que a desconstrução instrumental foi mobilizada no olhar icônico pelos estudantes (801F, 1001A), pois construíram um segmento e determinaram seu ponto médio por tentativa e erro, olhando as medidas na régua, mas sem registrar as medidas na folha. Traçaram por esse ponto médio um outro segmento perpendicular ao segmento inicial, mas com tamanho diferente de modo que este ponto também fosse ponto médio deste segmento. As extremidades desses segmentos determinaram os vértices do losango. Ligaram com a régua esses vértices e verificaram se era um losango medindo seus lados e observando perceptivelmente que seus ângulos não eram de 90° . Vejamos:

801F: Eu fiquei medindo os lados para pegar o ponto médio, daí eu encontrei o ponto médio e medi para ver se estava congruente e estava congruente, daí eu fui e cortei (traçou a diagonal maior e a diagonal menor).

A desconstrução instrumental na visualização não icônica

Essa desconstrução não foi observada em nenhum protocolo, porque nenhum estudante mobilizou as propriedades para justificar os procedimentos realizados com régua (sem medidas) e compasso. A régua (com medidas) foi comandada pela apreensão perceptiva e pelo olhar botanista e não por propriedades.

A heurística

Para a exploração heurística nas figuras observamos que a construção do quadrado com régua não favoreceu sua exploração heurística. A exploração heurística no losango se deu quando os estudantes (801F, 1001A), (801I, 801J) iniciaram sua construção por meio da representação de suas diagonais perpendiculares entre si e se interceptando em seus respectivos pontos médios.

Observamos que a fonte de confiança da exploração heurística para validar os lados do losango se deu por meio do discurso matemático. Assim:

P: *As diagonais de um losango se cruzam onde?*

801F: *Justo no ponto médio.*

P: *Como se cruzam no ponto médio esse pedaço é o que em relação a esse?*

801F: *Metade.*

P: *E este em relação a este?*

801F: *Metade também! Então cada um é a bissetriz do outro.*

P: *E pelo caso de congruência?*

801F e 1001A: *lado lado lado (responderam juntos).*

1001A: *lado ângulo lado, ele participa nos dois casos de congruência.*

O estudante 801F percebeu que as diagonais do losango coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos. Após traçarem as diagonais, os estudantes (801F, 1001A), realizaram uma decomposição homogênea no losango. O losango foi decomposto em quatro triângulos congruentes. Entretanto, essa exploração heurística sem articulação com o discurso fez com que os estudantes (801F, 1001A) visualisassem as hipotenusas desses triângulos não sendo congruentes. Observe: “1001A: *Eu não acho que a hipotenusa de cada um seja igual porque são dois lados paralelos e aqui os lados são diferentes*”.

No protocolo dos estudantes (801A, 801E) o quadrado e o losango exerceram seu papel heurístico quando, por meio de tratamentos figurais articulados ao discurso, o decompueram em dois triângulos retângulos isósceles e em quatro triângulos retângulos congruentes. Para o quadrado os estudantes apenas perceberam que os

triângulos eram congruentes, porque coincidiam quando realizavam a dobradura na diagonal do quadrado, não observando que são triângulos retângulos isósceles.

Considerações

Observamos por meio do discurso que a desconstrução dimensional ($1D \rightarrow 2D$), visualizando as diagonais do losango, foi a que mais contribuiu para que os estudantes construíssem essa figura. A fonte de convicção dos discentes se deu mais pelas diagonais, se fossem congruentes era um quadrado e se não fossem congruentes era um losango. Contudo, a desconstrução dimensional, visualizando as diagonais do losango e do quadrado, sem articular o discurso, não evidenciou a congruência dos lados do losango. Isso pode ser percebido pelo registro figural e pelos tratamentos realizados (Fig. 31). Observe que os estudantes (801F, 1001A) perceberam somente que as diagonais do losango se interceptam nos respectivos pontos médios e que são de tamanhos diferentes comparadas com a do quadrado. Eles ficaram presos às diagonais não se atentando para os lados.

Observamos que os estudantes (801G, 901F) ao realizarem as desconstruções dimensionais articuladas ao discurso por meio de questionamentos da pesquisadora, contribuiu para que percebessem que os quatro triângulos obtidos pela decomposição homogênea no losango são retângulos e congruentes pelo caso: lado ângulo lado (LAL) e, pelo caso: lado lado lado (LLL). Um discente (801A) conseguiu ver um caso particular de congruência nesses triângulos, o caso: lado, ângulo e ângulo oposto.

A exploração heurística foi validada por meio do discurso na visualização não icônica. A decomposição homogênea realizada pelos estudantes (801F, 1001A) no losango, visualizando os quatro triângulos retângulos no interior do losango após traçar as diagonais, foi validada pelo discurso matemático mobilizado. Usando os casos de congruência entre esses triângulos confirmaram a congruência dos lados do losango.

Observamos, nos protocolos dos estudantes (801I, 801J), que quando a apreensão perceptiva se sobressaiu na exploração heurística, sem mobilizar o discurso, as hipotenusas dos triângulos obtidos pela decomposição homogênea, deram a impressão que os lados do losango não eram congruentes. Ao considerarem os lados do losango como hipotenusa achavam que somente os lados paralelos eram congruentes. Assim, percebemos que a exploração heurística nas figuras pode ser potencializada pelo discurso.

7.1.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas

A função referencial é mobilizada no enunciado para designar duas figuras geométricas: o quadrado e o losango. A função apofântica ocorre ao enunciar a construção de “um losango (que não seja um quadrado)”. Essa afirmação traz uma informação sobre o losango, excluindo-o dos quadrados.

E1: Função referencial, apofântica e de expansão discursiva

A função referencial

Os estudantes mobilizaram essa função para designar quadrado e losango.

A função apofântica

Observamos essa função no registro em língua natural quando os estudantes (801A, 801E) criam a seguinte frase para o quadrado: “*Essa figura é um quadrado pois todos os lados e ângulos são iguais com ângulos de 90°*” e, para o losango “*Essa figura é um losango pois todos os lados são iguais e tem dois pares de ângulos iguais*”. Essas frases explicitam que eles conseguiram falar sobre o quadrado e o losango de modo coeso e coerente, pois trata-se de uma expressão verdadeira sobre esses objetos matemáticos estudado.

Essa função foi mobilizada para descrever o losango com a finalidade de construí-lo por dobraduras. Isso pode ser visto quando o estudante (801F) pergunta a pesquisadora “*Isso é um losango quadrado?*” Ele não estava conseguindo resolver a atividade porque estava com dificuldades em identificar as propriedades do losango.

A função de expansão discursiva

O estudante (801A) ao escrever uma definição para o quadrado e para o losango, “*Essa figura é um quadrado pois todos os lados e ângulos são iguais com ângulos de 90°*”, “*Essa figura é um losango pois todos os lados são iguais e tem dois pares de ângulos iguais.*”, mobiliza a função de expansão discursiva quando consegue articular essas definições, conectando essas duas frases, por meio da apreensão discursiva e afirma que “[...] *um quadrado pode ser um losango, mas nem todo losango pode ser um quadrado*”. Essa frase foi elaborada a partir das duas primeiras, por isso se trata de uma expansão discursiva. Essa função ao ser mobilizada permitiu que esses estudantes ampliassem seus conhecimentos sobre o quadrado e o losango.

Identificamos que a função apofântica foi mobilizada pelo estudante (801F) ao explicitar sua dificuldade em diferenciar losango e quadrado. Essa dúvida contribuiu para não executarem a função de expansão discursiva relacionando as definições desses paralelogramos, articulando suas propriedades. Com isso, não houve uma progressão da apreensão discursiva para produzir informações suficientes sobre esses polígonos para a resolução da atividade.

Essa função foi mobilizada para descrever o losango com a finalidade de construí-lo por dobraduras. Isso pode ser visto quando o estudante (801F) pergunta à pesquisadora “*Isso é um losango quadrado?*” Ele não estava conseguindo resolver a atividade porque estava com dificuldades em identificar as propriedades do losango.

Considerações

Observamos que a apreensão discursiva foi a mais utilizada pelos estudantes para desenvolver a função de expansão discursiva.

Na resolução da atividade feita pelo estudante 801A, na função apofântica constatamos o valor lógico verdade por identificar e construir corretamente o quadrado e o losango, epistêmico por ter mobilizado corretamente os tratamentos figurais e, o valor social por resolver a atividade e por explicar aos colegas a diferença entre quadrado e losango.

Essa análise nos permite inferir que o estudante 801A compreendeu os conceitos sobre o quadrado e o losango, não apresentando em seus protocolos e discurso nenhum indicativo de incompreensão.

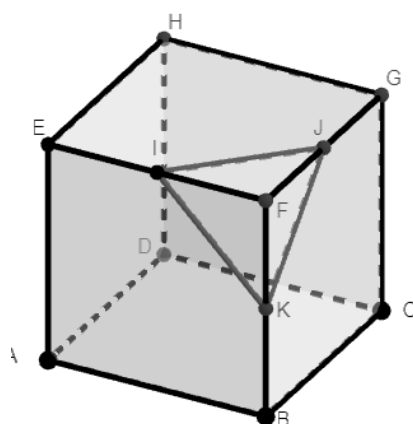
A análise da atividade 6, a seguir, por ser extensa, foi decomposta em: análise do primeiro item da atividade e, análise do segundo item da atividade.

7.2 Análise da atividade 6

7.2.1 Análise do primeiro item da atividade 6

Atividade 6

- 1) No cubo abaixo, de aresta 8cm, passa-se uma secção plana nos pontos I, J e K, onde I, J e K são, respectivamente, pontos médios das arestas EF, FG e FB.



Feito esse “corte”, responda: qual é a figura geométrica plana determinada por essa secção?

Qual é a área e o perímetro dessa figura plana.

Observe o poliedro obtido após a retirada dessa “ponta” e responda:

Qual o número de:

Vértices desse poliedro: _____

Faces desse poliedro: _____

Arestas: _____

Fonte: Dados da pesquisa

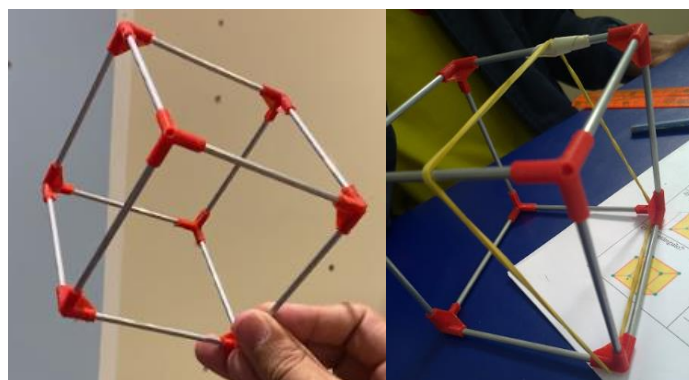
Primeiro item da atividade:

Essa atividade tem por objetivo seccionar o cubo por um plano passando pelo ponto médio das arestas EF, FG e FB identificando a figura plana obtida, seu perímetro e sua área. Objetiva-se também determinar o número de vértices, faces e arestas do poliedro obtido após traçar essa secção plana retirando o poliedro menor. Os conteúdos necessários para resolver são: teorema de Pitágoras, relação de Euler e a propriedade que em um triângulo equilátero a altura relativa a uma base é bissetriz e mediana.

Para a resolução deve-se observar que os lados do triângulo obtido com a secção plana passando pelos pontos médios das arestas EF, FG e FB correspondem à hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles em cada face do cubo, os triângulos IJF, JFK e IFK, cujos catetos medem 4cm. Pelo teorema de Pitágoras determina-se o lado

do triângulo IJK equilátero, calculando seu perímetro. Para a área deve-se calcular a altura do triângulo por meio de seguinte propriedade do triângulo equilátero “Sua altura é mediana, bissetriz e altura”. Assim, essa altura é determinada pelo teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de hipotenusa $4\sqrt{2}cm$ e catetos h e $2\sqrt{2}cm$.

Para resolver essas atividades os estudantes podiam usar: o *GeoGebra* 3D⁶⁴, a representação gráfica do cubo na folha e o esqueleto do cubo (conforme figura abaixo), que podia ser seccionado por meio dos elásticos amarelos.



Ressaltamos que o esqueleto do cubo na representação acima é unidimensional, situada no espaço tridimensional e faz parte das variáveis didáticas extrínsecas da atividade pelo fato de favorecer a visualização da secção plana.

As variáveis didáticas intrínsecas dessa atividade foram: a presença de figura no enunciado; a figura inicial ser tridimensional; a medida da aresta do cubo (8 cm); a secção plana passar pelos pontos médios das arestas EF, FG e FK, respectivamente.

As variáveis didáticas extrínsecas foram: os modos como a figura inicial pode ser representado: graficamente, no esqueleto do cubo e no *GeoGebra*⁶⁵. A resolução da atividade em dupla, para favorecer a apreensão discursiva, constitui também essas variáveis.

7.2.1.1 A mobilização dos registros de representação semiótica

O enunciado dessa atividade apresenta dois registros de representação semiótica: a língua natural e o registro figural na representação gráfica.

⁶⁴ Disponível em: < [Calculadora 3D - GeoGebra](#) > Acesso em fev. de 2025.

⁶⁵ Os estudantes acessaram esse software no encontro anterior via celular. Durante a semana assistiram vídeos no you tube e representaram algumas figuras.

Para resolver o primeiro item dessa atividade os estudantes mobilizaram os seguintes registros: o algébrico, o numérico, a língua natural e o figural.

A1: O ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo

Ponto de vista matemático

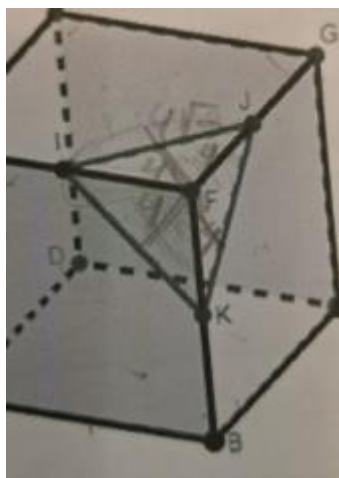
No protocolo (801A, 901E) não conseguimos analisar o ponto de vista matemático, pois esses estudantes registraram somente a resposta. Na gravação em vídeo observamos que esses discentes identificaram corretamente o triângulo obtido por meio da secção plana, o triângulo IJK, mas erraram a área e o perímetro. Na folha escreveram como resposta somente 113cm. Não conseguimos identificar se essa medida se refere ao perímetro ou a área. Por ser uma medida linear consideramos que se trata do perímetro.

Os estudantes (801J, 901F) conseguiram identificar o triângulo IJK e determinar seu perímetro e sua área. Para a área registraram somente $8\sqrt{3}$, não escrevendo a unidade de medida cm^2 , para o perímetro registraram corretamente na folha a resposta $12\sqrt{2}cm$. Analisando somente a resposta desses discentes na folha: para o número de vértices 4, para o número de faces 4 e para o número de arestas 6 observamos que erraram, pois, esses dados não correspondem ao poliedro obtido após a retirada da “ponta”, no caso o poliedro obtido após a retirada do tetraedro.

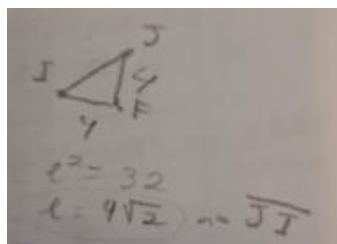
Os estudantes (801F,1001B) identificaram que $\overline{IF} \cong \overline{JF} \cong \overline{FK} = 4cm$ nos triângulos retângulos IFJ, IKF e JFK (fig. 34 (A)). Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo IJF determinaram a medida do lado JI (fig. 32 (B)). Fizeram isso para os três triângulos (IFJ, IKF e JFK), verificando que $\overline{IJ} \cong \overline{IK} \cong \overline{JK} = 4\sqrt{2}cm$ (fig. 34 (C), abaixo). Para calcular o perímetro multiplicaram essa medida por três mentalmente ($3 \times 4\sqrt{2}cm = 12\sqrt{2}cm$).

Para calcular a área do triângulo IJK esses estudantes perceberam que ele é equilátero (fig. 32 (D), abaixo). Por meio da propriedade “em um triângulo equilátero a altura relativa a uma base também é mediana” determinaram a medida de IH (fig. 34 (E)). Mobilizando o teorema de Pitágoras calcularam a medida da altura JH relativa a base IK (fig. 34 (F), abaixo). Após, aplicaram a fórmula da área no triângulo IJK, determinando-a (fig. 34 (G), abaixo).

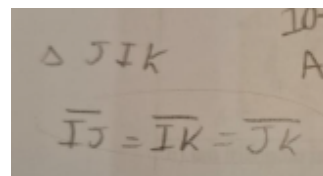
Figura 34 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)



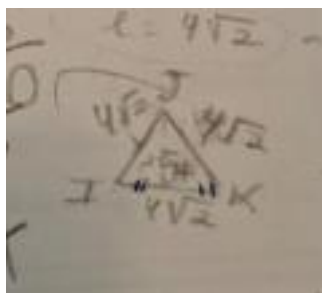
(A)



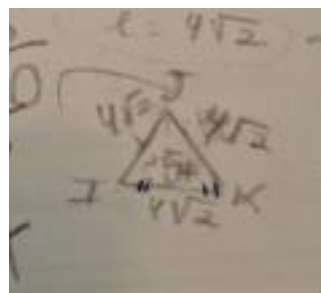
(B)



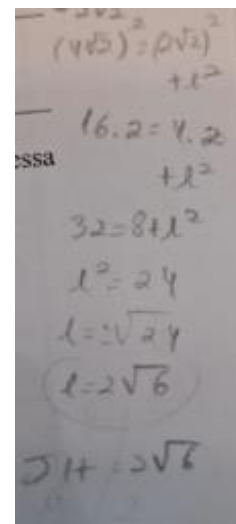
(C)



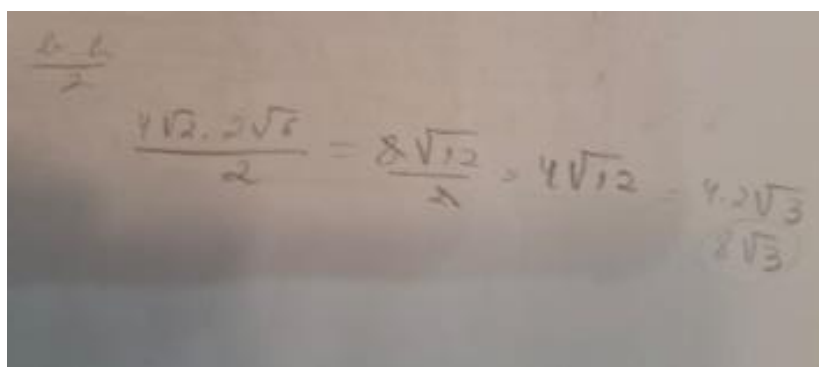
(D)



(E)



(F)

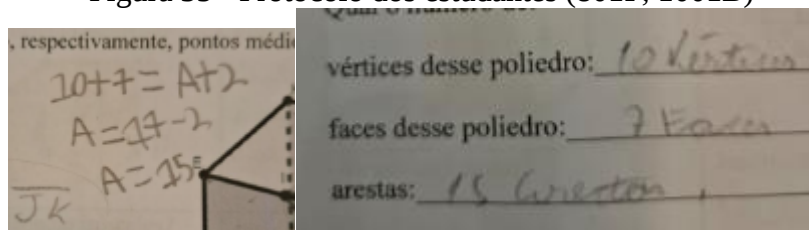


(G)

Fonte: Dados da pesquisa

Para determinar a quantidade de vértices (10), de faces (7) e de arestas (15) os estudantes (801F,1001B) usaram a relação de Euler. Assim:

Figura 35 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)



Fonte: Dados da pesquisa

Ponto de vista cognitivo

No ponto de vista cognitivo observamos que os estudantes (801F, 1001B) realizaram uma conversão do registro em língua natural para o figural (a figura representada na folha), por meio dos tratamentos figurais na representação gráfica perceberam que os lados do triângulo IJK obtido por meio da secção correspondiam as hipotenusas dos triângulos retângulos IJF, IFK e JFK. Assim:

(1001B): A gente viu o triângulo! Do ponto I até o ponto F vai dar quatro e do ponto F até o ponto J também vai dar quatro. Então a gente aplicou o teorema de Pitágoras aqui! No triângulo IFJ, a gente também fez isso no triângulo IKF e também no triângulo JFK. Em todos a gente conseguiu ver que essa parte aqui que está sublinhada vai dar $4\sqrt{2}$.

(1001B): Que daí vai formar o triângulo JKI.

P: Que tipo de triângulo é esse?

(1001B): Equilátero! A gente conseguiu comprovar que é equilátero. A gente representou ele aqui, daí multiplicou por três e conseguiu achar o perímetro.

(1101B): Depois disso a gente foi achar a fórmula do triângulo para achar a altura, base vezes a altura dividido por dois. Só que a gente não tinha a altura.

P: Como assim?

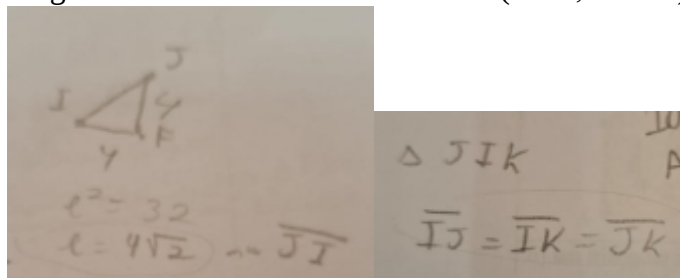
(1001B): Aí a gente usou a propriedade de que quando tem a altura de um triângulo equilátero, ele divide a base certinho em dois outros lados iguais entre si. Então a gente dividiu esse lado por dois, daí ficou $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$. Aí depois a gente usou o teorema de Pitágoras para achar o lado JH. Aí a gente achou essa altura de $2\sqrt{6}$. Aí a gente aplicou a área da base, aí foi usando fatoração, divisão até chegar no $8\sqrt{3}$.

Observamos que ao realizarem a conversão do registro figural para o algébrico registraram na folha " $l^2 = 32$ " (fig.34, abaixo a esquerda). Isso mostra que mobilizaram mentalmente o Teorema de Pitágoras " $l^2 = 4^2 + 4^2$ ". Por meio de tratamentos numéricos os estudantes (801F, 1001B) calcularam a medida do lado IJ do triângulo IJK.

Os estudantes (801F, 1001B) após determinarem a medida do lado do triângulo IJK, realizaram uma conversão para o registro algébrico para identificar que no triângulo IJK os três lados são congruentes (fig.36, abaixo a direita). Na sequência esses

estudantes realizaram uma conversão para o registro figural (fig.34 (D e B), acima), seguido de uma conversão para o registro numérico para determinar a altura do triângulo IJK e sua área.

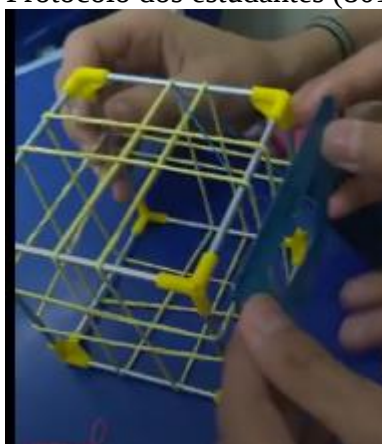
Figura 36 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)



Fonte: Dados da pesquisa

No ponto de vista cognitivo observamos que os estudantes (801A, 901E) realizaram tratamentos figurais no esqueleto do cubo, colocando a secção plana por meio do elástico azul (fig.37, abaixo (A)). Nesses tratamentos figurais eles notaram que para descobrir a medida do lado do triângulo IJ teriam que usar o teorema de Pitágoras no triângulo IJF. Acompanhe: *901E: a medida desse lado (IJ) pode ser a hipotenusa né!? Porque aqui é ângulo de 90° e aqui é 4, e aqui é 4 também.* No entanto esses discentes não conseguiram realizar uma conversão para o registro algébrico e numérico determinando a medida do lado do triângulo IJK, seu perímetro e sua área.

Figura 37 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E)



Fonte: Dados da pesquisa

Considerando o ponto de vista cognitivo dos estudantes (801J, 901F), as conversões e os tratamentos mobilizados, observamos que eles calcularam o número de

vértices, de faces e de arestas do tetraedro, ao invés de ser do poliedro obtido após a retirada desse poliedro. Isso pode ser notado pela não coordenação do registro figural para o registro em língua natural (enunciado).

Considerações

Os estudantes (801F, 1001B) resolveram corretamente a atividade. Percebemos nos protocolos que esses estudantes realizaram as conversões: língua natural, figural, algébrico e numérico. Realizaram tratamentos nesses registros e após a conversão conseguiram identificar os respectivos objetos matemáticos corretamente. Nos protocolos observados conseguimos analisar o ponto de vista matemático e o cognitivo.

Na gravação em vídeo observamos o ponto de vista cognitivo dos estudantes (801A,901E) ao realizarem a conversão do registro em língua natural (enunciado) para o figural (esqueleto do cubo), seguidos de tratamentos figurais e numéricos observando que o triângulo IFJ é retângulo. No entanto, não conseguimos analisar o ponto de vista matemático porque não registraram cálculos na folha. Inferimos que a dificuldade de representar o triângulo IJK na folha contribuiu para que não evoluíssem nos raciocínios.

Conseguimos observar que os estudantes (801J,901F) erraram o número de vértices, faces e arestas do poliedro obtido após a retirada do tetraedro analisando todos os registros e tratamentos mobilizados. Observamos que não se trata de um erro conceitual, mas de olhar para o poliedro errado, no caso para o tetraedro. Inferimos que se tivessem realizado uma conversão do registro figural para a registro em língua natural (enunciado) teriam respondido corretamente: 10 para o número de vértices, 7 para o número de faces e 15 para o número de arestas.

7.2.1.2 As apreensões

A compreensão do enunciado dessa atividade requer principalmente as apreensões perceptiva e discursiva. É a apreensão discursiva coordenada com a apreensão perceptiva que permite identificar que os triângulos IFJ, IFK e JFI são retângulos, cujos catetos medem 4cm .

A apreensão operatória e a heurística foram mobilizadas principalmente para calcular a altura do triângulo equilátero IJK. A apreensão operatória contribuiu também para identificar a quantidade de vértices, faces e arestas do poliedro obtido após a retirada do tetraedro.

A apreensão sequencial não foi mobilizada nesta atividade.

