Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática - INMA

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Adriana Livi

A TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA APLICADA AO ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO

Campo Grande - MS

2024

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática - INMA

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Adriana Livi

Orientadora: Prof.ª Dra. Lilian Milena Ramos Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campo Grande - MS

2024

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me sustentar durante esse processo e aos meus pais pela vida e pelas orações.

Ao meu esposo João Vitor, meu companheiro e maior incentivador, por todo amor e apoio durante cada etapa desse longo e, muitas vezes, cansativo percurso.

À minha orientadora Dr. Lilian Milena Ramos Carvalho, por ter compartilhado parte de seu saber e disponibilizar seu tempo para que a conclusão dessa dissertação fosse possível.

Aos meus irmãos Vanessa, Kaiane e Ricardo, que mesmo distante foram importantes.

A minha sogra, minha cunhada e aos meus familiares pela torcida, admiração e apoio.

Aos meus compadres Elpídio e Vera, que não deixaram de incentivar e orar por mim.

Aos meus colegas de mestrado, que vivenciaram comigo vários momentos, às vezes, difíceis, porém com inúmeros aprendizados.

Aos professores do programa PROFMAT, meus importantes mestres, vocês incentivaram a minha vida profissional.

As minhas amigas, especialmente Valéria e Sabrina, por deixar essa caminhada mais leve.

À Patrícia e o Eliton, casal de amigos que me acolheu em casa, inúmeras vezes, durante o percurso do mestrado.

À Bruna e Marcelo por me proporcionar um ótimo local de estudo durante a preparação para o ENQ, o receado exame de qualificação.

À direção da Escola São Gabriel, Mariane e Adriane, por compreender a importância do mestrado, me incentivar e flexibilizar meus horários de aula. Aos professores, colegas de trabalho, pelos momentos de troca de experiências, desabafos e risos.

Aos meus estudante, especialmente aos que colaboraram para que esse trabalho acontecesse, é por vocês que eu continuo em busca do aperfeiçoamento.

Resumo

O objetivo deste trabalho é aprimorar as abordagens metodológicas voltadas para o ensino de Matemática, promovendo aos estudantes um papel mais ativo e participativo no processo de aprendizagem, extrapolando a metodologia convencional de ensino. O desenvolvimento ocorreu em etapas, inicialmente, investigou-se a Teoria da Aprendizagem Significativa e a utilização da Modelagem Matemática para alcançar essa aprendizagem. Em seguida, desenvolveu-se e aplicou-se propostas de ensino para estudo de Progressões Geométricas (PG), baseando-se nos princípios estudados e nas competências e habilidades estabelecidas pela BNCC e utilizando situações problemas de matemática financeira, crescimento populacional e análise do processo iterativo na criação do fractal Curva de Koch. As atividades foram desenvolvidas com estudantes do 2° ano do Ensino Médio de uma escola estadual de MS, por meio das quais os estudantes puderam utilizar seus conhecimentos prévios sobre sequências e funções e relacionar com os novos conhecimentos. Os resultados mostraram que os estudantes tiveram maior interesse e engajamento no processo de aprendizagem, indicando potencial melhoria na retenção desse conhecimento a longo prazo. Por fim, foram disponibilizadas as sequências didáticas elaboradas e aplicadas neste trabalho, com intuito de contribuir com professores da educação básica que buscam formas distintas para atrair o interesse dos estudantes.

Palavras chave: aprendizagem significativa, progressão geométrica (PG), modelagem matemática.

Abstract

The objective of this work is to improve methodological approaches to mathematics teaching, promoting a more active and participatory role for students in the learning process, surpassing conventional teaching methodologies. The development occurred in stages, beginning with an investigation of the Theory of Meaningful Learning and the use of Mathematical Modeling to achieve this learning. Subsequently, teaching proposals were developed and applied to the study of Geometric Progressions (GP), based on the principles studied and the competencies and skills established by the BNCC (National Common Core Curriculum). These proposals utilized problem situations from financial mathematics, population growth, and the analysis of the iterative process in the creation of the Koch Curve fractal. The activities were conducted with 2nd-year high school students from a state school in MS, allowing them to apply their prior knowledge of sequences and functions and relate it to new content. The results showed that students had greater interest and engagement in the learning process, suggesting potential improvement in long-term knowledge retention. Finally, the didactic sequences developed and applied in this work were made available, aiming to contribute to basic education teachers seeking different ways to attract students' interest.

Keywords: meaningful learning, geometric progression (GP), mathematical modeling.

Sumário

Introdução

Possibilitar que os estudantes vejam significado na ciência e no que aprendem é o objetivo principal do ensino. A matemática fornece elementos essenciais para a compreensão de diversas situações cotidianas, em particular, é essencial para o desenvolvimento dos estudantes e cidadãos (GIEHL, 2018).

Infelizmente, existe a crença de que a matemática está desvinculada da realidade, sem perceber suas aplicações no dia a dia. Muitas pessoas não conseguem compreender que a matemática é um dos instrumentos para a compreensão do mundo que as cercam, contudo, exemplos práticos demonstram sua importância: o pedreiro ao calcular proporções para a construção, o marceneiro ao projetar móveis; o engenheiro ao realizar cálculos estruturais e o investidor projetando seus lucros. Essas situações cotidianas evidenciam a relevância e as aplicações práticas da matemática (BRANDT; BURAK; KLÜBER, 2016).

A prática pedagógica pode estar enfatizando a falta de vínculo com a realidade, desmotivando estudantes e, algumas vezes, não tem suprido os anseios deles. Além do mais, não se tem alcançado os níveis de proficiência adequados para a Matemática. Conforme o Relatório de Resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) de 2021, a proficiência dos estudantes do Ensino Médio em Matemática, que já não era alta em 2019, reduziu-se ainda mais. Constatou-se que os estudantes não possuem o domínio das habilidades mais básicas a serem alcançadas ao final do Ensino Médio, por exemplo determinar o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta em uma situação do cotidiano (INEP, 2021).

Ausubel aponta que a aprendizagem por meio da retenção significativa é mais eficaz do que as realizadas por memorização, conforme muitas fontes de evidência inter-relacionadas. Além disso, ele cita algumas razões do desencanto em relação ao ensino expositivo e à aprendizagem por recepção, tais como a apresentação do conteúdo de maneira a ser aprendida apenas por memorização ou ainda o fato de considerar o significado como um produto exclusivo das técnicas de resolução de problemas e de descoberta da aprendizagem (AUSUBEL, 2003).

Uma das competências gerais da educação básica, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 7), a BNCC é:

> exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Nesse sentido, práticas pedagógicas que objetivam a aprendizagem significativa, tais como a investigação, estudo de caso, Modelagem Matemática e aprendizagem entre times ou pares, podem ser aliadas valiosas para o professor em sala de aula. Agregar tais práticas, não só atinge as competências citadas na BNCC, como também auxilia o professor a engajar estudantes com diferentes vivências, provenientes de realidades econômicas, sociais e intelectuais distintas.

Nesse contexto, surgiu este trabalho, que busca o aprimoramento das abordagens metodológicas no ambiente educacional, com o objetivo de extrapolar a metodologia convencional de ensino e interligar conteúdos de forma significativa, transformando o papel puramente passivo do estudante no seu processo de aprendizagem para uma atuação mais ativa e participativa, tornando-o capaz de desenvolver maior autonomia e criatividade.

Este trabalho foca no ensino de Progressões Geométricas (PG), interligadas com conceitos de funções, fractais e suas aplicações práticas. A utilização de situações-problema em matemática financeira, crescimento populacional e a análise do processo iterativo na criação do fractal Curva de Koch são exemplos concretos que demonstram a aplicabilidade desses conceitos em diferentes contextos.

Neste trabalho, inicialmente, aborda-se a Teoria da Aprendizagem Significativa; em seguida, explora-se maneiras de aplicar a teoria em sala de aula, utilizando metodologias de Modelagem Matemática e Resolução de Problemas; seguido do estudo sobre o ensino de Progressões Geométricas (PG) no Ensino Médio. O trabalho apresenta as implementações realizadas em sala de aula permeando a busca pela aprendizagem significativa, seguidas das conclusões e das perspectivas futuras sobre a implementação dessas abordagens.

Capítulo 1

A Teoria da Aprendizagem Significativa

Neste capítulo serão apresentadas as principais ideias sobre a aprendizagem significativa, o conceito central da teoria proposta por David Ausubel em sua obra *Educational Psycology: A cognitive View (1968).* Joseph Novak proporcionou um toque mais humanista à aprendizagem significativa, Novak, juntamente com Helen Hanesian foram co-autores da segunda edição da obra de Ausubel *Educational Psychology: a cognitive view* (1978), obra em que a teoria foi aprofundada e refinada (AUSUBEL et al., 1978).

1.1 Histórico e Contexto

David Paul Ausubel (1918-2008) foi um psicólogo educacional norte-americano, formado pela Universidade da Pensilvânia, sua carreira foi marcada por seu interesse em entender como o conhecimento é adquirido e retido pelos estudantes. Durante sua atuação acadêmica e clínica, Ausubel criticou os métodos de aprendizagem mecânica e enfatizou a importância de conectar novos conhecimentos a conceitos já existentes na estrutura cognitiva dos estudantes (PUHL; MÜLLER; LIMA, 2020).

O contexto em que Ausubel elaborou sua teoria foi influenciado pelo avanço das ciências cognitivas e por uma reação contra o behaviorismo predominante na época. Ele argumentou que o aprendizado deve ser intencional e organizado, e não apenas uma associação de estímulos e respostas. Em sua obra principal, publicada em 1968, consolidou suas ideias e propôs o uso de organizadores prévios como ferramenta pedagógica para facilitar a aprendizagem significativa, permitindo que os novos conhecimentos fossem integrados de maneira lógica e estruturada no conhecimento prévio dos estudantes (PUHL; MÜLLER; LIMA, 2020).

1.2 Conceitos Fundamentais

A Teoria da Aprendizagem Significativa destaca a importância da compreensão profunda dos conteúdos, ancorando novas informações em conhecimentos prévios e tornando o aprendizado mais relevante. A aprendizagem significativa e a memorização mecânica se distinguem pelo fato que a primeira envolve uma compreensão profunda, enquanto a segunda não se conecta a conhecimentos já adquiridos (MOREIRA, 2006b).

Conforme Ausubel, a aprendizagem significativa exige um mecanismo e um material potencialmente significativos, para que a interação entre os novos significados potenciais e as ideias relevantes presentes na estrutura cognitiva do estudante gere significados verdadeiros ou psicológicos, ocorrendo assim um entrelaçamento de conceitos bastante complexo (AUSUBEL, 2003).

As ideias e os conhecimentos do estudante não são apenas conhecimentos prévios, mas sim, aspectos específicos da estrutura cognitiva, chamados conceitos *subsunçores*, os quais são relevantes para a aprendizagem de uma nova informação (MOREIRA, 2006b).

Os conceitos subsunçores, que podem ser um conceito, uma ideia, uma proposição já existentes que serve como ancoradouro para a nova informação vão assimilando gradualmente mais conceitos e alterando sua amplitude, processo conhecido por *diferenciação progressiva*. Esse processo de entrelaçamento de conceitos, complexo e dinâmico, é denominado *reconciliação integradora*, pois é capaz de modificar os conceitos e enriquecê-los, obtendo conceitos mais gerais e abrangentes, os conceitos superordenados (VALADARES, 2011).

Quando não há subsunçores adequados, a aprendizagem significativa pode ser prejudicada, pois o novo conhecimento não encontra um ponto de ancoragem na estrutura cognitiva do estudante. Nesse caso se faz necessário o uso de *organizadores prévios*, nomenclatura mais conhecida pelos educadores brasileiros, também conhecidos como organizadores avançados, conforme definição dada por Ausubel (2003, p. 11):

> Um organizador avançado é um mecanismo pedagógico que ajuda a implementar princípios, estabelecendo uma ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa de saber, caso necessite de apreender novos materiais de forma mais ativa e expedita (rápida). A situação mais imediata que faz com que um organizador avançado seja desejável e potencialmente eficaz no estabelecimento desta ligação é que, na maioria dos contextos de aprendizagem significativa, as ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva são demasiado gerais e não possuem uma particularidade de relevância e de conteúdo suficientes para servirem como ideias ancoradas eficientes relativamente às novas ideias introduzidas pelo material de instrução em questão.

Ou seja, esses organizadores são estruturas cognitivas apresentadas antes do novo material de aprendizagem, os quais atuam como mediadores entre o que o estudante já conhece (conhecimento prévio) e o que ele está prestes a aprender, já que prepararam a mente do estudante para assimilar e integrar a nova informação de maneira mais eficaz (MOREIRA, 2006b).

Por exemplo, no caso do Ensino das Progressões Geométricas (PG) os subsunçores utilizados são os conceitos de sequência e de Progressão Aritmética (PA). Pelo fato de que o professor não tem a certeza de que esses conceitos realmente estão estruturados no cognitivo do estudante é importante relembrá-los, utilizando a comparação entre PA e PG quanto as semelhanças e diferenças. Para um estudante que ainda não havia estudado PA, esse conceito pode agir como um organizador prévio.

Outro exemplo é para o estudo de Geometria Analítica, os subsunçores seriam as propriedades básicas das figuras geométricas e os conceitos de distância e área no plano cartesiano, os organizadores prévios.

O uso adequado de organizadores prévios na introdução de um novo conteúdo, pode transformar a experiência do aprendizado, tornando-a mais significativa e engajadora para os estudantes. Portanto, a ação do professor é fundamental nesse processo de ensino-aprendizagem, pois ele é capaz de facilitar a construção de significados. Outro fator importante para atingir a aprendizagem significativa é que o conteúdo seja potencialmente significativo e que o aprendizado seja não-arbitrário. Em outras palavras, o conteúdo deve ter uma relação clara e relevante com o conhecimento prévio do estudante, permitindo que os novos conceitos se conectem com suas experiências anteriores, valores e conhecimentos já adquiridos e que essa conexão não seja aleatória ou superficial.

Em síntese, para ocorre uma aprendizagem predominantemente significativa se faz necessário duas condições: o conteúdo deve ser potencialmente significativo (com significado lógico e subsunçores adequados) e o estudante deve agir de maneira potencialmente significativa (VALADARES, 2011).

1.3 Tipos de aprendizagem

Três tipos de aprendizagem significativa foram diferenciadas por Ausubel, as quais diferem entre si na natureza das relações estabelecidas entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio do estudante (MOREIRA, 2006b).

1.3.1 Representacional

É o caso mais básico, normalmente utilizada quando o estudante está na fase primitiva de desenvolvimento, se aproxima da aprendizagem por memorização, pois a integração entre a nova informação e as representações mentais preexistentes ocorre de maneira arbitrária. Por exemplo, saber nomear, classificar e definir funções se encaixa nesse tipo de aprendizagem, o que é de grande relevância, já que condiciona as demais aprendizagens (SOARES et al., 2009).

Uma situação em que ocorre esse tipo de aprendizagem é na introdução dos símbolos de adição (+), subtração (-), multiplicação (×), e divisão (÷) aos estudantes, por exemplo, a aprendizagem representacional ocorre quando o estudante aprende a associar o símbolo "+"com a ideia de juntar quantidades.

1.3.2 Conceitual ou de conceitos

Nesse tipo de aprendizagem busca-se a compreensão das ideias, símbolos ou nome de conceitos fundamentais adquiridos através da aprendizagem representacional e suas interconexões. Para que ocorra, de fato, é necessária a existência de uma situação de aprendizagem significativa para que as ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva do estudante se relacionem de forma não arbitrária. Esse processo envolve a organização e a diferenciação de novos conceitos (AUSUBEL, 2003).

Em uma aula de introdução ao conceito de função quadrática e sua representação gráfica, ocorre a aprendizagem conceitual no momento em que relaciona-se o tema a conceitos que os estudantes já aprenderam, tais como funções lineares, mostrando as diferenças e semelhanças entre essas funções.

1.3.3 Proposicional ou de proposições

Uma aprendizagem semelhante à aprendizagem representacional, porém relacionada à compreensão lógica de afirmações específicas, expressas por um grupo de palavras combinadas em preposições ou sentenças e suas relações com o conhecimento anterior do estudante. Percebe-se que promover a verificação e a aplicação das proposições em diferentes contextos, auxilia o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos matemáticos (SOARES et al., 2009).

Moreira (2006b) explica que, apesar dessa aprendizagem ser mais complexa que as demais, também se assemelha, no sentido de que os significados da nova proposição surgem através da relação e interação com ideias relevantes cognitivamente estruturadas.

A relação entre a nova proposição e os conhecimentos dos estudantes pode ocorrer de maneira subordinada, subordinante ou uma combinação das duas, denominada combinatória. A diferença entre elas apresentada por Ausubel (2003) é a seguinte:

- *subordinada:* ocorre quando uma proposição significativa interage de forma significativa com proposições subordinantes específicas da estrutura cognitiva. Pode ser derivativa, caso o material apenas exemplifique ou apoie uma ideia já existente, é denominada correlativa, quando é uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de proposições anteriormente apreendidas.

- *subordinante:* ocorre quando uma nova proposição interage tanto com ideias subordinadas específicas, quanto com um vasto conjunto de ideias antecedentes geralmente relevantes da estrutura cognitiva, que se podem subsumir de igual modo.

- *combinatória:* refere-se a situações em que uma proposição não interage com ideias específicas da estrutura cognitiva do estudante, mas sim com uma combinação de conteúdos bastante ou pouco relevantes.

Uma situação em que verifica-se a aprendizagem Proposicional é no ensino do Teorema de Pitágoras, o qual afirma que “em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados

dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa". Dependendo do contexto de ensino e do nível de compreensão dos estudantes, essa aprendizagem pode ser inicialmente subordinada e, com o tempo e a prática, tornar-se subordinante, mostrando a flexibilidade e a profundidade da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

1.4 Processos de Aprendizagem

O aprendizado do estudante ocorre por meio dos mecanismos de assimilação, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, tais mecanismos facilitam a retenção e a organização do conteúdo das matérias na estrutura cognitiva do estudante.

Conforme Ausubel (2003), a *assimilação* ocorre quando o estudante relaciona novas informações com conhecimentos prévios que já são relevantes e compreendidos. Esse processo exige que o novo conhecimento seja compatível com o que já está armazenado na mente do estudante, permitindo que o novo conteúdo seja incorporado de maneira coerente e significativa. A assimilação não se limita à simples memorização, mas envolve uma compreensão mais profunda, na qual o estudante é capaz de conectar e integrar as novas informações de maneira que se torne parte de sua rede cognitiva existente.

A *diferenciação progressiva* é um processo pelo qual novos conceitos são gradualmente refinados e diferenciados à medida que são assimilados na estrutura cognitiva do estudante. Este processo permite que conceitos iniciais amplos e gerais sejam detalhados e precisos com o tempo, à medida que o estudante desenvolve uma compreensão mais profunda e abrangente. A diferenciação progressiva é crucial para a construção de um conhecimento estruturado e complexo, uma vez que facilita a organização e a especificação dos conceitos conforme o estudante adquire mais experiência e compreensão sobre o assunto. Esse processo permite que o estudante não apenas reconheça a complexidade dos conceitos, mas também seja capaz de aplicá-los de maneira mais eficaz em diversos contextos (VALADARES, 2011).

Enquanto a *reconciliação integradora* é um processo dinâmico, pelo qual novos conceitos são integrados e reconciliados com conhecimentos prévios, resultando em uma estrutura cognitiva mais coesa e abrangente. Este processo envolve a combinação de novos conceitos com conceitos existentes de forma que ambos se ajustem e se enriquecem mutuamente. A reconciliação integradora permite que o estudante modifique e expanda seus conceitos prévios, criando uma rede cognitiva mais complexa e interconectada. Esse processo é essencial para a aprendizagem significativa, pois possibilita a criação de uma estrutura cognitiva que não apenas reflete a nova informação de forma precisa, mas também a relaciona de maneira significativa com o conhecimento prévio do estudante, promovendo uma compreensão mais profunda e integrada do conteúdo (MOREIRA, 2006a).

1.5 Evidências da aprendizagem significativa

Segundo Moreira (2006), é possível observar algumas evidências para identificar se a aprendizagem foi, de fato, significativa. A seguir, destacam-se os principais indicadores dessa aprendizagem:

- *Uso de linguagem própria:* os estudantes são capazes de explicar o novo conhecimento utilizando suas próprias palavras, essa evidência reflete a profundidade da aprendizagem e a assimilação de conceitos.

- *Transferência para novas situações:* os estudantes aplicam o conhecimento adquirido em diferentes contextos e situações, indicando uma compreensão profunda que permite o uso flexível do conhecimento, ou seja, a possibilidade de conectar conceitos aprendidos com novas experiências e desafios.

- *Integração com conhecimento prévio:* novos conceitos são conectados de forma não arbitrária com os conhecimentos prévios dos estudantes, formando uma estrutura cognitiva mais elaborada e organizada, dessa forma, o estudante está construindo uma rede de conhecimento coerente e significativa.

- *Resolução de problemas complexos:* os estudantes são capazes de resolver problemas e desafios que requerem o uso do novo conhecimento de forma reflexiva e crítica, essa habilidade indica uma compreensão aprofundada e a capacidade de aplicar conceitos em situações desafiadoras.

- *Explicações detalhadas:* os estudantes fornecem explicações bem fundamentadas sobre os conceitos aprendidos, mostrando que houve uma compreensão profunda dos tópicos estudados.

- *Engajamento e interesse:* estudantes motivados a participar e explorar o novo assunto indica uma compreensão significativa, são sinais de que o aprendizado é valorizado por parte do estudante.

- *Aplicações criativas:* os estudantes aplicam e relacionam o conhecimento de forma criativa com outros domínios, gerando novas ideias.

