UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Vitoria Lourenço Luges da Silva

LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: COMO AS DEFINIÇÕES SÃO TRABALHADAS NOS EXEMPLOS E ATIVIDADES PROPOSTAS PELOS LIVROS DIDÁTICOS?

Campo Grande - MS

2024

Vitoria Lourenço Luges da Silva

LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: COMO AS DEFINIÇÕES SÃO TRABALHADAS NOS EXEMPLOS E ATIVIDADES PROPOSTAS PELOS LIVROS DIDÁTICOS?

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, sob orientação da professora Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato.

Campo Grande - MS

2024

Vitoria Lourenço Luges da Silva

LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: COMO AS DEFINIÇÕES SÃO TRABALHADAS NOS EXEMPLOS E ATIVIDADES PROPOSTAS PELOS LIVROS DIDÁTICOS?

Dissertação de mestrado apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como registro à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
(Orientadora)

Prof. Dr. Mustapha Rachidi
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
(Membro interno)

Prof. Dr. Pierre Job
ICHEC Brussels Management School
(Membro externo)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer à Jeová Deus por ter me dado toda a saúde, calma e força para produzir esta pesquisa.

Aos meus pais, Edilmar e Claudenice, que não mediram esforços para que tudo corresse bem durante o mestrado. Seu incentivo me encorajou a superar meus medos e desafios. Aos meus irmãos, Giovanna e Giovanny, pelo apoio que sempre têm me dado.

À Gabriela, Larissa, Luiza, Pamela e Thays por estarem comigo nessa jornada e por tornar esse período que passei na pós-graduação mais leve.

Aos meus irmãos de orientação Alex, Maria Gabriela e Michelle, que tornavam as orientações coletivas mais descontraídas.

À minha orientadora Sonia, desde à graduação, por ter depositado sua confiança em mim, por ter paciência comigo e por acreditar que eu seria capaz de produzir uma pesquisa como essa, mesmo eu não acreditando.

Aos membros da banca, Pierre e Rachidi, pelas considerações que fizeram ao trabalho. Vocês estarem presentes na banca torna todo esse processo de formação ainda mais especial.

Aos membros dos Grupos de Pesquisa DDMat e GECEMS pelas discussões e sugestões, em reunião ou não, que me ajudaram nessa caminhada.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) pelo financiamento neste trabalho.

Ao Programa, pelo apoio, me proporcionando um espaço saudável para minha formação.

Muito obrigada!

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar como livros didáticos indicados para a disciplina de Cálculo I trabalham as definições intuitiva e formal de limite por meio dos exemplos e das atividades propostas. Para esta investigação, selecionamos as obras que fazem parte da ementa bibliográfica básica da disciplina oferecida pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). A pesquisa tem como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático - TAD. Discutimos sobre o fato de o cálculo já ter feito parte do ensino básico nas escolas do Brasil mas que hoje só é ensinado em algumas escolas específicas. Além disso, trazemos alguns aspectos históricos de como é orientado a escolha do livro didático no ensino superior. A pesquisa nos possibilitou fazer uma análise por meio das praxeologias de como os autores articulam as definições intuitiva e formal de limite nos exemplos e nas atividades propostas, e o que eles acreditam ser importante de ser enfatizado e explicado para que os alunos aprendam o conceito de limite de função. Pela análise das praxeologias nas obras, foi possível observar que o livro de Guidorizzi (2018) prioriza as demonstrações por meio da definição formal de limite em termos de épsilon e delta, um pouco diferente do Stewart (2017) e do Thomas (2012) que detalham bastante a definição intuitiva, apresentando-a após discutir sobre velocidade média e instantânea e equação da tangente. Além disso, as três obras associam a definição intuitiva a análise de tabela e de gráficos e, no geral, a manipulação algébrica prevalece nos exemplos e nas atividades.
Palavras-chaves: cálculo; praxeologia; análise de livro; educação matemática.

RÉSUMÉ

Cette recherche vise à étudier comment les livres recommandés pour la discipline Calcul I fonctionnent avec des définitions intuitives et formelles des limites à travers des exemples et des activités proposées. Pour cette enquête, nous avons sélectionné les ouvrages qui font partie du menu bibliographique de base de la discipline proposé par l'Université Fédérale du Mato Grosso do Sul (UFMS). La recherche a pour référence théorique et méthodologique la Théorie Anthropologique de la Didactique - TAD. Nous avons évoqué le fait que le calcul faisait déjà partie de l'enseignement de base dans les écoles brésiliennes, mais qu'aujourd'hui il n'est enseigné que dans certaines écoles spécifiques. En outre, nous apportons quelques aspects historiques sur la manière dont est guidé le choix du livre dans l'enseignement supérieur. La recherche nous a permis d'analyser, à travers des praxéologies, comment les auteurs articulent les définitions intuitives et formelles des limites dans les exemples et les activités proposées, et ce qu'ils croient important d'être souligné et expliqué pour que les élèves apprennent le concept limite de fonction. En analysant les praxéologies des travaux, il a été possible de constater que l'ouvrage de Guidorizzi (2018) privilégie les démonstrations à travers la définition formelle de la limite en termes d'epsilon et de delta, un peu différent de Stewart (2017) et Thomas (2012) qui détaillez la définition intuitive en détail, en la présentant après avoir discuté de la vitesse moyenne et instantanée et de l'équation tangente. De plus, les trois ouvrages associent la définition intuitive à l'analyse de tableaux et de graphiques et, en général, la manipulation algébrique prévaut dans les exemples et les activités.
Mots-clés : calcul ; praxéologie ; analyse de livres ; éducation mathématique.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Em meu primeiro ano de graduação no curso de Matemática - Licenciatura, 2017, fiz a disciplina de Cálculo I e, acredito que, por falta de maturidade (tinha somente dezessete anos de idade), por consequência, falta de disciplina, ou por falta de conhecimento, eu reprovei.

No semestre seguinte a este, me matriculei na disciplina novamente, com um professor diferente. Dessa vez, recebi o conceito de aprovada, com nota média daquele tipo de aluna razoável que passa pelo curso. Fui aprovada, mas fiquei com a sensação de que não tinha compreendido muito sobre os conteúdos que me foram apresentados. Inclusive, isso é o que mais acontece na universidade. Mas, não posso negar que isso me prejudicou nas disciplinas de cálculo seguintes.

Curioso notar que, nesse processo, o livro didático foi meu “companheiro” e dos meus colegas também. Geralmente no primeiro dia da disciplina, se o professor não indica os livros didáticos que ele vai utilizar ou que recomenda de acordo com a sua concepção de “melhor livro”, os alunos fazem questão de lembrar. Desde então, os alunos faziam de tudo para conseguir, seja na biblioteca central da universidade ou em alguma loja de livros usados pela cidade.

Então funcionava assim: quando não entendíamos algo que o professor disse, pegávamos o livro para tentar entender o que o autor dizia. O interessante desse processo é que a gente geralmente estudava o conteúdo por meio dos exemplos resolvidos que o livro apresentava, então, resolvíamos alguns exercícios propostos pelo livro e, se era parecido com a maneira que o professor da turma resolvia em sala, também fazíamos as listas de exercícios da mesma maneira. Siga o exemplo que dá tudo certo. Será? Era assim que eu pensava.

Sendo assim, em 2021, último ano da graduação, produzimos uma monografia em que analisamos os três livros didáticos mais indicados pela antiga ementa bibliográfica dos cursos de Matemática - Licenciatura e Bacharelado oferecidos pelo Instituto de Matemática da UFMS. Juntamente com minha orientadora, fizemos um estudo das situações que os autores dos livros didáticos escolhem para introduzir o conceito de limite de função.

Identificamos que as obras analisadas apresentavam as definições intuitiva e formal, algumas eram mais diretas ao apresentá-las, sem mais explanações sobre os conceitos e representações imbricadas nas definições, outras já detalharam mais. Além disso, analisamos quais representações que os autores escolheram, como por exemplo, algébricas, numéricas, gráficas e linguagem natural. Essa análise foi feita com o apoio da teoria dos campos conceituais de Vergnaud, que nos forneceu fundamentos para analisar os conceitos e representações imbricadas nas situações escolhidas para introdução do conceito.

Notamos, por exemplo, que o Stewart (2013, p. 81) utilizava a linguagem natural para associar a definição formal em termos de épsilon e delta à expressão "[…] se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a". Leithold (1994, p. 57) também utiliza a mesma estratégia, apresentando a definição junto a gráficos e exemplos numéricos do tipo "podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1". Essas situações não aparecem no Guidorizzi (2015), que utiliza mais símbolos matemáticos e representações gráficas (Silva, 2021). Nesse estudo realizado na monografia foi possível perceber que os professores de cálculo devem escolher o livro mais adequado ao processo de construção do conceito de limite. Essa escolha pode influenciar a aprendizagem dos alunos, pois pode prejudicá-los ou favorecê-los neste processo.

A produção desta monografia durou um ano e, neste período, tive a oportunidade de ter uma experiência, mesmo que breve, do ato de pesquisar. Essa experiência influenciou fortemente na minha decisão de ingressar no curso de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat/INMA/UFMS).

Mas o que foi decisivo foi o fato de ter me matriculado na disciplina de Escrita de Projeto no último semestre da graduação. Aproveitando a oportunidade, escrevi, não um projeto somente para ser aprovada na disciplina, mas sim, para ingressar no mestrado em 2022. Inclusive, o projeto de pesquisa que escrevi está associado a esta presente dissertação. Como o processo de produção da monografia me fez refletir sobre o ensino do limite e, por consequência, me fez refletir em tudo o que experienciei na disciplina de cálculo, o objeto de estudo continuou o mesmo (conceito de limite), porém, agora, olhando para os exemplos e atividades que os autores dos livros didáticos trazem na apresentação do conceito.

O ensino do limite é objeto de estudo de vários pesquisadores, tanto no âmbito nacional, quanto internacional. Por exemplo, Zuchi (2005) propõe sequências didáticas, tanto no ambiente lápis e papel, quanto no ambiente computacional e discute, em sua tese de doutorado, sobre esse conceito e o quanto os alunos demonstram ter dificuldades em seu processo de aprendizagem. A autora identificou que os estudantes não conseguiam compreender a ideia de vizinhança presente na relação entre os quantificadores ε e δ, muitas vezes por falta de raciocínio lógico, que é solucionar o exercício de forma descritiva, utilizando manipulações algébricas sem explicações, visto que a maioria dos alunos "aprendem" decorando regras e macetes, não refletindo sobre o conceito. Por outro lado, as propriedades dos números reais na reta numérica (valor absoluto, inequações e desigualdades) são conhecimentos considerados importantes para a compreensão do conceito de limite em sua definição formal e a falta deles podem acarretar dificuldades neste processo (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020; Burigato e Rachidi, 2023).

Burigato (2019) discute em sua tese que, dentre as dificuldades enfrentadas na aprendizagem do limite, além das relacionadas aos quantificadores, estão as relacionadas à matemática básica, como por exemplo, manipulação algébrica: redução de polinômios e fatoração. Também propôs sequências didáticas para realizar o estudo do processo de construção do conceito de limite e analisou, por meio da teoria dos campos conceituais, os esquemas que os alunos mobilizaram ao resolver problemas que envolviam o cálculo de limite. Nesse estudo, além de ter identificado as dificuldades supracitadas, os estudantes demonstraram dificuldades ao lidar com operações numéricas. Ao analisar os processos mobilizados, tanto pelos alunos franceses, quanto pelos alunos brasileiros, a autora notou que as representações foram muito importantes para eles lidarem com as situações, como por exemplo, numéricas, gráficas e até mesmo os gestos. Já Rachidi, Freitas e Mongelli (2020, p, 73) discutem que os alunos apresentam dificuldades "[...] na compreensão e apropriação dos mecanismos envolvidos no conceito de limite" esses autores fazem essa afirmação, visto que o conceito de limite envolve outros três conceitos, que são os conceitos de desigualdade e inequação, de valor absoluto e de funções de uma variável real, que são propriedades importantes do conjunto dos números reais.

Podemos discutir a aprendizagem dos alunos de várias formas e, uma delas é realizando uma análise dos livros didáticos (Bittar, 2017). Sendo assim, a presente pesquisa é uma análise bibliográfica, envolvendo a interpretação de livros (Mazucato, 2018). A escolha das obras a serem analisadas foi feita por meio da ementa bibliográfica dos cursos de Matemática - Licenciatura e Bacharelado da UFMS, em que escolhemos os livros que fazem parte da bibliografia básica da disciplina de Cálculo Diferencial Integral I desses cursos.

A análise que fizemos nesse trabalho nos permitiu olhar de modo atento ao modo como os autores dos livros didáticos abordam o conceito de limite de função em um ponto nos exemplos e atividades. Para esse estudo, nos apoiamos na teoria antropológica do didático, que nos fornece fundamentos para o estudo das práticas presentes nos livros quando nos referimos ao objeto de limite de função.

Realizamos a organização e análise das praxeologias, com um olhar nas técnicas identificadas nos exemplos e atividades. Ao olharmos essas técnicas, analisamos qual definição (intuitiva ou formal) está associada e como o autor propõe trabalhá-las nos exercícios. Portanto, nosso objetivo é responder à questão de pesquisa: Como as definições de limite são trabalhadas nos exemplos e atividades propostas pelos livros didáticos de cálculo presentes na bibliografia básica do curso de Matemática - Licenciatura e Bacharelado da UFMS?

Este trabalho está dividido em sete capítulos, sendo a *introdução* o primeiro capítulo.

O segundo capítulo discute sobre *o que algumas pesquisas dizem?* em que trago sobre algumas pesquisas que falam sobre o ensino do limite, as dificuldades que geralmente aparecem no processo de aprendizagem do conceito e pesquisas que propõem algumas atividades na tentativa de diminuir essas dificuldades.

O terceiro capítulo fala sobre *o ensino de Cálculo no Brasil* em que discorremos sobre o fato do Cálculo já ter sido objeto de ensino em matemática nas escolas de educação básica e, atualmente, ele faz parte apenas de escolas específicas, como é o caso dos institutos federais.

O quarto capítulo fala sobre *o uso do livro didático no ensino superior*, em que discutimos sobre aspectos históricos que fizeram com que, atualmente, os professores do ensino superior sejam responsáveis pelas escolhas dos livros didáticos que fazem parte da ementa bibliográfica dos cursos superiores, no caso aqui, da disciplina de Cálculo I.

O quinto capítulo traz o *referencial teórico e metodológico*, expondo alguns pontos importantes da teoria antropológica do didático pertinentes ao trabalho realizado e, além disso, uma discussão sobre pensamento intuitivo.

O sexto capítulo traz a *apresentação e escolha dos livros didáticos* da pesquisa em que trazemos sobre como selecionamos as obras para análise e uma breve descrição de sua estrutura.

O sétimo capítulo apresenta a *descrição dos livros didáticos*. O oitavo, a *análise dos livros didáticos* e, em seguida, as considerações finais e as referências.

2. O QUE ALGUMAS PESQUISAS DIZEM?

Há muitas pesquisas, tanto no Brasil quanto em outros países, que tratam do ensino e aprendizagem do conceito de limite de função. Esses estudos abordam tanto as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem em diferentes contextos, como trazem propostas de atividades com a intenção de tentar diminuir esse problema, que tem por consequência a reprovação e, até mesmo, desistência da disciplina, outros dois assuntos também abordados em pesquisas.

Zuchi (2005), em sua tese de doutorado, teve como objetivo estudar sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de limite e propor algumas sugestões que poderiam diminuir essas dificuldades. A autora analisa alguns livros didáticos de cálculo, tendo como critérios as ideias fundamentais que foram importantes para o desenvolvimento do cálculo, no caso a problematização, se é feita com problemas motivadores ou inicia com o conceito para depois discutir exemplos, a linguagem, se o livro traz o texto com linguagem natural ou muita linguagem matemática, e a visualização, se o autor usa recursos gráficos na apresentação do conceito.

Um dos livros que ela analisou foi o Guidorizzi (2000), ele também faz parte deste nosso estudo, e concluiu que a obra não traz as ideias fundamentais do cálculo, que não há dados históricos e que só enfatiza os conceitos que já estão formalizados. Além disso, não parte de problemas motivadores para introduzir o conceito, mas de alguns exemplos para, então, introduzi-lo. Por fim, o texto do livro é feito com linguagem matemática, com o auxílio de recursos gráficos acompanhados de argumentos algébricos (Zuchi, 2005).

A autora observou uma turma de alunos na universidade em que é professora do departamento de Matemática e, ao estudar o processo de ensino e aprendizagem do cálculo, identificou que os alunos tinham muitas dificuldades na compreensão da relação entre ε e δ, eles não entendiam essa ideia de vizinhança. Os alunos também pontuaram que a abstração dificultava bastante a compreensão do conteúdo e isso "piorava", por assim dizer, quando os alunos vinham de um ensino básico baseado em "decoreba", ou seja, com a falta de raciocínio lógico, decorando regrinhas e macetes. Sem contar a dificuldade dos alunos em matemática básica, por exemplo, ao simplificar expressões para calcular o limite de uma função (Zuchi, 2005). Essas e outras dificuldades são bastante comuns nesse processo de aprendizagem.

Na tentativa de diminuir essas dificuldades, Zuchi (2005) elaborou sequências didáticas. A proposta da autora era trabalhar com o conceito de limite em três diferentes módulos diretamente relacionados entre si: histórico, ponto de vista de aproximação e ponto de vista cinemático. Primeiramente, propôs uma sequência didática no ambiente papel e lápis que abordou o conceito do limite do ponto de vista de aproximação. Então, não apresentou a definição diretamente, mas trabalhou com intervalos e distância cada vez menores, e só abordou os quantificadores épsilon e delta de forma genérica depois de discuti-los em situações concretas. O fato de o conceito formal de limite ser construído com o uso dessas situações-problema auxiliou os alunos a resolverem o problema em questão. Além disso, os auxiliou a apresentar a relação entre os quantificadores de forma correta.

Em seguida, propôs uma sequência utilizando um recurso da inteligência artificial, o protótipo Horos[1]. Essa abordou o limite do ponto de vista da aproximação, cinemático e histórico do cálculo. Zuchi (2005) explorou a ideia intuitiva de sequências numéricas e limite por sequência por meio de gráficos e imagens com animações. Um ponto interessante a se pontuar é que esse recurso monitora os usuários. Por conta desse monitoramento, o usuário consegue um diagnóstico dos pontos que ele precisa melhorar e o professor consegue observar as dificuldades presentes em sua turma. "Os passos realizados pelo usuário vão sendo

[1] Horos é um protótipo de *software* com módulos que contém atividades propostas relacionadas ao conceito de limite, que auxilia o professor em sala de aula (Zuchi, 2005).

armazenados e conforme as dúvidas são identificadas, são ativados os módulos de revisão com o intuito de saná-las" (Zuchi, 2005, p. 211). Por fim, a autora defende que o Horos é uma ferramenta que pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite.

Doumbia (2020) fez um estudo sobre os aspectos epistemológicos e didáticos do conceito de limite de função, na tentativa de diminuir a distância entre o conhecimento acadêmico (conhecimento científico) e o conhecimento ensinado (aquele que, de fato, é ensinado em sala), visto que muitos estudantes têm concepções errôneas sobre o conceito. Então, o autor faz uma análise das dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema didático (Gascón, 2011). A análise dessas dimensões refere-se, respectivamente, aos estudos do desenvolvimento histórico do conceito, dos princípios que regem as organizações das práticas em determinada instituição e do questionamento da existência do conceito de limite (Doumbia, 2020).

Para fazer esses estudos, o autor se apoiou na teoria das situações didáticas, teoria dos campos conceituais, teoria antropológica do didático e teoria dos registros de representação semiótica, além de aplicar os princípios da engenharia didática com professores em formação em Mali. Sua intenção foi trabalhar com esses futuros professores e ajudá-los a construir situações que fariam com que os alunos conseguissem dar significado matemático à noção de limite de função. No capítulo II apresenta um estudo sobre a definição formal de L que é o limite de uma função numérica de uma variável em um ponto finito qualquer e conclui que "[...] um dos problemas marcantes da noção de limite é a escrita simbólica da definição formalizada" (Doumbia, p. 83, 2020). Além disso, ele discute sobre a definição intuitiva de limite associada a atribuição de valores de *f* organizados em uma tabela:

> O uso da tabela de valores de *f* pode levar à seguinte interpretação: escrever $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que quando *x* se aproxima de x_0 então *f(x)* se aproxima de L, o que chamamos de abordagem intuitiva da noção de limite. Essa abordagem é fruto de uma transposição didática, não corresponde à definição matemática do limite (Doumbia, p. 84, 2020, tradução nossa).

Além disso, afirma que uma das dificuldades que essa abordagem intuitiva traz para o processo de construção do conceito de limite é o apagamento dos quantificadores.

> Por escrito $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ \forall x \epsilon D_f;\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Vamos da esquerda para a direita, mas o método intuitivo pula dois passos $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ e começa diretamente com: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$. O que corresponde ao apagamento dos quantificadores denominado obstáculo lógico. Devemos começar de $\forall \varepsilon > 0$, ou seja, de *f(x)* e L, para ter $|x - x_0| < \delta$ porque os dados de *f(x)* e L determinam inteiramente ε. O problema consiste em mostrar que $\forall \varepsilon > 0$ a existência de $\delta > 0$ que satisfaz a condição (Doumbia, p. 85, 2020, tradução nossa).

Por fim, dessa análise, ele conclui que

> [...] para que a noção de limite seja ensinada com sucesso, é necessário voltar às concepções intuitivas dos alunos, atualizá-las, desenvolver situações que desafiem concepções errôneas e, finalmente, formalizar a noção de limite e torná-la operacional. Em outras palavras, encontrar um equilíbrio entre intuição e rigor no ensino da matemática [...] (Doumbia, p. 97, 2020, tradução nossa).

O autor também identificou tarefas acerca do conceito de limite e percebeu que elas permitem calcular o valor do limite em um ponto, porém, que essas tarefas do tipo "mostre que *L* é o limite de *f* no ponto tal" afastam os alunos do significado da noção do conceito e, além disso, são ineficazes. Enfatiza que é necessário construir a definição formal e rever as práticas ao redor do conceito para que os alunos mudem suas concepções equivocadas (Doumbia, 2020).

Em sua dissertação, Batista (2019) estudou como os autores de livros didáticos de Cálculo abordam o conceito de limite, analisando sua razão de ser nas obras. Para isso, se apoiou na teoria antropológica do didático para fazer essa análise, identificando, como o objeto matemático vive nos livros selecionados para sua pesquisa[2], além de investigar as organizações matemáticas e didáticas relacionadas ao limite. Sobre essas questões, o autor conclui que:

> Percebem-se algumas diferenças nas maneiras de viver do objeto matemático limites (há, por exemplo, uma diferente distribuição da representatividade das tarefas estudadas, e também, a não-presença (no livro mais antigo) e presença (no livro mais recente) da praxeologia relacionada com a atividade de estimar limites numericamente; das abordagens histórico-epistemológicas; do uso de calculadoras, computadores e sistemas de computação algébrica; e das aplicações aos demais campos do conhecimento humano). As praxeologias matemáticas são praticamente as mesmas (apenas com diferenças em relação à variedade das técnicas). As organizações didáticas são praticamente as mesmas. A razão de ser para limites permanece igual (estudam-se limites para explicar e justificar todo o resto do Cálculo Diferencial e Integral) (Batista, p. 138, 2019).

Outra pesquisa que traz algumas discussões sobre esse mesmo tema, é o de Burigato (2019) que buscou compreender como os alunos lidavam com as situações que introduziram o conceito de limite. A autora se apoiou na teoria dos campos conceituais e nos conceitos imagem e definição para fazer a análise dos conhecimentos mobilizados pelos estudantes. Delimitou o campo conceitual e elaborou algumas situações introdutórias do conceito para a investigação, além de utilizar questionários e entrevistas com os alunos para a produção de dados da pesquisa (Burigato, 2019).

O interessante dessa proposta é que os alunos tiveram a oportunidade de utilizar várias representações do conceito de limite, sejam elas gráficas, algébricas e linguagem natural escrita e, na análise, a autora viu o quanto essas representações são importantes no processo de construção do conceito, visto que "[...] cada representação possibilita novas filiações, e/ou

[2] Cálculo de Stewart (2017) e O Cálculo com Geometria Analítica de Leithold (1977).

rupturas [...]" (Burigato, p. 234, 2019) e o quanto é importante trabalhar com uma variedade de situações levando em conta os conceitos e representações imbricadas.

Job e Schneider (2014) discutiram em um artigo sobre o positivismo empírico, concebido como um obstáculo na aprendizagem do cálculo. Para essa discussão, utilizaram a teoria antropológica do didático para analisar a história do desenvolvimento do cálculo e, assim, propor um modelo epistemológico que se baseia em praxeologias pragmáticas e dedutivas. De acordo com os autores, o cálculo era uma praxeologia pragmática que se tornou uma praxeologia dedutiva[3] (Job e Schneider, 2014). A ideia desse positivismo é "[...] considerar os conceitos como um reflexo exato dos objetos encontrados no mundo real" (Job e Schneider, p. 6, 2014, tradução nossa). Um exemplo discutido é retirado da tese de Job (2011) em que foi pedido aos alunos que fizessem definições de comportamentos de sequências de números reais. O autor concluiu que os alunos se prendem às definições como se fossem descrições dos comportamentos estudados e, inclusive, não conseguem enxergar as definições como algo que possam lhes permitir provar ou demonstrar algo.

> Por um lado, questionam a validade dos procedimentos utilizados para calcular as medidas de áreas curvilíneas e, por outro lado, a mesma atitude positivista empírica priva-os de compreender a tarefa fundamental de uma praxeologia dedutiva (construir uma estrutura dedutiva) e porque é que o seu questionamento inicial não tem sentido neste novo quadro (a medida de uma área é definida pelo processo limite, logo o processo limite dá sem qualquer dúvida a medida dessa área) (Job e Schneider, p. 10, 2014, tradução nossa).

Por fim, ao falar sobre a definição de limite que geralmente aparece nos livros didáticos, os autores mostram que os professores em formação veem o seguinte enunciado que faz parte da definição $\forall \varepsilon > 0 \colon 0 < |x - a| < \delta$, como uma descrição em símbolos matemáticos do tipo: x assume valores cada vez mais próximos de a, tão próximos quanto quisermos, pois têm dificuldades na compreensão das propriedades dos números reais. Além disso, o ensino da definição de limite utilizando de "truques", como por exemplo, tabelas e gráficos, faz com que os alunos acreditem que a definição formal de limite é uma forma muito complicada de dizer algo simples.

> Por um lado, tem de ensinar os limites de uma forma que os matemáticos reconheçam como válida, o que é uma tarefa difícil. Por outro lado, deve ser bem-sucedido nessa tarefa. A única forma que a escola secundária tem à sua disposição para conciliar as duas coisas é pegar na praxeologia dedutiva, despojá-la da maior parte do seu conteúdo e envolvê-la num discurso que possa ser aceito pelos alunos, mesmo que o custo seja propor tarefas que não têm carácter fundamental. Este invólucro é, em parte, uma consequência do seu desconhecimento da existência de outra praxeologia (uma pragmática) onde o conceito de limite é legítimo. Assim, a praxeologia do ensino secundário em matéria de limites situa-se numa terra de ninguém, não estando

[3] Essas praxeologias se referem ao tipo de validação que recorrem, no caso, a praxeologia pragmática se refere a tecnologia e a praxeologia dedutiva se refere a teoria.

> nem numa praxeologia dedutiva nem numa pragmática (Job e Schneider, p. 13, 2014, tradução nossa).

Apesar dessas reflexões serem feitas com base no ensino em outro país, é importante trazê-las, visto que há algumas semelhanças no ensino do conceito de limite no Brasil.

Rachidi, Freitas e Mongelli (2020) produziram um livro que discute sobre aspectos importantes, tanto sobre o conceito de função, fundamental para o ensino do limite, como sobre o próprio limite. Uma discussão que os autores trazem que é pertinente ao estudo aqui realizado, é sobre a definição de limite finito num ponto.

