

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PAMELA KARINY PETERES SOARES LIMA

**MATEMÁTICA A ENSINAR E MATEMÁTICA PARA ENSINAR
TEMAS DE GEOMETRIA A PARTIR DO LIVRO “DIDÁCTICA DEL
CÁLCULO (1969)”**

CAMPO GRANDE – MS
2024

PAMELA KARINY PETERES SOARES LIMA

**MATEMÁTICA A ENSINAR E MATEMÁTICA PARA ENSINAR
TEMAS DE GEOMETRIA A PARTIR DO LIVRO “DIDÁCTICA DEL
CÁLCULO (1969)”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Edilene Simões Costa dos Santos.

**CAMPO GRANDE-MS
2024**

PAMELA KARINY PETERES SOARES LIMA

**MATEMÁTICA A ENSINAR E MATEMÁTICA PARA ENSINAR TEMAS DE
GEOMETRIA A PARTIR DO “DIDÁCTICA DEL CÁLCULO (1969)”**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Edilene Simões Costa dos Santos.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Edilene Simões Costa dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
(Orientadora)

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)
Prof.^a Dr.^a Aparecida Santana de Souza Chiari
(Membro interno)

Universidade Federal do Pará (UFPA)
Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
(Membro externo)

Campo Grande–MS, 07 de junho de 2024

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha gratidão a todas as pessoas que tornaram possível a realização desta pesquisa. Este trabalho não teria sido concluído com sucesso sem o apoio e a colaboração de várias pessoas que acompanharam a minha formação.

Primeiramente agradeço ao nosso Criador, por traçar o meu caminho até aqui. Por me colocar no lugar certo com as pessoas certas. Agradeço a minha missão, pois ele sabe o que faz!

Agradeço ao meu amigo, companheiro e esposo Ronil Wellington da Silva, por estar do meu lado, passando comigo cada momento da produção desta pesquisa. Agradeço a você por me acalmar quando foi preciso, por me ouvir, por opinar, por ler meus textos mesmo quando chegava cansado do trabalho. Muito obrigada!

Agradeço à minha orientadora, Edilene Simões Costa dos Santos, pela orientação dedicada, pelo incentivo constante e pelas preciosas percepções ao longo de todo o processo de pesquisa. Sua experiência foi fundamental para a elaboração deste estudo.

Agradeço também aos membros da banca examinadora, Aparecida Santa de Souza Chiari e Iram Abreu Mendes, pela dedicação e pelas valiosas contribuições durante a qualificação desta dissertação. Suas sugestões e questionamentos enriqueceram significativamente o trabalho.

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PPGEumat e ao Grupo de Pesquisa COMPASSO/MS meu profundo agradecimento por proporcionar o ambiente acadêmico e os recursos necessários para a realização deste mestrado. Agradeço especialmente ao corpo docente, cujo apoio e orientação foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

À minha família, compreensão e incentivo ao longo de toda a jornada acadêmica. Seu apoio foi essencial para superar os desafios e alcançar este objetivo.

Por fim, dedico este trabalho a todos os professores, na esperança de que contribua para o avanço do conhecimento e para o aprimoramento das práticas pedagógicas. Assim, dedico a minha pesquisa a todos os que queiram aprender sobre os saberes profissionais do professor que ensina matemática.

Muito obrigada a todos que, de alguma forma, contribuíram para esta pesquisa.

***“Educar verdadeiramente não é ensinar fatos novos ou enumerar fórmulas prontas, mas
sim preparar a mente para pensar.”***

(Albert Einstein)

RESUMO

Esta pesquisa foi desenvolvida na linha de História da Educação Matemática, tendo como fonte de investigação o livro *Didáctica del Cálculo* (1969), escrito por José Junqueira Muné. Tendo como pergunta norteadora, “que saberes profissionais estão materializados em ‘Didáctica del Cálculo’ (1969) para o ensino de geometria, com base no livro I (metodología y procedimiento) e livro III (didáctica del geometría)?” Para responder tal questionamento traçamos o seguinte objetivo geral: analisar os saberes profissionais com base no Livro I e alguns aspectos do Livro III presentes em “Didáctica del Cálculo”, de José Junquera Muné. Deste modo, para o desenvolvimento deste trabalho foi utilizado como referencial teórico-metodológico o estudo sobre os Saberes Profissionais, de Hofstetter e Schneuwly (2017), a matemática a ensinar e a matemática para ensinar de Bertini, Moraes e Valente (2017) e uma categoria de análise, descrita com quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança, identificadas como observação e manipulação, desenho, representação aritmética, problemas e exercícios. Essas etapas foram por nós identificadas a partir da análise do Livro I (metodología y procedimiento) e aplicadas em análises no Livro III (didáctica del geometría). Esta pesquisa contribui para o campo da Educação Matemática ao analisar os saberes profissionais específicos para o ensino de geometria, conforme delineado por Muné em sua obra. Destaca-se a relevância de compreender como o autor articula os *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* matemática. Destarte, concluímos que o livro de Muné apresenta saberes objetivados e que estão intrinsecamente relacionados, quando o autor traz ao leitor orientações didáticas sobre os temas de geometria desenvolvidos e analisados por nós no livro III. Dessa forma, o manual contribui para a condensação de saberes por nos permitir identificar uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar* proposta pelo autor em forma de instruções para o docente desenvolver os estágios do trabalho didático em geometria.

Palavras-chave: saberes profissionais, método, corpo geométrico, posição, polígonos.

ABSTRACT

This research was developed in the line of History of Mathematics Education, using as a source of investigation the book *Didáctica del Cálculo* (1969), written by José Junqueira Muné. Having as a guiding question, “what professional knowledge is materialized in ‘Didáctica del Cálculo’ (1969) for the teaching of geometry, based on book I (methodology and procedure) and book III (didáctica del geometría)?” To answer this question, we set out the following general objective: analyze professional knowledge based on Book I and some aspects of Book III present in “*Didáctica del Cálculo*”, by José Junquera Muné. Therefore, for the development of this work, the study on Professional Knowledge, by Hofstetter and Schneuwly (2017), mathematics to teach and mathematics to teach by Bertini, Morais and Valente (2017) and a category of analysis, described with four stages of the process of acquiring knowledge by the child, identified as observation and manipulation, drawing, arithmetic representation, problems and exercises. These steps were identified by us from the analysis of Book I (methodology and procedure) and applied in analyzes in Book III (geometry didactic). This research contributes to the field of Mathematics Education when analyzing specific professional knowledge for teaching geometry, as outlined by Muné in his work. The relevance of understanding how the author articulates the knowledge to teach and knowledge to teach mathematics stands out. Therefore, we conclude that Muné's book presents objective knowledge that is intrinsically related, when the author provides the reader with didactic guidance on the geometry themes developed and analyzed by us in book III. In this way, the manual contributes to the condensation of knowledge by allowing us to identify a mathematics to teach and a mathematics to teach proposed by the author in the form of instructions for the teacher to develop the stages of didactic work in geometry.

Keywords: professional knowledge, method, geometric body, position, polygons.

LISTA DE SIGLAS

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

ERHISE – Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação

GHEMAT– Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática

PIBIC – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica

PPGEduMat – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Quadro comparativo entre os pressupostos de Pestalozzi, Herbart e Dewey.....	41
Figura 2: Capa do livro Didáctica del Cálculo	49
Figura 3: Representação da ideia de crescimento de cubo.....	87
Figura 4: Utilização do cubo para o estudo de perpendiculares	91
Figura 5: Mudança da posição relativa do cubo para estudo de perpendiculares.....	91
Figura 6: Corpos oblíquos.....	92
Figura 7: Posição dos corpos oblíquos.....	93
Figura 8: Altura de corpo geométrico.....	93
Figura 9: Altura das figuras planas	95
Figura 10: Perpendicular passando por um ponto	95
Figura 11: Soma de ângulos adjacentes	96
Figura 12: Soma de ângulos ao redor de um ponto	96
Figura 13: Soma de ângulos consecutivos ao redor de um ponto	97
Figura 14: Posição do ângulo reto	98
Figura 15: Ângulos opostos pelo vértice.....	99
Figura 16: Complemento de um ângulo.....	99
Figura 17: Representação da soma e subtração de ângulos	100
Figura 18: Estudo no ângulo na circunferência; estudo do ângulo em retas.....	102
Figura 19: Polígono.....	103
Figura 20: Identificação de polígono concavo e convexo.....	104
Figura 21: Polígono inscrito em uma circunferência.....	105
Figura 22: Construção de um quadrado	105
Figura 23: Raio e diâmetro perpendicular a uma corda	106
Figura 24: Polígonos irregulares.....	107
Figura 25: Dedução da fórmula para calcular o número de diagonais	108
Figura 26: Dedução da fórmula para calcular o número de lados	108
Figura 27: Lista de exercícios sobre polígonos	109
Figura 28: Exemplo de problema sobre polígonos	110

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “Saberes Profissionais”.....	20
Quadro 2: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “ensino de geometria”	21
Quadro 3: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “saberes a ensinar e para ensinar”	21
Quadro 4: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “saberes para ensinar geometria”.....	22
Quadro 5: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “saberes profissionais”	22
Quadro 6: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “ensino de geometria”	23
Quadro 7: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “saberes a ensinar e para ensinar”.....	23
Quadro 8: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “saberes para ensinar geometria”.....	24
Quadro 9: Seleção de teses e dissertações a partir da leitura dos títulos	25
Quadro 10: seleção de teses e dissertações a partir da leitura das pesquisas.	26

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	13
CAPÍTULO 1.....	19
ESTADO DO CONHECIMENTO.....	19
1.1 CATÁLOGO DE TESES E DISSERTAÇÕES DA CAPES.....	20
1.2 PÁGINA DO GHEMAT – BRASIL: REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFSC	22
1.3 SÍNTESE DAS PESQUISAS LEVANTADAS.....	26
CAPÍTULO 2.....	31
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA-METODOLÓGICA.....	31
2.1 SABERES A ENSINAR E PARA ENSINAR: UM RECONHECIMENTO DA PROFISSÃO DOCENTE.....	31
2.2 A MATEMÁTICA A ENSINAR E A MATEMÁTICA PARA ENSINAR.....	34
2.3 ETAPAS DO PROCESSO DE AQUISIÇÃO DO CONHECIMENTO PELA CRIANÇA.	36
CAPÍTULO 3.....	39
CONTEXTUALIZANDO O LIVRO DIDÁCTICA DEL CÁLCULO.....	39
3.1 PERCURSO PROFISSIONAL DE JOSÉ JUNQUERA MUNÉ.....	46
CAPÍTULO 4.....	48
A MATEMÁTICA A ENSINAR E A MATEMÁTICA PARA ENSINAR A PARTIR DO LIVRO DIDÁCTICA DEL CÁLCULO.....	48
4.1 CARACTERIZAÇÃO DO LIVRO.....	48
4.2 AS DEDICAÇÕES DE JOSÉ JUNQUERA MUNÉ.....	50
4.3 LIBRO I - METODOLOGIA Y PROCEDIMIENTO.....	52
4.4 LIBRO III - DIDÁCTICA DEL GEOMETRÍA: AS ETAPAS DE AQUISIÇÃO DO CONHECIMENTO E A ANÁLISE DE UMA MATEMÁTICA A ENSINAR E UMA MATEMÁTICA PARA ENSINAR.....	76
4.4.1 PRIMEIRO ESTÁGIO DO TRABALHO DIDÁTICO.....	77
4.4.2 SEGUNDO ESTÁGIO DO TRABALHO DIDÁTICO.....	89
4.4.3 TERCEIRO ESTÁGIO DO TRABALHO DIDÁTICO.....	103
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	111
REFERÊNCIAS.....	116

INTRODUÇÃO

Para iniciar esta pesquisa, discorrerei sobre minha trajetória pessoal como pesquisadora, explanando sobre os caminhos que me fizeram chegar até aqui. Ainda na graduação, tive a oportunidade de participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), orientado pela professora Dr^a. Edilene Simões Costa dos Santos, também orientadora deste trabalho. O programa iniciou em agosto de 2020 abordando a temática, “A importância da Estatística na Formação do Professor Primário no Período do Movimento da Matemática Moderna”, esse trabalho me proporcionou novas experiências, possibilitando conhecer saberes que não são apresentados na graduação, permitindo estudar a História da Educação Matemática, mais especificamente sobre o modo como essa tendência se constitui como uma frente de pesquisa e suas contribuições para a formação de educadores matemáticos.

Além disso, o projeto também me orientou para a escolha da linha de pesquisa de mestrado, contribuindo mais uma vez para a formação de uma futura pesquisadora. Em meio a idas e vindas, iniciei minha jornada para ingressar no programa de pós-graduação. A ideia inicial de investigação muito se assemelhou com a proposta de pesquisa da iniciação científica. Assim, escrevi o pré-projeto para ingresso no mestrado com o seguinte título: “Em tempos de Movimento da Matemática Moderna: a formação e o aperfeiçoamento de professores que ensinavam matemática em Campo Grande–MT na década de 1960”.

No entanto, o pré-projeto passou por alterações, ainda no início do mestrado, vivenciei algumas frustrações e adaptações que podem ser assimiladas por outros os pesquisadores, uma vez que, minha proposta inicial não causava a mesma motivação de antes, relatei o fato para a orientadora que de pronto me apresentou sugestões de leituras para que eu pudesse me reencontrar na pesquisa, deste modo, a proposta inicial foi reformulada e tomou outro formato, resultando no presente trabalho.

A busca por uma nova proposta de pesquisa me pôs diante do livro “Didáctica del Cálculo” (1969), de José Junqueira Muné, apresentado pela minha orientadora. Após um primeiro contato com o material fui sensibilizada a levantar uma proposta de pesquisa. Surgiram inquietações, que me motivaram a buscar respostas. Questões do tipo: O que faz esse livro ser um livro para professor? Que didática o autor utiliza para orientar os professores quanto ao ensino de geometria? Embora não responderemos a essas perguntas, elas nos ajudaram a formular a questão norteadora desta pesquisa: que saberes profissionais estão materializados

em ‘Didáctica del Cálculo’ para o ensino de geometria, com base no livro I (metodología y procedimiento) e livro III (didáctica del geometría)?

A partir disso, a motivação para pesquisar e responder tal questionamento se reavivou, o interesse em investigar/pesquisar finalmente me movimentou novamente, essa proposta de pesquisa nos levou a investigar os saberes profissionais a partir do livro escrito por José Junquera Muné, e que teve sua 1ª e 2ª edição datadas do ano de 1960 e 1966 respectivamente, no entanto, para esta pesquisa utilizamos a 3ª edição no ano de 1969.

Alguns pesquisadores da História da Educação Matemática vêm buscando caracterizar os saberes da profissão docente, como os estudos desenvolvidos por alguns grupos, como COMPASSO-MS e o Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática GHEMAT–Brasil, com foco nos saberes do ensino e da formação, *saber a ensinar* e *saber para ensinar* matemática. De acordo com Bertini e Valente (2022), essa é uma maneira de fortalecer o reconhecimento da profissão do professor, e com isso, mostrar os saberes particulares do professor que ensina matemática.

Esse processo de formação em busca de *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* estão presentes atualmente na trajetória profissional e acadêmica, no qual nós, professores e pesquisadores, sempre visam aprimorar os conhecimentos para melhor exercer a profissão. Assim, nosso trabalho exerce o papel de pesquisar em prol da investigação dos saberes profissionais, em busca de fortalecer e reconhecer a profissão do professor que ensina matemática, ao identificar saberes constituintes dessa profissão a partir de um livro redigido em outra época. Destarte, a pesquisa é fundamente para conhecer como o ensino se desenvolveu em um determinado período, para que dessa forma possamos apontar alternativas para o presente e para o futuro.

Perante o exposto, a pesquisa foi desenvolvida na perspectiva sócio-histórica com a investigação dos *saberes a ensinar* e *para ensinar* geometria, a partir do livro *Didáctica del Cálculo* publicado no ano de 1969. O presente estudo tem como objetivo geral analisar os saberes profissionais com base no Livro I e alguns aspectos do Livro III presentes em “Didáctica del Cálculo”, de José Junquera Muné.

Para alcançar o objetivo proposto definimos dois objetivos específicos:

- Realizar uma descrição comentada da metodologia e do procedimento didático apresentados por José Junquera Muné, com referência no Livro I relacionado as questões dos *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* de Hofstetter e Schneuwly (2017);

- Analisar as orientações didáticas dadas aos professores para o ensino de geometria com base no Livro I e no Livro III e em conexão com os *saberes a ensinar matemática* e os *saberes para ensinar matemática*.

Diante disso, a delimitação temporal desta pesquisa é dada pela data de publicação da obra *Didáctica del Cálculo* (1969). O que nos leva a investigar como esse material, que é dedicado a professores que ensinam cálculo, apresentam os procedimentos e as metodologias para que o professor possa desenvolver os *seis estágios do trabalho didático*¹ abordados no decorrer do Livro III de geometria.

As primeiras iniciativas de pesquisa nos levaram a realizar o estado do conhecimento, no qual nos propusemos selecionar teses e dissertações que fossem ao encontro do nosso tema de pesquisa e possibilitassem responder questionamentos que de alguma forma causavam dúvidas e inquietações. Inicialmente, a busca por pesquisa em repositórios foi realizada por meio dos seguintes descritores: “Didáctica del Cálculo”, “José Junquera Muné”, “Saberes profissionais” e “Ensino de geometria”, sendo que esse caminho não nos possibilitou encontrar nenhum trabalho que utilizasse o mesmo objeto de pesquisa ou que contemplasse uma relação entre os descritores. Essa busca falha já era algo esperado, uma vez que Santos e Mendes (2022), realizaram uma pesquisa sobre a análise dos saberes de aritmética do mesmo autor e também não encontraram muitas informações no Brasil. Isso aponta que outras pesquisas não foram realizadas e que esse autor pode ter sido pouco difundido no Brasil. Diante disso, em nossa pesquisa procuramos identificar quais são os *saberes a ensinar* e para ensinar mobilizados por Muné (1969) em suas orientações quanto ao ensino de geometria.

Deste modo, nos prontificamos em fazer um levantamento adicional, utilizando outros descritores que será especificado no capítulo 2, visando encontrar pesquisas que fizeram análises em manuais ou livros didáticos e que contemplassem a investigação a respeito dos saberes profissionais para o ensino de geometria através desses materiais.

Para alcançar os resultados desta pesquisa, nos respaldamos nos estudos de: Hofstetter e Schneuwly (2017); Bertini, Morais e Valente (2017) e quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento² pela criança, identificados por nós a partir do *Libro I: Metodologia e Procedimento*, sendo elas: *observação e manipulação, desenhos, representação aritmética e*

¹ O autor José Junquera Muné utiliza o termo estágio do trabalho didático para apresentar ao professor as propostas que devem ser desenvolvidas no decorrer do seu trabalho com a geometria.

² Por uma questão de tradução, ao longo deste trabalho, tomaremos as palavras conhecimento e saber como sendo o mesmo.

problemas e exercícios, que serão detalhadas mais adiante. Destarte, esta pesquisa apresenta a seguinte ordem de apresentação dos capítulos subsequentes:

No capítulo 2, “Estado do conhecimento”, são apresentadas as fontes bibliográficas como teses e dissertações que vão ao encontro com o nosso objetivo de pesquisa. Seleccionamos trabalhos do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e da página do GHEMAT– Brasil: repositório institucional da UFSC. Para isso, utilizamos os seguintes descritores: “Saberes Profissionais”, “Ensino de Geometria”, “Saberes a ensinar e para ensinar” e “Saberes a ensinar geometria”. Neste capítulo, apresentamos os processos de identificação e seleção de pesquisas.

No capítulo 3, “Fundamentação teórico-metodológica”, é apresentado a composição de autores dos quais nos apropriamos de seus conceitos para desenvolver a análise da fonte. Para isso, contamos com o aporte sócio-histórico de Hofstetter e Schneuwly (2017) sobre os *saberes a ensinar e saberes para ensinar*; Bertini, Moraes e Valente (2017) nos apoiando sobre o aprofundamento teórico a respeito da *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*. Ainda, utilizamos uma nova categoria de análise, identificada e elaborada por nós como quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento, sendo elas a *observação e manipulação, desenhos, representação aritmética, problemas e exercícios*.

No capítulo 4, “Contextualizando o livro Didáctica del Cálculo”, fazemos uma breve apresentação do autor; destacamos as ideias a respeito da possível repercussão da obra; identificamos a partir de outros trabalhos, o contexto político, social e econômico em que José Junquera Muné esteve inserido, com o intuito de identificar a vaga pedagógica³ e as possíveis influências de movimentos que repercutiram no ano em questão, para justificar as ações do autor referente à composição do material.

No capítulo 5, “Saberes a partir do livro Didáctica del Cálculo”, apresentamos a análise do material. No primeiro tópico, descrevemos o livro; em seguida apresentamos as dedicações de José Junquera Muné, em que ele discorre para quem é dedicado o material; no terceiro tópico apresentamos a análise do livro I intitulado como “*Metodologia e Procedimiento*”, sendo a partir dessa que identificamos as quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança e a tomamos como categoria de análise.

³O GHEMAT traz a definição de vaga pedagógica como sendo: “admitimos o emprego da expressão vaga pedagógica como sinônimo de movimento, de fluxo, de transformação de um dado tempo por meio da propagação e ampla aceitação de doutrinas, ideais, filosofias pedagógicas, estas que são analisadas, sobretudo, pelos historiadores da educação resultando no estabelecimento de marcos cronológicos que identificam a prevalência da divulgação destes movimentos, carregados do espírito de transformação” (Ghemat, 2016, p.18-19).

Por fim, no quarto tópico, a análise do livro III intitulado como “*Didáctica del Geometría*”. Do Livro III, dos seis estágios do trabalho didático organizados por Muné (1969), optamos em analisar apenas os três primeiros estágios, além disso, selecionamos um tema de geometria para cada estágio analisado. Isso se deu devido à abundância de temas descritos por Muné e pelo fato da nossa pesquisa ser uma dissertação de mestrado. O que nos possibilita realizar a análise dos demais temas e estágios em pesquisas futuras.

Assim, para o primeiro estágio do trabalho didático, Muné apresenta em seu material os seguintes temas: *corpo geométrico*, a forma em geral, linhas e superfícies e a figura. Sendo selecionado para análise o tema o corpo geométrico. O segundo estágio abarca os temas: a posição, os ângulos e o círculo, convergência e divergência, paralelismo e transversais. Sendo selecionado para análise o tema *posição*. O terceiro estágio do trabalho didático aborda os temas: triângulo, quadriláteros, medida do ângulo, polígonos e poliedros. Sendo selecionado para análise o tema *polígonos*.

Os motivos pelos quais selecionamos os temas: *corpo geométrico*, *posição* e *polígonos* para análise se justificam na busca por trabalharmos a nossa reflexão na perspectiva pedagógica orientada por Muné. Assim, os temas escolhidos guardavam entre si saberes, conhecimentos que garantiam a progressão dos estudos defendida pelo autor. Dessa forma, eleito o primeiro tema, no estágio I buscamos no estágio II uma temática que tivesse assuntos recorrentes ao estágio anterior, e assim se deu com o conteúdo do estágio III.

O tema do primeiro estágio, *corpo geométrico*, serve como base por trazer conceitos iniciais, como: definição de corpo geométrico, elementos que compõem um corpo geométrico e abstração de um corpo. Este será detalhado no capítulo de análise. Para a temática *posição*, do estágio II, são estudados os assuntos sobre linhas horizontais, transversais, perpendiculares e formação de ângulo de 90°. A partir desses estudos passa-se a apresentar ângulos menores e maiores que 90°, o que leva ao entendimento de posição de um corpo e pela abstração da forma, a posição e formação de figuras.

Sendo que esses dois temas se relacionam entre si e com o tema sobre *polígonos* do estágio III, no qual são desenvolvidos os estudos sobre observação de figuras poligonais; traçados de polígonos regulares; relação de perpendicularidade do raio sobre a corda; construção de polígonos por divisão direta do valor da circunferência; exercícios de traçado livre de polígonos; diagonais de um polígono e valores dos ângulos de um polígono. Sendo que esses assuntos recorrem aos estudos sobre corpo geométrico ao realizar a abstração da face de um corpo para trabalhar com a figura, perpendiculares ao abordar ângulos e construção de

polígonos por meio do encontro de linhas que formam ângulos iguais, maiores e menores que 90° .

Diante disso, após a definição do primeiro tema seguimos a progressão de estudo, que ocorre entre os temas e entre assuntos abordados dentro de cada temática, sendo que a próxima asserção a ser estudado deve partir da necessidade do anterior. O mesmo aconteceria caso no primeiro estágio tivéssemos escolhido outros temas, então, o peso da nossa escolha recai sobre o primeiro que já justificamos sua seleção.

No capítulo 6, “Considerações Finais”, apresentamos as nossas reflexões a partir desta pesquisa, na qual é destacada o desenvolvimento dos temas de geometria e as quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança, em consonância com os saberes profissionais do professor que ensina matemática a partir do nosso referencial teórico. Consideramos que o método de Muné condensa saberes profissionais para o ensino de cálculo, ao articular uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar*, ao oferecer um material para a formação de professores e para o desenvolvimento de habilidades de ensino, no qual o docente tem acesso ao conhecimento sobre o objeto (o conteúdo de matemática) e as ferramentas para ensinar o objeto (a partir das instruções metodológicas).

CAPÍTULO 1

ESTADO DO CONHECIMENTO

Neste capítulo, propomos uma reflexão sobre alguns trabalhos produzidos na linha de História da Educação Matemática, sendo que de certa forma apresentam aproximações com a proposta desta pesquisa. Para isso, nos respaldaremos no conceito de “estado do conhecimento” de Romanowski e Ens (2006), pois, diferente do estado da arte que abrange todos os setores de produção de um determinado tema, o estado do conhecimento é um estudo que pode se voltar para um setor de produção científica, determinado a priori, pelo pesquisador. O estado do conhecimento abre um leque de informações que nos faz identificar o que já foi produzido ou o que está sendo trabalhado em relação a um determinado tema de pesquisa. Assim, permitindo que o pesquisador identifique quais questões ainda não foram abordadas.

Nesse sentido, realizamos o levantamento de produções de teses e dissertações que vão ao encontro com o nosso objetivo de pesquisa, a partir disso, procedemos com uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, especificamente no catálogo de teses e dissertações na página do Ghemat – Brasil⁴. Nossa intenção objetivava encontrar pesquisas apontando os estudos a partir do livro *Didáctica del Cálculo* e ainda direcionadas para a investigação dos saberes profissionais para o ensino de geometria. Com isso, utilizamos descritores como: “Didáctica del Cálculo”, “José Junquera Muné”, “Saberes profissionais” e “Ensino de geometria”. Porém, não encontramos trabalhos relacionados a nossa temática de investigação.

Diante dessa situação, buscamos levantar produções na linha de pesquisa em História da Educação Matemática, que tratam de saberes profissionais para ensinar geometria presentes em livros didáticos, para identificar o que já se conhece sobre esse assunto, utilizando os mesmos bancos de dados supramencionados.

Apresentamos a seguir o levantamento feito no catálogo de teses e dissertações da CAPES (seção 2.1), em seguida o que encontramos neste mapeamento na página do GHEMAT - Brasil: Repositório institucional da UFSC (seção 2.2) e por fim trouxemos uma síntese das pesquisas elencadas nas duas seções mencionadas (seção 2.3).

⁴ O Ghemat-Brail, em parceria com ERHISE da Universidade de Genebra, na Suíça, foi o pioneiro em realizar pesquisas relacionadas as investigações dos Saberes Profissionais do professor que ensina matemática. Isso justifica a escolha exclusiva da página do grupo para realizar o levantamento bibliográfico.

1.1 CATÁLOGO DE TESES E DISSERTAÇÕES DA CAPES

O catálogo de teses e dissertações da Capes é uma plataforma online cuja finalidade é favorecer a divulgação e o acesso a produções acadêmicas de programas de pós-graduação de todo o país.

Para iniciar o levantamento na plataforma, foram utilizados os seguintes descritores como parâmetros: “Saberes Profissionais”, “Ensino de Geometria”, “Saberes a ensinar e para ensinar”, “Saberes para ensinar geometria” e “Saberes a ensinar geometria”. No entanto, nem sempre os trabalhos apontados na pesquisa remetem ao termo buscado. Com isso, o primeiro levantamento é amplo, sendo contabilizado todas as produções apontadas na busca. Assim, foi elaborado um quadro para cada descritor para contabilizar o quantitativo de produções, sendo apenas teses e dissertações, conforme o ano de publicação.

Para o primeiro descritor “Saberes Profissionais” foram encontrados 117 dissertações e 67 teses, contabilizando um total de 224 trabalhos.

Quadro 1: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “Saberes Profissionais”

Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES - Quantidade de publicações por ano																												
Descritor	1996	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	Dissertação	Tese	Total
Saberes Profissionais	1	3	2	4	6	1	9	18	8	14	11	10	43	7	23	3	6	2	4	5	4	10	14	16	3	117	67	224

Fonte: Elaborado pela autora

Esse levantamento apresenta produções de teses e dissertações que abrangem o tema saberes profissionais nas variadas áreas do conhecimento, como Ciências da Educação, Ciências Humanas, Ciências da Saúde e Ciências Agrárias. Analisando o quadro, podemos observar que em 2010 foi o ano em que mais se obteve produções de trabalhos relacionados aos saberes profissionais e que em 2022 foram produzidos apenas 3 trabalhos. No quadro podemos ver uma oscilação no número de produções que carregam esse descritor desde 1996 até 2022.

Em seguida, realizamos o levantamento do segundo descritor “Ensino de Geometria”, no qual foram encontrados 451 dissertações e 43 teses, totalizando 494 trabalhos.

Quadro 2: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “ensino de geometria”

Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES - Quantidade de publicações por ano																																
Descritor	1989	1991	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	Dissertação	Tese	Total
Ensino de Geometria	1	2	2	4	1	2	5	6	7	1	6	8	4	14	9	7	11	20	6	31	33	40	35	49	50	54	41	35	10	451	43	494

Fonte: Elaborado pela autora

Ao ler o quadro, podemos observar que 2019 foi o ano em que mais se obteve produções de trabalhos relacionados ao Ensino de Geometria. Além disso, há uma grande oscilação entre os números de produções de um ano para outro, no entanto, a partir de 2013 os números ultrapassam a casa das unidades e se mantém assim até 2022.

Em seguida, temos o terceiro descritor “Saberes a ensinar e para ensinar” foram levantadas 2 dissertações, totalizando dois trabalhos.