- *Retenção a longo prazo:* a aprendizagem significativa está mais propensa a ser retida a longo prazo, pois os conceitos são integrados à estrutura cognitiva dos estudantes de forma mais sólida e duradoura, um sinal de que o conhecimento foi internalizado de maneira eficaz e não apenas memorizado temporariamente, este é um dos mais difíceis de serem observados, já que requer um acompanhamento de longo período e nem sempre isso é possível.

1.6 Comparação com outras Teorias de Aprendizagem

A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel se diferencia de outras teorias de aprendizagem, como o construtivismo de Piaget e a teoria sociocultural de Vygotsky, mas também apresenta pontos de semelhanças que podem ser complementares. A contribuição dessas teorias foi significativa para a educação, visto que esses teóricos trouxeram informações relevantes sobre o entendimento da aprendizagem (MOREIRA, 2006a).

As três teorias podem se complementar e proporcionar uma visão mais holística da aprendizagem, que propicia uma nova visão do ser se relacionar no mundo, partindo do autoconhecimento. Integrar as perspectivas de Ausubel, Piaget e Vygotsky permite criar um ambiente de aprendizagem que considera tanto o desenvolvimento individual quanto o contexto social, promovendo uma educação mais completa e significativa (JANISCH; JELINEK, 2023).

1.6.1 Construtivismo de Piaget

Jean Piaget (1896-1980) desenvolveu a teoria do desenvolvimento cognitivo, a qual propõe que as crianças passam por estágios distintos de desenvolvimento à medida que amadurecem, sendo cada estágio caracterizado por mudanças na maneira de pensar e entender o mundo. Piaget enfatizou que a aprendizagem é um processo ativo de construção do conhecimento, onde as crianças assimilam novas informações e integram-nas em suas estruturas cognitivas existentes. Além disso, destacou a aprendizagem como um processo interno e progressivo, onde a interação com o meio e a maturação biológica são essenciais (CALIANI; BRESSA, 2017).

Ausubel e Piaget concordam que o conhecimento é construído a partir das experiências e do entendimento prévio do estudante. No entanto, enquanto Ausubel enfatiza a importância dos conhecimentos prévios e a ancoragem de novas informações a esses conhecimentos, Piaget foca no desenvolvimento cognitivo através de estágios, onde a interação com o ambiente leva à construção de estruturas mentais cada vez mais complexas. Ausubel valoriza a instrução direta e a apresentação organizada do conteúdo, enquanto Piaget enfatiza a aprendizagem por descoberta e a importância das atividades práticas (MOREIRA, 2006a).

1.6.2 Teoria Sociocultural de Vygotsky

Lev Vygotsky (1896-1934), assim como Ausubel, reconhece o papel crucial do conhecimento prévio na aprendizagem, contudo, enfatiza mais o contexto social e cultural, argumentando que o desenvolvimento cognitivo é profundamente influenciado pelas interações sociais, linguagem e características biológicas (JANISCH; JELINEK, 2023).

Nessa teoria os questionamentos e os conceitos ensinados, devem partir da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) do estudante, que é a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela capacidade de resolver tarefas de forma independente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado por desempenhos possíveis, com ajuda de adultos ou de colegas mais avançados ou mais experientes. Desse modo, essa teoria sugere a existência de uma"janela de aprendizagem" para cada momento do desenvolvimento cognitivo do aprendiz, a qual pode ser muito estreita. Em uma sala de aula com estudantes diferentes não existe uma única "janela de aprendizagem", mas sim, inúmeras, todas tão individualizadas quanto eles (NOGUEIRA, 2001).

Em contraste, Ausubel destaca a organização lógica do conteúdo e o uso de organizadores prévios, concentrando-se mais nos processos internos de aprendizagem e na estrutura cognitiva do indivíduo.

De acordo com a Teoria Sociocultural de Vygotsky, a aprendizagem de conhecimentos e de habilidades ocorre num contexto social no qual um adulto ou uma criança, mais aptos, guiam a atividade de um indivíduo menos apto. Essa teoria enfatiza a importância do apoio e da mediação de indivíduos mais experientes, como professores ou colegas, a chamada aprendizagem por pares, nesse caso o professor atua como guia do processo (NOGUEIRA, 2001).

Capítulo 2

Abordagens de Ensino de Matemática para uma Aprendizagem Significativa

Neste capítulo, serão destacadas duas metodologias que promovem uma compreensão mais profunda e significativa da matemática, alinhando-se com a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Essas abordagens não apenas envolvem os estudantes de maneira mais completa e duradoura, mas também visam conectar o conhecimento novo com o conhecimento prévio dos estudantes.

Possibilitar que os estudantes vejam significado na ciência e no que aprendem é o objetivo principal do ensino. As orientações e propostas sugeridas por documentos oficiais abordados com mais ênfase na seção 3.2, tais como a LDB, PCNEM e BNCC, em síntese, objetivam reduzir a passividade do estudante, ampliar o estudo dos conteúdos de forma contextualizada, priorizando a resolução de problemas, partindo do conhecimento espontâneo em direção ao conhecimento abstrato. A aplicação efetiva dos princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa na prática pedagógica pode ser alcançada através de estratégias que promovem um entendimento profundo e duradouro (GIEHL, 2018) .

Em consonância com essas diretrizes, o Currículo de MS apresenta orientações metodológicas que sugerem a utilização de uma diversidade de metodologias ativas. Essas metodologias não apenas servem para promover a aprendizagem, mas também favorecem a integração curricular além dos componentes específicos da matemática. O currículo enfatiza a importância de processos de escuta dos jovens e de interações significativas entre eles e com os professores. Ao apresentar um conjunto de orientações que consideram os objetivos pedagógicos, o currículo apoia as escolas na criação de coerência e intencionalidade nas escolhas metodológicas (MS-ESTADO, 2021).

Giehl (2018) discutiu aspectos da Teoria da Aprendizagem Significativa no ensino da Matemática e analisou experiências de ensino baseadas nessa teoria. Ela concluiu que aplicar esses princípios não é difícil e que o fato de trazer situações cotidianas e atividades diversificadas pode aumentar o envolvimento dos estudantes, promovendo uma aprendizagem significativa. Dessa forma, é responsabilidade do professor transformar sua prática pedagógica em uma experiência contínua de exploração e inovação (GIEHL, 2018).

Conforme apresentado na seção 1.6, a integração entre a teoria de Ausubel na estruturação do conhecimento, as ideias de Piaget sobre desenvolvimento cognitivo e as de Vygotsky sobre a importância do contexto social, pode enriquecer o ensino e criar um ambiente de aprendizagem que valorize tanto a estrutura lógica dos conteúdos quanto a interação social e o desenvolvimento cognitivo ativo, promovendo assim uma aprendizagem mais rica e significativa (JANISCH; JELINEK, 2023).

Conforme diversos estudos, algumas abordagens se mostraram particularmente eficazes no ensino da Matemática: Resolução de Problemas, Modelagem Matemática, Mapas Conceituais e Tecnologias Educacionais. Cada uma dessas abordagens oferece estratégias distintas com intuito de engajar os estudantes e facilitar a assimilação e a aplicação do conhecimento (ARRUDA, 2013), (GIEHL, 2018), (SOUZA, 2018).

2.1 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é uma abordagem, uma estratégia de ensino, que permite aos estudantes aplicar conceitos matemáticos a situações do mundo real, promovendo uma compreensão mais profunda e contextualizada. Aragão (2016), em seus estudos sobre a história da Modelagem, apresenta que a busca por uma metodologia que possibilitasse a compreensão de algo abstrato por meio do concreto iniciou no século XIX. No entanto, movimentos internacionais de grande relevância para o uso de Modelagem Matemática, aconteceram somente nos anos 1960, influenciando fortemente vários pesquisadores brasileiros. Esses movimentos incentivaram debates sobre a Modelagem Matemática na educação, resultando em um crescimento da importância da Educação matemática devido à inclusão da Modelagem Matemática (ARAGÃO; BARBOSA, 2016).

Os pesquisadores brasileiros iniciaram um movimento pela modelagem no final dos anos 1970 e início dos anos 1980 e conquistaram adeptos por todo o Brasil. Dentre eles estão: Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, responsáveis por impulsionar significativamente a implantação e a disseminação dessa abordagem de ensino (BIEMBENGUT, 2009).

A definição apresentada por Burak (1992) é que a Modelagem Matemática é um conjunto de procedimentos utilizados para explicar, matematicamente, os fenômenos cotidianos, auxiliando na elaboração de hipóteses e tomada de decisões.

Barbosa (2001) ressalta que a modelagem oferece aos estudantes a oportunidade de analisar situações de diversas áreas através da matemática, sem depender de procedimentos previamente estabelecidos, permitindo diversos encaminhamentos, para ele a Modelagem é um ambiente de aprendizagem.

A Modelagem não deve ser exclusivamente relacionadas à modalidade de projetos, há outros tipos de atividades de Modelagem que demandam menos tempo e são mais simplificadas. Barbosa (2001) apresenta que essas diferentes possibilidades de desenvolver a Modelagem, podem ser classificadas em três casos:

1. *Caso 1:* O professor apresenta uma situação-problema com todas as informações necessárias e formula o problema para os estudantes resolverem. Nessa situação, os estudantes não precisam buscar dados fora da sala de aula; todo o trabalho se desenvolve a partir da situação apresentada.

2. *Caso 2:* O professor traz um problema de outra área da realidade, e os estudantes devem coletar as informações necessárias para resolvê-lo e fazer simplificações para resolver o problema.

3. *Caso 3:* Os estudantes formulam e resolvem problemas a partir de temas não-matemáticos, sendo responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema. Este é o caso mais demorado, normalmente utilizado em trabalhos de projetos.

Vale ressaltar que o professor participa da investigação dos estudantes, em todos os casos, promovendo o diálogo entre eles. Porém, no *Caso 1* o professor possui um papel mais presente na organização das atividades, enquanto no *Caso 3*, a participação dos estudante é bem maior, desde o início.

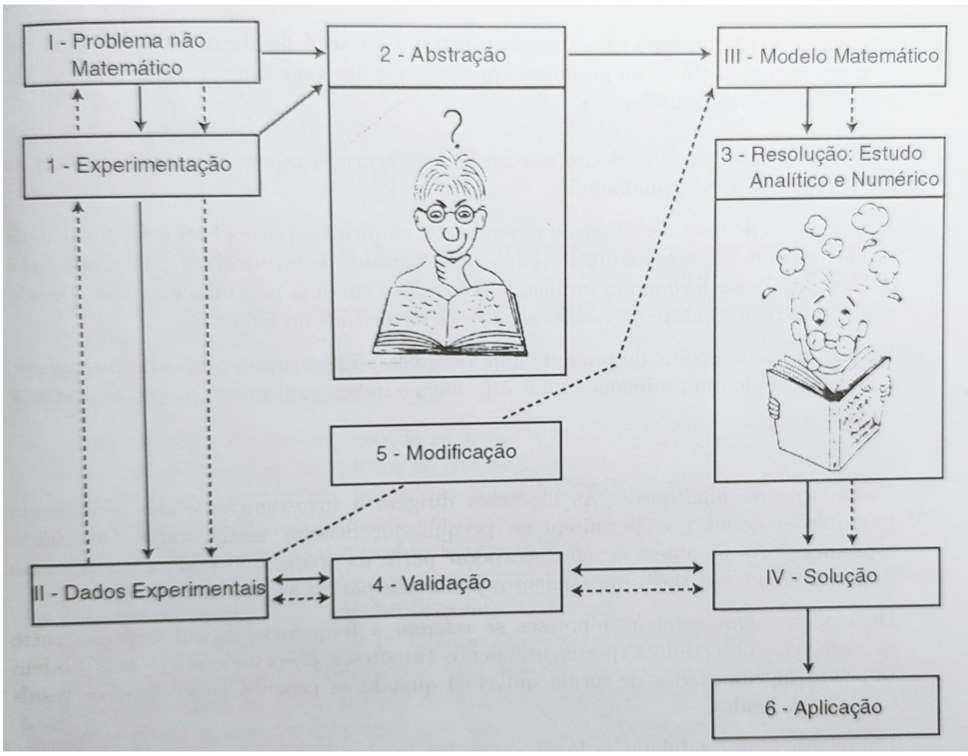
Bassanezi (2004), afirma que "a modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual" (BASSANEZI, 2004).

Almeida, Silva, e Vertuan (2012, p. 17), discutem elementos presentes em situação em que a Modelagem Matemática é aplicada na educação e, segundo os autores, "[...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução".

2.1.1 Processo de Modelagem

Para desenvolver atividades que baseiam-se em Modelagem são necessários alguns procedimentos para forneceram condições favoráveis que despertem interesse e motivação, Bassanezi (2004) citou algumas etapas a serem seguidas, sintetizadas na Figura 2.1.

Figura 2.1: Esquema de uma modelagem: as setas contínuas representam a primeira aproximação. As setas pontilhadas surgem na busca de um modelo matemático para o problema, tornando o processo dinâmico.



Fonte: Bassanezi, 2004

As etapas esboçadas na Figura 2.1 , apesar de representar um processo dinâmico (as linhas pontilhadas), podem ser organizadas e detalhadas da seguinte maneira:

1. *Experimentação*: etapa em que se obtém os dados. Os métodos experimentais surgem de acordo com a natureza do experimento e do objetivo da pesquisa.
2. *Abstração:* processo de formulação dos modelos matemáticos, em que se faz necessário:
   (a) Seleção das variáveis;
   (b) Problematização;
   (c) Formulação de hipóteses;
   (d) Simplificação.
3. *Resolução:* momento em que se traduz as hipóteses para a linguagem matemática, podendo ser desvinculada da realidade modelada.
4. *Validação:* verificação da validade do modelo, o qual deve prever, pelo menos, os fatos que o originaram.
5. *Modificação:* reformulação ou melhoria do modelo, caso não tenha sido totalmente aceito da etapa anterior, uma das partes fundamentais do processo de modelagem.

2.1.2 Contribuições

Bassanezi (2004) apresenta cinco fatores que favorecem a inclusão da modelagem nas aulas de Matemática, são eles: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática.

- *Motivação:* reforçada ao conectar a matemática com situações do cotidiano, tornando o aprendizado mais relevante para os estudantes.
- *Facilitação da aprendizagem:* ocorre por meio da aplicação prática dos conceitos, o que solidifica a compreensão.
- *Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas:* promove a interdisciplinaridade, essencial para a formação de um pensamento crítico e aplicado.
- *Desenvolvimento de habilidades gerais de exploração:* incentiva os estudantes a investigarem e resolverem problemas de maneira independente.
- *Compreensão do papel sócio-cultural da matemática:* permite que os estudantes reconheçam a influência e a importância da matemática em contextos históricos e contemporâneos, promovendo uma visão mais ampla e integrada da disciplina.

Para complementar, no trabalho organizado por Brandt, Burak e Kluber (2016), uma coletânea sobre as perspectivas, experiências e reflexões sobre a Modelagem Matemática, são citados elementos que sustentam as potencialidades da Modelagem Matemática para tornar o currículo mais flexível, favorecer a criatividade, a aprendizagem significativa, a compreensão da complexidade do conhecimento associado à prática da sala de aula e ao contexto histórico-cultural das sociedades (BRANDT; BURAK; KLÜBER, 2016).

A partir desses estudos percebe-se que a modelagem incentiva o desenvolvimento do pensamento crítico e a busca por soluções criativas, promovendo a autonomia e a criatividade dos estudantes.

2.1.3 Desafios

Essa metodologia pode ser desafiadora, pois existem alguns obstáculos na implementação da Modelagem Matemática, tais obstáculos são abordados por diversos autores e podem ser classificados como:

- *Obstáculos instrucionais:* se referem ao currículo e ao tempo curto para realizá-lo e o fato da modelagem ser um processo mais demorado, dúvidas sobre como relacionar a Matemática com outra áreas e a percepção errônea, por parte de alguns professores, de que aplicações e conexões com outras áreas não integram o ensino da Matemática, além da infraestrutura insuficiente e do sistema de avaliação tradicional, que podem não captar as competências desenvolvidas pela Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2004), (BIEMBENGUT, 2009).

- *Obstáculos para os estudantes:* o ritmo da aula pode se tornar mais lento, pois os estudantes podem se perder no processo, já que não estão habituados a atuar de forma ativa no processo de ensino-aprendizagem, a heterogeneidade da sala de aula também pode causar a falta de identificação com o tema, podendo causar a falta de interesse e motivação por parte de alguns.

- *Obstáculos para os professores:* a falta de formação adequada aos professores, que pode gerar a insegurança na condução de atividades práticas, além de uma resistência cultural em relação à mudança de métodos tradicionais para abordagens mais abertas e exploratórias, como a modelagem (BASSANEZI, 2004),

De acordo com Ceolim (2015), os obstáculos e as dificuldades enfrentados pelos professores em relação ao uso da Modelagem Matemática na sala de aula podem ser associados a três fatores de resistência a mudanças das práticas pedagógicas, o fator *pessoal-emocional*; o fator da *competência profissional*; e o fator *institucional*. O primeiro está relacionado com os sentimentos de incerteza, vulnerabilidade e insegurança, pois afetam a zona de conforto do professor e colocando-o em uma zona de risco. O segundo, engloba as concepções, teorias e conhecimentos que sustentam as decisões e as práticas no dia a dia do professor e as frágeis e, algumas vezes, insuficientes competências e estratégias pessoais dos professores, estudos mostram que as competências profissionais do professor deveriam englobar um conjunto de concepções, teorias e conhecimentos que pudessem dar suporte às decisões e práticas frente aos problemas enfrentados, já que a profissão envolve inúmeras tarefas a serem cumpridas, com características diferentes entre si.

O fator institucional se refere à cultura estabelecida nas instituições educativas, que tende a ser burocrática e conservadora, limitando a abertura para novas práticas de ensino, especialmente aquelas que alteram a estrutura escolar tradicional, dominada pela escrita, codificação e formalização. Historicamente, os currículos escolares são definidos com base nas expectativas dos ciclos educacionais subsequentes, focando mais no sucesso em exames e na continuidade dos estudos do que na preparação para a vida prática (CEOLIM, 2015).

Segundo Tardif e Lessard (2005, *apud* Ceolim, 2015, p. 76), "a escola trabalha amplamente em circuito fechado e interessa-se muito mais pelo sucesso nos exames ou pela admissão no ciclo de estudos seguintes do que pelo uso dos conhecimentos escolares na vida". Esse é um exemplo de como o sistema institucional pode ser uma barreira significativa para a implementação de metodologias inovadoras como a Modelagem Matemática, dificultando a adaptação a novas formas de ensino que visem uma aprendizagem mais prática e integrada.

O fato da implementação da Modelagem Matemática no ensino exigir uma mudança de paradigma, até mesmo por parte do professor, se faz necessário o incentivo de novas formas de elaborar atividades e conduzir o ensino, o que pode ser desafiador para aqueles acostumados com métodos tradicionais. Por certo, enquanto houver a tradição escolar que responsabiliza apenas o professor pelo processo de ensino-aprendizagem, os desafios para as inovações de práticas diferenciadas em sala de aula perdurarão, mas cabe a nós professores e pesquisadores, juntamente com toda a comunidade escolar mostrar que é uma responsabilidade de todos, professor, estudante, comunidade escolar, pais e responsáveis e também comunidade externa (BRANDT; BURAK; KLÜBER, 2016).

Apesar dos obstáculos na implementação da Modelagem Matemática, inúmeros estudos mostraram a eficácia de atividades elaboradas por meio dela, sendo uma possibilidade concreta de aprendizagem. Percebe-se que a integração entre os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel com a Modelagem Matemática pode permitir a criação de um ambiente de aprendizagem onde os estudantes conectam novos conhecimentos a conceitos previamente adquiridos por meio de situações práticas e experienciadas no dia a dia, isso facilita a compreensão e aplicação conteúdos matemáticos, tornando o aprendizado mais relevante e engajador. Por meio dessa integração os estudantes podem perceber a utilidade da matemática, muitas vezes questionada, possibilitando o conhecimento profundo e significativo da disciplina.

2.2 Resolução de Problemas

A resolução de problemas matemáticos existe desde a antiguidade e sempre esteve presente no currículo escolar, apesar da longa história na matemática escolar, é um conceito bastante novo para a Educação Matemática. Sua formalização como metodologia de ensino e aprendizagem ocorreu com a publicação do livro *How to Solve It* de George Pol!ht, em 1945. No entanto, foi somente na década de 1990 que a resolução de problemas começou a ser amplamente reconhecida e aplicada como uma metodologia de ensino (HERMINIO, 2008).

De acordo com Pozo e Echeverría (1988 *apud* Soares e Pinto, 2001, p. 1),

> a solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos estudantes uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos estudantes o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes.

A Resolução de Problemas não se trata apenas seguir regras de "como resolver", ao contrário de promover essa mecanização do conhecimento, a metodologia valoriza uma abordagem de ensino que transforma o estudante de um simples memorizador de conteúdos matemáticos em um aplicador e produtor do conhecimento. É claro, que para isso o estudante também precisa dominar os procedimentos algorítmicos e cálculos mentais (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Por meio dessa metodologia, o estudante é incentivado a utilizar seus conhecimentos em benefício próprio e da sociedade, desenvolvendo atitudes cidadãs e aplicar esses conhecimentos de forma prática. Isso vai de encontro com os objetivos para o ensino da Matemática, estabelecidos na BNCC (HERMINIO, 2008).

Além disso, o ensino de matemática por meio da resolução de problemas pode enriquecer as experiências educativas, promovendo discussões, reflexões, questionamentos e diálogos. Essa metodologia não apenas facilita a colaboração e a produção escrita, mas também engaja os estudantes de maneira significativa. Dessa forma, não só a matemática se beneficia dessa abordagem, como também outras áreas do conhecimento, desenvolvendo habilidades aplicáveis em diversas situações ao longo da vida (PADOVANI et al., 2022).