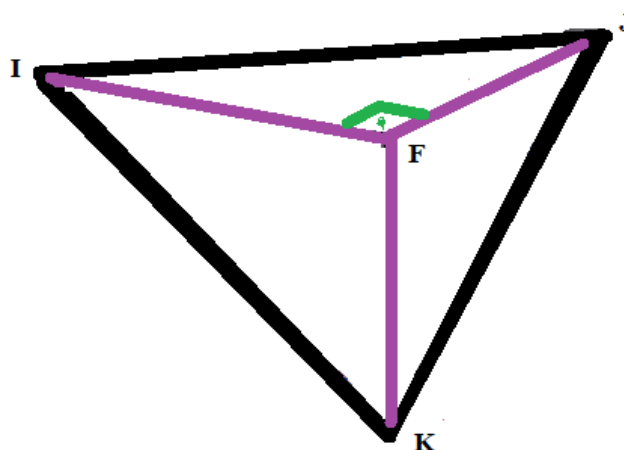
B1: Perceptiva, discursiva, sequencial e operatória

A apreensão perceptiva

A apreensão perceptiva levou os estudantes (801A,901E) a perceberem o cubo representado na folha, identificando que no vértice F do cubo existem três triângulos, um em cada face do cubo, os triângulos IJF, IFK e o JFK. Essa apreensão imediata que tiveram sobre a figura levou os estudantes a não perceber o tetraedro obtido por meio de uma secção plana realizada no cubo. Eles perceberam somente os triângulos IJF, IFK e JFK.

Na apreensão perceptiva observamos a lei gestáltica do fechamento nos protocolos dos estudantes (801A, 901E). A lei do fechamento foi mobilizada quando esses discentes visualizaram o triângulo IJK como sendo a composição dos três triângulos retângulos IJF, IFK e JFK (fig. 38, abaixo). A partir disso, eles concluíram que os lados do triângulo IJK corresponde às hipotenusas desses triângulos. Essa lei gestáltica induz a um erro na geometria plana, pois $I\hat{F}J + I\hat{F}K + K\hat{F}J = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$. Na geometria plana essa soma corresponde a 180° . Esses estudantes não conseguiram calcular a medida da área e do perímetro do triângulo IJK.

Figura 38 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E)



Fonte: Dados da pesquisa

A apreensão discursiva

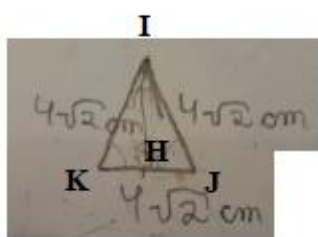
A apreensão discursiva foi a que permitiu que os estudantes (801F, 1001B) percebessem que as medidas dos lados do triângulo IJK correspondem a hipotenusa de

um triângulo retângulo isósceles. Essa apreensão foi decisiva para determinar a altura do triângulo IJK para calcular sua área, pois tiveram que mobilizar a propriedade de que em um triângulo equilátero sua altura também é mediana. Assim, $\overline{JH}$ é perpendicular a $\overline{IK}$ e $\overline{IH} \cong \overline{HK}$.

Os estudantes (801J, 901F) inicialmente identificaram como altura o outro lado do triângulo IJK. Esse lado não corresponde à altura porque a altura relativa à base é perpendicular e nesse caso, como o triângulo IJK é equilátero, esse ângulo é de 60° . Com isso, para resolver corretamente a atividade a apreensão discursiva foi mobilizada por meio de perguntas realizada pela pesquisadora. Observamos que as perguntas foram decisivas para determinar a altura, se não fossem feitas esses discentes iriam considerar o lado do triângulo como altura erroneamente.

Essa apreensão articulada junto a apreensão operatória contribuiu para identificar a altura relativa à base. Acompanhe o questionamento da pesquisadora e a justificativa do estudante (901F):

Figura 39 Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



P: Sim! Mas, o que te garante que essa altura vai dividir o segmento bem na metade?

P: Você lembra de alguma coisa que estudou em sala de aula?

(901F): Pelo fato de essas medidas (lados do triângulo equilátero) e esses ângulos serem iguais ($\hat{K}$ e $\hat{J}$), ele vai subir até em cima chegando na metade (percebeu que a altura é bissetriz) ... Se trata da bissetriz e como se trata da bissetriz desse ângulo aqui, vai chegar na metade aqui, formando dois ângulos de 90°

Fonte: Dados da pesquisa

Observe que o estudante (901F) ao traçar IH visualiza os dois triângulos IKH e IJH, observando que $\hat{K}$ e $\hat{J}$ são congruentes. A partir dessa observação intuitivamente (901F) percebe que IHK e IJH são congruentes, lembrando implicitamente que IH é bissetriz. Sendo assim $\widehat{IHK}$ e $\widehat{IJH}$ são retos e sendo assim IH é a altura. Esses estudantes não citam explicitamente a propriedade do triângulo isósceles que a bissetriz, a mediana e a altura relativa à base coincidem, mas a mobilizam.

A apreensão operatória

Observamos que os estudantes (801A, 901E) mobilizaram erroneamente a apreensão operatória quando realizaram a composição estritamente homogênea dos triângulos FJK, FKI e FIJ para compor o triângulo IJK (fig. 38, acima). Essa decomposição não pode ser feita porque esses três triângulos retângulos isósceles correspondem a três faces do tetraedro obtido pela secção plana e, o triângulo equilátero IJK corresponde a base desse poliedro que é um triângulo equilátero. Trata-se de uma divisão mereológica mobilizada erroneamente, visto que esse procedimento requer decompor uma figura em subfiguras, todas da mesma dimensão. Inferimos que a representação da figura da folha pode ter influenciado esses estudantes a realizarem esses tratamentos figurais, visto que temos uma figura tridimensional representada no bidimensional.

A apreensão operatória realizada pelos estudantes (801F, 1001B) foi adicionar a altura JH no triângulo IJK. Os estudantes (801J, 901F) mobilizaram essa apreensão ao adicionar a notação matemática de ângulo reto aos ângulos $I\hat{F}J$, $I\hat{F}K$ e $K\hat{F}J$ e, ao adicionar por meio de um segmento a altura no triângulo equilátero de lado $4\sqrt{2}cm$ (fig. acima).

Os estudantes (801J, 901F) mobilizaram a apreensão operatória ao realizarem a divisão mereológica estritamente homogênea no triângulo IJK, decompondo-o em dois triângulos IKH e IJK (fig. 39, acima).

Considerações

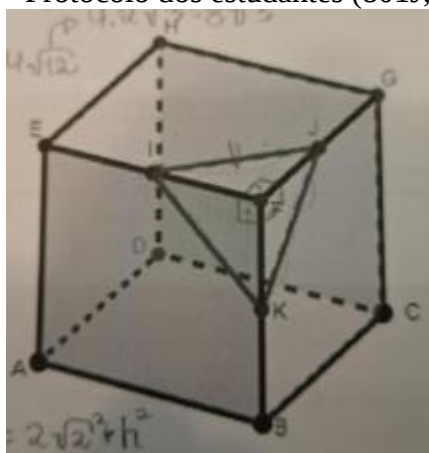
Constatamos que a articulação da apreensão perceptiva com a apreensão discursiva contribuiu para que os estudantes (801F, 1001B) identificassem que as medidas dos lados do triângulo IJK correspondem às hipotenusas dos triângulos retângulos isósceles IJF, IFK e JFK; resolvendo corretamente a atividade.

Os estudantes (801A, 901E) mobilizaram a apreensão perceptiva para identificar que o triângulo IFJ é retângulo, pois visualizaram que o ângulo reto ($I\hat{F}J$) corresponde ao vértice do quadrado EFGH. No protocolo desses estudantes (801A,901E) observamos na apreensão perceptiva a lei gestáltica do fechamento (fig. 38, acima) comandando as demais apreensões. Isso contribuiu para que não conseguissem coordenar a apreensão discursiva. Inferimos que a ausência dessa articulação entre apreensão perceptiva e discursiva contribuiu para que não

conseguissem visualizar o triângulo IJK e, posteriormente ele sendo um triângulo equilátero. A predominância da apreensão perceptiva com a lei do fechamento fez com que os discentes ficassem presos no registro figural sem conseguir realizar nenhuma conversão.

Os estudantes (801J, 901F) ao articularem a apreensão discursiva com a apreensão perceptiva identificaram os três triângulos retângulos (IFJ, IFK e JFK), um em cada face do quadrado. Registrando corretamente a medida desses ângulos conforme a notação matemática na representação gráfica.

Figura 40 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes (801J, 901F) conseguiram determinar a altura relativa à base quando a apreensão discursiva foi mobilizada junto com a apreensão operatória e a comandou. Mesmo não percebendo explicitamente a propriedade sobre a altura relativa à base em um triângulo equilátero, a coordenação dessas duas apreensões contribuiu para resolver a atividade estabelecendo relações geométricas, tais como: decompor o triângulo IKJ nos dois triângulos IKH e IJH, identificar que $\hat{K}$ e $\hat{J}$ são congruentes e implicitamente que IH é bissetriz relativa à base KJ.

B2: Congruência semântica

O enunciado dessa atividade não é congruente com o cubo representado seccionado por um plano. A figura mostra um cubo onde em um dos seus vértices há três triângulos, um em cada face do cubo. A apreensão perceptiva induz a visualizar somente o triângulo IFK como retângulo.

O cubo é incongruente semanticamente aos tratamentos figurais. Esse fenômeno ao realizar a conversão do registro em língua natural para o registro figural, permitindo os tratamentos figurais pode ser minimizado pela mobilização da apreensão discursiva.

Considerações

Os estudantes que conseguiram resolver a atividade foram os que conseguiram contornar os fenômenos de incongruência semântica entre enunciado e figura e entre figura e apreensão operatória foram os que conseguiram mobilizar a apreensão discursiva.

A não congruência semântica entre a apreensão operatória e o tratamento figural levou os estudantes (801A, 901E) a considerar a apreensão perceptiva sobre o cubo para resolver a atividade, levando-os a perceber o triângulo IJK por meio da lei gestáltica do fechamento erroneamente. Observamos, comparando o protocolo dos estudantes que resolveram a atividade que, essa incongruência poderia ser minimizada pela apreensão operatória articulada a apreensão discursiva. Esse fenômeno ao não ser contornado pelos estudantes (801A, 901E) por essas apreensões contribuiu para que o losango não exercesse seu papel heurístico. Constatamos concordando com Duval (2012, p. 132) que “A produtividade heurística depende da congruência entre uma operação e um tratamento matemático possível”.

Comparando todos os protocolos observamos que houve congruência semântica entre a apreensão operatória e os tratamentos figurais para os estudantes que conseguiram resolver a atividade. No entanto, houve incongruência semântica para os que não conseguiram resolver. Por exemplo, o discente 901F construiu o losango, justificando o procedimento realizado, enquanto o estudante (901E) não conseguiu.

Diante disso, inferimos que uma atividade geométrica pode apresentar incongruência semântica entre enunciado, figura, apreensão operatória e tratamentos figurais para alguns estudantes e para outros não. Observamos que a congruência semântica ocorreu para os discentes que conseguiram mobilizar as definições e propriedades dos objetos matemáticos considerados, relacionando-os. Esses estudantes realizaram a leitura da atividade e buscaram lembrar os conceitos envolvidos, estabelecendo diferenças e relações. A interação com o colega foi significativa para gerar questionamentos e mobilizar a apreensão discursiva.

7.2.1.3 A visualização icônica e a visualização não icônica

Na visualização icônica o cubo se impôs perceptivelmente. Na visualização não icônica observamos que os estudantes realizaram a seguinte desconstrução dimensional: o cubo (3D), o ângulo reto do triângulo IJF (2D), o triângulo IJF (2D), as medidas dos lados desse triângulo (1D) e o triângulo equilátero (2D) obtido pela secção plana.

C1: O olhar botanista e o olhar agrimensor

O olhar botanista

O olhar botanista foi mobilizado pelos estudantes (801F, 1001B), (801A, 901E), (801J, 901F) para identificar o cubo, os triângulos retângulos (IFJ, IFK e JFK) e, para identificar o triângulo equilátero IJK.

Os estudantes (801J, 901F) também mobilizaram esse olhar para identificar os triângulos IKH e IJH obtidos ao decompor o triângulo KIJ.

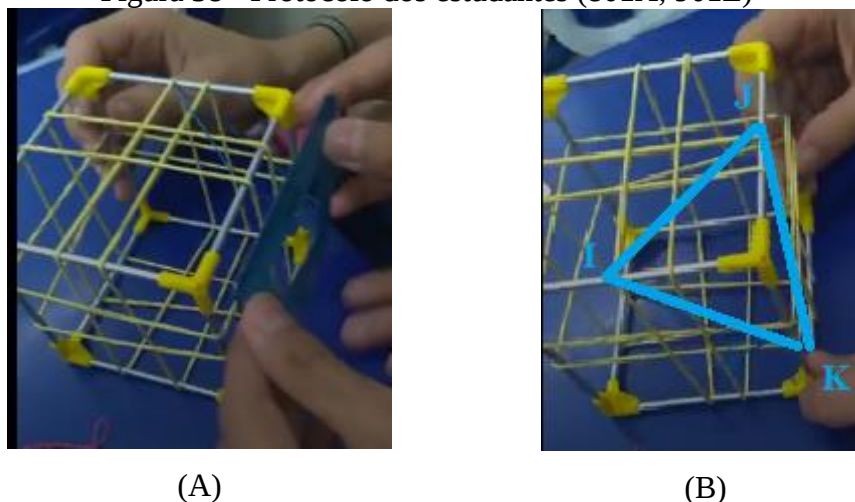
Observamos na gravação em vídeo feita com os estudantes (801A, 901E) a lei gestáltica do fechamento na apreensão perceptiva. Isso contribuiu para que esses discentes tivessem dificuldades em identificar a figura plana obtida por meio da secção plana. Eles representaram essa secção plana no esqueleto do cubo, conseguindo identificar que os lados do triângulo IJK tinham a mesma medida quando visualizavam esses lados como hipotenusas dos triângulos retângulos. Porém, não conseguiram resolver a atividade na folha porque não conseguiram realizar a representação gráfica do triângulo IJK. Quando a pesquisadora sugeriu que desenhasssem o triângulo IJK na folha para resolver a atividade o estudante (901E) questionou: “*É tipo três D?*”

A lei gestáltica do fechamento fez com que percebessem o triângulo IJK por meio da composição dos três triângulos retângulos isósceles. Isso contribuiu para que vissem o triângulo IJK como tridimensional no olhar botanista. Ao visualizá-lo desse modo não conseguiram realizar sua representação gráfica.

O olhar agrimensor

O olhar agrimensor foi mobilizado pelos estudantes (801A, 901E) para medir a aresta do esqueleto do cubo, marcando os pontos I, J e K respectivamente na metade das arestas EF, FG e FB, passando a secção plana nesses três pontos por meio do elástico azul (fig. 38, abaixo (A)). Assim:

Figura 38 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E)



Fonte: Dados da pesquisa

Na figura acima (B) vemos o triângulo IJK representado por meio do elástico azul, observamos que os discentes (801A,901E) colocaram os elásticos amarelos para o elástico azul permanecer nos pontos médios das arestas, sem se deslocar.

C2: O olhar construtor e o olhar inventor

O olhar construtor

Não observamos em nenhum protocolo o olhar construtor.

O olhar Inventor

O olhar inventor foi mobilizado pelos estudantes (801A, 901E) para colocar o elástico azul obtido pela secção plana. No entanto, esse olhar não foi comandado pela apreensão discursiva e isso contribuiu para que não evoluíssem nesse olhar de modo a realizar uma conversão do registro figural para o algébrico e numérico em um desses triângulos retângulos aplicando o teorema de Pitágoras para calcular a medida do lado do triângulo IJK.

Os estudantes (801F, 1001B) mobilizaram o olhar inventor na figura representada na folha, articulado a apreensão discursiva principalmente, para adicionar a altura JH relativa a base IK. Com isso, determinaram a altura do triângulo IJK seguido de sua área.

Observamos o olhar inventor no protocolo dos estudantes (801J, 901F) ao adicionar a altura referente a uma de suas bases no triângulo equilátero. A apreensão discursiva comandou esse tratamento figural e por isso, inferimos que os estudantes

adicionaram esse traço manualmente sem usar régua e sem registrar a notação de ângulo reto.

Esse olhar foi mobilizado pelos estudantes (801F, 1001B) para determinar o número de vértices de faces e de arestas do poliedro que restou após a retirada do tetraedro obtido pela secção plana. Observe:

(801F): Aqui o cubo tem oito vértices, você mata esse vértice (o vértice F), vai surgir esses três vértices (o vértice F não faz mais parte do poliedro quando retira o tetraedro e sim os três vértices por onde passou a secção plana). Daí é por isso que vai ser oito menos um, que dá sete. Mais daí vai surgir três novos vértices. Daí sete mais três dá dez vértices.

(801F): As faces é um pouco mais confuso, mas também dá para falar. O cubo tem seis faces, daí você matando aqui, cortando aqui (secção plana) vai surgir uma nova face. Daí seis faces mais uma face dá sete faces.

(1001B): É que é como você cortasse literalmente somente essa partezinha onde está o elástico aqui (no esqueleto do cubo). Aí surgiria um negocinho aqui (o triângulo IJK)

Esses estudantes quando dizem “matar” estão observando que o vértice F não faz mais parte do poliedro quando secciona o cubo nos pontos I, J e K. Eles observam que esses três pontos correspondem a três vértices do poliedro obtido após a retirada do tetraedro. Esses estudantes também utilizaram a relação de Euler para resolver essa atividade. Assim:

(801F): Depois a gente usou a fórmula básica para descobrir as arestas. Que é vértice mais face é igual a aresta mais 2. A gente coloca a aresta aqui que é igual a dezessete menos dois (dezessete é o número de vértice mais o número de faces). Que dá quinze.

Após esse procedimento o estudante (801F) conta na representação gráfica o número de arestas do poliedro verificando que de fato é quinze.

Considerações

No protocolo dos estudantes (801A, 901E) o olhar inventor “colocar o elástico azul no esqueleto do cubo” foi comandado pela apreensão perceptiva. Com isso, percebemos que esses discentes não conseguiram articular a apreensão discursiva ao olhar inventor. Sem essa articulação a adição do traço “triângulo IJK” foi realizado de modo mecânico, sem conseguir relacionar o triângulo retângulo ao teorema de Pitágoras por meio de uma conversão do registro figural para o numérico para calcular o lado do triângulo IJK.

Os estudantes (801F, 1001B) conseguiram mobilizar o olhar icônico e não icônico articulando o enunciado com a figura somente na representação gráfica, sem utilizar outra representação, resolvendo corretamente toda a atividade.

De modo semelhante os estudantes (801J, 901F) realizaram os tratamentos e conversões analisando somente a representação gráfica, sem recorrer a uma representação diferente. Porém a falta de articulação da figura com o enunciado fez com que errassem o número de vértices, de faces e de arestas do poliedro obtido após a retirada do tetraedro obtido pela secção plana.

Com isso, observamos que a coordenação da apreensão discursiva com o olhar inventor contribuiu para que estes se sobressaíssem em relação a apreensão perceptiva. O que comandou a figura não foi o que se notou perceptivelmente, mas a articulação da figura com suas hipóteses, guiadas por essa apreensão e pelo olhar não icônico sobre a figura. Isso pode ser verificado pelo fato de as figuras desenhadas ser apenas um esboço, quer dizer, figuras pequenas desenhadas a mão livre.

Os estudantes (801A,901E) ao ficarem presos perceptivelmente por meio da lei gestáltica do fechamento no triângulo IJK não conseguiram adentrar na visualização não icônica. Ao prevalecer essa apreensão os discentes não conseguiram mobilizar a apreensão discursiva. Isso os levou a não conseguir resolver o primeiro item da atividade que era calcular a área e o perímetro do triângulo IJK.

7.2.1.4 As desconstruções e a heurística

Para resolver essa atividade são necessárias as seguintes desconstruções: $3D \leftrightarrow 2D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 0D$. As setas estão nos dois sentidos porque a resolução exige um processo de idas e vindas no cubo; nos triângulos; nas arestas, nos lados dos triângulos e na altura do triângulo IJK; nos pontos I, J, K, F e H⁶⁶.

D1: Dimensional, instrumental e a exploração heurística

A desconstrução dimensional

Os estudantes (801A, 901E), na gravação em vídeo, desconstruíram dimensionalmente o cubo do seguinte modo: $3D \rightarrow 2D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$. Esses

⁶⁶ Altura do triângulo IJK.

estudantes perceberam no esqueleto do cubo (3D) colocando os elásticos amarelos e azul (fig. 36, acima (A)) que $I\hat{F}J = 90^\circ$ (2D). Acompanhe:

P: Como podemos calcular a medida do lado do triângulo IJK?

(901E): Pode ser a hipotenusa né!? Porque aqui é ângulo de 90° ($I\hat{F}J$). O quadrado movimentado assim... (O quadrado EFGH ficou na posição frontal paralelo a ele). A gente consegue analisar no caso a hipotenusa e os catetos (fig. 37).

Figura 41 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E)



Fonte: Dados da pesquisa

Realizadas essas desconstruções, a pesquisadora questionou se eles conseguiam realizar os cálculos na folha e o estudante 901E respondeu: “*Creio eu que sim*”. No entanto, apenas escreveram que a figura geométrica determinada pela secção era um triângulo e para a área e o perímetro desse triângulo apenas registraram *113cm*. Não sabemos se essa medida corresponde a área ou ao perímetro. Pela unidade de medida unidimensional inferimos que se trata da medida do perímetro. Isso evidencia que os estudantes não relacionaram a figura ao enunciado, pois a soma de três hipotenusas de três triângulos retângulos isósceles congruentes com lados medindo *4cm* não pode dar *113cm*.

Assim, cada hipotenusa teria que medir aproximadamente *97,6cm*. Com isso teríamos um triângulo retângulo isósceles com lados medindo *4cm*, *4cm* e *97,6cm* e, não temos um triângulo com essas medidas, pois a condição de existência para o triângulo é a de que “Em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado” (Barbosa, 1995, p. 55).

De acordo com o diálogo abaixo e observando todos os protocolos dos estudantes, (801A, 901E), constatamos que realizaram a desconstrução dimensional ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$) somente no esqueleto do cubo. Na gravação em vídeo

desses estudantes observamos que: o estudante (901E) não conseguiu articular a desconstrução dimensional à apreensão discursiva, enquanto sua dupla, o estudante (801A) conseguiu mobilizar a apreensão discursiva. Acompanhe o diálogo do estudante (901E):

P: Que tipo de triângulo é ele? (Triângulo IJK).

(901E): Equilátero (Respondeu olhando para o elástico azul no esqueleto do cubo, visualizando os três triângulos retângulos isósceles nas três faces do cubo, percebendo-os como hipotenusa de triângulos retângulos congruentes).

P: Então desenha ele aqui (na folha).

(901E): É tipo três D?

P: Não! Imagina cortando ali, você vai olhar para a figura plana que está ali.

(901E): Hummm...

O processo da desconstrução dimensional do estudante (901E) ao não articular a com a apreensão discursiva foi mecânico, não conseguindo adentrar na visualização não icônica.

Entretanto, seu colega (801A), diferentemente do estudante (901E), conseguiu articular a apreensão discursiva com a desconstrução dimensional. Acompanhe:

P: Como você consegue dizer para mim que aqui é um triângulo equilátero?

801A: Em todos vão formar triângulos de 90°. Aqui vai ser metade e aqui vai formar ângulo de 90°. Daí, se todos são traçados no mesmo ponto do quadrado e vai pegar a parte interna.

801A: Daí, se a gente cortar, se tirar essa parte a gente vai formar uma pirâmide e aqui no caso vai ser equilátero porque estão todos cortados no mesmo ponto.

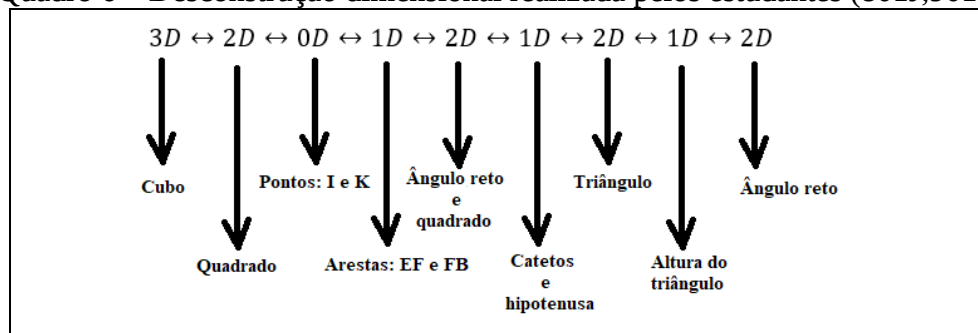
801A: Daí eu não entendi.

Nesses protocolos constatamos que o estudante do oitavo ano conseguiu articular a apreensão discursiva junto à desconstrução dimensional, enquanto o estudante do nono ano não conseguiu. E, por estarem em duplas, inferimos que a decisão do estudante do nono ano influenciou na tomada de decisão, fazendo com que não calculassem nem a área e nem o perímetro do triângulo IJK.

Nessa dupla de estudantes (801A, 901E) observamos que realizar a desconstrução dimensional não garante a entrada no modo de ver não icônico da figura geométrica. Para isso acontecer é necessário que esse processo seja realizado coordenado com a apreensão discursiva.

Para resolver o primeiro item da atividade os estudantes (801J,901F) realizaram a desconstrução dimensional de acordo com o quadro abaixo.

Quadro 6 – Desconstrução dimensional realizada pelos estudantes (801J,901F)



Fonte: Dados da pesquisa

Essa desconstrução dimensional pode ser observada no diálogo abaixo. Veja:

P: Como você descobriu que o lado do triângulo (IJK) é $4\sqrt{2}$?

(901F): Primeiro aqui eu peguei uma face desse cubo que foi dividido (quadrado EFBA)⁶⁷ e como ele tá na metade (pontos médios I e K) do lado (EF e FB, respectivamente), então esse lado aqui, do ponto I até esse ponto aqui (F) vai dar quatro centímetros e a mesma coisa se aplica desse aqui (F) até esse aqui (K).

P: Você fez ali (na representação gráfica) o ângulo de 90° em cada figura (triângulo retângulo nas três faces do cubo)? (Fig. abaixo (A)).

(901F): Sim, é um ângulo de 90° porque se trata de um quadrado. Então como nós sabemos do valor de dois catetos só resta fazer a hipotenusa (calcular a medida da hipotenusa), daí eu calculei (mostrou na folha, fig. abaixo (B)). Daí esse lado aqui vale $4\sqrt{2}$ (IJ), daí para calcular esse triângulo equilátero aqui (IJK)! Como a gente sabe que é equilátero a gente sabe que todos os lados dele vale $4\sqrt{2}$ (fig. abaixo (B)).

(901F): Daí para calcular área é só usar a base que é $4\sqrt{2}$ e a altura que é $4\sqrt{2}$, dividido por dois que dá dezesseis.

P: Tá, mas como tem que ser a altura em um triângulo?

Nesse momento o estudante traçou o segmento no meio do triângulo equilátero (fig. abaixo, (C)).

P: Então... Como você faz para descobrir essa altura?

(901F): Acho que dá para aplicar Pitágoras de novo.

P: Tá, você sabe essa medida aqui ($4\sqrt{2}$) e essa medida aqui? (o cateto menor do triângulo retângulo com hipotenusa medindo $4\sqrt{2}$).

(901F): É metade desse valor aqui (apontando para a medida do lado $4\sqrt{2}$, que é a base relativa a altura que ele traçou).

P: Por que é a metade?

(901F): Porque a altura ela vai até a metade da base, formando um ângulo de 90° .