Quadro 3: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “saberes a ensinar e para ensinar”

Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES Quantidade de publicações por ano					
Descritor	2018	2021	Dissertação	Tese	Total
Saberes a ensinar e para ensinar	1	1	2	0	2

Fonte: Elaborado pela autora

Ao analisar o quadro, podemos observar que houve apenas uma produção no ano de 2018 e uma no ano de 2021, sendo duas dissertações e nenhuma tese que contemplasse esse descritor. Pesquisas relacionadas à investigação dos saberes vêm ganhando espaço no meio de produções acadêmicas, porém podemos notar que são poucas as pesquisas que trazem o termo diretamente no título.

Para o descritor “Saberes para ensinar geometria” foram encontradas 2 dissertações, totalizando 2 produções.

Quadro 4: Levantamento de teses e dissertações no catálogo da Capes pelo descritor “saberes para ensinar geometria”

Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES Quantidade de publicações por ano				
Descritor	2021	Dissertação	Tese	Total
Saberes para ensinar geometria	2	2	0	2

Fonte: Elaborado pela autora

Podemos ver que as duas produções são do ano de 2021. Concluídas as buscas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, iniciamos o mesmo procedimento no Repositório do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática – GHEMAT, no campo teses e dissertações em história da educação matemática.

1.2 PÁGINA DO GHEMAT – BRASIL: REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFSC

Optamos em realizar essa busca no GHEMAT uma vez que o repositório contempla produções em História da Educação Matemática, sendo esse mais um levantamento que filtra as nossas buscas. Começamos a nossa pesquisa com o primeiro descritor “Saberes Profissionais”, no qual foram encontradas 4 dissertações e 13 teses, totalizando 17 trabalhos.

Quadro 5: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “saberes profissionais”

Repositório do GHEMAT Quantidade de publicações por ano									
Descritor	2014	2017	2018	2019	2020	2021	Dissertação	Tese	Total
Saberes Profissionais	1	1	1	6	4	4	4	13	17

Fonte: Elaborado pela autora

Ao analisar o quadro verificamos que o ano de 2019 possui o maior número de produções e que os registros desses trabalhos apontando a temática de saberes profissionais são recentes no repositório do grupo GHEMAT.

Para o segundo descritor “Ensino de geometria” foram encontradas 13 dissertações e 8 teses, totalizando 21 trabalhos.

Quadro 6: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “ensino de geometria”

Repositório do GHEMAT Quantidade de publicações por ano																	
Descritor	2002	2007	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2019	2020	2021	2022	Dissertação	Tese	Total
Ensino de Geometria	1	1	1	1	2	1	2	3	2	2	1	2	1	1	13	8	21

Fonte: Elaborado pela autora

Podemos observar que em 2014 foi o ano em que mais ocorreram produções que englobam o descritor “Ensino de geometria”. Além disso, desde 2022 são poucos os trabalhos que estão sendo registrados no repositório ano a ano.

Continuando, no terceiro descritor “Saberes a ensinar e para ensinar” foram encontrados 3 dissertações e 4 teses, totalizando 7 trabalhos.

Quadro 7: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “saberes a ensinar e para ensinar”

Repositório do GHEMAT							
Quantidade de publicações por ano							
Descritor	2017	2018	2019	2020	Dissertação	Tese	Total
Saberes a ensinar e para ensinar	2	2	2	1	3	4	7

Fonte: Elaborado pela autora

Ao ler o quadro observamos que em 2017, 2018 e 2019 foram os anos com duas publicações anuais de trabalhos que compreendiam o descritor “Saberes a ensinar e para ensinar”. Além disso, é curto o período de publicações realizadas que podem ser encontradas no repositório a partir desse termo.

Por último, ao utilizar o descritor “Saberes para ensinar geometria” foram encontradas 2 teses, totalizando 2 trabalhos.

Quadro 8: Levantamento de teses e dissertações no repositório do GHEMAT pelo descritor “saberes para ensinar geometria”

Repositório do GHEMAT Quantidade de publicações por ano					
Descritor	2019	2021	Dissertação	Tese	Total
Saberes para ensinar geometria	1	1	0	2	2

Fonte: Elaborado pela autora

Com esse levantamento, observamos que os anos de 2019 e 2021 apontaram apenas 1 trabalho em cada ano. Nesse ensejo pode-se destacar que no repositório do GHEMAT constam pouquíssimas pesquisas que remetem ao descritor “Saberes para ensinar geometria”.

O refinamento desse levantamento geral tem como critério a leitura do título das pesquisas, assim, a presença de dois ou mais descritores, como: “Saberes profissionais”, “Ensino de geometria”, “Saberes a ensinar e para ensinar” e “Saberes para ensinar geometria” no título das teses e dissertações garantirá a segunda parte da seleção dos trabalhos. Porém, eles podem aparecer com algumas alterações, seja na ordem ou por sinônimos. Deste modo, cabe analisarmos esses títulos e identificar o trabalho que mais se adapta aos nossos parâmetros. A partir disso, pelo título das pesquisas, foram selecionadas 6 dissertações e 5 teses, totalizando 11 trabalhos.

Quadro 9: Seleção de teses e dissertações a partir da leitura dos títulos

TRABALHOS SELECIONADOS				
AUTOR	ANO	TIPO	TÍTULO	PORTAL/REPOSITÓRIO
JUNIOR, AFONSO BARBOSA DE LIMA	2021	Dissertação	Saberes profissionais docentes para o ensino da geometria nos anos iniciais.	CAPES
MOROTO, ALINE SUEMI	2021	Dissertação	SABERES PARA ENSINAR GEOMETRIA NO ENSINO PRIMÁRIO: um estudo sobre manuais escolares produzidos por Theobaldo Miranda Santos	CAPES
FORTALEZA, FRANCISCA JANICE DOS SANTOS	2021	Tese	UMA GEOMETRIA PARA ENSINAR: elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)	CAPES/UFSC
CRUZ, EVELLIN SENA	2021	Dissertação	Saberes para ensinar geometria: manuais didáticos para ensinar matemática na década de 1930	CAPES
JUNIOR, ROBERT RENE MICHEL	2020	Dissertação	Os saberes profissionais para o ensino de geometria e desenho presentes na Revista do Ensino de Minas Gerais na década de 1920	CAPES/UFSC
SANTOS, EDLENE CAVALCANTI	2019	Tese	A matemática para a formação de professores da Escola Normal Maceioense: Geometria como um saber profissional (1860-1930)	CAPES/UFSC
CONCEIÇÃO, GABRIEL LUÍS DA	2019	Tese	Experts em Educação: circulação e sistematização de saberes geométricos para a formação de professores (Rio de Janeiro, final do século XIX)	CAPES
ESQUIVEL, MARCIO OLIVEIRA D	2019	Tese	PRIMEIRAS NOÇÕES DE GEOMETRIA PRÁTICA (1894-1966): a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria	CAPES/UFSC
BARROSO, ISABEL CAMPOS	2018	Tese	Um estudo sobre o conhecimento profissional para o ensino das transformações geométricas	CAPES
OLIVEIRA, REGIS VERISSIMO LAMAS DE	2018	Dissertação	Geometria e para ensinar: cadernos de normalistas e professores das séries iniciais – 1960 a 1980	CAPES/UFSC
GOMES, FRANCISCO LEUGENIO	2018	Dissertação	Grupo Colaborativo: desenvolvimento profissional, produção e ressignificação de saberes docentes para o ensino de geometria	CAPES

Fonte: Elaborado pela autora

Com base na primeira seleção, foram realizadas as leituras dos resumos de cada trabalho para podermos selecionar as produções correspondentes com as nossas propostas de pesquisa. Essa não foi uma tarefa fácil, uma vez que, encontramos inúmeras dificuldades para identificar os objetivos e problemas de pesquisa desses trabalhos apenas com a leitura dos resumos, assim nos direcionando a utilização de outra forma de filtragem. Com exceção da dissertação do Afonso Barbosa de Lima Junior, que apesar de estar no catálogo de teses e dissertações da Capes, o trabalho não se encontra disponível para ser acessado.

Os dez trabalhos passaram por um novo crivo de investigação, realizado a partir da leitura de cada pesquisa. Verificamos que algumas dessas não iam ao encontro do nosso objetivo ou não atendiam a uma perspectiva histórica.

Optamos em selecionar teses e dissertações que fossem ao encontro do nosso objetivo de pesquisa, que tomassem como fonte de investigação livros/manuais pedagógicos, que contemplasse a investigação a partir dos saberes profissionais, que analisassem a geometria e que atendessem a uma perspectiva histórica de pesquisa.

Quadro 10: seleção de teses e dissertações a partir da leitura das pesquisas.

TRABALHOS SELECIONADOS				
AUTOR	ANO	TIPO	TÍTULO	PORTAL/REPOSITÓRIO
MOROTO, ALINE SUEMI	2021	Dissertação	SABERES PARA ENSINAR GEOMETRIA NO ENSINO PRIMÁRIO: um estudo sobre manuais escolares produzidos por Theobaldo Miranda Santos	CAPES
FORTALEZA, FRANCISCA JANICE DOS SANTOS	2021	Tese	UMA GEOMETRIA PARA ENSINAR: elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)	CAPES/UFSC
CRUZ, EVELLIN SENA	2021	Dissertação	Saberes para ensinar geometria: manuais didáticos para ensinar matemática na década de 1930	CAPES
ESQUIVEL, MARCIO OLIVEIRA D	2019	Tese	PRIMEIRAS NOÇÕES DE GEOMETRIA PRÁTICA (1894 -1966): a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria	CAPES/UFSC

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, foram selecionadas 2 dissertações e 2 teses, totalizando 4 trabalhos defendidos entre os anos de 2019 e 2021. Posto isso, destaca-se que há poucas pesquisas utilizando-se de manuais pedagógicos para investigar o processo de produção de saberes para o ensino de geometria. Além disso, realizamos novas pesquisas nos mesmos bancos de dados em dezembro de 2024 e não encontramos novas produções que atendessem ao nosso critério de levantamento.

1.3 SÍNTESE DAS PESQUISAS LEVANTADAS

A primeira pesquisa que apresentamos, é intitulada como “Saberes para ensinar geometria no ensino primário: um estudo sobre manuais escolares produzidos por Theobaldo Miranda Santos” foi escrita por Aline Suemi Moroto e publicada no ano de 2021 como dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, tendo como pergunta de pesquisa: “Que saberes para ensinar geometria no ensino primário podem ser identificados em manuais

escolares de Teobaldo Miranda Santos publicados entre 1946 e 1960?”. Para responder esse questionamento, a autora tomou como objetivo geral: “analisar os possíveis saberes para ensinar geometria no ensino primário nos livros *Noções de Didática Especial* (1960), *Metodologia do Ensino Primário* (1952) e na série *Vamos Estudar?* do educador Theobaldo Miranda Santos”.

Para isso, a pesquisa, contou com os seguintes objetivos específicos: “Identificar a circulação de obras elaboradas pelo educador Theobaldo Miranda Santos em cursos de formação de professores do ensino primário do Mato Grosso; Analisar a explicação didático-pedagógica dos manuais pedagógicos *Noções de Didática Especial* (1960) e *Metodologia do Ensino Primário* (1952) e da série de livros didáticos *Vamos Estudar?* Elaboradas pelo educador Theobaldo Miranda Santos; caracterizar os saberes para ensinar geometria nos manuais pedagógicos *Noções de Didática Especial* (1960) e *Metodologia do Ensino Primário* (1952) de Theobaldo Miranda Santos; Verificar a presença desses saberes para ensinar geometria na série de livros didáticos *Vamos Estudar?* De Theobaldo Miranda Santos.”

No decorrer do trabalho a autora apresenta o levantamento da revisão bibliográfica, seleção dos manuais pedagógicos, contextualização histórica, fundamentação teórica e a caracterização dos saberes presentes nas obras de Santos.

Nas considerações finais, a autora discorre que a partir da revisão de literatura e da busca em documentos, foi identificado que as obras de Theobaldo Miranda Santos foram referências para a formação de professores do ensino primário, destacando que houve indícios de uso dos materiais de Santos em escolas específicas do estado de Mato Grosso. Na década de 1940 houve uma mudança no curso de formação docente, com a implementação de disciplinas de Didática Geral e Didática Especial. Tendo isso, em 1952 Santos começa a produzir seus primeiros manuais pedagógicos, *Metodologia do Ensino Primário* (utilizado para análise, a terceira edição) e *Noções de Didática Especial*.

A autora conclui que os manuais pedagógicos, *Noções de Didática Especial* (1960) e *Metodologia do Ensino Primário* (1952), além de apresentar os saberes para ensinar geometria também aborda “noções acerca de métodos pedagógicos e processos, formas, modos e materiais didáticos, além de conceitos acerca de seu objeto de trabalho, a matemática a ensinar, tais como a definição de matemática, seus métodos e valores.” (Moroto, 2021, p. 92–93). Destacando ainda, que os materiais dão uma maior atenção às abordagens para o ensino de aritmética em detrimento ao ensino de geometria, pois segundo ela, para aritmética há mais textos e sugestões.

A segunda pesquisa, intitulada como “Uma geometria para ensinar: elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)”, foi escrita por Francisca Janice

dos Santos Fortaleza e publicada no ano de 2021 como tese de doutoramento apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, vinculado ao Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, tendo como pergunta diretriz de pesquisa: “que geometria se constituiu como ferramenta de trabalho do professor que ensinou matemática em tempos de método intuitivo no Brasil?”

Para responder essa pergunta, a pesquisadora propõe o seguinte objetivo geral: “caracterizar uma geometria para ensinar a partir de manuais de Pedagogia direcionados à formação de professores dos primeiros anos escolares no Brasil entre 1870 e 1920.” Para tal propósito a autora utilizou os seguintes objetivos específicos: “Verificar a trajetória da geometria nos primeiros anos escolares no Brasil no período indicado; Averiguar a importância dos manuais de Pedagogia para constituição do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920); Discutir as orientações direcionadas para o ensino de geometria objetivadas em manuais de Pedagogia dirigidos à formação de professores dos primeiros anos escolares brasileiros (1870-1920); Sistematizar elementos de uma geometria para ensinar recompilados de diferentes manuais de Pedagogia de modo a evidenciar uma geometria para ensinar constitutiva da formação dos professores dos primeiros anos escolares que circulou no Brasil entre 1870 e 1920.”

No desenvolvimento da pesquisa, Fortaleza (2021) apontou a trajetória da geometria nos primeiros anos escolares, apresentando outras pesquisas desenvolvidas na mesma linha de estudo; definiu expressões como “saber profissional” e “geometria para ensinar”; apresentou estudos de manuais pedagógicos (fontes) e vaga pedagógica e a sistematização de uma geometria para ensinar a partir das análises dos manuais de pedagogia direcionados para a formação de professores do ensino primário.

Em suas considerações finais, a autora apresenta que a partir do método intuitivo houve uma resignificação do ensino de geometria nos primeiros anos escolares para se adequar às ideias da nova vaga pedagógica. Ainda, ao sistematizar elementos de uma geometria para ensinar, a autora aponta que a pesquisa possibilitou identificar as convergências a respeito do que o professor precisa saber para ensinar geometria por meio da análise de livros de vários autores. Diante disso, Fortaleza conclui a caracterização de uma geometria para ensinar, no período de 1870 a 1920, que na perspectiva da autora, sobressai ao uso de uma orientação para ensinar geometria que vai do concreto para o abstrato.

A terceira pesquisa intitulada como “Saberes para ensinar geometria: manuais didáticos para ensinar matemática na década de 1930” foi escrito por Evellin Sena Cruz e publicado no

ano de 2021 como dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. A pesquisa tem como pergunta norteadora: “quais saberes para ensinar geometria estiveram sistematizados em manuais didáticos direcionados aos professores do ensino primário na década de 1930?”

Com isso, para responder tal pergunta, a autora toma como único objetivo: “investigar a presença dos saberes envolvidos na prática dos professores das séries iniciais na década de 1930”. Para desenvolver essa tarefa, ela realiza o levantamento bibliográfico, destacando as considerações teórico-metodológicas, analisando manual didático destinado a professores do ensino primário e aponta os saberes profissionais para ensinar geometria.

Como resultado, a autora descreve que os manuais da década de 1930 detinham de uma pedagogia fruto da Escola Nova, no qual o objetivo era colocar o aluno no centro da aprendizagem e o professor como instrutor. No entanto, o método intuitivo se fazia presente, pois os manuais ainda orientavam os professores a trabalhar com “construções geométricas, partindo da observação, manipulação e construção, para estudar conceitos como as formas e suas propriedades. Explorar desenhos, medições, objetos e situações do cotidiano para ensinar geometria e não por demonstração lógica” (Cruz, 2021, p.46).

A pesquisadora conclui que nos manuais havia preocupações significativas dos autores para que esses materiais fossem utilizados como ferramentas de auxílio para o trabalho do professor. Desta forma, ela finaliza sua pesquisa trazendo os resultados dos saberes necessários para ensinar geometria em tempos de Escola Nova, partindo da análise de manuais didáticos.

A quarta e última pesquisa intitulada como “Primeiras noções de geometria prática (1894-1966): a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria” foi escrita por Marcio Oliveira D’Esquivel e publicada no ano de 2019 como tese de doutorado apresentada ao Departamento de Educação da Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Paulo. D’Esquivel não traça uma pergunta e objetivos para desenvolver a pesquisa, mas tem como hipótese inicial: “A proposta didática para o ensino de geometria, sistematizado no livro *Primeiras Noções de Geometria Prática* de Olavo Freire, que se apresenta como um repertório de saberes necessários à atuação profissional do professor para o ensino dessa matéria nos primeiros anos escolares”.

Para o desenvolvimento da pesquisa, o autor apresenta a internacionalização de modelos pedagógicos durante a segunda metade do século XIX, destacando o ensino de geometria nas escolas primárias, a trajetória do professor Olavo Freire, os estudos didático-pedagógicos franceses com influências no Brasil, a apresentação da obra *Primeiras Noções de Geometria*

Prática e que geometria ensinar. Dessa forma, como resultado de pesquisa, o autor apresenta que: “a tese a ser defendida por trabalho é a de que a obra assinada por Freire revela, ao longo do tempo, mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria.” (D’Esquivel, 2019, p.21).

Os trabalhos apresentados se aproximam da nossa pesquisa de maneira a contribuir com os procedimentos de análise em livros/manuais pedagógicos, e ainda, apresentam estudos relativos aos conceitos didáticos que cruzaram o período de análise de cada pesquisa. Nesse caso, Moroto (2021) tende a analisar a explicação didático-pedagógica dos manuais pedagógicos *Noções de Didática Especial (1960)* e *Metodologias do Ensino Primário (1952)*. Fortaleza (2021), também aborda conceitos como Didática Geral e Didática Especial durante as análises dos manuais, apontando que o primeiro é voltado para a apresentação de objetos de ensino, métodos e processos de ensino e o segundo trata de assuntos relacionados ao ensino das ciências nos institutos docentes, do ensino das aplicações técnicas e dos ensinamentos da língua. Sena (2021), apresenta em sua pesquisa a análise de manuais pedagógicos, sendo que alguns desses são direcionados para o entendimento de didática, e com isso, a autora busca nessas fontes as orientações para o ensino de geometria. Já D’Esquivel (2019), elenca em sua pesquisa as orientações dadas para o ensino de geometria a partir da didática francesa que se fazia presente no seu período de análise que vai de 1894 até 1966, tendo como fonte de pesquisa três edições do livro *Primeiras Noções de Geometria Prática*.

Nossa investigação vai ao encontro das ideias de pesquisa dos trabalhos supracitados, no entanto, se difere em relação à fonte de análise e período de investigação. Assim sendo, propomos analisar as orientações dadas por Muné (1969) para o ensino de cálculo e as particularidades para o ensino de geometria, o que irá nos ajudar a apontar uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar*.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA-METODOLÓGICA

A fundamentação teórica-metodológica desta dissertação parte das contribuições dos conceitos do livro *Saberes a ensinar* e *Saberes para ensinar* de Hofstetter e Schneuwly (2017) com o aprofundamento desses estudos a partir de Bertini, Moraes e Valente (2017) a respeito das hipóteses teóricas de pesquisa: *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*. Além disso, utilizamos como procedimento metodológico os quatro conceitos por nós identificados no Livro I de Metodologia e Procedimento para apontar as etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança.

2.1 SABERES A ENSINAR E PARA ENSINAR: UM RECONHECIMENTO DA PROFISSÃO DOCENTE

Ao propor dissertar sobre os saberes profissionais, nos respaldamos nos conceitos abordados pela Equipe de Pesquisa em História Social de Educação - ERHISE, da universidade de Genebra, Suíça, apresentados por Rita Hofstetter e Bernard Schneuwly (2017), ambos professores e membros do grupo. Assim, Hofstetter e Schneuwly (2017) apresentam os termos *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar*, sendo esses saberes universais e constituintes da profissão docente. Para melhor esclarecer, Hofstetter e Schneuwly (2017) definem os *saberes a ensinar* como os “objetos” do trabalho docente e os *saberes para ensinar* como as “ferramentas” do trabalho docente (2017, p.131-132). No entanto, os autores enfatizam que há uma articulação entre os saberes *a* e *para* ensinar, de modo que um está em íntima relação com o outro.

Hofstetter e Schneuwly (2017) trazem uma definição precisa sobre os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*, no qual pontuam que os *saberes a ensinar* (objeto) é “o contrato desse profissional ligando-o à instituição que o emprega e define o que deve ensinar, explicitado principalmente por planos de estudos ou currículos, por manuais, dispositivos de formação, textos prescritivos de diferentes tipos” (2017, p.132). Em que se constitui como um objeto essencial, no qual esse *saber a ensinar* é resultado de processos complexos para se tornarem ensináveis.

Já os *saberes para ensinar* (ferramenta) está associado a três movimentos, sendo que o primeiro é constituído através dos *saberes sobre o objeto* de trabalho de ensino e de formação do professor, assim dizendo “(sobre os saberes *a* ensinar e sobre o aluno, o adulto, seus

conhecimentos, seu desenvolvimento, as maneiras de aprender, etc.)”, o segundo está relacionado com as *práticas de ensino* “(métodos, procedimentos, dispositivos, escolha dos saberes a ensinar, modalidades de organização e de gestão)” e por fim, os saberes sobre a *instituição que define o seu campo de atividade profissional*, apontados por meio de “(planos de estudos, instruções, finalidades, estruturas administrativas e políticas, etc.)” (2017, p.134). Os *saberes para ensinar* são reconhecidos para trabalhar o objeto de ensino, o *saber a ensinar*.

Hofstetter e Schneuwly (2017), apresentam que esses saberes de referência devem ser *objetivados*. No qual precisam ser reconhecidos formalmente de modo a contemplar uma estabilidade à informação e uma apropriação por quem a utiliza, produzindo um processo de transmissão e comunicação desses saberes de modo a proporcionar o reconhecimento da profissão. Os saberes objetivados remetem:

A realidade com o estatuto de representações [...] dando lugar a enunciados proposicionais e sendo objeto de uma valorização social sancionada por uma atividade de transmissão-comunicação. Elas, essas representações, têm consequentemente uma existência distinta daqueles que as anunciam ou daqueles que delas se apropriam. São conserváveis, acumuláveis, apropriáveis (Barbier, 1996, p.9 apud Hofstetter; Schneuwly, 2017, p.131).

Com isso, quando nos referimos aos saberes profissionais, estamos nos direcionando aos *saberes a ensinar e saberes para ensinar*, sendo esses objetivados e característicos das profissões do ensino e da formação. (Hofstetter; Schneuwly, 2017)

Neste contexto, estudos sobre os saberes profissionais estão diretamente relacionados com os estudos de Chervel (1990), pois este atende a uma perspectiva histórica cultural a respeito dos estudos sobre a constituição das disciplinas escolares, tudo isso disposto no texto intitulado “*História das disciplinas escolares: reflexão sobre um campo de pesquisa*”. No qual, apresenta as transformações do uso do termo disciplina escolar, pois esse deixa de indicar controle de condutas/disciplinamento e passa a designar conteúdos de ensino que contemplam uma combinação de saberes e métodos, considerados importantes para a escolarização da população, que formará uma cultura que é própria da escola.

Chervel (1990), explica que os conteúdos de ensino impostos às escolas têm por caráter atender uma sociedade e a uma cultura que circunda o espaço escolar. As disciplinas escolares colocam um conteúdo a serviço de uma finalidade em que estão relacionadas com as mudanças da sociedade, ou seja, o avanço da história das disciplinas escolares depende das necessidades de evolução social.

Com base nisso, entendemos que os estudos referentes às disciplinas escolares apontam a importância para o entendimento da criação de disciplinas que moldam uma sociedade, em

especial uma sociedade em formação. Nesse sentido, enfatizamos que os historiadores da educação que buscam explorar os princípios de criação e disseminação do conhecimento na sociedade por meio da educação não devem desprezar os estudos da história das disciplinas escolares. Chervel (1990), ainda compreende que a disciplina escolar é um produto da cultura escolar, organizada conforme o propósito definido pela escola para satisfazer a finalidade dela.

Diante disso, os saberes profissionais constitutivos do ensino e da formação fazem parte de uma necessidade social, sendo que esses saberes foram objetivados e consequentemente institucionalizados para fins de ensino e de formação profissional. Por isso, as disciplinas escolares são fortes candidatas para a investigação dos saberes, pois cada uma tem particularidades intrínsecas à profissão, deste modo Chervel (1990) nos indica como foram organizados os saberes que estavam no ensino na escola. Hofstetter e Schneuwly (2017), pontuam que:

Nessa escola, o que é ensinado é objeto de um processo de modelização. Os conteúdos são pouco a pouco constituídos em matérias ou disciplinas escolares - no sentido atribuído por Chervel (1998; ver mais recentemente, ASTOLFI, 2008) - que constituem uma organização particular de saberes em função das finalidades do sistema escolar. Esta organização por si própria encarna a ideia de uma formação cuja lógica é diferente da aprendizagem cotidiana: trata-se bem de “disciplinar”, de dar acesso a novos modos de pensar, de falar e de agir, que constituem os alicerces culturais da sociedade. (Hofstetter; Schneuwly, 2017, p.118).

Diante do exposto, compreende-se que nossa pesquisa é desenvolvida a partir da análise da geometria posta no manual de Muné, no qual buscamos identificar os *saberes* que compõem o ensino da mesma.

Para uma atribuição desses termos, Valente (2017) direcionou os estudos a partir dos saberes profissionais apresentados por Hofstetter e Schneuwly (2017) para o âmbito do saber profissional do professor que ensina matemática. Assim, apresenta para o Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática - GHEMAT, ao qual Wagner Rodrigues Valente coordena, uma nova proposta de investigação que tenta responder quais são os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar* que caracterizam a profissão do professor de matemática.

Nesse ensejo, temos que os *saberes a ensinar matemática* são os saberes que advém do campo disciplinar e designam o objeto de trabalho do professor, pois o campo disciplinar passa por dinâmicas e processos complexos para se tornarem ensináveis nas escolas. Sendo assim, os *saberes a ensinar matemática* dependem da criação de disciplinas voltadas para formar o professor de matemática, pois são frutos de “diferentes campos científicos considerados importantes para a formação de professores” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 11), e são

possíveis de serem identificados nos currículos que os professores devem seguir ou normativas designadas pela instituição, mas também encontramos esse saber em manuais pedagógicos, planos de estudos e outros documentos oficiais.

Já os *saberes para ensinar* são os saberes que se encontram em todo o percurso de formação do docente, seja ela inicial ou continuada. Com isso, entendemos que o *saber para ensinar* é composto do saber disciplinar matemático (*saber a ensinar*), ou seja, de todos os saberes disciplinares a respeito do ensino e da formação docente que o professor de matemática recebe. Além disso, está relacionado com as práticas de ensino e com as instituições a partir de normativas dadas ao docente (Hofstetter; Schneuwly, 2017). Assim, afirma-se que esse saber é característico da profissão do professor, uma vez que pontua saberes específicos para que o docente desenvolva o seu trabalho, pois esses *saberes para ensinar* matemática são as ferramentas de trabalho do professor. (Bertini; Moraes; Valente, 2017).

2.2 A MATEMÁTICA A ENSINAR E A MATEMÁTICA PARA ENSINAR

Novas reformulações e ampliações se revigoraram quanto à natureza dos saberes. Bertini, Moraes e Valente (2017) cunham uma nova hipótese teórica de pesquisa que compreende como os saberes específicos do professor que ensina matemática, a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*.

Com isso, definem que “a ‘matemática para ensinar’ refere-se à objetivação de um saber matemático [...]. Tal saber já contém, na sua própria caracterização, concepções de ensino, de aprendizagem, do papel da escola num dado tempo histórico, etc.” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p.68). Assim, a *matemática para ensinar* é o resultado já objetivado da articulação com os *saberes para ensinar matemática* e a *matemática a ensinar*. (Bertini; Moraes; Valente, 2017).

Entendemos que nessa publicação, Bertini, Moraes e Valente (2017), se debruçam sobre as categorias teóricas de pesquisa (*matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*) dando uma maior atenção ao termo *para*. Observamos que isso acontece devido ao estudo do conceito de *matemática para ensinar* ser uma das categorias teóricas de pesquisa que podem nos mostrar as possíveis transformações dos saberes profissionais do professor de matemática. Valente (2020) salienta que “analisamos as relações mantidas entre essa matemática e aquela a que o professor foi formado, tendo em vista um saber a constituir-se como ferramenta para a atividade docente” (Valente, 2020, p. 167).

Em outro trabalho, para um melhor esclarecimento dos termos, Valente redigiu que “[...] entende a *matemática a ensinar* como um saber advindo do campo matemático, reunindo uma

gama de conteúdos que devem ser aprendidos por aqueles que estão em processo de formação” (Valente, 2019, p.53). No entanto, essa matemática passa por transformações, pois é “derivada originalmente do campo disciplinar matemático, mas sujeita às finalidades da escola, passando por processos complexos até constituir-se como objeto do ensino, organizada na forma de matérias ou disciplinas escolares.” (Valente, 2020, p. 204). Assim, como o “Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Vetores e Geometria, etc., são exemplos da “matemática a ensinar” que compõem a formação do licenciado em matemática.” (Valente, 2017, p. 215).

Todavia, esses *saberes a ensinar e para ensinar* dependem do período investigado, pois para cada momento histórico são apresentadas novas reformulações direcionando quais disciplinas deverão fazer parte do currículo do aluno e da formação do professor. Existe uma *matemática a ensinar e para ensinar* em cada momento histórico, sabe-se que a matemática não é invariante, mas o entendimento dos seus saberes produzidos se altera ao longo do tempo.