2.2.1 Papel do professor

Durante o desenvolvimento, o papel do professor deve ser visto como um guia e colaborador, e não como um obstáculo ao aprendizado dos estudantes. É importante entender que o processo de resolução de problemas pode envolver múltiplos caminhos, e o sucesso não se resume apenas à obtenção da resposta correta. O verdadeiro aprendizado ocorre quando o estudante compreende os conceitos construídos necessários para resolver o problema. Outro fator importante é que professor precisa elaborar com atenção o planejamento de sua aula para que a metodologia de resolução de problemas em sala de aula tenha bons resultados, além de refletir previamente sobre os objetivos a serem alcançados durante a aula (HERMINIO, 2008).

Também é importante observar que o problema proposto deve ser de interesse para os estudantes, pois isso facilitará a compreensão do enunciado. Nesse sentido, Lorensatti (2009), apontou que a resolução de problemas parece ser um dos pontos críticos na Matemática escolar e o principal fator seria a falta de compreensão dos enunciados. A autora sugere que para melhorar a compreensão se faz necessário ampliar a conexão entre a matemática e a linguagem natural (o Português), treinando habilidades de leitura e escrita.

Como forma de melhorar essa compreensão "o professor de Matemática pode orientar, praticar ou viabilizar leituras de textos matemáticos em parceria com o professor de Língua Portuguesa, não só na perspectiva de ensino da Matemática, mas também na perspectiva de desenvolvimento da compreensão leitora"(Lorensatti, 2009, p. 97). Além dessa abordagem, a leitura pode ser uma prática de ensino por meio de textos que tenham como objeto, conceitos e procedimentos matemáticos, história da matemática, ou reflexões sobre Matemática. Essa abordagem pode contribuir significativamente para a construção de significados pelo estudante.

2.2.2 Etapas para a aplicação

Vale ressaltar que, conforme observado por Allevato e Onuchic (2009, p. 140), para a aplicação dessa metodologia não há formas rígidas, mas que uma proposta atual consiste em observar e organizar por meio de algumas etapas, são elas:

1. *Preparação do problema:* seleção do problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento, chamado problema gerador, cujo conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha sido trabalhado em sala de aula. O problema gerador conduzirá os estudantes para a construção do conteúdo planejado pelo professor para a aula;

2. *Leitura individual*;

3. *Leitura em conjunto:* nesse momento o professor pode esclarecer dúvidas referentes ao enunciado e, se necessário, sugerir a consulta a um dicionário;

4. *Resolução do problema:* os estudantes buscam resolver o problema em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo;

5. *Observar e incentivar:* enquanto os estudantes resolvem o problema, o professor atua como mediador, observando e analisando seus comportamentos, além de estimular a colaboração entre eles. Ele encoraja os estudantes a usar seus conhecimentos prévios e explorar diferentes métodos, atendendo às suas dificuldades e ajudando-os a resolver problemas secundários. O professor também facilita a transição da linguagem cotidiana para a linguagem matemática, garantindo a continuidade do trabalho e promovendo um ambiente de aprendizado colaborativo e reflexivo.

6. *Registro das resoluções:* os grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções, independente de estarem certas ou erradas ou feitas por processos diferentes.

7. *Plenária:* nesta etapa os estudantes discutem as diferentes resoluções, defendem seus pontos de vista. O professor conduz as discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos, sendo este um momento rico para a aprendizagem.

8. *Busca do consenso:* após esclarecimento de dúvidas e análise das resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor juntamente com a classe, chegam a um consenso sobre o resultado correto.

9. *Formalização do conteúdo:* neste momento o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.

Krulik e Rudnick (2005 *apud* Allevato e Onuchic, 2009, p. 143) fazem algumas recomendações ao professor, destacando-se as seguintes: definir os conceitos matemáticos que se pretende construir a partir do problema proposto, definir o objetivo relativo aos tópicos matemáticos próprios desse problema, verificar se há outros tópicos relacionados a esse foco, ou seja, conteúdos matemáticos adicionais que possam ser trazidos para a aula como novo conhecimento, prever as estratégias de resolução que podem ser utilizadas para obter a solução do problema dado.

Dessa forma, percebe-se que a Resolução de Problemas é algo além de uma atividade limitada a engajar os estudantes na aplicação de conhecimento após a aquisição de certos conceitos e técnicas. Ela pode ser utilizada também como um meio de adquirir conhecimentos novos. Conclui-se que a resolução de problemas não só promove o aprendizado matemático, mas também desenvolve habilidades críticas e autônomas nos estudantes.

2.3 Relação entre as metodologias

A utilização das estratégias pedagógicas estudadas das seções 2.1 e 2.2 na sala de aula pode enriquecer o ambiente de aprendizagem e promover uma compreensão mais profunda e duradoura dos conceitos. Ao conectar o conhecimento teórico a situações práticas e ao utilizar ferramentas tecnológicas para apoiar a aprendizagem, os professores podem facilitar a construção de uma estrutura cognitiva mais coesa e significativa, alinhada com os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa.

Tanto a Modelagem Matemática quanto a Resolução de problemas são metodologias que proporcionam ao estudante o desenvolvimento de habilidades metacognitivas, que estão relacionadas com a capacidade de um indivíduo de entender, controlar e manipular seus próprios processos cognitivos. Por meio dessas habilidades, os estudante tem ciência do que sabe, quais são seus pontos fortes e fracos para se tornar um bom resolvedor de problemas, e ainda consegue desenvolver a autonomia e melhorar o desenvolvimento acadêmico (YAHATA, 2012).

Yahata (2012) mostra que ter o conhecimento não é o suficiente para termos bons resolvedores de problemas pois, além disso, é preciso saber como acessá-lo e perceber a conexão entre conhecimentos necessários para resolver o problema, ou seja, é preciso:

1. compreender o problema;

2. planejar a estratégia de solução;

3. acompanhar e controlar o processo de solução;

4. avaliar se a resposta faz sentido.

Tais passos são essenciais para o controle e a autorregulação das ações de um indivíduo e podem ser lapidadas a partir do desenvolvimento das habilidades metacognitivas por meio de metodologias como as propostas nesse trabalho. Em sala de aula, percebe-se muitos estudantes que antes de compreender o enunciado do problema ou o que o problema está solicitando, iniciam a resolução com uma estratégia muitas vezes infundada, pois não analisam as estratégias, quando o estudante age dessa forma ele ainda não desenvolveu o controle ou a regulação de suas ações (YAHATA, 2012).

Em virtude dos tópicos discutidos nesse capítulo e dos princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa, bordados no capítulo 1, percebe-se que a compreensão e a implementação de processos potencialmente significativos por parte dos professores da educação básica podem melhorar a eficácia do ensino e contribuir significativamente para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Ao adotar estratégias que promovem a integração, a transferência e a aplicação do conhecimento de forma criativa e crítica, os educadores podem facilitar um aprendizado mais profundo e duradouro (BRASIL, 2018).

Capítulo 3

Ensino de Progressões Geométricas

O ensino de Progressões Geométricas (PG) no Ensino Médio em escolas públicas brasileiras enfrenta desafios e oportunidades, que são influenciados por fatores como a infraestrutura escolar, recursos disponíveis, políticas educacionais e as metas estabelecidas pela (BNCC). Neste capítulo será feita uma breve abordagem sobre o histórico das Progressões, em seguida serão analisadas as principais diretrizes sobre o ensino de Progressões, conforme documentos oficiais. Por fim, será realizada um abordagem de Progressão Geométrica no livro didático utilizado no ano de 2024 pelas escolas estaduais.

3.1 Histórico

As progressões possuem uma rica história, pois são estudadas desde a antiguidade, presentes em diversas civilizações que as utilizaram em áreas como agricultura, arquitetura, finanças e astronomia. Por exemplo, por volta de 4700 a.c., os babilônicos já tinham seu calendário solar e trabalhavam com cálculos envolvendo soma de termos de progressões. Os primeiros indícios sobre o surgimento dos juros são da babilôbia, por volta de 2000 a.c., onde estes eram pagos pelo uso de sementes (ARRUDA, 2013).

Também foram encontradas evidências de que os egípcios, por volta de 1900 a 1600 a.c., já haviam percebido problemas envolvendo progressões aritméticas (PA) e geométricas. Pitágoras e os sábios gregos que o seguiram, conheciam sobre as progressões aritméticas, geométricas, harmônicas e musicais (ARRUDA, 2013).

Uma PG é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada razão. Este conceito já era conhecido e aplicado por matemáticos da Grécia Antiga, como Euclides, que fez contribuições significativas para a compreensão das sequências numéricas, em sua notável obra *Os elementos* (MILANI, 2011).

Conforme apresentado por Milani (2011), durante o período medieval, as progressões continuaram a ser exploradas por matemáticos, aplicadas principalmente em questões relacionadas à herança e ao comércio. Posteriormente, no Renascimento, as progressões ganharam ainda mais destaque devido ao trabalho Fibonacci que, além de introduzir a famosa sequência que leva seu nome, também explorou conceitos relacionados às progressões geométricas.

Matemáticos como René Descartes e Isaac Newton utilizaram as progressões geométricas em suas pesquisas sobre séries infinitas e cálculo, expandindo significativamente as aplicações práticas dessas progressões em áreas como física e engenharia. Enquanto Johann Freidrich Carl Gauss teve grande contribuição relacionada à progressão aritmética, conforme amplamente difundido, aos 10 anos foi capaz de calcular a soma de 1 a 100 muito rapidamente, utilizando um macete, que hoje é a conhecida fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA (EVES, *apud* Milani, 2011, p. 25).

Atualmente, as progressões são um tópico essencial nos currículos de matemática, tanto no ensino médio quanto no superior. Elas são ensinadas não apenas pelo seu valor teórico, mas também pelas suas aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento, incluindo economia, biologia e computação.

3.2 Documentos oficiais

Desde 2000, quando houve a divulgação dos Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio PCNEM, elaborados pelo MEC a partir dos princípios definidos na LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), orientava-se o professor pela busca de novas abordagens. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio divulgadas em 2006, sugeriam metodologias e propostas de atividades que sinalizam para uma matemática contextualizada (BRASIL, 2000); (BRASIL, 2006).

Em 2018 foi divulgada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), elaborada com o intuito de orientar os rumos da Educação Básica no Brasil, com o objetivo de elevar a qualidade do ensino com equidade e preservando a autonomia dos entes federados e as particularidades regionais e locais. A partir da BNCC as redes de ensino e instituições escolares públicas e particulares passaram a ter uma referência nacional comum e obrigatória para a elaboração dos seus currículos e propostas pedagógicas (BRASIL, 2018).

É importante ressaltar que a BNCC não é um currículo, mas um conjunto de orientações para conduzir as equipes pedagógicas na construção dos seus currículos locais. No Estado do MS, por exemplo existe o Currículo de Referência de Mato Grosso Do Sul, no qual são contempladas as expectativas locais para a formação dos estudantes e, para isso, sua elaboração colaborativa teve a participação da sociedade sul-matogrossense. No currículo enfatiza-se o desenvolvimento das aprendizagens essenciais, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, ambiental, cultural e do mundo do trabalho e da prática social vivenciada no Estado (MS-ESTADO, 2021).

A BNCC estabelece aprendizagens essenciais para o desenvolvimento de dez competências gerais durante a Educação Básica. Essas competências orientam tanto as aprendizagens no Ensino Médio quanto os itinerários formativos oferecidos pelos sistemas de ensino. Conforme a BNCC (2018, p. 8), "competência é definida como a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores necessários para resolver demandas complexas da vida cotidiana, exercer a cidadania plena e atuar no mundo do trabalho". Conforme o documento, o professor deve repensar suas metodologias e usá-las como forma de promover a aprendizagem colaborativa em torno do objetivo comum de formação de indivíduos sociais.

Além das competências gerais, no Ensino Médio a área de Matemática e suas Tecnologias também deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de 5 competências específicas, definidas pela BNCC (2018, p. 523):

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

O Novo Ensino Médio, cuja implantação iniciou em 2021 no Estado de MS, vai de encontro com as orientações da BNCC, prioriza o desenvolvimento das habilidades por meio de competências e organiza os componentes por Áreas do Conhecimento, que são:

Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, existem os itinerários formativos oferecidos para todos os estudantes (MS-ESTADO, 2021).

De fato, o estudo das Progressões Geométricas permite o desenvolvimento de tais competências, pois permite aos estudantes explorar conceitos matemáticos de maneira contextualizada e relevante, promovendo a compreensão de sequências e padrões matemáticos que são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes. Portanto, aplicando os princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa é possível alcançar esses objetivos (BRASIL, 2018).

3.3 Abordagem de Progressão Geométrica no livro didático

A literatura e os relatórios educacionais indicam que, frequentemente, o ensino de progressões nas escolas públicas é abordado de maneira tradicional, com foco na aplicação de fórmulas e resolução de exercícios, muitas vezes sem a devida contextualização e conexão com situações práticas ou outras áreas do conhecimento. Os livros didáticos ainda apresentam poucas metodologias ativas e que favorecem a participação ativa do estudante facilitando a aprendizagem significativa (SOUZA; SANTOS; PANTOJA, 2023).

No Ensino Médio, o ensino de Progressões Geométricas (PG) foca em conceitos fundamentais e na conexão com conhecimentos prévios dos estudantes. Normalmente, inicia-se com sequências numéricas e Progressões Aritméticas (PA), que atuam como subsunçores, facilitando a compreensão das PG (ARRUDA, 2013).

Os livros didáticos passaram por algumas atualizações e/ou reformulações para se adequarem ao Novo Ensino Médio, por exemplo, a coleção atualmente utilizada na área da Matemática no Estado do MS, a coleção *Multiversos*, da editora FTD, foi elaborada com o objetivo de favorecer a transição e a consolidação das propostas do Novo Ensino Médio, pois contempla os conteúdos emergentes das habilidades indicadas na BNCC. Além disso, a interdisciplinariedade é estimulada nas obras, para que o estudante perceba a Matemática em outras áreas do conhecimento e relacione tais conceitos e práticas no mundo do trabalho (FTD, 2021).

Segundo a editora, a coleção apresenta propostas de trabalho coletivo e estimula a resolução de problemas, investigação, reflexão, interpretação, argumentação, análise crítica e pensamento lógico. Um destaque da obra é o desenvolvimento do pensamento computacional, que permeia toda a coleção, promovido com ou sem o uso de tecnologias digitais (FTD, 2021).

A partir de agora será apresentada uma análise feita pelas autoras acerca da obra da coleção que aborda o tema das Progressões intitulada *Sequências e Trigonometria*, de

Joamir Roberto de Souza (SOUZA, 2020).

O capítulo "Sequências e noções de linguagem de programação"inicia com uma seção de introdução sobre sequências, bastante teórica seguida de exercícios de fixação e alguns contextualizados. Em seguida tem-se a seção sobre Progressão Aritmética, introduzida por uma situação cotidiana, seguida de definições, são apresentadas questões resolvidas retiradas do ENEM, com cada etapa de interpretação e resolução bem definida, a subseção sobre soma dos termos também é uma situação bem interessante e fácil de observar. Dentre os 37 exercícios propostos para exercitar o tema PA, apenas 9 são contextualizados (menos de 25%), os demais são teóricos, tais como aplicação de fórmulas e definição.

Da mesma forma, a seção "Progressão Geométrica"é introduzida de forma contextualizada, com o exemplo da construção do fractal Triângulo de Sierpinski, mas de forma bem sucinta, discutindo apenas a quantidade de triângulos em preto, conforme a Figura 3.1.

Essa introdução contribuiu para a elaboração de uma sequência didática que desenvolvesse mais o conceito de PG baseando-se na construção de Fractais, apresentada na Seção 4.1.2.

Na página seguinte é apresentada a definição de PG, juntamente com a sua classificação, da seguinte maneira:

Denominamos progressão geométrica (PG) toda sequência numérica em que, a partir do 2° termo, o quociente entre um termo qualquer e seu antecessor é igual a uma constante. Essa constante, que pode ser indicada por q, é a razão da PG. Podemos classificar uma PG em:

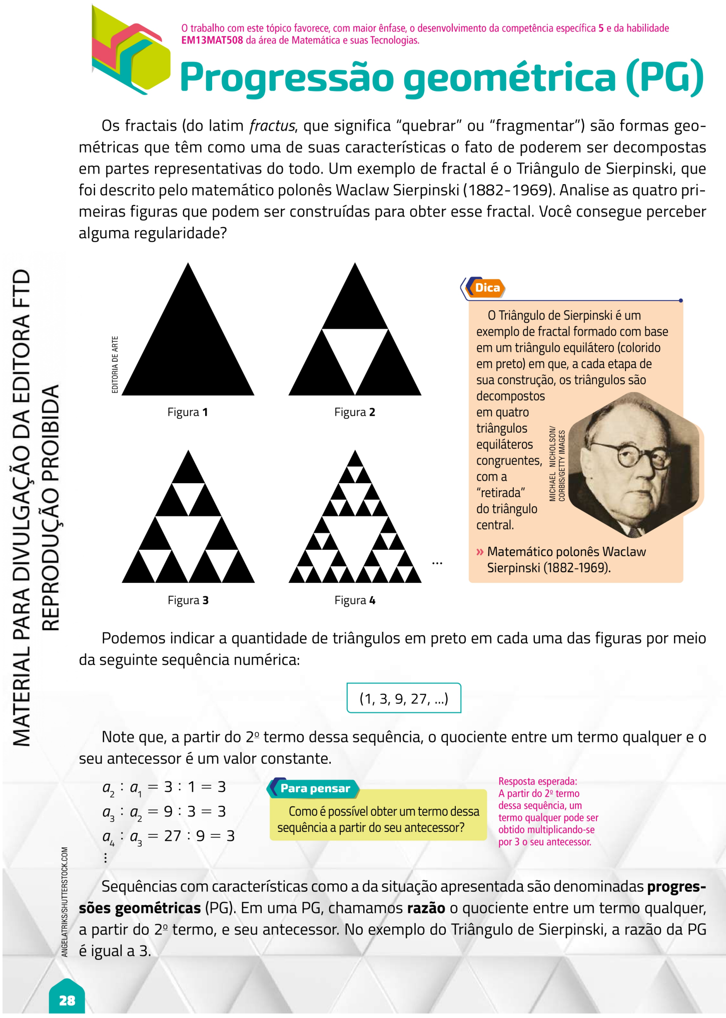
- *constante, quando* $q = 1$*;*
- *decrescente, quando* $q > 1$ *e* $a_1 < 0$ *ou* $0 < q < 1$ *e* $a_1 > 0$*;*
- *crescente, quando* $q > 1$ *e* $a_1 > 0$ *ou* $0 < q < 1$ *e* $a_1 < 0$*;*
- *alternante, quando* $q < 0$*.*

Em seguida são apresentados exemplos de sequências onde se analisa sua classificação. A forma de apresentar primeiro a classificação já utilizando as nomenclaturas de q e a_1, antes de apresentar o termo geral não pareceu a melhor opção, pois pode deixar o estudante confuso.

A dedução do termo geral é apresentada de forma genérica, destacando os expoentes, conforme a Figura 3.2, logo em seguida relaciona-se a PG com a função exponencial, também de forma genérica.

A dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos da PG também é realizada de forma genérica, seguida de dois exercícios resolvidos.

Figura 3.1: Página de introdução à PG no livro didático *Sequências e Trigonometria*



MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

O trabalho com este tópico favorece, com maior ênfase, o desenvolvimento da competência específica **5** e da habilidade **EM13MAT508** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Progressão geométrica (PG)

Os fractais (do latim *fractus*, que significa “quebrar” ou “fragmentar”) são formas geométricas que têm como uma de suas características o fato de poderem ser decompostas em partes representativas do todo. Um exemplo de fractal é o Triângulo de Sierpinski, que foi descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Analise as quatro primeiras figuras que podem ser construídas para obter esse fractal. Você consegue perceber alguma regularidade?

EDITORIA DE ARTE

Figura **1** Figura **2** Figura **3** Figura **4** ...

Dica

O Triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal formado com base em um triângulo equilátero (colorido em preto) em que, a cada etapa de sua construção, os triângulos são decompostos em quatro triângulos equiláteros congruentes, com a “retirada” do triângulo central.

MICHAEL NICHOLSON/CORBIS/GETTY IMAGES

» Matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Podemos indicar a quantidade de triângulos em preto em cada uma das figuras por meio da seguinte sequência numérica:

(1, 3, 9, 27, ...)

Note que, a partir do 2º termo dessa sequência, o quociente entre um termo qualquer e o seu antecessor é um valor constante.

$a_2 : a_1 = 3 : 1 = 3$
$a_3 : a_2 = 9 : 3 = 3$
$a_4 : a_3 = 27 : 9 = 3$
$\vdots$

Para pensar

Como é possível obter um termo dessa sequência a partir do seu antecessor?

Resposta esperada: A partir do 2º termo dessa sequência, um termo qualquer pode ser obtido multiplicando-se por 3 o seu antecessor.

Sequências com características como a da situação apresentada são denominadas **progressões geométricas** (PG). Em uma PG, chamamos **razão** o quociente entre um termo qualquer, a partir do 2º termo, e seu antecessor. No exemplo do Triângulo de Sierpinski, a razão da PG é igual a 3.