P: O que te garante isso?

(901F): Que se trata de um triângulo retângulo e que essa medida aqui, ela se trata da metade da base (a medida do cateto mede $2\sqrt{2}$). Daí é só aplicar Pitágoras para descobrir a altura.

P: Sim! Mas, o que te garante que essa altura vai dividir o segmento bem na metade? P: Você lembra de alguma coisa que estudou em sala de aula?

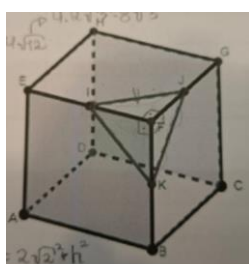
(901F): Pelo fato de essas medidas (lados do triângulo equilátero) e esses ângulos serem iguais (visualizou os dois triângulos congruentes no triângulo IJK e os ângulos de 60°), ele vai subir até em cima chegando na metade (percebeu que a altura é bissetriz) ... Se trata da bissetriz e como se trata da

⁶⁷ O que está entre parênteses é explicação nossa para melhor compreensão do texto. Não foi mobilizado pelo discente.

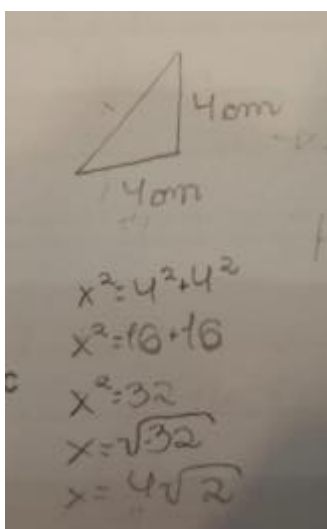
bissetriz desse ângulo aqui, vai chegar na metade aqui, formando dois ângulos de 90°

Nesse protocolo e no quadro acima observamos que o estudante 901F saiu do tridimensional e foi para as dimensões menores (bidimensional, unidimensional e adimensional), transitando nessas dimensões, não voltando ao tridimensional.

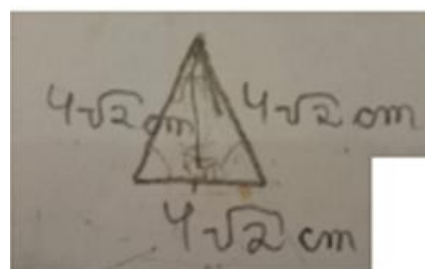
Figura 42- Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



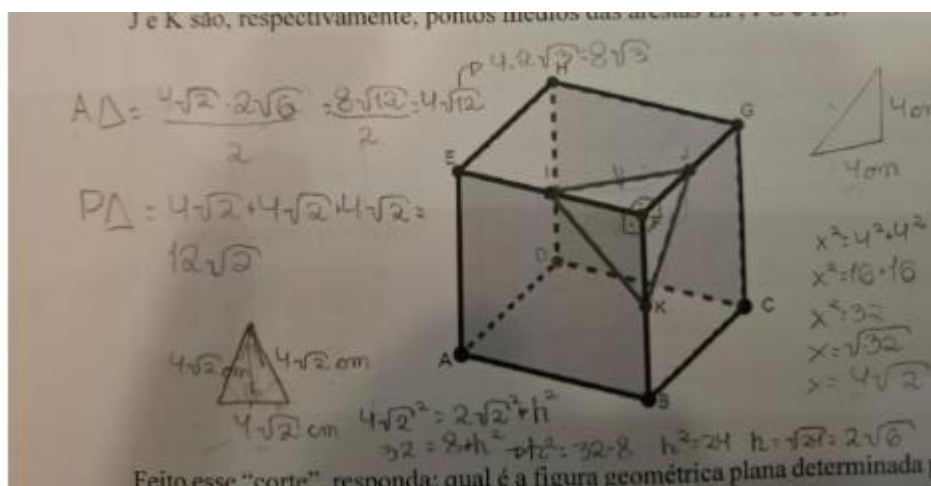
(A)



(B)



(C)



(D)

Fonte: Dados da pesquisa

A desconstrução Instrumental

Os estudantes não mobilizaram a desconstrução instrumental.

A exploração heurística

A heurística na primeira atividade ocorreu quando os estudantes (801F, 1001B) adicionaram um traço no triângulo IJK, no caso a altura IH relativa a base IF. Observamos que essa exploração heurística foi mobilizada pela articulação da apreensão perceptiva no ângulo reto dos triângulos retângulos de cada face associada a apreensão discursiva pelo teorema de Pitágoras. Outro fator que favoreceu essa heurística foi a variável didática dessa atividade ser os pontos I, J e K pontos médios das arestas EF, FG e FB, respectivamente. Essa mesma exploração heurística foi verificada no protocolo dos estudantes (801J,901F).

Os estudantes (801J, 901F) tiveram dificuldades em realizar a exploração heurística para determinar a altura do triângulo IJK. O estudante 901F identificou inicialmente a altura como sendo o outro lado do triângulo IJK. Após, o questionamento da pesquisadora sobre a altura, o estudante fez um traço no meio do triângulo IJK (fig. acima (C)).

Considerações

Os estudantes (801A,901E) realizaram a seguinte desconstrução dimensional: ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D$), do cubo para o triângulo IFJ e, desse para seus lados. Esses desconstruíram a figura da dimensão maior para a menor, sem conseguir realizar o processo inverso que é sair das menores dimensões e ir para as maiores. Por isso que as setas estão num único sentido. Observamos que isso ocorreu porque não conseguiram mobilizar a apreensão discursiva.

Observamos que a desconstrução dimensional realizada por esses estudantes sem articulá-la com a apreensão discursiva foi mecânica. Esse processo ao ser comandado pela apreensão perceptiva e pela lei gestáltica do fechamento fez com que seu olhar permanecesse no 3D. Por isso, inferimos que visualizaram o triângulo IJK como 3D, sem conseguir fazer sua representação gráfica e consequentemente não realizando o cálculo da área e do perímetro. Ao permanecerem no 3D conseguiram calcular corretamente o número de vértices, de faces e de arestas do segundo item da atividade. Entretanto, observando todos os protocolos desses estudantes, consideramos que a aprendizagem não foi significativa, visto que não conseguiram adentrar no modo não icônico de ver as figuras em geometria.

Os estudantes (801F, 1001B) realizaram a seguinte desconstrução dimensional: ($3D \leftrightarrow 2D \leftrightarrow 2D \leftrightarrow 0D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 2D \leftrightarrow 0D \leftrightarrow 1D \leftrightarrow 2D$), num processo de ida e

volta. Visualizaram o cubo, o triângulo IFJ, o ângulo $\widehat{IFJ}$, o ponto médio I e J, os lados do triângulo IFJ, o triângulo IFJ, o ponto H (ponto médio de IK), a altura JH relativa a base IK e o triângulo equilátero IJK. Observamos que o sair da dimensão maior e ir para as menores e vice-versa foi favorecida pela coordenação do olhar inventor com a apreensão discursiva.

Os estudantes (801J,901F) conseguiram resolver a atividade, mas para realizar a exploração heurística para identificar a altura do triângulo IJK tiveram que ser questionados pela pesquisadora. Diante disso, observamos que para esses discentes, o pesquisador teve um papel fundamental para fazer a figura geométrica exercer seu papel heurístico.

Observamos que a desconstrução dimensional subordinada a apreensão discursiva na visualização não icônica, contribuiu para que os estudantes tivessem uma compreensão mais efetiva das propriedades geométricas, mobilizando-as na resolução de problemas.

7.2.1.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas

No enunciado da primeira atividade existem dois sistemas semióticos diferentes: a linguagem natural e a figural. Observe que no cubo não aparece explicitamente o ângulo reto nos quadrados de cada face e essa informação é importante para resolver a atividade.

A função discursiva referencial é mobilizada para designar os dados do problema. Eles são: centímetros para designar a medida da aresta do cubo; I, J e K para designar os pontos e, EF, FG e FB para designar as arestas. A função apofântica é designada no enunciado para indicar que os pontos I, J e K são pontos médios das arestas EF, FG e FB, respectivamente. Na resolução essa função é requerida para identificar que os triângulos IJF, IFK e KFJ são retângulos isósceles e para identificar que o triângulo IJK é equilátero.

A função de expansão discursiva serve para identificar os ângulos retos dos quadrados da face do cubo. Essa medida tem que ser inferida pelo estudante por meio da função da expansão discursiva observando que “o cubo possui seis faces quadradas” e que “o quadrado possui os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos”. Essa função também é mobilizada para mobilizar o teorema de Pitágoras dos triângulos retângulos.

E1: Função referencial, apofântica e de expansão discursiva

A função discursiva referencial

Na gravação em vídeo observamos que somente a função discursiva referencial foi mobilizada pelos estudantes (801A, 901E) para designar “triângulo” e “113cm”. Inferimos que a não mobilização das outras funções contribuiu para que entregassem a folha somente com a resposta “triângulo e 113cm”.

Os estudantes (801F,1001B) mobilizaram a função discursiva referencial na resolução da atividade do seguinte modo: $\overline{IJ}$ para designar a aresta IJ do triângulo IJF; $\overline{IH}$ para designar a medida de A até H (sendo H o ponto médio de IK); ΔIJK para designar o triângulo obtido por meio da secção plana, $\overline{JH}$ para designar a altura relativa a base IK, $\frac{b.h}{2}$ para designar a área do triângulo IJK, P para designar perímetro; A para designar área e para designar aresta.

Observamos que os estudantes (801J,901F) usaram essa função do seguinte modo: x para designar a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles com catetos medindo 4cm; h para designar a altura do triângulo equilátero (fig. acima (C)); $A\Delta$ para designar a área do triângulo IJK e, $P\Delta$ para designar o perímetro desse triângulo.

A função discursiva apofântica

Verificamos que os estudantes (801A, 901E) mobilizaram a função apofântica quando mostraram no esqueleto do cubo o ângulo reto do triângulo da face superior desse poliedro. Assim: “(901E): *se a gente movimentar assim... a gente consegue analisar o ângulo de 90°, no caso a hipotenusa e os catetos*”.

Os estudantes (801J, 901F) concluíram que os catetos do triângulo retângulo IFK medem 4cm por meio da função apofântica, observando que os pontos I e K são pontos médios das arestas IF e FB, respectivamente. Acompanhe a explicação do estudante 901F: “*como ele tá na metade (pontos médios I e K) do lado (EF e FB, respectivamente), então esse lado aqui, do ponto I até esse ponto aqui (F) vai dar quatro centímetros e a mesma coisa se aplica desse aqui (F) até esse aqui (K)*”. Observamos que a elaboração dessa frase considerando os pontos médios das arestas de modo coerente e coeso foi realizada buscando atender a uma pergunta da pesquisadora. Assim, inferimos que a mobilização dessa função dependeu do contexto em que estava inserida, ou seja, de perguntas e da representação realizada no esqueleto do cubo.

O estudante (901F) ao pontuar: “*Sim, é um ângulo de 90° porque se trata de um quadrado*”, mobilizou a função apofântica, identificando o ângulo reto nos triângulos retângulos IJF, IKF e KJF. Essa função também é mobilizada quando identificam que o triângulo IJK é equilátero, pois todos os seus lados medem $4\sqrt{2}cm$. Assim: “*Como a gente sabe que é equilátero a gente sabe que todos os lados dele vale $4\sqrt{2}$* ” (901F).

A função de expansão discursiva

Foi mobilizada pelo estudante (901E) quando se referiu aos lados do triângulo retângulo sendo hipotenusa e catetos. Observamos que a expansão discursiva ocorreu quando associaram ao triângulo retângulo o teorema de Pitágoras.

O estudante (901F) ao afirmar: “*Então como nós sabemos do valor de dois catetos só resta fazer a hipotenusa*”, mobiliza a função de expansão discursiva. Pois, associa ao triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem $4cm$ o teorema de Pitágoras. A função de expansão discursiva foi mobilizada implicitamente para justificar a altura do triângulo. Os estudantes (801J,901F) conseguiram visualizar a bissetriz, mas não mobilizaram explicitamente a propriedade de que em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz, a mediana e a altura relativa à base coincidem.

Considerações

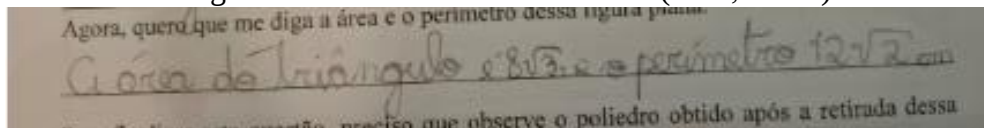
Os estudantes (901E, 801A) não mobilizaram a função discursiva referencial para designar por meio de letras: os pontos, os lados e os triângulos. Observamos nos protocolos obtidos que isso contribuiu para não calcularem a área e o perímetro do triângulo IJK. A função de expansão discursiva é usada no vídeo quando mostram os catetos e a hipotenusa no triângulo retângulo IJK, entretanto como não mobilizaram a apreensão discursiva não falaram “teorema de Pitágoras”. Inferimos que se trata desse teorema pelos termos cateto e hipotenusa.

Analizando todos os protocolos desses estudantes e confrontando com os demais, observamos que a não mobilização das funções discursivas apofântica e de expansão discursiva contribuiu para que não resolvessem a atividade na folha.

Observamos que a função discursiva referencial não foi mobilizada pelos estudantes (801J,901F) para designar os vértices dos triângulos. Na representação gráfica apenas desenharam a mão livre o triângulo isósceles e o triângulo equilátero,

sem usar letra maiúscula para designar os vértices. Entretanto, a ausência dessa função no registro figural não comprometeu a resolução, pois os cálculos estão corretos e responderam por extenso a resposta na folha. Acompanhe:

Figura 43 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



Fonte: Dados da pesquisa

A seguir analisamos o segundo item da sexta atividade.

7.2.2 Análise do segundo item da atividade 6

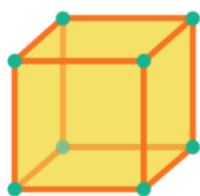
Atividade 6

2) É possível seccionar o cubo, de modo a obter as figuras solicitadas em cada um dos itens abaixo?

Se for possível, desenhe cada uma delas no “esqueleto” do cubo abaixo de cada item, justificando seu raciocínio.

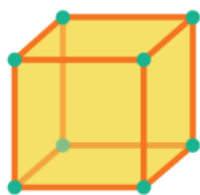
a) um triângulo escaleno

Justificativa:



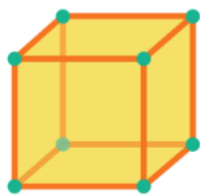
b) um triângulo isósceles?

Justificativa:



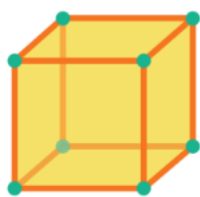
c) um triângulo equilátero?

Justificativa:



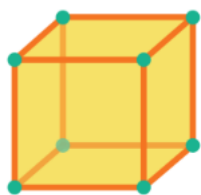
d) um quadrado?

Justificativa:



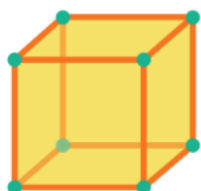
e) um retângulo?

Justificativa:



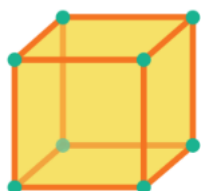
f) um losango?

Justificativa:



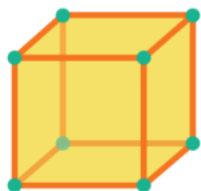
g) um trapézio?

Justificativa:



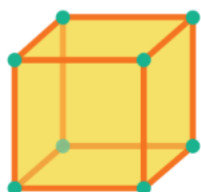
h) um pentágono?

Justificativa:



i) um hexágono regular?

Justificativa:



Fonte: Dados da pesquisa

Esta atividade tem por objetivo seccionar o cubo (3D) formando as seguintes figuras (2D): um triângulo escaleno, um triângulo isósceles, um triângulo equilátero, um quadrado, um retângulo, um losango, um trapézio, um pentágono e um hexágono regular.

Os estudantes para resolver essa atividade podiam usar: o esqueleto do cubo

As variáveis didáticas intrínsecas dessa atividade foram: a presença de figura no enunciado; a figura inicial ser tridimensional; o tipo de figura seccionada (2D) e, a ausência de unidades de medidas nas figuras.

As variáveis didáticas extrínsecas foram: representar a figura seccionada na representação gráfica, no esqueleto do cubo e no *GeoGebra*; e, resolver a atividade em dupla para favorecer a apreensão discursiva.

Analizamos a seguir as produções dos estudantes: (801F,1001B), (901F,801J) e (801A,901E), pois foram os que mais conseguiram responder os aspectos considerados para a análise.

7.2.2.1 A mobilização dos registros de representação semiótica

Para resolver essa atividade os estudantes mobilizaram os seguintes registros: o figural, a língua natural, o numérico⁶⁸ e o algébrico.

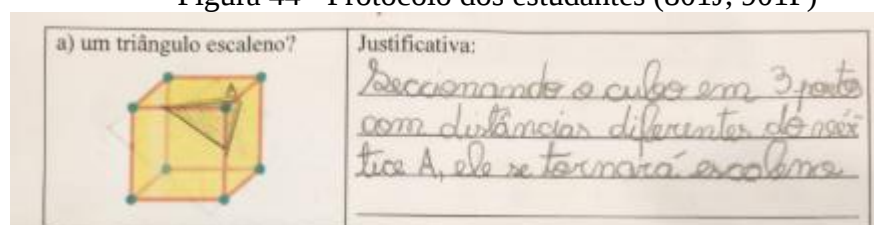
A1: O ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo

Ponto de vista matemático

O ponto de vista matemático mobilizado pelos estudantes (801J, 901F), (801F, 1001B) e (801A, 901E) para os triângulos **escaleno**, **isósceles** e **equilátero** foi a classificação de acordo com a medida de seus lados. Porém, isso pode ser observado por meio da apreensão discursiva, pois em nenhum protocolo explicitaram claramente essa classificação.

Para o **triângulo escaleno** os discentes (801J, 901F) a partir de um vértice do cubo consideraram três pontos, um em cada aresta do cubo, cujas distâncias até esse vértice fossem distintas. Observe:

Figura 44 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



Fonte: Dados da pesquisa

⁶⁸ Os estudantes (801F,1001B) consideraram a aresta do cubo 1 unidade de medida.

Para o **triângulo isósceles** esses observaram que os lados congruentes correspondem a hipotenusa de triângulos retângulos congruentes, em faces ortogonais do cubo. Para o **triângulo equilátero** seguiram o mesmo raciocínio que a primeira atividade, sendo os vértices do triângulo os pontos médios de três arestas do cubo com um vértice em comum. Assim:

Figura 45 - Protocolo dos estudantes (801J,901F)

b) um triângulo isósceles? 	Justificativa: <i>Seccionando o cubo em 2 pontos médios e um vértice do cubo, ele se tornará isósceles.</i>
c) um triângulo equilátero? 	Justificativa: <i>Seccionando o cubo em 3 pontos médios, os lados formados serão iguais, assim sendo equilátero.</i>

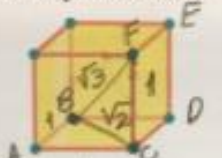
Fonte: Dados da pesquisa

Para seccionar o **quadrado** os estudantes (801J, 901F) consideraram uma secção paralela a uma face do cubo. Para o **retângulo** os estudantes (801J, 901F) usaram sua definição: “*Seccionando o cubo de tal forma que seus pontos médios formem lados paralelos e se encontrem em um ângulo de 90° , ele será retângulo*”. Observamos nesse argumento a definição de um caso particular de paralelogramo, que é a do retângulo.

Os estudantes (801F,1001B) atribuíram como medida para a aresta do cubo o valor unitário. Calculando as medidas dos lados dos triângulos pelo teorema de Pitágoras. Para o **triângulo escaleno** consideraram os lados sendo: a diagonal do quadrado ($\sqrt{2}$) que corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos lados correspondem a aresta do cubo; a aresta do cubo (1) e, a diagonal do cubo ($\sqrt{3}$) que corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ e 1.

Figura 46 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)

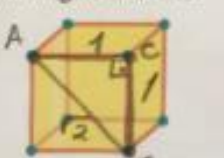
Se for possível, desenhe cada uma delas no "esqueleto" do cubo abaixo de cada item, justificando seu raciocínio. *Quando $\text{aresta} = 1$.*

a) um triângulo escaleno? 	Justificativa: <i>Se dissermos que a aresta do cubo vale 1, podemos determinar que a diagonal BC é igual a $\sqrt{2}$, como o lado FC é 1, e o lado FB é 1, então ΔFBC é escaleno.</i>
b) um triângulo isósceles?	Justificativa:

Fonte: Dados da pesquisa

Para o **triângulo isósceles** os estudantes (801F, 1001B) consideraram um plano paralelo a uma face do cubo conforme a imagem abaixo. Observe que no registro em língua natural eles não citam plano paralelo e sim o termo “mediante seus lados”. Entretanto, analisando os protocolos observamos que se trata de um plano paralelo a face do cubo. Assim:

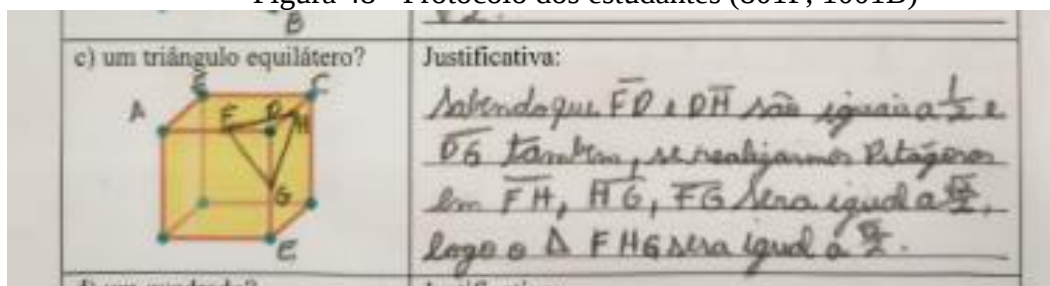
Figura 47 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)

b) um triângulo isósceles? 	Justificativa: <i>Como a aresta é igual a 1, traçamos dois lados mediantes aos seus lados ($AC = CB$). Por pitágoras o lado $AB = \sqrt{2}$.</i>
c) um triângulo equilátero?	Justificativa:

Fonte: Dados da pesquisa

Para o **triângulo equilátero** os estudantes (801F,1001B) seguiram o mesmo raciocínio do triângulo IJK seccionado na primeira atividade. Acompanhe:

Figura 48 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)



$$1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$1^2 = \frac{2}{4}$$

$$1^2 = \frac{1}{2}$$

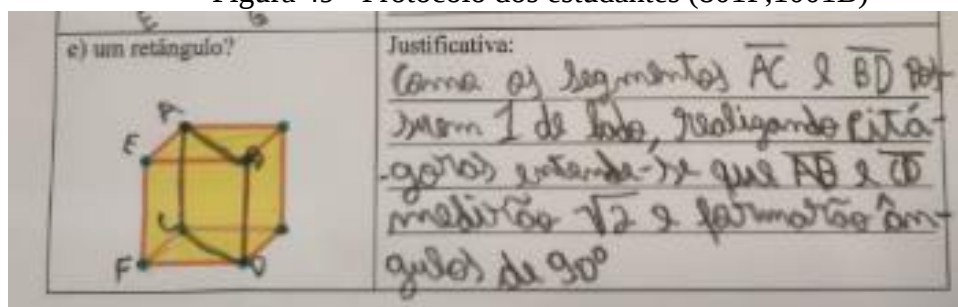
$$1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse protocolo os vértices do **triângulo equilátero** FGH são pontos médios, respectivamente, das arestas: AD, DC e DE, assim $\overline{FD} \cong \overline{DH} \cong \overline{DG}$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos FDH, FDG e DHG os estudantes verificaram que $\overline{FH} \cong \overline{HG} \cong \overline{DG}$. Portanto, o triângulo FGH é equilátero.

Os estudantes (801F, 1001B) mobilizaram para o **retângulo** ABCD sua definição, em que $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{2}$, $\overline{AC} = \overline{BD} = 1$, em que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$.

Figura 49 - Protocolo dos estudantes (801F,1001B)

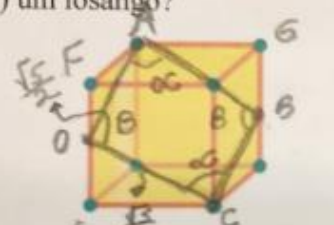


Fonte: Dados da pesquisa

Para o **losango** ABCO os vértices A e C são os vértices do cubo e, os vértices O e B são os pontos médios das arestas. Os lados do losango correspondem a quatro triângulos retângulos congruentes cujos catetos medem $\frac{1}{2}$ unidade de medida e 1 unidade

de medida. Pelo teorema de Pitágoras os discentes concluíram que $\overline{OC} \cong \overline{CB} \cong \overline{BA} \cong \overline{AO}$.

Figura 50 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)

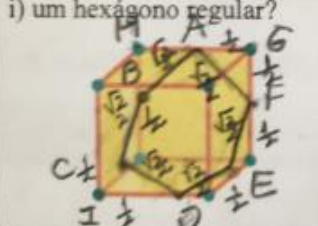
f) um losango? 	Justificativa: Todos os lados deste polígono são paralelos entre si, de forma que forma uma AC que é $\sqrt{3}$ e OB que é $\sqrt{2}$ e assim o ângulo é sendo igual ao B e o A ao C.
g) um trapézio?	Justificativa:

Fonte: Dados da pesquisa

Para justificar a secção do **losango** os discentes (801F, 1001B) por Pitágoras determinaram a medida dos lados do losango ($\frac{\sqrt{5}}{2}$), que corresponde a hipotenusa de triângulos retângulos congruentes, cujos catetos medem 1 e $\frac{1}{2}$, verificando por meio da representação gráfica que os lados opostos são paralelos, que a diagonal AC corresponde a diagonal do cubo ($\sqrt{3}$) e que a diagonal OB possui a mesma medida que a diagonal do quadrado ($\sqrt{2}$). Sendo assim a figura um losango.

Os estudantes (801F,1001B) mobilizaram o teorema de Pitágoras para justificar a medida dos lados do **hexágono**.