> Para muitos estudantes, na resolução de exercícios de limite de uma função se resume em encontrar uma forma de substituir o ponto na função utilizando-se de manipulações algébricas adequadas. Isso pode causar uma confusão conceitual. Evidencia a ausência de relação entre as noções intuitivas e formais do conceito e evidencia a forma como o professor trata o conceito em sala (Rachidi, Freitas e Mongelli, p. 123, 2020).

Além disso, os autores consideram um problema a forma que os autores de livros didáticos tratam as definições formais, visto que elas são apresentadas "[...] apenas para provar as propriedades importantes dos limites" (Rachidi, Freitas e Mongelli, p 124, 2020).

Lima (2001 *apud* Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020) analisou o modo de os livros didáticos de matemática do ensino médio apresentarem o cálculo e concluiu que, do jeito que trazem, seria melhor nem trazê-los. Sendo que, a maioria dos livros destinados às disciplinas de Cálculo I apresentam as informações teóricas sobre o conteúdo, em seguida, alguns exemplos ilustrativos e uma série de exercícios. Por fim, esse autor conclui que, continua sendo um desafio articular, em sala de aula, conteúdo com aspectos históricos, variedade de contextos e recursos didáticos (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020).

Por fim, trago a minha pesquisa de monografia da graduação, em que analisei os três livros mais indicados pela ementa bibliográfica nos campi da UFMS que oferecem os cursos de Matemática - Licenciatura e Bacharelado. O objetivo do trabalho foi estudar como essas obras introduzem o conceito de limite de função, olhando para as definições intuitiva e formal. Foram identificadas as situações que os autores utilizavam para apresentar essas definições, juntamente com os conceitos e as representações presentes (Silva, 2021). Conclui que os livros apresentaram diferentes situações que exigem dos alunos conhecimento de conceitos diversos para a compreensão das definições. Por exemplo, dos três livros analisados, Leithold (1994) e Stewart (2013) utilizavam uma variedade de representações como as algébricas, as gráficas, as numéricas e, principalmente, a linguagem natural (ou materna). Diferentemente do Guidorizzi (2015), que foi o terceiro livro selecionado para a análise, que apresentava mais representações algébricas e gráficas. Sendo assim, os professores precisam escolher as obras que mais são adequadas para o processo de construção do conceito e, também, escolher situações que favoreçam esse processo.

> [...] este trabalho mostrou que é importante escolher o livro didático mais adequado para este processo. Também, as escolhas didáticas do professor para relacionar a definição intuitiva com a formal, utilizando diferentes linguagens, à medida que conceitos imbricados vão surgindo, influenciam na aprendizagem do conceito (Silva, p. 34, 2021).

Como já dito anteriormente, o foco da monografia foi olhar quais situações os autores dos livros escolhiam para apresentar o conceito de limite. Não buscamos ter um olhar mais aprofundado nos exemplos e nas atividades, que é o que faremos na presente dissertação. A seguir, discutiremos sobre o fato de o cálculo já ter feito parte do ensino nas escolas de ensino básico e, hoje, ele só fazer parte em escolas específicas.

3. O ENSINO DE CÁLCULO NO BRASIL

Atualmente, o cálculo apenas é ensinado no ensino superior em que há essa disciplina na estrutura do curso e em algumas escolas isoladas. Porém, essa discussão do ensino de cálculo nas escolas não é de hoje, há anos esse assunto é pauta de debates e temáticas em pesquisas.

Em sua tese, Reis (2020) faz uma análise sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica do Rio de Janeiro nas quatro últimas décadas do século XIX. Nesta época, a Escola Politécnica (que antes foi Escola Central e Academia Real Militar) valorizava a disciplina de cálculo, visto que passou a estar presente com regularidade no ensino e era considerada um modelo para outras instituições no campo da engenharia. Além disso, Reis (2020) destacou que, em 1871, o Cálculo Diferencial e Integral já aparecia nos programas de ensino da Escola Militar no Rio de Janeiro. Dessa forma, notamos a importância que era dada ao cálculo pela sua forte presença nos programas de ensino.

Carvalho (1996) discute sobre o fato de que o cálculo fez parte do currículo das escolas de ensino secundário[4] duas vezes. Ao falar sobre a escola secundária no início da república, em 1891, o autor fala sobre o Colégio Pedro II, que era o colégio "modelo" do ensino secundário e comenta que os programas de ensino de matemática não se referiam, em nenhum momento entre os anos de 1837 e 1889, sobre o ensino do cálculo e é importante ressaltar o quanto esses programas do período imperial eram bem detalhados. Antes da Lei de Diretrizes e Bases (LDB)

[4] "A ideia de ensino secundário no Brasil é muito difusa, pois os critérios de classificação deste nível de ensino alteraram-se em diversos momentos no decorrer do século 20, com os diferentes decretos e leis publicados. Atualmente o termo ensino médio é aquele que melhor representa este nível de ensino. As finalidades deste nível também variaram ao longo do século. Contudo, podem-se apontar duas características invariantes para este nível de ensino: foi oferecido àqueles que cursaram uma etapa inicial denominada ensino primário ou primeiras letras, atual ensino fundamental, e se constitui numa etapa necessária para acessar ao ensino superior" (Silva e Schubring, 2016, p. 69).

ser criada em 1961, quem definia os programas de ensino nas escolas técnicas eram os próprios professores, então formava-se uma comissão com esse intuito (Silva e Schubring, 2016).

O cálculo aparece nos programas nacionais de ensino após a reestruturação do ensino secundário por meio do Decreto n° 981 de 8 de novembro de 1890 da Secretaria de Estado dos Negócios da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, que faria com que esse curso durasse sete anos (Carvalho, 1996). Nesta época, o ministro era Benjamin Constant, que possuía muitos discípulos na Escola Politécnica, de acordo com Silva (1999, p. 265 *apud* Reis, 2020, p. 152), ele foi "Um dos grandes protagonistas do ensino da matemática nos primeiros anos da república foi o ministro Benjamin Constant difusor de ideias científicas, da matemática de modo geral e até mesmo da inserção do Cálculo Diferencial e Integral no programa de ensino secundário".

Do ensino secundário, no decreto lemos:

> Terceiro Ano
> 1ª cadeira - Geometria geral e o seu complemento algébrico. Cálculo diferencial e integral, limitado ao conhecimento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita: 6 horas.
> Quarto Ano
> Revisão: Cálculo e geometria, 1 hora por semana para cada matéria.
> Quinto Ano
> Revisão: Cálculo e geometria, 1 hora por semana para cada matéria.
> Sexto Ano
> Revisão: Cálculo e geometria, 1 hora por semana para cada matéria.
> Sétimo Ano
> Revisão: Cálculo e geometria, 1 hora por semana para cada matéria (Brasil, 1890).

Esse programa de ensino foi o ponto de partida para discussões, mesmo antes de vigorar este decreto. A Inspetoria da Instrução Primária e Secundária escreveu um ofício enfatizando que esse plano de estudos era de uma "realidade inexequível":

> Basta lançar os olhos sobre os programas parciais das cadeiras de matemáticas dos quatro primeiros anos de curso, (...) para convencer-se qualquer um de que nem aquelas matérias são compatíveis com o desenvolvimento intelectual dos alunos que entram no Ginásio com 13 anos de idade, nem a amplitude de tais programas condiz com a natureza dos estudos secundários preparatórios da instrução superior (...) (Relatório do ministro João Barbalho *apud* Moacyr, 1941, p. 101-103, *apud* Carvalho, 1996, p. 65).

Com essas considerações, o Conselho Diretor da Instrução Primária e Secundária do Distrito Federal propôs que houvesse a modificação desse plano de estudos do Ginásio Nacional para tornar o plano "[...] mais prático, adequado à natureza dos estudos secundários, perfeitamente exequível, sem demasia e especializações que competem ao ensino superior [...]" (Relatório do ministro João Barbalho *apud* Moacyr, p. 101-103, *apud* Carvalho, 1996, p. 65).

Sendo assim, os planos de estudos de matemática do Colégio Pedro II sofreram mudanças, como por exemplo, nos anos de 1895 e 1896, as noções de Cálculo Diferencial e Integral apareciam no programa de estudos do quarto ano e essas noções são relativas à definição de derivada e diferencial, regras de diferenciação das funções explícitas a uma só variável, definição de integral, formação da tabela das integrais imediatas e métodos de integração.

O Cálculo aparece, de forma bem detalhada, nos programas de 1897, também do quarto ano, juntamente com Geometria Analítica e Álgebra. Já em 1898, o cálculo aparece no quinto ano com definição de derivada e de diferencial e definição de integral, no sexto ano - 4ª cadeira - com Geometria Descritiva. A partir de 1900, o cálculo desaparece dos programas oficiais do Colégio Pedro II e esse desaparecimento perdura até 1930, com exceção de 1929, aparecendo em cursos específicos nas escolas militares (Carvalho, 1996).

Na época desse desaparecimento do cálculo nos programas, discussões sobre o ensino de matemática já aconteciam, não só no Brasil, mas em diversos outros países. Voltaremos no ano de 1914, em Paris, onde aconteceu a Conferência Internacional do Ensino de Matemática, que promoveu um movimento de reforma no ensino da Matemática e esse movimento surgiu a partir da atual ICMI (International Commission on Mathematics Instruction), por Felix Klein (Silva e Schubring, 2016).

Euclides Roxo, que defendia as ideias de Felix Klein da Alemanha quanto ao ensino de matemática, tentava desde 1928, implementar suas ideias no Colégio Pedro II, em que foi diretor. Vale enfatizar que era da vontade de Klein melhorar o ensino de cálculo nas universidades e, para isso, as noções de cálculo teriam que ser ensinadas aos alunos desde o ensino secundário (Carvalho, 1996).

Klein propunha essa melhora no ensino pois percebeu que havia um distanciamento no que era ensinado na escola e no que era ensinado nas universidades, em que os professores na formação inicial esqueciam a matemática aprendida na escola e, ao retornar à escola como professores formados, esqueciam a matemática aprendida no ensino superior (Schubring, 2014a *apud* Silva e Schubring, 2016). Notamos que Roxo apoiava o ponto de vista de Klein, até reproduzia seus argumentos 0065m artigos que discutia sobre o cálculo no ensino secundário aqui no Brasil.

Em 1930, o ensino passava por uma reformulação na estrutura. Nesse período, Roxo compartilhava suas ideias referentes ao ensino do cálculo no secundário por meio de publicação de uma série de artigos na imprensa que, mais tarde, se tornou o livro *A matemática na educação secundária* (1937). Nesta obra, Roxo pontua sobre o fato de haver uma descontinuidade entre o curso secundário e o superior referente ao cálculo que, inclusive, perdura até os dias de hoje, e se houvesse essa disciplina no ensino secundário, talvez no ensino superior a dificuldade dos alunos seria menor. No capítulo X, ele conclui que:

> Desde que sejam apresentadas de modo adequado e sem uma excessiva preocupação de rigor e formalismo, as noções de cálculo infinitesimal são mais fáceis de compreender e assimilar do que muitos outros pontos que sempre se acharam incluídos na matemática secundária (Roxo, 1937, p. 228).

Ele defendia que, por mais que o cálculo seja carregado, por assim dizer, de rigor e símbolos, era possível que seu ensino acontecesse de uma forma clara e simples, e que os alunos do secundário conseguissem compreender o conceito para que não precisassem recorrer a cursos complementares de cálculo no ensino superior.

As ideias de Euclides eram consideradas radicais por alguns professores. Devido a isso, sua proposta encontrou muita resistência, principalmente por parte dos professores que defendiam o ensino do tipo clássico-humanista e também de quem defendia a matemática no estilo euclidiano (Miorim, 1995).

Destacamos aqui dois que foram contra suas ideias publicamente, que foram o padre Arlindo Vieira e o professor Almeida Lisboa. O padre Arlindo, que defendia os interesses da Igreja Católica, acusou os programas de ensino propostos por Roxo de enciclopedistas, dizendo que o ensino deveria formar a juventude, não buscar o acúmulo de conhecimento (Carvalho, J. B. P. *et al*., 2000). Já o professor Lisboa criticou sua proposta severamente, dizendo:

> [...] na qualidade de mais antigo professor catedrático de Matemática do Colégio Pedro II, declaro não ter colaborado, nem de leve, nos seus atuais programas de Matemática.
> Sou fundamentalmente contra eles; não os considero sequer programas de ensino, porque tudo destroem [sic]. [...] Desde 1902 [...] desejava o desenvolvimento da matéria e o aumento do número de anos de estudo. Lutei em vão. Contudo, havia naquelas atrasadas épocas de vestígios de ensino da Matemática.
> [...] O professor Roxo quis dar ao ensino da Matemática um caráter utilitário e essencialmente prático. Julgo que não atingiu esse objetivo.
> A mocidade sacrifica longos anos roubados aos folguedos naturais da idade para, em troca, lhe ministrarmos conhecimentos reais, cultivando seu espírito, desenvolvendo suas qualidades intelectuais. Não é Matemática para jardineiro analfabeto que ela vem procurar nos cursos secundários.
> O professor Roxo esqueceu qual a verdadeira finalidade da Matemática na escola secundária. Seu principal destino não é uma colheita mais ou menos abundante de conhecimentos práticos e isolados. A Matemática é uma disciplina de espírito, uma inimitável e insubstituível educadora do raciocínio a que a mocidade deve ser submetida [...] (Lisboa, 1930, p. 5 *apud* Carvalho, J. B. P. *et al.*, 2000, p. 422).

Todo esse debate aconteceu publicamente e iniciou com o espaço que o Jornal do Commercio de 21 dezembro de 1930 deu voz ao professor Lisboa, que fez críticas à reforma do ensino de matemática e, em seguida, mais precisamente na semana seguinte, esse mesmo Jornal dá espaço a Euclides, que responde o professor Lisboa afirmando que ele conhece a matemática, mas não sabe sobre o ensino dela, faltando a formação pedagógica (Valente, 2005).

Mesmo com os professores discordando do destaque que Roxo dava à matemática, suas ideias fizeram com que o cálculo aparecesse nos programas regulares do ensino secundário. Por exemplo, na quinta série, o estudo da derivada, sua interpretação geométrica e também a noção de limite, fazem parte do programa de 1934 (Carvalho, 1996).

Após a Reforma Francisco Campos de 1934 que foi uma reforma com uma série de decretos implantados pelo governo vigente para reorganizar o ensino, tanto o secundário quanto o superior no Brasil, acontece em 1942 a Reforma Capanema. Nela, o ministro Gustavo Capanema decretou o programa que durou até 1961 em que tinham alguns conteúdos relacionados ao cálculo, como na terceira série, o estudo de álgebra, funções e derivadas (Carvalho, 1996). A partir desse mesmo ano, ocorre a descentralização do ensino pela LDB e, portanto, o cálculo sai dos currículos e, atualmente, apenas é ensinado em algumas escolas isoladas, como os institutos federais e algumas escolas particulares.

Desse modo, esses conceitos também saíram dos livros didáticos que são avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e indicados para o ensino médio nas escolas públicas, pois não fazem mais parte dos conceitos que devem ser tratados nesse nível de ensino. Em nosso estudo estamos interessados nos livros didáticos utilizados no ensino superior. Em função disso, trazemos a seguir uma discussão histórica de como foi sendo orientada a escolha desse material para este nível de ensino.

4. O USO DO LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO SUPERIOR

No ano de 1930, no Brasil, houve uma mudança considerável na administração pública comparada aos governos anteriores. Essa mudança foi caracterizada pela Revolução de 30, período esse em que o país era governado, até então provisoriamente, pelo presidente Getúlio Vargas. Em seu governo, Vargas criou uma Secretaria de Estado com a denominação de Ministério dos Negócios da Educação e Saúde Pública, por meio do Decreto nº 19.402, de 14 de novembro de 1930 e, dentre as atribuições deste ministério, estava a estruturação do setor educacional e da saúde (Telo & Schubring, 2018).

O governo Vargas[5] foi marcado por mudanças muito radicais. O presidente da República junto com o gestor do Ministério da Educação e Saúde, Gustavo Capanema (1934-1945), estabeleceram uma política durante o Estado Novo para propagar os ideais do regime. A educação era o principal meio para construção do Estado Nacional (Ferreira, 2008). Além da criação de um novo ministério, houve a centralização da educação, então decidiu fechar as

[5] Governo Provisório (1930-1934), Governo Constitucional (1934-1937) e Estado Novo (1937-1945).

escolas estrangeiras e obrigou o ensino ser ministrado em língua portuguesa em todo o país (Telo & Schubring, 2018).

Ademais, dentre as reformas educacionais, houve a publicação do Decreto-Lei nº 1006 de 1938 em que estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Este decreto tinha como objetivo a criação da Comissão Nacional do Livro Didático, que continham membros, escolhidos pelo Presidente da República, com preparo pedagógico e outros requisitos, para controlar os livros didáticos que seriam escolhidos para compor o ensino nas escolas.

O decreto consiste em cinco capítulos, sendo:

Capítulo I – Da elaboração e utilização do livro didático;

Capítulo II – Da Comissão Nacional do Livro Didático;

Capítulo III – Do processo de autorização do livro didático;

Capítulo IV – Das causas que impedem a autorização do livro didático;

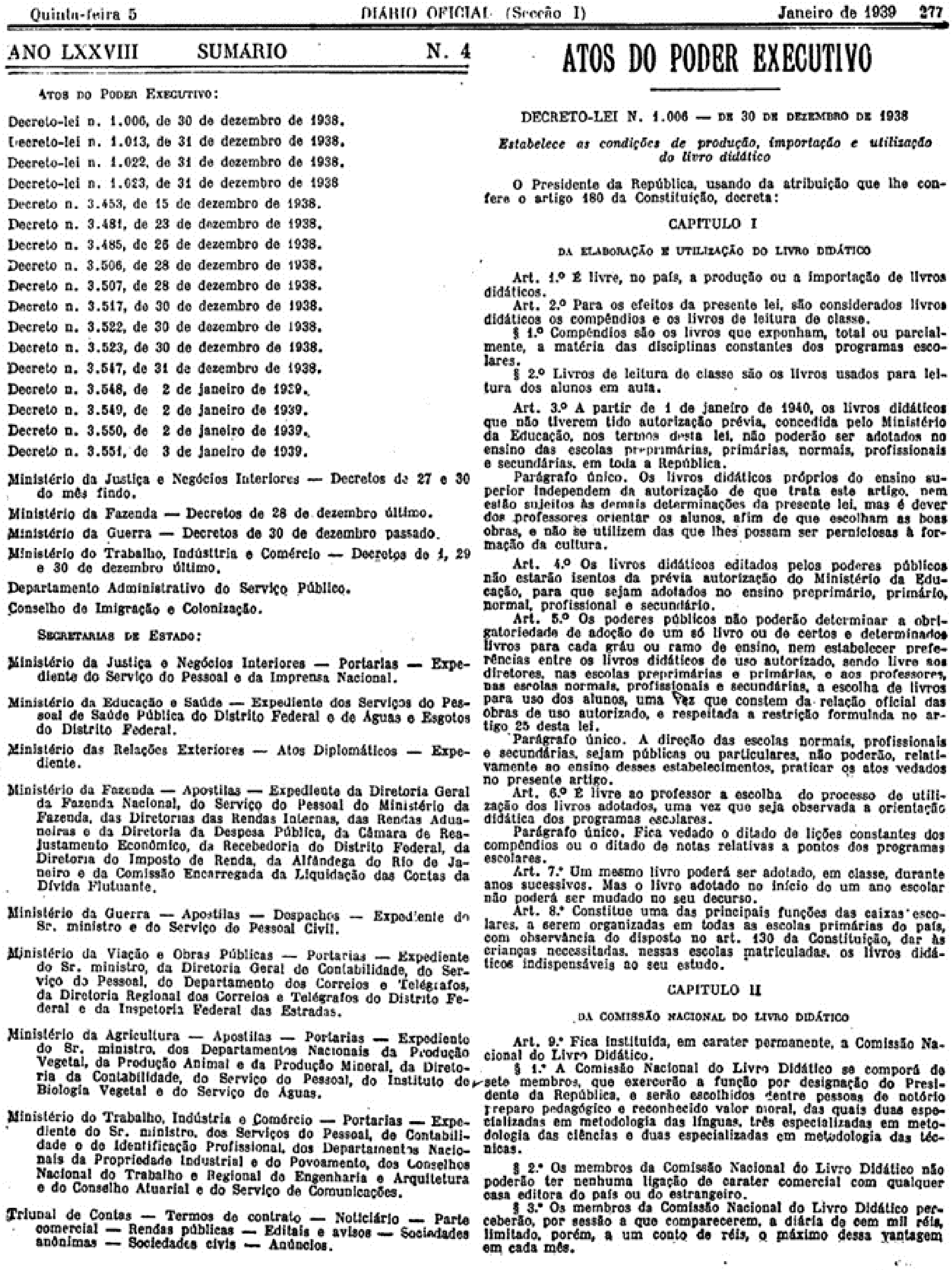
Capítulo V – Disposições gerais e transitórias.

Os livros didáticos utilizados no ensino superior não dependiam da autorização dos membros da Comissão, porém, o decreto apresenta um parágrafo único no Capítulo I, da seguinte forma:

> Parágrafo único. Os livros didáticos próprios do ensino superior independem da autorização de que trata este artigo, nem estão sujeitos às demais determinações da presente lei, mas é dever dos professores orientar os alunos, afim de que escolham as boas obras, e não se utilizem das que lhes possam ser perniciosas à formação da cultura (Brasil, 1938).

Por mais que o foco do decreto fosse o controle dos livros didáticos utilizados no ensino básico, nota-se uma preocupação na escolha dos livros escolhidos para os alunos do ensino superior, visto que o documento incentiva os professores a orientar os alunos em relação à escolha do livro mais pertinente ao seu processo de aprendizagem.

Figura 1 - Decreto-Lei N. 1006 de 30 de dezembro de 1938



Quinta-feira 5 — DIÁRIO OFICIAL (Secção I) — Janeiro de 1939 — 277

ANO LXXVIII — SUMARIO — N. 4

ATOS DO PODER EXECUTIVO:

Decreto-lei n. 1.006, de 30 de dezembro de 1938.
Decreto-lei n. 1.013, de 31 de dezembro de 1938.
Decreto-lei n. 1.022, de 31 de dezembro de 1938.
Decreto-lei n. 1.023, de 31 de dezembro de 1938
Decreto n. 3.453, de 15 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.481, de 23 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.485, de 26 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.506, de 28 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.507, de 28 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.517, de 30 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.522, de 30 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.523, de 30 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.547, de 31 de dezembro de 1938.
Decreto n. 3.548, de 2 de janeiro de 1939.
Decreto n. 3.549, de 2 de janeiro de 1939.
Decreto n. 3.550, de 2 de janeiro de 1939.
Decreto n. 3.551, de 3 de janeiro de 1939.

Ministério da Justiça e Negócios Interiores — Decretos de 27 e 30 do mês findo.

Ministério da Fazenda — Decretos de 28 de dezembro último.

Ministério da Guerra — Decretos de 30 de dezembro passado.

Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio — Decretos de 1, 29 e 30 de dezembro último.

Departamento Administrativo do Serviço Público.

Conselho de Imigração e Colonização.

SECRETARIAS DE ESTADO:

Ministério da Justiça e Negócios Interiores — Portarias — Expediente do Serviço do Pessoal e da Imprensa Nacional.

Ministério da Educação e Saúde — Expediente dos Serviços do Pessoal de Saúde Pública do Distrito Federal e de Águas e Esgotos do Distrito Federal.

Ministério das Relações Exteriores — Atos Diplomáticos — Expediente.

Ministério da Fazenda — Apostilas — Expediente da Diretoria Geral da Fazenda Nacional, do Serviço do Pessoal do Ministério da Fazenda, das Diretorias das Rendas Internas, das Rendas Aduaneiras e da Diretoria da Despesa Pública, da Câmara de Reajustamento Econômico, da Recebedoria do Distrito Federal, da Diretoria do Imposto de Renda, da Alfândega do Rio de Janeiro e da Comissão Encarregada da Liquidação das Contas da Dívida Flutuante.

Ministério da Guerra — Apostilas — Despachos — Expediente do Sr. ministro e do Serviço do Pessoal Civil.

Ministério da Viação e Obras Públicas — Portarias — Expediente do Sr. ministro, da Diretoria Geral de Contabilidade, do Serviço do Pessoal, do Departamento dos Correios e Telégrafos, da Diretoria Regional dos Correios e Telégrafos do Distrito Federal e da Inspetoria Federal das Estradas.

Ministério da Agricultura — Apostilas — Portarias — Expediente do Sr. ministro, dos Departamentos Nacionais da Produção Vegetal, da Produção Animal e da Produção Mineral, da Diretoria da Contabilidade, do Serviço do Pessoal, do Instituto de Biologia Vegetal e do Serviço de Águas.

Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio — Portarias — Expediente do Sr. ministro, dos Serviços do Pessoal, de Contabilidade e de Identificação Profissional, dos Departamentos Nacionais da Propriedade Industrial e do Povoamento, dos Conselhos Nacional do Trabalho e Regional de Engenharia e Arquitetura e do Conselho Atuarial e do Serviço de Comunicações.

Tribunal de Contas — Termos de contrato — Noticiário — Parte comercial — Rendas públicas — Editais e avisos — Sociedades anônimas — Sociedades civis — Anúncios.

ATOS DO PODER EXECUTIVO

DECRETO-LEI N. 1.006 — DE 30 DE DEZEMBRO DE 1938

Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático

O Presidente da República, usando da atribuição que lhe confere o artigo 180 da Constituição, decreta:

CAPITULO I

DA ELABORAÇÃO E UTILIZAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO

Art. 1.º É livre, no país, a produção ou a importação de livros didáticos.

Art. 2.º Para os efeitos da presente lei, são considerados livros didáticos os compêndios e os livros de leitura de classe.

§ 1.º Compêndios são os livros que exponham, total ou parcialmente, a matéria das disciplinas constantes dos programas escolares.

§ 2.º Livros de leitura de classe são os livros usados para leitura dos alunos em aula.

Art. 3.º A partir de 1 de janeiro de 1940, os livros didáticos que não tiverem tido autorização prévia, concedida pelo Ministério da Educação, nos termos desta lei, não poderão ser adotados no ensino das escolas preprimárias, primárias, normais, profissionais e secundárias, em toda a República.

Parágrafo único. Os livros didáticos próprios do ensino superior independem da autorização de que trata este artigo, nem estão sujeitos às demais determinações da presente lei, mas é dever dos professores orientar os alunos, afim de que escolham as boas obras, e não se utilizem das que lhes possam ser perniciosas à formação da cultura.

Art. 4.º Os livros didáticos editados pelos poderes públicos não estarão isentos da prévia autorização do Ministério da Educação, para que sejam adotados no ensino preprimário, primário, normal, profissional e secundário.

Art. 5.º Os poderes públicos não poderão determinar a obrigatoriedade de adoção de um só livro ou de certos e determinados livros para cada gráu ou ramo de ensino, nem estabelecer preferências entre os livros didáticos de uso autorizado, sendo livre aos diretores, nas escolas preprimárias e primárias, e aos professores, nas escolas normais, profissionais e secundárias, a escolha de livros para uso dos alunos, uma vez que constem da relação oficial das obras de uso autorizado, e respeitada a restrição formulada no artigo 25 desta lei.

Parágrafo único. A direção das escolas normais, profissionais e secundárias, sejam públicas ou particulares, não poderão, relativamente ao ensino desses estabelecimentos, praticar os atos vedados no presente artigo.

Art. 6.º É livre ao professor a escolha do processo de utilização dos livros adotados, uma vez que seja observada a orientação didática dos programas escolares.

Parágrafo único. Fica vedado o ditado de lições constantes dos compêndios ou o ditado de notas relativas a pontos dos programas escolares.

Art. 7.º Um mesmo livro poderá ser adotado, em classe, durante anos sucessivos. Mas o livro adotado no início do um ano escolar não poderá ser mudado no seu decurso.