ANGELATRIKS/SHUTTERSTOCK.COM

28

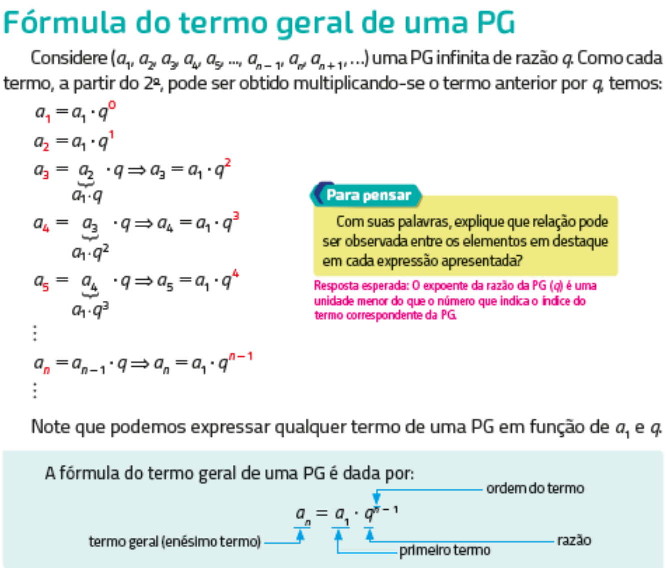
Fonte: Souza, 2020

Não se discute que a demonstração matemática é de extrema importância para o ensino, especialmente pelo fato de favorecer a abstração e que compõe um dos itens fundamentais na organização do ensino de Matemática. Conforme Elon (*apud* Sena, 2018, p. 9), “os itens são Conceituação, Manipulação e Aplicações, sendo que a demonstração se encaixa no primeiro deles. Uma demonstração tem valor na experiência do convencimento pela razão e pelo aprendizado do rigor científico que a Matemática exige”.

Entretanto, nem todos os estudantes possuem o amadurecimento cognitivo e os conhecimentos prévios necessários para compreendê-las por completo. Portanto, seria benéfico anteceder algumas dessas demonstrações nas seções de PA e PG com exemplos práticos, pois isso poderia tornar as ideias mais acessíveis, facilitando a compreensão e engajamento de um número maior de estudantes.

Quanto às atividades propostas na seção de PG, 9 entre as 27 apresentam-se contextualizadas. Sendo duas de cada tema a seguir: fractais, porcentagem e crescimento populacional e as demais envolvendo outras formas de contextualização, dentre essas questões,

Figura 3.2: Dedução do termo geral da PG no livro didático analisado



Fórmula do termo geral de uma PG

Considere $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ uma PG infinita de razão q. Como cada termo, a partir do 2º, pode ser obtido multiplicando-se o termo anterior por q, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 \cdot q} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 \cdot q^2} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 \cdot q^3} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\vdots$$

Para pensar

Com suas palavras, explique que relação pode ser observada entre os elementos em destaque em cada expressão apresentada?

Resposta esperada: O expoente da razão da PG (q) é uma unidade menor do que o número que indica o índice do termo correspondente da PG.

Note que podemos expressar qualquer termo de uma PG em função de a_1 e q.

A fórmula do termo geral de uma PG é dada por:

$$\underbrace{a_n}_{\text{termo geral (enésimo termo)}} = \underbrace{a_1}_{\text{primeiro termo}} \cdot \underbrace{q}_{\text{razão}}^{\overbrace{n-1}^{\text{ordem do termo}}}$$

Fonte: Souza, 2020

poucas proporcionam, de fato, a investigação e reflexão.

O capítulo analisado desse livro didático se encerra com uma atividade integradora, a qual relaciona os conhecimentos adquiridos no decorrer com o tema Demografia e crescimento populacional, a qual inspirou a sequência que será descrita na seção 4.1.3. Essa atividade sim permite a investigação, reflexão, interpretação, argumentação, análise crítica e pensamento lógico.

Com isso, observou-se, que esse capítulo da obra, apesar de apresentar situações que requerem um pouco de reflexão, interpretação e análise no início da seção, não favorece as metodologias que promovem a aprendizagem colaborativa e enfatiza o rigor matemático por meio das demonstrações.

Capítulo 4

Sequências Didáticas

4.1 Elaboração das Sequências

As sequências didáticas foram elaboradas com intuito de propiciar um ambiente em que o estudante fosse capaz de ter uma aprendizagem significativa sobre o conteúdo Progressões Geométricas. Durante a elaboração foram utilizados princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa, juntamente com Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas.

4.1.1 Sequência I - Matemática Financeira

A primeira sequência, apresentada por completo no Apêndice A, aborda o estudo de PG relacionado com Matemática Financeira, a proposta é realizar a análise de dois investimentos. A sequência foi elaborada com base na Modelagem Matemática, classificada no *Caso 1*, de acordo com a definição apresentada por Barbosa (2001), conforme discutido na Seção 2.1, pois tanto o problema quanto os dados foram fornecidos pelo professor.

Esse tema oferece uma oportunidade para conectar a teoria matemática com interesses dos estudantes, já que, recentemente tem-se observado um crescente interesse entre os jovens por investimentos e finanças pessoais, em parte impulsionado pelo fácil acesso a informações e ferramentas financeiras digitais.

Nos dias de hoje qualquer pessoa com acesso à internet consegue aprender sobre investimentos, existem inúmeros sites, canais no *Youtube* e até mesmo *podcasts* que abordam o tema. Inclusive, alguns bancos permitem que menores de idade tenham investimentos na Bolsa de Valores, para isso, basta ter um número de CPF e abrir uma conta em uma corretora, desde que a conta esteja vinculada a um responsável legal, que deverá cuidar de todo o processo, desde a abertura da conta até as decisões sobre onde e quanto investir (NUBANK, 2024).

Nesse sentido, explorar questões como a valorização de investimentos ao longo do tempo ou a comparação entre diferentes opções de investimento, permite aos estudantes aplicar conceitos de progressões geométricas e funções exponenciais. Essa conexão com a matemática financeira pode aumentar o engajamento e a motivação dos estudantes, mostrando a aplicabilidade prática dos conceitos aprendidos e promovendo uma educação matemática mais relevante.

Para isso, a professora questionou os estudantes da turma sobre a diferença entre os juros simples e compostos. Em seguida, foram apresentadas duas tabelas, uma sob o regime do juro simples e outra do composto, para que os estudantes pudessem observar a diferença. Como o conteúdo de Progressões Aritméticas já havia sido estudado no ano anterior, aproveitou-se dele como um subsunçor, para em seguida compreender como funciona o juro composto e relacioná-lo com as Progressões.

Nessa sequência foi desenvolvida a generalização do termo geral e da razão de uma PG, abordando também a fórmula utilizada para calcular o montante em um sistema de juros compostos, a situação problema apresentada foi a seguinte:

Fernanda tem R$ 1 500,00 e deseja guardar esse valor, ela sabe que deixar o dinheiro parado na conta não é a melhor opção, pois ele desvalorizará com o passar do tempo, por isso ela decidiu investir o valor, para usar futuramente. Ela pesquisou sobre alguns investimentos considerados mais seguros. No site do Tesouro Direto Fernanda encontrou duas opções de investimento que a interessaram:

- *Opção 1 – Tesouro Selic 2029 (SELIC + 0,1482 %)*
- *Opção 2 – Tesouro IPCA+ 2029*

Qual deles será mais vantajoso? Tesouro Selic ou Tesouro IPCA+?

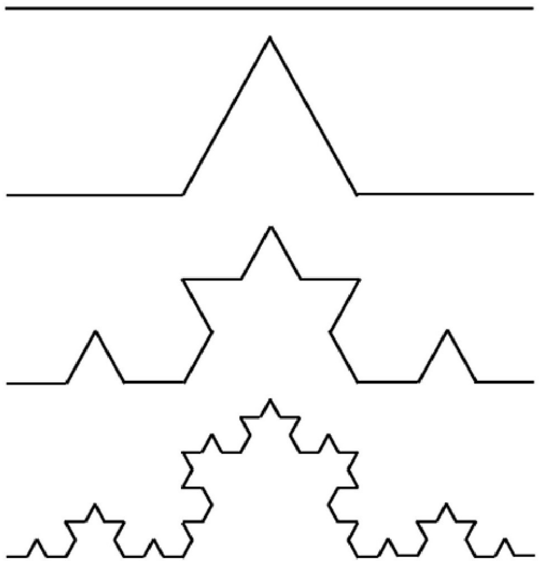
Na sequência apresentada para os estudantes foram apresentadas informações sobre a taxa Selic, IPCA e também descontos pertinentes aos investimentos, para que assim os estudantes fossem capazes de solucionar o problema.

4.1.2 Sequência II - Fractais

A elaboração, assim como a aplicação dessa sequência, ocorreu depois das demais. A motivação de apresentar outras formas de fractais, além do Triângulo de Sierpinski, que os estudantes já haviam observado no livro didático utilizado por eles, surgiu a partir de um vídeo sobre fractais assistido pela professora.

Os fractais são objetos irregulares que carregam a propriedade de autossimilaridade, preservando suas irregularidades não importando a escala em que são observados. Esses objetos, estudados na Geometria Fractal, além de serem de interesse par ao ensino de Matemática têm aplicações na mais diversas áreas do conhecimento, por exemplo, na Medicina colaboram na verificação do grau de rejeição de transplantes cardíacos (SOUZA, 2018).

Figura 4.1: Primeiras etapas da construção da curva de Koch.



Fonte: Souza, 2018

De Souza (2020) aponta ainda outras aplicações dos fractais em diferentes áreas. Na Astrofísica, eles explicam a distribuição das estrelas no universo e o comportamento dos gases interestelares. Em Biologia, a autossimilaridade aparece em sequências de genes. Na Ciência da Computação, fractais modelam objetos naturais com alta precisão.

Com intuito de despertar o interesse para esses objetos matemáticos curiosos e, concomitantemente, revisar os conceitos estudados sobre Progressão Geométrica e Função exponencial, foi elabora essa sequência didática, que está apresentada no Apêndice B.

A atividade baseia-se na observação dos processos de iteração para a formação do fractal conhecido como "curva de Koch", um objeto matemático apresentado por Helge von Koch em 1904, a curva é obtida a partir de um segmento de reta sobre o qual aplica-se uma transformação. A transformação é feita dividindo esse segmento em três partes congruentes (iguais), criando um triângulo equilátero sobre o segmento central e removendo sua base. Posteriormente, repete-se a mesma transformação para cada um dos segmentos, na Figura 4.1 podemos ver as primeiras etapas da construção da curva, sendo que o fractal é a figura gerada quando repetimos essa iteração infinitamente, obtendo uma figura de comprimento infinito.

A proposta é observar padrões, identificar sequências relacionadas à quantidade de segmentos após cada iteração e ao comprimento de cada segmento, apresentar estratégias para prever os próximos elementos, utilizar funções e sua representação no plano cartesiano, e aguçar o interesse pelo tema ao apresentar outros fractais derivados da curva de Koch.

Essa sequência demonstra a aplicação da Modelagem Matemática ao utilizar a Geometria Fractal para contextualizar conceitos matemáticos abstratos, tornando-os mais concretos e compreensíveis para os estudantes. O estudo dos fractais também exemplifica a Teoria da Aprendizagem Significativa ao conectar novos conhecimentos com conceitos já conhecidos, facilitando a assimilação e retenção dos conteúdos.

Outra fator importante é que essa sequência atende às diretrizes do Currículo de MS, que sugere o estudo das noções de geometria dos fractais como um dos objetos de conhecimento. Além do mais, a aplicação prática e visual dos fractais ajuda a promover uma compreensão mais intuitiva e engajadora dos conceitos matemáticos, incentivando os estudantes a explorar e investigar além do conteúdo tradicional (MS-ESTADO, 2021).

4.1.3 Sequência III - Crescimento Populacional

A aplicação de Progressões em situações envolvendo Crescimento Populacional são bastante comuns há bastante tempo, exercícios envolvendo o tema estão frequentemente presentes nos livros didáticos, em avaliações, como ENEM, vestibulares e concursos. Devido a grande aplicação do tema, elaborou-se esta sequência, que está apresentada no Apêndice C.

Essa sequência foi elaborada para ser aplicada após a Sequência 4.1.1, ou seja, momento em que os estudantes já haviam tomado conhecimento sobre os conceitos envolvendo as Progressões Geométricas. Essa sequência foi elaborada tendo como ponto de partida a situação apresentada no livro didático sobre o tema Demografia, conforme a Figura 4.2. Essa sequência se encaixa na Resolução de Problemas e tem como objetivo estimular a interpretação, promover o aprendizado matemático e desenvolver habilidades críticas e autônomas nos estudantes.

Atividades bem sucedidas envolvendo o Crescimento da População, por meio da teoria Malthusiana, são citadas por vários autores e recomendadas como sugestões didáticas pelo Currículo de MS. Essa abordagem integra a Teoria da Aprendizagem Significativa ao utilizar problemas reais e contextualizados para promover um entendimento mais profundo e conectado dos conceitos matemáticos (MENTGES, 2019); (ARRUDA, 2013); (MS-ESTADO, 2021).

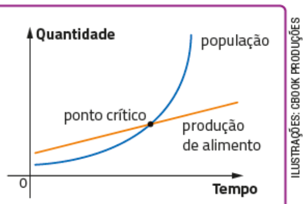
4.2 Implementação em sala de aula

A implementação das sequências didáticas foi realizada com estudantes do 2° ano de uma Escola Estadual da cidade de São Gabriel do Oeste - MS, escola em que a autora atua como professora. No formato dessa escola, os estudantes da manhã possuem a carga horária semanal de Matemática composta por duas aulas presenciais e uma não-presencial (com atividades postadas no *classroom*), infelizmente, as atividades propostas no ambiente *classroom* são realizadas pela minoria dos estudantes, sendo assim as atividades propos-

Figura 4.2: Atividade integradora sobre crescimento populacional, proposta no final da seção de PG do livro didático

4. Junte-se a um colega e leiam o texto a seguir.

Thomas Robert Malthus (1776-1834) é uma referência quando estudamos ciência da população. No ano de 1798, Malthus publicou, em sua obra **Ensaio sobre a população**, a teoria de que a população mundial cresceria em um ritmo mais acelerado do que a oferta de alimentos, o que resultaria em problemas como a fome e a miséria. Mais especificamente, Malthus propôs que a população cresceria em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos cresceria em progressão aritmética. Analise a representação das curvas do crescimento populacional e da produção de alimentos, segundo a teoria de Malthus.



Fonte dos dados: SOUZA, L. E. S. de; PREVIDELLI, M. F. S. C. Algumas considerações sobre a contribuição de Malthus ao Pensamento Econômico. *In*: XII CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA ECONÔMICA. 13ª Conferência Internacional de História Econômica. **Anais** [...]. Niterói: ABPHE, 2017. Disponível em: www.abphe.org.br/uploads/ABPHE%202017/8%20Algumas%20considera%C3%A7%C3%B5es%20sobre%20a%20contribui%C3%A7%C3%A3o%20de%20Malthus%20ao%20Pensamento%20Econ%C3%B4mico.pdf.
GENNARI, A. M. **Duas teorias da população no pensamento clássico**: Karl Marx e Thomas Malthus. Campinas: Unicamp: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, 2009. Disponível em: www.ifch.unicamp.br/formulario_cemarx/selecao/2009/trabalhos/duas-teorias-da-populacao-no-pensamento-classico-karl-marx.pdf. Acessos em: 2 set. 2020.

a) Agora, investiguem como a teoria de Malthus se relaciona ou diverge de outras teorias demográficas, como a neomalthusiana, a reformista e a de transição demográfica, por exemplo. Registrem as informações obtidas, inclusive indicando as fontes de pesquisa. Resposta pessoal.

b) Investiguem também os motivos pelos quais essa teoria de Malthus não se confirmou na prática, até esse momento, destacando questões sociais e tecnológicas envolvidas. Depois, divulguem suas produções por meio de alguma mídia digital, por exemplo, publicando um texto em uma rede social ou blogue, gravando e compartilhando um vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) etc. Resposta pessoal.

Fonte: Souza, 2020

tas por esse trabalho foram aplicadas durante as aulas presenciais e para as aulas não presenciais foram sugeridas vídeos que abordavam o tema trabalhado em cada sequência.

As sequências didáticas foram realizadas aos pares ou em grupos de até 3 estudantes, pois, de modo geral, a turma se desenvolve bem em situações de ensino colaborativas. Nas seções seguintes serão apresentados como ocorreu o processo de implementação de cada sequência, enfatizando os pontos fortes e fracos, bem como os acertos e equívocos observados durante o processo de desenvolvimento. Vale ressaltar que nem tudo foi registrado por fotos, pois a professora estava mediando mais de 10 grupos ao mesmo tempo.

4.2.1 Sequência I - Matemática Financeira

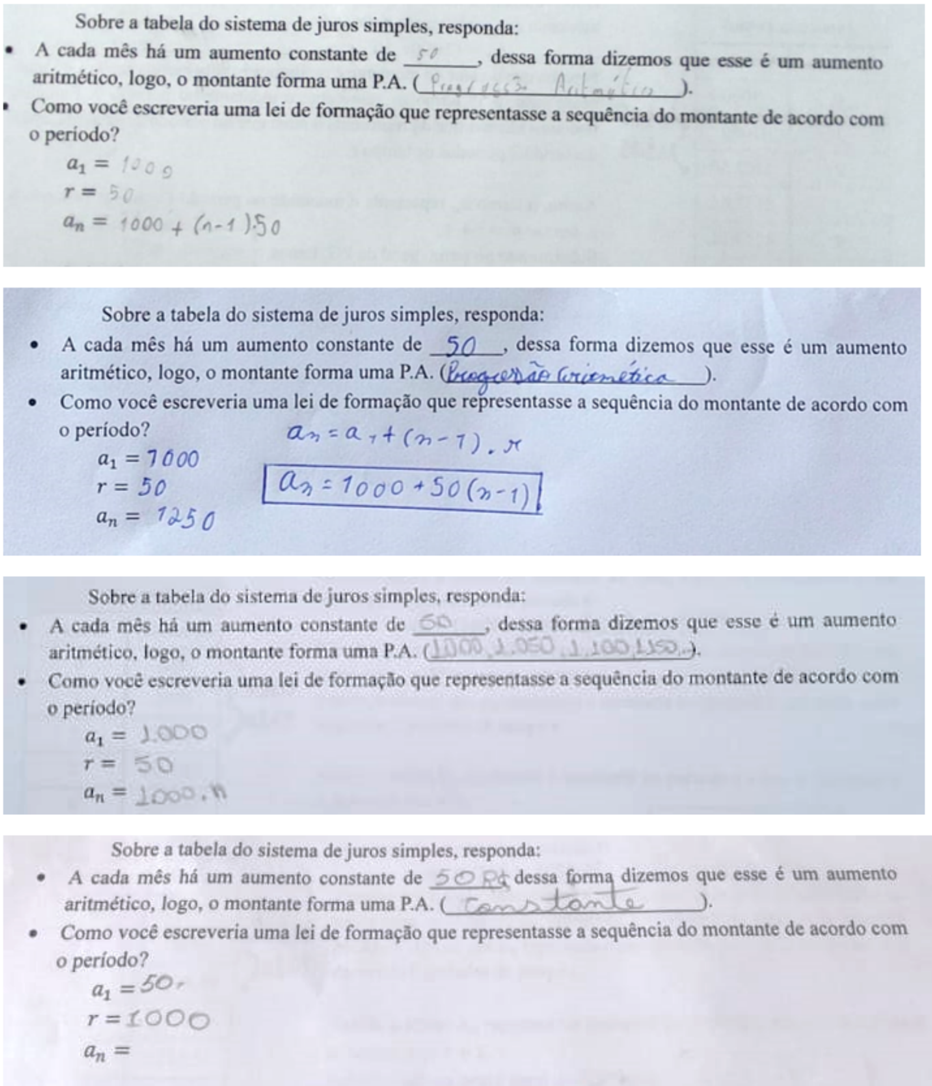
A aplicação dessa sequência durou três aulas, sendo duas para a resolução do problema e uma para discussão, análise das respostas obtidas e finalização da atividade.

O primeiro fato observado é que no questionamento sobre a diferença entre os *juros simples* e *compostos*, os grupos que não tinham certeza sobre a diferença, deixaram o quadro em branco, ou seja, se quer arriscaram a escrever. Percebeu-se também que alguns grupos deixaram para responder depois de ter lido as explicações seguintes, isso se comprova pois usaram os valores do problema como exemplo. Isso pode ter acontecido pelo receio de errar, pela percepção ainda equivocada de que a Matemática é sempre exata, mesmo que tenha sido enfatizado aos grupos que cometer erros faz parte do processo de aprendizagem.

Nesta sequência o exemplo apresentado sobre o juro simples deveria ser relacionado com PA (um conteúdo já estudado no ano anterior), um passo é importante, pois a PA serve como um subsunçor para o aprendizado seguinte, a PG. A maioria dos grupos conseguiu resolver essa primeira parte de forma satisfatória, contudo, observou-se alguns grupos que tiveram bastante dificuldade para determinar o termo geral da PA, algumas das respostas são apresentadas na Figura 4.3.

Essa metodologia de conectar conteúdos já conhecidos com novos conceitos está alinhada com a Teoria da Aprendizagem Significativa, pela ideia de que o conhecimento novo é assimilado de forma mais eficaz quando ancorado em conceitos prévio. Ao relacionar juros simples com PA e, posteriormente, juros compostos com PG, os estudantes puderam construir uma rede de conhecimento mais significativa.

Figura 4.3: Respostas de estudante sobre a PA, relacionada a tabela de juros simples.



Sobre a tabela do sistema de juros simples, responda:

- A cada mês há um aumento constante de 50, dessa forma dizemos que esse é um aumento aritmético, logo, o montante forma uma P.A. (Progressão Aritmética).
- Como você escreveria uma lei de formação que representasse a sequência do montante de acordo com o período?

$a_1 = 1000$
$r = 50$
$a_n = 1000 + (n-1).50$

Sobre a tabela do sistema de juros simples, responda:

- A cada mês há um aumento constante de 50, dessa forma dizemos que esse é um aumento aritmético, logo, o montante forma uma P.A. (Progressão Aritmética).
- Como você escreveria uma lei de formação que representasse a sequência do montante de acordo com o período?

$a_n = a_1 + (n-1).r$
$a_1 = 1000$
$r = 50$
$a_n = 1250$
$\boxed{a_n = 1000 + 50(n-1)}$

Sobre a tabela do sistema de juros simples, responda:

- A cada mês há um aumento constante de 50, dessa forma dizemos que esse é um aumento aritmético, logo, o montante forma uma P.A. (1000, 1.050, 1.100, 1150, ...).
- Como você escreveria uma lei de formação que representasse a sequência do montante de acordo com o período?