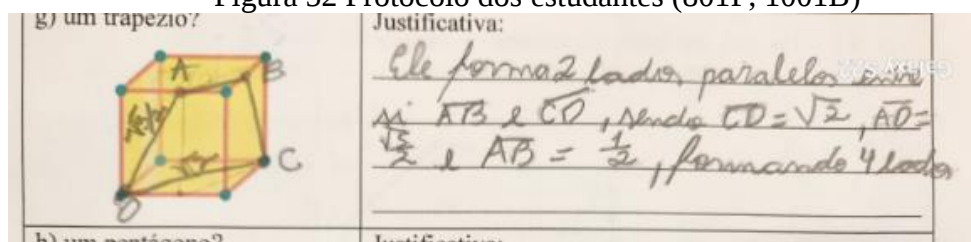
Figura 51 - Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)

i) um hexágono regular? 	Justificativa: Por Pitágoras os lados AB, AF, AE, OE, OC, AF todos os lados medem $\frac{\sqrt{3}}{2}$, logo possuem todos os mesmos ângulos.
--	--

Fonte: Dados da pesquisa

Para seccionar o **trapézio** os estudantes (801F, 1001B) mobilizaram sua definição “Ele forma dois lados paralelos entre si”, visualizando por meio da representação gráfica os lados paralelos e pelo teorema de Pitágoras as medidas dos lados. Assim:

Figura 52 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)



Fonte: Dados da pesquisa

Ponto de vista cognitivo

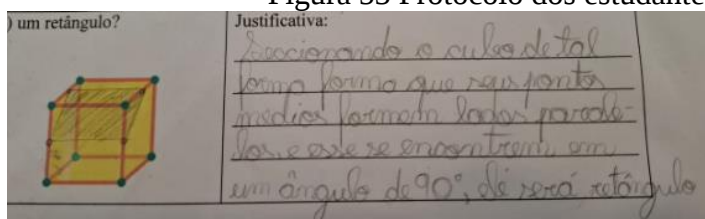
O estudante (901F) representou o **retângulo** no esqueleto do cubo (Fig. abaixo (B)), realizando uma conversão para o registro em língua natural para justificar os procedimentos realizados. Na gravação em vídeo observamos que a visualização do retângulo no esqueleto do cubo contribuiu para verificar que o quadrilátero formado se tratava de um retângulo. Assim:

(901F): Essa figura aqui vai ser um retângulo.

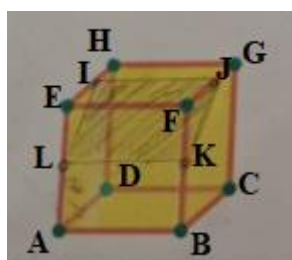
P: Por que vai ser um retângulo?

(901F): Porque vai ter esses dois lados e esses aqui paralelos e ângulos de 90° .

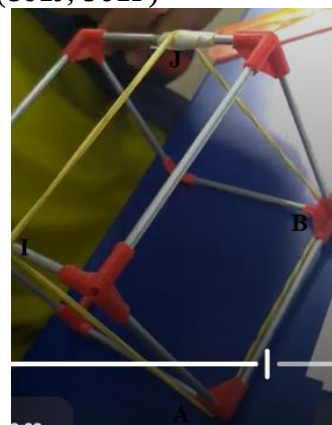
Figura 53 Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



(A)



(C)



(B)

Fonte: Dados da pesquisa

Comparando os protocolos dos estudantes (801J, 901F) observamos que seccionaram um retângulo no esqueleto do cubo e outro na representação gráfica. Este foi seccionado mobilizando o seguinte raciocínio:

(901F): O retângulo eu peguei quatro pontos médios desse cubo (Considerou os pontos médios de quatro arestas, pertencentes dois a dois a duas faces ortogonais). Daí essa medida aqui sempre será a mesma dessa medida aqui e, essa aqui também sempre terá a mesma medida dessa daqui. Aí como aqui forma um ângulo de 90° (Todos os ângulos internos do retângulo), ele se formará em um retângulo (Fig. acima (C)).

Os tratamentos realizados nessas representações articulados a apreensão discursiva foram fundamentais para observar que o retângulo é um paralelogramo com ângulos retos “*Esses dois lados e esses aqui são paralelos e ângulos de 90° em todas as pontas*” (901F).

Analisando o ponto de vista cognitivo e o matemático para o retângulo constatamos a coordenação dos registros figurais no esqueleto do cubo e na representação gráfica com o da língua natural. Essa articulação contribuiu para seccionarem figuras distintas, identificando o mesmo objeto matemático em representações distintas.

Os estudantes (801F, 1001B) para os triângulos realizaram uma conversão do registro em língua natural para o figural na expressão gráfica, realizando tratamentos numéricos e figurais para classificá-los segundo a medida dos seus lados. O raciocínio mobilizado por esses discentes para os triângulos, para o retângulo, para o losango, para o trapézio e para o hexágono foi tentar representá-los no esqueleto do cubo, por meio de tentativas e erros. A validação dos tratamentos figurais realizados nessas figuras ocorreu por meio do registro numérico.

Considerações

Os estudantes (801J, 901F) representaram as figuras primeiramente no esqueleto do cubo e após, na representação gráfica. Os estudantes (801F, 1001B) realizaram tratamentos figurais somente na representação gráfica, atribuindo um valor unitário como medida para a aresta do cubo. Os estudantes (801A, 901E) seccionaram as figuras no *GeoGebra* 3D, exceto o hexágono que construíram no esqueleto do cubo. Eles responderam corretamente os itens para o triângulo escaleno e para o equilátero, errando a justificativa para o triângulo isósceles, erraram a representação gráfica e a justificativa para o quadrado e para o retângulo e, deixaram sem responder os demais itens.

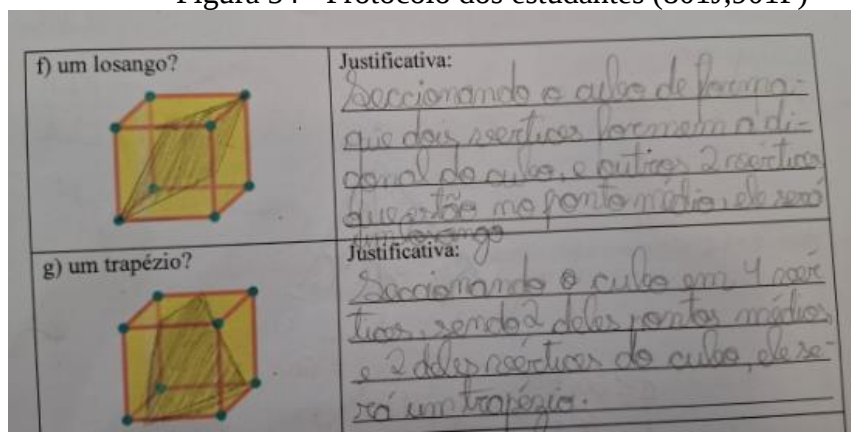
Para o triângulo equilátero observamos que os estudantes (801F, 1001B), (801A, 901E), (801J, 901F) realizaram tratamentos figurais, semelhante ao triângulo equilátero IJK da primeira atividade.

Os estudantes (801J, 901F) não atribuíram medidas para as figuras, suas justificativas para os triângulos **escaleno**, **equilátero** e **isósceles** foram baseadas na visualização das hipotenusas de triângulos retângulos, um em cada face do cubo, com um vértice do tetraedro em comum. Essas estratégias foram mobilizadas por meio da representação desses triângulos com elásticos no esqueleto do cubo.

Analizando os protocolos dos estudantes (801J, 901F) considerando o ponto de vista cognitivo e o matemático observamos que a resolução correta da atividade para os triângulos e a coordenação dos registros figural e em língua materna contribuiu para que percebessem que a representação gráfica do triângulo isósceles *“se trata de uma representação 3D, mas na verdade é uma figura 2D no papel. Então é como se fosse apenas uma representação do que seria um triângulo isósceles”* (901F). Observamos que essa afirmação foi realizada por meio da subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva que contribuiu para que interpretassem corretamente os elementos figurais presentes na representação gráfica.

Os estudantes (801J, 901F) não conseguiram seccionar o losango, o trapézio e o pentágono no cubo. A justificativa deles para o losango foi *“Seccionando o cubo de forma que dois vértices formem a diagonal do cubo, e outros 2 vértices que estão no ponto médio, ele será um losango”*. Para o trapézio afirmaram que *“Seccionando o cubo em quatro vértices, sendo dois deles pontos médios e dois deles vértices do cubo, ele será um trapézio”*. E a do pentágono que *“Seccionando o cubo em cinco vértices qualquer, ele será um pentágono”*. Observe a representação gráfica realizada por esses discentes para o losango e para o trapézio.

Figura 54 - Protocolo dos estudantes (801J,901F)



Fonte: Dados da pesquisa

Observe que três pontos não colineares determinam um plano. Sendo assim, temos que para o losango e para o trapézio um desses vértices não pertence ao plano seccionado. De modo semelhante, os vértices do pentágono abaixo não podem ser obtidos por meio de uma secção plana, “*Seccionando o cubo em cinco vértices quaisquer, ele será um pentágono*”.

Analisando nos protocolos dos estudantes (801F, 1001B) o ponto de vista matemático e o cognitivo observamos que resolveram corretamente todos os itens da atividade, exceto para o **pentágono** e para o **quadrado**. Para o quadrado consideraram uma face do cubo e não uma secção plana. Para o pentágono o representaram graficamente, porém não existe uma secção plana passando pelos seus vértices.

Para os triângulos seus vértices sempre determinam um plano, pois “Três pontos **não colineares** determinam um único plano que passa por eles” (Dolce; Pompeo, 2013, p. 2). No entanto, isso nem sempre ocorre para as figuras com mais de três vértices, como no caso do pentágono dos estudantes (801F,1001B). Inferimos que isso ocorreu porque não mobilizaram o postulado citado acima. Essa noção de fato não é vista no livro didático do oitavo ano. Entretanto, observamos que a variação das representações e dos registros contribuiu para a elaboração de raciocínios e sua validação para as demais figuras. Resolvendo-as corretamente.

7.2.2.2 As apreensões

A apreensão perceptiva foi mobilizada para identificar as figuras seccionadas, a discursiva para identificar, por meio das propriedades geométricas, os pontos para seccionar o plano obtendo as figuras solicitadas. Assim como para justificar os

procedimentos realizados. A apreensão operatória para realizar a divisão mereológica dos quadrados da face do cubo, subordinada a apreensão discursiva, para justificar a medida dos lados das figuras planas.

B1: Perceptiva, discursiva, sequencial e operatória

A apreensão perceptiva

Essa apreensão foi requerida pelos estudantes (801J, 901F) para representar os vértices dos triângulos, visualizando as medidas dos seus respectivos lados com a finalidade de classificá-los em **escaleno**, **isósceles** e **equilátero**.

Os estudantes (801J, 901F) mobilizaram a apreensão perceptiva ao identificar os retângulos distintos representados no esqueleto do cubo e na representação gráfica.

Essa apreensão foi mobilizada pelos estudantes (801F, 1001B) para verificarem a medida dos lados dos **triângulos**, classificando-os. Para o **retângulo** a apreensão perceptiva contribuiu para identificar os lados opostos congruentes e os ângulos retos. Para o **trapézio** a apreensão perceptiva na representação gráfica contribuiu para identificar o par de lados paralelos.

Perceptivamente os estudantes (801F, 1001B) responderam a atividade para o **pentágono**. No entanto a secção plana não passa por todos os vértices. Essa apreensão imediata sobre essa figura contribuiu para que os estudantes não mobilizassem a apreensão discursiva, como fizeram para o losango.

A apreensão perceptiva ao comandar as demais fez com que os estudantes (801A, 901E) desenhasssem um quadrado e um retângulo na face frontal da representação gráfica do cubo. Essa apreensão ao se sobressair não permitiu que os discentes a articulassem com a apreensão discursiva.

A apreensão perceptiva para o **quadrado** também foi imediata para os estudantes (801F, 1001B). Assim, consideraram a secção plana uma face do cubo.

Observamos que ao prevalecer a apreensão perceptiva sobre o quadrado, os estudantes (801F, 1001B) e os (801A, 901E) não conseguiram resolver corretamente a atividade. Esses estudantes conseguiram seccionar figuras mais difíceis como o retângulo. A Gestalt foi observada pelo modo como os discentes visualizaram a secção plana para obter o quadrado. Na apreensão perceptiva a lei gestáltica pregnância da forma fez com que os estudantes (801F, 1001B, 801J, 901F) visualizassem no cubo o quadrado de sua face, concluindo que essa figura bidimensional era a secção plana.

A escrita em língua natural no item d) “um quadrado” seguida da figura de um cubo impôs a lei gestáltica do fechamento para os estudantes (801F,1001B,801A,801E), isso impediu que incluíssem infinitas possibilidades de seccionar o cubo obtendo o quadrado. O fenômeno de não congruência semântica entre “um quadrado” e sua representação gráfica fez com que visualizassem o quadrado da face como a secção plana.

A apreensão discursiva

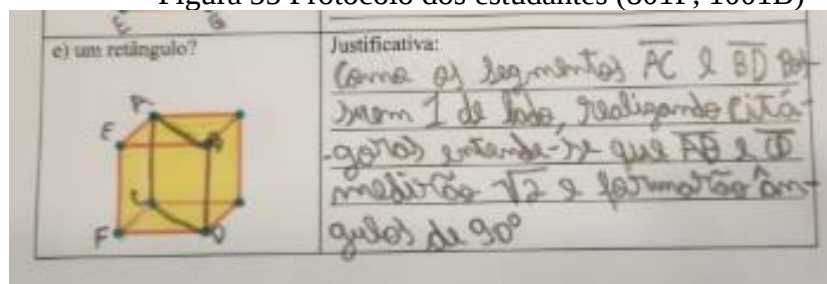
Essa apreensão, comandada pela apreensão perceptiva, foi usada pelos (801J,901F) para justificar a solução da atividade por meio de classificação dos **triângulos** segundo seus lados. Assim:

(901F): Para o triângulo equilátero eu seccionei o cubo de tal forma que os pontos médios desses lados aqui formem três lados. E como esses pontos médios terão a mesma medida ele será um triângulo equilátero. Mas, se no caso a gente fizer dois pontos médios e um ponto no vértice do cubo, ele formará um triângulo isósceles.

Observamos a apreensão discursiva na afirmação da secção realizada pelo estudante (901F) para obter o **retângulo**. Ele justificou que os dois retângulos distintos representados abaixo se tratavam de um retângulo “[...] porque vai ter esses dois lados e esses aqui paralelos e ângulos de 90° ”.

Os estudantes (801F, 1001B) mobilizaram a apreensão discursiva para explicar os tratamentos figurais realizados para seccionar o **retângulo**. Na explicação abaixo eles justificam que a secção é um retângulo porque os lados opostos são paralelos e os ângulos internos retos. Observe:

Figura 55 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B)



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes (801F, 1001B) observaram que o **losango** seccionado possuía lados congruentes por meio do teorema de Pitágoras. No entanto, a apreensão discursiva foi decisiva para distingui-lo do quadrado. Esses discentes mobilizaram a propriedade de suas diagonais, observando que uma diagonal corresponde a diagonal do cubo ($\sqrt{3}$) e que a outra diagonal possui a mesma medida que a diagonal do quadrado ($\sqrt{2}$). Sendo, portanto um losango. De posse disso, fizeram outra observação a de que os ângulos opostos do losango são congruentes.

O estudante (801A) para seccionar o trapézio no GeoGebra lembrou primeiro de sua definição, “*É um polígono de quatro lados que possui um par de lados paralelos*”.

A apreensão sequencial

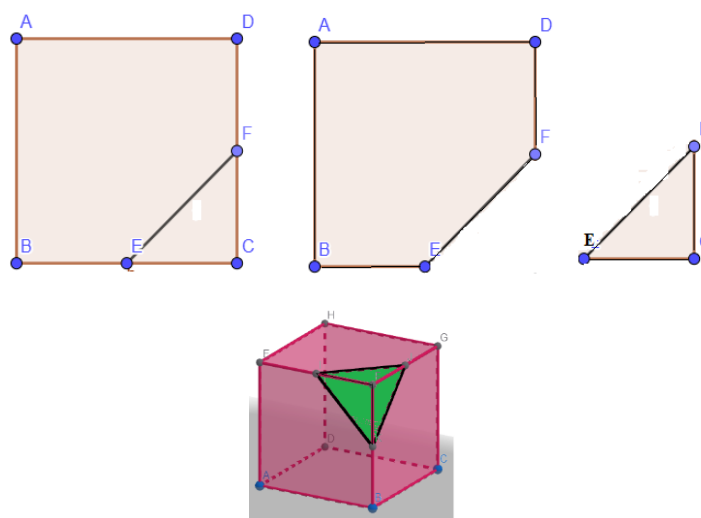
Não foi mobilizada.

A apreensão operatória

Essa apreensão foi mobilizada pelos estudantes (801F, 1001B) por meio da divisão mereológica. Para o **triângulo escaleno** ao realizarem a decomposição do quadrado ABCD em dois triângulos retângulos isósceles congruentes. Esse procedimento também foi realizado para o **triângulo isósceles**.

Para o **triângulo equilátero** a decomposição realizada em cada face do quadrado foi por esses estudantes foi a seguinte:

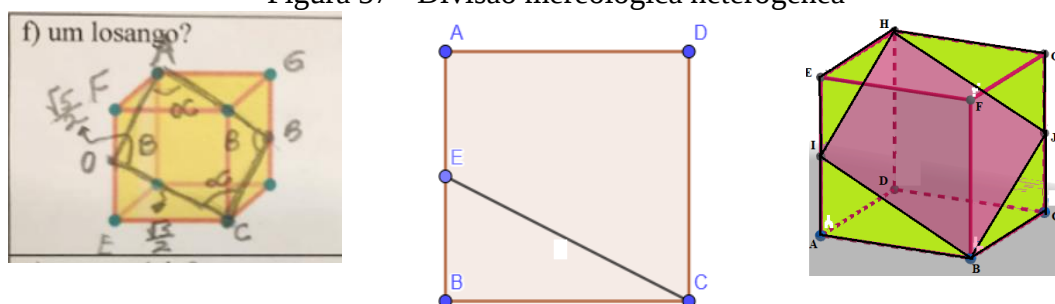
Figura 56 Decomposição heterogênea no quadrado



Fonte: Dados da pesquisa

Para o losango foi realizada pelos discentes (801F, 1001B) a divisão mereológica em quatro faces do cubo, decompondo o quadrado ABCD em um trapézio ADCE e em um triângulo retângulo EBC. Esse procedimento foi realizado para calcular a medida do lado do losango $\frac{\sqrt{5}}{2}$, que corresponde a hipotenusa de quatro triângulos retângulos congruentes (IHE, JHG, JBC e IBA). Observe:

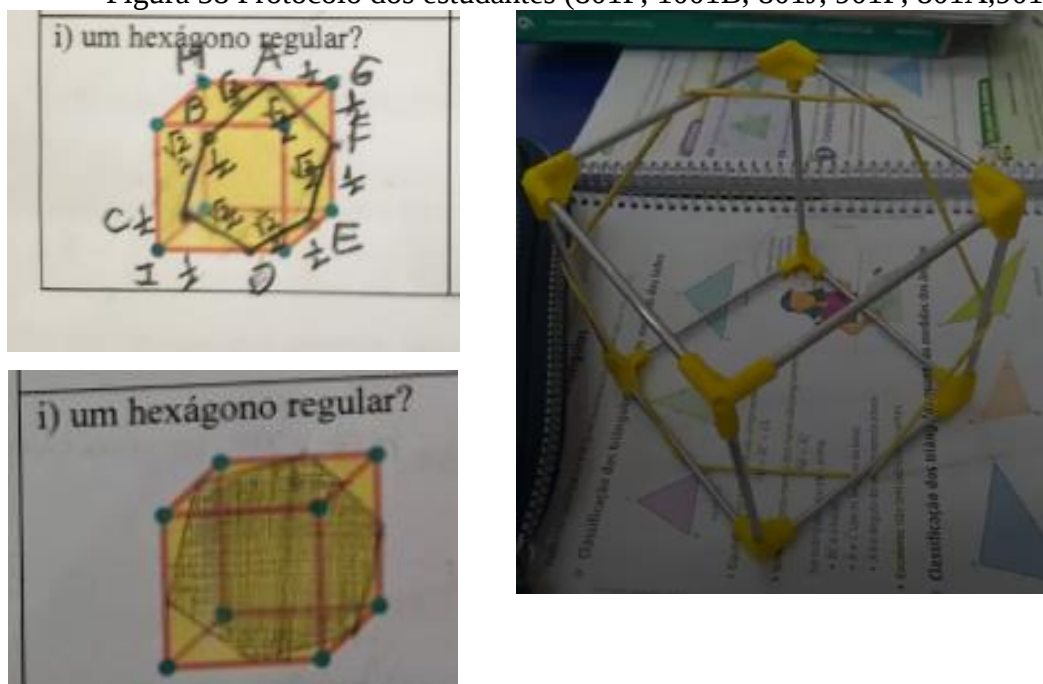
Figura 57 - Divisão mereológica heterogênea



Fonte: Dados da pesquisa

Para o hexágono a decomposição mereológica realizada pelos estudantes (801F, 1001B), (801J, 901F) e (801A, 901E) foi a mesma. Observe:

Figura 58 Protocolo dos estudantes (801F, 1001B, 801J, 901F, 801A,901E)



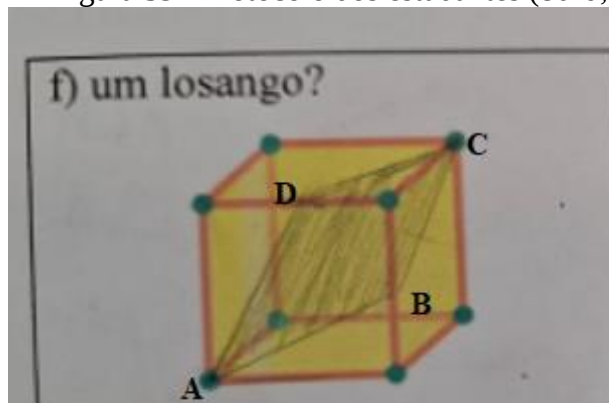
Fonte: Dados da pesquisa

B2: Congruência semântica

Observamos para os triângulos e para o retângulo, no protocolo dos estudantes (801J,901F), que houve congruência semântica entre essas figuras, com a apreensão operatória e com a apreensão discursiva. Ao ocorrer esse fenômeno os discentes conseguiram realizar as operações semióticas e cognitivas de tratamento e de conversão, resolvendo a atividade para o retângulo com duas representações figurais distintas. Entretanto, o trapézio e o pentágono foram incongruentes semanticamente com essas apreensões e com isso a atividade não foi resolvida corretamente.

No protocolo dos discentes (801J, 901F) constatamos a incongruência semântica nos tratamentos figurais para obter o losango, na representação gráfica. Por meio da apreensão discursiva eles identificaram as propriedades das diagonais e dos lados desse quadrilátero. Entretanto, por meio dos tratamentos figurais, se forem considerados os pontos A, B e D para passar o plano a secção determina um quadrado e não um losango. Para ser o losango a secção plana deve passar pelos pontos A, B e C ou, A, D e C.

Figura 59 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



Fonte: Dados da pesquisa

A maior distância cognitiva nessa atividade ocorreu para o pentágono e a secção plana no cubo para obtê-lo, inferimos essa afirmação porque os discentes realizaram a representação figural de um pentágono, porém não conseguiram realizar a secção plana no cubo. No registro figural esse objeto matemático foi reconhecido na representação bidimensional, mas não foi reconhecido a partir de uma secção plana. Sobre isso Duval (2012c, p. 105) pontua que “Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado e não ser efetuado ou entendido”.

Para seccionar o quadrado observamos que a congruência semântica relacionada a apreensão perceptiva fez com que os estudantes (801F, 1001B) errassem a atividade. Eles erraram a secção somente para o quadrado e para o pentágono. O mesmo fenómeno não foi constatado no protocolo dos discentes (801J, 901F) que conseguiram seccionar o quadrado, observando outras respostas possíveis. Um fator que contribuiu para essa assertividade foi apreensão discursiva ser comandada pela apreensão operatória.

Essas respostas diferentes para seccionar o quadrado ocorreram por conta da não congruência semântica entre enunciado e figura, que a apreensão perceptiva impôs e que comandou a resolução da atividade no protocolo dos estudantes (801F, 1001B, 801A, 801E). Os discentes (801J, 901F) ao mobilizarem a apreensão discursiva e a apreensão operatória minimizaram a apreensão perceptiva sobre a figura. Sobre isso, Moretti, Brandt e Almouloud (2022, p.110) pontuam que “Esse procedimento não é espontâneo, devendo ser controlado, de modo a contribuir para o enfrentamento do fenómeno da não congruência”.

Considerações

Constatamos nos protocolos que os estudantes que mais obtiveram êxito na resolução das atividades foram os que subordinaram a apreensão perceptiva à apreensão operatória articulada ao discurso. A congruência semântica entre enunciado e figura e, entre figura e apreensão operatória foram diferentes para os estudantes (801F, 1001B), (801A, 801E), (801J, 901F). Ao analisarmos os acertos dos discentes (801F, 1001B) observamos que eles foram os que mais mobilizaram as funções discursivas. Estas contribuíram para uma transparência maior nas representações, nos registros e nas conversões realizadas, aumentando a taxa de acerto.

7.2.2.3 A visualização icônica e a visualização não icônica

A visualização icônica foi usada para identificar as figuras e a visualização não icônica, centrado na exploração heurística, para seccionar as figuras em cada item da atividade. No olhar não icônico o reconhecimento das figuras obtidas como solução foi realizado por meio das propriedades mobilizadas no processo de resolução, externalizadas por uma produção discursiva.

C1: O olhar botanista e o olhar agrimensor

O olhar botanista

Foi mobilizado pelos estudantes para identificar as figuras solicitadas em cada item da atividade.

O olhar agrimensor

Não foi mobilizado.

C2: O olhar construtor e o olhar inventor

O olhar construtor

Não foi mobilizado.

O olhar inventor

Esse olhar foi mobilizado pelos estudantes (801J, 901F) para identificar os vértices dos triângulos: escaleno, isósceles e equilátero. Para o retângulo o olhar inventor para os vértices do losango foi mobilizado de dois modos diferentes: Na representação gráfica os vértices foram os pontos médios das arestas do cubo de duas faces ortogonais. No esqueleto do cubo os vértices do retângulo foram dois vértices da base inferior do cubo e dois pontos médios da face superior do cubo, de modo que o segmento que liga esses pontos é paralelo a aresta da base do cubo determinada pelos dois vértices.

Os estudantes (801F, 1001B) usaram essa apreensão para determinar os lados dos triângulos, do retângulo, do losango, do trapézio e do hexágono, com suas respectivas medidas.

Considerações

Observamos a visualização não icônica no protocolo dos estudantes (801J,901F) ao pontuarem que o cubo amarelo representado na folha “*se trata de uma representação 3D, mas na verdade é uma figura 2D no papel*”. Observe que nessa afirmação o reconhecimento do tetraedro regular foi feito por meio das hipóteses enunciadas e que comandaram o olhar sobre as representações.

No olhar inventor, para os triângulos, os discentes tiveram que realizar uma desconstrução dimensional no cubo (3D) para o adimensional (0D). Essa desconstrução dimensional articulada ao discurso contribuiu para que os estudantes (801J, 901F)

entrassem na visualização não icônica ao seccionarem o cubo de modos diferentes para obter o retângulo. Nos procedimentos observamos que saíram do tridimensional (cubo) e visualizaram elementos figurais 0D e 1D (vértices e lados do retângulo) em uma figura 2D (retângulo), tendo que permanecer nessa dimensão para responder a atividade.