Art. 8.º Constitue uma das principais funções das caixas escolares, a serem organizadas em todas as escolas primárias do país, com observância do disposto no art. 130 da Constituição, dar às crianças necessitadas, nessas escolas matriculadas, os livros didáticos indispensáveis no seu estudo.

CAPITULO II

DA COMISSÃO NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

Art. 9.º Fica instituida, em carater permanente, a Comissão Nacional do Livro Didático.

§ 1.º A Comissão Nacional do Livro Didático se comporá de sete membros, que exercerão a função por designação do Presidente da República, e serão escolhidos dentre pessoas de notório preparo pedagógico e reconhecido valor moral, das quais duas especializadas em metodologia das línguas, três especializadas em metodologia das ciências e duas especializadas em metodologia das técnicas.

§ 2.º Os membros da Comissão Nacional do Livro Didático não poderão ter nenhuma ligação de carater comercial com qualquer casa editora do país ou do estrangeiro.

§ 3.º Os membros da Comissão Nacional do Livro Didático perceberão, por sessão a que comparecerem, a diária de cem mil réis, limitado, porém, a um conto de réis, o máximo dessa vantagem em cada mês.

Fonte: Diário Oficial da União, 1938.

Como vimos, desde 1938, a escolha do livro didático no ensino superior já era uma questão importante a ser levada em consideração pelos docentes. Atualmente, no ambiente universitário, o uso do livro didático é bastante comum, tanto por parte dos professores, ao basear a preparação de suas aulas, quanto por parte dos alunos, para resolução de exercícios e estudo dos conteúdos.

Assim, é notável a importância dos livros didáticos nos cursos de ensino superior. Como são os docentes que escolhem as obras que fazem parte da bibliografia das disciplinas, essa escolha deve ser feita a fim de orientar os alunos no seu processo de aprendizagem e deve estar de acordo com o que os professores apresentam em sala de aula.

5. REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentaremos alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) que servirão de aporte teórico para a pesquisa. Utilizaremos a TAD também como ferramenta metodológica para a análise dos livros didáticos, visto que ela nos dá elementos para estudar as atividades humanas diante do saber matemático. Também, ela "estuda as condições de possibilidade e funcionamento de Sistemas Didáticos, entendidos como relações sujeito-instituições-saber" (Almouloud, 2015, p. 10), que discutiremos logo mais. Além disso, discutiremos sobre a intuição e sua influência no processo de aprendizagem de limite.

5.1 Aspectos teóricos

Antes de discutirmos sobre aspectos da TAD que nos ajudarão na pesquisa, precisamos falar sobre a transposição didática. Para Chevallard (1991), a transposição didática é o trabalho que se dá ao passar do objeto do saber a ensinar para objeto de ensino, ou seja, o processo de adaptações que o saber sofre a fim de se tornar adequado para ser ensinado. De fato, Barbosa (2017) afirma que

> [...] o principal objetivo da noção de transposição didática é permitir o estudo das transformações advindas do saber desde o momento de sua concepção na comunidade científica até o momento em que ele é ensinado na sala de aula (Barbosa, 2017, p. 31).

Então, notamos que o estudo dessas transformações do saber é importante para entendermos sobre as influências que o saber sofre, desde os *saberes científicos* (que são aqueles desenvolvidos pela comunidade científica), passando pelos *saberes a ensinar* (aqui, consideramos os saberes transpostos e quem faz isso é a *noosfera*)[6] e, por fim, chegando aos *saberes efetivamente ensinados* em sala de aula.

A transposição didática justifica as escolhas dos autores dos livros quanto a apresentação do conceito de limite de função e isso nos faz refletir sobre como esse conceito é ensinado em sala de aula: o limite é introduzido com a definição intuitiva, utilizando expressões como "*x tende a um ponto*" ou "*f(x) fica tão próximo quanto quisermos*". Em seguida, exemplos e exercícios são apresentados. Após, a definição formal com épsilons e deltas é apresentada seja em termos de desigualdade, intervalos ou utilizando valor absoluto, juntamente com exemplos e atividades.

---

[6] Professores, especialistas, cientistas e outros relativos à educação fazem parte da *noosfera*.

Visto que nosso trabalho aqui é uma análise de livros didáticos de cálculo no curso de licenciatura, os autores dos livros didáticos também fazem parte da *noosfera*. Isso é válido de ressaltar pois Chevallard (1991) considera que a *noosfera* é como se fosse o centro operacional da transposição didática. Isso está de acordo com Pais (2008) que afirma que a *noosfera* é o conjunto das fontes de influência que selecionam os conteúdos a serem ensinados:

> A escolha dos conteúdos escolares, bem como dos recursos didáticos adotados no ensino, ocorre sob o balizamento de um conjunto de fontes de influência, entre as quais estão as efetivas práticas realizadas pelos professores, os programas escolares e os livros didáticos (Pais, 2008, p. 16-17).

As adaptações que o *objeto matemático* sofre no processo de transposição didática têm como o objetivo de fazê-lo viver em determinada *instituição*. De acordo com Chevallard (1992), tudo é objeto e ele só existe quando é reconhecido quando uma pessoa ou uma instituição o considera como tal. Quando falamos de objetos, os distinguimos em *ostensivos* e *não ostensivos*. Os *ostensivos* são aqueles objetos que existem institucionalmente, mas que não vemos, ouvimos ou percebemos, temos como exemplos de objetos não ostensivos conceitos, ideias ou intuições. Os *não ostensivos* são objetos que nós, sujeitos humanos, conseguimos perceber pelo fato desses terem uma natureza material, como gestos, sons, falas ou gráficos (Bosch e Chevallard, 1999).

A instituição é “um dispositivo social que impõe formas próprias de fazer e de pensar” (Batista, 2019, p. 31). Sendo assim, o livro didático pode ser considerado uma instituição. Além disso, o objeto do saber pode viver em diversas instituições, não importa, mas partimos do princípio que em alguma instituição ele vive. Para isso, o saber é submetido à imposições que o permite ser transformado (Barbosa, 2017). Para o limite viver nos livros didáticos, precisou passar por transformações, afinal, não podemos reduzir o conceito de limite em definições, exemplos numéricos, representações gráficas e atividades. Discutiremos isso no decorrer do trabalho.

Neste caso, podemos discutir sobre os níveis de codeterminação denominados por Chevallard (2002). Esses níveis são organizados numa escala hierárquica e influenciam ou interferem o processo de aprendizagem do limite de função. São eles: civilização ↔ sociedade ↔ escola ↔ pedagogia ↔ disciplina ↔ domínio ↔ setor ↔ tema ↔ assunto. Consideramos elementos macro (civilização, sociedade, escola pedagogia e disciplina) e elementos micro (domínio, setor, tema e assunto) (Carvalho, 2022). Essa escala nos permite compreender as condições e restrições nos diferentes níveis, que fazem com que determinada praxeologia exista institucionalmente.

A parte *macro* dos níveis de codeterminação está fora do alcance do professor em sala de aula, não está em seu controle, por assim dizer, pois são os documentos oficiais, bem como a ementa do curso e a bibliografia da disciplina. Ao analisar o limite de função nos livros didáticos da disciplina de cálculo, estamos olhando a parte *micro* desses níveis, pois nosso olhar está em como as praxeologias existem, ou podem existir, institucionalmente, com base nas escolhas dos autores das obras.

5.2 Relação institucional e pessoal

Como dito anteriormente, o objeto só se torna existente quando uma pessoa ou instituição o considera como tal, ou seja, quando tem uma relação com esse objeto. Existem dois tipos de relação: *relação institucional* $R_I(O)$, que é uma relação entre uma certa instituição I e um objeto O e *relação pessoal* $R(X, O)$, que é entre uma pessoa X e um objeto O.

> A relação institucional descreve o que é feito em uma dada instituição I com o objeto O, como este objeto é posto *em cena*. Para cada um dos sujeitos de I que ocupam uma posição p, existe uma relação institucional com o objeto O, expressa por: R_I(p, O). Esta relação institucional constitui o sistema essencial de condições e restrições sob as quais se forma e evolui uma segunda relação: a relação pessoal de um indivíduo X com o objeto O.
> A relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O é o conjunto de interações, sem exceção, que X possa ter com O: segurá-lo, usá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele... Ele especifica a maneira como X conhece O (Chaachoua; Bittar, 2019, p. 30).

Na perspectiva da teoria, uma pessoa aprende quando a relação institucional modifica a relação que essa pessoa tem com o objeto. Isso significa que, a existência da relação entre a *instituição livro didático* e o *objeto limite de função* influencia a relação da *pessoa aluno* com o *objeto limite*. Dessa forma, notamos a importância de o professor escolher o livro mais adequado ao processo de ensino e aprendizagem (Silva, 2021).

Nosso trabalho não é estudar a aprendizagem, na verdade, é estudar qual matemática é proposta nos livros didáticos para ensinar o conteúdo de limite de função em um ponto no ensino superior. Por isso, é importante notarmos que, o professor da disciplina de cálculo escolhe a obra que é coerente com sua forma de ensino e ele faz essa escolha de acordo com sua relação com a ementa. Dessa forma, por mais que estamos olhando apenas para a relação aluno-livro didático, não podemos ignorar a existência da relação professor-ementa, principalmente a relação professor-aluno.

Uma ferramenta metodológica que a TAD fornece que nos permite fazer essa investigação é a organização praxeológica, considerando o fato de que o saber matemático é produzido pela ação humana institucional (Bosch e Chevallard, 2019), por isso que ela nos ajuda ao investigarmos questões relacionadas às práticas institucionais (Batista, 2019).

5.3 Praxeologias

Chevallard (1998) nos diz que toda atividade humana pode ser descrita como uma tarefa expressa por um verbo, como por exemplo, dirigir, fechar, calcular, estimar, etc. Porém, neste conjunto de tarefas, existem vários tipos de tarefas. Vamos supor que o professor, sem nenhuma conversa ou explicação antecipada, diga a um aluno o seguinte: calcule. A primeira pergunta que vem à sua mente quando lhe é designada essa tarefa é: calcular o quê? A soma? A distância? O limite? Para este tipo de tarefa, que chamaremos de *t*, o aluno já entende que vai calcular algo, mas fica muito amplo. Para que esteja bem definido, o aluno precisa de um complemento junto ao verbo (Bittar, 2017): por exemplo,

"calcule o limite da função $f(x) = x$, quando x tende a 1, ou seja,

Calcule $\lim_{x \to 1} x$".

Pronto, agora ele já sabe o que terá de calcular. A pergunta agora é: como? Fazendo a representação gráfica da função $f(x) = x$? Construindo uma tabela, atribuindo valores próximos de 1 no domínio e analisando como se comportam os valores da função? Faz substituição direta, calculando o limite em $x = 1$? Pela definição formal utilizando os quantificadores épsilons e deltas? Ou seja, o aluno vai identificar a técnica ou o conjunto de técnicas - que chamaremos de τ - que pode utilizar para resolver uma tarefa deste tipo.

Mas não é sem critério que ele fará essa escolha. A técnica τ é sustentada por uma tecnologia θ, que valida a técnica e a tecnologia é justificada pela teoria Θ. Denominamos a relação [T, τ] de bloco do saber-fazer e [θ, Θ] de bloco do saber. Estes dois blocos formam o que Chevallard (1999) chama de *organização praxeológica* ou *praxeologia*, que denotamos por [T, τ, θ, Θ].

> A palavra praxeologia enfatiza a estrutura da organização [T, τ, θ, Θ]: em grego práxis significa "prática", referente ao bloco prático-técnico (ou práxis) [T, τ], e logos significa "razão", "discurso fundamentado", referente ao bloco tecnológico-teórico [θ, Θ] (Chaachoua; Bittar, 2019, p. 32).

Assim como a Teoria Antropológica do Didático fornece um aporte teórico sobre sujeitos e instituições, bem como discussões sobre as relações pessoais e institucionais existentes, a praxeologia, sendo uma organização do saber, nos permite modelar práticas sociais por meio desses quatro elementos. Consideramos essa modelização como a ferramenta utilizada na metodologia desta pesquisa. No ensino superior, o professor escolhe os livros didáticos que são mais adequados ao seu processo de ensino e os recomenda aos seus alunos que, por sua vez, estudam por meio deles. Desse modo, uma das formas de tentar entender as dificuldades que os alunos apresentam no processo de aprendizagem é analisando livros didáticos.

> Se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas. Não é a única, porém, como o LD é o principal material utilizado pelo professor no preparo de suas aulas, seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor (Bittar, 2017, p 365-366).

Dessa maneira, a análise que faremos aqui nos permitirá olhar de maneira atenta ao modo como os autores dos livros didáticos abordam o conceito de limite de função em um ponto nos exemplos e atividades. Como estamos olhando para os tipos de tarefa e as técnicas relacionadas às definições intuitiva e formal apresentadas nos livros de cálculo, não nos aprofundaremos no bloco tecnológico-teórico. A análise foi feita olhando para o bloco saber-fazer, constituído desses dois elementos práticos.

5.4 Parte curso e atividades propostas

A *parte curso* se constitui no momento em que os autores apresentam o conceito e, em geral, por meio de exemplos que são apresentados como exercícios resolvidos. Analisando esta parte nos livros didáticos, conseguimos entender o que os autores "esperam" dos alunos, por assim dizer, o que eles devem aprender. Com essa análise, conseguimos identificar os tipos de tarefas que a instituição (livro didático) considera essenciais para a aprendizagem do conceito (Bittar, 2017).

Sendo assim, antes de discutir sobre a definição intuitiva e formal de limite, os autores discutem sobre vários conceitos, dentre eles, a definição do coeficiente angular de uma curva. Vamos fazer uma breve discussão sobre um exemplo que está presente na obra (Figura 2). Esse exemplo dá uma ideia geométrica para a reta tangente de uma curva.

Figura 2 - Exemplo da ideia geométrica em Thomas (2012)

EXEMPLO 3 Determine o coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$. Escreva uma equação para a tangente à parábola nesse ponto.

Solução Começamos com uma reta secante que passa por $P(2, 4)$ e $Q(2 + h, (2 + h)^2)$ próximo. Em seguida, escrevemos uma expressão para o coeficiente angular da secante PQ e investigamos o que acontece ao coeficiente angular à medida que Q se aproxima de P ao longo da curva:

$$\text{Coeficiente angular da secante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4.$$

Se $h > 0$, então Q permanece acima e à direita de P, como mostra a Figura 2.4. Se $h < 0$, então Q permanece à esquerda de P (não mostrado). Em ambos os casos, à medida que Q se aproxima de P ao longo da curva, h se aproxima a zero, e o coeficiente angular $h + 4$ se aproxima de 4. Tomamos 4 como o coeficiente angular da parábola em P.

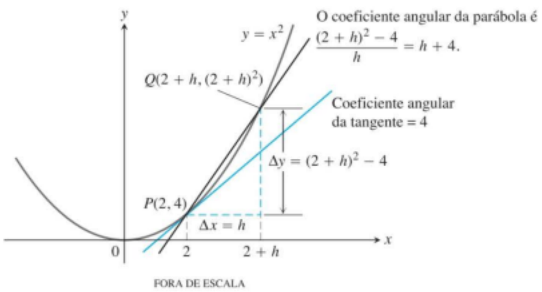


FIGURA 2.4 Determinação do coeficiente angular da parábola $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$ como o limite de coeficientes angulares das secantes (Exemplo 3).

A tangente à parábola em P é a reta que passa por P com coeficiente angular 4:

$$y = 4 + 4(x - 2) \quad \text{Equação fundamental da reta}$$

$$y = 4x - 4.$$

Fonte: Thomas (2012, p. 57-58).

Anterior a esse exemplo, o livro traz que, para calcular o coeficiente angular de uma curva em um ponto P, podemos considerar o coeficiente da reta tangente a essa curva, que passa por P, como sendo o coeficiente angular da curva. Thomas (2012) traz então que, para encontrarmos a reta tangente, é necessário que levemos em conta as retas secantes pelo ponto P e quaisquer pontos Q, próximos conforme Q se move até chegar o mais próximo possível de P na curva, com P diferente de Q. Primeiro, calculamos o coeficiente angular da secante PQ; depois, investigamos o valor limite do coeficiente angular secante conforme Q se move até chegar o mais próximo possível de P na curva e, por fim, se existe esse limite, supomos que ele é o coeficiente angular da curva em P e definimos a tangente da curva em P como a reta que tenha esse coeficiente angular, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Limite dos coeficientes angulares das secantes quando Q se move em direção a P na curva

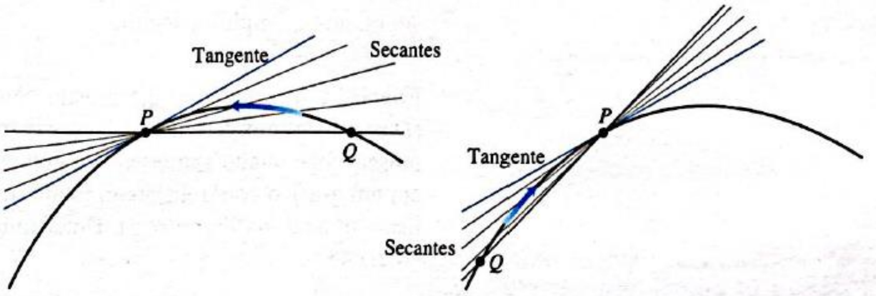


FIGURA 2.3 A tangente à curva em *P* é a reta que atravessa *P* cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando $Q \to P$ de ambos os lados.

Fonte: Thomas (2012, p. 57).

Neste exemplo 3 (Figura 2) podemos caracterizar dois tipos de tarefas aos alunos:

T_{T_2}: **determinar o coeficiente angular da parábola no ponto P;**

T_{T_3}: **escrever uma equação para a tangente da parábola em P.**

Consideramos que, com base na solução realizada pelo livro e as indicações de como resolver esses tipos de tarefa, os autores esperam que os alunos utilizem como técnica:

τ_{T_1}: **calcular o coeficiente angular da secante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;**

τ_{T_3}: **análise de gráficos;**

Essa análise da *parte curso* é importante pois nos mostra como os autores desejariam que os usuários do livro resolvessem as atividades (Bittar, 2017) que serão propostas e que complementam a *parte curso*.

> Nesse momento buscamos analisar cada atividade identificando qual é a tarefa do aluno e qual é a técnica que se espera que ele utilize para a resolução da tarefa, tendo como apoio a(s) praxeologia(s) anteriormente identificada(s) (Bittar, 2017, p. 373).

Essa análise das *atividades propostas* acontece com o apoio do que foi encontrado na *parte curso*. Assim, no tópico dos exercícios propostos, encontramos:

Figura 4 - Exercícios relacionados ao exemplo 3

Nos Exercícios 7-14, utilize o método no Exemplo 3 para determinar (a) o coeficiente angular da curva no ponto *P* dado, e (b) uma equação da reta tangente em *P*.

7. $y = x^2 - 3, \quad P(2, 1)$

8. $y = 5 - x^2, \quad P(1, 4)$

9. $y = x^2 - 2x - 3, \quad P(2, -3)$

10. $y = x^2 - 4x, \quad P(1, -3)$

11. $y = x^3, \quad P(2, 8)$

12. $y = 2 - x^3, \quad P(1, 1)$

13. $y = x^3 - 12x, \quad P(1, -11)$

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4, \quad P(2, 0)$

Fonte: Thomas (2012, p. 59-60).

Nestes exercícios, identificamos as mesmas praxeologias da *parte curso*. Interessante enfatizar que esse livro didático também divide os exercícios propostos em subtópicos. Por exemplo, os exercícios 7-14 estão no subtópico *Coeficiente angular em um ponto de uma curva*. De fato, o prefácio nos diz que "[...] a maioria dos exercícios aplicados têm subtítulo para indicar o tipo de aplicação ao qual o problema se refere (Thomas, 2012, p. ix). Além do subtítulo já "entregar o jogo", por assim dizer, a atividade pede que o aluno siga os passos do exemplo 3 (Figura 2).

5.5 A definição intuitiva

Atualmente, quando olhamos para o ensino de cálculo no Brasil, mais especificamente de limite de função, percebemos um padrão. Em geral, primeiramente a definição dita intuitiva é apresentada e, em seguida, a definição formal. Podemos fazer uma breve reflexão sobre o intuitivo, que é muito presente na sala de aula.

Há diversas definições para intuição. Se procurarmos em dicionários ou na internet, o pensamento intuitivo pode ser considerado aquele pensamento rápido, sem necessidade de um raciocínio lógico, automático. Em outras palavras, podemos dizer que intuição é a primeira ideia que vem à mente do aluno, para a abordagem de uma questão. Fischbein (1993 *apud* Sousa, Alves e Souza, 2022) acredita ser importante considerar a intuição de cada estudante no processo de aprendizagem. Para este autor, a intuição está relacionada com a cognição intelectual e "exprime uma concepção geral (uma noção, um princípio, uma interpretação, uma previsão, uma solução)" (Sousa, Alves e Souza, 2022, p. 444). Poincaré (1900 *apud* Sousa, Alves e Souza, 2022) defende que a intuição é essencial para o pensamento científico e é ela que, juntamente com a lógica matemática, formaliza e complementa as ideias do pensamento intuitivo. Sendo assim, a intuição precisa do rigor.

Por mais que a definição intuitiva é utilizada atualmente no ensino do limite de função e é necessária para a introdução desse conceito, é limitada para que os estudantes compreendam a definição formal de limite. Sendo assim, dificulta o processo de compreensão do conceito e, além disso, a forma como a definição formal é ensinada, apenas para aplicação em alguns casos e utilizada para demonstrações, contribui para essa dificuldade, sendo que poderia ter uma análise mais aprofundada em torno dela (Doumbia, Almouloud e Faria, 2019).

No processo de aprendizagem, D'Amore (2007) considera os termos *conceito* e *imagem*. O autor explica sobre esses termos dando o seguinte exemplo:

> O estudante constrói para si uma imagem de um conceito C; ele acredita que essa imagem seja estável, definitiva. Mas, em certo momento de sua história cognitiva, recebe informações sobre C que não são contempladas pela imagem que ele possuía. Ele precisa então adequar a velha imagem a uma nova, mais ampla, que não apenas conserve as precedentes informações, mas contemple também as novas. A nova imagem é uma conquista cultural, uma nova

> construção mais poderosa, mais ‘próxima’ do conceito C (D’Amore, 2007, p. 130).

Na construção do conceito de limite, o aluno faz uma imagem que se mantém até aparecer uma nova imagem, que geralmente é mais ampla que a primeira que foi criada. O aluno receberá novas informações sobre o conceito que ele está construindo e perceberá que a imagem que ele tinha não poderá mais contemplar essas novas informações que chegaram, então ele precisará criar uma nova que contemple tanto as informações antigas que já tinha, quanto às novas. Esse “confronto” entre as imagens é denominado de *conflito cognitivo* (D’Amore, 2007).

Sendo assim, no decorrer do tempo, o aluno cria várias imagens relacionadas ao conceito C até chegar no momento em que cria a última imagem I, que contempla todas as informações que recebeu sobre C. D’Amore (2007, p. 130) chama I de um “modelo” mental, que seria “[...] dentre as imagens, aquela definitiva, aquela que engloba o máximo das informações e que se demonstra estável com relação a um bom número de solicitações ulteriores”.

Para o professor, obter acesso a esse modelo que o aluno construiu é praticamente impossível, visto que todo esse processo de construção do conceito descrito acima acontece internamente, ou seja, ele cria um modelo mental interno. Além disso, cada aluno tem suas experiências com relação ao conceito, dada suas vivências e todo o conhecimento prévio que carregam consigo no decorrer dos anos. Ao tentar externalizar, de alguma maneira, o modelo construído, pode ser que dê “[...] modelos externos falseados pelo desejo de aproximá-los do que considera sejam as expectativas do professor ou do pesquisador” (D’Amore, 2007, p. 160).

Como já dito anteriormente, geralmente percebemos que o ensino de limite é estruturado baseando-se nas duas definições, intuitiva e formal. Fischbein (1985 *apud* D’Amore, 2007) relaciona a intuição, ou intuitivo, com o ponto de vista comportamental. Então, na construção do conceito de limite, o aluno cria seu modelo intuitivo (acessível, imediato e limitado) para “[...] criar significados que coincidam com comportamentos ou com imagens figurais; nem sempre, no entanto, esse modelo intuitivo dá a plena razão substancial do conceito do qual ele é modelo parcial” (D’Amore, 2007, p. 336).

Quando o conceito de limite é apresentado ao aluno por meio da definição intuitiva, é como se ele criasse imagens próprias que contemplassem esta definição, para que consiga resolver atividades no processo de aprendizagem do limite. Então, os alunos geralmente veem a definição intuitiva como os livros a abordam, utilizando expressões como, por exemplo, “o limite de $f(x)$ é L, quando x tende a a quer dizer que quando x tende a a, $f(x)$ tende a L”, ou “...tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, ao tomar x suficientemente próximo de a” ou ainda “...tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto quisermos...”.

Muitas vezes, as definições intuitivas são acompanhadas de análises de gráficos e tabelas, na intenção de que os alunos “enxerguem” o que está acontecendo, por assim dizer. Então o aluno cria imagens na tentativa de compreender o conceito. Porém, quando lhe é apresentada a definição formal, as dificuldades se tornam ainda mais evidentes, visto que ele precisará associar essas expressões que vimos acima, com os quantificadores épsilon e delta, bem como os símbolos matemáticos de módulo, maior e menor, por exemplo.

Como já dito, o limite é um conceito matemático abstrato em que os alunos apresentam muitas dificuldades e notamos que eles têm essa necessidade de “enxergar” a definição formal de limite por meio de sua definição intuitiva. Porém, isso pode dificultar o processo de aprendizagem. Trazemos isso na análise dos livros didáticos de cálculo, presentes na seção 8.

A seguir, apresentaremos os objetivos da pesquisa e as escolhas metodológicas.

5.6 Objetivos da pesquisa e estratégias metodológicas

Como dissemos anteriormente, este trabalho é uma pesquisa bibliográfica, visto que envolve análise e interpretação de livros (Mazucato, 2018). O foco desta pesquisa é o conceito de limite de função em um ponto apresentado pelas definições intuitiva e formal nos livros didáticos. A apresentação deste conceito acontece por meio da *parte curso*, com explanações e exemplos, isto é, atividades resolvidas. Em seguida, os livros apresentam as *atividades propostas*, que consistem em exercícios e, nessa parte, a intenção dos autores das obras é colocar em prática o que foi ensinado na parte curso.

Para o processo de aprendizagem de limite, consideramos que é importante que seja feita uma articulação entre as definições intuitiva e formal. A “distância” existente entre essas duas definições pode dificultar tanto a compreensão do conceito por parte dos alunos, como fazer com que eles pensem que se tratam de coisas completamente diferentes.

Dessa forma, o objetivo da pesquisa é investigar como livros didáticos indicados para a disciplina de Cálculo I trabalham as definições intuitiva e formal de limite por meio dos exemplos e das atividades propostas. Para esta investigação, vamos fazer a categorização dos exemplos e atividades que trabalham com limite de função em um ponto. Neste primeiro objetivo específico, identificamos o conjunto de tarefas presentes nas obras.

O próximo passo é organizar os exemplos e atividades por meio das praxeologias. Nesse momento é que olharemos a parte curso e as atividades propostas pelos autores, identificando as técnicas que eles esperam que os alunos utilizem para resolver os exercícios propostos. Investigaremos se tal técnica τ está associada à definição intuitiva ou a formal de limite (Silva, 2022).

Por fim, faremos a análise de como os autores articulam as definições intuitiva e formal por meio da organização já feita. Analisaremos como o conceito de limite de função vive (está sendo praticado) na *instituição* livro didático. Como dissemos anteriormente, um modo de compreender o motivo de algumas dificuldades na aprendizagem dos estudantes é investigar os livros didáticos que eles utilizam (Bittar, 2017).