$a_1 = 1.000$
$r = 50$
$a_n = 1000.n$

Sobre a tabela do sistema de juros simples, responda:

- A cada mês há um aumento constante de 50 R$ dessa forma dizemos que esse é um aumento aritmético, logo, o montante forma uma P.A. (Constante).
- Como você escreveria uma lei de formação que representasse a sequência do montante de acordo com o período?

$a_1 = 50,$
$r = 1000$
$a_n =$

Fonte: Autoria própria

Pode-se observar que, pela Figura 4.3, que os dois últimos grupos tiveram dificuldades, o 3° grupo escreveu o termo geral da PA utilizando uma multiplicação, ao questioná-los o motivo não souberam explicar, então, após alguns questionamentos, conseguiram reformular. O último grupo da foto escreveu que a PA era constante e confundiu inclusive o 1° termo e a razão, ou seja, esse grupo com certeza estava com seus conhecimentos prévios falhos, sendo necessário orientação, a partir da qual, conseguiram compreender a ideia de PA para então determinar o termo geral.

Na Figura 4.4 apresenta-se a folha de resoluções sobre a 1ª opção de investimento, da situação problema proposta, em que os grupos utilizaram estratégias distintas para calcular o montante. O grupo da primeira foto utilizou a fórmula do montante apenas para o primeiro período e, a partir desse, calculou o montante do próximo período e subtraiu o valor anterior para determinar o juro, apesar de saber a fórmula, não sabiam como aplicá-la da forma mais efetiva.

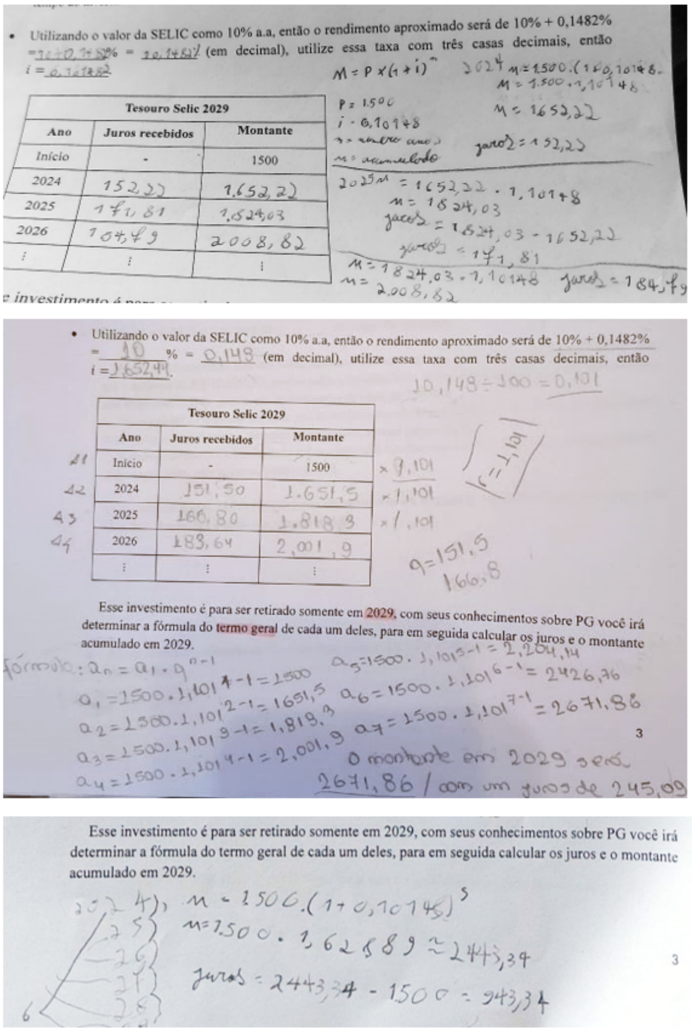
Enquanto o grupo da segunda foto na Figura 4.4, apesar de ter encontrado o termo geral da sequência, ainda assim calculou o montante ano a ano até chegar em 2029, ou seja, apesar de conseguir generalizar, não souberam utilizar a generalização para facilitar os cálculos. Ao observar essa situação fiquei bastante curiosa, pois, esse grupo só percebeu que poderia usar de outra estratégia no momento seguinte, onde foi solicitado o valor acumulado de 2029, a partir de então o grupo foi capaz de usar a fórmula corretamente. Vale ressaltar que os valores obtidos pelos grupos das primeiras duas fotos estão diferentes pelo fato de um deles ter considerado a taxa apenas com três casas decimais e o outro grupo não, essa foi uma situação discutida no momento do compartilhamento das soluções, pois outros também não arredondaram o valor. Aproveitando para ressaltar que ambas estavam corretas, contudo havia sido solicitado o arredondamento para facilitar os cálculos.

O segundo grupo da Figura 4.4, teve bastante dificuldade em compreender como usar o valor da taxa , inicialmente tentaram apenas multiplicar por 0,101. Após usar outros exemplos, com valores fáceis de calcular, os estudantes perceberam que se o valor aumenta preciso somar ao 100% e se diminui é necessário reduzir do 100% e depois multiplicar para saber o montante. Vale ressaltar que esse é um grupo com bastante dificuldade em matemática, apesar de serem dedicados, e ao final da atividade uma das estudantes relatou "Prof, você sabe que eu não gosto de Matemática, mas hoje eu consegui finalmente aprender sobre esse negócio de porcentagem. Você consegue fazer a gente gostar um pouco da Matemática". Esse relato é um indicativo do impacto positivo da aplicação da Teoria da Aprendizagem Significativa e da Modelagem Matemática na prática.

A resolução do grupo apresentado na terceira foto da Figura 4.4, também foi pela fórmula do montante, porém os estudantes cometeram um erro, talvez pela falta da observação adequada, não se atentaram que o montante inicial de R$ 1 500 não correspondia ao ano de 2024.

Vários estudantes não perceberam que a última frase da folha não era uma afirmação,

Figura 4.4: Respostas de três grupos distintos sobre o cálculo de juros e montante para preencher a tabela do investimento Selic.



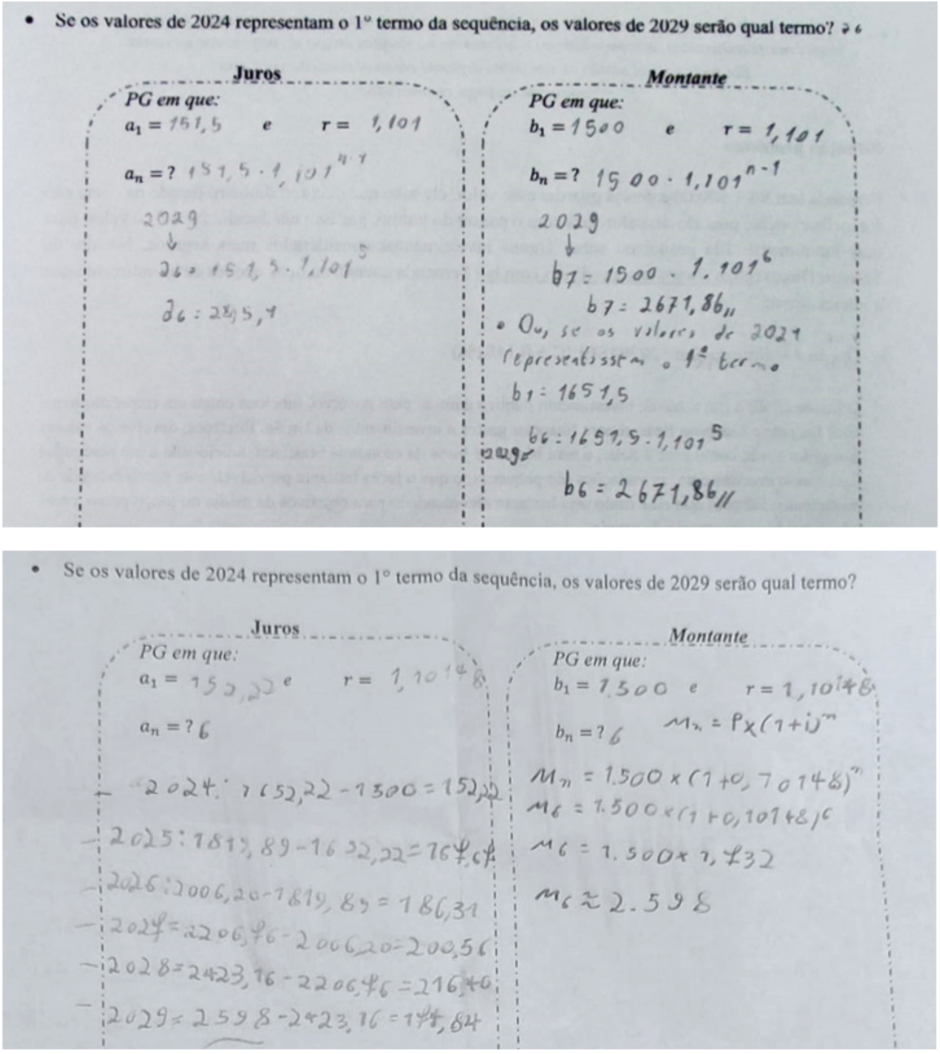
Fonte: Autoria própria

mas apenas uma orientação dos próximos passos, indicados na página seguinte. Esse tipo de equívoco já era esperado, tanto que no início da página seguinte havia a seguinte frase: “Se os valores de 2024 representam o 1° termo da sequência, os valores de 2029 serão qual termo?”, inclusive havia sido organizado um espaço para a resolução, conforme a Figura 4.5, apesar disso, vários grupos, resolveram antes. O interessante dessa situação é que alguns grupos observaram o erro cometido e, após lerem as instruções, me chamaram para confirmar se era aquilo mesmo.

Os quadros, já com as resoluções de dois grupos, apresentados na Figura 4.5 foram elaborados com intuito de induzir a utilização do termo geral de cada uma das progressões, a que representava o juro e a do montante. Observou-se que o grupo da primeira foto, considerou para a PG dos juros o primeiro termo como o juro gerado em 2024, conforme orientado, logo o ano de 2029 correspondia ao 6° termo, mas para a sequência do montante, o grupo manteve o valor inicial como o primeiro termo então o ano de 2029 seria o

7° termo dessa sequência, além disso, fizeram também considerando os valores de 2024 como primeiro termo, tudo isso, sem auxílio da professora, isso mostra que os estudantes analisaram a situação e não apenas fizeram cálculos sem pensar, portanto de fato houve a compreensão e desenvolvimento do pensamento crítico.

Figura 4.5: Respostas de dois grupos sobre o cálculo de juros e montante no investimento Selic, usando o termo geral.



Fonte: Autoria própria

Entretanto, a segunda foto da Figura 4.5 mostra um grupo que inicialmente, não conseguiu generalizar e determinar o termo geral da PG, pois ficou atrelado ao uso da fórmula do montante, ao observar isso, orientei o grupo por meio de questionamentos para que pudessem, na próxima situação, conseguir visualizar a PG e determinar seu termo geral. Ao final da atividade observei que conseguiram compreender e resolver por meio de progressão.

Como dito no início, eram mais de 10 grupos realizando a atividade simultaneamente e, por isso, nem todos foram orientados da melhor forma, mas mesmo assim, ao final da atividade observou-se que a atividade foi satisfatória e que praticamente todos os grupos conseguiram solucionar o problema da situação inicial. Além disso, no momento de compartilhar as ideias surgiram discussões interessantes sobre investimentos e até mesmo jogos de aposta, alguns estudantes disseram que com os jogos o retorno do valor que seria recebido em juros seria muito mais rápido. Neste momento, aproveitou-se para conscientizar sobre jogos de azar, falando que algumas vezes pode ser uma oportunidade de ganhar dinheiro, entretanto pode-se perder muito dinheiro, já que pode se tornar um vício, causando inúmeros problemas familiares e financeiros. Essa discussão foi interessante, inclusive foram relatados vários casos entre conhecidos deles que já perderam dinheiro em jogos de azar, favorecendo a conscientização sobre os riscos associados a esses jogos e incentivando a educação financeira como forma de prevenção.

Após o desenvolvimento dessa atividade, foi apresentado o restante da teoria envolvida sobre o tema, como a classificação da a somas dos n primeiros termos de uma PG e propostos exercícios de fixação sobre o conteúdo do livro didático. Observou-se que por meio da sequência foram manifestadas os dois tipos de aprendizagem significativa, a *representacional* pôde ser observada quando os estudantes representaram o crescimento do montante na situação envolvendo juros compostos através de tabelas e de fórmulas. A *conceitual* foi observada na concretização dos conceitos de juros simples e compostos, progressões aritméticas e geométricas, e a relação entre esses conceitos e a matemática financeira.

Para concluir, percebeu-se que ao envolver os estudantes em atividades que refletem problemas reais e conectá-los a conceitos matemáticos que eles já conhecem, a motivação e a compreensão aumentam consideravelmente. Assim, essas metodologias não apenas facilitam a aprendizagem de novos conteúdos, mas também podem ajudar a consolidar conhecimentos anteriores.

4.2.2 Sequência II - Fractais

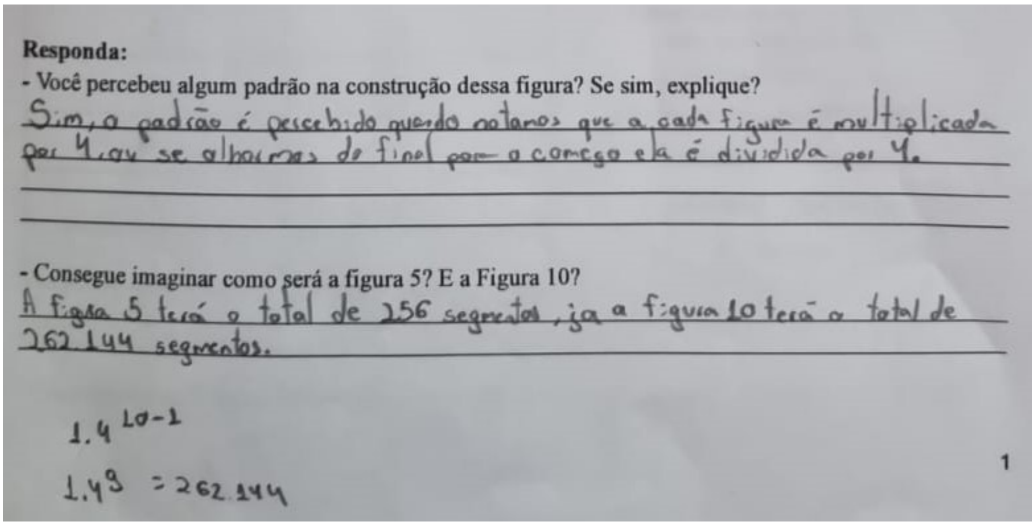
Essa sequência foi aplicada em grupos formados por dois ou três alunos e após a Sequência I, pois os estudante, neste momento, já conheciam a teoria sobre PG e tinham resolvidos exercícios de fixação.

Logo de início percebeu-se o interesse dos estudantes pelo assunto, pois eles ficaram curiosos sobre como seria essa figura após as próximas interações, um dos grupos perguntou se poderia pesquisar na internet para saber como ficaria a figura, orientei para que esperasse avançar um pouco mais a atividade para então pesquisar (pois ao final da atividade haveria outros exemplos de fractais e a sugestão para eles pesquisarem mais sobre o tema). Inclusive, alguns folhearam a atividade despretensiosamente antes de iniciar e demonstraram admiração ao observar o Floco de Neve de Koch e o Quadrado de Koch.

Na primeira parte dessa sequência alguns estudantes comentaram “eu entendi o que está acontecendo com a figura, mas não sei como escrever, não sei explicar". Mais uma vez evidenciando que os estudantes tem medo de arriscar a escrever o que pensam ou ainda não conseguem formular uma boa explicação, assim como o questionamento de outro estudante "Eu preciso escrever a explicação? Mas é aula de Matemática e não de Português!". Essa fala mostra um obstáculo, pois os estudantes não conseguem perceber a importância da linguagem na Matemática, mesmo que os professores saibam o quanto a Língua Portuguesa é essencial para a aprendizagem da matemática, Lorensatti (2009) abordou sobre esse tema em seu artigo: *Linguagem matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos*, no qual como sugere o nome, aborda a necessidade de se trabalhar leitura e interpretação dentro das aulas de Matemática.

Alguns estudantes, assim, como na Sequência I, deixaram para responder as questões iniciais depois de terem lido as próximas folhas de atividade, mas de modo geral conseguiram perceber que a cada iteração, quadruplicava a quantidade de segmentos. Um grupo observou de duas formas distintas, para eles poderia ser observado o padrão do início para o fim ou o contrário, como pode ser observado na Figura 4.6.

Figura 4.6: Resolução de um grupo sobre a observação do padrão na curva de Koch.



Responda:

- Você percebeu algum padrão na construção dessa figura? Se sim, explique?

Sim, o padrão é percebido quando notamos que a cada figura é multiplicada por 4, ou se olharmos do final para o começo ela é dividida por 4.

- Consegue imaginar como será a figura 5? E a Figura 10?

A figura 5 terá o total de 256 segmentos, já a figura 10 terá o total de 262 144 segmentos.

1.4^{10-1}

$1.4^{9} = 262.144$

1

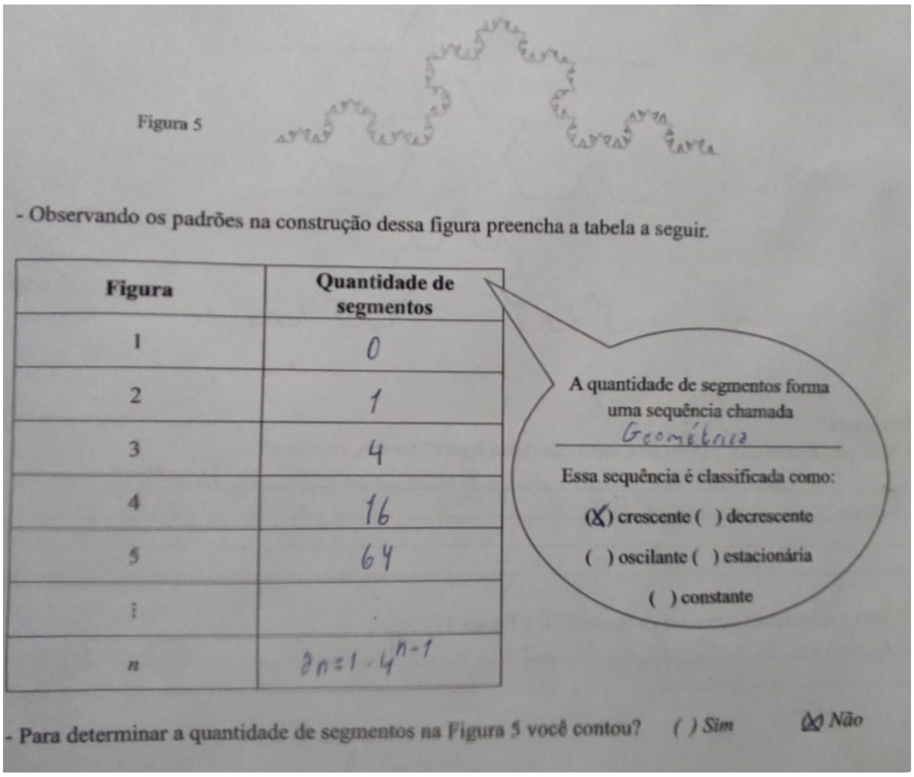
Fonte: Autoria própria

Ainda na Figura 4.6 podemos observar a resposta sobre o questionamento "Consegue imaginar como será a figura 5? E a Figura 10?", mais uma vez os estudantes se adiantam e respondem além do que foi questionado, mais uma situação em que a interpretação não foi adequada.

No momento em que solicita ao estudante desenhar a próxima figura da interação, a "Figura 5"alguns estudantes conseguiram, como a resolução da Figura 4.7, outros tiveram dificuldade, um exemplo está na Figura 4.8, e outros nem ao menos tentaram e ao serem questionados sobre disseram que era muito difícil e que não iam conseguir desenhar, em alguns grupos foi possível reverter esse pensamento com um pouco de incentivo, porém outros não.

Na Figura 4.7 podemos observar que os estudantes cometeram um equívoco ao considerar que a quantidade de segmentos começava em 0, quando na verdade era 1, apesar do equívoco, os estudantes utilizaram o termo geral da PG corretamente para definir a quantidade de segmentos. O erro deles foi percebido somente no momento de compartilhar as respostas e nem eles sabiam explicar o motivo do erro.

Figura 4.7: Desenho da figura 5 e quantidade de segmentos de acordo com um grupo A.



Fonte: Autoria própria

Já a resolução do grupo apresentada na Figura 4.8, os estudantes aplicaram a fórmula da progressão geométrica para prever o número de segmentos da figura iterada, porém na tabela não substituiram o valor da razão e do 1° termo.

Na Figura 4.9 podemos observar um grupo que, assim como em outras situações, tiveram uma abordagem mais intuitiva e menos formal e com isso acabaram escrevendo de forma errada a generalização da quantidade de segmentos.

No momento de relacionar os dados da tabela, sobre a figura e quantidade de segmentos, alguns estudantes conseguiram representar de forma correta e relacionar com as Funções Exponenciais, porém outros apresentaram dificuldades. Na Figura 4.10 podemos observar o gráfico de um grupo, o problema deles foi utilizar uma escala inadequada que fizeram os dados se parecer erroneamente lineares. Essa situação pôde ser revertida após alguns questionamentos realizados, durante o desenvolvimento da sequência.

Após os estudantes analisarem a sequência formada pela quantidade de segmentos no

Figura 4.8: Desenho da figura 5 e quantidade de segmentos de acordo com um grupo B.