7.2.2.4 As desconstruções e a heurística

Nesta atividade, ao seccionar o cubo de modo a obter as figuras planas solicitadas, ocorre uma desconstrução dimensional ($3D \rightarrow 2D$). Ao determinar a secção plana por meio de três pontos não colineares a desconstrução dimensional é a ($3D \rightarrow 1D \rightarrow 0D \rightarrow 2D$). Nas arestas do cubo os três pontos do plano devem ser marcados nas arestas para seccioná-lo, obtendo a figura plana.

No *Geogebra* os estudantes podem seccionar o plano do seguinte modo no ícone ferramentas com os procedimentos: construir o cubo, determinar ponto ou ponto médio, seccionar o cubo com “Plano por três pontos”. O polígono obtido pode ser visualizado rotacionando o cubo.

Essa desconstrução dimensional é realizada na visualização icônica, pois: a validação ocorre por meio da apreensão perceptiva e do olhar botanista e, as estratégias de resolução ocorrem por tentativas usando as ferramentas do software.

A heurística nessa atividade foi realizada na representação gráfica e no esqueleto do cubo. Isso contribuiu para surgir explorações distintas e autônomas, em que foram seccionadas figuras diferentes considerando seus vértices. Isso ocorreu para: o triângulo escaleno, o triângulo isósceles e para o retângulo.

D1: Dimensional, instrumental e a exploração heurística

A desconstrução dimensional

Os estudantes (801J, 901F) realizaram uma desconstrução dimensional ($3D \rightarrow 0D \rightarrow 2D \rightarrow 1D$) ao justificar por meio da apreensão discursiva os tratamentos figurais realizados para o triângulo isósceles, escaleno e equilátero. No cubo (3D) determinaram os vértices do triângulo (0D) e após traçaram com régua os triângulos (2D).

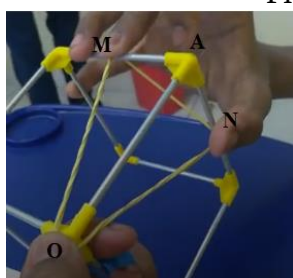
Observamos que a desconstrução foi comandada pela apreensão discursiva para os estudantes (801J, 901F) justificarem o **triângulo isósceles** e o **escaleno**. Para explicar os lados congruentes desses triângulos o estudante (901F) observou que:

(901F): Esse triângulo vai ser isósceles porque essa parte aqui é igual a essa parte aqui ($OM \cong ON$), porque essa aresta do cubo vai ser um triângulo retângulo igual a esse aqui ($\triangle OAM \cong \triangle OAN$). Então esses dois juntos aqui formarão um triângulo isósceles, porque cada um divide igualmente, então eles têm o mesmo valor (Fig. 45, (A)).

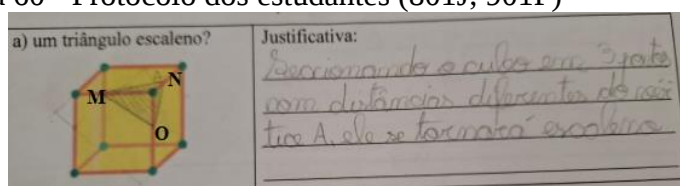
P: Você fez o equilátero primeiro?

(901F): Sim. O escaleno.... Se você pegar três pontos aleatórios do cubo (de três arestas do cubo que possuem um vértice comum), de tal forma que eles tenham distâncias diferentes desse ponto aqui (ponto A) (Fig. 45, (B)). Porque esse ponto aqui é a conexão dessas três arestas, se caso esses pontos aqui forem diferentes (pontos M, N e O) (Fig.45, (B)) esse triângulo sempre será escaleno.

Figura 60 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



(A)



(B)

Fonte: Dados da pesquisa

A desconstrução dimensional realizada pelo estudante (901F) para o **quadrado** foi sair do tridimensional e ir para o bidimensional ($3D \rightarrow 2D$), justificando a atividade assim: “*Seccionando o cubo rente de uma de suas faces, ele se tornará um quadrado*”. Entretanto, na gravação em vídeo observamos que ao explicar a solução encontrada o discente desce mais uma dimensão. Observe: “*Para o quadrado eu seccionei o cubo de tal forma que o quadrado fique paralelo a uma das faces do cubo. Esse quadrado pode ser em qualquer lugar paralelo a essas quatro arestas*”. Com isso, constatamos dois tipos de desconstrução dimensional: ($3D \rightarrow 2D$) para a justificativa por escrito e a ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D$) para a justificativa oral.

Nessas articulações o estudante (901F) afirma que essa atividade possui infinitas soluções. Acompanhe:

(901F): Então eu escolhi pegar rente a face, daí ele vai formar um quadrado.

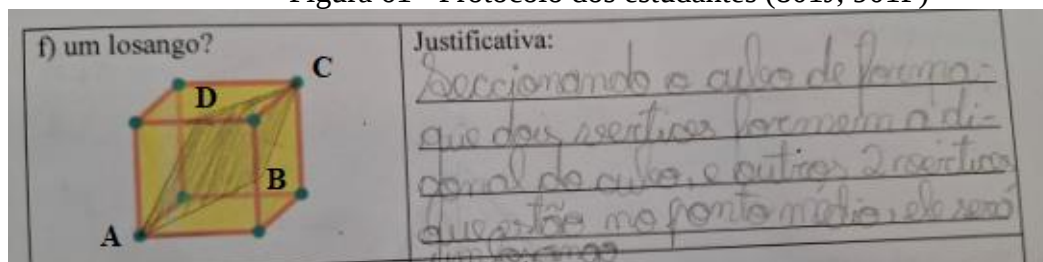
P: E quantos quadrados poderíamos formar assim?

(901F): Há! Infinitos! Infinitos quadrados!

O estudante (901F) explicou a desconstrução realizada para o **losango** comandado pela apreensão discursiva assim:

Para o losango ao invés de eu pegar quatro pontos médios, eu peguei dois vértices (A e C) e dois pontos médios (B e D). Esse vértice aqui (A) é oposto a esse vértice aqui (C) e se nós conectarmos com uma linha ele formará a diagonal do cubo (AC). Esse aqui (D) e esse aqui (B) estão opostos, assim esses dois lados aqui terão a mesma medida (DC e AB), assim como esses aqui (AD e BC) também terão. Só que eles são paralelos, só que diferentes do cubo (ele quis dizer quadrado) esses ângulos aqui são agudos ($\hat{A}$ e $\hat{C}$) e esses aqui são obtusos ($\hat{D}$ e $\hat{B}$) e não são ângulos de noventa graus (Fig. 46).

Figura 61 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)

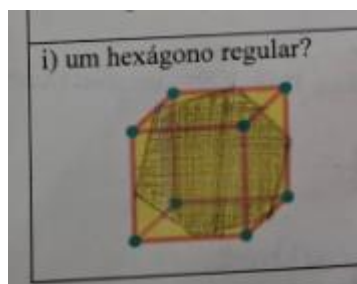


Fonte: Dados da pesquisa

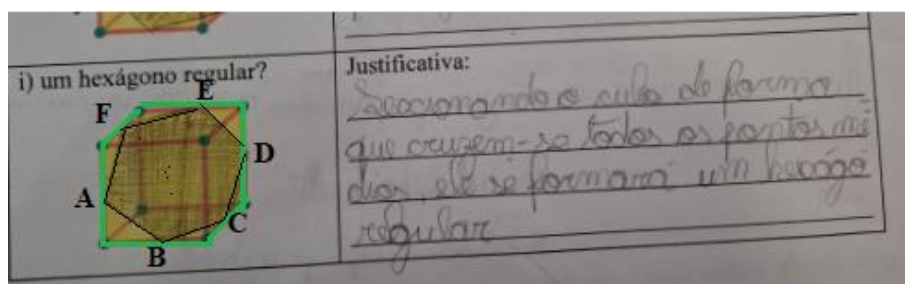
Comparando os protocolos observamos que o polígono é um losango. Mas, como um plano é determinado por três pontos não colineares, a secção será um losango se os pontos considerados forem A, B e C, ou, A, D e C.

Para o hexágono regular os estudantes (801J,901F) realizaram a desconstrução dimensional do tipo: ($3D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$), mobilizando o seguinte raciocínio: “Para hexágono regular eu peguei o ponto médio de todos os lados do cubo”. Os pontos médios considerados foram os da aresta verde abaixo.

Figura 62 - Protocolo dos estudantes (801J, 901F)



(A)



(B)

Fonte: Dados da pesquisa

A desconstrução instrumental

Foi realizada pelos discentes (801A, 901E) no *Geogebra*⁶⁹ 3D online usando as ferramentas: cubo, ponto, ponto médio ou centro e plano por três pontos. Em alguns polígonos a validação ocorreu por meio de medidas, acrescentando nesses procedimentos: polígono; distância, comprimento e ângulo.

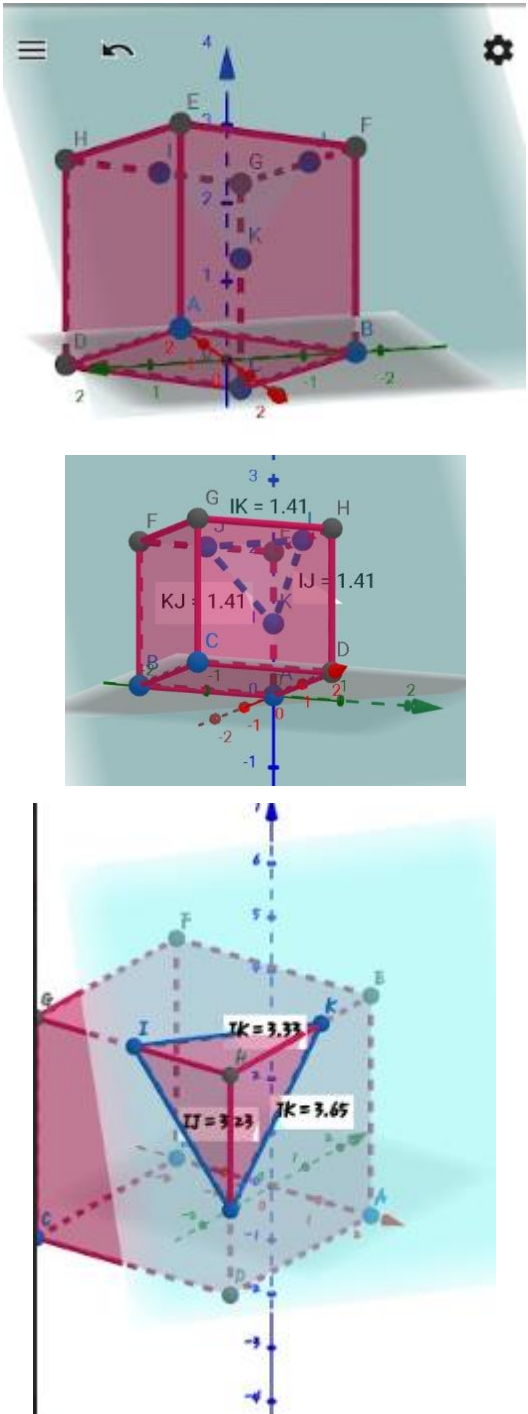
A desconstrução instrumental na visualização icônica

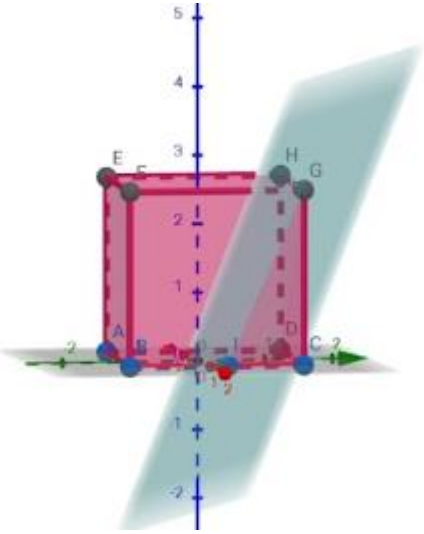
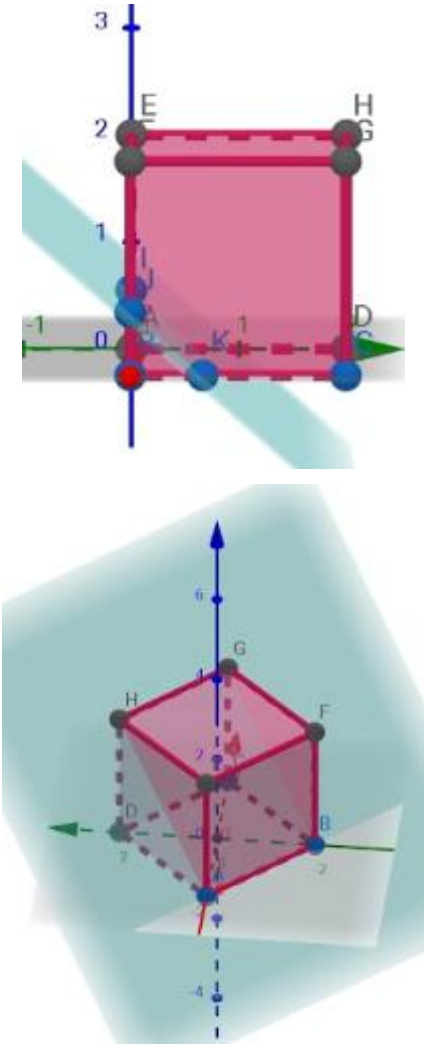
Os discentes (801A, 901E) realizaram essa desconstrução para: o triângulo equilátero, os retângulos, o quadrado, o pentágono e o hexágono.

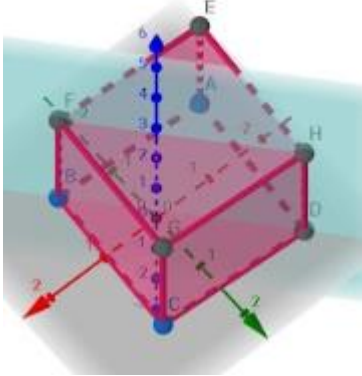
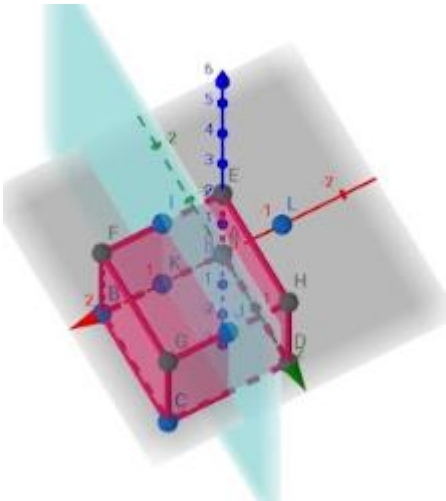
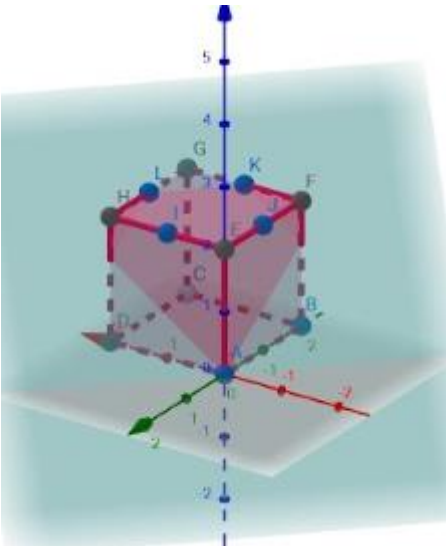
A validação do triângulo equilátero ocorreu por meio das medidas dos seus lados. A dos retângulos, do quadrado, do pentágono e a do hexágono foi realizada rotacionando-os no software. Para o quadrado e para o retângulo observaram os ângulos internos e os lados; para o pentágono foi verificando a quantidade de lados; para o hexágono constatarem visualmente, rotacionando-o, que seus lados possuem a mesma medida, pois correspondem a hipotenusas de triângulos retângulos congruentes. Assim:

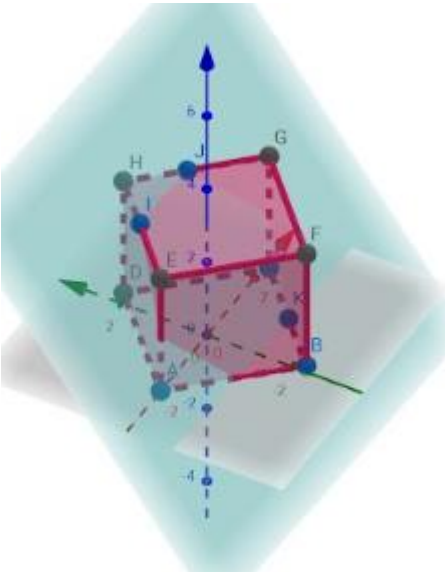
⁶⁹ Os estudantes usaram o software on line no celular e enviaram o print da tela via WhatsApp.

Figura 63 - Protocolo dos estudantes (801A, 901E)

Figuras	Geogebra	Procedimentos
Triângulo equilátero	 The figure consists of three screenshots from the GeoGebra software interface. The first screenshot shows a 3D coordinate system with a cube. Points I, J, and K are marked at the midpoints of edges EF, EH, and EA respectively. The second screenshot shows the triangle IJK with side lengths IK = 1.41, IJ = 1.41, and KJ = 1.41. The third screenshot shows the triangle IJK with side lengths IK = 3.33, IJ = 3.23, and JK = 3.65.	Determinaram os pontos médios das arestas EF, EH e EA do cubo, traçaram o plano passando por esses pontos médios; Eles traçaram o triângulo com a ferramenta polígono, verificaram as medidas dos lados do triângulo.

Triângulo Isósceles		Determinaram o ponto médio das arestas BC e CD; traçaram o plano passando por esses pontos e pelo vértice G do cubo.
Retângulo		Determinaram o ponto médio das arestas BC, FB e EA; traçaram o plano passando por esses três pontos.

Retângulo		Traçaram o plano passando pelos vértices B, D e F do cubo.
Quadrado		Determinaram o ponto médio das arestas AB, EF e GH; traçaram o plano passando por esses pontos médios.
Pentágono		Determinaram o ponto médio das arestas FG e GH; traçaram o plano passando por esses pontos médios e pelo vértice A do cubo.

Hexágono		Determinaram o ponto médio das arestas EH, BC e HG; traçaram o plano passando por esses pontos médios.
----------	--	--

Fonte: Dados da pesquisa

A desconstrução instrumental na visualização não icônica

Não foi mobilizada.

A heurística

A heurística nessa atividade foi mobilizada por meio da conexão da apreensão discursiva com a apreensão operatória, em que a figura obtida pela secção plana foi vista a partir de suas propriedades e não pelas formas destacadas perceptivelmente. Para isso a apreensão discursiva comandou a apreensão perceptiva.

Observamos a heurística no protocolo dos discentes (801J,901F) para verificar onde deveriam ficar os vértices dos triângulos, do retângulo, do losango e a do hexágono. Para os discentes (801F, 1001B) essa exploração foi semelhante, porém validaram por meio do registro numérico a medida dos lados das figuras.

Considerações

O tipo de desconstrução instrumental mobilizado nas atividades ocorreu na visualização icônica, não evoluindo para a visualização não icônica. Observamos que para ocorrer essa evolução é necessário que os estudantes tenham conhecimentos sobre construções geométricas com régua e compasso.

O plano seccionado para o triângulo isósceles e para o primeiro retângulo (Fig. acima) decompôs o cubo (3D) em outras duas do mesmo tipo (3D). Com isso,

observamos que ocorreu uma divisão mereológica heterogênea, pois a secção plana decompôs o cubo em duas unidades figurais tridimensionais diferentes entre si.

Trata-se de uma divisão mereológica em 3D, pois conforme Duval (2022, p.19, grifos do autor), a divisão mereológica consiste em decompor uma figura “[...] **em unidades figurais com o mesmo número de dimensões que a figura de partida.** Assim, um triângulo (2D/2D) pode ser decomposto em outros triângulos (2D/2D). Mas também, um cubo material (3D/3D) ou qualquer outro sólido pode ser repartido em blocos que serão poliedros (3D/3D). ”

Assim, na secção plana para o segundo retângulo e para o quadrado ocorre a divisão mereológica homogênea, pois o cubo (3D) é decomposto em outros dois poliedros (3D) diferentes do cubo, mas iguais entre si.

No entanto, existe uma oposição entre a divisão mereológica em (3D) e a desconstrução dimensional, pois a primeira pode ser observada de modo visual (Fig. 63, acima), enquanto a desconstrução dimensional é subordinada a apreensão discursiva.

7.2.2.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas

A função referencial é mobilizada no enunciado para designar: cubo, triângulo escaleno, triângulo isósceles, triângulo equilátero, quadrado, retângulo, losango, trapézio, pentágono e hexágono regular.

E1: Função referencial, apofântica e de expansão discursiva

A função referencial

Os estudantes (801J, 901F) mobilizaram essa função para designar: cubo, vértice, triângulo escaleno, ponto médio, ponto, lados, lados paralelos, ângulo de 90°, diagonal do cubo, diagonal do quadrado, triângulo isósceles, triângulo equilátero, quadrado, retângulo, losango, trapézio, pentágono e hexágono regular.

Para os estudantes (801F, 1001B) a função referencial foi usada ao designarem: os vértices das figuras usando letras maiúsculas do alfabeto; a medida da aresta do cubo “Fazendo aresta = 1”; as medidas dos segmentos por meio de duas letras maiúsculas do alfabeto com um traço em cima, assim: $\overline{BC}$; o ângulo reto por 90° e, por α e β os ângulos opostos do losango.

A função apofântica

Os estudantes (801F, 1001B) mobilizaram essa função do seguinte modo: $\overline{BC} = \sqrt{2}$ para a medida da diagonal BC do quadrado; $\overline{FC} = 1$ para a medida da aresta do cubo; $\overline{FB} = \sqrt{3}$ para a medida da diagonal do cubo; ΔFBC para o triângulo escaleno; $\overline{AC} \equiv \overline{CB}$ para indicar os lados congruentes do triângulo isósceles; ΔFHG para o triângulo equilátero; $\hat{D} = \hat{B}$ e $\hat{A} = \hat{C}$ para os ângulos opostos do losango; para os lados paralelos do trapézio “*Ele forma dois lados paralelos entre si*” e para explicar o pentágono “*Ele é um polígono convexo não regular*”.

Observamos essa função sendo usada pelos estudantes (801J, 901F) para determinar os vértices dos **triângulos**.

A função de expansão discursiva

Essa função foi mobilizada pelos estudantes (801F, 1001B) ao: aplicar o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos; traçar dois lados paralelos a duas arestas do cubo para o triângulo isósceles; observar que os lados opostos do retângulo são paralelos e congruentes; por Pitágoras calcular que todos os lados do losango medem $\frac{\sqrt{5}}{2}$; explicar que os lados opostos do losango são paralelos “*Todos os lados deste polígono são paralelos entre si*”; Observar que as diagonais do losango possuem medidas diferentes e assim os ângulos opostos são congruentes e, ao afirmar que o quadrilátero é um trapézio pois possui um par de lados paralelos.

Os estudantes (801J, 901F) usaram essa função para justificar a secção plana para obter o triângulo isósceles.

P: O que te garante que esse triângulo é isósceles?

(901F): Essa medida até esse ponto aqui é igual a essa medida até esse ponto aqui. Porque se trata de duas hipotenusas, conectadas pelo vértice do cubo. Então, esses lados aqui vão ter a mesma medida (AB e CB) e esse daqui uma medida diferente (AC). Então ele vai ser isósceles.

Considerações

Comparando os protocolos dos estudantes observamos que os estudantes (801F,1001B) foram os que mais mobilizaram as funções discursivas referencial, apofântica e de expansão discursiva. Ao serem promovidas verificamos que a incongruência semântica foi menor para esses estudantes, pois elas permitiram uma maior transparência entre a mudança do registro da língua natural, para o figural, para o

algébrico e para o numérico. Tendo uma compreensão mais ampla ao realizar as conversões e os tratamentos. Constatamos que o procedimento de identificar os lados do triângulo escaleno (aresta do cubo, diagonal do quadrado e diagonal do cubo), por exemplo, requer uma aprendizagem específica da geometria que é a articulação da visualização com a linguagem matemática, exigindo mais que aspectos puramente matemáticos. Por isso o ponto de vista cognitivo também deve ser considerado nas atividades para a aprendizagem em geometria.

A seguir analisamos a terceira atividade.

7.3 Análise da atividade 03

Atividade 03

- 1) Construa, no espaço abaixo, um triângulo ABC inscrito numa semicircunferência, de centro O, de modo que o lado $\overline{AB}$ seja o diâmetro da circunferência. Como este triângulo é classificado quanto às medidas dos ângulos?
- 2) Compare os triângulos construídos. Existe alguma relação entre esses triângulos? Explique.
- 3) Qual será a medida do ângulo $\hat{C}$ de um triângulo ABC qualquer, inscrito numa circunferência de centro O, cujo lado $\overline{AB}$ seja o diâmetro dessa circunferência? Justifique.
- 4) É possível inscrever qualquer triângulo retângulo numa semicircunferência? Justifique.

Fonte: Dados da pesquisa

Esta atividade tem por objetivo inscrever triângulos distintos numa semicircunferência e verificar que sempre será retângulo⁷⁰. Nessa validação

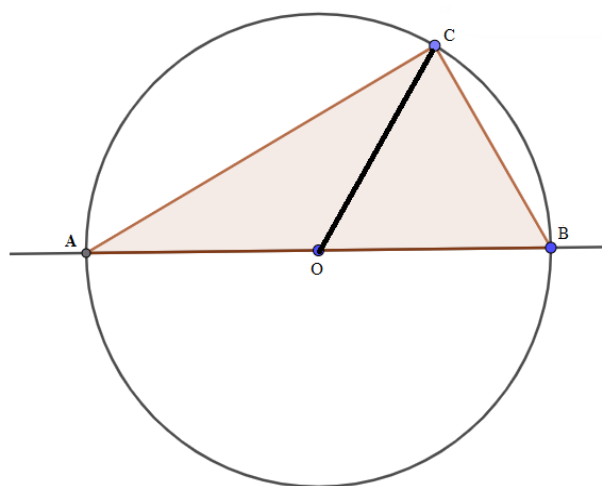
⁷⁰ Os estudantes viram no oitavo ano ângulo inscrito numa circunferência e arco capaz.

objetivamos deduções matemáticas para a medida do ângulo inscrito numa semicircunferência, que pode ser realizada por dois modos distintos. Assim:

1) Pelo arco capaz, nesse caso justificando o ângulo reto por meio da propriedade “A medida do ângulo inscrito em uma semicircunferência é a metade da medida do arco que ele determina na circunferência” (Silveira, Marques; 2019c, p.244).

2) Realizando uma divisão mereológica no triângulo ABC (Fig.64) por meio da adição do segmento OC. Decompondo o triângulo ABC em dois triângulos (ACO e OCB).