Sendo assim, essa pesquisa nos possibilita fazer uma análise de como os autores articulam essas definições, e de quais são suas escolhas de prioridades no processo de compreensão do conceito de limite. Identificar o que eles acreditam ser importante de ser enfatizado e explicado para que os alunos aprendam este conceito que é essencial para o ensino de cálculo.

Estamos interessadas no bloco saber-fazer, que consiste nos tipos de tarefa e técnicas presentes nas obras. Nosso olhar é voltado para as praxeologias existentes na instituição livro didático, que faz parte dos níveis *micro* de codeterminação. As obras estão presentes na bibliografia da ementa de cálculo, dos cursos de Matemática – Licenciatura e Bacharelado da universidade. A parte *macro* dos níveis propostos por Chevallard (2002) é o que determina a utilização e escolha do livro didático. No próximo capítulo, mostraremos os livros escolhidos para a análise.

6. APRESENTAÇÃO E ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Na seção 4, discutimos aspectos históricos relacionados ao processo de escolha dos livros didáticos e sua importância nas aulas do ensino superior. Neste capítulo, apresentamos a escolha dos livros didáticos e descrevemos cada um deles, destacando suas características e como os autores fazem as suas escolhas de apresentação do conteúdo de limite e, também, como estruturam os exemplos e as atividades propostas.

6.1 Livros didáticos selecionados

Para esta investigação, foi feita uma análise dos currículos dos cursos de Matemática - Bacharelado e Licenciatura da UFMS por meio de seus respectivos Projeto Pedagógico de Curso (PPC). Considerando fundamental a utilização de livros didáticos nas disciplinas, os PPC, apresentados por meio da Resolução nº 613, de 8 de novembro de 2019 e nº 701, de 7 de dezembro de 2022 (publicadas no Boletim Oficial da UFMS nº 7.166 e nº 7.955, respectivamente), apresentam as bibliografias básica e complementar que acompanham as disciplinas presentes no ementário. Dessa forma, selecionamos os livros didáticos presentes na bibliografia básica da disciplina de Cálculo I:

- Cálculo Volume 1 (Thomas, 2012);
- Cálculo Volume 1 (Stewart, 2017); e
- Um Curso de Cálculo Volume 1 (Guidorizzi, 2018).

A pesquisa consiste em analisar como os exemplos e as atividades relacionam as definições intuitiva e formal de limite. Por esse motivo, escolhemos essas três obras. A seguir, discutiremos como cada obra se estrutura com relação ao conceito de limite de função em um ponto.

6.1.1 Cálculo Volume 1 (Thomas, 2012)

A 12ª edição da obra de Thomas (2012) contém nove capítulos relacionados ao conteúdo de cálculo. No prefácio, os autores enfatizam que os alunos são incentivados a raciocinar ao invés de decorar fórmulas e também, a generalizar os conceitos conforme eles são apresentados no decorrer dos capítulos. O livro incentiva o raciocínio e as generalizações para que o aluno tenha "domínio" do cálculo e os exercícios e exemplos são componentes essenciais para a aprendizagem do cálculo (Thomas, 2012). Alguns exercícios estão sob o título "Uso do computador" que são aqueles em que os alunos precisam de *softwares* de computador para resolvê-los. Além disso, o livro organiza tanto o conteúdo quanto os exercícios por meio de subtítulos, como já dito anteriormente, e isso acontece para "[...] indicar o tipo de aplicação ao qual o problema se refere" (Thomas, 2012, p. ix).

O livro diferencia as discussões formais das informais, sempre apontando essas diferenças pois, trazem que começar a abordar um conceito novo de uma forma mais intuitiva do que formal auxilia os alunos na aprendizagem deste e, após essa abordagem, a apresentação formal do conceito faz com que os alunos possam "[...] apreciar a precisão matemática e seus resultados de forma completa" (Thomas, 2012, p. x).

O segundo capítulo do livro intitulado *Limites e continuidade* está estruturado por subtítulos da seguinte forma:

- *2.1 Taxas de variação e tangentes das curvas;*
- *2.2 Limite de uma função e leis do limite;*
- *2.3 Definição precisa de limite;*
- *2.4 Limites laterais;*
- *2.5 Continuidade;*
- *2.6 Limites que envolvem infinidade; assíntotas de gráficos.*

No final de cada subtítulo, há uma quantidade de exercícios para os alunos resolverem e, no final do capítulo, há três subtópicos intitulados: *Questões para guiar sua revisão, Exercícios práticos* e *Exercícios adicionais e avançados*.

6.1.2 Cálculo Volume 1 (Stewart, 2017)

A tradução da 8ª edição da obra norte-americana de Stewart (2017) conta com oito capítulos com conteúdos do cálculo. No prefácio, o autor comenta que sua intenção é que os alunos compreendam o conceito e, para isso, é importante que tenham noção da utilidade do conceito e de suas aplicações no “mundo real”, além de desenvolver competências técnicas (Stewart, 2017). O livro apresenta os conceitos por meio do que chama de “Regra dos Três”: as formas geométrica, numérica e algébrica; busca a compreensão dos conceitos por meio dessa regra, que se expandiu para a “Regra dos Quatro”, adicionando a forma verbal ou descritiva (Stewart, 2017).

Ainda no prefácio, o autor destaca que valoriza os exercícios que abordam visualizações gráficas, numéricas e algébricas, de forma que haja a comparação entre essas três formas. E acredita ser importante abordar o conceito por meio de diferentes situações-problema para sua compreensão, além disso, no início de alguns conjuntos de exercícios é pedido aos estudantes para que expliquem o significado do conceito abordado no subtítulo.

Destacamos também que o livro traz exercícios que vão aumentando o grau de dificuldade até aqueles que somente utilizam a definição formal de limite para fazer demonstrações. Vale ressaltar que este livro também contém alguns exercícios que necessitam da utilização de tecnologias, como *softwares*, calculadoras gráficas ou sistemas de computação algébrica como *Maple, Mathematica* ou o *TI-89/92* (Stewart, 2017).

O autor incentiva os alunos a lerem com calma e não irem direto para a seção dos exercícios, argumenta que um dos objetivos do livro é “[...] treiná-los a pensar logicamente” (Stewart, 2017, p. xx). Então, a ideia é o aluno solucionar o exercício de forma descritiva, passo a passo, não utilizando fórmulas e manipulações algébricas sem explicações.

Tendo essa visão mais geral de como o autor pensou na estrutura do livro e na escolha dos exemplos e exercícios, chegamos ao segundo capítulo intitulado *Limites e derivadas* está estruturado por subtítulos da seguinte forma:

- *2.1 Os Problemas da Tangente e da Velocidade;*
- *2.2 O Limite de uma Função;*
- *2.3 Cálculos Usando Propriedades dos Limites;*
- *2.4 A Definição Precisa de um Limite;*

- *2.5 Continuidade;*
- *2.6 Limites no Infinito; Assíntotas Horizontais;*
- *2.7 Derivadas e Taxas de Variação;*
- *2.8 A Derivada como uma Função.*

Ao final de cada subtítulo há diversos exercícios para resolução e, no final do capítulo, há uma *Revisão* que contém exercícios para verificação de conceitos, teste de verdadeiro ou falso e exercícios para resolução, finalizando com a seção que o livro chama de *problemas quentes*, que trazem exemplos com problemas de cálculo mais elaborados, por assim dizer.

6.1.3 Um Curso de Cálculo Volume 1 (Guidorizzi, 2018)

A 6ª edição da obra de Guidorizzi se constitui de dezessete capítulos e seis apêndices, todos relacionados a limite, derivada e integral de funções de uma variável real. No prefácio, o autor enfatiza que os conceitos que são apresentados, em sua maioria, são acompanhados de alguma interpretação geométrica (Guidorizzi, 2018). Além disso, acredita que a quantidade de exemplos presentes nos capítulos é suficiente para a compreensão da matéria.

Os exercícios são estruturados de maneira que a dificuldade aumenta em ordem crescente. Para o autor, "Existem exercícios que apresentam certas sutilezas e que requerem, para suas resoluções, um maior domínio do assunto" (Guidorizzi, 2018, p. vii). Vale ressaltar que, diferente de todas as edições anteriores, essa 6ª edição conta com materiais suplementares de livre acesso presentes no site da editora, com videoaulas exclusivas dos conteúdos, bem como solução de exercícios selecionados, material de pré-cálculo e desafios. Já o material suplementar, restrito aos docentes, consiste em manual de soluções, planos de aula e ilustrações presentes no livro em forma de apresentação (Guidorizzi, 2018). Não nos aprofundaremos nestes materiais devido ao objetivo da pesquisa.

O terceiro capítulo intitulado *Limite e Continuidade* está estruturado por subtítulos da seguinte forma:

- *3.1 Introdução;*
- *3.2 Definição de Função Contínua;*
- *3.3 Definição de Limite;*
- *3.4 Limites laterais;*
- *3.5 Limite de Função Composta;*
- *3.6 Teorema do Confronto;*
- *3.7 Continuidade das Funções Trigonométricas;*

- *3.8 O Limite Fundamental* $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$;
- *3.9 Propriedades Operatórias. Demonstração do Teorema do Confronto.*

Ao final de cada subtítulo há exercícios propostos para os alunos resolverem, com exceção do *3.7 Continuidade das Funções Trigonométricas* e *3.9 Propriedades Operatórias. Demonstração do Teorema do Confronto*.

7. DESCRIÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Esta seção apresenta as descrições dos livros. As obras foram descritas focando em alguns exemplos e atividades propostas específicas, conforme o objetivo da análise.

7.1 THOMAS (2012)

Nesta obra, os conceitos de Limite e Continuidade são apresentados no seu segundo capítulo. Primeiramente, o autor apresenta uma noção de taxa de variação média e instantânea para relacioná-las ao coeficiente angular de uma curva em um ponto qualquer. A velocidade média de um objeto em movimento durante um intervalo de tempo "[...] é determinada pela divisão da distância percorrida pelo tempo transcorrido" (Thomas, 2012, p. 54). O exemplo inicial aborda esse cálculo, conforme uma rocha sofre uma queda:

Figura 5 - Exemplo de cálculo da velocidade média

EXEMPLO 1 Uma rocha se desprende do alto de um penhasco. Qual sua velocidade média

(a) durante os primeiros 2 segundos de queda?

(b) durante o intervalo de 1 segundo entre o segundo 1 e o segundo 2?

Fonte: Thomas (2012, p. 55).

Para resolvê-lo, inicia-se dizendo que a velocidade média da rocha é calculada pela variação da distância $\triangle y$, dividida pelo intervalo de tempo, $\triangle t$. Generaliza o cálculo de velocidade média como $\frac{\triangle y}{\triangle t} = \frac{16(t_0+h)^2 - 16{t_0}^2}{h}$, com comprimento $\triangle y = h$ e intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$. Essa fórmula não dá certo quando queremos calcular a velocidade instantânea em t_0, pois o denominador seria $h = 0$. Porém, conseguimos utilizá-la calculando velocidades médias considerando h cada vez menor e, com esses cálculos organizados em uma tabela, nota-se um padrão, conforme a Figura 6:

Figura 6 - Tabela das velocidades médias do Thomas (2012)

TABELA 2.1 Velocidades médias durante curtos intervalos de tempo $[t_0, t_0 + h]$

$$\text{Velocidade média: } \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + h)^2 - 16t_0{}^2}{h}$$

Duração do intervalo de tempo h	Velocidade média durante o intervalo de comprimento h iniciando em $t_0 = 1$	Velocidade média durante o intervalo de comprimento h iniciando em $t_0 = 2$
1	48	80
0,1	33,6	65,6
0,01	32,16	64,16
0,001	32,016	64,016
0,0001	32,0016	64,0016

Fonte: Thomas (2012, p. 55).

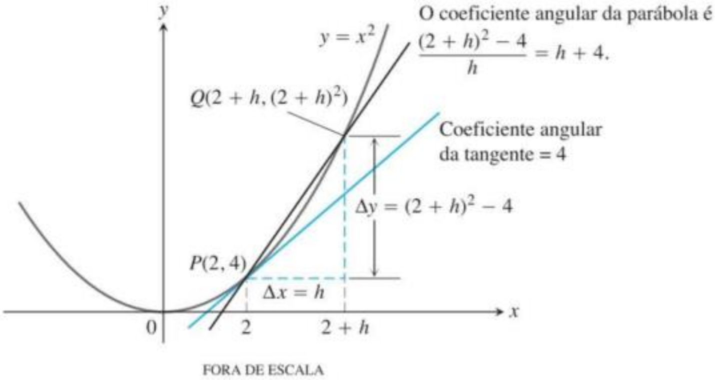
A ideia do autor ao apresentar essa tabela é observar que, iniciando nos tempos $t_0 = 1\ s$ e $t_0 = 2\ s$, a velocidade se aproxima de 32 e 64 pés, respectivamente. E ele associa isso com a forma algébrica, utilizando a fórmula de velocidade média para considerar que, para valores de h diferentes de zero, se $t_0 = 1$ então $\frac{\triangle y}{\triangle t} = 32 + 16h$ e, se $t_0 = 2$ temos que $\frac{\triangle y}{\triangle t} = 64 + 16h$. Então, conclui que, à medida que h se aproxima cada vez mais de zero, a velocidade média possui o valor limite de 32 pés/s no segundo 1 e possui o valor limite de 64 pés/s no segundo 2. Essa relação que Thomas (2012) propõe entre a manipulação algébrica e o uso de tabelas nos sugere que a primeira serve como forma de validação "formal", por assim dizer, da atribuição de valores que observamos na Figura 6.

Dessa forma, a obra relaciona esse cálculo com a taxa de variação média de $y = f(x)$ em relação a x em um intervalo de pontos $[x_1, x_2]$, que é idêntica ao coeficiente angular da secante[7] de uma curva. Dados dois pontos quaisquer da curva, à medida que um se move em direção ao outro ao longo dela, temos o coeficiente angular.

Para determiná-lo, começamos com a reta secante que passa por dois pontos, calculamos a taxa de variação média (coeficiente angular da secante) e, por fim, analisamos o que acontece com a secante conforme os pontos se aproximam ao longo da curva. Conforme o gráfico analisado (Figura 7), à medida que o ponto Q se aproxima de P, $\Delta x = h$ se aproxima de zero e $\frac{\triangle y}{\triangle x} = h + 4$, de 4. Então, o limite dos coeficientes angulares da secante é o coeficiente angular de $y = x^2$ no ponto $P(2, 4)$.

[7] O livro define secante como "[...] uma reta que une dois pontos de uma curva" (Thomas, 2012, p. 56).

Figura 7 - Coeficiente angular no gráfico (Thomas, 2012)



Fonte: Thomas (2012, p. 57).

O autor conclui que a taxa de variação média está ligada ao coeficiente angular das secantes e a taxa de variação instantânea corresponde ao coeficiente angular da tangente, que é quando surgem os limites.

Quando calculamos a taxa de variação instantânea em uma função *f(x)* no ponto x_0, pode ser que ocorra uma divisão por zero, que é indefinida. Então, o livro introduz a ideia de limite estudando o comportamento da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ em $x = 1$. A função está definida para qualquer número real, exceto $x = 1$. Se $x \neq 1$, fazemos a manipulação algébrica por meio da fatoração e conseguimos cancelar fatores em comum: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1$.

Interessante notar que, ao exemplificar o estudo do comportamento da função, Thomas (2012) resolve primeiro pela manipulação algébrica para fazer a comparação com a tabela e o gráfico e, além disso, ele é a obra que dá nome à essa manipulação algébrica, chamando-a de fatoração. Neste exemplo, ela serviu como maneira de simplificar a função para fazer o estudo, fatorando o numerador e cancelando fatores comuns. Como visto anteriormente, faz muito tempo que o cálculo não faz parte dos conteúdos ensinados nas escolas públicas, porém, conceitos relacionados são ensinados até hoje na educação básica, como é o caso da fatoração. Esse conteúdo é apresentado na ementa escolar por volta do 9º ano do ensino fundamental e que é muito utilizado no cálculo de limite. Além disso, uma das dificuldades que os alunos apresentam no processo de aprendizagem de limite é relacionada a fatoração de expressões algébricas, bem como na sua multiplicação e redução. Burigato (2019, p. 37) identificou erros relacionados às expressões algébricas que podem prejudicar o estudante ~~ao~~ encontrar o resultado do limite, como: $(x + c)^2 \to x^2 + 2c$, $(x + c)^2 \to x^2 + c^2$, $a(x - b) \to ax - b$, $\frac{x-a}{a} \to x$, $\frac{a}{x} < \frac{c}{d} \to \frac{x}{a} < \frac{d}{c}$, $x^2 + x + 2 \to x^2 + 2x \to 3x^3$.

O gráfico da função, bem como a tabela representada na Figura 8 tem o objetivo de mostrar que podemos deixar o valor de *f(x)* tão próximo de 2 quanto quisermos, escolhendo *x* próximo o suficiente de 1 (Thomas, 2012).

Figura 8 - Valores próximos de 1 (Thomas, 2012)

Valores de x abaixo e acima de 1	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$
0,9	1,9
1,1	2,1
0,99	1,99
1,01	2,01
0,999	1,999
1,001	2,001
0,999999	1,999999
1,000001	2,000001

Fonte: Thomas (2012, p. 62).

Podemos dizer então que, quando *x* se aproxima de 1, *f(x)* se aproxima do limite 2. Essa ideia é generalizada supondo uma função *f* qualquer, definida em um intervalo aberto em torno do ponto x_0, exceto, possivelmente no próprio ponto:

> Se *f(x)* está arbitrariamente próxima a *L* (tão próxima de *L* quanto queiramos) para todo *x* próximo o suficiente de x_0, dizemos que *f* se aproxima do limite *L* quando *x* se aproxima de x_0, e escrevemos
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$
> que lemos como "o limite de *f(x)* quando *x* tende a x_0 é *L*" (Thomas, 2012, p. 62).

Como essa definição não é precisa, Thomas (2012) a denomina como informal, visto que podemos considerar a palavra "próximo" em diversos contextos com significados diferentes. Outros limites são calculados utilizando a análise do domínio da função com o auxílio do gráfico, discutindo seu comportamento. Em seguida, a obra traz o tópico *Leis do limite* em que lista sete regras consideradas simples:

> **Teorema 1 - Leis do limite** Se *L*, *M*, *c* e *k* são números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, então
> 1. *Regra da soma*: $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$
> 2. *Regra da diferença*: $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$
> 3. *Regra da multiplicação por constante*: $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$
> 4. *Regra do produto*: $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
> 5. *Regra do quociente*: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$
> 6. *Regra da potenciação*: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$, *n* é um número inteiro positivo
> 7. *Regra da raiz*: $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$, *n* é um número inteiro positivo (Se *n* for um número par, suporemos que $\lim_{x \to c} f(x) = L > 0$.)

(Thomas, 2012, p. 64).

Essas propriedades nos ajudam a calcular os “limites de funções que são combinações aritméticas de funções que possuem limites conhecidos” (Thomas, 2012, p. 64). O intuito do autor ao apresentar essas propriedades é buscar formas de facilitar o cálculo do limite de funções. Além disso, quando estimamos limites utilizando calculadoras ou computadores, isso pode causar confusões por conta de falsos resultados para funções que não são definidas em certo ponto, como é o caso de $f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$. Ao analisar essa tabela, não conseguimos saber se o limite de *f(x)* é 0 ou 0,05.

Figura 9 - Tabela com resultado ambíguo (Thomas, 2012)

x	$f(x)$	
±1	0,049876	se aproxima de 0,05?
±0,5	0,049969	
±0,1	0,049999	
±0,01	0,050000	
±0,0005	0,050000	se aproxima de 0?
±0,0001	0,000000	
±0,00001	0,000000	
±0,000001	0,000000	

Fonte: Thomas (2012, p. 66).

Por conta desse resultado ambíguo, ele apresenta esse mesmo exemplo, avaliando o limite da função que não podemos fazer a substituição direta do ponto, mas que, ao simplificá-la, cancelando fatores comuns no numerador e no denominador, conseguimos fazer a substituição. É importante enfatizar que esse processo de fatorar expressões é uma manipulação algébrica e não utiliza ideias da definição intuitiva e nem da formal.

Figura 10 - Manipulação algébrica no exemplo em Thomas (2012)

EXEMPLO 9 Avalie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}.$$

Solução Esse é o limite que consideramos no Exemplo 8. Podemos criar um fator comum ao multiplicar tanto o numerador quanto o denominador pela expressão radical conjugada $\sqrt{x^2+100}+10$ (obtida ao alterar o sinal após a raiz quadrada). A álgebra preliminar racionaliza o numerador:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}\\
&= \frac{x^2+100-100}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)}\\
&= \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)} && \text{Fator comum } x^2\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}. && \text{Cancelar } x^2 \text{ para } x \neq 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}\\
&= \frac{1}{\sqrt{0^2+100}+10} && \text{Denominador não 0 em } x=0\text{; substituir}\\
&= \frac{1}{20} = 0{,}05.
\end{aligned}$$

Fonte: Thomas (2012, p. 67).

Note que o autor utiliza da manipulação algébrica para chegar ao resultado correto do limite, comparando com a confusão entre resultados que pode gerar se só calcularmos o limite pela atribuição de valores em uma tabela. Há, também, uma variedade de limites que podemos calcular utilizando o teorema do Confronto, da mesma forma que o livro utiliza resolvendo um exemplo:

Figura 11 - Técnica com teorema do Confronto

EXEMPLO 10 Uma vez que

$$1-\frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1+\frac{x^2}{2} \quad \text{para qualquer } x \neq 0,$$

determine $\lim_{x\to 0} u(x)$, por mais complicado que seja u.

Solução Como

$$\lim_{x\to 0}\left(1-(x^2/4)\right)=1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+(x^2/2)\right)=1,$$

o teorema do confronto implica $\lim_{x\to 0} u(x)=1$ (Figura 2.13).

Fonte: Thomas (2012, p. 68).

O livro apresenta as propriedades e essas escolhas de resolução como ferramentas úteis no cálculo de limites na seção de exercícios. Cabe ao estudante escolher a forma mais adequada pois alguns limites conseguimos resolver utilizando o teorema do confronto, outros pela manipulação algébrica e assim por diante.

A ideia que inicia a apresentação da definição formal de função é a seguinte: as expressões utilizadas na noção intuitiva como "arbitrariamente próximo de" ou "tão próximo quanto" etc., não nos auxiliam a compreender, de fato, o conceito de limite, pois em vários outros contextos, o conceito de "próximo" pode ter outro significado. Então essas expressões são consideradas vagas (Thomas, 2012). A explicação que o autor dá é que a definição formal substitui essas expressões por condições específicas que poderão ser aplicadas em qualquer contexto. Notamos que, diferentemente dos outros livros, Thomas (2012) enfatiza que a definição intuitiva é informal e não é adequada, precisando da definição formal em algum momento do processo de aprendizagem.

Dessa maneira, por meio de um exemplo, o livro introduz as representações de conceitos matemáticos que aparecem na definição formal, associando-os às expressões usuais da definição intuitiva. O exemplo afirma que, quando a função $y = 2x - 1$ está próxima de 4 no eixo *x*, *parece* que a função se aproxima de 7. Utiliza-se, então, a desigualdade modular para analisar o comportamento da função ao redor de $x_0 = 4$ para descobrir que *x* está próximo de 4 uma unidade para que *y* esteja próximo de 7 por, pelo menos, duas unidades.

Então, a definição formal de limite é apresentada:

> Definição. Seja *f(x)* definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto, possivelmente, no próprio x_0. Dizemos que o **limite de *f(x)* quando *x* tende a $\boldsymbol{x_0}$ é o número *L***, e escrevemos
> $\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$
> Se, para cada número $\varepsilon > 0$, existir um número correspondente $\delta > 0$, de modo que, para qualquer valor de *x*,
> $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (Thomas, 2012, p. 73).

Rachidi, Freitas e Mongelli (2020) fazem um estudo sobre as definições de limite de função e afirmam que foi Weierstrass quem deu a definição formal em termos de quantificadores, essa que os matemáticos utilizam atualmente e que estão presentes nos livros didáticos, como é o caso de Thomas (2012).

O autor relaciona a definição formal de limite com tolerância de erro, ilustrando a definição supondo que estamos construindo um eixo de um gerador com uma tolerância estrita.

> Podemos tentar conseguir um diâmetro L, mas, como nada é perfeito, temos de nos satisfazer com um diâmetro *f(x)* que fique entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$. O δ é a medida de quão precisa deve ser a nossa configuração de controle para *x*, para garantir esse grau de precisão no diâmetro do eixo. [...] o valor de δ, o quão rígido nosso controle precisa ser, depende do valor de ε, a tolerância a erros (Thomas, 2012, p. 73).

Em seguida, o livro utiliza a aplicação da definição formal para mostrar que determinado limite é correto. Isso acontece determinando valores para δ, dado ε. A definição formal de limite pode ser formulada por três maneiras: usando valor absoluto, desigualdades e intervalos (Burigato e Rachidi, 2023). Esta última é a que aparece neste caso. Após apresentar alguns exemplos que mostram como fazê-lo, generaliza o processo em duas etapas. Primeiro, o aluno resolve a inequação $|f(x) - L| < \varepsilon$ e isso o fará encontrar um intervalo aberto que contenha x_0 diferente de x. A segunda etapa é determinar δ "[...] que coloque o intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ centrado em x_0" dentro do intervalo encontrado no primeiro passo e, então, "A inequação $|f(x) - L| < \varepsilon$ valerá para qualquer $x \neq x_0$ nesse intervalo de raio δ" (Thomas, 2012, p. 75). De acordo com a obra, a definição formal também pode ser utilizada para provar teoremas, como na Figura 12.

Figura 12 - Definição formal para provar teoremas em Thomas (2012)

EXEMPLO 7 Dado que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$, e que $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c (exceto, possivelmente, o próprio c), prove que $L \leq M$.

Solução Utilizamos o método da prova por contradição. Suponha, pelo contrário, que $L > M$. Então, pela propriedade do limite da diferença no Teorema 1,

$$\lim_{x \to c} (g(x) - f(x)) = M - L.$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, de modo que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta.$$

Uma vez que $L - M > 0$, por hipótese, tomamos $\epsilon = L - M$ em particular, e temos um número $\delta > 0$, de modo que

$$|(g(x) - f(x)) - (M - L)| < L - M \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta.$$

Como $a \leq |a|$ para qualquer número a, temos

$$(g(x) - f(x)) - (M - L) < L - M \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta$$

o que pode ser simplificado para

$$g(x) < f(x) \text{ sempre que } 0 < |x - c| < \delta.$$

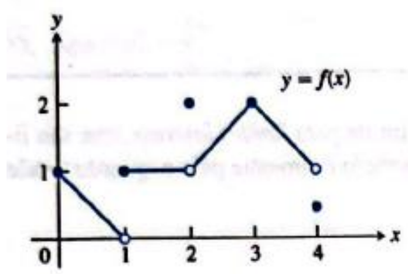
Mas isso contradiz $f(x) \leq g(x)$. Logo, a desigualdade $L > M$ deve ser falsa. Portanto, $L \leq M$.

Fonte: Thomas (2012, p. 77).

Isso pode ser um problema para o processo de aprendizagem do aluno, visto que, na maioria das vezes a definição formal é apresentada para provar propriedades importantes (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020).

Percebemos que, na seção 2.4 que aborda os *limites laterais*, o autor analisa uma quantidade razoável de gráficos de funções específicas. Por exemplo, inicia a seção mostrando o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{|x|}$ para ilustrar que, quando o limite pela direita não é o mesmo que o limite pela esquerda, a função não possui um limite. Outros exemplos gráficos também analisam o domínio da função para mostrar que o limite bilateral em determinado x_0 existe, isto é, tanto pela esquerda quanto pela direita, como é o caso da Figura 13:

Figura 13 - Limite lateral no gráfico em Thomas (2012)



Fonte: Thomas (2012, p. 82).