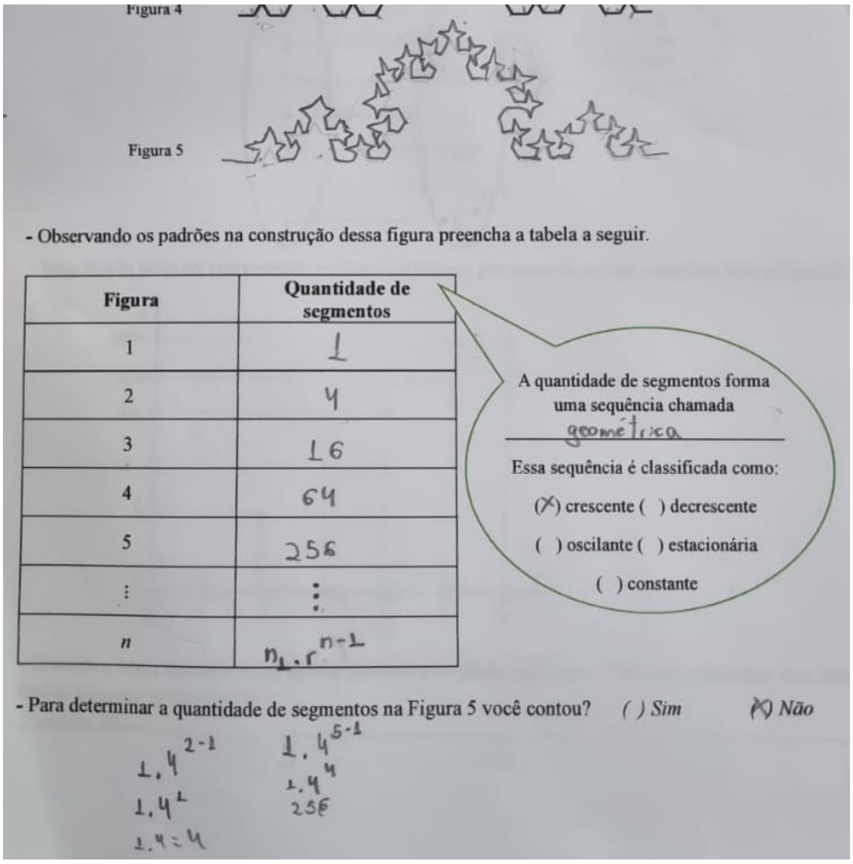


Figura 4

Figura 5

- Observando os padrões na construção dessa figura preencha a tabela a seguir.

Figura	Quantidade de segmentos
1	1
2	4
3	16
4	64
5	256
⋮	⋮
n	$n_1 . r^{n-1}$

A quantidade de segmentos forma uma sequência chamada geométrica

Essa sequência é classificada como:

(X) crescente ( ) decrescente

( ) oscilante ( ) estacionária

( ) constante

- Para determinar a quantidade de segmentos na Figura 5 você contou? ( ) Sim (X) Não

1.4^{2-1}

1.4^1

$1.4=4$

1.4^{5-1}

1.4^4

256

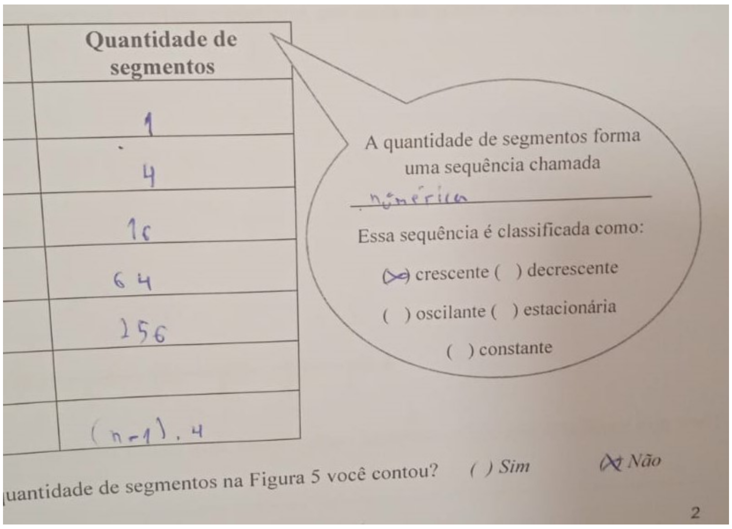
Fonte: Autoria própria

processo de criação da curva de Koch, também foi proposta uma análise do comprimento dos segmentos em cada etapa da construção, para a qual deveriam considerar 1 u.c. (unidade de comprimento) como medida do segmento inicial. Nessa etapa da aplicação os estudantes precisavam perceber que o tamanho do segmento se correspondia a 1/3 do anterior, em cada iteração. Na Figura 4.11, podemos verificar a tabela completa de forma correta por determinado grupo de estudantes.

Esse foi o momento de maior demanda para a professora, pois vários grupos não conseguiram compreender como preencher a tabela. Assim como em todas as outras etapas, a professora atuou como mediadora e os orientou por meio de questionamentos sobre o enunciado que precedia a tabela e as figuras iniciais para formação do fractal sugerindo até que as desenhassem, conforme realizado por determinado grupo na Figura 4.12, questionou ainda sobre quantas partes de segmentos de uma figura eram necessários para preencher a anterior.

Certo grupo conseguiu observar corretamente o que acontecia com o comprimento dos segmentos, porém ao relacionar com o perímetro da figura, cometeram equívocos, conforme a Figura 4.13, podemos observar que os estudantes não multiplicaram a quantidade de segmentos pelo comprimento de cada um, evidenciando a dificuldade com o uso de frações e também a compreensão de conceitos básicos como a ideia de perímetro. Essa

Figura 4.9: Quantidade de segmentos de acordo com um grupo C.



Fonte: Autoria própria

dificuldade aliada à falta de paciência e pouca observação, colaboraram para situações críticas como essa.

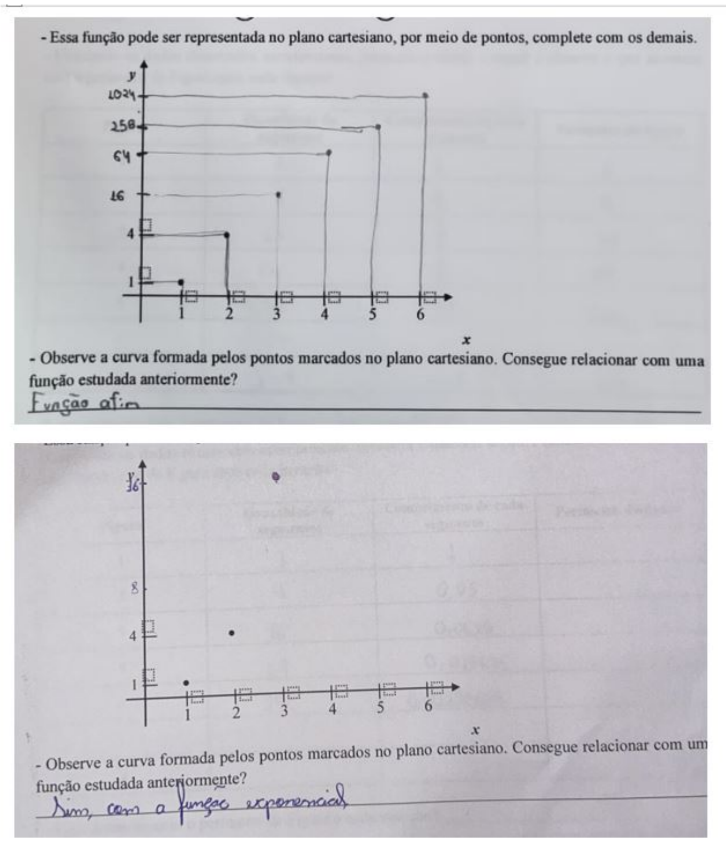
Com essa atividade, observou-se, ainda, grupos de estudantes que não apresentavam conhecimento teórico a fim de calcular o número de segmentos, confiando mais na visualização do que na modelagem matemática. Entretanto, a maioria conseguiu resolver a sequência proposta, alguns com mais intervenção e outros com menos. No momento de compartilhar as respostas os estudantes debateram, expuseram seus pontos de vista e trocaram ideias, juntamente com a professora, e assim, conseguiram ajustar e/ou corrigir os equívocos cometidos.

Em resumo, a aplicação dessa sequência envolvendo fractais possibilitou que os estudantes utilizassem a linguagem própria para descrever o que estavam observando, explicassem os padrões nos fractais e as propriedades das progressões geométricas, além disso, eles foram desafiados desafiados a verbalizar seus pensamentos, demonstrando um entendimento profundo do conteúdo ao utilizarem suas próprias palavras para explicá-lo.

Por meio dessa sequência foi possível promover a transferência do conteúdo de PG para novas situações, os fractais. Um contexto, cuja aplicação do conceito de PG está de uma forma diferente do usual. Esta atividade não só reforça o conhecimento prévio, mas também desafia os estudantes a aplicar esse conhecimento em um novo contexto, o que é um forte indicador de aprendizagem significativa. Eles passaram a perceber como os conceitos matemáticos aprendidos podem ser utilizados para entender e resolver problemas em diversas áreas.

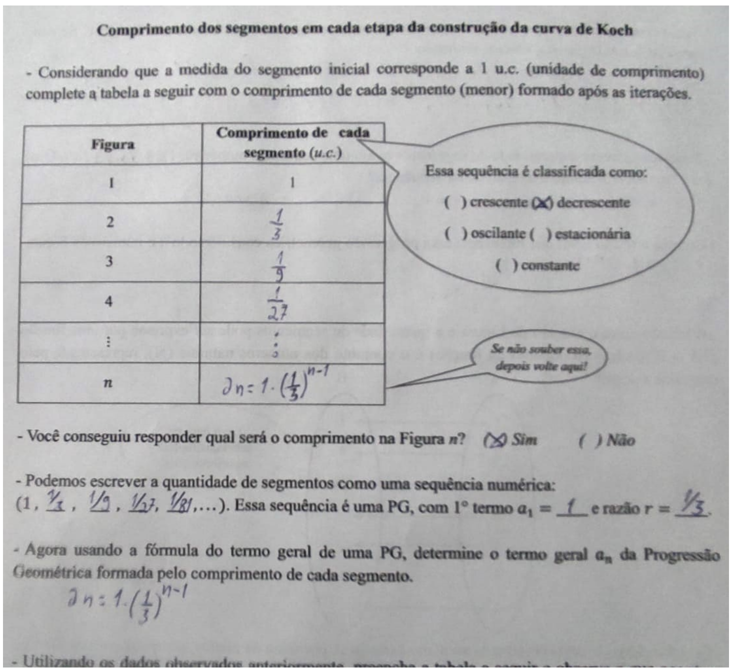
Durante a aplicação dessa atividade observou-se momentos em que houve a *diferenciação progressiva* dos conteúdos, ou seja, a ampliação da complexidade dos conceitos de PG à medida que os estudantes avançam nos estudos e relacionavam os conceitos a outros áreas além da matemática. Além do mais, também observou-se momentos em que a

Figura 4.10: Quantidade de segmentos de acordo com um grupo C.



Fonte: Autoria própria

Figura 4.11: Comprimento de cada segmento de acordo com um grupo.



Comprimento dos segmentos em cada etapa da construção da curva de Koch

- Considerando que a medida do segmento inicial corresponde a 1 u.c. (unidade de comprimento) complete a tabela a seguir com o comprimento de cada segmento (menor) formado após as iterações.

Figura	Comprimento de cada segmento (*u.c.*)
1	1
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{27}$
⋮	⋮
n	$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Essa sequência é classificada como:
( ) crescente (X) decrescente
( ) oscilante ( ) estacionária
( ) constante

Se não souber essa, depois volte aqui!

- Você conseguiu responder qual será o comprimento na Figura *n*? (X) *Sim* ( ) *Não*

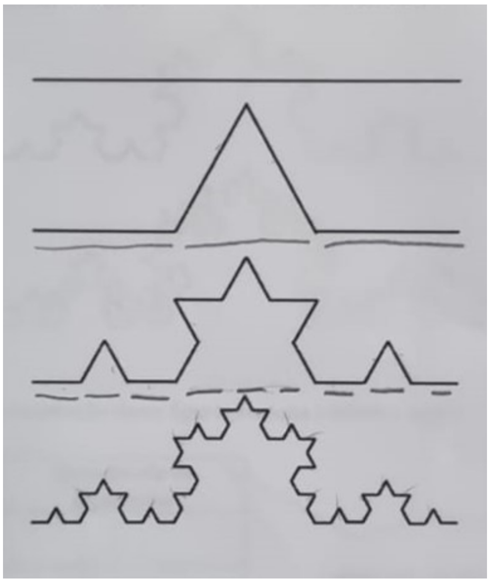
- Podemos escrever a quantidade de segmentos como uma sequência numérica: (1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81,...). Essa sequência é uma PG, com 1º termo a_1 = 1 e razão r = 1/3.

- Agora usando a fórmula do termo geral de uma PG, determine o termo geral a_n da Progressão Geométrica formada pelo comprimento de cada segmento.

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

Fonte: Autoria própria

Figura 4.12: Comparação do comprimento de cada segmento de acordo com um grupo.



Fonte: Autoria própria

Figura 4.13: Análise do comprimento de cada segmento e perímetro das figuras de acordo com um grupo.

Figura	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Perímetro da figura
1	1	1	1
2	4	$\frac{1}{3}$	4
3	16	$\frac{1}{9}$	16
4	64	$\frac{1}{27}$	64
5	256	$\frac{1}{81}$	256
⋮	⋮	⋮	⋮
n	r=4	r=3	r=6

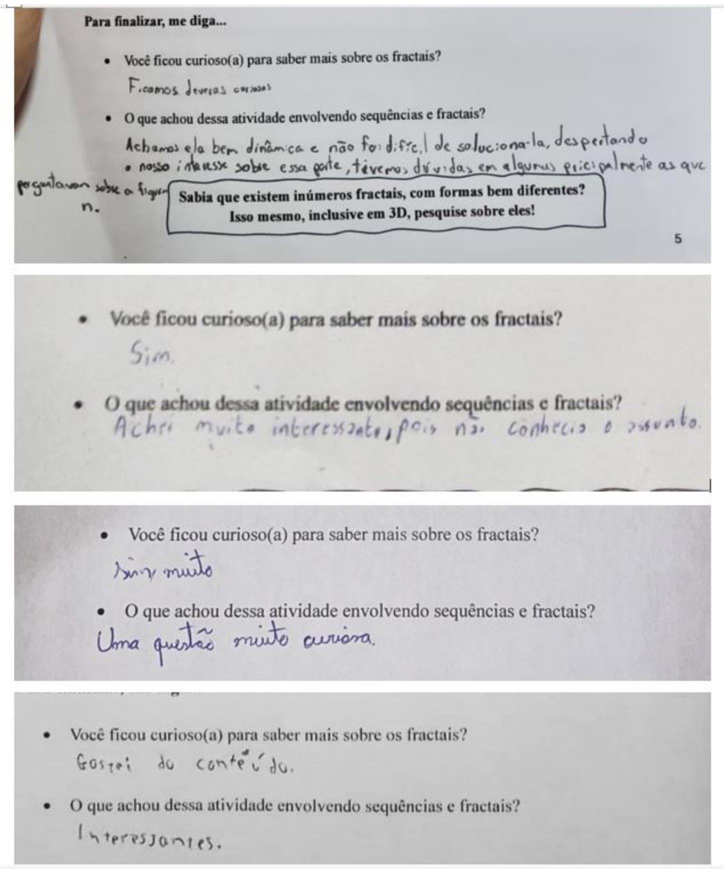
- O que acontece com o perímetro da Figura a cada iteração? Ele é multiplicado por 4

Fonte: Autoria própria

reconciliação integradora dos conteúdos se fez presente, momento em que os novos conceitos foram integrados e reconciliados com conhecimentos prévios, modificando a estrutura cognitiva dos estudantes, tornando-a mais coesa e abrangente.

Além disso, percebeu-se que os estudantes se interessaram pelos fractais e gostaram da atividade, algumas das respostas dadas pelos estudantes são apresentadas na Figura 4.14.

Figura 4.14: Opinião de alguns estudantes sobre a sequência sobre fractais.



Para finalizar, me diga...

- Você ficou curioso(a) para saber mais sobre os fractais?

Ficamos deveras curiosos

- O que achou dessa atividade envolvendo sequências e fractais?

Achamos ela bem dinâmica e não foi difícil de solucioná-la, despertando o nosso interesse sobre essa parte, tivemos dúvidas em algumas principalmente as que perguntavam sobre a figura n.

Sabia que existem inúmeros fractais, com formas bem diferentes? Isso mesmo, inclusive em 3D, pesquise sobre eles!

5

- Você ficou curioso(a) para saber mais sobre os fractais?

Sim.

- O que achou dessa atividade envolvendo sequências e fractais?

Achei muito interessante, pois não conhecia o assunto.

- Você ficou curioso(a) para saber mais sobre os fractais?

Sim, muito

- O que achou dessa atividade envolvendo sequências e fractais?

Uma questão muito curiosa.

- Você ficou curioso(a) para saber mais sobre os fractais?

Gostei do conteúdo.

- O que achou dessa atividade envolvendo sequências e fractais?

Interessantes.

Fonte: Autoria própria

4.2.3 Sequência III - Crescimento Populacional

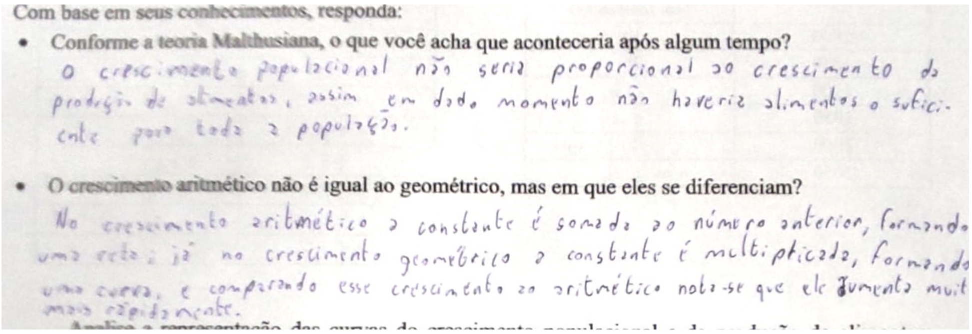
Essa sequência foi aplicada como uma forma de revisar os conteúdos anteriormente abordados sobre PG e também funções. A aplicação se deu em uma semana de revisões, motivo pelo qual nem todos os estudantes estavam presentes. De modo geral, essa sequência foi bem mais tranquila que as anteriores, os estudantes conseguiram resolvê-la com mais facilidade e necessitaram de menos intervenções.

A maioria dos estudantes teve facilidade em responder o questionamento feito sobre as diferenças entre o crescimento aritmético e o geométrico, isso mostra que houve, de fato, um bom aprendizado, inclusive sobre a relação entre as progressões e a representação no plano cartesiano, conforme observado na resolução dos estudantes nas Figuras 4.15 e 4.16.

A frase escrita pelo estudante na segunda foto Figura 4.16 sobre o ponto crítico "Ele representa o momento em que as duas linhas se encontram, ou seja, quando as duas obtém o mesmo valor."é uma ótima explicação, e mostra que os estudantes compreendem o significado de ponto de intersecção, relevante para inúmeras situações envolvendo representação gráfica.

Percebeu-se também que os estudantes conseguiram preencher as tabelas com os va-

Figura 4.15: Resposta de um estudante sobre a Teoria Malthusiana e a diferença entre crescimento aritmético e geométrico e ponto crítico.



Com base em seus conhecimentos, responda:

- Conforme a teoria Malthusiana, o que você acha que aconteceria após algum tempo?

o crescimento populacional não seria proporcional ao crescimento da produção de alimentos, assim em dado momento não haveria alimentos o suficiente para toda a população.

- O crescimento aritmético não é igual ao geométrico, mas em que eles se diferenciam?

No crescimento aritmético a constante é somada ao número anterior, formando uma reta; já no crescimento geométrico a constante é multiplicada, formando uma curva, e comparando esse crescimento ao aritmético nota-se que ele aumenta muito mais rapidamente.

Fonte: Autoria própria

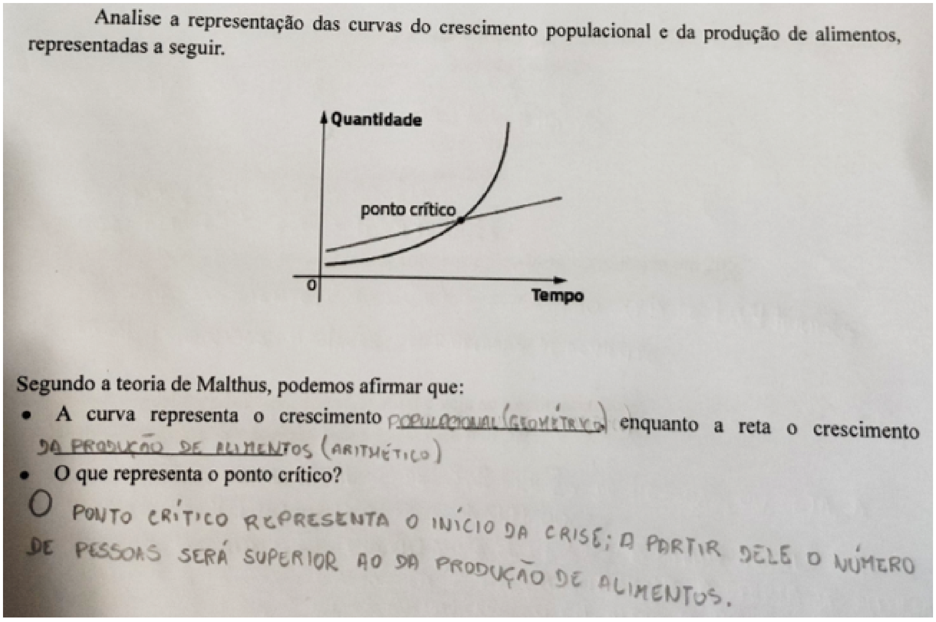
lores facilmente, a generalização foi simples para os estudantes que haviam compreendido o conteúdo, como pode ser observado na Figura 4.17.