Figura 64 – Divisão mereológica no triângulo ABC



Fonte: Dados da pesquisa

Observe que:

$$(I) \quad \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180^0$$

(II) $\widehat{OAC} + \widehat{ACO} + \widehat{COA} = 180^0$, como $\overline{AO} \cong \overline{OC} = r$, onde r é o raio da circunferência, temos que: AOC é um triângulo isósceles, logo $\widehat{OAC} = \widehat{ACO} = \alpha$. Assim:

$$\alpha + \widehat{AOC} + \alpha = 180^0$$

$$2\alpha + \widehat{AOC} = 180^0$$

(III) $\widehat{BOC} + \widehat{OCB} + \widehat{CBO} = 180^0$, como $\overline{OB} = \overline{OC} = r$, onde r é o raio da circunferência, temos que: BOC é um triângulo isósceles, logo $\widehat{OCB} \cong \widehat{OBC} = \beta$. Assim:

$$\beta + \widehat{BOC} + \beta = 180^0$$

$$2\beta + \widehat{BOC} = 180^0$$

(IV) De (I), (II) e (III) temos que:

$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + (\widehat{ACO} + \widehat{OCB}) = 180^\circ, \text{ pois } \widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB}$$

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Portanto, $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

A variável didática extrínseca dessa atividade é construir o triângulo ABC inscrito numa semicircunferência com: régua e compasso, no *Geogebra* ou desenhá-lo a mão livre. A variável didática intrínseca é a ausência de figura no enunciado e o triângulo ser inscrito numa semicircunferência.

7.3.1 A mobilização dos registros de representação semiótica

O enunciado dessa atividade está em língua natural. Na resolução os estudantes usaram o registro figural, o numérico, o da língua natural e o algébrico.

A1: O ponto de vista matemático e o ponto de vista cognitivo

O ponto de vista matemático

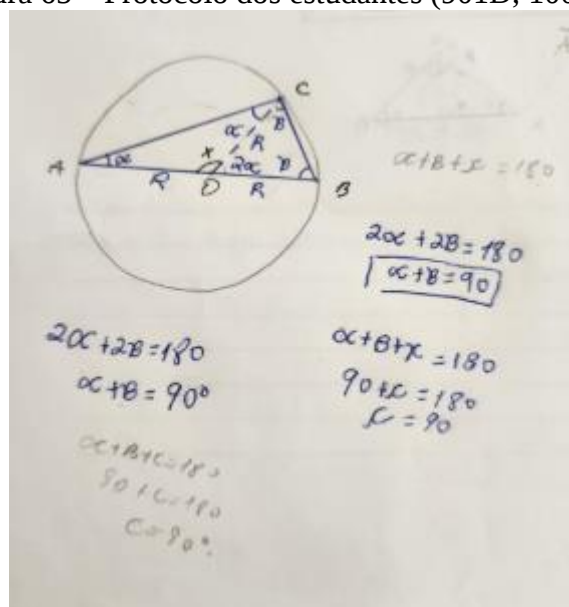
Os estudantes (901D, 1001B) identificaram que o triângulo ABC inscrito numa semicircunferência de diâmetro AB será retângulo em C, desenhando a figura abaixo a mão livre e mostrando que os ângulos da base dos triângulos AOC e BOC são congruentes porque eles são isósceles. Pela soma dos ângulos internos no triângulo OBC verificaram que:

$$\beta + \beta + (180^\circ - x) = 180^\circ \rightarrow x = 2\beta$$

De modo análogo, observaram que $\widehat{COB} = 2\alpha$

Como $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ$, concluíram que $\alpha + \beta = 90^\circ$ (Por essa razão é que escrevem na folha $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$).

Figura 65 – Protocolo dos estudantes (901D, 1001B)



Fonte: Dados da pesquisa

Outra justificativa para o triângulo ser retângulo foi pelo arco capaz, assim: “Pois, o ângulo sempre será a metade do arco AB ” (901D, 1001B). Eles também observaram que é possível inscrever um triângulo retângulo numa semicircunferência, pois “Como a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo, e ele está inscrito, logo a sua hipotenusa será igual ao diâmetro” (1001B).

O ponto de vista matemático necessário para os estudantes (901E, 901F) resolver a atividade foi realizado a partir da soma dos ângulos internos dos dois triângulos isósceles (AOC e COB), em que aplicaram a propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles e formaram um sistema, concluindo que o triângulo é retângulo em C . Esses estudantes também resolveram a atividade pelo arco capaz AB .

O ponto de vista cognitivo

Os estudantes (901D, 1001B) para justificar que todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo realizaram tratamentos figurais no triângulo ABC (Fig. acima), decompondo-o em dois triângulos o ACO e o COB , identificando os ângulos por α , β e x . Após, realizaram uma conversão para o registro algébrico concluindo que o ângulo C é reto. A explicação foi realizada em língua natural, assim:

(1001B): A gente pegou um triângulo qualquer inscrito numa semicircunferência, tal que aqui seja o diâmetro (AB). Aqui é um ângulo C qualquer e o alfa e o beta também. Daí a gente pensou em traçar uma mediana relativa a esse lado aqui (AB), aí a gente concluiu que aqui vai ser

o raio (OC), aqui vai ser o raio (OB) e aqui também vai ser o raio (OA). Então dessa parte CO e da parte AO a gente vai ter raio e raio. Então esse ângulo aqui vai ser igual a esse ângulo aqui porque forma um triângulo isósceles ($O\hat{A}C = O\hat{C}A = \alpha$). E aqui, a parte CO com a parte OB a gente vai formar dois lados baseados no raio que vai ser outro isósceles, e aqui vai ser beta e beta ($O\hat{C}B = O\hat{B}C = \beta$). Com isso, a gente meio que desmembrou o ângulo C em alfa e beta. Daí, a gente pegou dois alfa mais dois beta que vai dar cento e oitenta graus⁷¹. Posso comentar mais uma coisa?

P: Pode!

(1001B): A gente chegou à conclusão de um teorema bem conhecido que é o teorema do ângulo externo. Que a soma desses dois ângulos aqui vai ser igual a esse ângulo aqui ($O\hat{A}C + A\hat{C}O = 2\alpha = C\hat{O}B$). Então daria para mostrar pelo teorema do ângulo externo também que alfa mais beta é noventa graus, se a gente fosse somar dois alfa mais dois beta, daí a gente veria aqui que alfa mais beta é igual a noventa ($A\hat{O}C + C\hat{O}B = 180^\circ \rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$).

Os tratamentos realizados no registro figural e algébrico e as conversões realizadas, identificando o triângulo nessas representações, concerne ao gesto intelectual. Para Duval (2018, p.9) o gesto intelectual precede a toda resolução de problema, pois “[...] para começar a procurar a solução é preciso de imediato converter as representações iniciais dos dados do problema apresentado em um registro, em representações de um outro registro e, com isso, poder trabalhar e avançar à solução do problema”.

Sob o ponto de vista cognitivo observamos que as estudantes (801G, 801I), a partir da solução do primeiro item da atividade, realizada por meio da apreensão perceptiva, conseguiram elaborar um passo a passo de como inscrever um triângulo retângulo numa semicircunferência. Assim:

0 – Nós sabemos que do ponto O até qualquer outro ponto qualquer dá a medida do raio.

1 – Descubra a medida da hipotenusa que é o mesmo que o diâmetro.

2 – Divida a medida do diâmetro por 2 para dar o raio, assim vamos fazer um ponto O na metade da hipotenusa.

3- Vamos utilizar o compasso para fazer a circunferência.

4 – Ligando uma ponta do compasso no ponto O e outro no ponto C, irá fazer a circunferência, já que no triângulo retângulo o ponto C sempre tem o mesmo ângulo.

OBS: Independente do ponto, do ponto O a qualquer ponto sempre vai ser o raio.

No entanto, nas conversões realizadas para o registro figural elas conseguiram identificar somente o triângulo isósceles “*Todos são inscritos e os ângulos sempre são*

⁷¹ (I) $O\hat{A}C + A\hat{C}O + C\hat{O}A = 180^\circ \rightarrow 2\alpha + C\hat{O}A = 180^\circ$. (II) $B\hat{O}C + O\hat{C}B + C\hat{B}O = 180^\circ \rightarrow 2\beta + B\hat{O}C = 180^\circ$. Somando (I) e (II) temos que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

45°, 45° e 90° independente do tamanho da aresta, mas apenas no triângulo retângulo”.

Não identificando os casos em que OC não fosse perpendicular à AB.

Assim, observamos que essas discentes tiveram dificuldades em realizar a conversão do registro em língua natural para o figural, pois no enunciado do item 3) o triângulo ABC é qualquer, não sendo um caso particular. Isso contribuiu para que não avançassem nos raciocínios, não solucionando a atividade. Esse entrave ocorreu porque não conseguiram articular as propriedades às unidades figurais ao representar o triângulo ABC na semicircunferência. Por exemplo: não conseguiram identificar o arco capaz na representação figural.

Considerações

Analizando os registros: figural, língua natural e algébrico que os estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) mobilizaram, os tratamentos e as conversões, observamos que conseguiram identificar o objeto matemático nessas representações. Comparando os protocolos verificamos que a representação gráfica do triângulo ABC inscrito em uma semicircunferência deles foi feita sem usar régua e compasso e a validação foi realizada por esses registros. Isso evidencia o reconhecimento e a correspondência entre as unidades discursivas no enunciado da atividade às unidades figurais (circunferência, diâmetro, raio, triângulo isósceles, arco AB, centro O e segmentos).

Para Duval (2018) o ponto de vista cognitivo corresponde na identificação do mesmo objeto matemático em representações distintas, nos dois sentidos da conversão, o de ida e o de volta. Para esse autor (p.25) “O reconhecimento espontâneo de um mesmo objeto em representações distintas é o primeiro umbral a ser superado para que o aluno não se sinta perdido em uma atividade de sala de aula”.

No protocolo das estudantes (801G, 801I) observamos que reconheciam o triângulo retângulo somente na representação em que OC é perpendicular à AB. No *GeoGebra* elas representaram o triângulo variando o vértice C, questionadas se esse ângulo seria reto, responderam mobilizando a apreensão perceptiva “*Eu acho que não*”. Para validar esse raciocínio mediram esse ângulo usando a ferramenta “ângulo”, verificando o ângulo reto. Com isso observamos que essas discentes não conseguiram identificar o triângulo retângulo nos tratamentos figurais distintos realizados no registro figural, em que essa dificuldade ocorreu intra-registro e não inter-registros.

Constatamos que esse não reconhecimento do triângulo retângulo em representações distintas dependeu das propriedades geométricas necessárias para a

resolução que não foram mobilizadas e da visualização das unidades figurais de dimensões menores que não foram realizadas, como por exemplo o raio da circunferência e o arco AB.

7.3.2 As apreensões

A apreensão perceptiva nessa atividade é necessária para identificar o triângulo inscrito na semicircunferência, o ângulo reto, a circunferência, o raio e o diâmetro da circunferência. A apreensão discursiva é requerida para a definição de triângulo retângulo, de triângulo isósceles e de circunferência; para a propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e para o arco capaz. A apreensão operatória é necessária para decompor o triângulo ABC em dois triângulos isósceles.

B1: Perceptiva, discursiva, sequencial e operatória

A apreensão perceptiva

Foi requerida para os estudantes (901D, 1001B), (801B, 801F) e (801I, 801G) responderem à medida do ângulo C de um triângulo ABC inscrito numa semicircunferência, em que consideraram OC perpendicular ao diâmetro.

Nessa representação do triângulo ABC na semicircunferência, em que OC é bissetriz, mediana e altura observamos a apreensão gestáltica por meio da lei pregnância da forma. Os estudantes desenharam uma figura que visualmente é retângulo em C, com AC e BC congruentes e OC perpendicular à AB.

A apreensão perceptiva foi mobilizada pelos estudantes (901D, 1001B) para identificar os triângulos isósceles, o triângulo retângulo, o ângulo reto, o centro O da circunferência, o raio da circunferência, a mediana de AB, o arco capaz AB, o ponto médio de AB, o triângulo inscrito numa semicircunferência e a hipotenusa do triângulo retângulo.

A apreensão discursiva

Os estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) usaram essa apreensão para a propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, para a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e para o arco capaz AB.

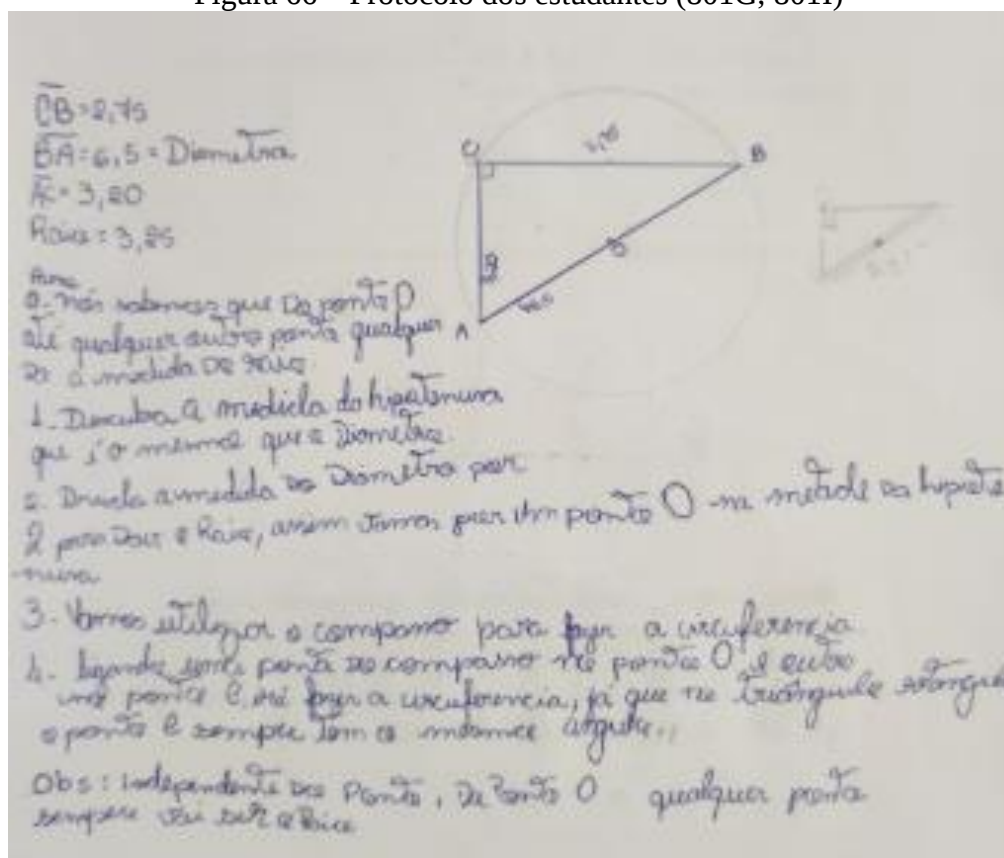
Observamos que essa apreensão poderia ser mobilizada pelas discentes (801G, 801I) ao questionar a pesquisadora assim: “a gente pode usar conhecimentos, propriedades, que a gente já conhece? Porque bimestre atrasado a gente aprendeu que todo triângulo retângulo cabe numa circunferência, mas ...”. Entretanto, a estudante não conseguiu mobilizar essa apreensão e consequentemente não elaborou uma solução para a atividade, “Então ... Essa foi a minha dificuldade! Na minha cabeça faz sentido, mas eu não tenho certeza se está certo!”.

A apreensão sequencial

Foi necessária para os estudantes (901D,1001B) explicar: como se inscreve um triângulo retângulo numa semicircunferência.

Essa apreensão foi necessária na descrição de como as discentes (801G, 801I) inscreveram o triângulo retângulo na semicircunferência. Observe:

Figura 66 – Protocolo dos estudantes (801G, 801I)



Fonte: Dados da pesquisa

No protocolo acima as estudantes descrevem os passos realizados, assim:

Passos:

0 – Nós sabemos que do ponto O até qualquer outro ponto qualquer dá a medida do raio.

1 – Descubra a medida da hipotenusa que é o mesmo que o diâmetro.

2 – Divida a medida do diâmetro por 2 para dar o raio, assim vamos fazer um ponto O na metade da hipotenusa.

3- Vamos utilizar o compasso para fazer a circunferência.

4 – Ligando uma ponta do compasso no ponto O e outro no ponto C, irá fazer a circunferência, já que no triângulo retângulo o ponto C sempre tem o mesmo ângulo.

OBS: Independente do ponto, do ponto O a qualquer ponto sempre vai ser o raio.

A apreensão operatória

Essa apreensão foi mobilizada pelos estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) por meio de duas divisões mereológica estritamente homogênea no triângulo ABC, uma consistiu em decompor o triângulo ABC em dois triângulos isósceles (AOC e BOC) e a outra foi decompor o ângulo C como a soma de dois ângulos ($\widehat{ACB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB}$).

B2: Congruência semântica

O enunciado desta atividade é congruente com a apreensão perceptiva, assim a solução mais evidente é a do triângulo isósceles inscrito na semicircunferência, em que OC é perpendicular à AB. No entanto, essa é uma solução particular e por ser validada pela apreensão perceptiva e pela visualização icônica. A resolução da atividade, no caso em que OC não é perpendicular à AB, requer a apreensão discursiva e a apreensão operatória. Como o enunciado e a apreensão operatória são incongruentes semânticas o discurso se torna necessário.

Considerações:

Pelo fato de o enunciado dessa atividade ser semanticamente congruente com a apreensão perceptiva o triângulo retângulo isósceles foi o mais representado na semicircunferência e a apreensão discursiva não foi necessária. Sendo essa apreensão necessária para a não congruência semântica entre o enunciado da atividade a apreensão operatória. Nos protocolos analisados observamos a não congruência semântica no registro figural quando as discentes reconheceram o ângulo reto em C somente nos casos em que OC era perpendicular à AB. Isso contribuiu para que não realizassem a exploração heurística na figura.

Comparando os protocolos analisados observamos que para os estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) os tratamentos figurais realizados foram congruentes,

enquanto para as discentes (801G, 801I) essas operações foram incongruentes semanticamente. Essa diferença ocorreu por conta dos conhecimentos geométricos desses discentes.

7.3.3 A visualização icônica e a visualização não icônica

A visualização icônica é necessária para identificar os triângulos e a circunferência e, a visualização não icônica para visualizar: os raios da circunferência, os ângulos dos triângulos, o diâmetro da circunferência, os vértices do triângulo e para o arco capaz.

A visualização não icônica é necessária para reconhecer as propriedades geométricas necessárias para a resolução.

C1: O olhar botanista e o olhar agrimensor

O olhar botanista

Foi mobilizado pelos estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) para identificar: a circunferência, o triângulo inscrito na semicircunferência, o triângulo retângulo, o triângulo isósceles e o arco capaz. Para as discentes (801G, 801I) essa apreensão foi necessária para identificar a circunferência e o triângulo isósceles ABC.

O olhar agrimensor

Esse olhar foi mobilizado pelas estudantes (801G, 801I) quando construíram um triângulo isósceles inscrito numa semicircunferência no *GeoGebra* e após, representaram essa figura no papel.

C2: O olhar construtor e o olhar inventor

O olhar construtor

Apesar de alguns estudantes utilizarem o *Geogebra* observamos que o olhar construtor não foi usado, pois na construção do triângulo inscrito numa semicircunferência não consideraram as dimensões menores e a apreensão sequencial não foi mobilizada para ordenar as operações figurais por meio das propriedades geométricas.

O olhar inventor

Os estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) mobilizaram esse olhar para adicionar o traço OC no triângulo ABC. Acompanhe a justificativa dos procedimentos por meio da apreensão discursiva:

(1001B): *Tem dois jeitos de provar que esse ângulo C vai ser noventa graus. A primeira é quando a gente observar esse arco de cento e oitenta graus e a gente perceber aqui ó (o ângulo C) ... que essa medida aqui vai ser sempre a metade desse arco, independentemente de onde for inserido. A outra forma da gente provar é traçando o ponto médio, uma bissetriz (OC). Aí bem nessa base vai ter noventa graus (OC perpendicular a AB).*

P: *Por que vai ter noventa graus?*

(1001B): *Porque ele é perpendicular! Se a gente continuar traçando vai virar uma mediatriz. A partir do ponto que a gente traça aqui, a gente vai ter um ângulo aqui e outro ângulo aqui ($\widehat{ACO}$ e $\widehat{OCB}$). Ele vai traçar uma bissetriz (o segmento OC). Aí aqui vai formar a bissetriz de um ângulo de noventa graus que a gente já havia afirmado (pelo arco capaz AB). Daí aqui vai ser quarenta e cinco graus ($\widehat{ACO}$). Aí noventa mais quarenta e cinco vai dar cento e trinta e cinco! Cento e oitenta menos cento e trinta e cinco dá quarenta e cinco graus ($\widehat{OAC}$). Aí aqui também dá quarenta e cinco graus ($\widehat{OBC}$).*

P: *Você acha que o segmento CO será sempre perpendicular ao diâmetro? Mesmo ele estando em qualquer lugar da semicircunferência?*

(1001B): *Eu acho que como ele é inscrito e ele é o diâmetro sim!*

P: *E se o C estiver aqui (mais perto do ponto B na semicircunferência)?*

(1001B): *Não.... Não!*

P: *Será que em qualquer lugar que estiver o vértice C nesta semicircunferência ele será reto?*

(901D): *Eu tive uma ideia aqui! Eu tenho uma ideia que aqui olha: quando a gente fez a mediatriz ali olha (OC), a gente consegue ver que ele virou o raio também, aí a gente vê que ele é isósceles.*

A partir desse raciocínio os discentes (901D, 1001B) conseguiram deduzir matematicamente que o ângulo C é reto e o teorema do ângulo externo de um triângulo.

Considerações

Nos protocolos analisados observados que a visualização icônica prevaleceu quando OC é perpendicular à AB. O ângulo reto em C foi validado pela apreensão perceptiva e pela lei gestáltica pregnância da forma, em que o triângulo ABC foi visualizado sendo isósceles e os ângulos da base medindo quarenta e cinco graus.

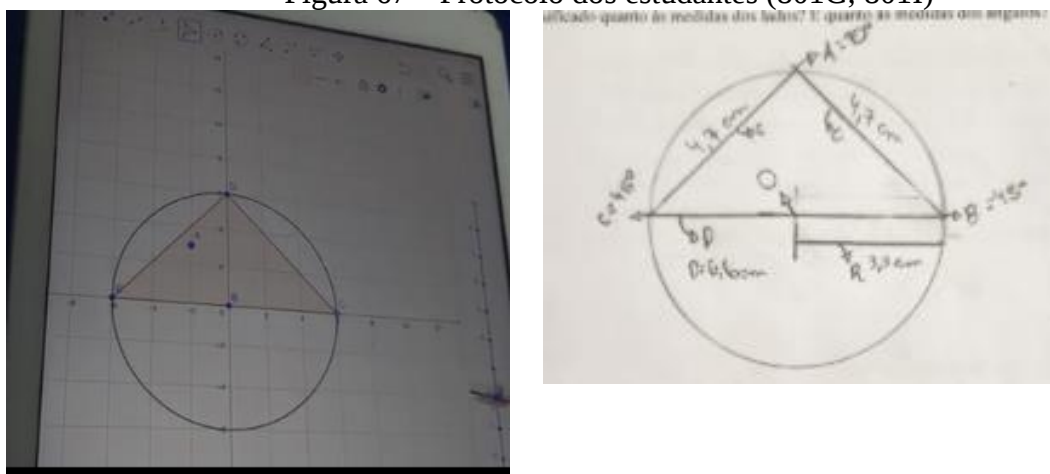
A visualização icônica foi desestabilizada quando o segmento OC não era perpendicular ao diâmetro AB. Os estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) adentraram a visualização não icônica quando articularam a desconstrução dimensional a apreensão discursiva. Os discentes (901D, 1001B) permaneceram nesse modo de ver e realizaram outra dedução matemática, a do teorema do ângulo externo. O questionamento da

pesquisadora para o vértice C contribuiu para desestabilizar o olhar icônico no estudante 1001B, nesse momento seu colega 901D visualizou no triângulo 2D os raios da circunferência (1D) e os triângulos isósceles. Essa percepção articulada a apreensão discursiva foi a que fez com que deduzissem matematicamente o ângulo reto em C.

Observamos a visualização não icônica nos estudantes (901D, 1001B, 901E, 901F) quando representarem uma circunferência com triângulos inscritos na semicircunferência a mão livre, pois a informação visual não foi uma característica importante para a resolução da atividade. A figura passou a ser vista por suas unidades figurais: raio, diâmetro, vértices, ângulos, centro da circunferência e segmentos.

Nos protocolos das discentes (801G, 801I) observamos que o triângulo inscrito numa semicircunferência foi validado pelo olhar icônico no *GeoGebra* e na folha. Assim:

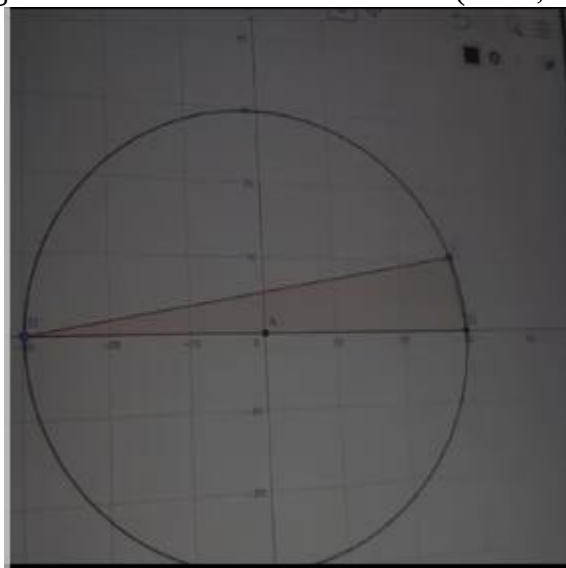
Figura 67 – Protocolo dos estudantes (801G, 801I)



Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, observamos que a visualização icônica foi desestabilizada quando inscreveram o triângulo abaixo na semicircunferência. Acompanhe:

Figura 68 – Protocolo dos estudantes (801G,801I)



Fonte: Dados da pesquisa

P: Esse triângulo vai ser retângulo?

(801I): Eu acho que não!

P: Justifica!

(801I): Professora! É noventa! (Utilizou a ferramenta ângulo do Geogebra).

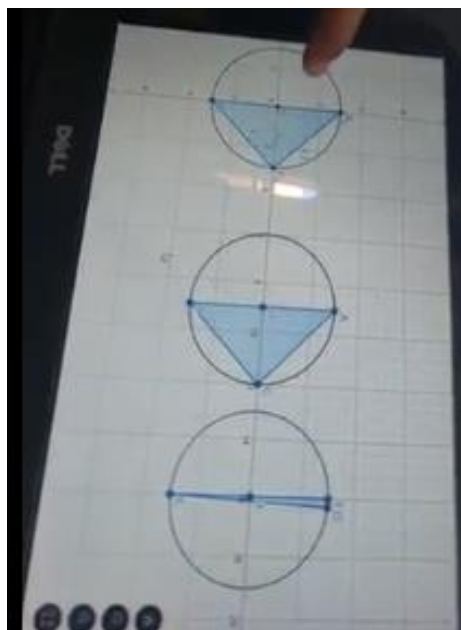
P: E como você justificar isso?

(801I): Meu Deus! Eu não sei.