Já a *matemática para ensinar* advém de um saber específico do professor de matemática, uma ferramenta de trabalho, que se articula com a *matemática a ensinar*, sendo esse o objeto. Assim, esses saberes não garantem autonomia por si só, ao possuírem uma relação de dependência entre si. (Valente, 2019). Essa relação de dependência entre os saberes favorece a condensação de saberes, pois “a ‘matemática para ensinar’ refere-se à objetivação de um saber matemático” (Bertini; Moraes; Valente, 2017, p. 68),

Portanto, de acordo com Bertini, Moraes e Valente (2017) e Valente (2019), a *matemática a ensinar e a matemática para ensinar* contribui para o entendimento da composição dos saberes profissionais do professor de matemática, facilitando para a compreensão do “movimento de produção e transformação de saberes profissionais.”

Apesar dos termos *saberes a ensinar, saberes para ensinar, matemática a ensinar e matemática para ensinar* serem parecidos, eles não são sinônimos um do outro. Além disso, esses conceitos se constituem como hipótese teórica de pesquisa, ou seja, não estão postos nos materiais de análise, eles precisam ser interpretados e caracterizados para alcançarem posição de objetos de pesquisa (Bertini; Moraes; Valente, 2017). Esses referenciais apresentados a partir dos estudos de pesquisadores do GHEMAT estão diretamente relacionados com os conceitos dos saberes profissionais abordados por Hofstetter e Schneuwly (2017). Assim, todos eles apresentam o mesmo caráter de identificação e de construção do saber profissional, em especial, para esta pesquisa, a construção do saber profissional do professor de matemática.

2.3 ETAPAS DO PROCESSO DE AQUISIÇÃO DO CONHECIMENTO PELA CRIANÇA.

Ao analisar o Livro I, identificamos etapas que estruturam uma sequência de como a criança adquire o conhecimento. A partir disso, criamos uma categoria de análise, desse modo, tomamos como referência a elaboração de quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança defendida por Muné ao orientar didaticamente o professor, que também foram apontados por Cabral (2014), por Santos e Mendes (2023) e identificados por nós na análise do Livro I, *Metodologia y Procedimiento*. Cabral (2014), identifica as etapas a partir do livro de edição de 1961 e que naquele tempo foi denominado por ele de *manipulação*, *figuração esquemática*, *figuração aritmética*, *automatismo* e *exploração*. Santos e Mendes (2023), identificam essas mesmas etapas.

Em nossa pesquisa, identificamos quatro etapas e as denominamos de: *observação e manipulação*; *desenhos*; *representação aritmética*; *problemas e exercícios*. Assim, utilizaremos essas categorias para identificar as produções de saberes.

Para a ***Observação e Manipulação*** identificamos no livro em análise a importância de explorar os sentidos para que se possa “obter sucesso” durante o desenvolvimento de qualquer tipo de atividade. Com isso, a criança precisa tocar (manipular), se aproximar dos objetos para identificar detalhes (observação), pois a didática de Muné (1969) se dá por meio de um *procedimento ativo* no qual a criança participa ativamente, sendo a participação também iniciada por meio da manipulação. Segundo o autor, esse processo auxilia a criança a compreender melhor o objeto e suas complexidades. Destarte, ao desenvolver esses sentidos durante as atividades de matemática, melhor se tornará a percepção da criança

Desenhos é um mecanismo que utiliza uma representação ou estruturação para dar suporte ao raciocínio da criança, de modo a dispor para ilustrar componentes simples e complexos, no qual muito se explora o saber intuitivo da criança. Segundo Muné (1969), os desenhos ou esquemas auxiliam a criança a atingir a abstração a partir do momento em que ela deixa de utilizar os desenhos para representar uma ideia.

Existem duas direções no uso do desenho no cálculo: a direção direta, ou observação das realidades que o educador apresenta através do desenho, e a inversa, ou representação pela criança das realidades ou relações que ela interpretou conceitualmente sobre um problema ou qualquer questão que seja proposta [...] Na Geometria, o desenho tem especial interesse, sendo um substituto aceitável para realidade, e às vezes superior a ela, pois nem sempre o corpo nos permite apreciar certas propriedades e relacionamentos claramente. O interessante é interpretar representação, especialmente quando são estereográficas (Muné, 1969, p. 26-27, tradução nossa).

Essa etapa ajuda a traduzir o conhecimento da criança, uma vez que é realizada a representação desse conhecimento, esse tipo de representação pode vir da intuição e explora o conhecimento prévio da criança. Pode ser realizada por meio de uma relação ou comparação de informações, é o momento em que a representação opera com informações da realidade.

A **Representação Aritmética** é o processo que a criança irá desenvolver a habilidade de deduzir fórmulas e de usar números e suas propriedades para esquematizar raciocínios lógicos, desde sua composição a raciocínios que vão do fácil para o difícil. Assim,

A matemática tem um procedimento genuíno: o chamado procedimento especialmente temático, cujos pilares fundamentais são: existência de realidades, possível tradução delas em quantidade matemática, em número e em extensão [...] Não esqueça que o número é uma categoria de coisas, sendo intrinsecamente a base e fonte de interesse primário (Muné, 1969, p. 16, tradução nossa).

A representação aritmética também se dá de modo a passar a ideia de quantidade sem apresentar valores numéricos. Nesse sentido, as etapas de observação, manipulação e desenhos são uma preparação para a inserção da ideia de quantidade e por conseguinte dos números, uma vez que o processo é gradativo e segue uma linha de relação entre os conteúdos.

A etapa **Exercícios e Problemas** é estágio de prática, na qual a criança exercita por meio da resolução de exercícios e problemas, sendo esse o último processo a ser desenvolvido pela criança.

O aspecto biogenético da Didática exige a esta aprendizagem uma série de exercícios de evolução do conhecimento, imediatamente relacionados, cada um determinando o próximo. O conceito de soma requer séries de exercícios para alcançar a generalização. Resolver um problema complexo não é fácil, às vezes, sem a precedência de uma série de problemas relacionados, levando ao conhecimento ordenado das relações governantes desse problema complexo (Muné, 1969, p. 12, tradução nossa).

Os exercícios podem ser explorados a partir dos assuntos apresentados, seja para fazer a criança realizar atividades de manipulação e observação, para fazer desenhos ou aprimorar conceitos a partir de exercícios propostos. Ainda, Muné orienta que o docente deve propor variados exercícios e problemas que possam tomar soluções diferenciadas, de modo a desenvolver outros tipos de raciocínios e por sua vez contribuir com a evolução do conhecimento por meio de uma série de resolução de exercícios e problemas. Assim, não permitindo que a criança caia no automatismo e fique limitada a resolver um único tipo de exercício ou problema.

Entende-se a partir de Muné que o processo de aquisição do conhecimento pela criança deve seguir as etapas de forma sequencial e bem construídas, mesmo que isso demande mais

tempo de trabalho. Por esse motivo, no Livro I, *Metodologia y Procedimiento*, ele orienta que o professor não deve se prender à questão do tempo.

Perante o exposto, a categoria de análise composta pelas quatro etapas de aquisição do conhecimento pela criança servirá como filtro para o desenvolvimento do objetivo desta pesquisa, que se volta à análise dos saberes profissionais do professor que ensina matemática. Dessa maneira, intencionamos apontar uma *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* atribuídas ao professor a partir do método de Muné, mediante a identificação das quatro etapas durante o ensino de geometria.

CAPÍTULO 3

CONTEXTUALIZANDO O LIVRO DIDÁCTICA DEL CÁLCULO

O livro em análise teve sua primeira edição publicada em 1960, sendo a publicação de 1969 a terceira edição. No entanto, para melhor detalhar o contexto político, social e econômico em que foi editada a obra de José Junquera Muné, apresentaremos os fatos que circundaram a publicação dessa obra, na sua terceira edição.

Em relação ao contexto político na Espanha, muitos professores foram interrompidos nas suas produções de livros e materiais didáticos devido à guerra civil que iniciou em 18 de julho de 1936 com o golpe garantido pela força militar e apoiados pela extrema direita. Com isso, o então ditador Francisco Franco conquistou a vitória no ano de 1939 governando até o ano de 1975, nesse período, garantiu o início de um novo regime, uma nova era, e junto a isso alavancando transformações para a educação no país. (Rolim Capelato, 2009).

(Idem) A educação foi a ponte necessária para reconstruir a sociedade após o final da guerra civil. Por consequência, vale ressaltar que os livros didáticos tinham forte influência religiosa com a proposta de reeducar as crianças, pois essas seriam o futuro do país, formando cidadãos obedientes a Deus, à pátria e ao seu governante, Francisco Franco. Os livros didáticos tinham o papel de impor imagens e ideias que conduzissem os jovens a entender e a obedecer ao ideário político.

Diante dessas padronizações do material didático, temos que o livro *Didáctica del Cálculo* (1969), não seguia essa forma de apresentação, mesmo sendo um manual para o professor. Em face do material, observamos que Muné não se preocupou em utilizar a sua obra como veículo de doutrinação para seguir os padrões do período.

Como a ideologia de purificação objetivava acabar com o que era “dito” como impuro, gerava a intolerância. Essa inflexibilidade era fortemente propagada nos livros, na escola e em outros meios nos quais as pessoas viviam. Então, tudo que era contrário às ideologias sociais do período franquista era visto como impuro e deveria ser eliminado. (Rolim Capelato, 2009).

Ainda de acordo com essa autora, o governo franquista era baseado em uma política autoritária e controladora que pregava a religião acima de tudo e que, por meio desse ideário religioso contagiava pessoas que comungavam da mesma opinião. Esses grupos auxiliavam o atual governante a ter o controle da educação, da comunicação, da produção cultural e do poder.

Para além disso, no período franquista a maioria dos autores que produziram livros didáticos eram inspetores do ensino primário, e por esse motivo, a produção desses materiais

passavam pelo Conselho Nacional de Educação, para receber autorização de utilidade pública nas escolas (Rolim Capelato, 2009). Nesse sentido, observa-se que o fato de Muné ter sido inspetor de ensino primário pode ter favorecido a publicação e a circulação da obra.

Diante disso, seguindo a perspectiva histórica desta pesquisa, entendemos a necessidade de identificarmos as ideias pedagógicas que se fizeram presentes em meio ao contexto histórico do livro *Didática del Cálculo* (1969). Assim, compreende-se que a partir da data da publicação do livro, ele se encontrava em um período de transições entre vagas pedagógicas. Sendo essa mudança de vagas as definidas a seguir: a Escola Nova (meados da década de 1932) que carregava consigo traços do Método Intuitivo (anterior a Escola Nova) e o Movimento da Matemática Moderna - MMM que na Espanha foi identificado como Matemática Moderna - MM que foi iniciada com a propagação dessa ideia em meados dos anos 1960, por meio da publicação de vários números da revista *Vida Escolar*⁵.

O Método Intuitivo atendia as ideologias de Pestalozzi, pois seguiam princípios que avançavam “do conhecido para o desconhecido, do concreto para o abstrato, da visão intuitiva para a compreensão geral” (Zanatta, 2012, p.106), a autora aponta ainda que, Herbart influenciado por Pestalozzi defendia uma pedagogia intuitiva e tinha como base oferecer aos professores métodos para desenvolver a sua prática.

Sobre o Método Intuitivo, Valente (2017.b) e Valdemarin (2006), discorrem que o Método Intuitivo iniciou em âmbito internacional nos anos de 1880 a partir da contracultura pedagógica estabelecidas por estudiosos como Froebel, Pestalozzi e Rousseau que buscavam um ensino que favorecesse a experiência dos sentidos a partir da intuição. Esses estudiosos, eram contra o ensino voltado para memorização. A psicologia da época adverte que “é necessário seguir o desenvolvimento do aluno, na sua ordem natural, para que o ensino possa ser eficiente e essa ordem natural aponta para a intuição sensível da criança. É preciso considerar que a primeira forma de conhecimento é intuitiva” (Valente, 2017.b, p. 601). Dessa forma, para o Método Intuitivo o ensino deveria iniciar a partir do concreto, evitando a abstração.

Por outro lado, a Escola Nova seguia as ideias de Dewey que se dedicava a defender o método de ensino voltado para o pensamento reflexivo operando a partir dos interesses da criança (Zanatta, 2012). O método Escola Nova propagou-se na Europa e nos Estados Unidos por volta do ano de 1932, e no Brasil com o movimento conhecido como manifesto dos

⁵ Para saber mais ler ASTUDILLO, M. T. G. La transición hacia la matemática moderna en España: la revista Vida Escolar. Revista Diálogo Educativo, v. 8, n. 25, p. 615-631, 2008.

pioneiros da educação nova, a partir das ideias filosóficas e pedagógicas do norte-americano John Dewey. Esse movimento de renovação do ensino, foi também identificado como Escola Ativa ou escolanovista. Para esse tempo a proposta de reforma pedagógica estava em busca de uma educação social progressista. (Bevilaqua, 2014).

Deste modo, pode-se afirmar que ideias de Muné convergem para as ideias dos métodos aqui apresentados. Para melhor entendimento apresentaremos a seguir um quadro comparativo entre os pressupostos de Pestalozzi, Herbart e Dewey, sendo que os dois últimos foram influenciados pelas ideias de Pestalozzi.

Figura 1: Quadro comparativo entre os pressupostos de Pestalozzi, Herbart e Dewey

PRESSUPOSTOS		
PESTALOZZI	HERBART	DEWEY
Finalidade da educação: cultivo da mente, do sentimento e do caráter	Finalidade da educação: formar o cidadão do futuro	Finalidade da educação: mais educação
Centro: o professor	Centro: o professor	Centro: o aluno, o professor apenas guia
Ensino: promoção da percepção das coisas, dos objetos naturais, por meio do contato direto e da intuição	Ensino: predeterminado	Ensino: descoberta que ocorre ao final
Conhecimento: organização das percepções sensoriais obtidas na relação com as coisas	Generalização: é retrospectiva, visa ilustrar o conteúdo	Hipótese: é prospectiva e visa colocar o conteúdo à prova
Aprender: processo espontâneo, atividade livre	O novo é novo apenas para o aluno	O novo pode ser novo também para o professor
O mundo é a natureza; deve ser percebida e, desse modo, conhecida	Não distingue conhecimento e informação	Antes da aprendizagem, há apenas informação; a ação dos alunos sobre ela a transforma em conhecimento
	Aprender: desvendar a verdade; conceituar; definir e classificar.	Aprender: reconstruir a experiência identificando o melhor modo de aprender
	O mundo é um sistema consumado, não há novidade, e sim desconhecimento, ignorância	O mundo é um sistema aberto, indeterminado, passível de novidade genuína
MÉTODO DE ENSINO		
PESTALOZZI	HERBART	DEWEY
Do conhecido ao desconhecido, do concreto ao abstrato, do particular ao geral, da visão intuitiva à compreensão geral	Preparação: recordação, pelo professor, de algo já sabido	Atividade: utilização de algo que a criança já tem interesse em fazer
Promover a associação entre os elementos das coisas, dos objetos	Apresentação: o professor apresenta a nova matéria	Problema: os alunos identificam problemas que requerem certo conhecimento para serem resolvidos
Fazer com que cada aluno reúna, organize num todo, os pontos de vista alcançados	Assimilação: comparação com a matéria antiga	Dados: busca de informações que permitam prosseguir
	Generalização: apresentação, pelo professor, de exemplos, casos semelhantes	Hipótese: com os dados, os alunos fazem previsão de resultados
	Aplicação: aplicação do aprendido por meio de tarefas	Experimentação: teste da hipótese e confirmação ou não do previsto

Fonte: Zanatta, 2012

Nesse sentido, Zanatta (2012), a partir de sua análise, nos ajuda a entender que as ideias de ensino que se revigoram em um determinado período histórico-social acabam se mesclando, além do mais, a partir do quadro produzido pela autora podemos identificar reflexos na metodologia defendida por Muné (1969). Adorno e Miguel (2020, p. 8) afirmam que “O método e a Pedagogia de Pestalozzi podem ter influenciado a Pedagogia da Escola Nova”, desse modo, a partir do quadro de Zanatta (2012) percebe-se a reverberação das propostas pedagógicas do método da escola nova na didática elaborada por Muné.

Ainda, Adorno e Miguel (2020, p.9), discorrem que “outras relações que podem ser estabelecidas entre a pedagogia de Pestalozzi e a Pedagogia da Escola Nova são as obras de Claparède”. Édouard Claparède foi um médico, neurologista e psicólogo que ficou conhecido pelos seus estudos sobre a psicologia infantil. Diante disso, Claparède tomou Pestalozzi como espelho. Sendo que é por meio dessas circunstâncias que:

O método intuitivo e a Pedagogia da Escola Nova dialogam no sentido de dividir alguns conceitos básicos como o protagonismo da criança, o interesse pelo desenvolvimento infantil e a valorização de aspectos psicobiológicos. Deixam, dessa forma, clara a influência de teóricos que beberam nas fontes de Pestalozzi, quer no sentido da democratização da educação, quer em relação à construção de bases psicológicas para nortear o trabalho pedagógico (Adorno; Miguel, 2020, p. 10).

Assim como Claparède, Piaget em meados dos anos 1967, movido pela corrente teórico-metodológica construtivista, proporcionou estudos sobre como a criança aprende. Segundo Piaget (2010), o ensino construtivista era definido entre a relação do homem com o meio social e meio físico, sendo que isso conduziria a criança a ser protagonista de sua aprendizagem, tornando-a um sujeito ativo.

Dewey e Decroly (Escola Nova) também eram favoráveis à exploração do meio social e físico como metodologia de aprendizagem. Para essa mesma abordagem Piaget justifica que “os alunos ficam livres para trabalharem entre si, e colaborar na pesquisa intelectual tanto quanto no estabelecimento de uma disciplina moral; esse trabalho em equipe e esse *self-government* tornam-se essenciais, na prática da escola ativa” (Piaget, 2010, p. 103). A escola ativa, também denominada de Escola Nova, é uma vaga pedagógica que se fundamenta a partir de pensadores como Piaget. Diante disso, Piaget discorre que:

Uma escola ativa não é necessariamente uma escola de trabalhos manuais e que, se, em certos níveis, a atividade da criança implica uma manipulação de objetos e mesmo um certo número de tateios materiais, por exemplo, na medida em que as noções lógico-matemáticas elementares são tiradas, não desses objetos, mas das ações dos sujeitos e de suas coordenações, noutros níveis a atividade mais autêntica de pesquisa pode manifestar-se no plano da reflexão, da abstração mais avançada e de

manipulação verbais, posto que sejam espontâneas e não impostas com o risco de permanecerem parcialmente incompreendidas (Piaget, 2010, p. 90).

Esse desenlace remete aos estudos de Piaget sobre o estágio de desenvolvimento do pensamento da criança, ao defini-los conforme a idade. Piaget os apresentam como: sensório-motora de 0 a 2 anos, que desenvolve a fase reflexa (0 a 1 mês), reações circulares primárias (1 a 4 meses), reações circulares secundárias (4 a 8 meses), coordenação dos esquemas secundários (8 a 12 meses), reações circulares terciárias (12 a 18 meses) e esquema simbólico (18 a 24 meses) aprendendo por meio de reflexos, sensações e movimentos; intuitivo-simbólico de 2 a 6-7 anos, que se desenvolve por meio do realismo nominal, realidade e fantasia ao associar nomes com objetos mesmo que seja distorcidamente, desenvolve os símbolos e os signos por meio da representação, sendo esse estágio uma transição entre a inteligência sensório-motora para a intuitivo-simbólico; operatório concreto de 7 a 11 anos, quando é desenvolvida a atividade cognitiva se dando de forma operatória em que a criança consegue interpretar representações e representar uma ação e operatório formal a partir dos 12 anos, em que a criança passa a formular hipóteses e a utilizar o pensamento lógico e o abstrato.

Muné parece dispor dessa ideia ao estruturar seu material em estágios de trabalho didático e definir quando iniciar o ensino de geometria com as crianças (a partir do segundo estágio de aritmética). Além disso, pode-se inferir que essa atitude pode também estar associada a uma pré-determinação de faixa etária na qual a criança deve estar para compreender o que será ensinado e como isso será ensinado. No entanto, Muné omite essa informação, não detalhando qual faixa etária se enquadra para cada estágio a ser desenvolvido, mas apenas sinaliza que o material é destinado para o ensino primário.

Da mesma forma como o método de Piaget, o método montessoriano idealizado pela médica italiana Maria Montessori em meados de 1907, também valoriza a construção do conhecimento a partir da experiência, de modo a explorar o conhecimento prévio da criança e como ela interage com o meio. Mas, está em desacordo em alguns aspectos, no qual o próprio Piaget estabelece a divergência ao condenar o uso de materiais padronizados sem que a criança possa construí-lo. Giordani (2000), discorre que:

Percebe-se que Piaget, apesar de considerar os fundamentos da pedagogia montessoriana bem formulados, concebe que estes devam ser aplicados, em termos de práticas pedagógicas, de forma diferenciada. Além disso, Piaget defende que a educação sensorial não significa necessariamente manipulação dos objetos, pois para ele, esta deve ser tratada no âmbito da formação da inteligência do sujeito. (Giordani, 2000, p. 5)

Nesse ínterim, podemos dizer que os movimentos passaram por transformações, mas ainda carregavam vestígios de métodos anteriores. Em que pensadores tomam estudos antigos como base para fortalecer ou aprimorar novas ideologias. Assim, a identificação de traços específicos de um determinado método nos leva a inferir uma vaga pedagógica. Percebemos que as ideologias defendidas por pensadores da psicopedagogia, e que influenciaram na elaboração dos princípios de vagas pedagógicas convergem em alguns pontos, ao abordar o processo de construção da aprendizagem como sendo ativo, por meio de relações com o meio, colocando o educando como protagonista da aprendizagem e utilizando materiais concretos como facilitador.

Tudo isso diante de uma estruturação da forma como se dá a construção do conhecimento da criança, sendo delimitadas por meio de etapas ou estágios. Vemos isso, presente nas ideologias de Pestalozzi, Piaget, Montessori, Clapared, Dewey, Declory, que tiveram suas ideias defendidas e aplicadas em períodos diferentes, mas que convergem em alguns pontos. Entende-se que as ideologias desses autores perpassavam pelas vagas do método intuitivo e Escola Nova, pois Piaget e Montessori também foram influenciados por outros estudiosos.

Destarte, podemos dizer que tanto o método intuitivo quanto o método da Escola Nova não apresentam um único pensador responsável fundador das ideologias, mas que elas refletiam entre eles.

Seguindo o contexto, em meio à ditadura Franquista, outro movimento a ser considerando, são as ideologias da MM ou MMM, como foi identificado no Brasil, que pela data de publicação do livro analisado nesta pesquisa já vinha se instaurando na Espanha. De acordo com Claras e Pinto (2008), o MMM em um contexto mundial teve como pano de fundo as disputas da Guerra Fria que foi um período ideológico e de grandes conflitos econômicos e sociais proporcionados pelos EUA e União das Repúblicas Socialistas Soviéticas - URSS. Porém, em cada país o MM foi se constituindo de formas distintas, mas com o mesmo objetivo de estruturar o ensino de matemática para ascender a globalização.

Posto isso, constituindo uma matemática das estruturas que foram baseados a partir dos estudos de Piaget. O MMM ou MM era adepto ao estruturalismo, pois para os estudiosos do período, esse é um método eficaz para sequenciar a forma de apresentação dos saberes para as crianças. No Brasil, o método foi difundido por pesquisadores e professores a favor das ideias das estruturas, como, por exemplo, Euclides Roxo (Professor e diretor do colégio Dom Pedro II) e Osvaldo Sangiorgi (Professor e escritor de livros didáticos). A aplicação se deu na forma

de organização das áreas de aritmética, geometria e álgebra, constituindo a disciplina de matemática, além disso, o estruturalismo também se aplicava na apresentação dos conteúdos (Valente, 2016).

A busca por desenvolvimento global, fez com que os chefes de governo pensassem sobre o sistema educacional no país, assim se voltado para uma modernização da matemática, uma ciência promissora para alcançar os avanços científicos. O MM chegou em períodos distintos em vários países, nesse caso, na Espanha as ideias já circulavam antes mesmo da oficialização que ocorreu no ano de 1970 a partir da Lei Geral de Educação-LGE. Diante disso, artigos e revistas passaram a dar início às discussões sobre MM, de modo a preparar os educadores para as mudanças que estavam por vir.

A revista pedagógica *Vida Escolar* seguia com publicações regularmente, que chegavam a todas as escolas da Espanha, de forma gratuita e mensal. Tinha o papel de divulgar informações a respeito das mudanças pedagógicas que estavam ocorrendo no ensino, incentivando a adoção das novas práticas pelas escolas e professores. Em publicações realizadas no período de 1960 a 1963 (seis anos antes do nosso ano de investigação) foram encontrados vinte e cinco números que tratavam de assuntos para a matemática. Esses números compunham artigos que tinham a intenção de informar como o professor deveria apresentar um determinado conceito e orientações para o desenvolvimento de exercícios pelos alunos, sendo que alguns desses artigos seguiam uma explicação extensa sobre a teoria dos conjuntos. (Astudillo, 2008).

Ao refletir sobre a obra de Muné, identificamos que o livro apresenta as mesmas intencionalidades, de instruir o professor com orientações de como desenvolver o cálculo com as crianças. Além disso, a partir de Astudillo (2008) identificamos que a Revista *Vida Escolar* se preocupava em apresentar orientações aos professores com extensas explicações, que na nossa perspectiva, dá a entender que essa ação parecia ser uma prática comum nesse tempo.

A partir do exposto, podemos identificar os reflexos das ideias de Muné em ambas as vagas ao discorrer em seu livro sobre o *aspecto específico do método didático* que prioriza a atividade de pensar a partir do próprio entendimento da criança, de modo que ela possa construir o seu próprio raciocínio. Esse processo é garantido por meio de um *procedimento ativo* no qual a criança forja suas ideias com base na realidade. Ainda, na geometria o autor instrui o professor a iniciar com os conceitos básicos de geometria tomando como ponto de partida o que a criança já conhece, sempre trabalhando com o real para depois se chegar ao abstrato por meio do processo de abstração.

Diante dos esclarecimentos, também elegemos a teoria construtivista reconhecida a partir de Piaget e o método estruturalista como sendo uma possível influência para Muné perante o livro *Didáctica del Cálculo* (1969), pois assim como Piaget, Muné se mostra estruturalista quando segue uma ordem na apresentação dos assuntos que vai do mais simples para o mais complexo. Essa forma de trabalho também vai ao encontro com a teoria do construtivismo, quando Muné ratifica a necessidade do uso de materiais para trabalhar com a observação e a manipulação (sentidos) de modo a explorar o conhecimento prévio da criança, tendo ela como protagonista da construção do seu conhecimento.

Assim, afirma-se que esse contexto em torno do ano de 1969 destaca a forma de política vigente e a ascensão do percurso das ideias iniciais do MM que foram inseridas no ensino primário da Espanha paulatinamente. A omissão de informações por parte do autor, nos fez pesquisar sobre as possíveis influências pedagógicas alinhadas ao contexto em que Muné estava inserido e que poderiam ter influenciado na produção do livro.

Em decorrência do livro ser uma terceira edição, a obra possivelmente ainda carrega ideologias da primeira. Talvez isso justifique o fato do livro não se mostrar fiel às ideias que reverberavam no ano em questão (1969), pois a obra apresenta nuances de métodos que hora se estende entre o método intuitivo da pedagogia intuitiva e hora da pedagogia científica da Escola Nova, talvez pelo fato do livro se encontrar em um período de transição entre os acontecimentos e a guerra estabelecida na Espanha.

Em síntese, podemos inferir que a didática de Muné é elaborada a partir de vários pressupostos didáticos e pedagógicos, por isso, esse contexto histórico nos permite suscitar métodos pedagógicos como: o método intuitivo e o método da Escola Nova, como sendo possíveis influências para o autor na produção do seu livro.

3.1 PERCURSO PROFISSIONAL DE JOSÉ JUNQUERA MUNÉ

De acordo com Baqué (2009), José Junquera Muné nasceu em Girona, província da Espanha, região norte da Catalunha, em 1895. Estudou e formou como professor Bacharel na *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio - EESM*, atuou como professor normalista e se tornou inspetor de ensino de Girona em 1936, sendo ele o primeiro inspetor de educação da cidade. Além disso, Muné atuou em conferências e palestras pedagógicas, foi tradutor e adaptador adjunto com F. Payarols do livro de Geografia, História e Educação Cívica de F. Schnass. Em 1939 Francisco Franco nomeou Muné como Inspetor Chefe de Barcelona sendo esse cargo ocupado por ele até 1965, ano de sua aposentadoria.

Além do livro utilizado para a produção desta pesquisa, Muné identifica nas páginas finais de *Metodologia y Procedimiento* outra produção intitulada como *Pedagogia del Cálculo* (1936). De acordo com Silva (2005), Muné também escreveu a obra *Pedagogia Cálculo Aritmético*. Costa e Mendes (2023) descrevem que Muné produziu as seguintes obras intituladas como: *Natura* (1930), *La Estrella: iniciación a la lectura*. 12ª ed. (1940), *El Museo Pedagógico y su Contribución a la Formación del Maestro* (1950), *Estado de Desplazamiento en el escolar* - *Revista Española de Pedagogía* (1965).

Sendo que, todas essas produções, mencionadas no parágrafo anterior, eram voltadas para a formação do professor, ainda, destaca-se que o livro *Pedagogia del Cálculo* (1936) foi publicado em meio a Guerra Civil na Espanha (1936 - 1939), de acordo com Costa e Mendes (2023), esse era um “período em que muitos livros nem saíam das editoras”.

Ademais, Costa e Mendes (2023), salientam que na *Revista de Educacion* publicada sob o nº 74 em 1958 apresenta uma listagem identificada como “Biografía pedagógica española” a respeito dos livros indicados para professores da época na seção *El educador: formacion del Maestro*, assim foi apresentada a obra *El Museo Pedagógico y su contribución a la formación del maestro* (1950). Além disso, Silva (2005) apresenta em sua tese uma listagem de livros indicados pelos manuais portugueses entre os anos de 1941 a 1970, o livro *Pedagogia del Cálculo* e *Pedagogia del Cálculo Aritmético* são apresentados na referida lista.

Por conseguinte, essas informações nos permitem inferir que as produções de José Junquera Muné circularam como materiais indicados para a formação de professores daquela época. Já no Brasil, uma produção realizada pela Secretaria de Estado de Educação de São Paulo, em conjunto com coordenadoria de estudos e normas pedagógicas, intitulada como *Experiências Matemáticas* que teve publicações específicas para 5ª a 8ª séries (1994), trouxeram nas referências bibliográficas a obra de Muné, *Didáctica del Cálculo* edição de 1969. Isso nos leva a suscitar que o manual pode ter circulado no Brasil a partir das mãos de estudiosos e investigadores da educação, mas que não chegou a difundir suas ideias de modo a impactar outras produções.