Os limites laterais em alguns pontos desse gráfico são analisados em um exemplo do livro. O intuito é mostrar que, mesmo que a função esteja definida em certo x_0, o limite de *f(x)* é outro resultado, como é o caso de $x = 2$ e, também, que os limites laterais podem ser diferentes. As definições formais de limites laterais são apresentadas em seguida, em termos de quantificadores. Esse mesmo gráfico (Figura 12) é analisado em um outro exemplo quando a seção 2.5 que aborda o conceito de *continuidade* é introduzida, comparando os pontos em que *f* é contínua, o valor de *f(x)* em determinado x_0 e o cálculo do limite, sempre analisando o domínio do gráfico de *f*:

Figura 14 - Continuidade de f em Thomas (2012)

Pontos em que *f* é contínua:

Em $x = 0$,	$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.
Em $x = 3$,	$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$.
Em $0 < c < 4, c \neq 1, 2$,	$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Pontos em que *f* não é contínua:

Em $x = 1$,	$\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.
Em $x = 2$,	$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$, mas $1 \neq f(2)$.
Em $x = 4$,	$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 1$, mas $1 \neq f(4)$.
Em $c < 0, c > 4$,	esses pontos não estão no domínio de f.

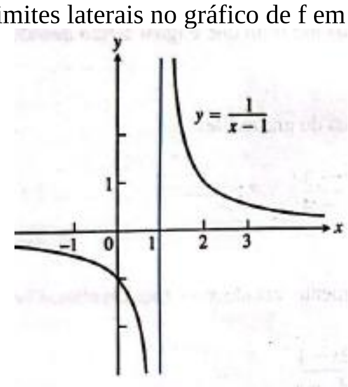
Fonte: Thomas (2012, p. 88).

Como o livro apresenta o conceito de continuidade junto ao capítulo de limite de função, a seção relaciona os dois conceitos por meio de um teste de continuidade, dizendo que, para uma função *f* ser contínua em um ponto *c* pertencente ao seu domínio, deve suprir as seguintes condições: *c* pertence ao domínio da função, o limite de *f* existe quando *x* tende a *c* e esse limite é igual ao valor da função no ponto (Thomas, 2012) A verificação dessas condições é feita num exemplo analisando a função $y = |x|$.

Esta seção se resume em analisar o domínios das funções e verificar em que ponto apresentam descontinuidade e, para isso, percebemos que as representações gráficas são bastante utilizadas para essa análise, inclusive de funções inversas, compostas e trigonométricas, e a manipulação algébrica é utilizada nesses e em outros exemplos, como na determinação da extensão contínua da função que, para funções racionais, "[...] são, geralmente, determinadas pelo cancelamento de fatores comuns" (Thomas, 2012, p. 94).

Por fim, a seção 2.6 trata de *limites que envolvem infinidade e assíntotas de gráficos*. Não nos aprofundaremos nesta seção na íntegra, visto que estamos olhando para os limites de função em um ponto. Porém, há um tópico nesta seção que aborda os *limites infinitos* em que o exemplo inicial pede para determinar os limites laterais da função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ quando $x \to 1^-$ e $x \to 1^+$, analisando o gráfico representado na Figura 15.

Figura 15 - Limites laterais no gráfico de f em Thomas (2012)



Fonte: Thomas (2012, p. 104).

Além disso, discute o comportamento de algumas funções em que o limite é infinito, enfatizando que quando escrevemos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, isso não quer dizer que o limite existe ou que é um número real, mas que o limite não existe porque a função cresce e se torna arbitrariamente grande e positivo quando $x \to a$ (Thomas, 2012). No final, a seção traz as definições precisas de limites infinitos.

> 1. Dizemos que ***f(x)*** **tende a infinito quando** ***x*** **se aproxima de** $\boldsymbol{x_0}$, e escrevemos
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$
> se para cada número *B* positivo real existir um $\delta > 0$ correspondente, de modo que para todo *x*
> $$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B.$$
> 2. Dizemos que ***f(x)*** **tende a menos infinito quando** ***x*** **se aproxima de** $\boldsymbol{x_0}$, e escrevemos
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$
> se para cada número -*B* negativo real existir um $\delta > 0$ correspondente, de modo que para todo *x*
> $$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B$$
> (Thomas, 2012, p. 105).

E as utiliza para provar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Figura 16 - Limite que resulta em zero (Thomas, 2012)

EXEMPLO 14 Prove que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Solução Dado $B > 0$, queremos determinar $\delta > 0$, de modo que

$$0 < |x - 0| < \delta \quad \text{implique} \quad \frac{1}{x^2} > B.$$

Agora,

$$\frac{1}{x^2} > B \quad \text{se, e somente se,} \quad x^2 < \frac{1}{B}$$

ou, de modo equivalente,

$$|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Logo, ao escolher $\delta = 1/\sqrt{B}$ (ou qualquer número positivo menor), vemos que

$$|x| < \delta \quad \text{implica} \quad \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B.$$

Portanto, por definição,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Fonte: Thomas (2012, p. 105-106).

Por fim, define assíntotas verticais, visto que aparecem em exemplos que analisam o domínio de funções em que determinados limites são infinitos. Para essa determinação de assíntotas, o livro também utiliza da manipulação algébrica, como por exemplo, a divisão de polinômios:

Figura 17 - Assíntotas no exemplo em Thomas (2012)

EXEMPLO 15 Determine as assíntotas horizontais e verticais da curva

$$y = \frac{x+3}{x+2}.$$

Solução Estamos interessados no comportamento quando $x \to \pm\infty$ e no comportamento quando $x \to -2$, em que o denominador é zero.

As assíntotas são rapidamente reveladas se reescrevermos a função racional como uma polinomial com um resto, ao dividir $(x+3)$ por $(x+2)$:

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x+2 \\ \cline{2-2} -x-2 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

O resultado nos permite reescrever y como:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

Quando $x \to \pm\infty$, a curva se aproxima da assíntota horizontal $y = 1$; quando $x \to -2$, a curva se aproxima da assíntota vertical $x = -2$. Vemos que a curva em questão é o gráfico de $f(x) = 1/x$ transladada 1 unidade para cima e 2 unidades para a esquerda (Figura 2.65). As assíntotas, em vez de serem os eixos coordenados, são agora as retas $y = 1$ e $x = -2$.

Fonte: Thomas (2012, p. 106).

A seguir, apresentaremos a descrição do Stewart (2017).

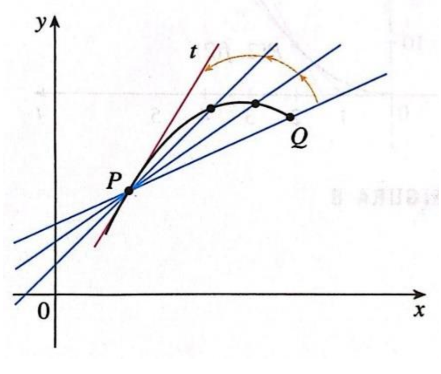
7.2 STEWART (2017)

Antes de começarmos a descrever o capítulo que fala sobre *limites e derivadas*, no início da obra, o autor faz uma apresentação do cálculo para que os estudantes tenham uma visão geral sobre o assunto, antes de estudá-lo de forma aprofundada. Nessa apresentação, o livro discute o fato de que o conceito de limites surge quando resolvemos problemas que envolvem "encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, a velocidade de um carro ou a soma de uma série infinita" (Stewart, 2017, p. XXXV). A apresentação traz o modo que o limite aparece nesses casos. Vamos discutir sobre dois pontos destes citados: o problema da tangente e a velocidade.

Como esta parte inicial é apenas uma visão geral, ao falar sobre reta tangente não a define, porém, a obra pede para imaginá-la como sendo uma reta que toca uma curva em um ponto *P*. Daí, temos o seguinte problema: queremos encontrar uma equação *t* para essa tangente, então, precisamos de sua inclinação. Para isso, são necessários dois pontos sobre *t*, e só temos *P*, "Para contornarmos esse problema, determinamos primeiro uma aproximação para *m*, tomando sobre a curva um ponto próximo Q e calculando a inclinação m_{PQ} da reta secante PQ" (Stewart, 2017, p. XXX).

A inclinação é dada por: $m_{PQ} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Conforme Q se move ao longo da curva em direção a *P*, as retas secantes se aproximam da reta tangente, como na Figura 18:

Figura 18 - retas secantes aproximando-se da reta tangente



Fonte: Stewart (2017, p. XXXI).

Dado esse comportamento, observamos que a inclinação da reta secante se aproxima cada vez mais da inclinação *m* da reta tangente (Stewart, 2017). Então, consideramos que *m* é o limite de m_{PQ} quando Q tende a *P* ao longo da curva.

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ao falar sobre velocidade, discute sobre o significado do velocímetro de um veículo marcar 48 km/h. Se for constante, após uma hora, o veículo percorrerá 48 quilômetros de distância. E se a velocidade variar? O que significa essa marcação de 48 km/h no velocímetro?

(Stewart, 2017). Para esse breve estudo, o analisa a velocidade média nos intervalos de tempo entre 2 e 4 segundos (obtendo 16,5 m/s) e entre 2 e 3 segundos (obtendo 15 m/s). A ideia é que "[...] a velocidade no instante $t = 2$ não pode ser muito diferente da velocidade média durante um pequeno intervalo de tempo que começa em $t = 2$ (Stewart, 2017, p. XXXI). Então, o autor analisa a distância percorrida em intervalos de 0,1 segundo e calcula a velocidade média em diversos intervalos de tempo: [2; 3], [2; 2,5], [2; 2,4],[2; 2,3], [2; 2,2], [2; 2,1] e, organizando os resultados obtidos em uma tabela conforme a Figura 19, percebe-se que a velocidade média parece se aproximar de 10 m/s:

Figura 19 - A velocidade média na tabela em Stewart (2017)

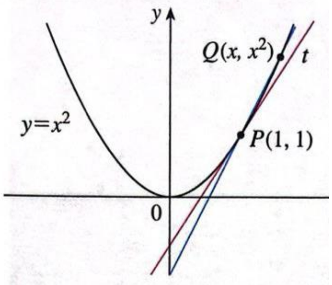
Intervalo de tempo	[2; 3]	[2; 2,5]	[2; 2,4]	[2; 2,3]	[2; 2,2]	[2; 2,1]
Velocidade média (m/s)	15,0	13,6	12,4	11,5	10,8	10,2

Fonte: Stewart (2017, p. XXXII).

Considerando $f(t) = d$ a distância percorrida em função do tempo *t*, a velocidade média no intervalo de tempo $[2, t]$ é igual a inclinação da reta secante PQ, $\frac{f(t)-f(2)}{t-2}$: "A velocidade *v* quando $t = 2$ é o valor-limite da velocidade média quando *t* aproxima-se de 2; isto é, $v = \lim_{t\to 2} \frac{f(t)-f(2)}{t-2}$, e [...] isso é igual à inclinação da reta tangente à curva em *P*" (Stewart, 2017, p. XXXII).

O capítulo 2 de *limites e derivadas* retorna a essa discussão ao encontrar uma equação da reta tangente à $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$. Podemos obter essa equação *t* sabendo a inclinação m, já comentada anteriormente. Escolhemos um ponto $Q(x, x^2)$ e calculamos a inclinação $m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$ da reta secante PQ.

Figura 20 - inclinação da reta secante em Stewart (2017)



Fonte: Stewart (2017, p. 66).

O livro organiza valores de m_{PQ} para valores de *x* próximos de 1, em uma tabela, que é o que acontece quando Q se aproxima de P. Essa análise de tabelas sugere que a inclinação da reta secante está próxima de 2.

Figura 21 - Inclinação da secante na tabela em Stewart (2017)

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

Fonte: Stewart (2017, p. 66).

O autor diz que o limite das inclinações das retas secantes nos dá a inclinação da reta tangente m, resultando em $m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (Stewart, 2017). Com a manipulação algébrica, conseguimos encontrar uma equação da reta tangente, dadas as condições do exemplo.

> Supondo que a inclinação da reta tangente seja realmente 2, podemos usar a forma ponto-inclinação da equação de uma reta $[y - y_1 = m(x - x_1)]$ para escrever a equação da tangente no ponto (1,1) como
>
> $y - 1 = 2(x - 1)$ ou $y = 2x - 1$
>
> [...] À medida que Q tende a P ao longo da parábola, as retas secantes correspondentes giram em torno de P e tendem à reta tangente t (Stewart, 2017, p. 66).

Outro exemplo que o livro traz é relacionado ao problema da velocidade em que pede para encontrar a velocidade de uma bola caindo após cinco segundos que foi solta do alto de uma torre de 450 metros. Considerando que *s(t)* seja a distância percorrida após *t* segundos. Além disso, "[...] Galileu descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda" (Stewart, 2017, p. 68). Sendo assim,

$$s(t) = 4{,}9t^2$$

O livro organiza em uma tabela os resultados da velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores, partindo de $t = 5$. Conforme o tempo se encurta cada vez mais, a velocidade se aproxima de 49 m/s.

Figura 22 - Tabela com a velocidade em intervalo de tempo no Stewart (2017)

Intervalo de tempo	Velocidade média (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53,9
$5 \leq t \leq 5{,}1$	49,49
$5 \leq t \leq 5{,}05$	49,245
$5 \leq t \leq 5{,}01$	49,049
$5 \leq t \leq 5{,}001$	49,0049

Fonte: Stewart (2017, p. 69).

Então, conclui-se que o valor limite das velocidades médias é a velocidade instantânea (Stewart, 2017). Na apresentação que se faz do cálculo no início, o livro já relaciona o cálculo da velocidade ao encontrar as tangentes e, neste exemplo, isso também acontece. Basta considerarmos os pontos $P(a; 4{,}9a^2)$ e $Q(a+h; 4{,}9(a+h)^2)$ e a inclinação da reta secante PQ é $m_{PQ} = \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{(a+h)-a}$, que é a velocidade média no intervalo $[a, a+h]$. Então, "[...] a velocidade no instante $t = a$ (o limite dessas velocidades médias quando h tende a 0) deve ser igual à inclinação da reta tangente em *P* (o limite das inclinações das retas secantes)" (Stewart, 2017, p. 69).

O subtópico 2.2 sobre *limite de uma função* é voltado para os métodos de calcular o limite de uma função e se inicia com o estudo do comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 2$ com valores de *x* ao redor de 2. Este é feito por meio de análise do gráfico e tabela, concluindo que "[...] podemos tornar os valores de *f(x)* tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar *x* suficientemente próximo de 2" (Stewart, 2017, p. 71). Isso é a mesma coisa que,

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x + 2 = 4$$

A partir disso, o livro apresenta a definição intuitiva de limite:

> Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que *f* é definido em algum intervalo aberto que contenha *a*, exceto possivelmente no próprio *a*.) Então escrevemos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> e dizemos "o limite de $f(x)$, quando *x* tende a *a*, é igual a *L*" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de *L* (tão próximos de *L* quanto quisermos), ao tomar *x* suficientemente próximo de *a* (por ambos os lados de *a*), mas não igual a *a* (Stewart, 2017, p. 71).

Para fazer uma estimativa do valor de limites, o livro utiliza análise de gráficos e tabelas para encontrar esse valor. Em um exemplo específico, o autor compara duas tabelas. Primeiro, seu objetivo é estimar o valor de $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$, então atribui valores a *t* perto de 0.

Figura 23 - Tabelas com valores a t perto de zero em Stewart (2017)

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm1{,}0$	0,162277...
$\pm0{,}5$	0,165525...
$\pm0{,}1$	0,166620...
$\pm0{,}05$	0,166655...
$\pm0{,}01$	0,166666...

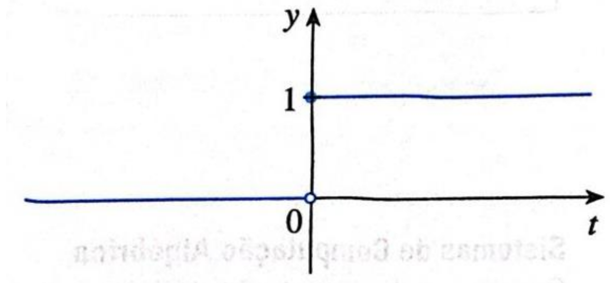
t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm0{,}001$	0,166667
$\pm0{,}0001$	0,166670
$\pm0{,}00001$	0,167000
$\pm0{,}000001$	0,000000

Fonte: Stewart (2017, p. 72).

Pela tabela da esquerda na Figura 23, os valores parecem que tendem a 0,1666666… e, sendo assim, $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{1}{6}$. Mas se escolher *t* cada vez menor, que é o caso da tabela à direita na Figura 23 que mostra valores obtidos por meio de uma calculadora, os valores da função parecem tender a zero. Qual está certo, afinal? O limite é $\frac{1}{6}$, porém, podemos nos confundir, dependendo de tantas casas decimais que a calculadora nos fornece (Stewart, 2017). Esses resultados falsos podem aparecer também com relação a construção do gráfico da função.

A obra analisa em um exemplo o gráfico da função de Heaviside[8] para introduzir as definições de *limites laterais* (limites à esquerda e à direita de *f*):

Figura 24 - Limites laterais na Heaviside em Stewart (2017)



Fonte: Stewart (2017, p. 74).

A ideia de utilizar essa função específica para introduzir essas definições é baseada no fato que $\lim_{t\to 0} H(t)$ não existe, então, precisamos analisar os limites laterais, visto que a função não tende para um número único quando *t* tende a zero. A estratégia nessa parte é fazer a comparação entre os limites laterais para encontrar o resultado do limite em um ponto. Então, o livro utiliza da análise de gráficos e do próprio domínio da função para concluir que:

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \text{ e } \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1 \text{ (Stewart, 2017).}$$

O autor utiliza dessas mesmas técnicas, além de análise de tabelas para abordar os *limites infinitos*, que são aqueles que, de acordo com a definição intuitiva: “[...] podemos fazer os valores de *f(x)* ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos), tornando *x* suficientemente próximos de a, mas não igual a a” (Stewart, 2017, p. 76). Ainda, define assíntotas verticais que, resumidamente, é uma reta $x = a$ em que o limite bilateral (ou os limites laterais) são limites infinitos. A Figura 25 mostra um exemplo que pede para encontrar as assíntotas verticais de uma função.

[8] A função de Heaviside *H(t)* é definida por: se $t<0$, $H(t)=0$ e se $t\geq 0$, $H(t)=1$. Seu nome homenageia o engenheiro elétrico Oliver Heaviside e podemos usar essa função para descrever uma corrente elétrica ligada em $t=0$ (Stewart, 2017).

Figura 25 - Assíntotas verticais de f em Stewart (2017)

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO Como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto $\operatorname{sen} x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

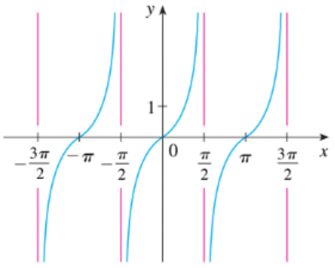


FIGURA 16
$y = \operatorname{tg} x$

Fonte: Stewart (2017, p. 78).

A próxima seção 2.3 sobre *cálculos usando propriedades dos limites* se desprende dos gráficos e das tabelas para se dedicar às regras que podemos utilizar para encontrar limites.

Propriedades dos Limites Supondo que c seja uma constante e os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existam, então

1. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a}[cf(x)] = c\lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, se $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
6. $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, onde n é um inteiro positivo
7. $\lim_{x \to a} c = c$
8. $\lim_{x \to a} x = a$
9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, onde n é um inteiro positivo
10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, onde n é um inteiro positivo (Se n for par, supomos que $a > 0$.)
11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, onde n é um inteiro positivo [Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

(Stewart, 2017, p. 81-83).

Além dessas propriedades de limites que identificamos como técnicas, há também a propriedade da substituição direta para o caso em que f é uma função polinomial ou se for racional em que o a quando $x \to a$ é pertencente ao domínio. No exemplo da Figura 26 abaixo (inclusive, é o mesmo exemplo que fez estimativa por meio de calculadora na seção 2.2), são aplicadas as propriedades 5, 1, 10, 7, e 9, além da manipulação algébrica.

Figura 26 - Exemplo de estimativa na calculadora no Stewart (2017)

EXEMPLO 6 Encontre $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUÇÃO Não podemos aplicar a Propriedade do Quociente de imediato, uma vez que o limite do denominador é 0. Aqui as operações algébricas preliminares consistem em racionalizar o numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{t \to 0}(t^2+9)}+3} \\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Fonte: Stewart (2017, p. 85).

Para finalizar essa seção, também observamos a aplicação do teorema do confronto para mostrar que determinado limite existe e resulta em algum valor numérico, como por exemplo, ao mostrar que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0$. Como $\lim\limits_{x \to 0} sen(\frac{1}{x})$ não existe, o autor aplica o teorema do confronto (ou sanduíche)[9] considerando que o seno de qualquer número está entre -1 e 1 ($-1 \leq sen\frac{1}{x} \leq 1$) e, multiplicando as inequações x^2, obtemos: $-x^2 \leq x^2 sen\frac{1}{x} \leq x^2$. Sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0}(-x^2) = 0$. Pelo teorema do confronto, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 sen\frac{1}{x} = 0$ (Stewart, 2017).

A seção 2.4 apresenta a definição precisa de um limite, explicando que a definição intuitiva é inadequada para alguns propósitos, como demonstrar diversos resultados de limites de funções. Então Stewart (2017) afirma que essa definição é vaga, apresentando a definição formal:

> **Definição Precisa de Limite**. Seja *f* uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a *a* é *L*, e escrevemos
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
> se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que
> se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$
> (Stewart, 2017, p. 91).

[9] De acordo com Stewart (2017, p. 87), esse teorema diz que "[...] se *g(x)* ficar imprensado entre *f(x)* e *h(x)* nas proximidades de *a*, e se *f* e *h* tiverem o mesmo limite *L* em *a*, então *g* será forçada a ter o mesmo limite *L* em *a*".

O autor utiliza essa definição criada por Weierstrass (Rachidi, Freitas e Mongelli, (2020) para provar, em um exemplo, que $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5) = 7$. O primeiro passo que faz parte da solução deste é conjecturar um valor para δ. Então, se $\varepsilon > 0$, queremos δ tal que:

se $0 < |x-3| < \delta$ então $|(4x-5)-7| < \varepsilon$

Como $|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3|$. Assim,

se $0 < |x-3| < \delta$ então $4|x-3| < \varepsilon$

se $0 < |x-3| < \delta$ então $|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$

Concluímos que $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ (Stewart, 2017). O segundo passo é demonstrar que esse delta encontrado funciona. Dessa forma,

> Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Se $0 < |x-3| < \delta$, então
>
> $$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$
>
> Assim,
> se $0 < |x-3| < \delta$ então $|(4x-5)-7| < \varepsilon$
> Portanto, pela definição de limite,
> $\lim\limits_{x\to 3}(4x-5) = 7$ (Stewart, 2017, p. 93-94).

O autor utiliza a definição formal em termos de intervalos e, ao utilizá-la, primeiramente resolve a segunda desigualdade que envolve o épsilon, para conjecturar um valor para delta. Após encontrar um possível valor para delta, volta a analisar a primeira inequação. Esse tipo de demonstração utilizando a aplicação da definição formal de limite também acontece com as definições de limites laterais e infinitos.

Na seção 2.5, o livro define *função contínua* em um número *a* se acontece $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Isso nos quer dizer que, *a* faz parte do domínio da função *f*, o limite existe em *a* e esse limite é o valor da função em *a* (Stewart, 2017). A obra exemplifica quando uma função é descontínua em algum *x*, como é o caso da função Heaviside citada anteriormente, que não é contínua em $x = 0$, pois o limite não existe. Stewart (2017) define, também, função contínua à direita e à esquerda em *a* ($\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, respectivamente).

Nos exemplos desta seção, observamos que o autor utiliza de algumas propriedades de limites para provar que uma função f é contínua em determinado intervalo, além de utilizar manipulação algébrica e análise de gráfico.

Figura 27 - Provando que uma função é contínua em Stewart (2017)

EXEMPLO 4 Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

SOLUÇÃO Se $-1 < a < 1$, então, usando as Propriedades dos Limites, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(pelas Propriedades 2 e 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(pela Propriedade 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(pelas Propriedades 2, 7 e 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Assim, pela Definição 1, f é contínua em a se $-1 < a < 1$. Cálculos análogos mostram que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

logo, f é contínua à direita em -1 e contínua à esquerda em 1. Consequentemente, de acordo com a Definição 3, f é contínua em $[-1, 1]$.

O gráfico de f está esboçado na Figura 4. É a metade inferior do círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

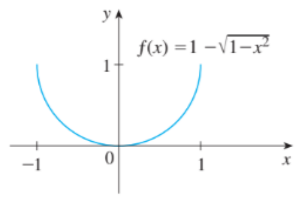


FIGURA 4

Fonte: Stewart (2017, p. 101).

Não nos aprofundaremos nos estudos das seções seguintes deste mesmo capítulo de *limites e derivadas* devido ao foco da pesquisa e ao tempo da investigação. Dessa forma, descrevemos o capítulo de limites de Guidorizzi (2018) no próximo tópico.

7.3 GUIDORIZZI (2018)

Como já dito anteriormente, a obra de Guidorizzi (2018) traz o conceito de limite no terceiro capítulo e apresenta o conceito de limite e continuidade de maneira simultânea. Esse livro didático, em comparação com os outros analisados, apresenta o conceito de limite de uma maneira diferente, mesmo com a estrutura sendo semelhante, de certa forma, apresentando, nesta ordem, a definição intuitiva, exemplos, logo após exercícios, a definição formal, exemplos e exercícios relacionados a essa definição.

A primeira coisa que o autor faz na introdução do capítulo antes de definir limite, é definir intuitivamente o conceito de função contínua em um ponto qualquer, como sendo a função em que o gráfico não apresenta um “salto” nesse ponto. Então, Guidorizzi (2018) apresenta a definição intuitiva da seguinte forma:

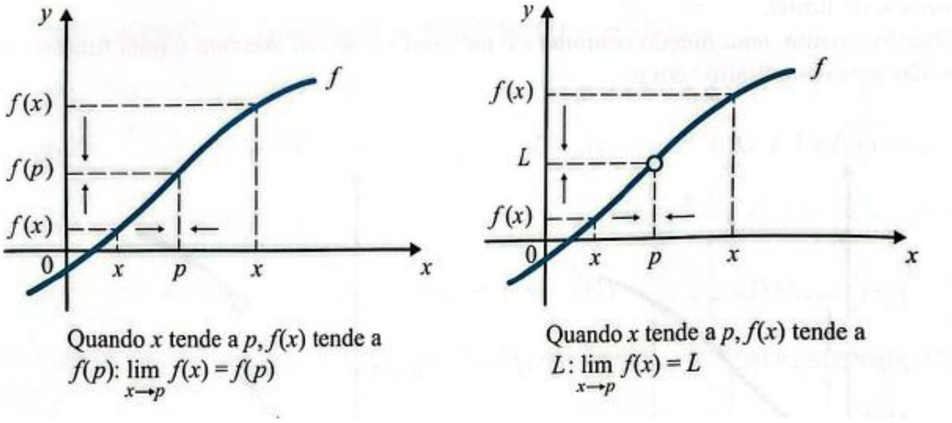
> Intuitivamente, dizer que *o limite de* $f(x)$, *quando x tende a p, é igual a L* que, simbolicamente, se escreve,
>
> $$\lim_{x \to p} f(x) = L$$
>
> significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L (Guidorizzi, 2018, p. 56).

E observa, por meio de dois gráficos, que podemos ter dois casos:

1º caso: quando *x* é ponto pertencente ao domínio da função, o valor do limite coincide com o valor da função no ponto;

2º caso: quando *x* não é ponto do domínio da função, então o valor do limite não vai coincidir com o valor da função no ponto.