Observamos nesse protocolo que a desestabilização da visualização icônica sem mobilizarem a apreensão discursiva fez com que essas discentes não conseguissem adentrar a visualização não icônica. A representação no *GeoGebra* de triângulos distintos na semicircunferência, medindo seus ângulos, contribuiu para que o olhar das estudantes (801G, 801I) evoluísse do icônico ao não icônico, mas como não conseguiram mobilizar a apreensão discursiva não permaneceram nesse olhar.

Os estudantes (901E, 901F) evoluíram da visualização icônica à visualização não icônica quando fizeram variar o vértice C do triângulo no *Geogebra*. Assim:

Figura 69 – Protocolo dos estudantes (901E, 901F)



Fonte: Dados da pesquisa

(901E): O ângulo C em todos esses casos sempre vai ser um ângulo de 90° .

P: Por que? Como você justifica isso?

(901E): Em todos esses casos aqui, até nesse caso em que o A e o B ficaram bem fininhos, a soma deles sempre vai ser 90° . Porque a gente pode usar a medida desse ângulo aqui (O arco capaz de 180°)!

7.3.4 As desconstruções e a heurística

A desconstrução realizada para responder a atividade é a: $2D \rightarrow 0D \rightarrow 1D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$. No triângulo ABC, visualiza os pontos (O e C), traça o segmento OC, decompondo o triângulo ABC em dois triângulos (AOC e BOC).

Observamos que a heurística nessa atividade pode atuar de dois modos distintos, adicionando no triângulo ABC, inscrito na semicircunferência, o raio da circunferência OC ou observando que $med(\widehat{ACB}) = \frac{med(\widehat{AB})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Para isso, deve-se observar que a medida do arco AB corresponde a uma semicircunferência e que o ângulo C por ser inscrito na circunferência é a metade da medida desse arco.

D1: Dimensional, instrumental e a exploração heurística

A desconstrução dimensional

A desconstrução dimensional que os discentes (901D, 1001B, 901E, 901F) realizaram foi a: $2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$. No triângulo ABC inscrito numa semicircunferência visualizaram o ângulo C, traçaram o segmento OC observando

os lados congruentes dos triângulos isósceles, após representaram os ângulos da base congruentes por alfa e beta. Essa desconstrução dimensional e a interpretação discursiva contribuiu para que visualizassem esse conjunto de unidades figurais relacionadas por meio de propriedades, em que o discurso foi a principal representação do objeto matemático. Observe que uma das desconstruções realizada acima foi ir do adimensional para o unidimensional e para o bidimensional. Para Duval essa passagem das dimensões menores para as maiores é específica da matemática e requer treinamento.

Para usar o arco capaz a desconstrução realizada por esses discentes foi a: $1D \rightarrow 2D \rightarrow 1D \rightarrow 2D$. Na circunferência visualizaram o triângulo ABC inscrito na semicircunferência, observando que a medida do arco AB corresponde a um ângulo raso e que C é um ângulo inscrito na circunferência.

Observamos que as estudantes (901G, 801I) permaneceram no 2D, visualizando somente o triângulo, sem realizar uma desconstrução dimensional. Isso contribuiu para não evidenciar as propriedades necessárias para a resolução da atividade. Sobre isso Duval (2023, p18) destaca que “[...] uma só unidade figural não pode tornar visível uma propriedade ou um objeto geométrico”, pois a mobilização e a compreensão das propriedades geométricas requerem a desconstrução dimensional.

A desconstrução instrumental

A desconstrução instrumental na visualização icônica

Foi realizada pelos estudantes (801G,801I) no *GeoGebra* ao representaram o triângulo inscrito na semicircunferência utilizando as ferramentas “Circulo: Centro & Raio” e “Polígono”, medindo os ângulos e os lados com “Ângulo” e “Distância, Comprimento ou Perímetro”. Sendo essas medidas suficientes para validar a atividade.

A desconstrução instrumental na visualização não icônica

Não foi mobilizada.

A heurística

A heurística usada pelos estudantes (901D,1001B,901E,901F) foi decompor o triângulo ABC em outros dois triângulos, observando os raios da circunferência.

Considerações

Os estudantes (901D, 1001B) resolveram a atividade sem realizar a desconstrução instrumental na visualização não icônica. A justificativa ocorreu articulando a apreensão operatória a apreensão discursiva na visualização não icônica.

Como a apreensão discursiva não foi mobilizada pelas estudantes (801G, 801I) a desconstrução dimensional não foi realizada. Isso vai ao encontro da afirmação de Mithalal (2010) que a desconstrução dimensional é um processo discursivo que descreve as unidades figurais em que a coerência sobre os objetos geométricos se baseia nas propriedades matemáticas.

7.3.5 Análise do discurso por meio das funções discursivas

A função referencial é mobilizada do enunciado dessa atividade ao designar: triângulo, centro da circunferência, diâmetro, respectivamente assim: ABC , O , $\overline{AB}$. A função apofântica ao afirmar que o triângulo ABC é inscrito numa semicircunferência.

E1: Função referencial, apofântica e de expansão discursiva

A função referencial

Os estudantes (901D, 1001B) mobilizaram essa função para designar: os vértices do triângulo (A , B e C); o centro da circunferência (O); os ângulos por α e β ; o ângulo $\widehat{AOC}$ por x , os lados do triângulo retângulo e a sua hipotenusa. Os discentes (801G, 801I) designaram os vértices dos triângulos por A , B e C . Essa função foi necessária para as discentes (801G, 801I) designarem: os vértices (A , B e C); os ângulos ($\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$); a medida: dos lados do triângulo isósceles, do diâmetro da circunferência e do raio e a dos ângulos do triângulo.

Essa função foi necessária para os estudantes (901E, 901F) designarem: o triângulo ABC , os ângulos e o arco capaz.

A função apofântica

Foi mobilizada pelos discentes (901D, 1001B, 901E, 901F) para justificar que os lados OA , OC e OB são congruentes, pois são raios da semicircunferência; para visualizar o arco capaz AB e para traçar a bissetriz OC .

A função de expansão discursiva

No protocolo dos estudantes (901D, 1001B) observamos inicialmente duas expansões discursivas, uma quando identificaram os triângulos isósceles e, outra quando mobilizaram a propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles. A terceira expansão discursiva foi realizada quando deduziram matematicamente o teorema do ângulo externo, mostrando algebricamente que o ângulo externo do triângulo AOC, o ângulo $C\hat{O}B$, é igual à soma dos ângulos não adjacentes a ele, os ângulos $O\hat{A}C$ e $O\hat{C}A$. Essa função também foi necessária para os discentes usarem para observar que a hipotenusa do triângulo retângulo “[...] será igual ao diâmetro [...]” da circunferência (1001B).

Esses estudantes ao identificarem o arco capaz AB a função de expansão discursiva foi necessária para justificar que o ângulo C inscrito na semicircunferência é a metade da medida do arco capaz AB. A partir da bissetriz OC essa função também foi mobilizada pela soma dos ângulos internos de um triângulo para calcular as medidas dos ângulos da base dos triângulos isósceles. A partir desses ângulos ocorreu outra expansão discursiva para justificar que a reta que passa por OC é a mediatriz do diâmetro da semicircunferência fosse realizada, sendo a validação feita pelo olhar icônico e pela apreensão perceptiva.

A função de expansão discursiva contribuiu para que os estudantes (901D, 1001B) progredissem em seus discursos, percebendo nos tratamentos algébricos uma aplicação do teorema do ângulo externo, o deduzindo matematicamente. Dionizio, Brandt e Moretti (2014) pontuam que nessa função essa evolução ocorre por meio de frases se que conectam e que determinam gradativamente os objetos.

8 Considerações finais e perspectivas

Esta investigação teve como pergunta norteadora: *Como a articulação da visualização com o discurso matemático, mobilizados em atividades matemáticas variando os registros, pode contribuir com a aprendizagem em geometria nos anos finais do Ensino Fundamental e anos iniciais do Ensino Médio?* Para obter a resposta, usamos como aporte teórico a Teoria dos registros de representações semióticas e seus elementos, apreensões e olhares para a aprendizagem de geometria, associada a uma pesquisa qualitativa.

Para Duval (2005) existe dois modos de ver uma figura: o icônico e o não icônico, os quais dependem da atividade na qual a figura está inserida. Sendo assim, elaboramos atividades objetivando desestabilizar o olhar icônico adentrando o olhar não icônico. Por esse motivo, não temos nesse estudo uma sequência de atividades.

Baseados nos estudos de: Duval, Balacheff e de Mithalal elaboramos atividades com a finalidade de desestabilizar o olhar icônico, buscando restringir as informações visuais, fazendo variar a figura, de modo a articular a visualização com o discurso para a aprendizagem em geometria.

Neste trabalho, considerando nossos objetivos, o estabelecimento das categorias de análises foi realizado para as atividades para uma melhor compreensão dos elementos teóricos. No entanto, as apreensões, os olhares, as desconstruções e as funções discursivas não aparecem de modo isolado nas atividades. Dependendo da atividade uma pode ser mais solicitada que as demais, relacionando-as entre si.

Analisando os protocolos observamos que quando a apreensão perceptiva se sobressaiu na resolução da atividade a apreensão discursiva não se fazia necessária, não sendo mobilizada. Na apreensão discursiva o conhecimento das propriedades geométricas não foi suficiente para sua mobilização. Observamos que para ocorrer o discurso as unidades figurais deveriam ser visualizadas, usando as funções discursivas, destacando-se a função de expansão discursiva.

Na apreensão perceptiva as leis gestálticas: pregnância da forma e fechamento ao prevalecer nas figuras fizeram a apreensão discursiva não ser mobilizada. A lei do fechamento induziu os estudantes a identificarem, por meio da apreensão operatória, erroneamente o triângulo IJK sendo a decomposição de três triângulos retângulos. A lei pregnância da forma fez com que a maior parte dos estudantes considerassem somente o triângulo retângulo isósceles inscrito na semicircunferência. Isso bloqueou a articulação cognitiva de outros triângulos inscritos na semicircunferência. A lei

pregnância da forma no cubo fez com que alguns estudantes considerassem a face do cubo como a secção plana.

Os estudantes ao continuarem mobilizando a apreensão discursiva por meio da função de expansão discursiva, no olhar não icônico, conseguiram tirar outras conclusões, como a congruência dos triângulos obtidos por meio da divisão mereológica no losango e a dedução matemática do teorema do ângulo externo. Nessa ação, constatamos que as deduções foram realizadas quando as informações visuais não garantiam a solução da atividade, sendo realizadas na visualização não icônica

Para o quadrado construído por dobraduras, observamos que a apreensão operatória, no olhar icônico, comandada pela apreensão perceptiva, não mobilizou a apreensão discursiva. Entretanto, no triângulo inscrito na semicircunferência, a apreensão operatória, na visualização não icônica, foi validada pela apreensão discursiva.

O triângulo inscrito na semicircunferência desempenhou seu papel heurístico por meio da apreensão discursiva e da função de expansão discursiva, que mobilizaram na apreensão operatória e no olhar inventor. Essa articulação permitiu que os estudantes vissem os raios da circunferência e os triângulos isósceles. Sendo necessário o olhar inventor e a função de expansão discursiva para a dedução do teorema do ângulo externo.

A exploração heurística no losango, por meio das propriedades de suas diagonais, contribuiu para a visualização de outra propriedade, que suas diagonais coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos. Nas secções planas realizadas no cubo a heurística consistiu em determinar os vértices dos polígonos.

A congruência semântica entre o quadrado, a apreensão operatória e os tratamentos figurais fez com que a maior parte dos estudantes não mobilizassem o discurso, enquanto a incongruência semântica entre o losango e a apreensão operatória foi minimizada pela apreensão discursiva.

Para a atividade do triângulo inscrito na semicircunferência, observamos que a incongruência semântica entre enunciado e figura e entre figura e apreensão operatória foi minimizada pela apreensão discursiva. Os estudantes que não conseguiram contornar esse fenômeno foram os que não mobilizaram o discurso, o olhar inventor e a apreensão operatória. Assim, a figura não exerceu seu papel heurístico. Constatamos nessa atividade a congruência semântica entre enunciado, figura, apreensão operatório e olhar

inventor, quando o discurso comandou as demais operações e a incongruência semântica quando não usaram a apreensão discursiva.

Observamos nas secções planas realizadas no cubo que para um mesmo grupo de estudantes o grau de congruência semântica variando entre as figuras, a apreensão operatória e a apreensão discursiva. Para algumas secções, realizaram as operações semióticas de tratamento e de conversão corretamente, enquanto para outras não. A maior distância cognitiva ocorreu para o pentágono, atividade na qual nenhum discente conseguiu solucionar a atividade. A congruência semântica entre o cubo e a apreensão perceptiva, influenciada pela lei pregnância da forma, conduziu a soluções errôneas, na qual visualizaram a face do cubo como uma secção plana. Em outros protocolos observamos que essa congruência que induz a um erro foi contornada quando a apreensão operatória e o olhar inventor foram comandados pela apreensão discursiva.

Diante disso, inferimos que a congruência semântica entre enunciado e apreensão perceptiva ou entre enunciado e figura pode não mobilizar a apreensão discursiva, enquanto que essa apreensão se torna necessária para os casos de incongruência semântica, entre enunciado e figura ou entre enunciado e apreensão operatória.

De acordo com os resultados obtidos observamos que muitas das dificuldades dos estudantes ocorreram por conta da não congruência semântica entre enunciado e figura e entre figura e apreensão operatória. Assim, para a aprendizagem de geometria observamos que esse fenômeno deve ser considerado e que pode ser minimizado com a articulação da apreensão discursiva. Constatamos que as funções discursivas contribuíram significativamente para os discentes usarem a linguagem interna da matemática. Inferimos que essa apreensão e as funções discursivas foram mais mobilizadas devido a formação em grupos.

No protocolo de alguns estudantes, observamos que na secção plana realizada no cubo para obter o retângulo, houve congruência semântica envolvendo esse polígono, a apreensão operatória e a apreensão discursiva. Com isso, conseguiram realizar as operações semióticas de tratamento e de conversão, identificando essa figura em representações distintas.

Observamos que a secção plana realizada para os triângulos mobilizou a classificação dos triângulos de acordo com seus lados, mas essa constatação só pode ser vista por meio da apreensão discursiva, partindo do triângulo equilátero, do primeiro item da atividade. Isso nos permitiu inferir uma resposta para o questionamento de

Duval (2022, p.5) “[...] a maneira de ver de um tipo de atividade favorece a entrar em outras maneiras de ver necessárias a outros tipos de atividade?”, afirmando que sim, conforme os estudos de Mithalal (2011). O primeiro item dessa atividade, variando as figuras no *GeoGebra* e por meio de elástico no esqueleto do cubo, contribuiu para que a apreensão discursiva fosse mobilizada para validar as secções planas, visualizando as unidades figurais (lado do polígono, aresta do cubo, ponto médio do cubo, diagonal do cubo, diagonal do losango, vértice do cubo, vértice dos polígonos e os polígonos) fazendo emergir a desconstrução dimensional.

Assim, constatamos que além de considerar a articulação da visualização com o discurso, variando as representações, a congruência semântica deve ser considerada, pois esse fenômeno colaborou para que compreendêssemos algumas dificuldades que os estudantes tiveram ao realizar as operações semióticas de tratamento e de conversão, não identificando o mesmo objeto matemático em registros diferentes. Observando os resultados obtidos concordamos com Moretti, Brandt e Almouloud (2022b, p.94) que “O fenômeno da congruência semântica pode explicar algumas das incompreensões, as fragilidades, os erros, e levar o professor a prática educativa com foco nas rupturas que se fizerem necessárias. ”

Na visualização icônica o reconhecimento da figura foi centrado na superfície da figura. Em alguns casos a visualização icônica pode ser desestabilizada, adentrando no modo não icônico de ver as figuras, no entanto, alguns estudantes quando não conseguiram sustentar suas argumentações, verbalmente apresentadas, não permaneceram nesse olhar e validaram sua resposta no olhar icônico. Os discentes que permaneceram no olhar não icônico, mobilizando a apreensão discursiva e a função de expansão discursiva, conseguiram realizar outras conclusões, como: os casos de congruência nos triângulos obtidos na decomposição do losango, as infinitas secções planas que podem ser realizadas para obter o quadrado e as diagonais desse polígono que coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos.

Em outros casos verificamos que a evolução do olhar icônico para o olhar não icônico foi realizada a partir do questionamento da pesquisadora. Por exemplo, a indagação sobre o ângulo da altura respectiva a um dos lados do triângulo mobilizou a apreensão discursiva, que, ao comandar a apreensão operatória e o olhar inventor, permitiu identificar corretamente uma das alturas do triângulo equilátero por meio da propriedade que a altura é mediana e bissetriz. Com isso, observamos a transição da visualização icônica para a visualização não icônica.

A passagem do olhar icônico para o não icônico para alguns estudantes dependeu de fazer variar a figura em representações figurais distintas, em que o discurso foi mobilizado para justificar a visualização. Entretanto, para outros discentes essa passagem foi realizada somente em representações gráficas das figuras, sendo asseguradas pela apreensão discursiva e pelas funções discursivas realizadas.

Diante disso, inferimos que as funções discursivas devem ser consideradas na elaboração e na resolução de atividade. Observamos que a função de expansão discursiva foi primordial para a compreensão de conceitos matemáticos, como os ângulos da base de um triângulo isósceles, e, para a realização de deduções em sala de aula, como a do ângulo externo. Constatamos que essa função pode promover as relações entre definições, propriedades e teoremas, que na geometria, muitas das vezes, não aparecem explicitamente nos enunciados.

Nos protocolos analisados constatamos dois tipos de desconstrução dimensional: uma na visualização icônica e a outra na visualização não icônica. A desconstrução dimensional, no olhar icônico, é realizada em um único sentido, a partir de um “passo a passo” para construir uma figura, em um processo de descrição. Assim, a figura não é vista a partir de suas unidades figurais. Enquanto que, a desconstrução dimensional, na visualização não icônica, é realizada nos dois sentidos, pois mobiliza o olhar inventor e a apreensão discursiva e requer o uso de propriedades e relações geométricas, na qual a principal representação do objeto matemático ocorre pelo discurso.

Para uma mesma dupla de estudantes observamos duas desconstruções dimensionais, uma no olhar icônico⁷² e a outra no olhar não icônico⁷³. Diante disso, observando os protocolos, inferimos que a desconstrução dimensional na visualização não icônica mobiliza necessariamente a apreensão discursiva. Visto que, a desconstrução por si só não garante a entrada no modo não icônico de visualizar uma figura. Isso depende da fecundidade desse processo com o discurso geométrico. A desconstrução dimensional na visualização não icônica pode ser observada na construção do losango por meio de dobraduras, em que a apreensão discursiva serviu para apontar as propriedades necessárias para interpretar e antecipar o resultado das dobraduras e identificar o objeto. Com isso, constatamos que a desconstrução dimensional pode emergir da visualização icônica.

⁷² Estudante do nono ano.

⁷³ Estudante do oitavo ano.

Observamos as desconstruções instrumentais no *GeoGebra* para inscrever o retângulo na semicircunferência e para seccionar o cubo, ambas foram realizadas na visualização icônica, pois a validação ocorreu medindo seus lados e seus ângulos e não por meio de propriedades. A apreensão perceptiva que comandou os passos para construir as figuras e não as propriedades geométricas. Diante dos resultados, inferimos que a evolução da desconstrução instrumental no olhar icônico para a desconstrução instrumental no olhar não icônico pode ocorrer se os estudantes tiverem conhecimentos sobre construções geométricas com régua e compasso.

Na desconstrução instrumental na visualização icônica observamos divisões mereológicas 3D, pois tanto a figura inicial quanto as obtidas por meio da secção plana possuem a mesma dimensão, são todas tridimensionais. Duval (2022, p.19) esclarece que a divisão mereológica consiste em decompor uma figura “[...] em unidades figurais com o mesmo número de dimensões que a figura de partida”.

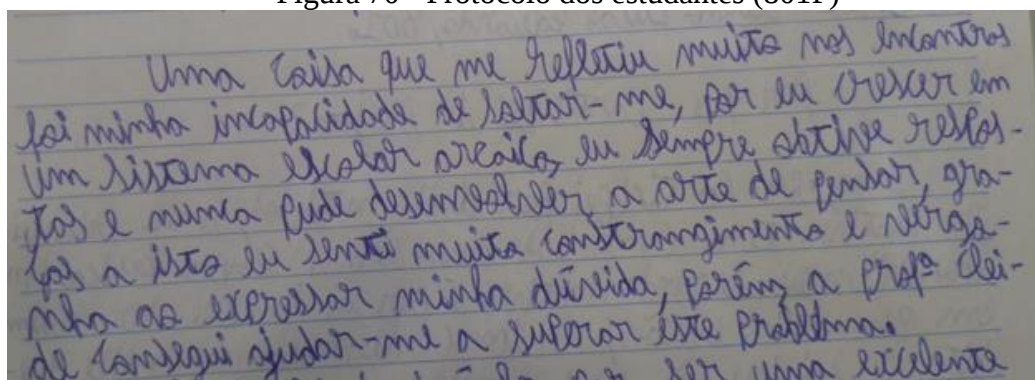
Nas atividades mobilizadas buscando desestabilizar o olhar icônico, adentrando no olhar não icônico e nos resultados obtidos, observamos que não basta somente propor atividades visando a desconstrução dimensional das formas para entrar nesse modo de ver, mas deve-se também considerar como a apreensão discursiva pode ser articulada com esta visualização.

Observando os resultados obtidos nesta pesquisa, consideramos que há elementos para futuras investigações, dentre os quais apontamos os seguintes:

- Sobre as representações figurais icônicas e não icônicas em livros didáticos.
- De como contornar o não reconhecimento das unidades discursivas e figurais para a aprendizagem em geometria.
- Sobre a mobilização da apreensão discursiva em figuras icônicas e não icônicas.
- Voltado a não congruência semântica entre figura e apreensão operatória.
- Sobre possibilidades de contornar a dificuldade da conversão em matemática por conta da não congruência semântica entre enunciado e figura.

Diante dos resultados obtidos concluímos que perguntas podem potencializar a transição da visualização icônica para a visualização não icônica. No entanto, pelo exposto abaixo, observamos que nem sempre os estudantes estão habituados a serem questionados.

Figura 70 - Protocolo dos estudantes (801F)



Uma coisa que me refletiu muito nos encontros foi minha incapacidade de soltar-me, por eu crescer em um sistema escolar arcaico, eu sempre obtive respostas e nunca pude desenvolver a arte de pensar, graças a isto eu senti muito constrangimento e vergonha ao expressar minha dúvida, porém a profª conseguiu ajudar-me a superar este problema.

Fonte: Dados da pesquisa

Uma coisa que me refletiu muito nos encontros foi minha incapacidade de soltar-me, por eu crescer em um sistema escolar arcaico, eu sempre obtive respostas e nunca pude desenvolver a arte de pensar, graças a isto eu senti muito constrangimento e vergonha ao expressar minha dúvida.

ERA UMA VEZ...

Como termina?

Essa estudante que tinha por diversão a leitura, os estudos e ir à escola, levou anos para perceber que sua dificuldade em geometria ocorria porque permanecia no modo icônico de ver uma figura.

Sua perfeição fez com que a apreensão perceptiva fosse a dominante.

Seus colegas não tinham o mesmo questionamento porque, conforme Moretti e Brandt (2015), a impressão inicial sobre uma figura é pessoal.

Pelo fato de a estudante permanecer no olhar botanista e agrimensor a figura não podia ser mudada. Mithalal (2010) pontua que na visualização icônica a figura é vista como uma forma estável e que não pode ser modificada.

Para Duval (2022, p.10), “a predominância dada a uma dessas quatro entradas, com o desconhecimento de articulação entre ver e dizer podem criar obstáculos que, a médio e longo prazo vão se revelar intransponíveis para o progresso dos alunos”. Duval (2005, p.9), pontua que cada modo de ver “induz um tipo particular e limitado de compreensão”. Para Duval, a predominância de um tipo de olhar pode contribuir para que os estudantes encontrem dificuldades em aprender conceitos geométricos”.

Realmente a *semiose* é indissociável na *noesis* (Duval, 2012a). Por isso a Teoria dos Registros de Representação Semiótica é semiocognitiva! Para a aprendizagem em geometria o lado visível da matemática (*semiose*) não pode ser considerado sem o lado oculto (*noesis*) da matemática. De fato, a apreensão ou produção de uma representação semiótica e a apreensão conceitual de um objeto matemático são inseparáveis.

“A ignorância da complexidade cognitiva implicada em toda abordagem da geometria, não é somente prejudicial para o ensino, ela é igualmente para as pesquisas sobre a aprendizagem da geometria” (Duval, 2022, p. 50).

De fato:

Um grande progresso será feito para o ensino da geometria, para lhe dar um lugar eminente na formação geral do indivíduo quando os conteúdos matemáticos forem analisados em relação à atividade cognitiva que lhes solicitam e que o desenvolvimento desta atividade se tornará um objetivo indissociável dos objetivos matemáticos (Duval, 2022, p. 50).

Um começo...

REFERÊNCIAS

- ALMOULOU, S. A.; MELLO, E. G. S. **Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos.** Disponível em <http://ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf> 23ª reunião anual da anped. 2000. Acesso em 20 de novembro de 2017.
- _____, S. A. et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**, 2004, p. 94-108. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>. Acesso em julho de 2015.
- _____, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- _____, S. A. **A geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje?** In ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. São Paulo: VII EPEM, 2004.
- ARINOS, C. R. M. (2018). **Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental** [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2018. Disponível em: <<https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/5448>> Acesso em fev. de 2023.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In Brun, Jean (Org). Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.
- BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Coleção Explorando o Ensino de Matemática. **Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação básica**, 2010.
- BITTAR, M. **Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática**. In: Rosinalda Aurora de Melo Teles; Rute Elisabete de Souza Rosa Borba; Carlos Eduardo Ferreira Monteiro. (Org.). Investigações em didática da matemática. 1ed. Recife: UFPE, 2017, v. 1, p. 101-132.
- BOGDAN, R., & BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 28 de mar de 2023.
- BRANDT, C. F; MORETTI, M. T. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil** – São Paulo, v. 17, n. 3, p. 597 – 616, 2015.
- BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu; NOVAK, Franciele Isabelita Lopes. O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria

segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. **Olhar de Professor**, v. 21, n. 1, p. 98-115, 2018.

CARVALHO, J. B. P. F. de; ALMEIDA, A. P. de. FUNDAMENTAL, Ensino. Coleção explorando o ensino. **Brasília, Ministério da**, 2010.

CHAACHOUA, Hamid. **Praxeologia como modelo didático para o problema da PEAI. Estudo de caso: a modelação do conhecimento dos alunos**. 2010. Tese de Doutorado. Universidade de Grenoble.

COLOMBO, J. A. A. Representações semióticas no ensino: contribuições para reflexões acerca dos currículos de Matemática Escolar. Florianópolis. 252f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Educação, Ciências Físicas, Biológicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorin; BUEHRING, Roberta Schnorr; MORETTI, Mércles Thadeu. Registros de representação semiótica, tarefas e análise de dados: articulações em torno do currículo de matemática. The semiotic representation register, tasks and data analysis: articulations concerning the curriculum of mathematics. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 4, n. 1, p. 90-113, 2009.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, Silvia. Dias. Alcântara. (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. 3 ed, revisada, 3 reimpr. São Paulo: EDUC., p. 167-188, 2015.