CAPÍTULO 4

A MATEMÁTICA A ENSINAR E A MATEMÁTICA PARA ENSINAR A PARTIR DO LIVRO DIDÁCTICA DEL CÁLCULO

Neste capítulo abordaremos a análise descritiva do livro, apontando as suas características e o que o compõe, as dedicações do autor, uma descrição comentada sobre o Livro I de *Metodologia e Procedimiento* e por fim a análise do Livro III de *Didáctica del Geometría*, no qual intencionamos identificar as quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança, em conexão com a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*.

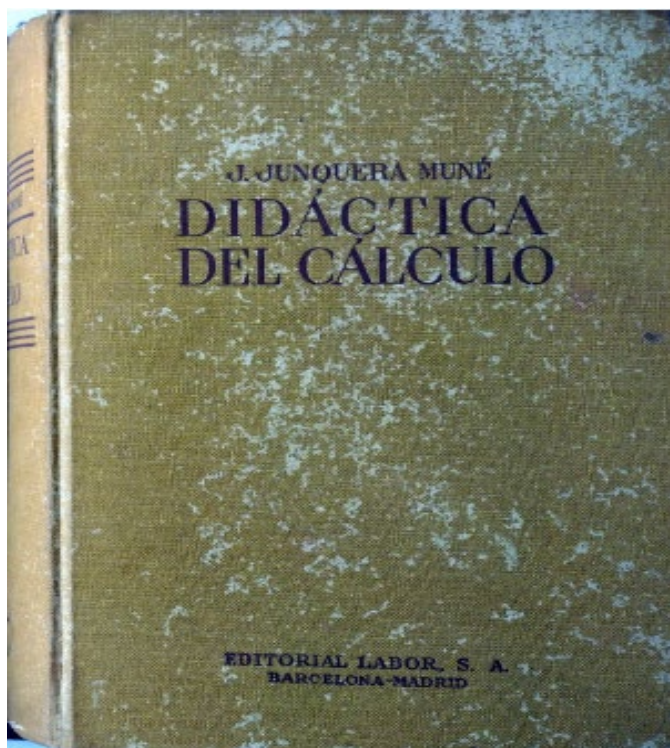
4.1 CARACTERIZAÇÃO DO LIVRO

Em uma análise de livro didático devemos investigar para além das questões pedagógicas e didáticas, Alain Choppin (2004), diz que é fundamental que realizemos uma análise das características desse material, pois ainda nos anos de 1990 os pesquisadores valorizavam as questões pedagógicas ao invés do próprio livro:

Outros elementos, até mais reveladores das intenções ideológicas ou pedagógicas dos autores, como as notas de rodapé, os resumos, a formulação dos títulos e subtítulos dos capítulos, os sumários, o léxico, os índices ou, simplesmente, o próprio título dos livros mereceria ser estudados com mais cuidado. (Choppin, 2004, p. 559).

A partir disso, nos debruçamos sobre o objeto de estudo de modo a discorrer sobre a descrição desse material, o livro *Didáctica del Cálculo* (1969) escrito por José Junquera Muné teve três edições, sendo a primeira publicada em 1960, a segunda em 1966 e a terceira em 1969. No entanto, o nosso material de pesquisa é da edição de 1969 publicado pela Editorial Labor S. A. com sede em Barcelona, Madrid, Buenos Aires, Bogotá, Caracas, Lisboa, Rio de Janeiro, Mexico e Montevideo. O livro foi impresso na Espanha na cidade de Barcelona e é composto por 775 páginas.

Figura 2: Capa do livro Didáctica del Cálculo



Fonte: acervo pessoal da pesquisadora

O livro impresso em capa dura contém folha de rosto que exhibe uma pequena apresentação do autor, na qual descreve que José Junquera Muné é professor normal na seção de Ciências, inspetor de ensino primário e professor de didática na universidade de Barcelona. Ainda, na folha de rosto, é informado que o material conta “*Con numerosos ejemplos gráficos*”, o autor traz uma seção intitulada “*A quien aplique nuestro método*”, na qual discorre sobre a justificativa pela qual ele produziu esse material.

No “*Índice de Materias*”, podemos ver a estrutura da obra que se divide em três livros, o *Libro I* que trata de “*Metodología y Procedimiento*”, dividido em 18 capítulos compreendidos entre as páginas 3 a 43. *Libro II* que trata da “*Didáctica de la Aritmética*”, dividido em 145 capítulos e oito estágios do trabalho didático compreendidos entre as páginas 47 a 498. *Libro III* que trata da “*Didáctica de la Geometría*”, dividido em 105 capítulos e seis estágios do trabalho didático, compreendidos entre as páginas 503 a 771, e por fim, a *Conclusión* na página 772, deste modo, o autor apresenta os assuntos que serão tratados, apontando cada capítulo e os respectivos conteúdos que o compõem.

Fora do índice, no final do livro, é apresentada uma lista de obras publicadas pela mesma editora com a finalidade de divulgação, sendo ela intitulada como “*Publicaciones de Pedagogía*”

y *Psicología LABOR*” depois, o livro finaliza com o nome da editora e o nome das cidades que possuem o polo da editora.

Para o desenvolvimento desta pesquisa voltaremos nossos estudos para o *Libro III Didáctica de la Geometría*, no entanto, também utilizaremos o *Libro I Metodología y Procedimiento* para podermos entender a metodologia e o procedimento que o autor descreve como necessária para o trabalho pedagógico do professor. Assim, no próximo tópico apresentaremos a análise das primeiras páginas da obra, em que o autor discorre suas palavras iniciais.

4.2 AS DEDICAÇÕES DE JOSÉ JUNQUERA MUNÉ

Na seção “*A quien aplique nuestro método*” o autor apresenta a justificativa da produção desse material e ainda escreve para quem é dedicado o livro. José Junquera Muné, relata nas primeiras páginas do seu livro que a obra levará conhecimentos para a vida, tornando os ensinamentos de aritmética e geometria acessível para as crianças, motivando o interesse e a atração pelo conhecimento matemático. Para isso, é oferecido aos professores o conhecimento para desenvolverem uma matemática que contemple a realidade, instruindo como funciona o pensamento da criança e como relacioná-la às realidades. Muné (1969), diz que dessa forma as crianças poderão formar seu próprio conteúdo intelectual articulado com a realidade. Dessa maneira, o autor justifica que o material por ele escrito orienta o professor com a finalidade auxiliar as crianças a ver a matemática com outros olhos.

Muné relata que a sua experiência, o árduo trabalho e a vivência na escola foram a base para compor a didática por ele apresentada neste livro, compreende-se que nesse momento o autor esteja se referindo a um saber produzido por ele a partir de suas experiências, no entanto, ele não apresenta referências que fundamentam as suas afirmações para esta produção.

Com isso, o autor descreve que o professor encontrará neste material tudo o que ele precisa para o trabalho pedagógico, assim, o autor diz que quer oferecer um material poderoso ao professor para ser utilizado dentro e fora da escola, que o trabalho é para todos os que usam o cálculo como uma disciplina educacional e instrumental, ele reforça que deseja que esse material e o seu trabalho sejam completos para o professor ser o mais perfeito, para alcançar o benefício supremo da criança e da sua formação.

Ele explica que o procedimento oferecido ao professor é um caminho orientado, dando ao docente o passo a passo de todas as atividades, observações e relações. E que é o professor que verá onde ele pode chegar conforme as circunstâncias, as crianças, o ambiente, e as

possibilidades, mas, a escola dirá até onde ele pode atingir segundo as realidades ali vivenciadas, contudo, Muné destaca que o material irá proporcionar conhecimentos para o professor poder ir o mais longe que desejar.

O autor relata que a obra foi produzida em circunstâncias normais e que é puramente pedagógica, sendo vivenciada na escola, pela experiência e pela prática da criança. No entanto, se as circunstâncias educacionais não são “normais” o professor deverá adaptar as questões necessárias para atingir com êxito o desenvolvimento proposto. Muné diz que, todos os pontos tratados no material são apresentados com o próprio cuidado que sua natureza exige, assim, cada ponto traz uma ou mais lições para o desenvolvimento escolar, para isso, a realidade mostrará ao professor quantas lições devem ser utilizadas.

Ele deixa explícito que a pressa é a inimiga da atividade pedagógica, explicando que as coisas vêm com o tempo e que estamos seguindo a lei do esforço mínimo e da capacidade máxima, com isso, o autor adverte que no decorrer do seu trabalho não se tenha pressa.

O desenvolvimento é realizado em etapas, por esse motivo, novamente, a pressa não será favorável para o professor ou para a criança, o progresso depende da habilidade e interesse da criança e para isso, o desenvolvimento deve ser contemplado no decorrer da idade escolar, que para o autor o livro é destinado para professores ensinarem crianças de seis a quatorze anos.

Para a aritmética foram escritos oito estágios de desenvolvimento do trabalho e para a geometria seis, pois a geometria tem uma relação com os conhecimentos de cálculo, razão pela qual sua iniciação ocorre um pouco mais tarde.

O autor descreve que a idade desejável para iniciar o método do material é de seis anos, pois essa é a idade limite para a criança começar a atingir a racionalidade que se concretiza quando atinge os sete anos, tudo o que vem antes dos seis anos é antecedente, é preparação. O trabalho descrito no livro parte da racionalização da criança, alcançada pela intuição sensível ou intelectual conforme o caso e com a idade.

Muné relata que muitas vezes de maneira imprudente a pedagogia é dita falha, no entanto, justifica que é necessário conhecer a realidade para que as regras não sejam sinalizadas como um erro, pois as elas não definem a realidade, salientando que a boa pedagogia e a didática devem cessar com as formas erradas de conduzir a criança. O autor ressalta que a pedagogia ao descrever a didática ela se baseia em realidades normais, ou seja, situações normais, crianças normais, condições escolares normais, assim, ele diz que o fracasso não está na pedagogia ou na didática, mas sim nas situações que as tornam desfavoráveis.

4.3 LIBRO I - METODOLOGIA Y PROCEDIMIENTO

O autor traz um repertório para o entendimento do termo “didático” explicando o que é didático em cada situação, Além do mais, Muné (1969) separa o Livro I em dezoito capítulos e dentro desses pontua tópicos que são numerados de 1 a 80. Dessa forma, o autor explicou o que ele defende a respeito de cada termo que ele apresentou. Alguns desses tópicos são identificados com um pequeno título e outros não recebem títulos que os caracterizam, podemos dizer que o Livro I serve como uma preparação para um melhor entendimento do que aparecerá nos livros de Aritmética e Geometria, no que tange a respeito de metodologia e procedimento.

Neste momento, faremos uma breve apresentação sobre esses 80 tópicos, para uma melhor configuração, nossa explanação será em texto corrido, destacando em negrito os referidos tópicos quando nomeados.

CAPÍTULO I

Ao adentrar no capítulo I, o autor retrata sobre **a questão do método em didática**, ele traz a importância do papel do método em didática e sinaliza que o método por ele utilizado é o Método Heurístico, sendo que esse corresponde a análise e a síntese.

Muné enfatiza que se algo fica explícito ou lógico, é porque o método está garantindo a sua universalidade, pois ele justifica que a atividade de pensar nos leva a uma direção e a um sentido, sendo eles a análise e a síntese. Em decorrência da análise e da síntese surgem dois métodos, o método analítico e o método sintético. A partir disso, Muné destaca que a análise e a síntese são operações racionais do sentido do pensamento. Assim, o professor pode trabalhar por meio da análise ou por meio da síntese:

Ou você toma o objeto do pensamento, qualquer que seja a matéria, e o penetra por decomposição, por separação ordenada de suas partes, seus elementos, até as profundezas de sua essência e seus acidentes, ou você considera os elementos, para alcançar a articulação e a construção do objeto de conhecimento em sua totalidade. Tais são os dois sentidos do pensamento: análise e síntese, as duas operações racionais. (Muné, 1969, p.03, tradução nossa)

Dessa forma, admitindo dois métodos, o método analítico e o método sintético. Essa ação do autor tem em vista informar a maneira de trabalho que será abordada no material. Diante disso, o autor visa esclarecer a importância do método para o desenvolvimento de uma disciplina. Ainda justifica que “[...] o método é na Lógica a chave da pesquisa, a base na qual o homem se inclina para ascender ao conhecimento da verdade, pelo impulso supremo de sua tendência categórica a possuir a verdade das coisas, e dos fatos, e de si

mesmo” (Muné, 1969, p.3, tradução nossa), por esse motivo os métodos não podem ser confundidos com procedimentos.

Muné justifica que fazer com que o aluno receba o conhecimento faz parte de uma concepção de ensino que tem uma matriz de conhecimento expositiva. No entanto, conforme o **aspecto específico do método didático**, esse procedimento é outro, no qual tem por prioridade a atividade de pensar, construída a partir do seu próprio entendimento. Para Muné a finalidade da didática é: “preparar a realidade, colocar diante dela os ignorantes, e dirigir sua atividade de pensar e o sentido dela, para que eles possam descobrir a verdade por si mesmos”. (Muné, 1969, p.4, tradução nossa). Com isso, a didática ou o método didático se dá por meio de um procedimento ativo, pois “Tudo se resume ao fato de que quem tem que aprender é quem pensa, quem forja suas próprias ideias e articula seu conteúdo intelectual.” (Muné, 1969, p.4, tradução nossa).

Para isso, o autor reitera sobre o que o professor deve entender como **problema didático**. Como já dito, o professor deve ensinar a criança a encontrar o seu conhecimento sem entregar ele pronto e acabado, no entanto, quando o autor descreve sobre o problema didático ele também aponta as dificuldades das crianças em aprender, mostrando que nem toda criança aprende do mesmo jeito, ou seja, que existem diferentes níveis de aprendizagem relacionados ao psíquico, o que faz com que algumas crianças não aprendam ao mesmo tempo e idade que as demais. Assim, cabe ao professor conhecer os seus estudantes, preparar a criança para essas dificuldades, dando orientações e despertando o interesse dela, almejando seu protagonismo no processo de aprendizagem.

Muné destaca que na pedagogia os termos professor, educador e pedagogo são sinônimos, no entanto, na sua perspectiva, ele justifica a existência de divergências, defendendo que: “o professor “ensina” apenas transmitindo conhecimento, fazendo papel de transmissor, acreditando que a criança é um mero receptor passivo” (Muné, 1969, p.5, tradução nossa). Ele acredita que esse trabalho do professor faz com que as crianças não tenham interesse na aprendizagem e com isso não se desenvolvam, justifica que: “Aquela criança mentalmente quieta não existe. Em nenhum ramo da formação intelectual e profissional, nem em nenhuma época, cabe o homem de inteligência estática. Isso é antitético à vida: o organismo que não elabora não vive.” (Muné, 1969, p.5, tradução nossa). Com isso, quem aprende deve ser detentor das suas ideias/conhecimentos, deve produzir, de acordo com ele, sem esse processo estaríamos estabelecendo o fim da didática.

Para o **problema didático em cálculo**, Muné diz que a maior dificuldade do cálculo está relacionada às questões que envolvam propor e resolver problemas didáticos, de modo a apresentar a realidade para o aluno. Para essa tarefa é necessário seguir uma ordem lógica, sendo que o professor deve desenvolver na criança a razão para serem alcançados os passos para desenvolver a cultura do cálculo, O autor ressalta: “Esta situação deve durar, sempre diante da realidade, até que a criança tenha um fluxo de entidades elementares de razão, articulada sempre segundo relações” (Muné, 1969, p. 5, tradução nossa). Feito isso, a criança passará a trabalhar fora da representação para atingir a abstração.

Neste capítulo observamos que o autor traz informações a respeito do tipo de método trabalhado no material e como o professor deve desenvolver a didática, pode-se identificar o método Heurístico como sendo a metodologia pedagógica adotada pelo autor, e que segundo ele, tem por característica exercitar o pensamento da criança para que ela possa construir o seu conhecimento.

Muné mostra que abre mão das ideologias pedagógicas do seu tempo, ao isentar o seu material de referências de outros autores, que o fez determinar o método didático por ele utilizado. Dessa forma, sobre o problema didático em cálculo, o autor reitera que o professor deve trabalhar com a realidade, por meio de uma ordem lógica para poder desenvolver a razão.

CAPÍTULO II – EL PROBLEMA DEL INTERÉS EN LAS MATERIAS DE CÁLCULO

O autor apresenta que a criança não se sente atraída pelo abstrato, sendo esse o principal motivo de **falta de interesse pelo cálculo**, mas, a criança se sente bem com o imaginário. Com isso, o autor sustenta que:

[...] a criança sente grande afeição pelo imaginário e sabe movimentar-se no campo do irreal e nos planos do possível e do desejável. Aqui está um ponto alto para a didática do cálculo. Através do imaginário, através dos elementos da representação, pode-se chegar ao abstrato, das realidades observadas [...] (Muné, 1969, p.5, tradução nossa)

Por meio da representação, o autor enfatiza que a criança sente interesse pela comparação, quanto mais ou quanto menos uma coisa é, pois ela ainda não está interessada no valor numérico e sim na comparação, mesmo assim, como resposta, ela espera pela exatidão, pelas certezas das coisas.

O autor pontua que a falta de interesse pelo cálculo está relacionada com a falta de razão e de realidade. Sendo que a razão e a realidade servem de impulso para motivar o interesse da criança: “Está provado que o coeficiente de erro diminui quando o conhecimento é racional. A eliminação ou desvio do interesse racional constitui uma causa permanente de erro.” (Muné, 1969, p.7, tradução nossa). De acordo com Muné, ainda que dificilmente percebida a finalidade prática do cálculo, a criança só consegue perceber essa identificação de finalidade entre os 12 aos 14 anos. O autor descreve que:

É possível - e eu observei - no estágio puberal superior, dos 12 aos 14 anos de idade. Ao longo da idade escolar, a criança percebe a finalidade dos exercícios em seu significado imediato, a utilidade da operação para resolver um problema, o valor do pensamento e sua necessidade para obter o resultado. (Muné, 1969, p.7, tradução nossa)

Assim, de acordo com Muné, o interesse pelo cálculo também vem de um prazer de conseguir realizar uma tarefa, de vencer, dando um sentimento de satisfação. Esses são pontos consideráveis que servem de estímulo levando a um interesse pelo esforço. Já o **interesse por referência** está relacionado ao interesse de se desenvolver um cálculo, podendo ser que aquele passo não é o de interesse, mas é necessário para se alcançar o resultado.

Muné exemplifica descrevendo que “O número 1453 pode não ser lembrado como a data da queda do Império Romano do Oriente, mas como a altura de uma montanha e vice-versa, conforme o interesse primário pela História ou pela Geografia.” (Muné, 1969, p. 7-8, tradução nossa). Isso quer dizer que o interesse no cálculo se dá devido a um interesse racional. Ainda Muné reitera que “Pode-se observar, ao longo de nosso trabalho, que buscamos situar a criança diante das realidades, de forma que ela venha a sentir o prazer de ver nelas, a necessidade incitante de conhecê-las e utilizá-las.” (Muné, 1969, p.8, tradução nossa).

Dentro dessa gama de interesses, o autor discorre sobre o **interesse parasitário** que se dá quando um interesse se sobressai em cima do interesse principal, surgindo para desviar a atenção do interesse primário. Com a justificativa de que isso acontece quando o professor não prepara seu repertório ou quando um determinado passo é apresentado antes que a fase correspondente o exija, assim não correspondendo uma razão didática para o seu uso.

Neste capítulo, o autor aborda questões relacionadas ao interesse da criança pelo cálculo e a partir disso pontua considerações a respeito de como o professor deve agir diante dessa situação, dando ênfase para a forma de trabalho com o uso de representações e do imaginário para não ficar preso à abstração, pois segundo ele, as crianças não progredem perante a abstração. Essas questões apresentadas por Muné são apontadas para que o professor tome conhecimento de problemas pontuais relacionados à falta de interesse da criança pelo cálculo. Diante disso, há a presença de um saber profissional do autor ao destacar as orientações dadas para os diferentes tipos de interesse que a criança pode se deparar.

CAPÍTULO III - ASPECTO PREVENTIVO DE LA DIDÁCTICA

Em termos de **didática corretiva**, o autor descreve que o erro é algo que pode vir acontecer, mas que não se deve pensar em sempre realizar uma didática corretiva sobre o erro e sim preventiva. Com isso, ele enfatiza que o material foi escrito de modo a garantir a clareza das ideias para que não se cometa erros futuros. O autor reitera que para a criança crescer culturalmente é necessário realizar uma análise cultural, podemos dizer que seria uma avaliação diagnóstica, no caso da **análise cultural**, essa é composta por perguntas que não causem confusão, tendo uma única resposta como correta.

Ao indicar as realizações de análise cultural (avaliação diagnóstica) podemos dizer que essa é uma ação comum em muitas escolas e que possivelmente praticada naquele tempo. Sendo que essa prática dá ao professor a possibilidade de identificar o nível de conhecimento de seus alunos, permitindo-lhe trabalhar em cima de possíveis dificuldades. Para o autor essa ação ajuda a prevenir erros futuros.

CAPÍTULO IV - LA LEY BIOGENÉTICA

Para as questões correspondentes à **evolução**, Muné discorre que o cálculo também obedece à lei da evolução sendo essa “cristalizada na lei biogenética, na formulação: a ontogenia é uma síntese da filogenia. Sua interpretação esclarece que não é na quantidade, na extensão da vida, mas nas etapas fundamentais” (Muné, 1969, p.10, tradução nossa). Diante disso, as ideias precisam ser aplicadas para poderem reagir, para isso, a evolução do conhecimento deve ocorrer junto com a evolução científica. Para Muné:

O arranjo didático gera um sistema biogenético, estabelecendo uma linha de atividades de uma situação a outra, fundamental para a elaboração das ideias correspondentes. [...] Sentimos, no entanto, que o conceito biogenético não deve

referir-se apenas à linha histórica do estado, mas à essência do processo didático, como processo vivo, e à construção instrucional, como processo de estruturação e desenvolvimento com fases biológicas.” (Muné, 1969, p.10, tradução nossa)

No desenvolvimento didático as ideias não são postas soltas, seguem uma ordem para serem desenvolvidas as etapas do conhecimento, sendo que essa direção na didática é chamada pelo autor de **linha de relação**: “As linhas de relacionamento devem presidir a própria Didática, os desenvolvimentos escolares, a formação cultural, a análise e o conteúdo mental.” (Muné, 1969, p. 11, tradução nossa). Com isso, qualquer alteração em um ponto da linha didática para desenvolver determinado assunto atinge todo o desenvolvimento da linha.

De acordo com Muné, no cálculo os **centros de relação** estão atrelados aos conhecimentos necessários para desenvolver uma operação, ele exemplifica mostrando que “o número 12, por exemplo, pode ser obtido por adição, subtração, produto ou quociente”. (Muné, 1969, p.12, tradução nossa). Por esse motivo, que na aritmética as aulas devem seguir uma linha, Muné diz que “Cada aula deve ser baseada em uma linha padrão sistemática, traduzida em séries de observações, elaborações mentais, relações conceituais, realização executiva, tradução da realidade em expressões de cálculo operacional e traduções de expressões de cálculo em realizações materiais.” (Muné, 1969, p.12, tradução nossa).

A partir disso, o autor reitera que no seu material tanto a aritmética quanto a geometria possuem linhas de desenvolvimento didático: “Toda sistemática em Aritmética e Geometria obedece à disposição das correspondentes linhas totais de caráter estadual. Pode ser observado por quem aplica nosso método em ambas as disciplinas.” (Muné, 1969, p.12, tradução nossa).

Neste capítulo vemos a preocupação do autor em situar uma fundamentação biológica para explicar as linhas de relações didáticas presentes para o ensino do cálculo, pois no decorrer dos estudos sobre aritmética e geometria ele utiliza essas linhas de relações para desenvolver a forma como o professor deve apresentar o conteúdo.

Destarte, Muné apresenta uma estrutura lógica organizacional para apresentar os conteúdos, uma vez que de acordo com o autor há uma linha de relacionamento entre um assunto e outro. Além disso, o método pedagógico da Escola Nova também se amparava em estudos que justificavam o pensamento da criança através da biologia e da medicina, na busca por entender o desenvolvimento intelectual e educacional da criança. (Zanatta, 2012) Ademais, esse tipo de organização também coaduna com as ideias do estruturalismo, amparado pelo

Movimento da Matemática Moderna, que entraria em vigência na Espanha dois anos depois do ano de publicação das ideias da MM na revista *Vida Escolar*. (Astudillo, 2008)

Podemos inferir que as ideologias desses movimentos pedagógicos já se encontravam em circulação e poderiam ter servido de influência para o autor, assim, indagamos que as ideias do autor não partem do senso comum ou apenas como fruto de sua experiência, como é por ele relatado nas primeiras páginas do seu livro. Nesse caso, o saber mobilizado pelo autor para estruturar linhas de relacionamento para o ensino de cálculo pode fazer parte de um conhecimento adquirido por influências de movimentos postos em seu tempo.

CAPÍTULO V

Muné afirma que é necessário que o professor faça uma **sistemática (seleção de temas)**, análise os assuntos que serão tratados e escolha a ordem de apresentação, buscando relacionar os temas para que a criança siga com o conhecimento. Em relação à aritmética e a geometria, o professor tem que selecionar bem os pontos que podem ser mais interessantes para compor sua matriz de trabalho. O autor não aprova a ideia de apresentar o conteúdo como pronto e acabado, dando ao aluno a única opção de aceitar, como ele alega ser feito em muitos livros. “E assim definem o número para a criança e o classificam nas primeiras páginas de um infeliz ‘livro escolar’, como tantos se veem e tantos se compram.” (Muné, 1969, p.13, tradução nossa).

Como **atuação do pedagogo**, Muné descreve que esse deve encaminhar as crianças com situações agradáveis para que ela possa obter mais interesse. Para tanto, é necessário que o pedagogo tenha mais atenção e com isso, se exige uma cultura diferenciada, mais extensa e profunda, pois: “Na Geometria, por exemplo, não admitimos a sistemática clássica segundo a Geometria plana e a Geometria do espaço, mas partimos sempre do corpo, como espaço e como limite do espaço na sua superfície, relacionando corpo, superfície, figura, etc”. (Muné, 1969, p.14, tradução nossa).

Neste capítulo Muné evidencia a importância de o professor planejar sua aula, assim fazendo a seleção de temas que serão apresentados e a ordem desses. Adiante, veremos que no primeiro estágio do trabalho didático referente a introdução dos conceitos básicos de corpos o autor apresenta as formas geométricas de modo a trabalhar primeiramente com os sólidos, depois com o esqueleto desses e por fim, a planificação. Desse modo, o corpo é apresentado por meio de decomposição, ou seja, do todo para as partes, nesse ínterim são também

apresentadas as ideias de face e superfície, esse tipo de trabalho vai do concreto para o abstrato como é defendido por Pestalozzi (Zanatta, 2012), (Valdemarin, 2006). As atribuições que Muné coloca ao professor ganham significado no estudo de suas práticas e hábitos que se forjam pelo conhecimento do aluno, como também a ordem como devem ser apresentados os conteúdos, e podemos compreender essas ações como um *saber para ensinar*.

Na tese de Fortaleza (2021), identificamos que o livro de Braun (1872), Coelho (1892) (1907) e Carré e Liquier (1920) já explorava essa ação para o ensino de geometria. Diante disso, podemos sinalizar que esse saber destacado por Muné já se fazia presente em outras épocas, sendo que essa informação faz parte de um saber objetivado já apresentado por outros autores anteriores a ele, pois ambos discorrem sobre a pedagogia intuitiva.

CAPÍTULO VI - EL MÉTODO EM CÁLCULO

Para o **método de investigação**, é importante destacar que o preceito utilizado é o método heurístico que abrange todo o processo educacional. Muné diz que o método heurístico “é, globalmente, análise e síntese, sabiamente utilizado com indução ou dedução, ou ambas ao mesmo tempo, conforme as exigências da realidade, do momento, da capacidade intrínseca daquele que deve ser educado e do conteúdo psíquico da criança.” (Muné, 1969, p.14, tradução nossa).

Segundo Muné, o método heurístico abrange a ordenação lógica de análise e síntese, que por sua vez, correspondem ao **procedimento ativo**, por conseguinte, provoca a criança a fazer por si só, sendo que essa pressão da estimulação, encoraja a criança a almejar uma evolução, uma necessidade biológica, com isso, o método heurístico – ativo é um método biológico e natural.

Não se tem um único método de cálculo, no entanto, o método de destaque para desenvolver tal tarefa é o método sintético, no qual Muné diz que: “[...] deve-se apontar no sentido de exaltar como genuíno da Matemática o processo dedutivo do pensamento, o método sintético. (Muné, 1969, p.14, tradução nossa). Mas, na prática escolar acaba que os métodos se complementam exigindo-se mutuamente: o analítico e o sintético.

Entretanto, para ensinar as crianças é preciso pensar no caminho mais favorável para que elas aprendam, deste modo, proceder com uma análise na evolução do conhecimento da matemática é o processo mais favorável, nas palavras de Muné:

É preciso apresentar à observação da criança, primeiro, a própria realidade; depois, os fatos matemáticos, para observar as relações. No tratamento das propriedades dos números, costuma ser muito prático convidar à observação da estrutura dos

números, descobrir analogias e diferenças, obtendo até as leis de sua formação. (Muné, 1969, p.15, tradução nossa)

Com isso, Muné reitera que exercitar a atividade mental por meio da análise e da síntese ajuda a criança a desenvolver uma visão direta e inversa dos procedimentos. Por esta razão, a análise e a síntese devem se fazer presente em todos os exercícios e problemas.

Neste capítulo, Muné dá mais detalhes a respeito do método por ele estabelecido, ele traz questões relacionadas ao método de ensino para o cálculo e aponta que o método favorável é o método sintético e analítico. Segundo o autor, esse método é utilizado para que a criança tenha autonomia de participação do seu conhecimento, assim o próximo passo a ser desenvolvido pela criança é dado através de seu aprendizado prévio que irá direcionar o que será necessário aprender na próxima etapa. Para Muné, isso garante a evolução do saber. Nesse sentido, percebe-se uma das ideologias de Dewey, que se mostrou a favor de um ensino estabelecido a partir dos interesses da criança. (Zanatta, 2012)

Estabelecer um método para ensinar cálculo faz parte de um saber do professor de cálculo, sendo esse o *saber para ensinar*, pois ao utilizar o método o professor irá conduzir a criança para a participação e uma construção ativa do seu conhecimento. Desse modo, ao realizar essa ação o professor sabe os objetivos que ele deseja que a criança alcance, dessa maneira, isso faz parte de um saber profissional, específico do professor que ensina cálculo.

CAPÍTULO VII - EL PROCEDIMIENTO EN CÁLCULO

Para o **procedimento matemático**, Muné define que esse é o modo de aplicação do método, utilizado para desenvolver determinado conteúdo, para ele estudar a didática do cálculo, garante a universalidade, que é concedida a partir do método e do procedimento.