Observou-se uma estudante com dificuldade em determinar o termo geral, o equívoco foi que ela havia utilizado 1800 como sendo o 1° termo, então após alguns questionamentos conseguiu reformular, mas conforme a segunda foto da Figura 4.17, ela considerou o 1° termo como 1 bilhão, porém por não ter escrito isso, somente percebeu o erro no momento em que ela observou sua resposta que estimava uma população de 1024 pessoas em 2050.

Nessa sequência, foi possível orientar os estudantes com dúvidas de forma mais efetiva, devido ao número reduzido de estudantes e assim, mesmo os estudantes com dificuldade puderam compreender o assunto. Uma delas inclusive relatou "Eu não consegui aprender muito bem o conteúdo nas outras aulas, mas agora com a senhora me ajudando eu consegui entender", isso mostra um dos obstáculos que o professor enfrenta, salas de aula com mais de 30 estudantes, às vezes até 40, cada um com suas particularidades e forma de aprendizado.

Por meio dessa sequência, os estudantes, além de representar graficamente e tabular dados, também formularam e verificaram proposições e hipóteses baseadas na teoria Malthusiana, com isso foi possível presenciar a aprendizagem *representacional*, *conceitual* e *proposicional*. Como um todo, apesar de poucos registros, essa sequência promoveu não somente o aprendizado matemático, mas diversas aprendizagens, como o pensamento crítico, incentivou a investigação, o desenvolvimento de habilidades metacognitivas, tão importantes para formar indivíduos com controle sobre suas ações e a interação entre os pares.

Figura 4.16: Resposta de dois estudantes sobre a interpretação do gráfico de crescimento populacional e a produção de alimentos.

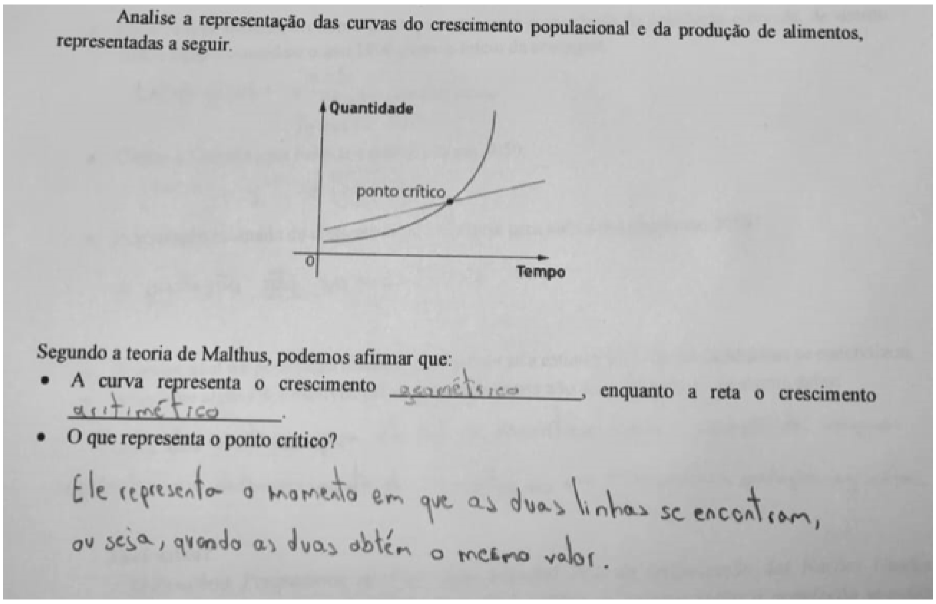


Analise a representação das curvas do crescimento populacional e da produção de alimentos, representadas a seguir.

Segundo a teoria de Malthus, podemos afirmar que:

- A curva representa o crescimento populacional (geométrico) enquanto a reta o crescimento da produção de alimentos (aritmético)
- O que representa o ponto crítico?

O ponto crítico representa o início da crise; a partir dele o número de pessoas será superior ao da produção de alimentos.



Analise a representação das curvas do crescimento populacional e da produção de alimentos, representadas a seguir.

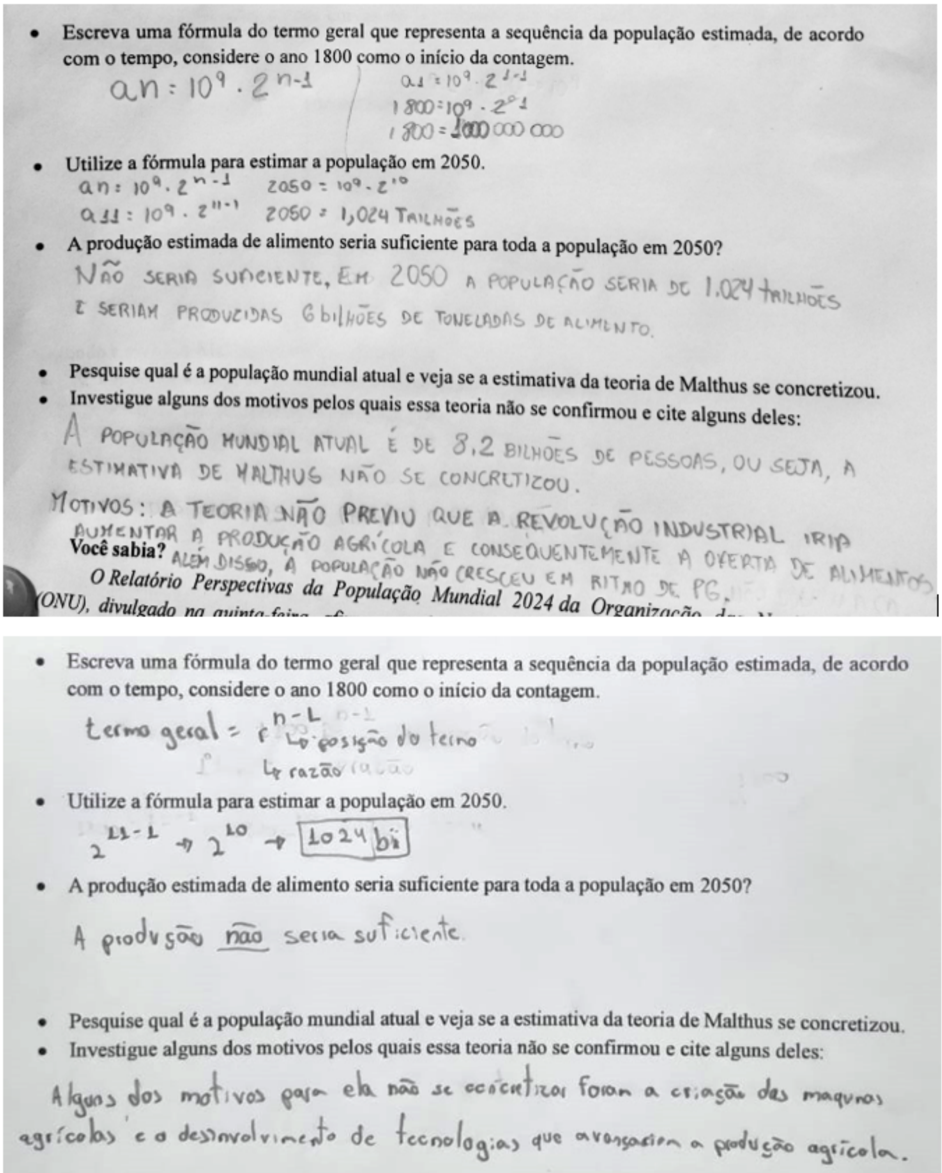
Segundo a teoria de Malthus, podemos afirmar que:

- A curva representa o crescimento geométrico, enquanto a reta o crescimento aritimético.
- O que representa o ponto crítico?

Ele representa o momento em que as duas linhas se encontram, ou seja, quando as duas obtém o mesmo valor.

Fonte: Autoria própria

Figura 4.17: Resposta de dois estudantes o crescimento populacional.



- Escreva uma fórmula do termo geral que representa a sequência da população estimada, de acordo com o tempo, considere o ano 1800 como o início da contagem.

$a_n = 10^9 \cdot 2^{n-1}$ | $a_1 = 10^9 \cdot 2^{1-1}$; $1800 = 10^9 \cdot 2^{0}$; $1800 = 1000\,000\,000$

- Utilize a fórmula para estimar a população em 2050.

$a_n = 10^9 \cdot 2^{n-1}$ $\quad 2050 = 10^9 \cdot 2^{10}$

$a_{11} = 10^9 \cdot 2^{11-1}$ $\quad 2050 = 1{,}024$ TRILHÕES

- A produção estimada de alimento seria suficiente para toda a população em 2050?

NÃO SERIA SUFICIENTE, EM 2050 A POPULAÇÃO SERIA DE 1,024 TRILHÕES E SERIAM PRODUZIDAS 6 BILHÕES DE TONELADAS DE ALIMENTO.

- Pesquise qual é a população mundial atual e veja se a estimativa da teoria de Malthus se concretizou.
- Investigue alguns dos motivos pelos quais essa teoria não se confirmou e cite alguns deles:

A POPULAÇÃO MUNDIAL ATUAL É DE 8,2 BILHÕES DE PESSOAS, OU SEJA, A ESTIMATIVA DE MALTHUS NÃO SE CONCRETIZOU.

MOTIVOS: A TEORIA NÃO PREVIU QUE A REVOLUÇÃO INDUSTRIAL IRIA AUMENTAR A PRODUÇÃO AGRÍCOLA E CONSEQUENTEMENTE A OFERTA DE ALIMENTOS. ALÉM DISSO, A POPULAÇÃO NÃO CRESCEU EM RITMO DE PG.

Você sabia?

O Relatório Perspectivas da População Mundial 2024 da Organização ...

(ONU), divulgado na quinta-feira ...

- Escreva uma fórmula do termo geral que representa a sequência da população estimada, de acordo com o tempo, considere o ano 1800 como o início da contagem.

termo geral = r^{n-1} ↳ posição do termo ↳ razão

- Utilize a fórmula para estimar a população em 2050.

$2^{11-1} \rightarrow 2^{10} \rightarrow \boxed{1024 \text{ bi}}$

- A produção estimada de alimento seria suficiente para toda a população em 2050?

A produção não seria suficiente.

- Pesquise qual é a população mundial atual e veja se a estimativa da teoria de Malthus se concretizou.
- Investigue alguns dos motivos pelos quais essa teoria não se confirmou e cite alguns deles:

Alguns dos motivos para ela não se concretizar foram a criação das máquinas agrícolas e o desenvolvimento de tecnologias que avançaram a produção agrícola.

Fonte: Autoria própria

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas Futuras

A revisão de literatura realizada ao longo da dissertação foi fundamental para embasar e contextualizar as abordagens de ensino discutidas e aplicadas. A Teoria da Aprendizagem de Ausubel, mediada pela modelagem matemática para a aprendizagem significativa de progressões geométricas, permitiu aos estudantes a compreensão dos conceitos inerentes ao tema e a retenção de novos conhecimentos de forma significativa. Além disso, em cada sequência didática, observou-se evidências de que cada aluno, dentro da sua condição, apresentou uso de linguagem própria, transferência para novas situações e integração com conhecimento prévio.

Ao integrar as diferentes perspectivas teóricas, foi possível desenvolver estratégias de ensino mais adequadas ao grupo, resultando em uma prática pedagógica mais diversificada, capaz de atender às necessidades específicas dos estudantes e promover uma aprendizagem mais profunda e significativa. Durante os estudos, destacou-se a importância de metodologias ativas no ensino de matemática, como a modelagem matemática e a resolução de problemas, as responsáveis por criar um elo entre a teoria e a prática, essencial para a elaboração e implementação das sequências didáticas.

A aplicação das sequências didáticas proporcionou uma experiência rica em evidências de aprendizagem significativa, conforme apresentado por Moreira (2006), já que os estudantes demonstraram capacidade de utilizar linguagem própria para explicar os conceitos, aplicar o conhecimento adquirido em novos contextos, integrar novos conceitos com conhecimentos prévios, resolver problemas complexos, e mostrar engajamento e interesse pelos temas. Tais observações sugerem que a metodologia empregada contribuiu para uma aprendizagem significativa.

Analisando cada sequência aplicada, pode-se observar que a sequência relacionando progressões geométricas com investimentos gerou maior interesse entre os estudantes o que é um aspecto relevante para o aprendizado significativo. Ainda como parte da análise dessa sequência, observou-se que um dos fatores que contribuíram para sua eficácia foi a estratégia didática baseada na Modelagem Matemática, estratégia que motivou os estudantes. Além disso, evidências de aprendizagem significativas foram observadas quando os estudantes puderam compreender as ideias iniciais do conteúdo de PG atrelando a conhecimentos já estudados, como PA, porcentagem e juros.

Relacionar as progressões geométricas com os fractais permitiu que os estudantes vissem significado nas abstrações matemáticas, estimulando a curiosidade e a motivação para explorar mais sobre o tema. Ainda, ressalta-se que, essa sequência didática foi planejada a fim de valorizar tanto o aprendizado dos conteúdos quanto a interação social e o desenvolvimento cognitivo ativo.

Por meio do estudo do crescimento populacional explorou-se o uso de funções exponenciais para modelar o crescimento de populações. Ao mesmo tempo, os estudantes interpretaram gráficos, organizaram dados em tabelas, descreveram suas observações e puderam pesquisar sobre o assunto. Dessa forma, a atividade promoveu uma compreensão aprofundada dos conceitos de progressão geométrica e funções exponenciais. A integração de dados reais e a análise crítica das implicações do crescimento populacional contribuíram para um aprendizado mais contextualizado e significativo.

Tanto a Modelagem Matemática quanto a Resolução de Problemas se destacaram como metodologias capazes de proporcionar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades relacionadas à capacidade de entender, controlar e manipular seus próprios processos cognitivos. Além disso, as discussões como toda a classe sobre as respostas das atividades propostas em cada sequência didática mostrou-se um momento de aprendizagem.

A experiência relatada nesta dissertação reforça a importância de estratégias de ensino que promovam a aprendizagem significativa, a integração de atividades desenvolvidas a partir da contextualização dos conteúdos matemáticos, embasadas na Teoria da Aprendizagem Significativa.

Esta pesquisa contribui para a discussão sobre metodologias eficazes no ensino da matemática, além de oferecer sequências prática para a implementação de atividades que fomentem a aprendizagem significativa nas salas de aula.

Como perspectiva futura, têm-se a ideia de desenvolver sequências de ensino que priorizem a aprendizagem significativa, envolvendo outros assuntos pertencentes ao currículo do Ensino Médio, pensando sempre em favorecer o desenvolvimento dos estudantes. Para em seguida, verificar sua eficácia e disponibilizá-las aos demais professores, já que um dos obstáculos relatado por professores é que elaborar sequências que engajam e sejam eficazes demandam muito tempo.

Referências Bibliográficas

ALLEVATO, N. S.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. *Boletim Gepem*, p. 133, 2009.

ARAGÃO, M. d. F. A.; BARBOSA, J. L. d. C. A história da modelagem matemática: Uma perspectiva de didática no ensino básico. *IX EPBEM–Encontro Paraibano de Educação Matemática, Campina Grande*, 2016.

ARRUDA, A. G. Ensino de juros compostos, progressão geométrica e função exponencial. *Universidade Federal de Viçosa*, 2013. Dissertação de Mestrado.

AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva.* [S.l.]: Paralelo Editora, 2003. Tradução: Lígia Teopisto.

AUSUBEL, D. P. et al. *Educational psychology: A cognitive view.* [S.l.]: holt, rinehart and Winston New York, 1978.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* 2.. ed. [S.l.]: Editora Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009.

BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. *Modelagem Matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações.* [S.l.]: Editora UEPG, 2016.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio.* 2018. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file⟩. Acesso em: 15 de maio 2024.

BRASIL, B. M. da Educação. Secretaria de E. B. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio.* Brasília, DF: Ministério da Educação, 2006.

BRASIL, M. da Educação. Secretaria de Educação Média e T. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília, DF: Ministério da Educação, 2000.

CALIANI, F. M.; BRESSA, R. d. C. Refletindo sobre a aprendizagem: as teorias de jean piaget e david ausubel. In: *Colloquium Humanarum.* [S.l.: s.n.], 2017. v. 14, p. 671–677. Disponível em: ⟨https://pdfs.semanticscholar.org/66f8/16b4eb71d884a4e9eec7caf7b97808735cb4.pdf⟩. Acesso em: 10 de jul 2024.

CEOLIM, A. J. Modelagem matemática na educação básica: obstáculos e dificuldades apontados por professores. *Universidade Federal de São Carlos*, 2015. Tese de doutorado.

FTD. *Multiversos Matemática*. 2021. Acesso em: 23 jul. 2024. Disponível em: ⟨https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/multiversos-matematica/⟩.

GIEHL, L. K. A aprendizagem significativa no ensino da matemática: Discussões e experiências. *Revista Pleiade*, v. 12, n. 26, p. 99–107, 2018.

HERMINIO, P. H. Matemática financeira: um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem. *Universidade Estadual Paulista (Unesp)*, 2008.

INEP. *Relatório de Resultados do Saeb 2021*. 2021. Disponível em: ⟨https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf⟩. Acesso em: 15 de maio 2024.

JANISCH, A. B. L.; JELINEK, K. R. Atividades experimentais no ensino da matemática mediadas pela prática docente e nas perspectivas vygotskiana, piagetiana e ausubeliana. *Revista de Iniciação à Docência*, v. 8, n. 1, p. e12608–15, 2023. Disponível em: ⟨https://periodicos2.uesb.br/index.php/rid/article/view/12608/8043⟩. Acesso em: 10 de jul 2024.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem matemática e língua portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. *Conjectura: filosofia e educação*, Editora da Universidade de Caxias do Sul, v. 14, n. 2, p. 89–99, 2009.

MENTGES, M. A interdisciplinaridade no ensino de progressões aritméticas e geométricas por meio de softwares matemáticos. *Universidade Federal de Santa Maria*, 2019. Especialização em Mídias na Educação.

MILANI, W. N. A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio. *Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Departamento de Matemática* , 2011. Dissertação de Mestrado.

MOREIRA, M. A. A aprendizagem significativa sob a perspectiva da teoria cognitiva de david ausubel. *Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)*, 2006. Disponível em: ⟨https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubport.pdf⟩. Acesso em: 20 de jun 2024.

MOREIRA, M. A. *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. [S.l.]: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MS-ESTADO, S. d. E. d. E. d. M. G. d. S. *Base Nacional Comum Curricular*. 2021. Disponível em: ⟨https://www.sed.ms.gov.br/wp-content/uploads/2022/01/Curriculo-Novo-Ensino-Medio-v1.1.pdf⟩. Acesso em: 20 de jul 2024.

NOGUEIRA, C. F. Vygotsky e a zona de desenvolvimento proximal (zdp): três implicações pedagógicas. *Revista Portuguesa de Educação*, Universidade do Minho, v. 14, n. 2, 2001. Disponível em: ⟨https://www.redalyc.org/pdf/374/37414212.pdf⟩. Acesso em: 10 de jul 2024.

NUBANK. *Menor de 18 anos pode investir na bolsa de valores?* 2024. Disponível em: ⟨https://blog.nubank.com.br/menor-18-anos-investir-bolsa-de-valores/⟩. Acesso em: 24 de jul 2024.

PADOVANI, P. G. S. et al. A resolução de problemas enquanto metodologia de ensino de matemática na educação básica: uma revisão sistemática de literatura. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 9, n. 2, p. 37–61, 2022.

PUHL, C. S.; MÜLLER, T. J.; LIMA, I. G. de. As contribuições de david ausubel para os processos de ensino e de aprendizagem. *DYNAMIS (FURB. ONLINE)*, 2020.

SOARES, L. H. et al. *Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba - UFBP, 2009.

SOUZA, A. L.; SANTOS, J. R. S.; PANTOJA, L. F. L. Sequências numéricas: Um olhar sobre a abordagem feita em livros didáticos. *REVISTA FOCO*, v. 16, n. 9, p. e3083–e3083, 2023. Disponível em: ⟨https://ojs.focopublicacoes.com.br/foco/article/view/3083/1984⟩. Acesso em: 20 de jul 2024.

SOUZA, J. R. d. *Multiversos Matemática: Sequências e trigonometria: Ensino Médio*. [S.l.]: FTD, 2020.

SOUZA, L. R. d. Geometria fractal: uma proposta de sequência didática para o ensino de progressões geométricas. *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP)*, 2018.

VALADARES, J. A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista. *Aprendizagem Significativa em Revista*, v. 1, n. 1, p. 36–57, 2011.

YAHATA, E. A. *Modelagem Matemática: Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: ⟨https://pemat.im.ufrj.br/images/Documentos/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/MSc_43_Edson_Akira_Yahata.pdf⟩. Acesso em: 20 de jun 2024".

Apêndice A

Sequência sobre Investimentos

➔ **Matemática Financeira**

Para iniciar a atividade vamos relembrar a diferença entre os *juros simples* e *compostos*.
Você lembra algo? Se sim, escreva com suas palavras.

A diferença é que em uma situação sob o regime de juros simples, o juro é calculado sempre em relação ao valor inicial, já nos juros compostos, o juro do período é calculado sempre sobre o valor do período anterior, o conhecido juros sobre juros.

Observe as tabelas a seguir, que representam o rendimento ao aplicar R$ 1 000,00 nos sistemas de juros simples e compostos a uma taxa de 5% em certo período.