D'AMBROSIO, U. Educação Matemática. Da Teoria à Prática. 17. ed. Campinas: Editora Papirus, 2013.

DANTE, L. R. Ápis Mais, 1º ano: Ensino Fundamental, anos iniciais. 1. ed. São Paulo: Ática, 2021a.

_____. Ápis Mais, 1º ano: Ensino Fundamental, anos iniciais. 1. ed. São Paulo: Ática, 2021b.

_____. Ápis Mais, 1º ano: Ensino Fundamental, anos iniciais. 1. ed. São Paulo: Ática, 2021c.

_____. Ápis Mais, 1º ano: Ensino Fundamental, anos iniciais. 1. ed. São Paulo: Ática, 2021d.

DIONIZIO, F. A. Q. Aprendizagem da docência para o ensino de geometria na infância no contexto da formação e da prática pedagógica. (Tese de Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, Paraná, PR, 2019.

DIONIZIO, Fátima A. Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Mércles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande, v. 7, p. 513-553, 2014.

DOLCE, O. Pompeo, J. N. Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DOLCE, O. Pompeo, J. N. Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, R. Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, Peter Lang, Colombia, 2004.

_____. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives**, nº10, p.5-53, 2005.

_____. **Semiose e pensamento humano**: registro de representação semiótica e aprendizagens intelectuais (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels): (fascículo I). Tradução: Lênio F. Ley e Marisa R. A. da Silveira. Editora da Física, São Paulo, SP, 2009.

_____. (2011). **Ver e ensinar matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. Editora PROEM, 1ª Ed. São Paulo, 2011.

_____. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. REVEMAT, V.07, n.2, p. 266-297. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012a.

_____. **Abordagem cognitiva de problemas de Geometria em termos de congruência**. REVEMAT. V. 07. n.1, p. 118 – 138. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012b.

_____. **Diferenças semânticas e coerência matemática**: introdução aos problemas de congruência. REVEMAT. V. 07. n.1, p. 97 – 117. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2012c. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97>

_____. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos ... 2030! In: Conferência proferida na faculdade de Ciências Sociais e de Ciências da Educação da Universidade de Chipre. Tradução Mércles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, v. 10, n.1, 2015.

_____. **Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática**. REVEMAT, V. 11, n. 2, p. 1-78. 2016. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2016.

_____. **Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática?** REVEMAT, V. 13, n. 2, p. 1-27. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Florianópolis, 2018.

_____. As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Tradução ARINOS, Cleide Ribeiro Mota; DE FREITAS, José Luiz Magalhães; MORETTI, Mércles Thadeu. **REVEMAT**, v. 1, p.1-51, 2022.

_____. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. 2023

DUROISIN, N.; BEAUSER, R.; LUCCHESI, J. Favoriser le passage à la visualisation non iconique par le recours à une ingénierie didactique pour faciliter la transition primaire/secondaire en géométrie. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques**, n. 25, p. 151-182, 2020.

FACCO, S. R. Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Estudos Pós graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. de F. D. A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do Ensino Fundamental: estudos sob a ótica da teoria dos campos

conceituais. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FILHO, J. P. da; MORETTI, M. T.; **“Percepções de um estudo de caso com um aluno com discalculia do desenvolvimento – uma abordagem baseada nas funções discursivas de Raymond Duval”**, In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em agosto de 2023.

FLORES, C. R; MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em Geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **REVEMAT – Revista eletrônica de Educação Matemática**. V.1, p. 5 – 13, UFSC, 2006.

FREITAS, J. L. M. Espaço e forma: Módulo II, Campo Grande. Apostila Formação Continuada de Professores da Rede Estadual de Ensino Fundamental de 5ª a 8ª série – DMT – UFMS, 2011.

GOMES FILHO, J. Gestalt do objeto - sistema de leitura visual da forma, 2008.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; DOS ANJOS, Daiana Zanelato; DA SILVA THIESEN, Juares. A Necessidade de Representar e de Coordenar Registros de Representação Semiótica para a Aprendizagem da Matemática nos Anos Iniciais: o que nos diz a BNCC?. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 34, p. 1-20, 2021.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. Congruência Semântica: Implicações didáticas no ensino da regra dos sinais. **Intermaths**, v. 1, n. 1, p. 101-118, 2020.

KRAKECKER, Liana; MAGALHÃES DE FREITAS, José Luiz. Uma análise acerca da produção de conjecturas e provas matemáticas de alunos do 8º ano do ensino fundamental. **Educação Matemática Em Revista**, v. 23, n. 57, p. 77-91, 2018.

LANGWINSKI, L. G.; BASSOI, T. E. (*in memoriam*); BRANDT, C. F.; **“Os Registros de Representação Semiótica nas aulas de álgebra do 8º ano: uma caracterização de como os professores identificam e ensinam os objetos matemáticos algébricos”**, In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em agosto de 2023.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. de. Coleção Explorando o Ensino de Matemática. **Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação básica**, 2010.

LUDKE, M. ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

LORENZATO A. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, ano III, n.4. Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: _____ (Org.). O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACHADO, S. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3. ed. Revisada. 3 reimpr. São Paulo: EDUC, 2015. p. 233-247.

MATHÉ, Anne-Cécile; MITHALAL-LE DOZE, Joris. L’usage des dessins et le rôle du langage en géométrie: quelques enjeux pour l’enseignement. 2019.

MITHALAL, J. **Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle**. Thèse de l’Université de Grenoble, 2010. Disponível em: <https://theses.hal.science/file/index/docid/590941/filename/these_mithalal.pdf> Acesso em novembro de 2023.

_____. Vers la mobilisation d’une géométrie axiomatique et de la déconstruction dimensionnelle: intérêt de la géométrie dynamique tridimensionnelle. In: **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. IREM, Paris 7**, p. 113-128, 2011.

MITHALAL, J., BALACHEFF, N. The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. Educational Studies in Mathematics. 100, 161-176, 2019.

MORAN, M. **As apreensões em geometria: um estudo com professores da educação básica acerca de registros figurais**. 2015. 248 f. Tese (Doutorado em Centro de Ciências Exatas) - Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2015.

MORETTI, M. T; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras – Construction of a methodological Picture of semiotic and cognitive analysis concerning geometry problems involving figures. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo v. 17, n. 3, p. 597 – 616, 2015.

_____, M.; BRANDT, C.; SOUZA, R. S. Linguagem natural versus formal: diferenciação importante na construção de uma semiosfera de aprendizagem da Matemática. **ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO SUL**, v. 11, p. 1-13, 2016.

_____, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck; ALMOULOUD, Saddo Ag. A Noção de Congruência Semântica na Aprendizagem Matemática. **Boletim GEPEM**, n. 81, p. 175-187, 2022a.

_____, Mércles Thadeu; BRANDT, Celia Finck; ALMOULOUD, Saddo Ag. Congruência semântica: Um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. **Quadrante**, v. 31, n. 1, p. 92-112, 2022b.

_____, M. T; BRANDT, C. F. (orgs). Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. Florianópolis: **REVEMAT/UFSC**, 2020, 485p. Disponível em:<<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em julho de 2023.

_____, Mércles Thadeu. Um estudo sobre a função de expansão discursiva e operações que caracterizam o raciocínio segundo Raymond Duval. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 7, n. 4, p. 751-771, 2023a.

_____, Mércles Thadeu. Sobre o livro “Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagem intelectual” de Raymond Duval-estudo hermenêutico da

Introdução e Capítulo I. **Revista Catarinense de Educação Matemática**, v. 4, n. 5, p. 1-25, 2025.

NOVAK, F. I. L.; BRANDT, C. F.; “**Uma experiência com uso do ambiente dinâmico geogebra e os aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional**”, In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. Disponível em:<<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em agosto de 2023.

PAIS, L. C.; FREITAS, J. L. M. **Um Estudo dos Processos de Provas no Ensino e na Aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental**. Bolema (Rio Claro), Rio Claro – SP, v. 13, p. 62 – 70, 1999.

PASSOS, C. L. B; NACARATO, A. M. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. EMP – Educação Matemática Pesquisa (16)4, 1147-1168, 2014.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender Geometria? In VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004.

PESSOA, G. S. Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis. 2010. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

PINHO, J. L. R.; MORETTI, M. T.; “**O papel das descrições e o potencial semiótico dos softwares de geometria dinâmica na criação e resolução de problemas de geometria no ensino superior**”, In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. Disponível em:<<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em setembro de 2023.

PONTE, João Pedro da. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, p. 1-22, 2006.

SABEL, Eduardo. **O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, UFSC, Florianópolis, 2021.

SABEL, Eduardo; MORETTI, Méricles Thadeu. A contribuição das funções discursivas na análise da produção dos estudantes na resolução de problemas. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 338-360, 2022.

SABEL, E.; MORETTI, M. T.; “**O papel das funções discursivas na aprendizagem matemática: um olhar para os problemas do campo aditivo**”, In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Méricles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. Disponível em:<<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em agosto de 2023.

SCHEIFER, C. Design Metodológico para análise de atividades de geometria segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 2017. 150 f. Dissertação (Mestrado

em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, Paraná, 2017.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOU, S. Ag. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica Figural Register in Dynamic Geometry Environments. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015.

SANTANA, W. M. G. de O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise em livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SILVEIRA, E; MARQUES, C. Matemática: compreensão e prática. 6º ano. -6. ed. -São Paulo: Moderna, 2019a.

_____. Matemática: compreensão e prática. 7º ano. -6. ed. -São Paulo: Moderna, 2019b.

_____. Matemática: compreensão e prática. 8º ano. -6. ed. -São Paulo: Moderna, 2019c.

_____. Matemática: compreensão e prática. 9º ano. -6. ed. -São Paulo: Moderna, 2019d.

SIMONETTI, Djerly; MORETTI, Mércles Thadeu. Base Nacional Comum Curricular do ensino médio e registros de representação semiótica. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 11, n.1, p.99-117, 2021.

SOUZA, R. N. S. de. **Desconstrução dimensional das formas**: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria. 269f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2018.

SOUZA, R. N. S. de.; MORETTI, M. T.; “**A aprendizagem de geometria sob o olhar da desconstrução dimensional das formas**”, In: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval [Recurso Eletrônico] / organizadores, Mércles Thadeu Moretti, Celia Finck Brandt. – Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. Disponível em:<<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>> Acesso em agosto de 2023.

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

(Conselho Nacional de Saúde, Resolução 466/2012/Resolução 510/2016)

Seu (sua) filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade) está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) da pesquisa intitulada “**Articulação de representações, da visualização e do discurso como possibilidades para a aprendizagem em geometria**”, sob responsabilidade dos pesquisadores Cleide Ribeiro Mota Arinos e José Luiz Magalhães de Freitas. O objetivo é investigar contribuições de atividades geométricas que abordem intencionalmente a desconstrução dimensional das formas e a heurística na educação básica para a aprendizagem de conceitos em Geometria, diante de situações envolvendo figuras, produção de enunciados e visualização geométrica. O convite para a participação de seu (sua) filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade) se deve à ser matriculado no Colégio e Curso Almirante Tamandaré (CCAT) nos anos finais do ensino fundamental ou ensino médio e estar disponível a participar voluntariamente das sessões de estudo no período contraturno, uma vez por semana.

Consentir a participação de seu (sua) filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade) é ato voluntário, isto é, não obrigatório. Assim, você tem plena autonomia para decidir se quer ou não que ele(a) participe, bem como retirar a sua anuência a qualquer momento. Nem você nem ele terão prejuízo algum caso decida não consentir com a participação, ou desistir da mesma. Contudo, ela é muito importante para a execução da pesquisa. Serão garantidas a confidencialidade e a privacidade das informações prestadas pelo participante. Qualquer dado que possa identificar o participante será omitido na divulgação dos resultados da pesquisa, e o material será armazenado, em local seguro, por cinco anos. A qualquer momento, durante a pesquisa, ou posteriormente, você poderá solicitar a pesquisadora informações sobre a participação e/ou sobre a pesquisa, o que poderá ser feito através dos meios de contato explicitados neste Termo.

Responsável

Pesquisadora responsável

Poderá haver risco (mínimo) para seu (sua) filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade), caracterizado por algum constrangimento relacionado ao fato de não

conseguir responder a alguma das atividades propostas. Caso isso ocorra, para minimizar esse possível desconforto, reforçamos que ele(a) poderá responder quando se sentir confortável. Poderá contar com a ajuda da pesquisadora, explicando de outro modo a atividade.

Salientamos que se não conseguir resolver determinada atividade, a pesquisadora o(a) comunicará que o erro é inerente ao processo de construção do conhecimento, o que faz parte de sua trajetória de estudante. Assim, a partir dele, o papel da pesquisadora será desencadear o desenvolvimento de outras hipóteses e conjecturas na atividade proposta. Além disso, cabe destacar que esse processo também nos permite realizar possíveis análises em nossa pesquisa.

Para realizar esta pesquisa, aplicaremos as atividades com o grupo constituído por alunos dos anos finais do ensino fundamental e/ou ensino médio do CCAT por aproximadamente 15 sessões de 2h/a (100 minutos), uma vez por semana. A coleta e análises desses dados serão feitos por meio de atividades impressas e gravações de áudios e vídeos. Todas as atividades serão desenvolvidas no contraturno escolar. Caso seu(sua) filho(a) não queira participar não terá nenhum prejuízo, visto que o conteúdo normalmente é ministrado ao longo de sua formação na educação básica. No entanto, nesta pesquisa apresentaremos o conteúdo variando as representações e os registros semióticos, articulando-os com a linguagem e o discurso matemático para a aprendizagem em geometria.

Você poderá consultar os pesquisadores durante a pesquisa para esclarecer quaisquer dúvidas, bem como seu filho(a) pode deixar de participar da pesquisa a qualquer momento. Todas as informações fornecidas por você e seu (sua) filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade) serão mantidas em sigilo e os dados produzidos serão utilizados apenas para divulgação em reuniões e revistas científicas. Você e seu(sua) filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade) não terão quaisquer benefícios ou direitos financeiros sobre eventuais resultados decorrentes desta pesquisa.

Responsável

Pesquisadora responsável

Seu filho(a) não terá nenhum custo, além disso se tiver algum gasto decorrente desta pesquisa, será ressarcido. Caso ele(a) sofra algum dano durante a realização das sessões, será indenizado.

Este estudo é importante, visto que os resultados fornecerão informações para a aprendizagem de geometria na Educação Básica. Além disso, seu filho(a) (ou menor sob sua responsabilidade) será beneficiado aprendendo conceitos geométricos participando das sessões de estudo. Os resultados desta pesquisa serão apresentados pela pesquisadora quando retornar à escola. Também serão divulgados no formato de tese à comunidade científica na área de Educação Matemática e por meio de artigos científicos em periódicos nacionais e internacionais e em eventos científicos na referida área.

Este termo apresenta duas vias, uma delas ficará com você. Os dados produzidos nesta pesquisa ficarão armazenados sob a responsabilidade da pesquisadora pelo período mínimo de 5 anos.

Responsável

Pesquisadora responsável

Caso necessite de mais informações, entre em contato com os pesquisadores pelos e-mails: Cleide.arinos@ufms.br, joseluizufms2@gmail.com, pelo telefone (67) 9 9664-6396.

Em caso de dúvida quanto à condução ética do estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFMS (CEP/UFMS), localizado no Campus da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, prédio das Pró-Reitorias 'Hércules Maymone' – 1º andar, CEP: 79070900. Campo Grande – MS; e-mail: cepconep.propp@ufms.br; telefone: 67-3345- 7187; atendimento ao público: 07:30-11:30 no período matutino e das 13:30 às 17:30 no período vespertino. O Comitê de Ética é a instância que tem por objetivo defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade e para contribuir no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos. Dessa forma, o comitê tem o papel de avaliar e monitorar o andamento do projeto de modo que a pesquisa respeite os princípios éticos de proteção aos direitos humanos, da dignidade, da autonomia, da não maleficência, da confidencialidade e da privacidade.

Diante do exposto acima:

Você concorda que durante a participação nesta pesquisa de seu (sua) filho(a) e/ou menor pelo(a) qual você é responsável seja realizada a gravação de áudios?

(...)Sim

(...)Não

Você concorda que durante a participação nesta pesquisa de seu (sua) filho(a) e/ou menor pelo(a) qual você é responsável seja realizada a gravação de vídeos?

(...)Sim

(...)Não

Campo Grande-MS, _____ de _____ de
2021.

Assinatura – Responsável legal pelo participante da pesquisa

Assinatura - Pesquisadora responsável

APÊNDICE B

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE

(Conselho Nacional de Saúde, Resolução 466/2012/Resolução 510/2016)

Prezado(a) _____, você está sendo convidado(a) a participar como voluntário(a) da pesquisa intitulada “**Articulação de representações, da visualização e do discurso como possibilidades para a aprendizagem em geometria**” sob responsabilidade dos pesquisadores Cleide Ribeiro Mota Arinos e José Luiz Magalhães de Freitas. O objetivo é investigar contribuições de atividades geométricas que abordem intencionalmente a desconstrução dimensional das formas e a heurística na educação básica para a aprendizagem de conceitos em Geometria, diante de situações envolvendo figuras, produção de enunciados e visualização geométrica. Poderá haver risco (mínimo) para você, caracterizado por algum constrangimento relacionado ao fato de não conseguir responder a alguma das atividades propostas. Caso isso ocorra, para minimizar esse possível desconforto, reforçamos que você poderá responder quando se sentir confortável. Poderá contar com a ajuda da pesquisadora, explicando de outro modo a atividade.

Salientamos que se não conseguir resolver determinada atividade, a pesquisadora o(a) comunicará que o erro é inerente ao processo de construção do conhecimento, o que faz parte de sua trajetória de estudante. Assim, a partir dele, a pesquisadora o(a) auxiliará para desencadear o desenvolvimento de outras hipóteses e conjecturas na atividade proposta. Além disso, cabe destacar que esse processo também nos permite realizar possíveis análises em nossa pesquisa.

Para realizar esta pesquisa, aplicaremos as atividades com o grupo a ser constituído por alunos dos anos finais do ensino fundamental e/ou do ensino médio do Colégio e Curso Almirante Tamandaré – CCAT, por aproximadamente 15 sessões de 2h/a (100 minutos), uma vez por semana. O grupo terá, no máximo, trinta alunos. Todas as atividades serão desenvolvidas no contraturno escolar.

Aluno participante

Pesquisador responsável

Caso não queira participar não terá nenhum prejuízo, visto que o conteúdo normalmente é ministrado ao longo de sua formação na Educação Básica. No entanto, nesta pesquisa apresentaremos o conteúdo variando as representações e os registros semióticos, articulando-os com a linguagem e o discurso matemático para a aprendizagem em geometria. A coleta e análises desses dados serão feitos por meio de atividades impressas e gravações de áudios e vídeos.

Assim:

Podemos gravar o áudio? (...)Sim (...)Não

Podemos gravar o vídeo? (...)Sim (...)Não

Os seus pais (ou responsáveis) já autorizaram sua participação nesta pesquisa, caso você deseje. Assim, você está livre para participar ou não. Caso aceite, você estará livre para deixar de participar desta pesquisa a qualquer momento. O seu responsável também pode retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Você não terá nenhum custo, além disso se você tiver algum gasto decorrente desta pesquisa, será ressarcido. Caso sofra algum dano durante a realização das sessões, será indenizado.

Você poderá consultar os pesquisadores durante a pesquisa para esclarecer quaisquer dúvidas. Todas as informações fornecidas por você serão mantidas em sigilo e os dados produzidos serão utilizados apenas para divulgação em reuniões e revistas científicas. Você não terá nenhum benefício ou direito financeiro sobre eventuais resultados da pesquisa.

Este estudo é importante visto que os resultados fornecerão informações para a aprendizagem de geometria na Educação Básica. Além disso, você será beneficiado aprendendo conceitos geométricos participando das sessões de estudo. Você terá acesso aos resultados desta pesquisa, quando a pesquisadora retornar à escola para apresentar os resultados.

Este termo apresenta duas vias, uma delas ficará com você. Os dados produzidos nesta pesquisa ficarão armazenados sob a responsabilidade da pesquisadora pelo período mínimo de 5 anos.

Aluno participante

Pesquisador responsável

Caso necessite de mais informações, entre em contato com os pesquisadores pelos e-mails: cleide.arinos@ufms.br, joseluizufms2@gmail.com, pelo telefone (67) 99664-6396 ou com o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos, pelo telefone (67) 3345-7187, pelo e-mail: cepconeppropp@ufms.br ou pelo endereço: Av. Costa e Silva S/N, Cidade Universitária, Pioneiros, CEP 79070-900.

Campo Grande-MS, _____ de _____ de
2021.

Assinatura - Aluno participante

Assinatura - Pesquisadora responsável

APÊNDICE C

Encontro 01

Atividade 1

1) Preencha o quadro.

SÓLIDO	QUANTIDADE DE VÉRTICES	QUANTIDADE DE FACES	QUANTIDADE DE ARESTAS
Tetraedro			
Hexaedro			
Prisma hexagonal			
Pirâmide pentagonal			
Paralelepípedo			
Prisma triangular			

2) Que relação é possível estabelecer entre a quantidade de elementos de cada linha desse quadro?

3) Qual coluna corresponde a figuras adimensionais? Unidimensionais? Bidimensionais? E tridimensionais?

Encontro 02**Atividade 2**

1) Represente um cubo de aresta 4 cm no espaço abaixo.

a) Nessa representação todas as arestas possuem a mesma medida? Sendo assim, a figura representa um cubo? Justifique.

b) Todos os ângulos da face são retos? Sendo assim, representa um cubo? Justifique.

Encontro 03**Atividade 3**

1) Construa, no espaço abaixo, um triângulo ABC inscrito numa semicircunferência, de centro O , de modo que o lado $\overline{AB}$ seja o diâmetro da circunferência. Como este triângulo é classificado quanto às medidas dos ângulos?

2) Compare os triângulos construídos. Existe alguma relação entre esses triângulos? Explique.

3) Qual será a medida do ângulo $\hat{C}$ de um triângulo ABC qualquer, inscrito numa semicircunferência de centro O , cujo lado $\overline{AB}$ seja o diâmetro dessa circunferência? Justifique.

4) É possível inscrever qualquer triângulo retângulo numa semicircunferência? Justifique.

Encontro 04 e encontro 05⁷⁴**Atividade 4**

1) Corte em uma folha de papel milimetrado (papel cartão ou folha sulfite) as seguintes figuras:

_ **Oito** triângulos retângulos congruentes de lados 3, 4 e 5.

_ **Um** quadrado de lado 3.

_ **Um** quadrado de lado 4.

_ **Um** quadrado de lado 5.

_ **Dois** quadrados de lado 7.

2) Usando: **Um** quadrado de lado 3, **um** quadrado de lado 4, **quatro** triângulos retângulos, cubra por superposição, sem deixar espaços vazios, um dos quadrados de lado 7. Cole a figura obtida no espaço abaixo.

3) Usando: **Um** quadrado de lado 5 e **quatro** triângulos retângulos, cubra por superposição, sem deixar espaços vazios, o outro quadrado de lado 7. Cole a figura obtida no espaço abaixo.

4) Compare as figuras obtidas nos itens 2) e 3). Como justificar?

⁷⁴ Os estudantes precisaram de dois encontros para resolver esta atividade.

Encontro 06

Atividade 5

Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

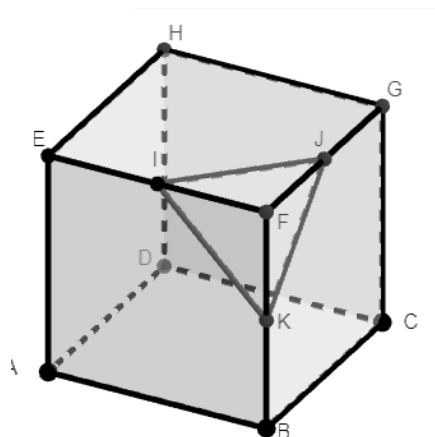
1) Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos mostre que $a^2 = b^2 + c^2$.

2) Se a , b e c são números naturais com $a^2 = b^2 + c^2$ será o triângulo de lados a , b e c retângulo? Justifique.

Encontro 07 e Encontro 08⁷⁵

Atividade 6

1) No cubo abaixo, de aresta 8cm, passa-se uma secção plana nos pontos I, J e K, onde I, J e K são, respectivamente, pontos médios das arestas EF, FG e FB.



Feito esse “corte”, responda: qual é a figura geométrica plana determinada por essa secção?

Qual é a área e o perímetro dessa figura plana.

Observe o poliedro obtido após a retirada dessa “ponta” e responda:

Qual o número de:

vértices desse poliedro: _____

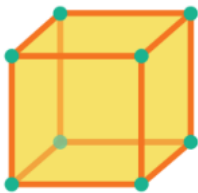
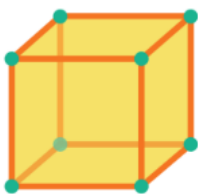
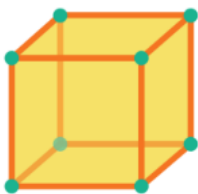
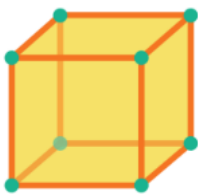
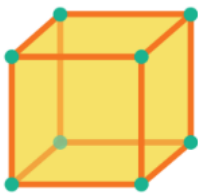
Faces desse poliedro: _____

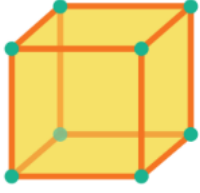
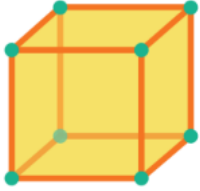
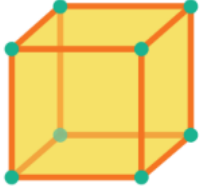
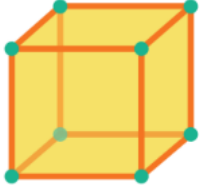
Arestas: _____

2) É possível seccionar o cubo, de modo a obter as figuras solicitadas em cada um dos itens abaixo?

⁷⁵ Os estudantes precisaram de dois encontros para resolver esta atividade.

Se for possível, desenhe cada uma delas no “esqueleto” do cubo abaixo de cada item, justificando seu raciocínio.

a) um triângulo escaleno? 	Justificativa:
b) um triângulo isósceles? 	Justificativa:
c) um triângulo equilátero? 	Justificativa:
d) um quadrado? 	Justificativa:
e) um retângulo? 	Justificativa:
f) um losango?	Justificativa:

	
g) um trapézio? 	Justificativa:
h) um pentágono? 	Justificativa:
i) um hexágono regular? 	Justificativa:

Encontro 09**Atividade 7**

1) Em cada folha sulfite faça por meio de dobraduras e recortes um quadrado e um losango (que não seja quadrado). Após, justifique o procedimento realizado.