Muné apresenta que o procedimento matemático se dá de duas formas, sendo a abstração a partir do número e o desenho geométrico ou procedimento gráfico a partir da tradução do número. Para melhor exemplificar, “O procedimento gráfico proporcional é a essência da representação, não só na Aritmética e na Geometria, mas em inúmeras ciências de base matemática, e de forma especial, na Geografia, dada a necessidade de representar no mapa” (Muné, 1969, p. 16, tradução nossa).

Para Muné, o **procedimento intuitivo** inicialmente deve ser evitado, pois esse de alguma forma pode ser extrapolado e assim chegando a resultados não condizentes com a

razão. Sabemos que o procedimento intuitivo é algo do ser, mas é fundamental explorar a intuição intelectual independentemente da idade da criança.

Na teoria do procedimento intuitivo, destaca-se a forma intuitiva conhecida como transintuição, que é a intuição de realidades por meio de sua representação, ou ainda por meio dos elementos de imaginação e representação que a criança possui em seu conteúdo mental. Ressalta-se a grande importância da transintuição no procedimento geral da Geometria, que dispõe de inúmeros recursos para resolução de situações didáticas, tornando intuitiva uma operação de cálculo que seria extremamente complicada. A chamada objetivação geométrica nada mais é do que a própria transintuição (Muné, 1969, p.17, tradução nossa).

A técnica para desenvolver o cálculo é o procedimento sendo aplicado, com isso, tudo que abala o conhecimento deve ser evitado, mas deve ser contemplado o que enalteça a realidade e a verdade, assim, transformando a ideia em uma linguagem.

Dessa forma, Muné nos revela que as leis da matemática não devem ser enunciadas e logo depois demonstradas, mas, por meio da realidade e da observação, deve-se apropriar da análise e da síntese para chegar por meio de dedução a propriedade de formação da lei.

A respeito do **trabalho escolar de cálculo em cálculo** se almeja que a criança por meio da atividade escolar utilize a observação para poder aprender por si mesma. Para isso o professor precisa trabalhar com vários alunos, assim, ele irá ensinar para um grupo da mesma forma que ensinaria para um único aluno, não podendo confundir trabalho simultâneo com coletivo. Muné diz que: “O trabalho simultâneo é uníssono; o coletivo é harmônico, tem temas, conquistas que permitem um trabalho coletivo. Mas o trabalho simultâneo é sempre válido em todos os trabalhos escolares.” (Muné, 1969, p.18, tradução nossa)

Neste capítulo Muné apresenta o que é o procedimento em cálculo, assim ele sinaliza que o procedimento é a forma como o professor desenvolve o método, com uma indicação de um *saber para ensinar*. Além disso, o autor pontua que não se deve iniciar com as crianças por meio do procedimento intuitivo, mas que se deve priorizar a observação para chegar a resultados mais condizentes com a razão. Um exemplo é o que o autor desenvolve no decorrer dos estágios do trabalho didático em geometria, no qual busca destacar que o professor deve iniciar os conteúdos por meio da observação, valorizando os sentidos e aquilo que a criança já conhece para que depois possa ser levada a uma abstração. Essa análise nos faz inferir que há uma possibilidade do material escrito por Muné ter influências da Escola Nova, quando o autor enfatiza o uso da observação, pois essa observação vem apresentada pelo autor como indicação para que a criança aprenda de uma melhor forma.

Por mais que as ideias do método intuitivo se façam presentes no material de Muné, o autor recomenda que inicialmente o procedimento intuitivo deve ser evitado dando lugar para o procedimento intelectual. Desse modo, pode-se afirmar que essa ideia pode se relacionar com a Escola Nova, pois como já vimos no capítulo 4, o método intuitivo não era a única ideia defendida por essa vaga.

CAPÍTULO VIII - LA CORRECCIÓN

A **correção** feita pelo professor pode anular a criança, uma vez que essa pode realizar a sua própria correção. Isso acontece porque a criança não vê os erros como uma correção e sim como falhas, ainda passa a se importar com a quantidade de falhas e não com o que conseguiu alcançar. A correção dada por outra pessoa pode ser realizada quando o estudante não se sente confiante na sua autocorreção. Com isso, o autor discorre que a correção dada não tem valor educativo, já a autocorreção faz com que a criança adquira experiência.

Nem sempre é fácil aplicar a autocorreção, principalmente quando o número de crianças que fizeram o mesmo exercício é grande. Se for uma operação, a autocorreção pode consistir em checá-la. Daí a necessidade de conhecer as operações inversas, as relações. O inverso leva ao reconhecimento de um bom resultado ou de um erro. (Muné, 1996, p19, tradução nossa)

Para a **autocorreção simultânea**, Muné descreve que essa pode ser feita de modo simultâneo, no qual a criança vai até o quadro, passar para os demais a sua resposta e assim é analisada e conferida, de modo que todos possam intervir, porém isso tem que acontecer com o auxílio do professor, com isso, a correção deve ser lógica e racional. Quando for preciso corrigir um problema simples, pode ser realizado o caminho inverso, no qual se sai da solução para chegar no problema.

Já a **correção de abordagem** serve em casos de problemas complexos, pode-se corrigir de modo que cada criança explique como procedeu e assim é realizado um comentário dialogado. Ou a correção pode ser feita utilizando um problema parecido. Não é permitido que a correção seja realizada apenas consultando o resultado final. Resolver o problema e chegar aos resultados não basta se a criança não entende a lógica de exposição do problema. Além disso, também é recomendado por Muné a **correção de exposição**, no qual expõe as etapas de resolução de modo organizado e claro. Isso irá despertar o hábito de pensar, pois a criança será induzida a pensar uma maneira de expor essa resolução.

Para uma **tendência à perfeição**⁶ é necessário fazer com que a criança resolva os problemas de várias maneiras possíveis, não mostrando para ela apenas o caminho mais curto, mas também, para que a criança aprenda a pensar. Para isso, ela precisará conhecer todos os caminhos possíveis de uma resolução. Assim, o caminho mais curto poderá ser aprendido e apreciado, o professor não deve se importar com a falta de tempo, pois isso será compensado mais adiante.

Neste capítulo vemos que o autor destaca para cada situação um tipo de correção. A percepção do professor a respeito dos tipos de correções que devem ser mobilizadas está atrelada a um saber que o professor obtém para melhor conduzir a criança mediante a correção durante as aulas de cálculo. Destarte, esse aprendizado se configura como um *saber para ensinar*, tornando-se uma ferramenta de trabalho do professor, de modo que ele busque desempenhar os tipos de correções que devem ser feitas ou evitadas. Nesse ensejo o professor deve proporcionar ao estudante a possibilidade de resolver variados tipos de problemas para não ficar limitado a uma única forma de solução.

CAPÍTULO IX - LA CUESTIÓN DEL MATERIAL ESCOLAR

O **material** escolar tem um papel muito importante no processo de aprendizagem da criança, pois os caminhos tomados pelo professor, podem ser facilitados pelo uso do material escolar. Com isso, no cálculo o material deve ser simples e útil, pois o difícil não é aceito.

Para ideias fundamentais, foi demonstrado que o material absolutamente conhecido é superior a todo material desconhecido. E acrescento: por mais bonito que seja e por mais brilhante e caro que o mercado o apresente. O brilho produz cegueira. Pedras, feijões, grão-de-bico, ladrilhos idênticos, bolas, régua, varetas, caixas, papelão, papéis. São materiais excelentes, acessíveis, e eles não se esgotam. (Muné, 1969, p.21, tradução nossa.)

A partir disso, para Muné é necessário a indicação de procedimentos e **materiais que possam ser utilizados em cada caso** e para cada conteúdo trabalhado. O material escolar serve como auxílio e deve ser eliminado quando alcançado os conceitos pretendidos. Ou seja, a intuição sensível que o material proporciona, deve posteriormente dar lugar para a intuição intelectual oferecida pelos conceitos. Para Muné, o professor deve utilizar o material para explorar a intuição sensível com estudantes de qualquer idade, ainda, é recomendado que o

⁶ A frase “tendência à perfeição” é a expressão que o autor utiliza para descrever como a criança irá aprender a partir dos tipos de exercícios, ou seja, para alcançar uma certa perfeição a criança não pode estar limitada a resolver um único tipo de exercício.

professor elabore os materiais, e que esses fiquem disponíveis para a escola, mesmo que eles se acabem com o tempo, nunca o professor deve comprar materiais e sim produzi-los com sementes, gravetos, papelão, etc.

Neste capítulo o autor dá destaque para a importância do uso dos materiais pedagógicos, mas enfatiza que esses não devem ser comprados e sim produzidos pelos professores, para ter essa percepção de quais materiais utilizar, que tipo de material pode contribuir com o objetivo da aprendizagem, quando utilizar um determinado material e a forma como isso irá ajudar a explorar a intuição sensível, assim o docente se mune de um saber profissional, o *saber para ensinar*, pois é necessário que ele saiba construir e trabalhar com esses materiais. Podemos dizer que esse saber não se encontra no material, mas sim na forma como o professor o utiliza.

Ao colocar as crianças para interagir com materiais, seja por meio da construção, *manipulação* ou *observação*, é uma ação que também proporciona a participação ativa da criança, uma vez que os materiais lhe permitem manipular, observar e a partir disso tirar conclusões. Sendo que, esse primeiro momento abstém a criança de iniciar a partir da intuição, mas dando a ela a possibilidade de utilizar os seus conhecimentos prévios para se chegar a outros conhecimentos.

CAPÍTULO X

Já a **questão do livro escolar de cálculo**, Muné destaca que o livro não é um bom material para ensinar as crianças, por ser muito “cru”, frio e sem comunicação com a criança, o livro pode ser um peso ao tentar conciliar o ensino. Muitas das vezes as crianças podem folheá-las, ver as gravuras, mas nada que possam extrair desse material, ainda mais crianças que mal sabem ler. Mas, isso muda quando o estudante domina a linguagem e entende o conteúdo do livro e este passa a ser um material útil e pode ser utilizado. No entanto, é necessário um livro diferenciado para as crianças, um livro especial de fácil comunicação e que elas possam entendê-los.

Neste capítulo, o autor discorre que muitos livros dificultam o ensino, diante dessa situação, podemos destacar que o livro é um material que muitos professores utilizam como ferramenta de trabalho, com o intuito de ajudar a conduzir as aulas. No entanto, em determinados períodos da educação os livros foram selecionados pela escola ou pelo poder público, não cabendo ao professor decidir sobre o material que iria ser utilizado. Diante disso,

quando o professor realiza a seleção do material, ele utiliza de saberes próprios da sua profissão para selecionar o livro que melhor irá lhe auxiliar nas aulas de cálculo. Segundo Choppin (2002), os manuais/livros contêm funções múltiplas no espaço e tempo que o circundam. No caso do manual de Muné, esse se direciona para o ensino com orientações para docência, com forte apelo para o desenvolvimento dos *saberes para ensinar*.

CAPÍTULO XI

Para Muné, o **quadro negro**, por ser uma ferramenta de trabalho do professor, não é para o aluno ter medo, o quadro negro é uma extensão da folha de papel do aluno, sendo assim, esse deve ser utilizado pelas crianças em momentos direcionados pelo professor. Dessa forma, o professor e o estudante podem passar do papel para o quadro negro o que cada um realizou. Muné esclarece que “o quadro-negro é absolutamente essencial em todos os trabalhos escolares; não só em cálculo, embora ela seja muito especial nisso. Dada a importância capital da grande ardósia, este deve ser cuidadosamente selecionado” (Muné, 1969, p. 24-25, tradução nossa). Além disso, o autor descreve alguns quadros e justifica suas qualidades ou a falta delas.

Para o **quadro negro ideal**, o autor destaca que deve ser utilizada em todas as escolas a lousa de vidro fosco, devido a sua qualidade e o que o professor pode ganhar de desempenho nos desenhos e traçados.

Quanto a **cor do quadro negro**, Muné discorre que elas se mesclam entre verde, azul-escuro, cinza e entre outros. Há quem veja a desvantagem de se utilizar esse tipo de quadro, mas que mesmo assim permanece como o principal em relação ao quadro branco. O autor destaca que o quadro negro dificulta a visão, pois o que se escreve nele fica borrado, sendo quase impossível de entender ou enxergar. Assim, quando se trata de cálculo não se recomenda quadros com malha quadriculada, o ideal é que os desenhos e traçados sejam livres com amplo espaço.

Neste capítulo, o autor traz apontamentos a respeito do tipo ideal de quadro e ainda sinaliza qual o tipo de quadro que deve ser utilizado nas aulas de cálculo. Podemos dizer que ter essa percepção sobre como identificar o melhor quadro para fazer desenhos e traçados, ter ou não ter malha quadriculada para as aulas de cálculo, faz parte de uma experiência do professor que utiliza essa ferramenta no dia a dia do seu trabalho. Assim, quando se trata da forma para ensinar o cálculo, podemos dizer que esse tipo de conhecimento faz parte de um

saber profissional, o *saber para ensinar*, pois a forma como o professor deve utilizar o quadro e as especificidades são percepções próprias da profissão do professor.

CAPÍTULO XII

O **desenho em cálculo** é de fundamental importância para o desenvolvimento do cálculo, pois se pode desenhar gráficos, diagramas e representações. Na aritmética, Muné define que: “No cálculo aritmético, o desenho da representação e o diagrama têm grande impasse, e é a base do procedimento gráfico, arbitrário e matemático [...] O desenho traz novos aspectos na visão da quantidade e na ideação do número, bem como na realização das operações.” (Muné, 1969, p.26, tradução nossa)

Já em geometria o desenho é um grande auxiliar, ele pode ilustrar a realidade, sendo essa uma forma de representação. Muné define que: “Na Geometria, o desenho reveste especial interesse, sendo um admissível substituto da realidade, e por vezes, superior a esta, pois o corpo nem sempre permite que certas propriedades e relações sejam apreciadas com transparência” (Muné, 1969, p.27, tradução nossa)

Muné discorre que o **trabalho manual** proporciona uma melhor interação, ao deixar o entendimento mais animado e mais visível. Com isso, o trabalho manual na geometria traz uma grande variabilidade de objetos para confeccionar materiais, dando espaço para a representação.

Assim, as **Realizações** são tudo o que podemos “conquistar” como desenhar um gráfico, construir um sólido e entre outros. Muné define que realização é uma tradução da realidade, seja por meio de um experimento ou uma representação gráfica, no cálculo a realização acontece por meio de tradução de problemas em realidade, representação por desenho e entre outras formas de tornar o cálculo uma representação da realidade, seja na aritmética ou na geometria.

Neste capítulo o autor apresenta a importância do desenho em cálculo, por esse servir para ilustrar formas e ajudar a entender aquilo que é produzido na imaginação. Esse conhecimento sobre a necessidade de utilizar desenhos para o desenvolvimento do cálculo, a confecção de materiais na geometria e a tradução de problemas da realidade são ações desenvolvidas no trabalho do professor, já que, ele as utiliza para melhor alcançar o desempenho da criança. Essas estratégias que o professor adquire para ensinar cálculo são frutos de um *saber para ensinar*, no caso das ações para o desenvolvimento da geometria, o professor

potencializa saberes para ensinar por meio de desenhos que se relacionam como uma ferramenta.

Podemos observar que os desenhos contribuem para uma melhor compreensão e que esses podem ser explorados após o uso de material manipulável de modo a ter outra forma de representação, seja de um sólido geométrico ou para representar algo do real ou imaginário. Essa etapa contribui na resolução de problemas que demandam uma interpretação que se tornaria mais plausível a partir da representação por desenhos.

CAPÍTULO XIII

Muné reitera que **a questão do tempo** é algo que sempre passa pela cabeça do professor, ainda mais quando se ministra cálculo, mas, ele explica que o tempo para a criança poder aprender depende de muitos fatores como capacidade cognitiva, o tema da aula, nível de dificuldade do que está sendo ensinado. Além disso, a idade da criança interfere na quantidade de tempo que será destinada para uma aula, com isso pode-se pensar em uma aula de 15 a 35 minutos dependendo da idade da criança, pois o tempo de concentração e atenção pode variar com a idade.

Muné (1969), ao discorrer sobre **a maneira do tempo**, considera que existe um tempo ideal para as aulas de cálculo, ou seja, as aulas de cálculo devem ser ministradas nas primeiras aulas da manhã, após a entrada do aluno na escola. Se a aula for no período da tarde é ideal serem 2h30 após o almoço. Tudo isso se dá devido uma questão psicobiológica, pois esses horários interferem no tempo de atenção, cansaço e interesse da criança, no entanto, isso varia muito de escola para escola.

Assim, no presente livro, o autor descreve que não apontará tempo para desenvolver qualquer atividade, o professor deve pensar em nunca prejudicar o seu aluno, e correr contra o tempo é uma forma de prejudicá-lo, pois a pressa pode fazer com que ele não aprenda. Muné destaca que **o cálculo em horário escolar** exige uma maior disposição da criança e por isso, precisa ser apresentado pela escola em um melhor momento de condições psicológicas e fisiológicas da criança.

Para a **relatividade psicopedagógica e o cálculo**, o autor salienta a importância do conteúdo que está sendo ensinado no cálculo em assuntos antecedentes e subsequentes. Não é propício estudar um assunto cativante e interessante para o aluno e logo depois entrar em um assunto que não mantém esse interesse, se faz relevante dar uma pausa, isso não se aplica apenas para o cálculo, mas para todas as matérias.

Neste capítulo, o autor discorre sobre a questão do tempo destinado para as aulas de cálculo e o melhor horário para que elas ocorram. Desse modo, estipular um tempo ideal, um período ideal e identificar o momento de pausa entre um assunto e outro são conhecimentos que o professor de cálculo desenvolve no decorrer de sua experiência profissional, essas ações ganharam destaque no meio escolar e perduram até os dias atuais.

A questão do tempo para o ensino de cálculo ocupa maior espaço de horário semanal na rotina da criança, além disso, essa disciplina ainda é apresentada nos primeiros tempos de aula, em um momento em que a criança está mais “descansada”. Pode-se inferir que esse saber não faz parte de um senso comum, pois essa prática ainda é aplicada nos tempos de hoje.

CAPÍTULO XIV

Para entendermos a respeito **da realidade e problema**, o autor diz que é comum iniciar a resolução de problemas com as crianças após ela saber as quatro operações fundamentais. No entanto, o problema deriva de algo real e é do problema real que surge o conhecimento de cálculo. Tudo é problema, com isso, desde do início da vida intelectual a criança é colocada em choque com a realidade.

Muné discute que problema difere de enigma, uma vez que, os enigmas não estão diretamente relacionados com a prática e ainda podem não ser reais. É comum ver em provas, enigmas tão trabalhosos para serem solucionados. No entanto, ele não oferece potencialidade para o estudante e muito menos garante uma forma de avaliação.

Para **problemas genéticos ou primários** o autor busca sempre iniciar a apresentação do assunto partindo do fato, com objetos simples. Já na **graduação e lição de problemas**, os problemas devem ser proporcionais ao nível intelectual da criança, sendo composto pelos demais conhecimentos que a criança já tenha adquirido no decorrer dos estudos. Para a resolução de problemas é exigido o exercício de observação, associação e comparação para que a criança adquira a capacidade de resolver problemas e garanta o sucesso educacional, assim, o problema não só deve ser adaptado matematicamente à operação, mas também a certas condições específicas do ambiente.

O **comentário do problema** se faz necessário, por ajudar a garantir a interpretação correta, seja no ponto de vista matemático ou no ponto de vista linguístico. Com isso, não se pode ter interpretações duvidosas, para solucionar o problema é necessário verificar se os dados do enunciado garantem a solução do problema.

Os **problemas preventivos** se fazem necessários quando se iniciam problemas mais complexos que trazem uma carga de conceitos novos ou de conceitos relacionados, assim levando a uma preparação com a criança para que ela receba esse novo tipo de problema. Esses são conhecidos como os problemas preventivos, ou seja, um problema preliminar, para auxiliar o professor a conduzir a criança até que ela alcance a solução de problemas que necessitem de mais de um conhecimento para ser solucionado.

Nesse capítulo, o autor apresenta que a resolução de problemas deve ser iniciada após a criança aprender as quatro operações. Entendemos que nessa etapa a criança precisa saber operar com os números e suas propriedades, para resolver problemas que exigem o cálculo como meio de resolução. É sugestão do autor que o professor busque iniciar com as crianças com apresentações simples, ele deve selecionar exercícios que sejam proporcionais com o nível intelectual da criança.

CAPÍTULO XV

É um erro pensar que praticar inúmeras vezes problemas de um determinado conteúdo faz com que a criança se desenvolva intelectualmente. É necessário que a criança pratique problemas de forma alternada, buscando outras **temáticas de problemas** para que não fique limitada a resolver um único tipo de problema.

Nesse capítulo Muné apresenta que a matemática é rigorosa e isso deve ser considerado durante o desenvolvimento dos exercícios de cálculo, ele defende a existência de: “ordem cristalizada na exposição, na linguagem, no desenvolvimento, na concatenação das ideias, na preparação para as quais estão associadas, no comentário, na apresentação, na resolução. Nada deve sobrar nos exercícios de cálculo; mas nada pode faltar.” (Muné, 1969, p.33, tradução nossa). Sendo essa a forma que Muné encontrou para descrever a organização do problema ou como nomeia, **disciplina do problema**.

No caso do **problema e realidade**, o autor orienta que o professor deve trazer a criança para o centro da aprendizagem, para isso é necessário que o problema desperte o seu interesse. O professor pode trazer o problema ou este problema pode surgir das crianças por meio de perguntas realizadas por elas mesmas, deixando-a à vontade para criar problemas. Além disso, o problema deve ser real, pois não é convidativo para as crianças coisas que não são palpáveis. Portanto, é necessário evitar uma aula sem sentido e sem interesses.

Múltiplos problemas reais podem ser resolvidos in loco, como a determinação da capacidade de uma cisterna encontrada no caminho de um passeio, a extensão regulável, a diferença de valor dos produtos obtidos com ou sem régua, etc. O trabalho educativo diário, as diversas situações, o ambiente do dia de mercado, por exemplo, saídas de campo, visitas a oficinas, fábricas, etc., serão fonte de oportunidades para resolver, com interesse no estado nascente, muitos problemas reais. (Muné, 1969, p. 34, tradução nossa)

Já para o assunto sobre **problema e ambiente**, o autor reitera que em muitas escolas são oferecidos problemas que trabalham com questões ambientais, no entanto, esses problemas devem ser relacionados com outras disciplinas e não exclusivamente a uma única disciplina. Muné reitera que não se pode trabalhar apenas com esse tema, por conta da possibilidade de se tornar maçante e fazer com que a criança perca o interesse. No entanto, tudo depende da região em que se ensina e da escola, mas é importante manter a realidade local vivenciada pelos alunos fora da escola, na sala de aula. Com isso, é recomendado que o professor procure sugestões extracurriculares para serem trabalhados na escola.

Nas regiões agrícolas, por exemplo, as épocas das diferentes colheitas fornecem pontos de vista para propor problemas. E de outra forma são oferecidos por semeadura ou plantações. Quanto se colhe a tanto por hectare? Ou quanto será arrecadado por quilo de semente? Os mercados, a exportação, o destino dos produtos, os custos de transporte, o preço da mercadoria em determinado local, carroça ou entreposto, etc. problemas ambientais. E assim, para outros personagens específicos do tipo de atividades da localidade ou região (Muné, 1969, p. 34, tradução nossa).

Já os **problemas de cálculo puro** estão diretamente relacionados à abstração sem nenhuma aplicação da realidade ou da intuição sensível. Esses problemas apresentam respostas puramente conceituais dependendo de leis e teoremas para chegar a sua resolução. Um exemplo dado por Muné: “Se propõe a determinação dos termos de uma divisão, conhecendo a soma do dividendo e do divisor e dado o valor do quociente, é um problema de cálculo puro, como quando se pergunta simplesmente qual é a média proporcional entre dois números dados” (Muné, 1969, p. 35, tradução nossa).

Segundo o autor, os **problemas imaginários** estão presentes em inúmeros livros, o que faz com que esses problemas sejam os mais adotados nas escolas, no entanto, os problemas imaginários contêm dados da realidade para serem solucionados. Com isso, para os problemas imaginários terem valor educativo é necessário iniciar primeiramente a criança com problemas reais que abordem o mesmo tema.

Nesse capítulo, Muné discorre sobre as temáticas dos problemas ao diferenciá-los quanto a problemas e ambiente, problemas de cálculo puro e problemas imaginários. Ao entendermos sobre os tipos de problemas podemos melhor relacioná-los com as aulas e alcançar o objetivo de aprendizagem. Isso se torna possível quando o docente tem conhecimento dos tipos de problemas que podem ser desenvolvidos de acordo com o espaço da criança. Dessa forma, esse saber profissional advém de um *saber para ensinar*, no qual o professor sabe quais e quando os utilizar.

CAPÍTULO XVI

É comum na aritmética e na geometria encontrar **problemas implícitos**. “Em Geometria, vários problemas estão envolvidos em uma fórmula, que sempre deve ser resolvida por inteiro. Fórmulas relativas a áreas, volumes, relações entre elementos de figuras, etc. Abrangem vários problemas, que devem ser desgastados.” (Muné, 1969, p. 35)

Os **problemas compostos** costumam necessitar de mais de uma solução de problemas em uma única atividade, ou seja, precisa de “soluções” auxiliares para se chegar a uma solução final. Assim, Muné afirma que em um **problema de revisão** é importante utilizar problemas simples, que envolvam apenas uma operação, e compostos que envolvam mais de uma operação, de modo que o aluno irá utilizar tudo o que aprendeu em um único problema. “No problema de revisão, pretende-se obter maior segurança através de uma verdadeira revisão científica, e não de exercícios iguais ou semelhantes que são repetidos mecanicamente” (Muné, 1969, p.36, tradução nossa). Dessa forma, o problema de revisão não pode ser do tipo mecânico igual aos exercícios, é necessário articular novas visões, de modo que a revisão não se torne repetitiva.

Muné apresenta que os **problemas de correlações operatórias** ou recapitulação são sempre do tipo composto que envolvem várias operações, buscando fazer a síntese e a aplicação do conhecimento. Para esse tipo de problema é necessário que a criança saiba fazer correlações entre operações. Desse modo, “O problema da correlação articula o anterior e cresce em complexidade à medida que avança o caminho do cálculo” (Muné, 1969, p. 36, tradução nossa).

Já os **problemas inversos**, segundo o autor, têm dados entre os quais um torna-se uma incógnita, no qual o aluno terá que encontrar o valor de um deles, assim, se é apresentado 4 dados da solução de um problema, pode-se fazer o inverso utilizando 3 dados para encontrar o quarto.

Muné também define o que são os **problemas particulares e gerais**, sendo esses dois tipos de problemas que necessitam de uma capacidade intelectual da criança, ou seja, o seu conhecimento. Os problemas gerais abordam uma situação comum e de conhecimento da criança para ser resolvido. A exemplo, o autor traz: “Como o dividendo deve ser variado para que o quociente tenha uma unidade a mais? Aqui está um tipo simples de problema geral, sem dificuldade para a criança que conhece a divisão.” (Muné, 1969, p. 37, tradução nossa)

Para **problemas de associação cultural** o autor traz a questão da interdisciplinaridade para a resolução de problemas. Com isso, ele destaca a importância de associar o cálculo, aritmética e geometria, com outras disciplinas, desta maneira, a escola deverá dar o devido suporte para que isso possa acontecer.

Para a **construção de problemas** a criança pode e deve se sentir livre para pensar. Com isso, ela pode criar problemas, mas esses problemas devem estar sempre relacionados aos seus conhecimentos intelectuais e que tenha um domínio das operações que serão necessárias para resolvê-los. Ainda pode estar relacionada a uma ou várias disciplinas, o grau de dificuldade vai se alterando conforme a idade. Para entendemos, Muné exemplifica que:

A igualdade $6+5=21-10$ pode ser um padrão para quatro problemas em vários aspectos. A igualdade $P+Q = a.b - m/n$ inclui seis problemas, que podem ser construídos de acordo com várias referências. É muito interessante obter no aprendiz a habilidade e fluência para construir problemas sem padrão, de forma espontânea, consultando apenas o próprio conteúdo intelectual, imaginando plenamente o problema (Muné, 1969, p.38, tradução nossa).

Chegando na **objetivação de problemas**, sendo que um problema pode ser traduzido em realidade de duas formas, pode ser por meio de tradução direta quando o problema é verdadeiramente realizado ou indireta quando é construída uma representação por meio de desenho, gráfico, etc. No entanto, o autor reflete que nem todos os problemas podem ser traduzíveis ou objetivamente realizáveis, por isso, caberá ao professor “interpretar o conceito, a oportunidade do momento, a necessidade pedagógica de intuição de cada caso, desenho, representações, croquis, etc., na resolução dos problemas”. (Muné, 1969, p. 38, tradução nossa)

Nesse capítulo, Muné se aprofunda nos tipos de problemas que podem ser apresentados, dado que esses necessitam de um maior conhecimento matemático da criança.

Nos últimos três capítulos o autor se dedica a discorrer sobre os tipos de problemas que podem ser apresentados aos alunos. A resolução de problemas relaciona o *saber a ensinar* e o *saber para ensinar*, em que o professor apresenta o conteúdo de maneira a relacionar com

problemas do cotidiano. Destarte, o docente conduz as propostas dos problemas para que esses despertem a curiosidade das crianças, apresentando problemas com temas de acordo com o interesse e objetivo de conhecimento. O professor deve trazer a criança para o centro da aprendizagem, já que se faz necessário que o problema desperte o seu interesse, neste contexto a resolução de problemas se apresenta com *saber a ensinar*. Visto que a identificação/classificação dos tipos de problemas e a forma com que serão abordados pelas crianças, configura um saber do professor, sendo esse um *saber para ensinar*.

CAPÍTULO XVII

A **iniciativa do professor**: o professor deverá se doar em seu trabalho, expor criatividade, não exercendo um trabalho de cópia e reprodução. Muné afirma que o seu livro oferece orientações certas e tudo foi comprovado por meio de experiência por meio da experimentação, com isso, ele enfatiza que o professor deve apresentar seu próprio ponto de vista e não se prender apenas nos exercícios.

O autor reitera que os **exercícios mecânicos** são muito questionados a respeito da sua funcionalidade, esse tipo de exercício oferece entendimento a respeito do que se deve fazer e como fazer. É comum observarmos repetição em tudo o que aprenderemos, seja na música, no manuseio de uma ferramenta, para aprender a tocar um instrumento e entre outros. Por isso, o exercício mecânico pode ser útil desde que não se ultrapasse o limite para poder utilizá-lo. “Com base nos problemas, pode haver casos de planejamento cuja implementação numérica requer mecanismos operacionais. Desta forma, o aspecto funcional do processo educacional é assegurado.” (Muné, 1969, p. 39, tradução nossa).