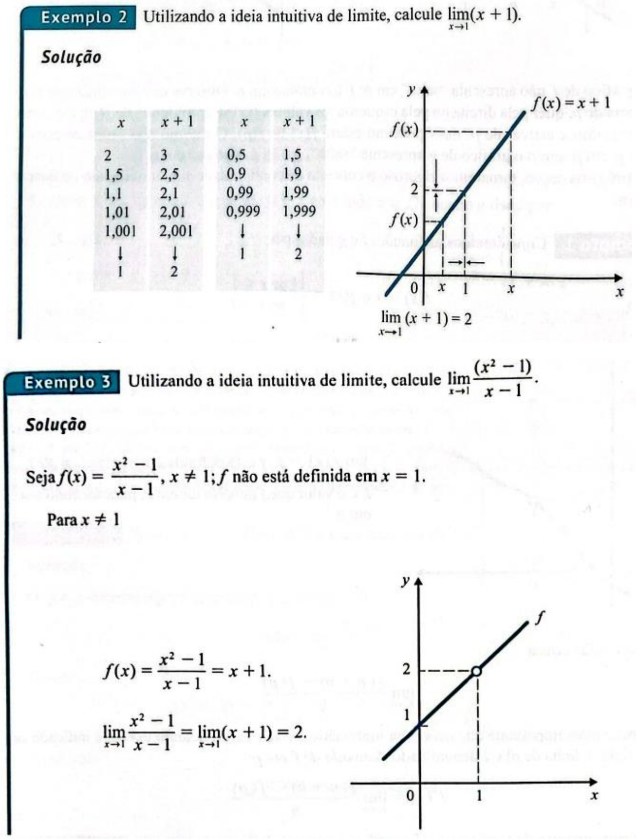
Figura 28 - Gráficos representando a definição intuitiva



Fonte: Guidorizzi (2018, p. 56).

Essa é a apresentação que o livro faz para trazer a definição de forma intuitiva e acredita ser suficiente para já discutir os exemplos resolvidos, como os dois representados pela Figura 29:

Figura 29 - Definição intuitiva nos exemplos no Guidorizzi (2018)



Exemplo 2 Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to 1}(x+1)$.

Solução

x	$x+1$	x	$x+1$
2	3	0,5	1,5
1,5	2,5	0,9	1,9
1,1	2,1	0,99	1,99
1,01	2,01	0,999	1,999
1,001	2,001	↓	↓
↓	↓	1	2
1	2		

$$\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Exemplo 3 Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)}{x-1}$.

Solução

Seja $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$; f não está definida em $x = 1$.

Para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 56).

Podemos observar que nos exemplos supracitados, o autor pede que sejam resolvidos utilizando a ideia intuitiva de limite. Então, de acordo com a solução apresentada, os alunos podem resolvê-los de várias formas, como por exemplo, atribuindo valores a *x* na função *f(x)* e fazendo a organização dessas informações numa tabela, analisando para onde os valores estão "tendendo". Outra forma de resolver este tipo de exercício, é construindo o gráfico da função e fazendo sua análise. No caso do exemplo 2, o aluno pode não apresentar dificuldades na construção do gráfico da função $f(x) = x + 1$. Então, com o gráfico construído, consegue olhá-lo e notar que, de acordo com a ideia intuitiva de limite que a obra apresenta, *quando x tende a 1, f(x) tende a 2,* portanto, $\lim_{x\to 1}(x + 1) = 2$.

Já no exemplo 3, o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ não é intuitivo como no exemplo anterior. Então para a solução, o autor primeiramente faz uma análise do domínio da função, percebendo que *f(x)* não está definida em $x = 1$. Por conta disso, então, utiliza a manipulação algébrica para simplificar a expressão da função, de maneira que dê para calcular o limite. Essa manipulação, que não é explícita no exemplo, faz com que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$. Agora, conseguimos calcular o limite, visto que $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2$. O autor explana brevemente sobre o limite da *razão incremental* que é denominado de derivada de *f* em *p*, sendo $f'(p) = \lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ que aparece, de forma "*natural*" quando vamos definir a reta tangente a um gráfico de uma função *f* qualquer no ponto *(p, f(p))* (Guidorizzi, 2018). Logo em seguida, mais três exemplos são apresentados com solução relacionados ao limite da razão incremental. Vamos discutir sobre um deles, na Figura 30:

Figura 30 - Limite da razão incremental em Guidorizzi (2018)

Exemplo 5 Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(x)$.

Solução

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h \ (h \neq 0)$$

Segue que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x.$$

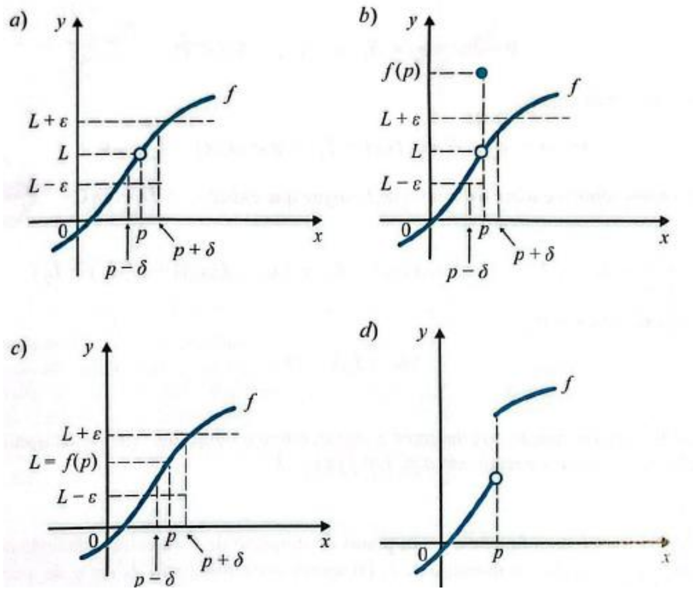
Ou seja, a derivada, em x, de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$.

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 59).

Como o conceito de derivada de uma função é abordado em capítulos posteriores ao de limite, isso não impede o autor de antecipar algumas discussões, explicando que a derivada é um limite e que, para estudarmos as propriedades da derivada, é necessário que estudemos as propriedades dos limites (Guidorizzi, 2018).

Na seção 3.3, antes de apresentar a definição de limite, o livro apresenta quatro situações por meio de gráficos e faz um estudo para observar se nessas situações a função f satisfaz a propriedade "para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f, p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$" (Guidorizzi, 2018, p. 71). No caso, essa propriedade foi estudada na seção 3.2 quando o autor apresentou a definição de Função Contínua. As situações que o autor analisa são as que estão na Figura 31:

Figura 31 - Situações em Guidorizzi (2018)



Fonte: Guidorizzi (2018, p. 71).

No caso a, f não está definida em p, mas existe um L que satisfaz a propriedade citada. No caso b, f está definida em p, mas neste mesmo ponto não é contínua, pois apresenta "salto", porém, existe um L que satisfaz a propriedade. No caso c, f é contínua em p, então $L = f(p)$ que satisfaz a propriedade. Por fim, no caso d, não existe L que satisfaz a propriedade citada, visto que, no ponto p, a função f não está definida e nem é contínua. Também, com esta propriedade, o autor prova que o número L que satisfaz a propriedade é único (Guidorizzi, 2018). Esse único L é o limite da função *f(x)*, quando x tende a p. Depois das análises e demonstração, o livro define limite em termos de quantificadores, como definido por Weierstrass (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020):

> Definição. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f. Dizemos que f *tem limite* L, *em* p, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$ $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \varepsilon < |f(x) - L| < \varepsilon$.
> Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

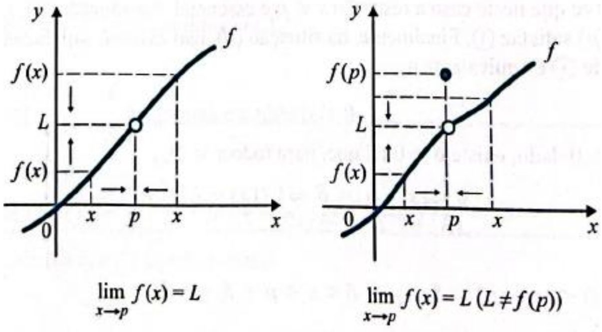
Assim,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \delta > 0, \exists \delta > 0 \; tal\ que, para\ todo\ x \; \in \; D_f\}$$

$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (Guidorizzi, 2018, p. 72).

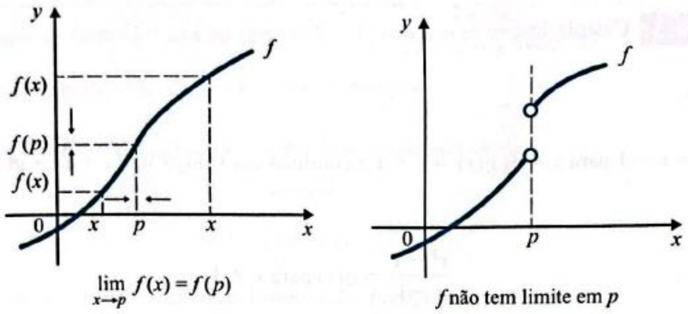
Então, Guidorizzi (2018) retorna às situações que analisou no início do tópico, para olhar para os gráficos, agora pensando no limite da função *f* no ponto p.

Figura 32 - Limites no gráfico em Guidorizzi (2018)



Fonte: Guidorizzi (2018, p. 72).

Figura 33 - Análise dos limites no gráfico em Guidorizzi (2018)



Fonte: Guidorizzi (2018, p. 73).

O livro conclui que a comparação entre as definições resulta que "*f* contínua em $p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p)$" (Guidorizzi, 2018, p. 73) e também afirma que, se quisermos saber o limite de uma função *f* no ponto *p*, basta analisarmos os valores que *f* assume no pequeno intervalo aberto contendo *p*. Logo em seguida, alguns exemplos são apresentados e notamos a intenção do autor em trazer o cálculo do limite da função e, ao mesmo tempo, estudando se a função é contínua ou não no ponto em que *x* tende.

Figura 34 - Análise da continuidade e do limite em Guidorizzi (2018)

Exemplo 4 Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ em que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Solução

Para $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$; assim

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2 \neq f(1).$$

(Observe que $f(1) = 3$.) Pelo fato de $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ segue que f *não* é contínua em 1.

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 74).

A partir do momento que a definição de limite em termos de épsilon e delta é apresentada, os exemplos se desprendem das representações gráficas e também da atribuição de valores organizados em uma tabela, ambas associadas a definição intuitiva de limite. O que vemos a partir desse momento são mais manipulações algébricas e análise do domínio da função.

Em seguida, o autor admite propriedades de limite para utilizá-las nos exemplos, de acordo com a Figura 35.

Figura 35 - Propriedades do limite no Guidorizzi (2018)

Provaremos, na Seção 3.6, que se $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$, então

a) $\lim_{x\to p}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2 = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x)$.

(O limite de uma soma é igual à soma dos limites das parcelas.)

b) $\lim_{x\to p} k\, f(x) = kL_1 = k \lim_{x\to p} f(x)$ (k constante).

c) $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2 = \lim_{x\to p} f(x) \lim_{x\to p} g(x)$.

(O limite de um produto é igual ao produto dos limites dos fatores.)

d) $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 75).

Conseguimos identificar algumas dessas propriedades nas técnicas utilizadas para a solução dos exemplos que a seção apresenta, como mostra a Figura 36:

Figura 36 - Exemplo 6 e 7 do Guidorizzi (2018)

Exemplo 6 Calcule $\lim_{x\to 2}(5x^3 - 8)$

Solução

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(5x^3 - 8) &= \lim_{x\to 2} 5x^3 + \lim_{x\to 2}(-8)\\ &= 5\lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} -8\\ &= 5\cdot 2^3 - 8 = 32\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 - 8) = 32.$$

Exemplo 7 Calcule $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$.

Solução

Como $\lim_{x\to 3}(x-3) = 0$, a propriedade (d) não se aplica.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \text{ para } x \neq 3$$

e

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

segue-se que

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 75).

Notamos que o livro valoriza a aplicação das propriedades que estão atreladas diretamente à definição formal apresentada. A ideia que percebemos aqui é que o estudante escolhe as técnicas que acredita ser pertinente para a solução do exemplo ou da atividade. Como no exemplo da Figura 36, em que a técnica identificada na propriedade (d) não se aplica, por conta do domínio da função, então o estudante poderá recorrer à outra técnica para a resolução, como a manipulação algébrica. Isso se relaciona com o que Rachidi, Freitas e Mongelli (2020) trazem sobre os livros didáticos, que apesar de insistirem na definição formal em termos de épsilons e deltas, acabam que propõem aos estudantes apenas os cálculos de limites com utilização de regras de resolução.

Como anteriormente o livro traz que f contínua em $p \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$, utiliza as técnicas das propriedades de limite citadas para discutir sobre continuidade de funções, como na Figura 37:

Figura 37 - Exemplo discutindo continuidade de funções no Guidorizzi (2018)

Exemplo 11 Sejam f, g contínuas em p e k uma constante. Então $f+g$, kf e $f \cdot g$ são contínuas em p; $\frac{f}{g}$ também será contínua em p, desde que $g(p) \neq 0$.

Solução

Como f e g são contínuas em p, $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ e $\lim_{x \to p} g(x) = g(p)$. Segue das propriedades (*a*), (*b*) e (*c*) dos limites que

$$\lim_{x \to p} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x) = f(p) + g(p),$$

$$\lim_{x \to p} kf(x) = k \lim_{x \to p} f(x) = kf(p)$$

e

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to p} g(x) = f(p)g(p);$$

logo, $f+g$, kf e $f \cdot g$ são contínuas em p.

Sendo $g(p) \neq 0$

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(p)}{g(p)}$$

logo $\frac{f}{g}$ é também contínua em p.

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 79).

O autor também traz algumas breves discussões em alguns exemplos sobre a continuidade de algumas funções, como a função racional e a função polinomial, que não nos aprofundaremos nesta análise. Em seguida, identificamos a técnica que se refere diretamente à definição formal de limite em termos de épsilon e delta. O aluno deve manipulá-la para demonstrar se a afirmação que é feita no enunciado é verdadeira como é o caso da Figura 38:

Figura 38 - Definição formal no exemplo no Guidorizzi (2018)

Exemplo 18 (*Conservação do sinal.*) Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = L$, com $L > 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

Solução

Sendo $\lim_{x \to p} f(x) = L$, para todo $\varepsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Para $\varepsilon = L$, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f$,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow L - L < f(x) < L + L,$$

ou seja,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 79).

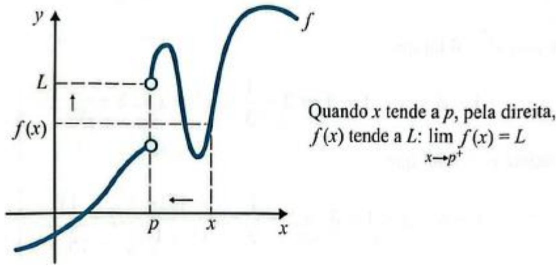
A seção 3.4 sobre *limites laterais* se inicia apresentando a definição de *limite lateral à direita de f* no ponto p. O autor que, até então, tinha usado as representações gráficas apenas para discutir sobre a relação entre a continuidade de uma função em um ponto e o limite, agora as utiliza para mostrar a definição dos limites laterais, também aproveita para introduzir as notações. Define *limite lateral à direita de f em p* da seguinte forma:

> Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$. Definimos:

> $\lim\limits_{x\to p^{+}} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
> O número L, quando existe, denomina-se *limite lateral à direita de f*, em p (Guidorizzi, 2018, p. 82).

E traz o gráfico representando o que "acontece", por assim dizer, na definição.

Figura 39 - Definição de limite lateral no gráfico no Guidorizzi (2018)

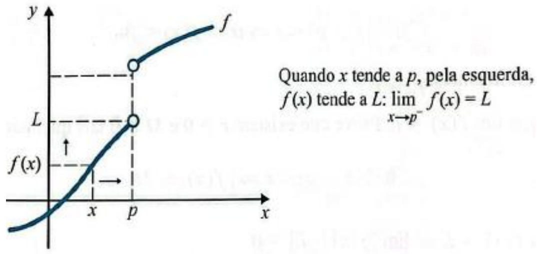


Fonte: Guidorizzi (2018, p. 82).

Define também *limite lateral à esquerda de f em p*, que acompanha da representação gráfica, de acordo com a Figura 40:

> Suponhamos, agora que exista um real a tal que $]a, p[\subset D_f$. Definimos $\lim\limits_{x\to p^{-}} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
> O número L, quando existe, denomina-se *limite lateral à esquerda de f*, em p (Guidorizzi, 2018, p. 82).

Figura 40 - Definição de limite lateral pela esquerda no Guidorizzi (2018)



Fonte: Guidorizzi (2018, p. 82).

Guidorizzi (2018), então, apresenta exemplos nessa seção que, basicamente, envolve o cálculo dos limites laterais à direita e à esquerda de *f* em algum ponto.

Figura 41 - Limites laterais no exemplo em Guidorizzi (2018)

Exemplo 2 Calcule $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \frac{|x|}{x}$ e $\lim\limits_{x\to 0^{-}} \frac{|x|}{x}$.

Solução

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^{+}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x\to 0^{-}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} -1 = -1.$$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 83).

Nesses exemplos resolvidos, a solução envolve a análise do domínio da função. De acordo com a introdução das definições, essa análise consiste em comparar os limites laterais calculados. Como os gráficos foram utilizados, uma maneira dos alunos resolverem esse tipo de tarefa é fazer um esboço da representação gráfica da função (isso se for algo fácil), ou utilizar algum *software* como GeoGebra, por exemplo, e pensar em como seria seu domínio.

A seção 3.5 sobre *Limite de Função Composta* começa explicando que o objetivo é estudar o limite $\lim_{x \to p} g(f(x))$. Para isso, a imagem da função f $(Im\, f = \{f(x) | x \in D_f\})$ deve estar contida no domínio da função g, $g(x)$ deve estar definida. Guidorizzi (2018) supõe que $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e, consequentemente, espera-se que $\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u)$, considerando que $u = f(x)$ e $u \to a$ para $x \to p$. O livro comenta que isso só será válido:

- quando g for contínua em a;
- quando g não estiver definida em a; e
- quando g estiver definida em a mas não for contínua nesse ponto, se ocorrer $f(x) \neq a$ para *x* próximo de *p*.

Os dois primeiros pontos são o foco da seção.

A partir disso, a Figura 42 a seguir é apresentada para mostrar a técnica que Guidorizzi (2018) propõe ao estudante de como resolver tipos de tarefas que envolvam o estudo de limites de função composta.

Figura 42 - técnica para resolver limite em Guidorizzi (2018)

$$\lim_{x \to p} F(x) = ?$$

Suponhamos que existam funções $g(u)$ e $u = f(x)$, no qual g ou é contínua em a ou não está definida em a, tais que

$$F(x) = g(u) \text{ em que } u = f(x), x \in D_f, \lim_{x \to p} f(x) = a \; (u \to a \text{ para } x \to p)$$

e que $\lim_{u \to a} g(u)$ exista. Então

$$\lim_{x \to p} F(x) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 85).

Há alguns exemplos resolvidos que pedem ao estudante para calcular o limite da função composta em que a resolução consiste em utilizar esse passo-a-passo de aplicação do cálculo de limite de função composta. Um exemplo desse tipo de tarefa aparece na Figura 43.

Figura 43 - Limite de função composta em Guidorizzi (2018)

Exemplo 3 Calcule $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x+1}$.

Solução

Façamos $u = \sqrt[3]{x+2}$; assim $x = u^3 - 2$.

$$\frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x+1} = \frac{u-1}{u^3-1}, \ u = \sqrt[3]{x+2}, \ x \neq -1.$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{u \to 1} \frac{u-1}{u^3-1}$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Assim,

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 86).

Essa mesma técnica de aplicação do método de calcular o limite de uma função composta (“chamar” a função *g(x)* de *u*, por assim dizer.) é utilizada em exemplos que pedem para provar/demonstrar alguma afirmação. Guidorizzi (2018) demonstra dois teoremas que seguem do limite de funções composta. O Teorema 1 nos diz que “Sejam f e g duas funções tais que $Im\, f \subset D_g$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então, $\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u)$” (Guidorizzi, 2018, p. 87) e o Teorema 2 diz “Sejam f e g duas funções tais que $Im\, f \subset D_g$, $\lim_{x \to p} f(x) = a$ e $\lim_{u \to a} g(u) = L$. Nestas condições, se existir um $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x - p| < r$, então $\lim_{x \to p} g(f(x)) = a$ existirá e $\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u)$ (Guidorizzi, 2018, p. 88).

O primeiro teorema é acompanhado de um exemplo breve que discute que a composta de funções contínuas também é contínua. O segundo teorema apresentado também acompanha um exemplo, na Figura 44:

Figura 44 - Teorema no exemplo no Guidorizzi (2018)

Exemplo 7 Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$ e dadas por $f(x) = 1$ e $g(u) = \begin{cases} u+1 & \text{se } u \neq 1 \\ 3 & \text{se } u = 1 \end{cases}$

Temos

$$\lim_{x \to p} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{u \to 1} g(u) = 2.$$

Como $g(f(x)) = 3$ para todo x, segue que

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) \neq \lim_{u \to 1} g(u).$$

Este fato ocorre em virtude de não estar satisfeita a condição “existe $r > 0$ tal que $f(x) \neq 1$ para $0 < |x - p| < r$”.

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 89).

Esse exemplo serve para mostrar que a condição “existe um $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x - p| < r$” é indispensável, pelo fato de g estar definida no ponto, mas não ser contínua no ponto. Na Figura 44, o autor diz que o fato ocorreu nesse caso pelo fato da condição não ser satisfeita, porém, não entra em detalhes.

Rachidi, Freitas e Mongelli (2020) discutem em seu livro que, dependendo da definição formal que o autor aborda no livro, isso pode ser um problema para encontrar limite de uma função composta. Consideramos a seguinte proposição:

> Seja $f: E \to \mathbb{R}$ e $g: F \to \mathbb{R}$, duas funções com $f(E) \subset F$ (de modo que a função $g$of é definida sobre *E*). Seja *a* em *E* e suponhamos que *f* tem o limite *b* em *a* com *b* em *F* e *g* tem um limite em *b*. Então a função $g$of tem o limite em *a* (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020, p. 134).

O estudante pode ser levado a um problema matemático pois, caso a definição afirme que $0 < |x - a| < \delta$, ou seja, *x* não pode assumir o valor de *a*, então deve ser exigido que a função *g* deve ser contínua em *b*.

Na seção *3.6 Teorema do Confronto*, o livro apresenta o teorema e já traz alguns exemplos:

> **Teorema (do confronto).** Sejam *f*, *g*, *h* três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que
> $$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$
> para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se
> $$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$$
> então
> $\lim_{x \to p} g(x) = L$. (Guidorizzi, 2018, p. 90).

Os exemplos consistem na aplicação deste teorema, o que identificamos como a técnica utilizada para resolução dos exemplos que envolvem a demonstração de alguma afirmação e também para aqueles que pedem o cálculo do limite.

Na seção *3.8 O Limite Fundamental* $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x}$, o autor utiliza de manipulações algébricas, juntamente ao teorema do confronto para apresentar o limite fundamental do cálculo $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$. Os exemplos presentes nesta seção consistem no cálculo de limite com o uso da aplicação do cálculo de limite de função composta e também da manipulação algébrica, como mostramos na Figura 45:

Figura 45 - Função composta no limite em Guidorizzi (2018)

Exemplo 1 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$.

Solução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x \to 0} 5 \cdot \frac{\operatorname{sen} 5x}{\underbrace{5x}_{u}} = \lim_{u \to 0} 5 \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 5,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5.$$

Exemplo 2 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Solução

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2},$$

pois, $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = 1$ e $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 95).

As seções *3.7 Continuidade das Funções Trigonométricas* e *3.9 Propriedades Operatórias. Demonstração do Teorema do Confronto*[10] não contém exemplos e nem exercícios para discutirmos, contendo apenas explanações acerca do subtópico.

Conforme as descrições das obras, o próximo subtópico apresenta um quadro das tarefas e técnicas identificadas nos livros.

7.4 Quadro do bloco saber-fazer identificado

Nesta seção, organizamos um quadro com os tipos de tarefa identificados. As colunas estão ordenadas pelos livros de acordo com a sequência seguida na seção de suas descrições – sendo assim, Thomas (2012), Stewart (2017) e Guidorizzi (2018).

Os tipos de tarefa foram classificados de acordo com o livro (*T* – Thomas, *S* – Stewart e *G* – Guidorizzi) e enumerados conforme aparecem no decorrer do capítulo, por exemplo, o primeiro tipo de tarefa que identificamos no Thomas (2012) é T_{T_1}: *Calcule/determine/estime a velocidade média*. Já em Guidorizzi (2018), o primeiro foi T_{G_1}: *Calcule o limite*, assim por diante. Isso quer dizer que, a primeira atividade que notamos em Thomas (2012) é relacionada ao cálculo da velocidade média, enquanto, em Guidorizzi (2018), se refere ao cálculo de limite.

O Quadro 1 apresentado a seguir, contém os tipos de tarefa identificados e nos auxiliará na análise para obtermos uma visão geral da estrutura de cada obra, com relação à apresentação do conceito de limite de função.

Quadro 1 – Tipos de tarefas presentes nas obras

[10] A seção *3.7* discute brevemente sobre o fato das funções trigonométricas seno e cosseno serem funções contínuas. Já a seção *3.9* traz as demonstrações das propriedades para calcular limites de função e, além disso, traz a demonstração do teorema do Confronto.