Lembre-se que para os cálculos utilizamos a taxa na forma decimal, ou seja, $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$. No sistema de juros simples o juro será sempre sobre o valor inicial, ou seja, $5\%\ de\ 1000 = 0{,}05 \times 1000 = 50$, já no composto, o juro será calculado sobre o montante (valor acumulado) no período anterior. Observe:

Juros simples		
Período	*Juro*	*Montante*
0	-	1000
1	50	1050,00
2	50	1100,00
3	50	1150,00
4	50	1200,00
5	50	1250,00
⋮	⋮	⋮

Juros compostos		
Período	*Juro*	*Montante*
0	-	1000
1	50,00	1050,00
2	52,50	1102,50
3	55,13	1157,63
4	57,88	1215,51
5	60,78	1276,28
⋮	⋮	⋮

Sobre a tabela do sistema de juros simples, responda:

- A cada mês há um aumento constante de _______, dessa forma dizemos que esse é um aumento aritmético, logo, o montante forma uma P.A. (________________________).
- Como você escreveria uma lei de formação que representasse a sequência do montante de acordo com o período?

$a_1 =$
$r =$
$a_n =$

Relembre...

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada razão da P.A. e é indicada por *r*.

1

- Observe na tabela do sistema de juros compostos o valor de 100% foi aumentado em 5% a cada mês, totalizando 105% do montante anterior o mesmo que 1,05 em decimal. Assim, o montante e o juro do período (a partir do 1° período), podem ser calculados de uma maneira bem simples, basta multiplicar o valor anterior por 1,05, confirme isso na tabela abaixo (*utilize a calculadora para facilitar*).

Juros compostos	
Período	*Juro*
0	-
1	50
2	52,50
3	55,13
4	57,88
5	60,78
⋮	⋮
n	

×1,05
×1,05

A sequência a_n do juro recebido de acordo com o período (a partir do 1° período, ou seja, $n \geq 1$) é:

$$a_n = (50;\ 52{,}5;\ \_\_\_;\ \_\_\_;\ \_\_\_;\ \cdots)$$

O 1° termo dessa sequência a_1 é _____.

Observe que para determinar o 5° termo (a_5) dessa sequência, foi necessário multiplicar o termo a_1 por 1,05 quatro vezes, ou seja:

$$a_5 = 50 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05$$

$$a_5 = a_1 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05$$

$$a_5 = a_1 \cdot 1{,}05^4$$

- A partir disso, para determinar o 10° termo, basta fazer: $a_{10} = a_1 \cdot$ _______

- Com isso, para determinar o *n*-ésimo termo, basta fazer: $a_n = a_1 \cdot$ _______

O valor 1,05 é a razão (q) dessa sequência, chamada Progressão Geométrica, a razão é o quociente entre um termo a_n (a partir do segundo) e o termo anterior a_{n-1}. Verifique:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{52{,}50}{50} = \frac{55{,}13}{52{,}50} = \cdots = 1{,}05$$

Progressão geométrica (P.G.) é a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada razão da P.G. e é indicada por q. O termo geral de uma PG (a_n) é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Juros compostos	
Período	*Montante*
0	1000
1	1050
2	1102,50
3	1157,63
4	1215,51
5	1276,28
⋮	⋮
t	

×1,05
×1,05

Observe agora a tabela do montante ao lado, veja que a sequência *b* do montante de acordo com o período é:

$$a_n = (1000;\ 1050;\ \_\_\_\_\_\_\_\_;\ \_\_\_\_\_\_\_\_;\ \cdots)$$

Perceba que o valor do montante é multiplicado pela mesma razão 1,05 mas nesse caso, o 1° termo a_1 representa o montante no período 0. Portanto podemos afirmar que a_3 representa o montante no período 2, ou ainda, após decorrido 2 períodos de tempo *t*.

Assim, o termo a_n representa o montante no período $t = n - 1$. Isolando o *n*, temos: $n = t + 1$.

Substituindo no termo geral da PG, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ M &= C \cdot (1+i)^{t+1-1} \\ M &= C(1+i)^t \end{aligned}}$$

Essa é a fórmula utilizada para calcular o montante de acordo com o período *t*: $M = C(1+i)^t$, onde i é a taxa (em decimal) no período *t*.

"Os juros compostos são recorrentes nas relações comerciais, nas compras parceladas a longo prazo, nos investimentos, nos empréstimos e até mesmo no simples atraso do pagamento de contas. Ele pode ser um aliado ou um vilão, depende em qual situação você está: empresta ou pega emprestado?".

Situação problema

Fernanda tem R$ 1 500,00 e deseja guardar esse valor, ela sabe que deixar o dinheiro parado na conta não é a melhor opção, pois ele desvalorizará com o passar do tempo, por isso ela decidiu investir o valor, para usar futuramente. Ela pesquisou sobre alguns investimentos considerados mais seguros. No site do Tesouro Direto (https://www.tesourodireto.com.br) Fernanda encontrou duas opções de investimento que a interessaram:

➢ *Opção 1 – Tesouro Selic 2029* (SELIC + 0,1482%)

O *Tesouro Selic* é um título de investimento público emitido pelo governo, funciona como um empréstimo que você faz para o Governo Federal para financiar gastos e investimentos da União. Em troca, devolve os valores corrigidos tendo como base a Selic, a taxa básica de juros da economia brasileira, adicionado a um percentual fixo. Nesse investimento, as variações são pequenas, o que o torna bastante previsível, essa previsibilidade de rendimentos faz com que esse título seja bastante recomendado para objetivos de médio ou longo prazo, como a aposentadoria ou custeio de estudo.

No ano de 2023 a taxa *Selic* fechou o ano em 11,75% ao ano (a.a.), atualmente a taxa está a 10,5% a.a. e a previsão é que se mantenha nesse valor até o final de 2024. Vale ressaltar que nesse investimento paga-se imposto de renda sobre os juros recebidos, sendo que o percentual reduz progressivamente com o aumento do tempo do investimento.

- Utilizando o valor da SELIC como 10% a.a, então o rendimento aproximado será de 10% + 0,1482% =__________% = ________ (em decimal), utilize essa taxa com três casas decimais, então $i =$_________.

Tesouro Selic 2029		
Ano	**Juros recebidos**	**Montante**
Início	-	1500
2024		
2025		
2026		
⋮	⋮	⋮

Esse investimento é para ser retirado somente em 2029, com seus conhecimentos sobre PG você irá determinar a fórmula do termo geral de cada um deles, para em seguida calcular os juros e o montante acumulado em 2029.

- Se os valores de 2024 representam o 1° termo da sequência, os valores de 2029 serão qual termo?

Juros	***Montante***
PG em que: $a_1 =$ *e* $r =$ $a_n = ?$	*PG em que:* $b_1 =$ *e* $r =$ $b_n = ?$

- Portanto em 2029 o juro será de:________ e o valor do montante: _____________

Esse investimento, o Tesouro Selic, passou a ser isento da taxa de custódia na Bolsa de Valores (B3) até o estoque de R$ 10.000,00, porém sofre a incidência do imposto de renda (IR), nesse caso a menor das alíquotas (15%), pois é um investimento de mais de 720 dias.

Você sabia? O imposto cobrado nos investimentos em títulos públicos é regressivo, ou seja, quanto mais tempo você deixar o dinheiro na aplicação, menos pagará de IR.

Lembrando que o IR é calculado *sobre o total dos rendimentos* obtidos no período em que o dinheiro esteve aplicado, não sobre o montante total.

- Utilizando os dados da PG (a_n) descrita anteriormente e a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PG, determine o total dos juros recebidos.

- Agora desconte a alíquota do IR e verifique qual será o valor a ser recebido por Fernanda no final deste investimento.

➢ *Opção 2 – Tesouro IPCA+ 2029*

O *Tesouro IPCA+* é um título público brasileiro emitido pelo Tesouro Nacional, atrelado ao Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que mede a inflação oficial do país. Ele é uma opção de investimento em renda fixa que busca proteger o capital contra a inflação, garantindo um retorno real acima do índice.
Os papéis do *Tesouro IPCA+* devolvem, no vencimento, o valor principal acrescido da inflação do período medida pelo Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), juntamente com uma taxa prefixada que está. No mês de julho, os papéis pagavam de 6,17% a 6,3% além do IPCA, a depender do prazo de vencimento.
Para se ter uma ideia, nos últimos cinco anos as taxas anuais do IPCA foram: 4,31% em 2019, 4,52% em 2020, 10,06% em 2021, 5,79% em 2022 e 4,62% em 2023. Até o início de julho de 2024, a taxa acumulada era de 2,48% e a projeção para 2024 é de 4,02%.

- Utilizando o valor da taxa IPCA como 4,02% a.a e o valor fixo de 6,2% então o rendimento aproximado será de __________% = ________ (em decimal), utilize essa taxa com três casas decimais, então $i =$_________.

Tesouro IPCA+ 2029		
Ano	**Juros recebidos**	**Montante**
Início	-	1500
2024		
2025		
2026		
2027		
2028		
2029		

Esse investimento, também sofre a incidência do imposto de renda (IR), sendo uma alíquota de 15%, mas não está isento da taxa de custódia na Bolsa de Valores (B3), conforme o site do tesouro direto essa taxa ficará em torno de R$ 20,00 para esse montante acumulado.

- Verifique qual será o valor recebido por Fernanda no final deste investimento após o desconto das taxas envolvidas.

- Qual deles se mostrou mais vantajoso? Tesouro Selic ou Tesouro IPCA+?

- Existe também o *Tesouro IPCA+* 2045, se esse título rendesse da mesma forma que o 2029, qual seria o montante acumulado ao final do período?

Apêndice B

Sequência sobre Fractais

➔ **Fractais**

Um fractal é uma forma geométrica que pode ser subdividida em partes menores, sendo que cada uma dessas partes é uma cópia reduzida da forma inteira. Muitas estruturas matemáticas são fractais, e através delas consegue-se obter imagens irregulares e fragmentadas, muitas delas impressionantes por sua complexidade e beleza.

Curva de Koch

A curva de Koch é um objeto matemático apresentado por Helge von Koch em 1904. A curva é obtida a partir de um segmento de reta sobre o qual aplica-se uma transformação. A transformação é feita dividindo esse segmento em três partes congruentes (iguais), criando um triângulo equilátero sobre o segmento central e removendo sua base. Posteriormente, repete-se a mesma transformação para cada um dos segmentos, na imagem abaixo podemos ver as primeiras figuras formadas por essa sequência de transformações a cada iteração (repetição de um determinado processo).

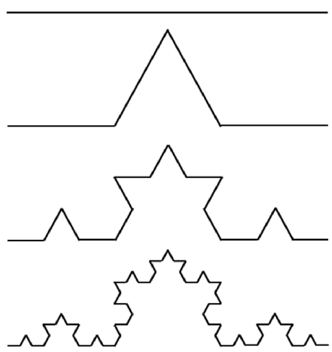


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Responda:

- Você percebeu algum padrão na construção dessa figura? Se sim, explique?

- Consegue imaginar como será a figura 5? E a Figura 10?

1

- Agora faça o desenho de como será a Figura 5, utilizando a sombreada como base.

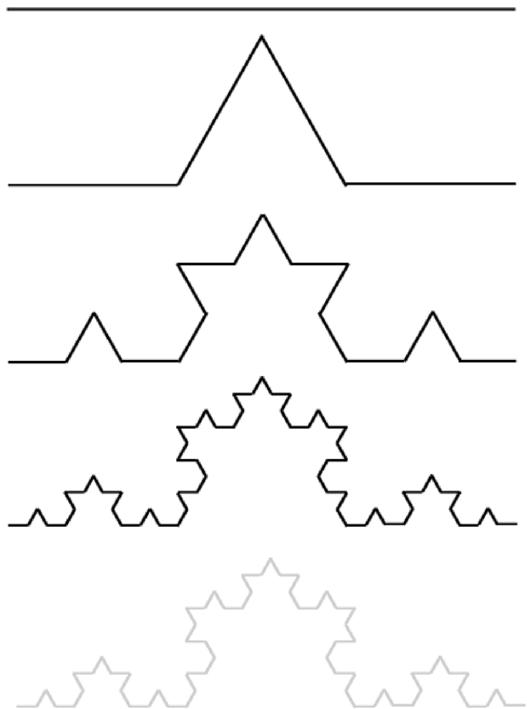
Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Figura 5



- Observando os padrões na construção dessa figura preencha a tabela a seguir.

Figura	Quantidade de segmentos
1	
2	
3	
4	
5	
⋮	
n	

A quantidade de segmentos forma uma sequência chamada

____

Essa sequência é classificada como:

( ) crescente ( ) decrescente

( ) oscilante ( ) estacionária

( ) constante

- Para determinar a quantidade de segmentos na Figura 5 você contou? *( ) Sim* *( ) Não*

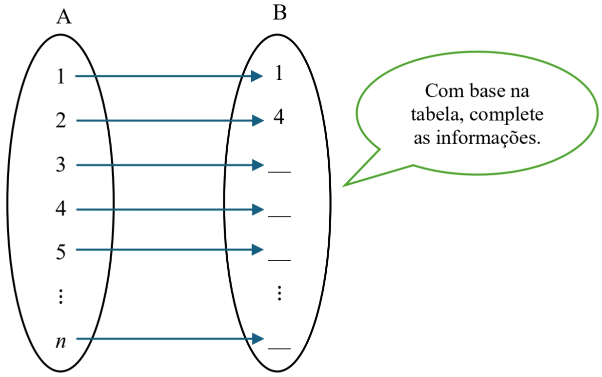
2

- Você consegue determinar quantos segmentos haverá na figura 10 sem precisar da imagem? Se sim, apresente a estratégia ou o cálculo realizado.

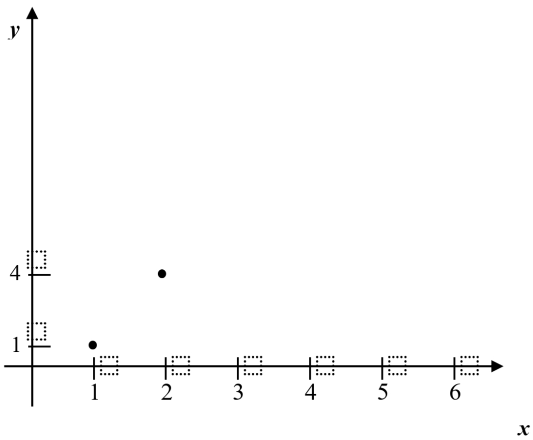
- Podemos escrever a quantidade de segmentos como uma sequência numérica: $(1, 4, \_\_, \_\_, \ldots)$. Qual é o 1° termo, o 5° termo e a razão dessa sequência?

- Escreva o termo geral que representa essa progressão geométrica considerando n o número da Figura.

- A relação entre o número da Figura e a quantidade de segmentos pode ser expressa por uma função $f: A \to B$, onde A (o domínio da função) é o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), representada pelo diagrama a seguir:



- Essa função pode ser representada no plano cartesiano, por meio de pontos, complete com os demais.



- Observe a curva formada pelos pontos marcados no plano cartesiano. Consegue relacionar com uma função estudada anteriormente?

Comprimento dos segmentos em cada etapa da construção da curva de Koch

- Considerando que a medida do segmento inicial corresponde a 1 u.c. (unidade de comprimento) complete a tabela a seguir com o comprimento de cada segmento (menor) formado após as iterações.

Figura	Comprimento de cada segmento ($u.c.$)
1	1
2	
3	
4	
⋮	
n	

Essa sequência é classificada como:

( ) crescente ( ) decrescente

( ) oscilante ( ) estacionária

( ) constante

Se não souber essa, depois volte aqui!

- Você conseguiu responder qual será o comprimento na Figura n? *( ) Sim* *( ) Não*

- Podemos escrever a quantidade de segmentos como uma sequência numérica:
$(1\ ,\ \_\_\ ,\ \_\_\ ,\ \_\_\ ,\ \_\_\ ,\ldots)$. Essa sequência é uma PG, com 1° termo $a_1 =$ ____ e razão $r =$ ____.

- Agora usando a fórmula do termo geral de uma PG, determine o termo geral a_n da Progressão Geométrica formada pelo comprimento de cada segmento.

- Utilizando os dados observados anteriormente, preencha a tabela a seguir e observe o que acontece com o perímetro da Figura após cada iteração:

Figura	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Perímetro da figura
1			
2			
3			
4			
5			
⋮			
n			

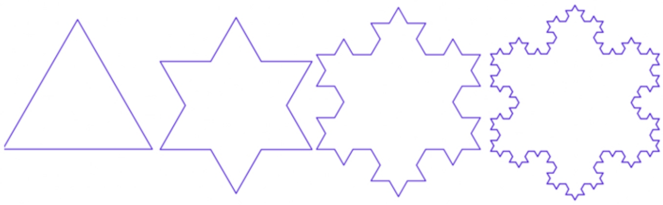
- O que acontece com o perímetro da Figura a cada iteração? ______________________

Você percebeu que o perímetro da Figura aumenta a cada iteração? *( ) Sim* *( ) Não*

É pelo fato de aumentar a cada iteração que podemos afirmar que a curva de Koch (gerada após infinitas iterações) é uma curva que possui comprimento infinito. Esse objeto matemático, assim como outros intrigam os Matemáticos há muitos anos.

> "Entre o século XIX e o século XX, foram criados objetos que desafiavam conceitos que até então pareciam estar bem estabelecidos. [...] o conceito de infinito foi questionado por Georg Cantor (1845 – 1918) que provou que alguns infinitos são maiores que outros. Outros aparentes paradoxos também apareceram, como o caso de objetos geométricos de comprimento infinito, criados a partir de um segmento de reta. Por isso, esses objetos ficaram conhecidos como "monstros" matemáticos durante muitos anos."
>
> Souza, 2018.

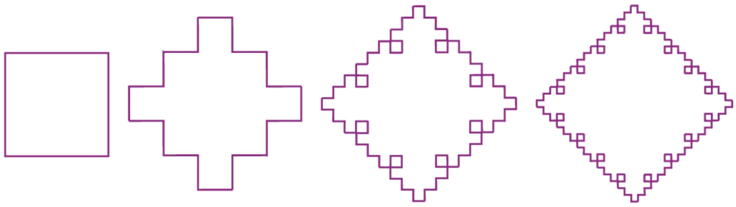
A curva de Koch originou o famoso fractal Floco de Neve de Koch, as primeiras iterações estão apresentadas abaixo.



...

Lembre-se: o fractal é a figura gerada quando repetimos a iteração infinitamente.

A ideia da formação desta curva inspirou outras construções análogas como, por exemplo, a curva utilizada para construir o fractal Quadrado de Koch.



...

Para finalizar, me diga...

- Você ficou curioso(a) para saber mais sobre os fractais?

- O que achou dessa atividade envolvendo sequências e fractais?

Sabia que existem inúmeros fractais, com formas bem diferentes?
Isso mesmo, inclusive em 3D, pesquise sobre eles!

5

Apêndice C

Sequência sobre Crescimento Populacional

➔ **Crescimento Populacional**

Thomas Robert Malthus (1776-1834) é uma referência quando estudamos ciência da população, pois ele escreveu a mais famosa obra sobre questões demográficas, em meio ao cenário que vivia, preocupado com os problemas socioeconômicos, tais como desemprego, fome, êxodo rural e rápido aumento populacional. Malthus acreditava que a população tinha potencial de crescimento ilimitado, e a natureza, inversamente, recursos limitados para alimentá-la.

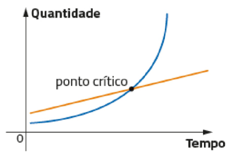
No ano de 1798, Malthus, em sua obra *Ensaio sobre a população*, publicou a sua teoria, segundo a qual a população cresceria em progressão geométrica, enquanto a produção de alimentos cresceria em progressão aritmética.

Com base em seus conhecimentos, responda:

- Conforme a teoria Malthusiana, o que você acha que aconteceria após algum tempo?

- O crescimento aritmético não é igual ao geométrico, mas em que eles se diferenciam?

Analise a representação das curvas do crescimento populacional e da produção de alimentos, representadas a seguir.



Segundo a teoria de Malthus, podemos afirmar que:

- A curva representa o crescimento ___________________, enquanto a reta o crescimento ____________________.
- O que representa o ponto crítico?

1

Considerando a aproximação de que uma pessoa consome 1 tonelada de comida a cada ano e que em 1800 produzia-se o suficiente para toda a população mundial de 1 bilhão de pessoas e utilizando a hipótese de que em 1850 a produção de alimentos era estimada em 2 bilhões de toneladas. Preencha a tabela com base na teoria malthusiana, cujo crescimento da produção de alimentos iria ocorrer em progressão aritmética.

Ano	**Produção estimada** (*em toneladas*)
1800	1bi
1850	2bi
1900	
1950	
2000	
2050	

Conforme a teoria Malthusiana as populações humanas, se não ocorressem guerras, epidemias, desastres naturais etc., tenderiam a duplicar a cada 25 anos. Sabendo que em 1800 a população mundial era de 1 bilhão de pessoas (o mesmo que 10^9), qual seria a estimativa da população em 2025, conforme essa teoria? Use a tabela para facilitar.

Ano	**População estimada**
1800	

- Escreva uma fórmula do termo geral que representa a sequência da população estimada, de acordo com o tempo, considere o ano 1800 como o início da contagem.

- Utilize a fórmula para estimar a população em 2050.

- A produção estimada de alimento seria suficiente para toda a população em 2050?

- Pesquise qual é a população mundial atual e veja se a estimativa da teoria de Malthus se concretizou.
- Investigue alguns dos motivos pelos quais essa teoria não se confirmou e cite alguns deles:

Você sabia?

O Relatório Perspectivas da População Mundial 2024 da Organização das Nações Unidas (ONU), divulgado na quinta-feira, afirma que 10,3 bilhões de pessoas serão a população mundial máxima para o mundo.