Muné discorre que é necessário que o professor realize **exercícios de revisão e recapitulação**, já abordamos que esses conceitos possuem suas particularidades e não podem ser confundidos como iguais, desse modo, são feitos exercícios de revisão dos conceitos, fazendo lições, mas sem repeti-las, isso ajuda a criança a ratificar o que já conhece e levando-a a conhecer outras formas. Para os exercícios de recapitulação são revistas as relações das ideias adquiridas, as associações dessas ideias e como os enquadramentos conceituais são postos. Esse tipo de exercício auxiliará o aluno a trabalhar seu conhecimento, sendo que o primeiro está mais focado com a prática dos exercícios e o segundo com o conteúdo que a criança precisa mobilizar para desenvolvê-lo, repensando os conceitos e trabalhando a memória, ao contrário dos exercícios mecânicos.

Nos **exercícios de correlação** cabe ao professor preparar aulas que faça a correlação com as operações e com outras disciplinas. Assim, Muné exemplifica que “O essencial é saber ver a relação, saber imaginar, representar os valores das grandezas que se relacionam. Se $2+3=5$, a criança de 6 anos pode entender que $5-3 = 2$ e que $5-2 = 3$. Mas não representaria que $86497+3976 = 90\ 473$ e que $90\ 473-3\ 976 = 86\ 497$, etc.” (Muné, 1969, p.40, tradução nossa). Inicialmente, as correlações devem ter um aspecto visível, sendo trabalhadas com números para a criança observar e identificar as correspondências. Já as correlações em abstratos devem ser trabalhadas quando a criança adquirir conhecimento para identificá-las.

Os **exercícios de ordenação** possibilitam classificar uma ordem de aplicação desses exercícios, pois segundo Muné isso garante uma melhor percepção pelos estudantes, diante disso, é ideal que os exercícios sejam ordenados do maior para o menor ou do menor para o maior, como na sequência de estudos sobre peso, altura, comprimento etc.

Tudo converge na ordem pedagógica suprema de disposição, de preparação dos caminhos da criança, para que obtenha para si uma ideia mais perfeita e uma elaboração racional de sua própria instrução, com capacidade de utilizar ao máximo suas faculdades intelectuais. E se o prepararmos da melhor maneira, conduzimos ao melhor, ao bem, seja qual for o material educativo que nos sirva de base. Assim, a ordem conduz ao bem moral de uns e de outros assuntos, de outros temas (Muné, 1969, p.41, tradução nossa).

Perante o exposto, pode-se inferir que para o autor os exercícios servem para auxiliar a criança a entender o que fazer e a forma de como fazer, é colocado em prática tudo o que a criança aprendeu. Assim, como os problemas, os exercícios devem partir de uma ordem que vai do mais fácil para o mais difícil. Isso nos remete as ideologias da Escola Nova, que defende que os assuntos devem seguir do mais simples para o mais complexo. Ou seja, com exercícios simples mecânicos a exercícios que exijam um maior desenvolvimento cognitivo da criança. Nesse momento, vemos os exercícios como uma etapa na qual a criança pode praticar o que aprendeu, e em relação aos problemas aplicar o conhecimento adquirido.

Sendo que essas práticas partem de um saber próprio do professor, um saber para selecionar os tipos de exercícios que devem ser feitos, pois nem todo exercício é condizente para trabalhar o que a criança aprendeu, dependendo do interesse do professor o que ela deve praticar.

Ao refletir sobre as pesquisas levantadas pelo estado do conhecimento vemos que D’Esquivel (2019), em sua tese, apresenta a análise de três edições do livro de Olavo Freire, compreendidas entre os anos de 1894 e 1966. Essas produções assumiram novos títulos, e o

foram identificadas como: “Primeiras Noções de Geometria Prática” (1894-1920), “Noções de Geometria Prática” (1920-1942) e “Desenhos geométricos e noções de geometria” (1944-1966). O pesquisador notou um aumento no número de problemas e exercícios postos pelo autor entre as edições. Isso nos mostra que já havia uma dedicação dos escritores da época em propor inúmeros exercícios para que os professores fizessem os alunos praticarem os seus conhecimentos por meio do processo de resolução de exercícios e/ou problemas.

CAPÍTULO XVIII

O autor traz de forma sintetizada os postulados escritos por ele mesmo em outra obra intitulada “Pedagogia do Cálculo”. Ele descreve que seu trabalho escrito em “Didáctica del Cálculo” se fundamenta nas bases essenciais apresentadas no capítulo XXX de “Pedagogia do Cálculo”.

Em seguida, o autor traz no penúltimo tópico uma orientação para o leitor para que após a leitura de todo o Livro I: “Consulte agora o que consta nos números 1006 a 1022 da didática da aritmética e todo o capítulo CI da didática da geometria” (Muné, 1969, p. 42, tradução nossa). E para finalizar, o autor anuncia novamente **a quem se destina esse material**, salientando que a obra vai para todos que trabalham para ensinar aritmética e geometria e a quem deseja aprender sobre o assunto.

Neste último capítulo, Muné discorre sobre sua produção “Pedagogia do Cálculo” (1936)⁷ e informa aos leitores que o Capítulo XXX da obra lhe serviu como aporte em “Didactica del Cálculo”. Ainda assim, a síntese que o autor traz sobre o capítulo XXX de “Pedagogia do Cálculo” não apresenta referências ou menção a outros autores. Como já apontado por Muné, o material foi escrito com base nas suas próprias experiências.

A partir da análise do Livro I identificamos etapas que Muné desenvolve para que o professor possa contribuir para com a aquisição do conhecimento pela criança. Dentre todos os assuntos abordados, Muné traz em destaque a importância da observação e da manipulação para que a criança desenvolva os conhecimentos que ela já possui. Os desenhos são apresentados a partir do momento em que o autor reitera a importância do processo de representação e abstração da informação, já que, o desenho se configura como uma etapa que ajuda a criança no processo de aprendizagem. A representação aritmética é a terceira etapa a ser atingida,

⁷ MUNÉ, J. J. Pedagogia del cálculo. Girona: Dalmau Carles Pla, S.A., 1936.

quando no percurso de aprendizagem a criança necessita desenvolver o raciocínio aritmético para resolver problemas.

Muné dedica várias páginas para tratar dos tipos de problemas e exercícios, sendo essa uma etapa para desenvolver a prática na criança. No entanto, deve-se evitar o automatismo, sempre apresentando exercícios e problemas diferenciados para que a criança não se restrinja a um único tipo de raciocínio, por ter aprendido a resolver um único tipo de problema. Em meio a todas essas etapas, identificamos um propósito a ser alcançado a partir do professor, que é garantir a aquisição do conhecimento pela criança. A partir da identificação dessas etapas é que traçamos a nossa nova categoria de análise: *observação e manipulação, desenho, representação aritmética, exercícios e problemas*.

Apresentamos que o “*Libro I - metodologia e procedimiento*” possui uma carga de saberes que são próprios do professor que ensina cálculo, pois as instruções dadas por Muné remetem aos *saberes para ensinar*, uma vez que, o autor condiciona ao professor os saberes que esse deve ter sobre os campos disciplinares, sobre as práticas e sobre as instruções que devem ser desenvolvidas durante o seu trabalho.

A partir das pesquisas levantadas no estado do conhecimento identificamos que os autores Moroto (2020), Fortaleza (2021), D’Esquivel (2019) e Cruz (2021) trouxeram em suas análises as propostas didáticas postas pelos autores dos livros por eles investigados. Podemos dizer que as ideias de Muné vão ao encontro com o que é defendido em livros dedicados a professores que ensinam matemática de tempos próximos. Destarte, essas pesquisas apresentam as mesmas ideias investigativas de identificar os métodos didáticos nos livros e manuais pedagógicos dedicados a professores que ensinam matemática.

No próximo tópico discorreremos sobre a análise dos seis estágios que compõem o Livro III de geometria, identificando as quatro etapas de aquisição do conhecimento pela criança em conexão com os saberes profissionais do professor que ensina matemática.

4.4 LIBRO III - DIDÁCTICA DEL GEOMETRÍA: AS ETAPAS DE AQUISIÇÃO DO CONHECIMENTO E A ANÁLISE DE UMA MATEMÁTICA A ENSINAR E UMA MATEMÁTICA PARA ENSINAR

No início do Livro III, Muné traz alguns pontos abordados no Livro I para apresentar ao leitor como deve ser desenvolvido o trabalho do professor para o ensino de geometria. Neste momento, identificamos a presença das quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança.

Assim, de acordo com Muné, ao trabalhar com a geometria o professor deve iniciar o trabalho a partir do terceiro estágio de aritmética, para que os seis estágios de geometria ocorram simultaneamente com os demais seis estágios de aritmética, postulando esse caminho como favorável para o desenvolvimento do trabalho do professor e para a aprendizagem da criança.

O autor enfatiza que deve se seguir uma ordem de exposição dos conteúdos, de modo a adotar uma ordem natural, para que o novo conceito seja solicitado pelo anterior. Além disso, o professor deve explorar com a criança a observação de inúmeras figuras e corpos, pois a observação ajuda a criança a entender a complexidade dos conceitos. Nossa intenção não é mostrar a sequência na qual os assuntos são apresentados, mas sim, como são desenvolvidas e alcançadas as quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento a partir da análise dos temas de geometria, que são propostos nos estágios.

Neste capítulo discorreremos sobre a análise dos três primeiros estágios do trabalho didático, para descrever essa análise abordaremos um tema de cada estágio devido à abundância de conteúdo apresentado no material, e assim, apresentaremos como são retratadas as quatro etapas de aquisição do conhecimento pela criança, que já foram enunciados no capítulo sobre o referencial teórico-metodológico desta pesquisa. Concomitantemente, caracterizaremos os saberes profissionais a partir da análise. Para Valente:

As pesquisas sobre o saber profissional do professor de matemática em perspectiva histórica intentam evidenciar e tornar inteligíveis as mudanças relativamente à matemática a ensinar e à matemática para ensinar. Ambas, como se mencionou, mostram-se articuladas ao longo tempo. Cabe ao historiador da educação matemática, na verdade, uma tripla tarefa: caracterizar essas matemáticas e mostrar como elas estão relacionadas. (Valente 2019c, p. 18).

Para tal análise, reiteramos que o estágio é determinado pelo autor e as etapas são elaboradas por nós a partir das apropriações que realizamos ao analisarmos o livro em questão. Dessa maneira, a análise dos saberes profissionais será realizada a partir da arguição das quatro etapas identificadas em cada estágio apresentado pelo autor.

4.4.1 PRIMEIRO ESTÁGIO DO TRABALHO DIDÁTICO

O primeiro estágio do trabalho didático foi percorrido por Muné em 38 páginas contendo orientações para que o professor possa trabalhar com a iniciação aos conceitos básicos de geometria. Para análise do primeiro estágio escolhemos o tema o *corpo geométrico*, nessa

primeira parte o autor sugere que o professor comece a introduzir a geometria de forma simples e lúdica, tendo como base o que a criança já conhece.

Optamos em analisar o tema *corpo geométrico* por ele se tratar de uma introdução dos conceitos de geometria. Muné reitera que os assuntos estão entrelaçados e que para que a criança alcance um certo domínio da geometria, inúmeros assuntos foram apresentados para que o professor desenvolva no primeiro estágio do trabalho didático. Diante disso, dentro do tema corpos geométricos são desenvolvidos os seguintes assuntos: precisão de conceitos, limitação de um corpo; face plana; face curva; o mais e o menos em corpos geométricos; os determinantes de aumento e diminuição; o conceito de dimensão; o dobro e o triplo de um corpo; volumes iguais e distintos; volumes equivalentes; corpos de dimensões iguais e o crescimento do paralelepípedo e do corpo em geral. Esses assuntos estão fortemente relacionados, pois como Muné justifica em sua obra, o assunto seguinte surge a depender de uma necessidade do anterior.

No entanto, não objetivamos seguir uma ordem de apresentação dos assuntos desenvolvidos, pois queremos identificar o processo de desenvolvimento das quatro etapas de aquisição do conhecimento pela criança e os saberes profissionais mobilizados para ensinar geometria. Diante disso, buscamos detalhar como as etapas foram alcançadas a partir das orientações que Muné traz para desenvolver o tema sobre corpos geométricos no primeiro estágio.

Antes de adentrar nas etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança, sentimos a necessidade de apresentar como o autor define o conceito de quantidade em geometria. Assim, para orientar o professor Muné define como deve ser trabalhado a interpretação de quantidade e reitera que o estudo sobre o conceito de quantidade não pode ser trabalhado separadamente, seja no cálculo aritmético ou na geometria. Diante disso, Muné explica que:

No cálculo aritmético puro, a quantidade era percebida como um todo suscetível de crescimento ou diminuição, por agregação de elementos unitários tangíveis, ou por segregação dos mesmos. Na Geometria a extensão é o quanto. E não cresce por unidades soltas e tangíveis, mas por unidades arbitrárias, convencionais, que primeiro devem ser estabelecidas. Daí a necessidade de conhecer o número e a medida para a apreciação da quantidade na Geometria. Ainda mais se levarmos em conta que a quantidade, sendo a extensão, pode variar em fases sucessivas e em muitas unidades ao mesmo tempo. Um retângulo cujo comprimento é aumentado em uma unidade cresce em unidades de área, que é a largura. E da mesma forma para outros casos. Tudo isto aconselha proceder com muita ordem, para poder cimentar e consolidar as ideias (Muné, 1969, p.511, tradução nossa).

Ao estabelecer que na geometria a quantidade deve ser dada por unidades arbitrárias, entendemos que essa unidade é uma medida estabelecida previamente pelo professor ou dada pelo exercício. Como no caso de adotar um tamanho ou objeto como medida, o que pode gerar certa confusão para o entendimento da criança, pois ao adotar um objeto como parâmetro de medida a criança pode confundir essa medida se esse objeto não condizer com a mesma medida na realidade. Desse modo, levando a criança a fazer comparações erradas por ter uma interpretação distorcida das unidades de medidas. O assunto sobre a definição de quantidade em geometria é de suma importância, por esse ser uma temática recorrente e seu entendimento ser necessário em todos os temas e assuntos, por essa razão optamos em apresentá-lo ainda no início da nossa análise.

- OBSERVAÇÃO E MANIPULAÇÃO

Ao analisar o capítulo *Didáctica del Geometria*, já nas *palabras iniciales* o autor pondera que a geometria tem sido a disciplina que mais é afetada pela falta de compreensão, e pela escassez de naturalidade dos procedimentos e que isso vem caindo na rotina no momento do ensino, pois:

O homem nunca viu pontos no ar, nem linhas soltas vagando pelo espaço. Nenhum sentido aprecia o que não existe fora dos corpos. E, no entanto, eles ainda insistem, mesmo que a pedagogia retumba contra isso, eles ainda insistem em dar à criança ilusões sensoriais que levam a nada além do caos.” (Muné, 1969, p.503, tradução nossa, grifo nosso).

A partir disso, é possível identificarmos a valorização que o autor atribui para primeira etapa de aquisição do conhecimento pela criança – observação e manipulação - que Muné (1969) evidencia após explicar a importância dos sentidos, nesse caso o ver e o tocar/manipular, pois é a partir das sensações que a criança consegue manifestar uma linha de raciocínio para construir novas ideias, abrindo caminhos para o que pode vir depois desse primeiro contato. Podendo levar a criança a fazer comparações, questionamentos, observações. Para isso, o autor enfatiza que o docente deve valorizar o conhecimento prévio da criança no processo de observação e manipulação.

Muné deixa como marca em seu trabalho uma tendência que talvez seja reflexo da vaga que o autor se fundamenta, sendo destaque a característica do ensino que inicia a partir da observação e da manipulação. A partir dessa ideia Muné (1969) define como deve ser apresentado o conceito de corpo geométrico, sendo que defende que corpo não se trata de um

elemento central da geometria, e deve se dar o conceito de corpo em si, a partir da observação. Assim, os professores:

Apresentam corpos inertes, quaisquer corpos geométricos e não geométricos. Os objetos, suas formas, seus tamanhos, sua quantidade, devem ser variados. Observe analogias e diferenças em geral. Varie o ponto de vista do arranjo: exterior áspero, fino, liso, quebrado, uniforme, pontiagudo, arredondado, plano, etc. **Use especialmente os sentidos do tato, visão e músculos.** (Muné, 1969, p. 510, tradução nossa, grifo nosso).

Ao tratar sobre corpos geométricos é trabalhado a observação identificando semelhanças e diferenças entre esses corpos e em seguida analisar a superfícies desses por meio da observação e da manipulação. O professor deve apresentar a criança primeiro corpos com superfícies planas e depois com superfícies curvas. “O corpo deve ser reconhecido com a mão, apreciando a superfície com as almofadas digitais” (Muné, 1969, p.515, tradução nossa).

Os corpos não devem ficar apenas no alcance da visão das crianças, mas que esses devem ser colocados em suas mãos para que possam ter mais clareza dos detalhes ao sentir as texturas, tamanhos e formas. Além disso, o professor deve apresentar as crianças vários corpos de variados tamanhos, esse processo faz com que a criança aprimore elementos conceituais para trabalhar a abstração.

É recomendado que os professores produzam esses sólidos a partir de materiais que sejam de fácil aquisição, mesmo que em algumas escolas esses materiais sejam comprados, sendo que é mais interessante a fabricação desses pelo professor com materiais mais simples. Além disso, Muné destaca o dever da escola quanto à produção desses materiais pelo professor, pois para ele a escola deve disponibilizar um grande arsenal de materiais para que o professor possa trabalhar com seus alunos. Assim, Muné enfatiza que:

A escola deverá dispor de réguas graduadas, compassos, folhas papelão, argila, plasticina, cera, réguas de madeira, pratos retangulares, caixas, réguas articuladas, régua de dobradura, instrumentos de corte, tesouras, caixas de instrumentos de desenho, esquadros e chanfros papelão, fio, alicate, etc. O mesmo trabalho escolar exigirá o necessário. É fundamental ter uma coleção de formas geométricas estilizadas em arame e uma coleção de corpos geométricos também estilizados em arame. Eles devem ser grandes. [...] a escola deve dispor de grande estoque de gesso em largura e cor, pois os personagens das figuras, os objetos temáticos não serão diferenciados para maior segurança de observação e relacionamento (Muné, 1969, p. 506, tradução nossa).

O professor pode apresentar vários materiais para as crianças como cera, plasticina, gravetos e argila, para que elas possam ficar livres para construir diferentes corpos geométricos. Muné (1969) indica que nesse momento, o professor pode levar a criança a construir vários formatos que levam a corpos diferentes. Assim, ao trabalhar com a argila a criança pode formar

vários corpos com um mesmo material sem variar a quantidade de matéria e a partir disso, pode atribuir novas variantes, como a cor, comprimento, espessura. Nesse momento a criança é estimulada a trabalhar usando apenas os sentidos, já que as características geométricas serão acrescentadas posteriormente

Por outro lado, o autor não traz imagens ilustrando as construções desses materiais, mas dá sugestões de como produzi-los e destaca a sua devida importância. “Você não deve tê-los à vista das crianças, mas *coloque-os em suas mãos*, para que os tenham e os retenham, *observando-os*. Deve haver várias séries de corpos, quaisquer ou geométricos, e, dentro destes, séries de cada classe, variando em tamanho, número de faces, etc.” (Muné, 1969, p. 510, tradução nossa, grifo nosso).

Muné (1969), explica ao professor como devem ser os procedimentos para instruir as crianças a identificar as faces planas, podendo ser por meio da justaposição de corpos, em que a criança observará a coincidência de certos corpos e assim o professor pode mostrar que a superfície plana também coincide com o chão, com o tampo de uma mesa, com as paredes, etc.

Já para as superfícies curvas o autor aborda um novo procedimento a ser tomado pelo professor, pois diferente das superfícies planas, as superfícies curvas nunca se coincidem por justaposição: “Observe a coincidência linear nas superfícies curvas regradas e a coincidência pontuada na esfera e nas superfícies do tipo deformado. Não vá com nomenclaturas.” (Muné, 1969, p.515, tradução nossa). A concepção de superfícies curvas pode ser alcançada por meio da diferença entre a superfície plana, assim o ideal é trabalhar com o sentido da criança, a observação e o tato.

Muné explica que os copos não podem ser observados sem identificar a forma natural que os compõe. Assim, podemos observar que a esfera é composta pela forma redonda, os cilindros de base circular, sendo que todos os corpos circulares são compostos pelo mesmo princípio que é a esfera, pois ao cortar uma esfera podemos analisar que essa produz uma seção circular assim como os cilindros e cones. O professor pode realizar comparações com objetos que representam essa seção circular como anéis, tubos, rodas. Ao traçar o desenho desses objetos teremos a primeira figura que represente esses corpos.

Nessa etapa de observação, apresentamos as maneiras que o autor utiliza para trabalhar com os sentidos, por meio de apresentações de corpos geométricos e a partir disso o autor indica para os professores trabalharem com a representação, com materiais concretos, que a criança tem no mundo real. Essa proposta já foi apresentada pelo autor no decorrer da metodologia e procedimento, evidenciando como o Livro I é trabalhado no desenvolvimento do Livro III.

Identificamos que a observação e manipulação, sustenta uma maneira que o autor encontrou para instruir o professor a ensinar um determinado assunto de geometria. Então, para desenvolver os temas propostos e os assuntos que o compõe, são detalhados, e a princípio requerem a utilização da observação e da manipulação para o entendimento da criança. Muné orienta o professor trazendo instruções de como proceder para desenvolver os assuntos de um determinado tema, os materiais que podem ser utilizados, a forma como deve ser iniciado para que a criança alcance com êxito o objetivo, que é o entendimento do tema. Então, pode-se afirmar que a manipulação e a observação se configuram como uma *matemática para ensinar*, mobilizados no tema de geometria, pois elas estão relacionadas com a *matemática a ensinar* e os *saberes para ensinar matemática*.

- DESENHO

A representação na geometria é necessária, pois ela possibilita a criança a alcançar a realidade, uma vez que Muné (1969), discorre que a representação quando isenta de obstáculos ela é uma substituta da realidade, sendo esse um processo que leva a passagem do real para o representado e o inverso, do representado para o real. Assim, de acordo com Muné (1969), para a geometria, na passagem do real para o representado a criança pratica a abstração do corpo. O autor apresenta estudos sobre a passagem do representado para o real, no qual a criança aprende a interpretar representações. Pois, para alcançar a abstração, a criança precisa trabalhar na geometria com a observação, de modo a saber realizar comparações entre corpos e suas representações.

Desta forma, serão adquiridos elementos da imaginação para representar abstratamente e traduzi-los em representação por desenho ou por realizações, as formas dos corpos e seus elementos. E assim serão obtidos novos elementos de imaginação, para poder compreender e interpretar o que está representado (Muné, 1969, p.514, tradução nossa).

Após, inúmeras observações de corpos e corpos geométricos, a criança precisa praticar a abstração a partir desses sólidos, para isso é aconselhável a estilização de novos corpos, de modo a reduzir a matéria, porém permanecendo a forma para depois se chegar ao desenho e desse modo, alcançar a forma pura e livre da existência material, podendo comparar os desenhos com seus corpos materiais.

Para alcançar a abstração, o professor pode conduzir a criança a retirar elementos do corpo que esteja observando. Por exemplo, com a ajuda de corpos construídos com arames e as faces com papelão, a criança enxergará a face dos copos sendo abstraída, depois elas podem

desmontar e ver as retas que formavam a estrutura dos corpos. Esse processo ajuda a reforçar os conceitos e a sustentar a abstração. A partir da realização de inúmeros exercícios a criança passará a realizar os desenhos mais facilmente, e por conseguinte irão apenas imaginá-los, sem precisar do suporte de materiais concretos.

Muné discorre que a figura é uma representação abstrata da face de um corpo, e como em todos os assuntos tratados, é recomendado pelo autor praticar inúmeros exercícios nos quais a criança fique livre para realizar desenhos de figuras. O mesmo deve ser feito com corpos de superfícies curvas, paralelepípedos, pirâmides, etc. Com o auxílio do material o professor pode mostrar o número de lados e compará-los com os números de faces. Ao abstrair os corpos, as faces podem auxiliar na produção de figuras. Recomenda-se que se repita o processo para outros corpos de maior número de faces.

Esses exercícios dão suporte para garantir a abstração. Muné indica que o professor pode utilizar materiais como papelão e arame para construir corpos geométricos e abstrair as faces, mostrando apenas o “esqueleto” da estrutura. Isso ajuda a criança a desenhar e posteriormente imaginar. Esse processo só é possível através dos exercícios de observação e manipulação realizados com os sólidos. E é por isso que se recomenda a utilização de vários corpos geométricos de distintas formas e tamanhos para ampliar o conhecimento da criança.

O autor explora os desenhos quando reitera a necessidade da criança se desapegar da forma material pura, é recomendado ir reduzindo a estrutura externa da representação de um corpo ao máximo. Com isso, Muné sugere traçar bordas de arames, apresentando apenas os limites dessas representações, ou seja, o esqueleto, isso ajuda a treinar a criança para que ela possa imaginar o corpo. Após essa ação, o autor indica apresentar desenhos para as crianças, para que elas possam assimilar com a representação do corpo objetificado com os arames e depois com os sólidos reais e compará-los. Dessa forma, sempre que necessário bastará ao professor mostrar às crianças os três tipos de impressões de corpos para sanar possíveis dúvidas.

Após esse passo é proposto aos professores que ampliem a ideia subjetiva desses corpos. Para introduzir a ideia de reta, basta o professor reduzir a representação do corpo, por exemplo, uma representação do esqueleto de um corpo com arames, basta o professor cortar os vértices para separar a estrutura e assim garantir elementos para as próximas associações, nesse caso o da reta. Identificamos a que finalidade dada ao desenho se configura para um *saber para ensinar*, como também o manuseio e construção de materiais concretos de fácil acesso para os estudantes. Vemos que os desenhos além de contribuir para o processo de abstração, trazem

novos elementos para a compreensão dos assuntos, complementando as etapas para que a criança avance na aprendizagem.

- REPRESENTAÇÃO ARITMÉTICA

Para introduzir a ideia de mais e de menos em corpos geométricos, Muné (1969) orienta o professor a apresentar corpos de lado maior ou menor e realizar comparações por justaposição. O autor postula: “Compare paralelepípedos com a mesma base quadrada, mas de alturas diferentes. Nos exercícios seguintes, compare outros paralelepípedos com bases diferentes e mesma altura. Posteriormente, observe paralelepípedos de dimensões diferentes” (Muné, 1969, p. 516, tradução nossa). Pode-se realizar esse exercício com outros corpos geométricos, para corpos redondos coma a esfera pode-se comparar raios e no caso dos cones e cilindros raios e alturas.

Os elementos determinantes sobre o aumento ou diminuição de um corpo geométrico pode ser iniciado com a comparação entre paralelepípedos e assim por meio de análises minuciosas identificar um lado maior, esse chamado de comprimento. Ao analisar inúmeros sólidos, apresenta-se a variação da espessura e da largura e assim o professor irá conduzir a criança a identificar os três fatores determinantes da extensão espacial de um corpo.

Muné reitera que o conceito de dimensão é adquire através do estudo de mais e de menos ao analisar um corpo geométrico, ao observar quanto mais ou quanto menos uma variante de um corpo é maior, ou menor em relação a outro corpo igual, mas de tamanhos diferentes. Isso também pode ser observado por meio da justaposição de corpos, a análise realizada com corpos sobrepostos ou lado a lado. Ao trabalhar essa ideia nas três dimensões, a criança estará preparada para trabalhar essa informação utilizando medidas numéricas. Por isso, o ideal é que o professor proporcione exercícios nos quais a criança possa observar nitidamente o crescimento ou diminuição de dimensões de corpos por meio de materiais flexíveis como borracha ou plástico, podendo mostrar a variação de uma das dimensões ao deixar as outras duas fixas.

Para o estudo de corpos equivalentes, Muné instrui o professor a iniciar essas investigações a partir de exemplos com cubos e paralelepípedos, pois esses permitem um melhor entendimento, ao trabalhar com os cubos podemos analisá-los da mesma dimensão para construir cubos de dimensões maiores. Deste modo, por justaposição pode-se construir cubos de dimensões maiores a partir de cubos menores ou realizar a segregação ao retirar cubos menores de um cubo maior.

Ao praticar essa ideia, a partir de um cubo, quantos cubos seriam necessários para construir um maior. Assim, ao variar uma das dimensões (altura, espessura e largura), acrescentando um cubo por justaposição, a forma obtida deixa de ser um cubo e passa a ser um paralelepípedo, levando a criança a pensar o que é preciso para modelar um cubo maior. Diante disso, será necessário acrescentar 7 cubos para se chegar a um cubo maior a partir de um menor, sendo que o novo cubo será composto por 8 cubos menores.

Para construir o conceito de dimensão Muné instrui o professor a trabalhar com o crescimento de um corpo a partir do dobro, triplo. Ao utilizar cubos e paralelepípedos o professor pode instruir as crianças a analisarem as dimensões de cada corpo, e ao concluir que os corpos iguais apresentam as mesmas dimensões, por justaposição desses corpos, pode-se observar o crescimento em seu dobro ou triplo, ou quantas vezes mais serão sobrepostos os corpos geométricos. Sendo que nesse caso a unidade de medida adotada é arbitrária, pois o corpo serve como a unidade de crescimento, Muné adverte que nesse caso, outros prismas quaisquer não são apropriados para trabalhar essa ideia.

Após o entendimento sobre as dimensões dos corpos, ao trabalhar com a análise de corpos semelhante, que apresentem as mesmas proporções, pode-se chegar à ideia de volume, assim esses corpos podem apresentar o mesmo volume. Ao tratar desse assunto, Muné reitera que o professor não pode deixar a criança cair em desentendimento, pois corpos iguais, não significa que são equivalentes, podemos ter dois cubos de dimensões diferentes, mas que são corpos iguais, e ter dois cubos de mesma dimensão, sendo corpos equivalentes. O que nos leva a dizer que esses corpos também possuem volumes equivalentes.

O autor descreve que tudo que já foi estudado é uma preparação para apresentar a ideia de volume para a criança, utilizando a comparação entre corpos maiores e menores. Muné orienta o professor a colocar as crianças para observarem o espaço ocupado por um corpo, e assim trabalhar novamente a questão de maior e menor pelo fato de o corpo ocupar maior ou menor espaço, independentemente da quantidade de matéria que o compõe. Assim, Muné explica que:

Com um bloco de matéria você pode obter um corpo com volume mínimo: comprimindo até o máximo. E pode-se formar um corpo que ocupe mais espaço, como um vaso que se fecha completamente. O corpo ocupa mais espaço. O que cresceu nele não foi a quantidade de matéria, mas a quantidade de espaço, o volume. Aqui está o novo aspecto da questão (Muné, 1969, p. 512, tradução nossa).