Tarefas presentes nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
T_{T_1}: Calcule/determine/estime a velocidade média.	T_{S_1}: Encontrar uma equação da reta tangente ao gráfico.	T_{G_1}: Calcule o limite
T_{T_2}: Determine o coeficiente angular.	T_{S_2}: Esboçar o gráfico.	T_{G_2}: Esboce o gráfico
T_{T_3}: Escreva a equação para a tangente.	T_{S_3}: Estimar/encontrar a inclinação da reta tangente.	T_{G_3}: Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to p} \lvert f(x)\rvert = 0$
T_{T_4}: Determine a taxa de variação média.	T_{S_4}: Encontrar a velocidade do objeto (média ou instantânea).	T_{G_4}: Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(p+h) = L$
T_{T_5}: Trace pontos.	T_{S_5}: Encontrar a inclinação da reta secante.	T_{G_5}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f, p-\delta < x < p+\delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0$ (supondo que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L, com\ L > 0$)
T_{T_6}: Faça uma tabela.	T_{S_6}: Estimar/encontrar/estabelecer/determinar/calcular o valor do limite.	T_{G_6}: Justifique o cálculo;
T_{T_7}: Calcule/determine/estime o limite.	T_{S_7}: Analisar o limite.	T_{G_7}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow 2-\frac{1}{3} < x^2 + x < 2+\frac{1}{3}$
T_{T_8}: Estime a velocidade instantânea.	T_{S_8}: Encontrar as assíntotas verticais da função.	T_{G_8}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow 2-\frac{1}{2} < \frac{x^5+3x}{x^2+1} < 2+\frac{1}{2}$
T_{T_9}: Estime a velocidade máxima.	T_{S_9}: Explicar o significado da equação/do limite.	T_{G_9}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que $0 < \lvert x-p\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) < g(x)\rvert$ (supondo f e g definidas no conjunto dos números reais, com $g(x) \neq 0$ para todo x e que $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$)

Tarefas presentes nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
$T_{T_{10}}$: Determine a taxa instantânea.	$T_{S_{10}}$: Faça uma conjectura sobre o valor do limite.	$T_{G_{10}}$: Prove que existe $r > 0$, α e β tais que, para todo $x \in D_f$, $0 < \|x - p\| < r \Rightarrow \alpha < f(x) < \beta$ (supondo que $\lim_{x \to p} f(x) = L$)
$T_{T_{11}}$: Determine a taxa máxima.	$T_{S_{11}}$: Avaliar a função/o limite.	$T_{G_{11}}$: Interprete graficamente a afirmação (esse tipo de tarefa aparece no exercício em que se pede $T_{G_{10}}$)
$T_{T_{12}}$: Estudar/discutir/Comente o comportamento da função.	$T_{S_{12}}$: Mostre/prove/demonstre o limite.	$T_{G_{12}}$: Prove que existem $r > 0$ e $M > 0$ tais que, para todo $x \in D_f$, $0 < \|x - p\| < r \Rightarrow \|f(x)\| \leq M$ (supondo que $\lim_{x \to p} f(x) = L$)
$T_{T_{13}}$: Avaliar a função/o limite.	$T_{S_{13}}$: Mostre que existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$ (sendo $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$). (função maior inteiro).	$T_{G_{13}}$: Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to p} [f(x) - L] = 0$
$T_{T_{14}}$: Explique o significado do limite.	$T_{S_{14}}$: Mostre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ (sendo p um polinômio).	$T_{G_{14}}$: Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \|f(x) - L\| = 0$
$T_{T_{15}}$: Especifique as regras do teorema.	$T_{S_{15}}$: Mostre que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ (sendo r uma função racional).	$T_{G_{15}}$: Prove que $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{x-p} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{\|x-p\|} = 0$
$T_{T_{16}}$: Esboce/faça o gráfico.	$T_{S_{16}}$: Demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (sendo $f(x) = \{x^2 \; se \; x$ é $racional \; e \; 0 \; se \; x$ é $irracional.$)	$T_{G_{16}}$: Prove que $L \geq 0$ (supondo que existe $r > 0$ e $f(x) \geq 0$ para $0 < \|x - p\| < r$ e que $\lim_{x \to p} f(x) = L$)
$T_{T_{17}}$: Confirme a estimativa do limite.	$T_{S_{17}}$: Mostre que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x)$ pode existir mesmo que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ não existam.	$T_{G_{17}}$: Calcule os limites laterais
$T_{T_{18}}$: Trace a função no sistema algébrico computacional.	$T_{S_{18}}$: Mostre que $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)]$ pode existir mesmo que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ não existam.	$T_{G_{18}}$: Verifique que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ (com $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$)

Tarefas presentes nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
$T_{T_{19}}$: Mostre/prove o limite;	$T_{S_{19}}$: Encontre um número δ.	$T_{G_{19}}$: Dê exemplo de uma função definida no conjunto dos números reais, que não seja contínua em 2, mas que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
$T_{T_{20}}$: Determine um número δ.	$T_{S_{20}}$: Ilustre a definição.	$T_{G_{20}}$: Prove que $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) \geq 0$ (supondo que exista $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $p < x < p + r$)
$T_{T_{21}}$: Prove que $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$ (dado que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$).	$T_{S_{21}}$: Verifique que outra escolha possível de δ para mostrar que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ é $\delta = min\{2, \frac{\varepsilon}{8}\}$.	$T_{G_{21}}$: Prove que $\lim\limits_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = 0$ (supondo que f é uma função definida em um intervalo aberto I, $p \in I$ e $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in I$)
$T_{T_{22}}$: Prove que $L \leq M$ (dado que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to c} f(x) = M$, e que $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, o próprio c).	$T_{S_{22}}$: Verifique que a maior escolha possível de δ para que se possa mostrar que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.	$T_{G_{22}}$: Calcule o limite da função composta
$T_{T_{23}}$: Esboce o intervalo.	$T_{S_{23}}$: Demonstre que $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, se $a > 0$. (Dica: Use $\lvert\sqrt{x} - \sqrt{a}\rvert = \frac{\lvert x-a\rvert}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$).	$T_{G_{23}}$: Prove que $\lim\limits_{x\to p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$ (supondo $g(x) \neq 0$, para todo $x \in D_g$, $L \neq 0$ e $\lim\limits_{x\to p} g(x) = L$)
$T_{T_{24}}$: Determine um intervalo aberto em torno de x_0.	$T_{S_{24}}$: Prove que $\lim\limits_{t\to 0} H(t)$ não existe, se $a > 0$. (Dica: Use uma prova indireta como segue. Suponha que o limite L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar a uma contradição).	$T_{G_{24}}$: Prove que $\lim\limits_{x\to p} f(x)g(x) = 0$ (supondo f e g com mesmo domínio A tais que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = 0$, $\lvert g(x)\rvert \leq M$ para todo x em A sendo $M > 0$ número real fixo)

Tarefas presentes nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
$T_{T_{25}}$: Defina o significado de $\lim_{x \to 0} g(x) = k$;	$T_{S_{25}}$: Demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe, sendo $f(x) = 0, se\ x$ é $racional\ e\ f(x) = 1, se\ x$ é $irracional$.	$T_{G_{25}}$: Prove que $\lim_{x \to p} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to p} \lvert f(x) \rvert = \lvert L \rvert$
$T_{T_{26}}$: Prove que $\lim_{h \to 0} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{h \to 0} f(h + c) = L$.	$T_{S_{26}}$: Demonstre o teorema $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$.	$T_{G_{26}}$: Prove que $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{\lvert h \rvert} = 0$ τ_{G_4}: manipulação algébrica;
$T_{T_{27}}$: Mostre, com um exemplo, que a afirmação "O número L é o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de x_0, se $f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de x_0" está incorreta.	$T_{S_{27}}$: Descrever as situações nas quais um limite pode não existir.	$T_{G_{27}}$: Prove que existe $r > 0$ tal que $cosx - 1 < \frac{senx}{x} - 1 < 0$ para $0 < \lvert x \rvert < r$
$T_{T_{28}}$: Mostre, com um exemplo, que a afirmação "O número L é o limite de $f(x)$ à medida que x se aproxima de x_0, se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um valor de x para o qual $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$" está incorreta.	$T_{S_{28}}$: Enunciar as propriedades dos limites.	
$T_{T_{29}}$: Calcule/determine/estime os limites laterais.		
$T_{T_{30}}$: Determinar as assíntotas verticais e horizontais da função.		

Fonte: Acervo das autoras.

De acordo com o Quadro 1, identificamos trinta tipos de tarefas em Thomas (2012), vinte e oito em Stewart (2017) e vinte e sete no Guidorizzi (2018). Notamos que os livros de Thomas (2012) e Stewart (2017) propõem atividades consideravelmente semelhantes. Antes de apresentar a definição de limite, Thomas (2012) faz um estudo prévio sobre velocidade média e instantânea e o estudo da reta tangente e seu coeficiente angular, por sua vez, Stewart (2017) relaciona o limite com o estudo da tangente. Ambas as obras associam a análise de gráficos e tabelas com a definição intuitiva de limite.

Algumas atividades propostas por Stewart (2017) pedem que o aluno utilize a definição formal com épsilon e delta para fazer algumas demonstrações. Thomas (2012) espera que os alunos consigam explicar o significado de alguns cálculos de limites. Guidorizzi (2018), assim como as outras duas obras, associa a análise de gráficos e tabelas com a definição intuitiva, porém, preza pelo cálculo de limites e a utilização da definição formal de limite para demonstrações. Comentaremos mais detalhes na seção referente à análise dos livros didáticos.

No Quadro 2 a seguir, apresentamos os tipos de tarefas e suas respectivas técnicas que são comuns entre as obras. O quadro não contém os que não são comuns entre os livros. Além disso, os espaços vazios significam que não identificamos aquele tipo de tarefa na respectiva obra.

Quadro 2 – Tipos de tarefas e técnicas comuns entre os livros didáticos

Tarefas e técnicas identificadas nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
T_{T_1}: Calcule/determine/estime a velocidade média. τ_{T_1}: Dividir Δy por Δx. τ_{T_2}: Análise de tabela. T_{T_8}: Estime a velocidade instantânea. τ_{T_3}: Análise de gráficos. τ_{T_8}: manipulação algébrica. T_{T_9}: Estime a velocidade máxima. τ_{T_3}: Análise de gráficos. τ_{T_8}: manipulação algébrica.	T_{S_4}: Encontrar a velocidade do objeto (média ou instantânea). τ_{S_2}: análise de tabela; τ_{S_4}: manipulação algébrica.	
T_{T_2}: Determine o coeficiente angular. τ_{T_1}: Dividir Δy por Δx. τ_{T_3}: Análise de gráficos. τ_{T_8}: manipulação algébrica.	T_{S_3}: Estimar/encontrar a inclinação da reta tangente. τ_{S_1}: análise de gráfico; τ_{S_2}: análise de tabela; τ_{S_4}: manipulação algébrica.	
T_{T_3}: Escreva a equação para a tangente. τ_{T_4}: Escrever a equação para a tangente. τ_{T_3}: Análise de gráficos. τ_{T_7}: análise do domínio da função. τ_{T_8}: manipulação algébrica.	T_{S_1}: Encontrar uma equação da reta tangente ao gráfico. τ_{S_1}: análise de gráfico; τ_{S_2}: análise de tabela; τ_{S_3}: análise do domínio da função; τ_{S_4}: manipulação algébrica.	
T_{T_7}: Calcule/determine/estime o limite. τ_{T_1}: Dividir Δy por Δx.	T_{S_6}: Estimar/encontrar/estabelecer/determinar/calcular o valor do limite.	T_{G_1}: Calcule o limite τ_{G_1}: análise de tabela; τ_{G_2}: análise de gráfico;

Tarefas e técnicas identificadas nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
τ_{T_9}: aplicação da propriedade $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$ (regra da soma). $\tau_{T_{10}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$ (regra da diferença). $\tau_{T_{11}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to c}[f(x)]^n=L^n$ (regra da potenciação) $\tau_{T_{12}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x))=k\cdot L$ (regra da multiplicação). $\tau_{T_{13}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$ (regra do quociente). $\tau_{T_{14}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=L\cdot M$ (regra do produto). $\tau_{T_{15}}$: $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}=L^{\frac{1}{n}}$ (regra da raiz) $\tau_{T_{17}}$: aplicação do teorema do Confronto.	τ_{S_1}: análise de gráfico; τ_{S_2}: análise de tabela; τ_{S_3}: análise do domínio da função; τ_{S_9}: aplicação da propriedade $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$; $\tau_{S_{10}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to a}[cf(x)]=c\lim_{x\to a}f(x)$; $\tau_{S_{11}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$; $\tau_{S_{12}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$; $\tau_{S_{13}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to a}x^n=a^n$, onde n é um inteiro positivo; $\tau_{S_{14}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to a}x=a$; $\tau_{S_{15}}$: aplicação da propriedade$\lim_{x\to a}c=c$; $\tau_{S_{16}}$: aplicação da propriedade$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$, se $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ $\tau_{S_{17}}$: aplicação da propriedade de substituição direta; τ_{S_4}: manipulação algébrica; τ_{S_3}: análise do domínio da função;	τ_{G_3}: análise do domínio da função; τ_{G_4}: manipulação algébrica; τ_{G_5}: aplicação do limite da razão incremental; τ_{G_7}: aplicação da propriedade $\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2=\lim_{x\to p}f(x)+\lim_{x\to p}g(x)$ (o limite da soma é igual à soma dos limites das parcelas); τ_{G_8}: aplicação da propriedade $\lim_{x\to p}kf(x)=kL_1=k\lim_{x\to p}f(x)$ (com *k* constante); τ_{G_9}: aplicação da propriedade $\lim_{x\to p}f(x)g(x)=L_1\cdot L_2=\lim_{x\to p}f(x)\lim_{x\to p}g(x)$ (o limite do produto é igual ao produto dos limites dos fatores); $\tau_{G_{10}}$: aplicação da propriedade $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2\neq 0$;

Tarefas e técnicas identificadas nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
	$\tau_{S_{18}}$: aplicação da propriedade $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, onde *n* é um inteiro positivo (Se *n* for par, supomos que $a > 0$.); $\tau_{S_{19}}$: comparação do resultado dos limites laterais;	
$T_{T_{13}}$: Avaliar a função/o limite. $\tau_{T_{16}}$: atribuição de valores a função. τ_{T_8}: manipulação algébrica. τ_{T_3}: análise de gráficos. τ_{T_7}: análise do domínio da função.	$T_{S_{11}}$: Avaliar a função/o limite. τ_{S_6}: atribuição de valores a função.	
$T_{T_{14}}$: Explique o significado do limite. $\tau_{T_{18}}$: explicação do significado.	T_{S_9}: Explicar o significado da equação/do limite. τ_{S_7}: explicação do significado	
$T_{T_{16}}$: Esboce/faça o gráfico. $\tau_{T_{20}}$: construção de gráfico.	T_{S_2}: Esboçar o gráfico. τ_{S_5}: construção de gráficos;	T_{G_2}: Esboce o gráfico τ_{G_6}: construção de gráficos;
$T_{T_{19}}$: Mostre/prove o limite; τ_{T_8}: manipulação algébrica; $\tau_{T_{21}}$: aplicação da definição formal de limite;	$T_{S_{12}}$: Mostre/prove/demonstre o limite. τ_{S_1}: análise de gráfico; τ_{S_3}: análise do domínio da função; τ_{S_4}: manipulação algébrica; $\tau_{S_{19}}$: comparação do resultado dos limites laterais; $\tau_{S_{20}}$: aplicação do teorema do confronto; $\tau_{S_{21}}$: aplicação da definição formal de limite;	
$T_{T_{20}}$: Determine um número δ. τ_{T_3}: análise de gráficos; τ_{T_8}: manipulação algébrica; $\tau_{T_{21}}$: aplicação da definição formal de limite;	$T_{S_{19}}$: Encontre um número δ. $\tau_{S_{21}}$: aplicação da definição formal de limite;	T_{G_5}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f, p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0$ (supondo que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L, com\ L > 0$) τ_{G_4}: manipulação algébrica; $\tau_{G_{11}}$: aplicação da definição formal de limite;

Tarefas e técnicas identificadas nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
		T_{G_7}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}$ τ_{G_4}: manipulação algébrica; $\tau_{G_{11}}$: aplicação da definição formal de limite; T_{G_8}: Prove que existe $\delta > 0$ tal que $1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} < \frac{x^5+3x}{x^2+1} < 2 + \frac{1}{2}$ τ_{G_4}: manipulação algébrica; $\tau_{G_{11}}$: aplicação da definição formal de limite;
$T_{T_{21}}$: Prove que $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$ (dado que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = M$). τ_{T_8}: manipulação algébrica; $\tau_{T_{21}}$: aplicação da definição formal de limite;	$T_{S_{17}}$: Mostre que $\lim_{x\to a} f(x) + g(x)$ pode existir mesmo que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ não existam. τ_{S_3}: análise do domínio da função; τ_{S_4}: manipulação algébrica;	
$T_{T_{26}}$: Prove que $\lim_{h\to 0} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{h\to 0} f(h + c) = L$. $\tau_{T_{21}}$: aplicação da definição formal de limite;		T_{G_4}: Prove que $\lim_{x\to p} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(p + h) = L$ τ_{G_4}: manipulação algébrica; $\tau_{G_{11}}$: aplicação da definição formal de limite;
$T_{T_{29}}$: Calcule/determine/estime os limites laterais. τ_{T_3}: análise de gráficos; τ_{T_7}: análise do domínio da função; τ_{T_8}: manipulação algébrica;		$T_{G_{17}}$: Calcule os limites laterais τ_{G_3}: análise do domínio da função; τ_{G_4}: manipulação algébrica; $\tau_{G_{12}}$: comparação do resultado dos limites laterais;
$T_{T_{30}}$: Determinar as assíntotas verticais e horizontais da função. τ_{T_3}: análise de gráfico;	T_{S_8}: Encontrar as assíntotas verticais da função. τ_{S_1}: análise de gráfico; τ_{S_3}: análise do domínio da função;	

Tarefas e técnicas identificadas nas obras		
Thomas (2012)	**Stewart (2017)**	**Guidorizzi (2018)**
τ_{T_7}: análise do domínio da função; τ_{T_8}: manipulação algébrica;	τ_{S_4}: manipulação algébrica;	

Fonte: Acervo das autoras.

Como percebemos no Quadro 2, Thomas (2012) e Stewart (2017) são relativamente semelhantes quanto à abordagem utilizada ao apresentar as atividades propostas referentes ao conteúdo. Antes de pedir aos alunos que calculem limites de função, fazem o estudo de velocidade média e instantânea e das retas tangentes por meio da análise de gráficos, tabelas e domínio da função e, além disso, manipulações algébricas. Percebemos que as técnicas identificadas nos três livros também são semelhantes, como por exemplo, a aplicação da definição formal para demonstrações e a utilização das propriedades para calcular limites. Na seção a seguir, nos aprofundaremos na análise desses quadros.

8. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Com a organização por meio dos quadros dos tipos de tarefa e técnicas identificadas nos livros didáticos, conseguimos comparar o bloco saber-fazer das três obras e ter uma visão geral de como cada autor estrutura o conteúdo no decorrer dos respectivos capítulos que apresentam o conteúdo de limite de função.

Ao observarmos o Quadro 2, no qual comparamos as três obras com relação aos tipos de tarefas comuns entre elas, notamos algumas escolhas semelhantes entre os autores. Stewart (2017) e Thomas (2012) propõem atividades relacionadas à estimativa de velocidade média e instantânea por meio da análise de gráficos e/ou tabelas, do domínio da função e da manipulação algébrica e, com essas mesmas técnicas, em ambos os livros há atividades que pedem aos estudantes que encontrem a equação da reta tangente, bem como seu coeficiente angular.

Notamos a presença do tipo de tarefa que pede para *calcular o limite* nas três obras. Além da atividade em comum, algumas técnicas são semelhantes também. Dependendo do foco que é dado a esse tipo de tarefa, isso pode não contribuir para o processo de aprendizagem de limite, visto que

> Os exercícios geralmente se contentam em pedir "cálculos", de limites com funções explícitas usando limites usuais e as regras de cálculos algébricos. Isto é, os livros didáticos insistem na definição formal com $(\varepsilon,\ \delta)$, no entanto, os exercícios visam dominar o cálculo, usando as operações algébricas usuais de limites, com funções explícitas (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020, p. 126).

Quando os três autores apresentam a definição intuitiva de limite, o seu cálculo se resume à construção e análise de gráficos e do domínio da função e, por fim, a atribuição de valores à função organizada em uma tabela. Alguns tipos de tarefas que Stewart (2017) e Thomas (2012) propõem estão relacionadas a esta definição, como por exemplo, $T_{T_{13}}$ e $T_{S_{11}}$, esperando que os estudantes avaliem a função ou seu limite, utilizando essas mesmas técnicas associadas a definição intuitiva. Esses tipos de tarefa, que não conversam umas com as outras, só reforçam pontos dificultosos para o aprendizado da definição formal. Job e Schneider (2014) afirmam que esta forma de ensinar o conceito de limite simplesmente o reduz à gráficos e tabelas, dando a falsa impressão aos estudantes de que a definição formal de limite é supercomplexa, então temos esses recursos para "facilitar" o processo de aprendizagem e explicar de um modo menos complexo. Então, esses "truques" são utilizados na expectativa dos estudantes reconhecerem o comportamento da função ao redor de *x* (à medida que *x* tende a um número, *f(x)* tende a…) (Job e Schneider, 2014). Sobre a atribuição de valores à *x* organizados em uma tabela da qual os três livros que analisamos na pesquisa utilizam ao associar com a definição intuitiva de limite, Doumbia (2020) afirma que:

> O uso da tabela de valores de *f* pode levar à seguinte interpretação: escrever $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que quando *x* se aproxima de x_0 então *f(x)* se aproxima de L, o que chamamos de abordagem intuitiva da noção de limite. Essa abordagem é fruto de uma transposição didática, não corresponde à definição matemática do limite (Doumbia, p. 84, 2020, tradução nossa).

Thomas (2012) e Stewart (2017) propõem que os alunos expressem suas respostas, provavelmente para que o professor, ou os próprios estudantes, note como os alunos estão aprendendo sobre o conceito de limite, escrevendo as respostas com suas próprias palavras, por exemplo, no caso dos tipos de tarefa T_{S_9} e $T_{T_{14}}$.

Quando os livros abordam a definição formal de limite em termos de épsilons e deltas, os autores propõem os tipos de tarefa relacionados às demonstrações de resultados. Em algumas dessas situações, os estudantes ainda podem ter como auxiliar a análise de gráficos, porém, o que prevalece desta parte do livro em diante, é a manipulação algébrica e a aplicação da definição formal de limite, podendo, em alguns casos, utilizar a aplicação do teorema do Confronto e a comparação do resultado dos limites laterais. No cálculo de limites, este tipo de tarefa que identificamos nos três livros, o estudante pode utilizar as técnicas associadas a definição intuitiva de limite, bem como a manipulação algébrica e aplicação das propriedades relacionadas a definição formal de limite. Notamos, dessa maneira, que o processo algébrico é bem presente nas obras, mas as atividades não trabalham as definições intuitiva e formal de limite. Se fosse feita uma análise profunda da definição formal, isso poderia contribuir com o processo de aprendizagem do conceito de limite, e assim os estudantes compreenderiam cada vez mais as representações e seus significados presentes na definição (Doumbia, Almouloud e Farias, 2019).

Ao propor que os alunos encontrem um número δ ($T_{T_{20}}$, $T_{S_{19}}$), Stewart (2017) e Thomas (2012) pedem que os alunos, basicamente, apliquem a definição formal de limite ($\tau_{S_{21}}$, $\tau_{T_{21}}$). Neste caso, os autores explicitam as condições para que o aluno consiga encontrar um número utilizando a definição formal. Porém, Guidorizzi (2018) pede para que os alunos demonstrem que, por exemplo, existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in D_f,\ p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0$ (supondo que $\lim_{x \to p} f(x) = L, com\ L > 0$). Nestes casos, notamos a importância que Guidorizzi dá à definição formal, visto que pede sua utilização em casos genéricos para demonstrações, diferentemente das outras obras estudadas.

Percebemos alguns tipos de tarefas presentes em Thomas (2012) e Stewart (2017) referentes a demonstrações aplicando a definição formal de limite, por exemplo $T_{S_{17}}$, $T_{T_{21}}$ e $T_{T_{26}}$, mas nada comparado com a quantidade de tipos de tarefa que pedem esta técnica que aparece em Guidorizzi (2018). Mesmo que tenha uma quantidade relativamente grande de exercícios que abordam este tipo de tarefa, não trabalha com a definição formal, mas sim com o processo algébrico, que não está associada ao valor absoluto nem com as inequações, que estão presentes na definição formal, dependendo em quais termos ela foi escrita. A manipulação algébrica é uma técnica presente nos três livros, como notamos nas descrições. Burigato (2019) percebeu em sua pesquisa que esta técnica é uma das maiores dificuldades dos alunos de cálculo da qual podemos citar como exemplo o caso da fatoração. A ênfase dada ao uso da fatoração limita a amplitude dessa técnica, pois os autores poderiam utilizar a manipulação algébrica das propriedades dos números reais, por exemplo, como aparecem com uso de módulos e inequações. Além disso,

> Para muitos estudantes, na resolução de exercícios de limite de uma função se resume em encontrar uma forma de substituir o ponto na função utilizando-se de manipulações algébricas adequadas. Isso pode causar uma confusão conceitual. Evidencia a ausência de relação entre as noções intuitivas e formais do conceito e evidencia a forma como o professor trata o conceito em sala de aula (Rachidi, Freitas e Mongelli, 2020, p. 123).

Identificamos vinte e sete tipos de tarefas no Guidorizzi (2018) das quais requerem quatorze diferentes técnicas de resolução distribuídas entre os tipos. Nesta obra, quando o autor apresenta a definição intuitiva de limite, notamos a presença da análise de tabelas, gráficos e do domínio da função, além da manipulação algébrica. Pelo fato desta última estar implícita na obra, dificulta a compreensão do estudante, visto que os alunos possuem dificuldades relacionadas à fatoração de expressões algébricas, não compreendendo a manipulação feita e a expressão obtida após essa manipulação.

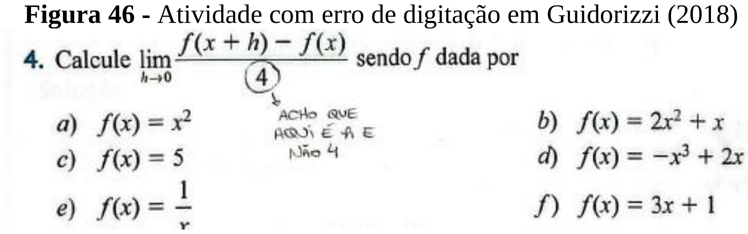
No livro de Guidorizzi (2018), os exercícios relacionados à ideia intuitiva de limite apresentam o enunciado semelhante *"utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule"* e, então, apresenta alguns limites para serem resolvidos. Presumimos que o estudante deverá colocar em prática algumas das cinco técnicas identificadas no livro, relacionadas à: análise de tabelas, gráficos e domínio da função e manipulação algébrica para a resolução do exercício, as que ele achar mais adequada ou pertinente. Em uma das atividades, pede-se para que se esboce o gráfico da função, para então, calcular o limite utilizando a ideia intuitiva.

Após apresentar a definição formal de limite em termos de épsilons e deltas, T_{G_1} e T_{G_6} aparecem na seção de exercícios, pedindo para que os alunos calculem o limite e justifiquem o resultado. Nesse momento, Guidorizzi (2018) se desprende das representações gráficas e da atribuição de valores organizados em tabelas e espera que os alunos calculem os limites e que justifiquem utilizando as propriedades associadas à definição formal. O que vemos frequentemente a partir desse momento são manipulações algébricas e análise do domínio da função.

Ainda nesta mesma seção de exercícios, notamos que o autor espera que o aluno saiba demonstrar algumas afirmações, manipulando a definição formal, como vemos na maioria dos tipos de tarefas presentes na obra (de T_{G_3} à $T_{G_{16}}$).

Importante ressaltar também que a obra não escapa de erros de digitação nos enunciados, como por exemplo:

Figura 46 - Atividade com erro de digitação em Guidorizzi (2018)



4. Calcule $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{4}$ sendo f dada por

ACHO QUE AQUI É h E NÃO 4

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 2x^2 + x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = -x^3 + 2x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = 3x + 1$

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 80).

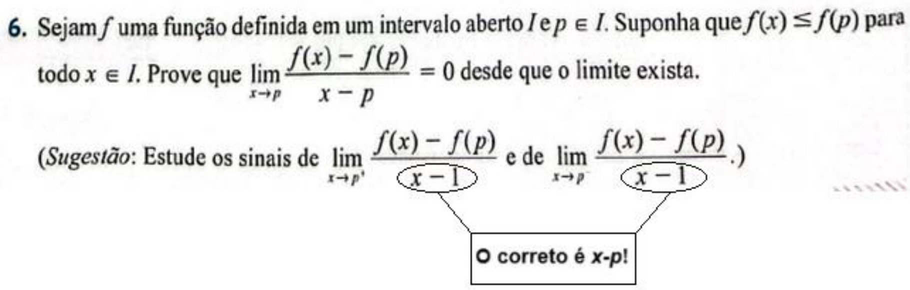
Nesta atividade, pede-se ao estudante para que calcule o limite das funções apresentadas nas alternativas por meio de $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, porém, no enunciado, troca-se *h* por *4*. O estudante que não estiver atento, provavelmente fará o cálculo de forma errônea apenas por conta desse erro de digitação!

Como os gráficos foram utilizados, uma maneira dos alunos resolverem esse tipo de tarefa é fazer um esboço da representação gráfica da função (isso se for algo fácil), ou utilizar algum *software* como GeoGebra, por exemplo, e pensar em como seria seu domínio.

A $T_{G_{17}}$ aparece na seção de exercícios que requer que o aluno calcule os limites laterais utilizando das técnicas τ_{G_3}, τ_{G_4} e $\tau_{G_{12}}$, relacionadas à análise do domínio, manipulação algébrica e comparação do resultado dos limites laterais. Os tipos de tarefas $T_{G_{18}}$, $T_{G_{20}}$ e $T_{G_{21}}$, aparecem também nesse mesmo conjunto de atividades, exigindo as mesmas técnicas já citadas. Para resolver $T_{G_{19}}$, o estudante precisa de conhecimentos relacionados ao conjunto dos números reais, conceito de função, de continuidade e de limites laterais para dar esse exemplo que a atividade pede.

Já os tipos de tarefas $T_{G_{20}}$ e $T_{G_{21}}$ carregam consigo a definição de limite lateral para sua resolução. Curioso que Guidorizzi (2018), na $T_{G_{21}}$, dá uma sugestão para auxiliar o estudante a resolver o exercício. Porém, infelizmente, há um erro de digitação, em que troca p pelo número *1*, o que com certeza atrapalhará o aluno na resolução!

Figura 47 - Exercício do Guidorizzi (2018) com erro de digitação



6. Sejam f uma função definida em um intervalo aberto I e $p \in I$. Suponha que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in I$. Prove que $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0$ desde que o limite exista.

(*Sugestão*: Estude os sinais de $\lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - 1}$ e de $\lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - 1}$.)

Fonte: Guidorizzi (2018, p. 84).

No próximo tópico relacionado ao limite de função composta, o livro apresenta um passo a passo a ser seguido pelos estudantes ao resolver as atividades de cálculo de limite de função composta. Então, eles utilizarão a técnica $\tau_{G_{13}}$, relacionada a esse algoritmo para resolver os tipos de tarefas $T_{G_{22}}$ à $T_{G_{24}}$. Por fim, $T_{G_{25}}$ à $T_{G_{27}}$ aparecem no subtópico 3.6 que discute sobre o teorema do Confronto e, sua aplicação acontece por meio da técnica $\tau_{G_{14}}$.

Das quatorze técnicas identificadas, relacionamos cinco delas à definição intuitiva de limite e as outras nove técnicas à definição formal. É claro que, algumas técnicas que foram aparecendo durante a análise da seção sobre a definição intuitiva, como por exemplo, análise do domínio da função e manipulação algébrica aparecem em outras seções posteriores, nos tipos de tarefas que requerem essas técnicas.

Notamos que, após apresentada a definição formal de limite, o autor se “desprende” de das técnicas relacionadas à definição intuitiva, como a análise de tabelas e a análise de gráficos, focando mais em demonstrações que se apoiam na definição formal em termos dos quantificadores, considerando que não são mais necessárias as representações numéricas e gráficas.

Nas soluções dos exemplos, a obra exige do estudante conhecimento relacionado a manipulação algébrica para resolução das atividades e, após a discussão feita sobre a definição formal, percebemos que o livro pede uma quantidade excessiva de demonstrações. No prefácio, o autor menciona que

> Os exemplos foram colocados em número suficiente para a compreensão da matéria, e os exercícios dispostos em ordem crescente de dificuldade. Existem exercícios que apresentam certas sutilezas e que requerem, para suas resoluções, um maior domínio do assunto; os alunos precisam estar cientes disso, e não devem se preocupar caso não consigam resolver alguns deles: basta seguir em frente e retornar a eles mais tarde, quando estiverem mais familiarizados com a matéria (Guidorizzi, 2018, p. vii).

De fato, os exemplos e as atividades propostas pelo autor são organizados de acordo com o conteúdo apresentado e isso mostra a importância que o livro dá à determinados tipos de tarefas e técnicas em suas respectivas seções. Além disso, o aluno precisa estar ciente que as atividades do livro contém essas “sutilezas” que o prefácio menciona que, muitas das vezes, pode dificultar o aluno a resolver determinada tarefa ou, até mesmo, fazê-lo acreditar que não compreendeu o conceito.

Em Stewart (2017), identificamos vinte e oito tipos de tarefas e vinte e três técnicas para resolvê-los. Diferentemente do Guidorizzi (2018), esta inicia a seção de atividades propostas com os tipos de tarefas relacionados a encontrar: uma equação da reta tangente ao gráfico e a inclinação da reta tangente, encontrar a velocidade do objeto e a inclinação da reta secante (T_{S_1}, T_{S_3}, T_{S_4}, T_{S_5}, respectivamente). Os alunos podem resolver esses tipos de tarefas utilizando as técnicas de análise de gráficos e tabelas, do domínio da função, bem como a manipulação algébrica.

A obra define intuitivamente limites, limites laterais e limites infinitos, antes da próxima seção de exercícios. Nesta seção, o autor aborda o cálculo de limites utilizando uma quantidade relativamente grande de gráficos na maior parte das atividades, exigindo dos estudantes o esboço de gráfico (T_{S_2}) e, ainda, analisar o limite, encontrar assíntotas verticais, explicar o significado da equação/limite, fazer conjectura e avaliar o limite (respectivamente: T_{S_7}, T_{S_8}, T_{S_9}, $T_{S_{10}}$, $T_{S_{11}}$). Até aqui, o autor espera que os estudantes coloquem em prática as técnicas relacionadas à definição intuitiva, como análise de gráficos e tabelas, sem exigir tanto do rigor. Além disso, requer que os alunos expliquem com suas próprias palavras os resultados obtidos nas atividades, sem rigor e demonstrações.

A abordagem do livro começa a mudar quando apresenta cálculo usando as propriedades dos limites e o teorema do Confronto, em que, além de exigir que os alunos encontrem (T_{S_6}) e demonstrem ($T_{S_{12}}$) o resultado de algum limite utilizando as propriedades (τ_{S_9} à $\tau_{S_{18}}$) também pede para que usem a técnica da aplicação do teorema do Confronto ($\tau_{S_{20}}$). Após esse momento, Stewart (2017) apresenta a definição formal de limite (o autor utiliza a expressão *definição* *precisa*) bem como de limites laterais e limites infinitos. Nesta seção de exercícios utiliza alguns gráficos para que o aluno encontre δ ($T_{S_{19}}$).

Os tipos de tarefas $T_{S_{12}}$ à $T_{S_{26}}$ presentes no livro abordam muito o rigor e a demonstração, sendo a definição formal de limite e a manipulação algébrica prevalecidas nessas atividades. Somente as tarefas $T_{S_{27}}$ e $T_{S_{28}}$ requerem algo mais mecânico, como a descrição de situações em que o limite pode não existir ($\tau_{S_{22}}$) e os enunciados das propriedades ($\tau_{S_{23}}$).

Na apresentação da obra, Stewart (2017) explana que o limite é essencial no estudo do cálculo. Dessa forma, ele apresenta o limite examinando suas propriedades, mas antes, faz um estudo para encontrar as tangentes e calcular a velocidade média e instantânea de objetos.

Por fim, na obra de Thomas (2012), identificamos vinte e quatro técnicas que são utilizadas para resolver trinta tipos de tarefas, de acordo com sua pertinência. Na seção de atividades, o autor aborda os seguintes subtópicos: taxa de variação média e instantânea e o coeficiente angular em um ponto de uma curva (T_{T_1} à $T_{T_{11}}$).

Nesses tipos de tarefas, o autor espera que os alunos utilizem de técnicas que foram apresentadas depois da definição intuitiva, como dividir Δy por Δx, a análise de tabelas e gráficos, escrever a equação para a tangente, traçar pontos no plano, construir tabelas, análise do domínio da função e manipulação algébrica (τ_{T_1} à τ_{T_8}, respectivamente).

Na próxima seção de atividades, o autor nos apresenta as propriedades de limites como técnicas de resolução (τ_{T_9} à $\tau_{T_{15}}$), bem como o teorema do Confronto ($\tau_{T_{17}}$). As atividades que esperam que os alunos utilizem essas técnicas, se resumem em determinar os limites (T_{T_7}) ou fazer estimativas com o auxílio de gráficos ou tabelas ($T_{T_{12}}$ à $T_{T_{18}}$). Ao apresentar a definição formal de limite no capítulo seguinte, Thomas (2012) trabalha tanto a análise de gráficos quanto a manipulação algébrica e a aplicação da definição formal para provar resultados de limites $T_{T_{19}}$ e determinar um número δ ($T_{T_{20}}$), que também aparece no Stewart (2017) como vimos no quadro 2, além de pedir para que o aluno faça algumas demonstrações ($T_{T_{21}}$, $T_{T_{22}}$, $T_{T_{26}}$).

Alguns tipos de tarefas requerem apenas que o aluno dê exemplo relacionado à algumas afirmações feitas, como é o caso de $T_{T_{27}}$ e $T_{T_{28}}$. As $T_{T_{29}}$ e $T_{T_{30}}$ esperam que os alunos calculem os limites laterais e determinem as assíntotas da função, utilizando a análise de gráficos e do domínio da função, bem como a manipulação algébrica.

A proposta do livro de Thomas (2012) se assemelha ao de Stewart (2017) abordando o limite e suas propriedades por meio do cálculo das taxas de variação média e instantânea e mostrando que elas estão relacionadas com o coeficiente angular de uma curva em um ponto, além de utilizar a ideia de limite para encontrar equações de tangentes.

Por meio da síntese dos tipos de tarefas e técnicas organizada no Quadro 1, conseguimos comparar a estrutura de cada obra analisada. Percebemos que, apesar dos autores terem feito algumas escolhas diferentes no decorrer da explanação do conteúdo, os três livros didáticos se assemelham quanto à forma que abordam o conceito de limite.

Guidorizzi (2018) se distancia um pouco do que as outras duas obras propõem, destacando mais o rigor e a demonstração por meio da definição formal de limite, em termos de épsilons e deltas, deixando de lado as representações gráficas e análise de tabelas. Por sua vez, Stewart (2017) e Thomas (2012) se aproximam, fazendo a primeira abordagem do conceito de limite por meio da discussão sobre velocidades média e instantânea de objetos em movimento e ao encontrar equação de retas tangentes, associando-os com o coeficiente angular de uma curva em um ponto qualquer.

Uma técnica relacionada a definição formal que notamos em Stewart (2017) e Thomas (2012) é a aplicação da definição formal de limite para resolver os tipos de tarefas que envolvem encontrar o delta ($T_{T_{20}}$ e $T_{S_{19}}$). Essa pode ser uma atividade que favoreça para que o aluno aprenda o conceito de limite, se não a resolver só reproduzindo o que foi feito nos exemplos. Por sua vez, Guidorizzi (2018) não contém esse tipo de tarefa, apenas os que pedem ao aluno que demonstre a existência do delta.

Como dito anteriormente, geralmente, o limite é apresentado por meio das duas definições, intuitiva e formal. Isso acontece tanto em salas de aula, por parte do professor no ensino superior, quanto nas próprias bibliografias, como é o caso. As três obras trazem a definição dita intuitiva de forma semelhante uma da outra. Fischbein (1985 *apud* D'Amore, 2007) define a intuição de aceitação, que consiste em

> Um conjunto de representações, de relações, de interpretações, de imagens e até mesmo descrições proposicionais que o sujeito que aprende considera como certas, aceitas, evidentes. [...] Segundo Fischbein, as intuições de aceitação contém sempre um 'elemento de fé'" (D'Amore, 2007, p. 334).

Os estudantes que não questionam sobre a complexidade que é o conceito de limite de função em um ponto, acabam o aceitando como é:

> Então escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e dizemos "o limite de $f(x)$, quando *x* tende a a, é igual a L" se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), ao tomar *x* suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a (Stewart, 2017, p. 71).

O modo como o limite é apresentado aos alunos, por meio de representações gráficas e análise de tabelas podem ter um efeito contrário ao que os professores esperam. Job e Schneider (2014) consideram que essa estratégia é enganadora. De modo geral, os livros de cálculo utilizam dessa apresentação do conteúdo, associando a definição intuitiva aos gráficos de uma determinada função, utilizando de “setas” indicando o ponto em que está acontecendo a aproximação e às tabelas, atribuindo valores a x e obtendo valores à função concluindo que há a aproximação do ponto, apenas pela observação.

Se os alunos aprendem só a definição intuitiva e não a formal, a justificação e o rigor são negligenciados, de acordo com Doumbia (2020). Em sua pesquisa, notou que os professores na formação inicial aprenderam a definição intuitiva, porém, esqueceram da definição formal e isso aconteceu, pois, a intuitiva foi privilegiada no ensino superior e a formal foi deixada de lado, dando mais atenção às regras para calcular limites. Isso fez com que os alunos tivessem concepções errôneas relacionadas ao conceito de limite, fazendo-os ficarem confusos sobre seus diversos aspectos (Doumbia, 2020).

Para que possamos discutir uma melhoria no ensino de limite, os professores de cálculo podem considerar o que Doumbia (2020, p. 97, tradução nossa) afirmou em sua tese, que é preciso que se encontre “um equilíbrio entre a intuição e o rigor no ensino da matemática”. Esse equilíbrio acontece no sentido de que o professor trabalha as concepções intuitivas dos estudantes até formalizar a noção de limite, pois a intuição precisa do rigor matemático, exigido pelas definições e as demonstrações no ensino da matemática. Para isso, eles devem voltar às concepções iniciais dos alunos sobre o conceito e fazê-los se sentir desafiados, enfrentando suas concepções erradas para, enfim, caminhar para a formalização do conceito. Isso vai ao encontro do que D’Amore (2007) afirma sobre o conflito cognitivo, visto que os alunos criam imagens relacionadas ao conceito e, cada vez que há o enfrentamento entre a imagem velha e a nova, eles precisam se adaptar àquela imagem nova e compreender o motivo dela ser a mais “próxima” do conceito, em relação a que eles criaram antes.

Com esta análise, notamos as principais diferenças e semelhanças entre os livros didáticos analisados. Por meio dos tipos de tarefas e técnicas identificadas nas obras, conseguimos notar quais são os conhecimentos que os estudantes precisam ter para que consiga resolver as atividades. Assim, percebemos a influência que o livro didático pode ter no processo de aprendizagem dos alunos do ensino superior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve como objetivo investigar como os livros didáticos de cálculo presentes nas ementas bibliográficas da disciplina de Cálculo I dos cursos de Matemática – Licenciatura e Bacharelado da UFMS trabalham com o conceito de limite de função nos exemplos e atividades propostas. Para isso, analisamos essas ementas e selecionamos os seguintes livros:

- Cálculo (Stewart, 2017);
- Um Curso de Cálculo (Guidorizzi, 2018); e
- Cálculo (Thomas, 2012).

Como o trabalho se trata de uma pesquisa bibliográfica (Mazucato, 2018) por conta da análise de livros didáticos, trouxemos uma discussão sobre o uso do livro didático no ensino superior, a importância desse recurso no processo de ensino e aprendizagem e como se dá sua escolha para fazer parte desse processo.

Além disso, os objetos de análise aqui selecionados são relacionados à disciplina de cálculo. Sendo assim, refletimos, com base em algumas pesquisas, sobre o ensino de cálculo diferencial e integral no ensino básico no Brasil, em que momento da história fez parte da estrutura curricular no ensino secundário do país há anos atrás e o que aconteceu, ao longo dos anos, para que o ensino do cálculo só faça parte da ementa de alguns cursos do ensino superior e algumas escolas específicas, como institutos.

Para a análise, nos apoiamos na Teoria Antropológica do Didático que nos dá todo o aporte teórico e metodológico por meio da organização praxeológica para analisarmos as práticas institucionais presentes nos livros didáticos e o que essas obras "esperam" dos estudantes no processo de compreensão do conceito de limite de função em um ponto. Ressaltamos que, por mais que o foco da pesquisa é a relação do aluno com a instituição livro didático, essa relação é construída de acordo com a relação que o professor tem com a ementa do curso de matemática na universidade e sua própria relação com livro didático. Além disso, no processo de aprendizagem, não há a possibilidade da relação professor e aluno ser ignorada.

Alguns pontos destacamos como motivação desta presente pesquisa, como as experiências pessoais da autora na disciplina de Cálculo I e o fato de a autora já ter realizado um trabalho de monografia abordando o conceito de limite enquanto esteve na graduação. Além disso, o que as pesquisas dizem tanto sobre as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do limite que os professores e os alunos enfrentam no ensino superior quanto sobre maneiras de abordar o conceito de forma que auxiliem os alunos nos permitiu delimitar o que abordamos em nossa pesquisa.

Dito isso, respondemos à seguinte questão de pesquisa: Como as definições de limite são trabalhadas nos exemplos e atividades propostas pelos livros didáticos de cálculo presentes na bibliografia básica do curso de Matemática - Licenciatura e Bacharelado da UFMS? Dessa forma, apresentamos dos livros de Guidorizzi (2018), Stewart (2017) e Thomas (2012).

Com a análise, identificamos:

- vinte e sete tipos de tarefas e quatorze técnicas – Guidorizzi, (2018);
- vinte e oito tipos de tarefas e vinte e três técnicas – Stewart (2017);
- trinta tipos de tarefas e vinte e quatro técnicas – Thomas (2012).

Notamos que os livros trazem algumas técnicas presentes na seção da definição intuitiva de limite e que continua a exigi-las nas seções posteriores mesmo após a apresentação da definição formal, como por exemplo, a análise do domínio da função e a manipulação algébrica.

Após a apresentação da definição formal, Guidorizzi (2018) se desprende de técnicas como análise de tabelas e representações gráficas que foram discutidas na apresentação intuitiva, prevalecendo o rigor da definição formal, utilizando-a para fazer demonstrações e justificar afirmações. A maior parte dos tipos de tarefas presentes nesta obra estão relacionadas ao cálculo de limite e, além disso, demonstrações. Notamos que o autor dá prioridade à definição de limite em termos de quantificadores, prevalecendo o rigor nas justificativas de afirmações. Com a predominante presença da manipulação algébrica na resolução dos exercícios, percebemos a importância que o autor dá ao conhecimento dessa técnica, tanto para o estudo do limite, mas também, de outros conteúdos presentes na obra como o estudo das derivadas e integrais.

Por outro lado, Stewart (2017) e Thomas (2012) se aproximam em suas escolhas, fazendo uma abordagem inicial associando o conceito de limite ao cálculo da velocidade média e instantânea de objetos e à equação da reta tangente a uma curva. Em comparação ao Guidorizzi (2018), essas duas obras apresentam uma quantidade relativamente grande de atividades, sendo na maior parte das seções, repetitivas. A manipulação algébrica aparece em ambos os livros didáticos, desde o início ao fim do capítulo de limite. Porém, enfatiza o uso somente da fatoração, o que limita muito a amplitude dessa técnica, pois os autores poderiam utilizar a manipulação algébrica das propriedades dos números reais, por exemplo, como aparecem com uso de módulos e inequações. A análise de tabelas aparece juntamente à definição intuitiva de limite, porém, a análise de gráficos é recorrente em Stewart (2017) e Thomas (2012), mesmo depois da apresentação da definição formal.

Ao apresentarem a definição formal, ambos os autores a utilizam para demonstrações de afirmações. O foco excessivo dado a definição formal como técnica para demonstração, pode fazer com que o aluno tenha dificuldade ao compreendê-la, reduzindo-a apenas como técnica para provas. Propõem atividades contextualizadas trazendo termos que estão presentes na definição intuitiva, fazendo questões como, por exemplo, o quão próximo devemos deixar x para que determinada função seja maior que determinado número?

Além disso, percebemos que Stewart (2017) e Thomas (2012) trabalham de forma detalhada a definição intuitiva, propondo diversas atividades relacionadas à estimativa de valores dos limites e, depois que apresenta a definição em termos de quantificadores, propõem um estudo detalhado do delta, em diversas situações.

Notamos que Thomas (2012) deixa bem claro ao estudante que a definição intuitiva não é suficiente para que ele compreenda a definição formal, além de afirmar ser uma definição informal e imprecisa. Por mais que as obras se distanciam em alguns aspectos mencionados acima, de modo geral, suas respectivas praxeologias se assemelham, não apresentando grandes diferenças entre si. Vale salientar que Guidorizzi (2018) é o único livro das obras selecionadas para a análise que é brasileiro, por outro lado, as obras de Stewart (2017) e Thomas (2012) são americanas, sendo as traduções brasileiras selecionadas para a pesquisa. Por esse fato é que identificamos semelhanças na estrutura das obras e nas escolhas dos autores. Além disso, os dois livros americanos citados são utilizados em seu país de origem e sua escolha é feita considerando o fato de que o cálculo diferencial e integral faz parte dos conteúdos das escolas americanas. Então, os estudantes ingressam a universidade tendo uma familiaridade relativa aos conceitos relacionados ao cálculo, diferentemente do Brasil, em que o cálculo é ensinado somente em algumas instituições, como o instituto federal e escolas militares.

As obras analisadas apresentam recursos pedagógicos e tecnológicos que foram desenvolvidos para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem do cálculo como videoaulas com explicações, soluções de alguns exercícios, problemas, além de propostas de utilização de sistemas de *softwares* de computador para a resolução de atividades. Aos cursos que contém essas obras na ementa bibliográfica, consideramos importante uma análise desses recursos em futuras pesquisas de forma a olhar até que ponto esses recursos auxiliam (ou dificultam) o professor no processo de ensino.

Por fim, pesquisas futuras podem analisar como podemos formar professores com o saber que estão nos livros didáticos. A Teoria Antropológica do Didático pode contribuir para o estudo das práticas dos professores relacionadas aos livros didáticos de cálculo, seja por meio de seminários, palestras, oficinas, formações que, de alguma forma, podem auxiliá-los na conscientização e na reflexão sobre o uso do livro didático em sala de aula, como essa instituição influencia no processo de aprendizagem do estudante com suas praxeologias relacionadas ao conceito de limite de função.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [*s. l*], v. 11, n. 42, p. 9-34, nov. 2015.

BATISTA, L. A. L. **Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

BARBOSA, E. J. T. **Praxeologia do professor: análise comparativa com os documentos oficiais e do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau**. Tese de doutorado, UFRPE. 2017.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, [S.L.], v. 25, n. 3, p. 364-387, 27 dez. 2017. Universidade Estadual de Campinas. http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640.

BOSCH, M. CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'etude et problematique. **Recherches en Didactique des Mathématiques (Revue)**, v. 19, n. 1, p 77-123, 1999.

BRASIL. Decreto nº 19.402, de 14 de novembro de 1930. Cria uma Secretária de Estado com a denominação de Ministério dos Negócios da Educação e Saude Publica. **Diário Oficial**, p. 20883.

BRASIL. Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. **Coleção de Leis do Brasil***:* 1890. Brasília, DF. Decretos provisórios. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 16 out. 2023.

BRASIL. Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938. Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. **Diário Oficial da União**, p. 277-277, 1939.

BURIGATO, S. M. M. S. **Um Estudo sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

BURIGATO, S. M. M. S; RACHIDI, M. O Uso da Definição Formal de Limite Finito para Funções Reais: Uma Proposta para o Ensino. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, [*s. l*], v. 3, n. 8, p. 21-45, 28 nov. 2023.

CARVALHO, J. B. P. **O Cálculo na escola secundária - algumas considerações históricas**. Cadernos Cedes, Campinas, v. 40, 1996, p. 62-81.

CARVALHO, J. B. P. *et al*. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, [S.L.], v. 81, n. 199, p. 415-424, set/dez, 2000. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira. http://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.81i199.955.

CARVALHO, O. A. **A noção de limite: Um Estudo da Organização Didática de um Percurso Formativo Digital**. 2022. 507 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2022.

CHAACHOUA, H.; BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático: Paradigmas, Avanços e Perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online**, Sergipe, v. 9, n. 1, p. 29-44, 2019.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l’approche anthropologique. **Actes de l’UE de la Rochelle**, p. 91-118, 1998.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 12, n. 1, p. 73-112, Grenoble: La Pensée Sauvage, 1992.

CHEVALLARD, Y. La transposición didáctica. **Del saber sabio al saber enseñado**, v. 3, 1991.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique:** Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. et al. Organiser l’étude 3. Écologie & régulation. **Actes de la**, v. 11, p. 41-56, 2002.

D’AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. Tradução de Maria Cristina Bonami. São Paulo: Editora e Livraria da Física, 2007.

DOUMBIA, C. O. **Un Modèle Didactique de Reference pour la Construction des Savoirs et l’Actualisation des Connaissances sur la Notion de Limite au Mali**. 2020. Tese de Doutorado. Universidade Federal da Bahia, Salvador.

DOUMBIA, C. O.; ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S. Une enquête épistémologique sur les conceptions des futurs professeurs de mathématiques sur les obstacles sur la notion de limites
An epistemological survey of the conceptions of future mathematics teachers on barriers to the notion of boundaries. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 21, n. 5, 2019. DOI: 10.23925/1983-3156.2019v21i5p660-681. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/45586. Acesso em: 23 set. 2024.

FERREIRA, R. C. C. **A Comissão Nacional do Livro Didático durante o Estado Novo (1937-1945)**. 2008. 139 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras de Assis, 2008. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/93413>.

GASCÓN, J. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: El caso del álgebra elemental**. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, pp. 203- 231, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 4 ed., vol. 1, Rio de Janeiro: LTC, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 5 ed., vol. 1, Rio de Janeiro: LTC, 2015.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 6 ed., vol. 1, Rio de Janeiro: LTC, 2018.

JOB, P.; SCHNEIDER, M. Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. **ZDM**, v. 46, p. 635-646, 2014.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 2 ed. vol. 1. São Paulo: HARBRA, 1977.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. vol. 1. São Paulo: HARBRA, 1994.

MAZUCATO, T. (Org.). **Metodologia da pesquisa e do trabalho científico**. Penápolis: FUNEPE, 2018.

MIORIM, M. Â. **O ensino de Matemática: evolução e modernização.** 1995, 231 f. 1995. Tese de Doutorado. Tese (Faculdade de Educação)-Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. p. 11-48.

RACHIDI, M.; FREITAS, J. L. M.; MONGELLI, M. C. G. **Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações**. Campo Grande: Editora da UFMS, 2020.

REIS, E. S. **Raízes Históricas do Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica do Rio de Janeiro nas Últimas Décadas do Século XIX**. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

ROXO, E. **A matemática na educação secundária**. São Paulo, Companhia Editora Nacional, Biblioteca Pedagógica Brasileira, Atualidades Pedagógicas, v. 25, 1937.
SANTOS, M. C.; BESSA DE MENEZES, M. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n. temático, p. 648-670, set. 2015.

SILVA, E. P.; SCHUBRING, G. Cálculo em Matemática: um assunto para o ensino em geral ou específico para o ensino técnico. **História da Educação**, [S.L.], v. 20, n. 49, p. 65-80, ago. 2016. FapUNIFESP (SciELO). http://dx.doi.org/10.1590/2236-3459/54093.

SILVA, V. L. L. Limite de Função em um Ponto: Como as Definições são Trabalhadas nos Exemplos e Atividades Propostas pelos Livros Didáticos? In: Anais do XXVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. **Anais**...São Paulo (SP) On-line, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/ebrapem2022/563345-

LIMITE-DE-FUNCAO-EM-UM-PONTO--COMO-AS-DEFINICOES-SAO-TRABALHADAS-NOS-EXEMPLOS-E-ATIVIDADES-PROPOSTAS-PELOS-LIVROS. Acesso em: 29/08/2023.

SILVA, V. L. L. **Limite de Função em um Ponto: Uma Análise das Definições Propostas em Alguns Livros Didáticos**. Monografia (Graduação em Matemática – Licenciatura) – Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2021.

SOUSA, R. T.; ALVES, F. R. V.; SOUZA, M. J. A. Análise sobre a intuição em Matemática a partir das obras de Henri Poincaré e Efraim Fischbein. **Revista Científico – Educacional de la Provincia Granma**, Granma, v. 18, n. 2, p. 427-451, 2022.

STEWART, J. **Cálculo**. 7 ed. vol 1. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

STEWART, J. **Cálculo**. 8 ed. vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

TELO, R. M.; SCHUBRING, G. A Comissão Nacional do Livro Didático e a avaliação dos livros de matemática entre 1938 e 1969. **Revista Brasileira de História da Educação**, v. 18, 2019.

THOMAS, G. W. **Cálculo**. 12 ed. vol. 1. São Paulo: Pearson, 2012.

UFMS. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. **Resolução nº 613, de 8 de novembro de 2019**. Aprova o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática - Bacharelado do Instituto de Matemática. Boletim Oficial nº 7166, Campo Grande, MS, 13 de novembro de 2019, p. 2088-2136.

UFMS. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. **Resolução nº 701, de 7 de dezembro de 2022**. Aprova o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura do Instituto de Matemática. Boletim Oficial nº 7955, Campo Grande, MS, 3 de janeiro de 2023, p. 173-235.

VALENTE, W. R. Euclides Roxo e a História da Educação Matemática no Brasil. **Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [S. L.], n. 1, p. 89-94, mar. 2005.

ZUCHI, I. **A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente papel e lápis ao ambiente computacional**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.