Esse trabalho pode ser desenvolvido utilizando uma bexiga de borracha que ao inflá-la o volume aumenta e se a murchar ele diminui, de modo a trabalhar o volume como o espaço

ocupado pelo corpo e quantidade geométrica como quantidade de espaço. Essa quantidade não recebe valor numérico, mas nessa ideiação é desenvolvido na criança a noção de quantidade ao representá-la.

Para representar o crescimento, o professor pode adotar um elemento e poderá obter aumento ou diminuição, sendo esse elemento ou corpo, que em caso de corpos iguais podemos analisar um aumento do espaço ocupado pelos corpos. Por partes, podemos analisar o aumento das medidas, dos volumes e dos lados.

Observe o crescimento por justaposição: cubos que estão fixados, paredes de tijolos, etc. Note-se o crescimento de extensões superficiais – não estamos ainda a falar de superfícies – através de ladrilhos que cobrem maiores ou menores extensões de pavimento, peças que se justapõem, fichas, folhas de papel, pedaços de tecido, etc. Nos desenvolvimentos sucessivos, observe o crescimento em comprimento, com fios, fitas, varetas, réguas, etc. O desenho é amplamente utilizado. (Muné, 1969, p. 514, tradução nossa).

Para demonstrar a ideia de volume ou capacidade, o autor reflete sobre a forma em que se pode mostrar isso às crianças, utilizando um recipiente com água para demonstrar o volume de um determinado corpo ao mergulhá-lo e verificar o quanto de água transbordou. Já que, ao reservar a água que transbordou o aluno deve entender qual é o volume desse corpo, dessa maneira, quando o autor se utiliza dos materiais concretos e do meio para poder elucidar a ideia de volume do corpo, podemos notar a concretude como um *saber para ensinar*.

No primeiro estágio do trabalho didático a representação aritmética surge como um passo que faz com que a criança necessite aprender outros meios para ajudar a chegar na solução de determinados problemas. Para melhor entendermos, Muné explica que o interesse da criança pelo cálculo é escasso, no entanto, ela pode apreciar com mais intensidade o *interesse de referência*, o qual o autor diz ser um desejo provocado, ou ainda, um rompante por necessidade, na qual a criança demanda de alguma informação adicional para chegar na solução do problema. Ainda, Muné aponta que “Em um problema real, um projeto, uma construção, um desenho podem exigir a necessidade de uma operação, por exemplo, a raiz quadrada.” (1969, p.504, tradução nossa).

Nesse caso, para a representação aritmética o autor traz a proposta de trabalhar com maior e menor, crescimento e decrescimento, de expansão e capacidade, mas sem utilizar valores numéricos, ele utiliza a comparação para trabalhar essa ideia. Assim, inferimos que essa prática do autor se enquadra como uma introdução da representação aritmética. Sendo que essa ação leva o aluno a colocar o seu conhecimento em prática, de modo que ele sinta que aquilo tem uma determinada utilidade, e quando postos em problemas ou exercícios, faz-se necessário

acrescentar elementos que representam a ideia das operações de mais de menos para se chegar a uma resposta.

Identificamos que representação aritmética se dá de uma maneira intuitiva no primeiro estágio, pois o autor não utiliza fórmulas ou nomenclaturas algébricas para trabalhar a representação aritmética. Mas apresenta intuitivamente, quando propõe para que o professor desenvolva com a criança a ideia de crescimento e decrescimento de um corpo, capacidade, aumento e diminuição. Sendo que esses elementos vão sendo aplicados de maneira a trabalhar a interpretação matemática.

- PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

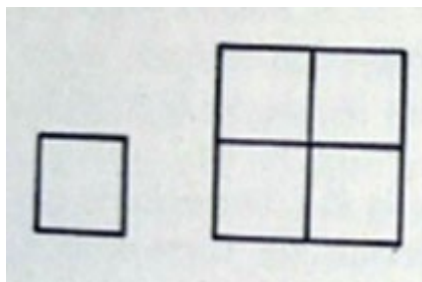
O autor enfatiza a necessidade de aplicação de variados exercícios para auxiliar a criança a articular o seu raciocínio. Desse modo, nesse estágio o exercício é utilizado para trabalhar a abstração, o processo de fazer com que a criança deixe de pensar apenas nas representações concretas e passem a trabalhar a forma abstrata. Destarte, para cada assunto a ser desenvolvido o autor orienta o professor a colocar a criança para realizar exercícios de observação, deixando-a livre para construir corpos e desenhar.

Essas instruções fazem com que as crianças pratiquem por meio de exercícios de repetição tudo o que lhe foi ensinado. Dizemos que os tipos de exercícios desenvolvidos neste estágio foram de fixação e recapitulação. Para trabalhar a ideia de crescimento de um corpo, o autor traz uma ilustração para melhor entendermos como o professor deve desenvolver esse trabalho. Mostrando o aumento sucessivo de cubos para que o aluno pratique a ideia de crescimento.

Em exercícios sucessivos, observe o crescimento do cubo de 1 para 2 para 3 e a 4 elementos de dimensão, produzindo os totais sucessivos de 1, 8, 27 e 64 cubos integrantes. Por ora basta observar que, a forma do cubo é mantida, um aumento condicionado em todas as três dimensões. Faça exercícios analíticos, reduzindo cada dimensão a um elemento e observando a série inversa dos cubos obtidos (Muné, 1969, p. 518, tradução nossa, grifo nosso).

Esse é um tipo de exercício analítico realizado na prática, que pode ser utilizado para representar a ideia de crescimento. Nesse exemplo, quando desenvolvido com sólidos, o autor explora o crescimento de cubos, como na figura a seguir:

Figura 3: Representação da ideia de crescimento de cubo



Fonte: Muné (1969)

Diante disso, o professor deve apresentar para a criança outros casos de aumento condicional conservando a forma, que pode ser realizado com inúmeros exercícios com paralelepípedos e cubos. Essas práticas automáticas de repetição (exercícios) colocam a criança para pensar, e ao se deparar com problemas diversificados faz com que ela se adapte aos processos de cálculo e estrutura, e trabalhe o raciocínio de modo a se familiarizar cada vez mais com as etapas de resolução de um determinado problema.

No entanto, como já recomendado no Livro I e ratificado pelo autor no Livro III, o professor deve abrir possibilidades de problemas e exercícios variados, para que a criança não entre em modo automático de repetição para solucionar apenas problemas específicos, mas que seja capaz de articular ideias para solucionar variados problemas. Além disso, neste primeiro estágio, para o tema estudado, Muné não traz propostas prontas de problemas para serem resolvidos. Mas, para o desenvolvimento do tema orienta o professor a trabalhar com materiais concretos para formular problemas reais a partir de situações reais. Isso se justifica, talvez pelo fato, de a criança ainda estar desenvolvendo conceitos iniciais da geometria.

A *matemática a ensinar* é evidenciada a partir do momento em que o autor designa o professor a trabalhar assuntos sobre ideia de tamanho, volume, aresta, a partir da redução do esqueleto de um corpo, operações para o cálculo de medidas e a prática de exercícios envolvendo situações problemas, para que a criança trabalhe com a ideia de crescimento e decrescimento em sólidos geométricos e em representações planificadas.

Diante disso, no primeiro estágio, identificamos as quatro etapas que favorecem a construção do conhecimento pela criança. Sem se prender a ordem de exposição dos assuntos, mas estruturando uma sequência de como foram desenvolvidas as quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança ao seguir as recomendações de Muné. Ao descrevê-las identificamos a presença de um *saber para ensinar*, quando o autor destaca que o professor deve *mobilizar o conhecimento prévio da criança* para poder trabalhar com a ideia de corpo por meio do uso de diversos sólidos construídos pelo professor. Assim, a *matemática para ensinar*

surge a partir da relação entre esses *saberes para ensinar matemática* e a *matemática a ensinar*. Valente, (2019, p. 54) pontua: “a matemática a ensinar, como um *saber a ensinar*, por si só, não constitui um saber profissional do professor, a sua posse não distingue o profissional da docência de outros ofícios”. Por isso, identificamos no primeiro estágio uma relação de dependência entre a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*.

Em seguida, no próximo tópico será trabalhado o tema sobre *posição*, uma vez que, após o tema analisado no primeiro estágio referente a corpos geométricos, nos conduz a trabalhar com o entendimento sobre a posição desses corpos. Seguindo a sequência de exposição dos temas, identificamos como essencial trabalhar com o tema sobre *posição*, sendo esse o primeiro tema apresentado pelo autor no segundo estágio do trabalho didático.

4.4.2 SEGUNDO ESTÁGIO DO TRABALHO DIDÁTICO

O segundo estágio do trabalho didático é composto por 32 páginas que apresentam temas intitulados como: *a posição*, os ângulos e o círculo, convergência e divergência, paralelismo e transversais. Para esta análise optamos em trabalhar com o tema referente ao estudo sobre *posição*. Nesse estágio, o autor destaca que já foram adquiridos conceitos essenciais, a partir do primeiro estágio, para dar continuidade nos estudos.

- OBSERVAÇÃO E MANIPULAÇÃO

Para o estudo sobre *a posição*, Muné trabalha com assuntos sobre o entendimento das linhas horizontais e linhas verticais com elementos básicos, sem se prender a formalidades geométricas. Para a horizontalidade o autor destaca que esse é um conceito essencial na geometria, sendo que em superfícies planas devemos tomar como referência a posição para realizar comparações. O plano admite posição horizontal, pois essa também admite posição dos níveis de líquidos em repouso. Assim, podemos observar as linhas que compõe o plano horizontal e admitirmos que qualquer linha desenhada no plano é uma linha horizontal.

Muné (1969), explica que o plano horizontal é tangente à superfície esférica da Terra e a linha é tangente a superfície da Terra em um ponto, assim há infinitas linhas admitindo um único ponto de tangência. A abstração de um plano não é simples, mas para explicar para as crianças na prática, Muné orienta o professor apresentar os tampos das mesas e o chão como superfícies planas horizontais e assim realizar comparações com outras superfícies planas não horizontais.

A diferença de posição auxiliará a criança entender a ideia de plano horizontal. Para demonstrar a criança que uma superfície plana realmente se encontra na posição horizontal basta utilizar um nível (objeto utilizado para aferir a posição de um determinado item). Muné reitera que é fundamental que a escola tenha um nível (objeto de aferir posição) para que o professor possa desenvolver esse trabalho.

O conceito de perpendicular é apresentado a partir da ideia de uma direção que obedece à força da gravidade, já que, ao soltar um objeto a tendência é que ele recaia sobre o chão, sendo essa a direção de uma queda livre. O autor descreve que o professor pode utilizar o fio de prumo como ferramenta didática de trabalho, sendo esse, um material muito utilizado na construção civil para verificar o alinhamento na vertical de edificações de paredes e pilares.

Para cada local, a direção do prumo é em relação ao plano horizontal a perpendicular. O prumo não se inclina e sua maneira de cair no plano horizontal é precisamente análoga a maneira de cair de uma perpendicular em qualquer linha reta. É um modo particular e único (Muné, 1969, p. 542, tradução nossa).

Assim, Muné discorre que a partir de um fio de prumo podemos ver a tensão exercida sobre o fio quando esse suporta o peso quando solto em direção ao plano horizontal. O modo de cair do fio de prumo em relação a um plano horizontal é análogo a um plano perpendicular em relação ao plano horizontal, sendo esse um modo particular e único.

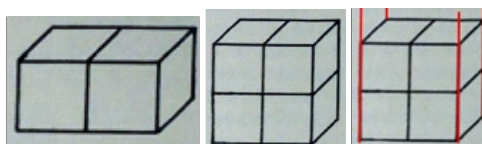
A demonstração dessa ação tem por objetivo fazer com que a criança compreenda a primeira ideia de perpendicular, ao aproximar a ideia do prumo como direção da perpendicular. O autor recomenda que os professores exercitem essa ideiação para fazer a criança observar a posição vertical dos corpos.

Muné orienta o professor que “Faça inúmeras observações, referindo-se à posição das paredes, dos móveis. Chame o conteúdo cultural espontâneo da criança” (Muné, 1969, p.542. tradução nossa). Isso, segundo o autor, ajuda a criança a identificar e entender qual é a posição vertical e sua relação com a superfície horizontal, sendo esse um primeiro ponto de apoio para fixar a posição dos corpos. Dessa forma, abrindo espaço para ser trabalhado o conceito geométrico de perpendicularidade e depois de ângulo.

O autor pontua que para se chegar à abstração dessa ideia, é necessário que ela seja redefinida. Assim, ele passa o que é representado a partir do conhecimento prévio, para o conceito geométrico de perpendicular, nesse momento é indicado trabalhar com corpos geométricos por meio de sólidos. Com isso, ele instrui o professor a fazer a criança justapor cubos, em que a linha de prumo corresponde às quatro arestas que definem a altura. As linhas

se fundem em uma só e caem sobre a mesma base de forma única. Repita o processo para mais cubos.

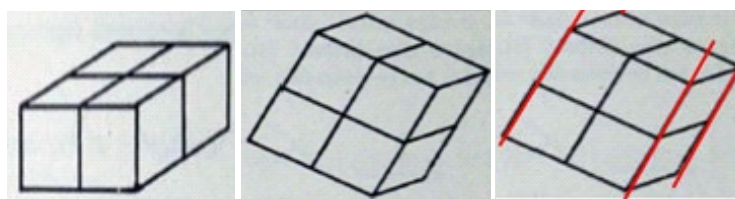
Figura 4: Utilização do cubo para o estudo de perpendiculares



Fonte: Muné (1969)

Mesmo mudando a posição relativa dos cubos, as arestas indicam duas direções que em cada lugar coincidem com a vertical e a perpendicular. O autor afirma que isso só acontece com duas perpendiculares.

Figura 5: Mudança da posição relativa do cubo para estudo de perpendiculares



Fonte: Muné (1969)

Muné reitera que esse é um novo elemento que contribuirá para a criança fixar o conceito de perpendicular, passando de uma concepção absoluta para o relativo, a partir de linhas verticais e horizontais em um ponto. Isso ajuda a criança a observar que duas retas são perpendiculares entre si independente do lugar e da posição em que são analisadas. Nesse momento, podemos ver a primeira etapa sendo desenvolvida ao utilizar a observação de objetos e a manipulação de materiais concretos.

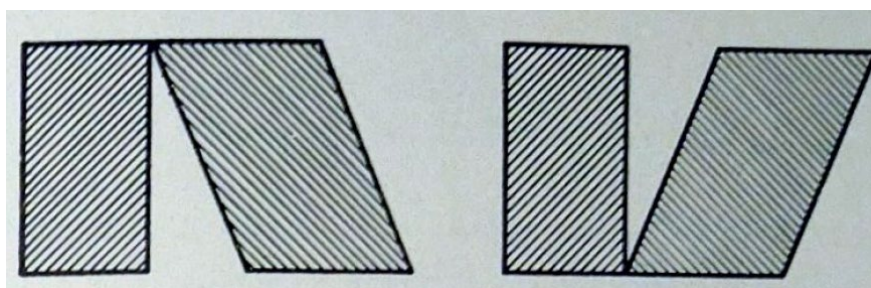
A partir disso, Muné introduz a apresentação do conceito de ângulo, pois o alinhamento da perpendicular com a horizontal analisadas a partir dos cubos só é possível devido ao ângulo reto formado entre essas linhas, tornando-se mais fáceis de serem compreendidos devido aos corpos que estão sendo analisados. No entanto, o autor adverte que a utilização da definição de ângulo, como um ângulo que forma 90° é antipedagógico, ele refere que essa apresentação deve ser expressada em outro momento e que definir pelo valor numérico não é definir. Segundo ele, o ângulo reto poderia ser expresso por 100° ou 1000° , tudo depende do tipo de divisão do quadrante.

Assim, para o estudo de ângulos maiores e menores, Muné orienta que o professor apresente para a criança, objetos e figuras que possam representar-se mais ou menos abertos em relação ao ângulo reto. Nesse momento é importante que o professor não se prenda a nomenclaturas dos ângulos, mas que apresente os conceitos, assim, basta a criança conhecer os ângulos e classificá-los em ângulos retos, menores e maiores que o ângulo reto. Além disso, o autor indica fazer exercícios de observação de ângulos utilizando um esquadro ou quadrados de material transparente

Para continuar estudando o assunto sobre ângulos, o autor segue apresentando por meio de uma dependência dos assuntos estudados a bissetriz, que pode ser posta para a criança com o auxílio de uma régua graduada. Dessa maneira, ao estabelecer um ângulo e a partir do vértice traçar uma bissetriz que divide esse ângulo ao meio, as crianças poderão realizar as medições com uma régua graduada. Elas poderão visualizar que ao dividir um ângulo ao meio, um mesmo espaço deverá ser ocupado pelos os dois lados da reta, o qual é a bissetriz.

Após esse primeiro entendimento de perpendicular e ângulo reto, Muné segue os estudos apresentando corpos oblíquos e a investigação de perpendiculares em corpos oblíquos. Para o entendimento de corpos oblíquos, o autor indica ao professor apresentar para as crianças dois corpos, um reto e um oblíquo para que ela possa justapor apoiados em um plano horizontal. A criança irá identificar que as arestas dos corpos divergem ou convergem, formando um ângulo maior ou menor que o ângulo reto.

Figura 6: Corpos oblíquos

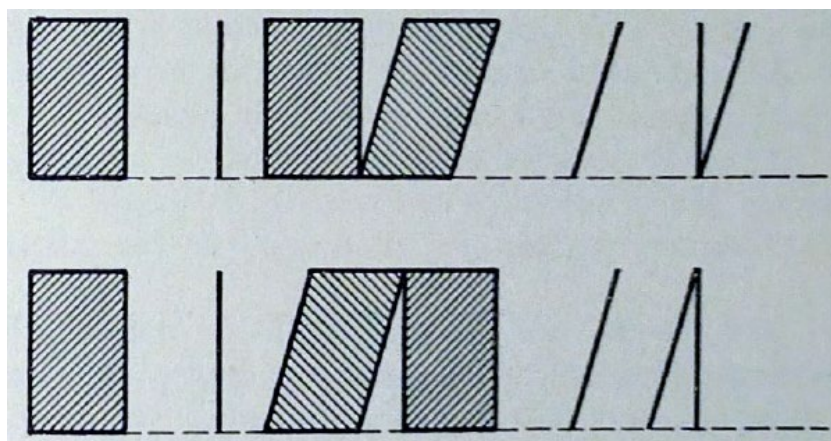


Fonte: Muné (1969)

Para essa observação o professor pode utilizar com as crianças o fio de prumo e para analisar figuras podem utilizar esquadros, o que os levarão a entender que em corpos retos as arestas formam um ângulo reto e que em corpos oblíquos as arestas formam ângulos diferentes (maiores ou menores). Dessa forma, o conceito de oblíquo pode ser alcançado em relação às

bases horizontais, assim, o ideal é praticar exercícios e realizar a abstração para se chegar a desenhos referentes a posição dos corpos.

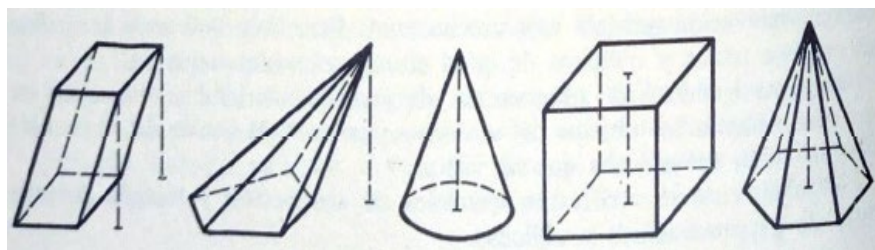
Figura 7: Posição dos corpos oblíquos



Fonte: Muné (1969)

Novas observações possibilitarão a abstração de arestas perpendiculares e oblíquas e em análise permitirá a comparação de suas posições relativas, o que proporcionará chegar ao conceito de linhas oblíquas. Além disso, a partir da observação entre corpos retos e corpos oblíquos, o professor pode apresentar esses corpos com alturas iguais. Ao justapor esses corpos, a criança poderá observar a perpendicularidade de um corpo reto e a obliquidade de um corpo oblíquo.

Figura 8: Altura de corpo geométrico



Fonte: Muné (1969)

Isso pode ser repetido utilizando objetos do meio onde a criança está inserida, trabalhando o que a criança já aprendeu no decorrer do primeiro e do segundo estágio. O passo seguinte é trabalhar com a abstração para se chegar aos desenhos de perpendiculares e oblíquas.

Muné discorre que é necessário que o professor tome uma medida para realizar comparações de tamanho entre arestas perpendiculares e oblíquas de corpos de mesma altura. Ao realizar essa comparação, trace uma perpendicular com o auxílio de um esquadro e linhas oblíquas, a partir do mesmo ponto em que se saia a perpendicular. Isso irá ilustrar para a criança a menor distância entre um ponto e uma reta. Além disso, podem-se observar os sucessivos ângulos formados entre as linhas oblíquas com a horizontal a partir da perpendicular desenhada.

Essa ideação construída pelo professor levará a criança aos conceitos de base e altura de um corpo, pois em um corpo é necessário observar a posição e distância mínima da base horizontal até o ponto mais alto do corpo. Destarte, estudando o conceito de altura de um corpo, sendo que a perpendicular já foi apresentada como distância mínima. Para melhor representar essa ideação, o professor pode utilizar o fio de prumo para visualizar a altura de mesas e outros móveis. Ao estabelecer o conceito de base, como já foi apresentado nos estudos de conceitos anteriores, será determinado o conceito de altura como elemento que se considera em relação à base. O ideal é observar a altura em corpos de arame ou corpos transparentes, depois passar a observá-las em corpos densos coloridos que destaquem a altura e depois realizar desenhos com lápis de cor, seguindo com a abstração do conceito de altura.

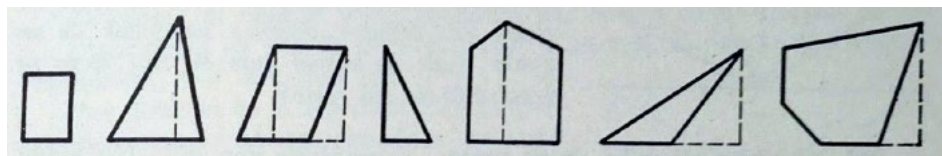
Ao analisar esta etapa para o segundo estágio do trabalho didático, identificamos que o professor deve apresentar a ideia de perpendicular para a criança e conduzi-la a abstração. Nesta fase vemos serem mobilizados vários assuntos para a criança compreender o tema sobre *a posição*. Para o entendimento do tema, Muné instrui o professor a utilizar a observação para apurar essa concepção. A manipulação se faz presente por meio do uso de sólidos geométricos e objetos para realizar comparações.

- DESENHOS

A representação por meio de desenhos entra para dar sentido aos traçados das linhas, uma vez que o autor afirma que o professor deve trabalhar a abstração com a criança. As linhas e os desenhos são os próximos passos para representar a perpendicularidade.

A identificação de uma altura a partir de um desenho é puramente abstrata, por isso, é necessário trabalhar a abstração do corpo. Ao analisar a altura em corpos sólidos, o professor deve fazer a criança analisar a altura em figuras. Para se chegar a essa ideação o professor pode seguir por meio do processo de abstração ao retirar um dos lados de um corpo que nos dá uma face, sendo essa face abstraída para um desenho.

Figura 9: Altura das figuras planas



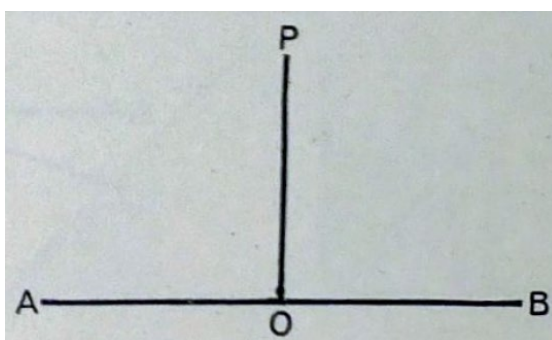
Fonte: Muné (1969)

A representação da altura em uma figura pode ser associada com a realidade apresentada nos corpos, uma vez que a criança deverá considerar que a figura está posta sobre uma linha horizontal.

Diante disso, devem ser apresentadas à criança várias figuras e com a ajuda de um esquadro o professor pode pedir para ela traçar a altura e destacá-las com cor diferente das demais linhas. Muné discorre que a altura pode ficar no interior ou no exterior das figuras, isso irá depender da forma que essa figura assume. Além do mais, em algumas figuras a altura é indicada pelo lado, como o caso do quadrado, retângulo ou por um desses lados, como os triângulos retângulos. Assim, é necessário que a criança fique livre para desenhar figuras e suas alturas.

A seguir o professor pode traçar uma reta horizontal e sobre ela definir um ponto, e nesse mesmo ponto traçar uma perpendicular. O professor pode pedir para as crianças traçarem outra perpendicular passando pelo mesmo ponto.

Figura 10: Perpendicular passando por um ponto

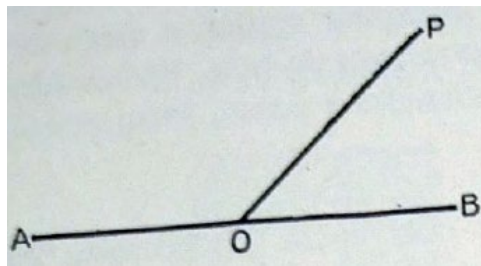


Fonte: Muné (1969)

Dessa forma, a lei será formulada, ao identificarem que “por um mesmo ponto só podemos traçar uma perpendicular” (Muné, 1969, p. 547, tradução nossa). Essa perpendicular forma dois ângulos retos e é apenas nessa posição que isso ocorre.

Dando continuidade na apresentação dos assuntos, Muné discorre que o professor deve mostrar a oscilação da reta perpendicular ao incliná-la. Deste modo, a linha deixa de ser perpendicular e passa a ser oblíqua, nesse caso o ângulo também muda, direcionando o estudo para o assunto sobre ângulos adjacentes. Sendo observado que o que uma reta perde em ângulos a outra, adjacente, ganha de modo a manter a soma do valor total de ambas. É válido ressaltar que nesse momento não se trabalha valores relativos e sim valores absolutos.

Figura 11: Soma de ângulos adjacentes

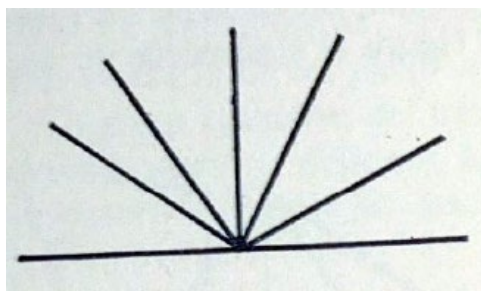


Fonte: Muné (1969)

Posto isso, a lei é formulada na qual “a soma de dois ângulos adjacentes é igual à soma de dois ângulos retos” (Muné, 1969, p. 548, tradução nossa). Percebemos que o desenho facilita a interpretação para que a criança entenda o procedimento para se chegar a lei de formação.

O trabalho do professor é ampliado ao mostrar para a criança vários ângulos formados por diversas retas a partir de um ponto comum e de apenas um lado de uma reta. Ao traçar a perpendicular, todos os ângulos formados de um lado resultam na soma que coincide com a adição de dois ângulos retos e assim o mesmo serve para o outro lado da perpendicular.

Figura 12: Soma de ângulos ao redor de um ponto



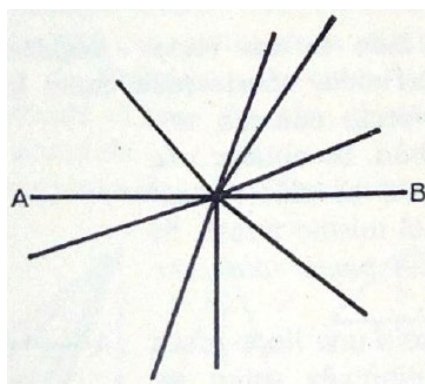
Fonte: Muné (1969)

Dessa forma, a lei será formulada: em que “a soma de todos os ângulos possíveis ao redor de um ponto e de um mesmo lado de uma reta é igual a de dois ângulos retos” (Muné, 1969, p. 548, tradução nossa). Em seguida, esse assunto tende para o estudo sobre a posição ao redor de um ponto. Para isso, Muné pede para o professor desenhar uma linha horizontal e sobre ela fixar um ponto:

Desenhe para a criança uma perpendicular indefinida. São obtidas duas perpendiculares. Observe como não é possível traçar outra perpendicular pelo mesmo ponto. Sabe-se que todo o espaço do plano é abarcado pelos quatro ângulos retos que foram formados. E será entendido que apenas quatro ângulos retos são possíveis em torno de um ponto (Muné, 1969, p.548, tradução nossa).

A partir disso, a criança pode realizar várias observações. De acordo com Muné “É fácil obter a lei: A soma dos possíveis ângulos consecutivos em torno de um ponto é igual à de quatro ângulos retos” (Muné, 1969, p.548. tradução nossa). Destacamos que a ideia primária de reta, pontos oblíquos e ângulos e a abstração dessas já foram trabalhados pelo autor.

Figura 13: Soma de ângulos consecutivos ao redor de um ponto



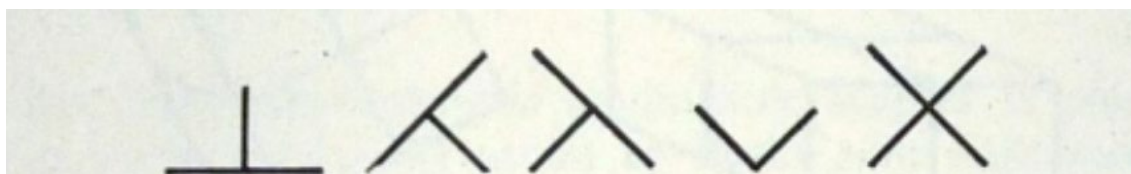
Fonte: Muné (1969)

Observamos que a criança participa da sua formação, tendo um papel ativo, ela identifica elementos para fundamentar ideias e chegar à lei de formação, o trabalho da criança acontece sob orientação do professor. Assim, ao iniciar a aula o professor deve estar preparado e ciente dos objetivos que deseja alcançar, pois ele conduzirá a criança para que ela possa atingir os passos necessários, e ressalta-se que o desenho faz parte desse processo, contribuindo para a abstração e entendimento para a formulações de leis.

Para dar continuidade aos estudos sobre ângulo, Muné traz como assunto correlacionado a este estudo o tema bissetriz e que para apresentá-lo a criança, o professor pode utilizar o desenho e a dobradura. Dessa maneira, ao formar um ângulo qualquer, esse pode ser dobrado de modo que um lado seja igual ao outro. Sendo que a linha que marca a dobra é a mesma que estabelece a divisão desse ângulo em duas partes iguais, uma vez que, ao sobrepor os ângulos eles devem coincidir. Esse é o primeiro entendimento de bissetriz, e o ideal é que a criança realize vários exercícios com ângulo maiores e menores por meio de desenhos e dobraduras.

A abstração do ângulo reto pode ocorrer por meio do uso de corpos visíveis, como o cubo. Cabe ao professor decompor o cubo retirando as faces e assim ao observar as perpendiculares e os ângulos retos dos corpos, a criança deverá isolar esses ângulos e traduzi-los por representação. Ela deve ficar livre para desenhar qualquer figura que contenha o ângulo reto. Portanto, o ângulo reto será entendido a partir do conceito de perpendicularidade de duas retas como segue na figura

Figura 14: Posição do ângulo reto

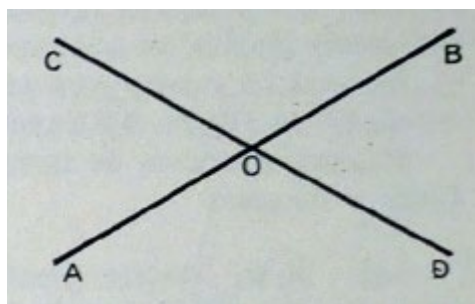


Fonte: Muné (1969)

Nesse caso, a criança saberá identificar a perpendicularidade a partir do ângulo reto, mesmo não estando na posição horizontal em relação ao chão, aprendendo a constatar uma perpendicular em qualquer posição.

Ao continuar, o professor pode pedir para que a criança trace duas linhas que se cruzem de forma indefinida. Ao observar uma das linhas pode-se notar que de um lado da linha se formam dois ângulos adjacentes e do outro lado se formam mais dois. Assim, ao duplicar essa representação para a outra linha, ela conseguirá identificar a coincidência dos ângulos, sendo um o prolongamento do outro, ou seja, do ângulo oposto.

Figura 15: Ângulos opostos pelo vértice

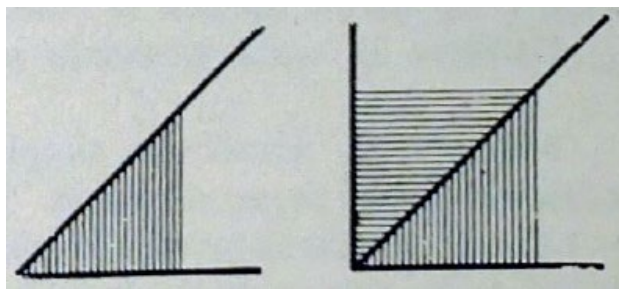


Fonte: Muné (1969)

Dessa maneira, se forma a lei “dois ângulos opostos pelo vértice são iguais. A soma dos quatro ângulos é igual a de quatro ângulos retos” (Muné, 1969, p. 549, tradução nossa). Para um melhor entendimento da criança, o professor pode utilizar recortes de papel a partir de dobraduras de ângulos para representar a rotação e a translação desses, isso facilitara a observação fazendo-a melhor entender a definição.

Em seguida, o complemento de um ângulo pode ser estudado ao pedir para a criança desenhar um ângulo qualquer e assim solicitar que verifique se esse ângulo é maior ou menor que um ângulo reto. Para identificar, basta sobrepor o ângulo qualquer ao ângulo reto através de recortes de papel. Dessa forma, ao ter desenhado um ângulo agudo (menor que um ângulo reto) a criança vera qual é o complemento de um ângulo reto. O mesmo acontece ao desenhar um ângulo maior que o ângulo reto, sendo que a criança deve recortar o excesso deixando apenas o que forma o ângulo reto. Esse excesso seria o complemento negativo do ângulo maior em relação ao ângulo reto.

Figura 16: Complemento de um ângulo



Fonte: Muné (1969)

Perante o exposto, dois conceitos podem ser formulados “Complemento positivo de um ângulo é o ângulo que faltava para valer um ângulo reto. Complemento negativo de um ângulo é o ângulo em excesso, o que sobra é o valor de um ângulo reto” (Muné, 1969, p. 550, tradução nossa). Dessa forma, o professor deve passar vários exercícios para ser praticado utilizando desenhos, dobraduras e recortes de papel.

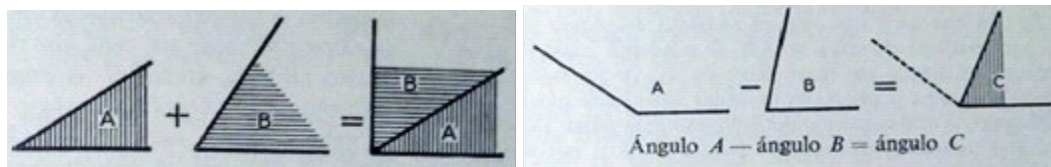
- REPRESENTAÇÃO ARITMÉTICA

A partir de todos os assuntos apresentados Muné traz como próximo assunto a soma de ângulos, ele apresenta como o professor deve proceder para ensinar a soma e subtração de ângulos. Nesse momento podemos ver a necessidade de inserir aplicações matemáticas, como a ideia de soma e a subtração a partir de figuras. É orientado que se desenhe e recorte vários ângulos. Em seguida a criança sobrepõe um lado de modo a coincidir com os vértices, assim ela poderá trabalhar com a representação de soma, diferença e suplemento de ângulos.

Visto que, para interpretar a ideia de diferença de ângulos, Muné orienta que o professor passe para as crianças ângulos em recortes de papel, fazendo-a observar que um ângulo menor pode ser sobreposto em um recorte de ângulo maior coincidindo com o vértice dos dois ângulos, fazendo-se possível identificar um excesso de ângulo a partir da justaposição, sendo esse excesso, a diferença.

Para realizar a representação de suplemento de um ângulo, o mesmo procedimento deve ser aplicado, quanto a representação por recortes de papel de tal modo que a criança seja induzida a realizar o suplemento de um ângulo para alcançar um ângulo reto. Para o caso de ângulos formados por uma perpendicular, o seu suplemento é outro ângulo reto.

Figura 17: Representação da soma e subtração de ângulos



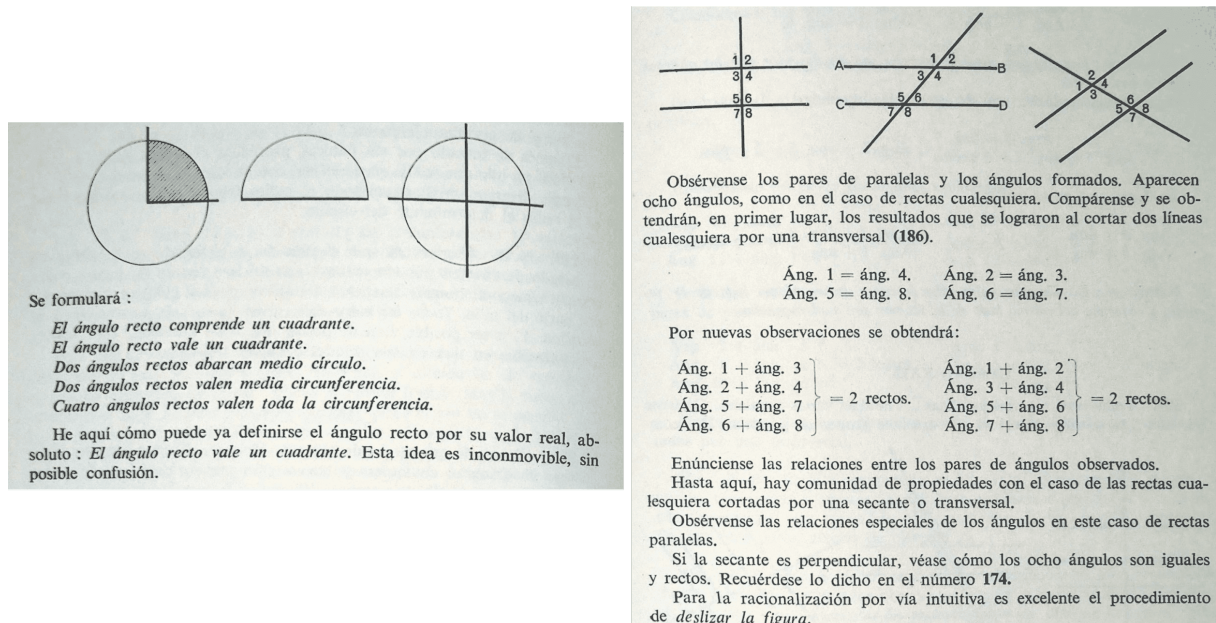
Fonte: Muné (1969)

A representação aritmética é expressa para trabalhar soma e subtração de ângulos a partir dos desenhos e recortes desses ângulos. Na figura anterior vemos a ilustração de soma de ângulos como sendo a junção de dois ângulos. A subtração é adquirida a partir da representação do que sobra de um ângulo maior ao retirar o espaço preenchido por um ângulo menor. Assim, identificamos a representação aritmética sendo trabalhada intuitivamente para representar a soma e a subtração de ângulos.

- PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

Para o desenvolvimento deste tema o autor orienta que a prática seja realizada a partir das necessidades da apresentação do próximo conteúdo, dessa forma, é nesse momento que as crianças colocam em cena o conhecimento já alcançado. O conteúdo vai sendo estabelecido no decorrer dos novos assuntos que são abordados. A figura a seguir nos mostra como eram propostos os exercícios.

Figura 18: Estudo no ângulo na circunferência; estudo do ângulo em retas



Fonte: Muné (1969)

A partir do exemplo postulado, podemos observar que os exercícios propostos por Muné abordam todos os assuntos já apresentados de modo a relacionar os estudos sobre perpendicular, ângulo reto, circunferência e soma de ângulos. Evidencia-se a maneira como são propostos os exercícios, sendo que o autor os sugere no momento em que se apresenta o assunto, mostrando ao professor como abordá-los.

A partir do segundo estágio, ao apontar as quatro etapas de aquisição do conhecimento pela criança, vemos que a *matemática para ensinar* se configura na forma como o professor utiliza os sólidos geométricos, o fio de prumo para iniciar a ideia de perpendicular, os recortes de papel para compreender a soma e subtração de ângulos e os desenhos para identificar a formação de ângulos. A *matemática para ensinar*, identificada no material destinado ao professor, detém um saber próprio da cultura e da formação do futuro professor. Em consonância com que diz Valente “um saber específico, de cultura profissional, próprio à formação do futuro docente” (Valente, 2019c, p. 54). Entendemos que o livro de Muné segue as diretrizes de ensino de sua época, abrangendo conteúdos que possivelmente eram ensinados nas escolas, e que de alguma forma atendiam a um determinado currículo, seja no ensino ou na formação.

Essa *matemática para ensinar* se relaciona com uma *matemática a ensinar* sobre os seguintes assuntos em geometria: introdução ao conceito de perpendicular, ângulo reto, soma e subtração de ângulos e por fim ângulos complementares.

4.4.3 TERCEIRO ESTÁGIO DO TRABALHO DIDÁTICO

O terceiro estágio do trabalho didático é composto por 43 páginas que abarcam os temas sobre: análise de figuras, triângulo, quadriláteros, medida do ângulo, *polígonos*, poliedros, medida da circunferência e a elipse e sua evolução. Neste estágio optamos em trabalhar com tema sobre *polígonos*. Destarte, a partir do desenvolvimento dos assuntos identificamos as etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança para o tema polígonos.

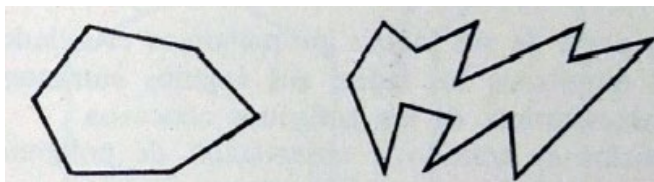
- OBSERVAÇÃO E MANIPULAÇÃO

No terceiro estágio, apresentamos o conteúdo sobre polígono. No entanto, a observação e manipulação destacada para trabalhar esse assunto, se desprende da ideia de usar objetos, dessa forma, as ideias iniciais passam a ficar mais sucintas, sendo representadas por desenhos, valorizando a observação.

Muné reitera que o que ele precisa para desenvolver esse tópico já foi trabalhado em tópicos e estágios anteriores, como por exemplo, as representações dos corpos geométricos, ideia de linha, linhas côncavas, ângulos e diagonal. Assim, o procedimento a ser tomado agora, na etapa de manipulação se baseia em desenhos e no que já foi estudado anteriormente, nos conteúdos que a criança já aprendeu, para poder dar continuidade aos estudos sobre polígonos.

O autor orienta que o professor deve revisar as características específicas de linhas concava e convexa, no item 84 que trata sobre o assunto de **linhas quebradas**, abordadas no primeiro estágio do trabalho didático. A partir dessa retomada, Muné orienta realizar observações de figuras poligonais, para isso, são apresentados desenhos de polígonos côncavos e convexos destacando suas características.

Figura 19: Polígono

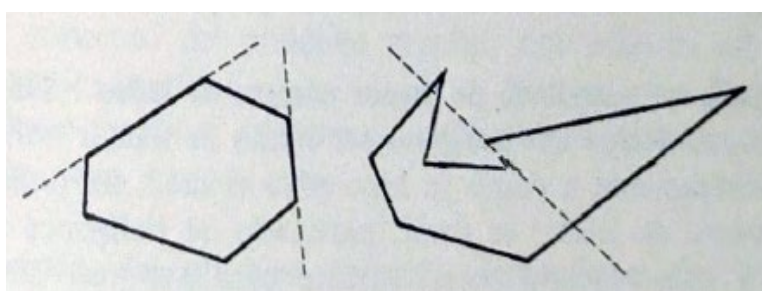


Fonte: Muné (1969)

Dessa maneira, toda linha concava quando fecha o espaço por ela formado torna-se um polígono concavo e toda linha convexa quando fecha o espaço por ela formado torna-se um polígono convexo. O entendimento sobre os tipos de linha foi adquirido no primeiro estágio.

Muné apresenta que para identificar um polígono concavo, podemos prolongar os lados desse polígono, a figura continua no mesmo lado da reta obtida. Ao realizar o mesmo procedimento com o polígono convexo, a figura acaba sendo cortada ao realizar o prolongamento de um dos lados do polígono.

Figura 20: Identificação de polígono concavo e convexo

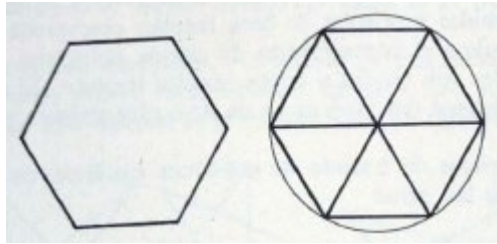


Fonte: Muné (1969)

Em continuidade Muné apresenta os polígonos estrelados cujos lados se cruzam e quando essas linhas se fecham formam um tipo especial de polígono, assim o autor vai apresentando assuntos sobre o polígono estrelado com menor número de lados, sendo que esse possui 5 lados. Ainda segue apresentando o menor polígono possível, o triângulo com apenas 3 lados. Diante disso, ele orienta que para que a criança aprenda sobre polígonos regulares é essencial que o professor lhe apresente os tetraedros e os hexaedros, pois o professor deve pedir para as crianças medirem os lados dessas figuras. Esse processo de observação levará a criança a identificar que os lados dessas figuras são iguais.

A partir disso, poderá iniciar o estudo sobre os elementos de um polígono regular, como seus ângulos, perímetro, vértices opostos e número de diagonais. O autor descreve a propriedade para entendermos a equidistância dos vértices de um polígono regular, que é associada a equidistância de todos os pontos de uma circunferência em relação ao centro. Muné justifica que podemos intuir que os vértices de um polígono regular podem ser pontos de uma circunferência, formulando a lei “todo polígono regular pode estar inscrito em um círculo” (Muné, 1969, p. 594, tradução nossa).

Figura 21: Polígono inscrito em uma circunferência

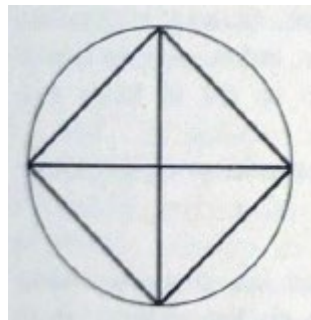


Fonte: Muné (1969)

Nesse ínterim, Muné conduz o professor a fazer a criança observar que, a partir um polígono regular inscrito em uma circunferência os arcos do polígono são iguais. Dessa maneira, pode-se realizar a divisão de uma circunferência em arcos iguais e com isso desenhar polígonos regulares. Ao utilizar medidas de arcos ou por construção direta ao determinar um lado, é possível obter vários tipos de polígonos regulares. O autor reitera que a construção de polígonos regulares nas escolas é pouco apresentada.

Muné discorre que o primeiro polígono regular a ser construído é o quadrado, o autor orienta que “Trace dois diâmetros perpendiculares. Aparecem quatro quadrantes, arcos iguais. Suas cordas são os lados do quadrado. Realize várias construções que poderá realizar sem dificuldades” (Muné, 1969, p. 594tradução nossa).

Figura 22: Construção de um quadrado



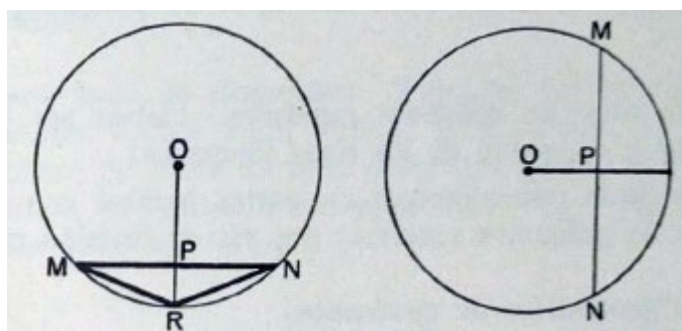
Fonte: Muné (1969)

Diante disso, o professor poderá mostrar para a criança como que o lado de um hexágono regular, é precisamente o raio do círculo. Ainda, pode-se observar que o triângulo formado por dois raios é um lado que abarca a sexta parte da circunferência, é o triângulo equilátero.

Por meio de observações, a criança irá deduzir que os arcos de um quadrado podem ser divididos por dois arcos de 45 graus, em que as cordas são os lados de um polígono de 8 lados. De maneira análoga, o mesmo pode ser realizado para construir um dodecágono regular por

meio de um hexágono no qual os arcos são divididos em dois arcos de 30 graus. A relação de perpendicularidade do raio sobre a corda garante a lei que segundo Muné: “o raio e o diâmetro perpendicular a uma corda divide esta em duas partes iguais e o arco da mesma, em dois arcos iguais” (Muné, 1969, p. 595, tradução nossa). Assim, para se chegar a essa conclusão, por meio da observação, o professor pode levar a criança a realizar comparações que comprovem a propriedade, em que $MP=PO$ e $MR=RN$ como mostrado na figura a seguir.

Figura 23: Raio e diâmetro perpendicular a uma corda



Fonte: Muné (1969)

Diante dessa propriedade pode-se obter geometricamente os lados de um polígono. Desta forma, a partir de um quadrado pode-se dobrar o número de lados, passando a ter um octógono e a partir desse um polígono com 16 lados. Isso ajuda a criança a compreender melhor o próximo assunto, que trata da construção de um polígono por divisão direta do valor da circunferência, sendo que essa possui 360° . Igualmente, por meio de construção direta pode-se obter polígonos regulares tomando os números divisores de 360.

Além de investigar o processo de construção de um polígono regular, Muné traz temáticas sobre os estudos de valores dos ângulos de um polígono qualquer. Para isso, ele orienta o professor a trabalhar esse assunto com as crianças por meio de decomposição de polígonos, a partir de um vértice e suas diagonais. A decomposição de polígonos leva a composição de triângulos e para identificar quantos triângulos são possíveis a partir de um vértice basta calcular $n-2$, sendo “ n ” o número de lados de um polígono. O resultado dessa operação dará o número de triângulos possíveis dentro de um polígono.

Muné norteia o professor a orientar a criança a observar que os ângulos de um triângulo são ângulos do polígono. Neste estágio o autor já apresentou todos os assuntos referente ao tema triângulo. Ele explica que: “valor dos ângulos de um triângulo = 2 retos. Valor dos ângulos de $(n-2)$ triângulos = $(n-2) \times 2$ retos. Valor dos ângulos de um polígono = $(n-2) \times 2$ retos”

(Muné, 1969, p. 598, tradução nossa). Que por meio de dedução traduz a fórmula $V = (n-2) \times 2$ retos.

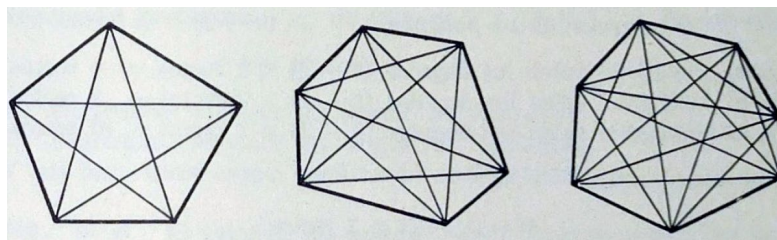
A partir dessa análise para o terceiro estágio a observação e manipulação passa a ganhar outro sentido e com isso algumas práticas são mais apreciadas em detrimento de outras, ainda que ambas fazem parte do processo de aquisição do conhecimento pela criança. Diante disso, vemos que para a primeira etapa há um foco na observação, por uma recomendação do autor, pois ao examinar estruturas, sólidos e desenhos, a criança consegue identificar algumas características para trabalhar o tema *polígonos*.

- DESENHOS

No estudo sobre números de diagonais de um polígono, o autor usufrui da representação por meio de desenhos e ainda considera que o professor deve deixar a criança livre para desenhar polígonos regulares e irregulares.

Desenhe vários polígonos, com possíveis diagonais. De cada vértice, isoladamente, seriam sorteados $n - 3$, em que n é o número de lados. A criança observará que ao traçar as diagonais de cada vértice, elas se repetem, pois unem dois vértices. Ou seja, cada diagonal é desenhada duas vezes (Muné, 1969, p.597, tradução nossa).

Figura 24: Polígonos irregulares



Fonte: Muné (1969)

Identificamos que neste estágio o desenho passa a ser uma ferramenta de interpretação, a partir do momento em que a criança faz o uso dessa etapa para traçar polígonos, polígonos inscritos em uma circunferência e suas diagonais. Dessa forma, a criança utiliza o desenho como meio de interpretação e através dele também trabalha com a observação.

- REPRESENTAÇÃO ARITMÉTICA

Identificamos que a representação aritmética se dá por meio da necessidade de se utilizar uma fórmula para realizar a contagem dos números de diagonais de um polígono. Muné explica que para a contagem de “n” diagonais podemos seguir o próximo passo que pode ser extraído a partir do número de vértices “n é o número de vértices. Ou seja, n vezes (n - 3)”. No entanto, esse cálculo nos leva ao dobro do número real de diagonais, assim justificando a necessidade de se dividir o resultado do primeiro passo por dois. Sendo esse um modelo formal e geral de realizar a contagem das diagonais

Figura 25: Dedução da fórmula para calcular o número de diagonais

$$\text{Número de diagonais} = \frac{n \text{ vezes } (n - 3)}{2} = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Fonte: Muné (1969)

Além do mais, a partir da apresentação dessa fórmula, o autor mostra que o professor pode descrever outras fórmulas e assim, trabalhar com outros problemas. Ele explica os passos para a dedução da fórmula para calcular o número de lados, em ambas as deduções de fórmulas o processo ocorre intuitivamente, sem se prender ao rigor matemático por meio de conceitos postulados.

Figura 26: Dedução da fórmula para calcular o número de lados

$$N = \frac{n^2 - 3n}{2} \quad 2N = n^2 - 3n. \quad n^2 - 3n - 2N = 0.$$

Fonte: Muné (1969)

No entanto, Muné sinaliza que equações do segundo grau não são trabalhadas no ensino primário. Mas como o autor utiliza uma linha de correspondência para apresentar os conteúdos, notamos que ele não deixou de apresentar tal informação por não se enquadrar no nível de ensino proposto pelo material. Destarte, essa observação é uma informação adicional para o trabalho do docente.

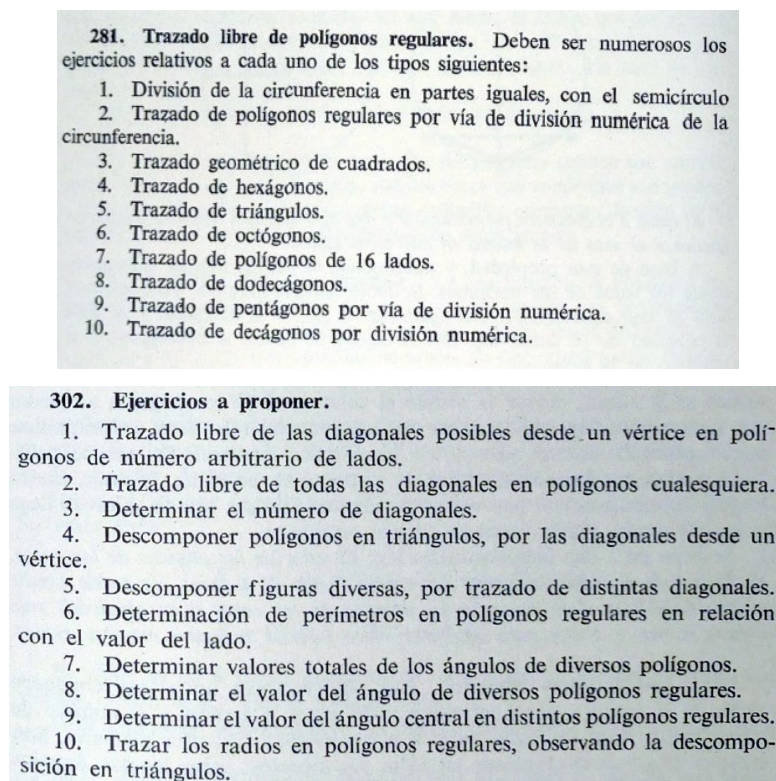
A representação aritmética passa a ser mais significativa a partir do momento que os valores numéricos são requisitados. Como por exemplo, para calcular o número de lados de um polígono, diagonais e vértice, pois essas questões são desenvolvidas no decorrer dos assuntos propostos para o tema estudado. A partir disso, há um processo de deduções de fórmulas que ocorre por meio da análise, levando a deduzir a lei de formação.

- PROBLEMAS E EXERCÍCIOS

Para colocar em prática o que foi apresentado sobre a aferição do número diagonais de um polígono, o autor recomenda que a criança faça exercícios para traçar todas as diagonais de polígonos regulares e irregulares, e em seguida apresente o número de diagonais a partir do uso da fórmula, utilizando *exercícios de aplicação* para a criança poder trabalhar aquilo que aprendeu. Posteriormente, se solicita para que o aluno apresente o valor dos ângulos.

A partir desse estágio, o autor propõe uma sequência de exercícios para que o professor coloque as crianças para desenvolver em suas aulas.

Figura 27: Lista de exercícios sobre polígonos



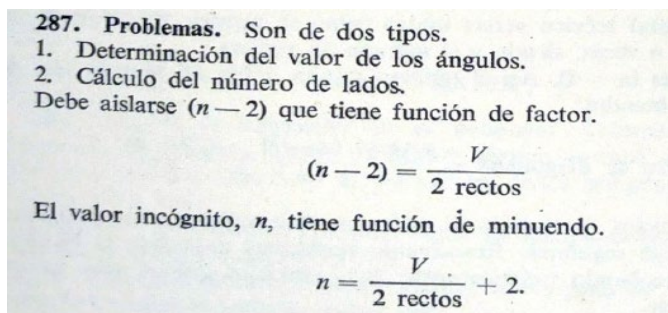
Fonte: Muné (1969)

São propostos dez exercícios para auxiliar a criança, por meio da prática, a automatizar os desenhos. O autor salienta que os exercícios devem ser numerosos. Podemos considerar que além do professor propor esses exercícios, ele deve apresentar mais exercícios diferentes, pois cabe a ele fazer com que a criança pratique exercícios com outras abordagens.

Os problemas começam a ser apresentados pelo autor a partir do terceiro estágio do trabalho didático. Podemos inferir que isso se justifica pelo fato de a criança precisar mobilizar

conceitos que só seriam possíveis a partir da finalização do segundo estágio. Dentro do tema sobre *polígonos* e para o assunto desenvolvido, o autor apresenta o primeiro problema como segue na figura a seguir.

Figura 28: Exemplo de problema sobre polígonos



Fonte: Muné (1969)

A partir dos tipos de problemas que Muné caracteriza no Livro I “*Metodologia e Procedimiento*”, descritos neste trabalho na seção 5.3, podemos identificar que o problema apresentado nessa figura se enquadra em “*problemas de revisão*” e “*problemas de correlações operatórias*”, pois o primeiro ajuda o professor a fazer uma recapitulação do que já foi apresentado e o segundo relaciona mais de um tipo de operação a ser desenvolvida para se chegar a solução, exigindo maior intuição intelectual da criança, pois ela deve saber o que mobilizar e quando fazê-lo.

Como vimos, no terceiro estágio os exercícios e problemas são mais específicos e propostos por meio de enunciados, para que a criança possa praticar. Além disso, a partir do terceiro estágio é proposto uma sequência de exercícios e problemas à medida que são apresentados os temas e os assuntos para serem praticados.

Perante o exposto, identificamos uma *matemática para ensinar* (composta pelos *saberes para ensinar matemática* e *matemática a ensinar*) mobilizada pelo autor para usufruir de uma *matemática a ensinar*. Como ambos os saberes possuem uma relação de dependência, lemos nessa análise que a *matemática para ensinar* articula a necessidade do uso de desenhos para trabalhar polígonos, sendo esse um conteúdo específico da geometria (*matemática a ensinar*) e o *saber para ensinar matemática*, pautado no uso de relações matemáticas, como a aritmética. Alcançando o objetivo final que é o entendimento sobre polígonos, o cálculo de suas diagonais e as deduções de fórmulas para realizar esse cálculo.

Os três estágios analisados mobilizam estudos sobre *corpo geométrico*, *posição* e *polígonos*. Esses temas se relacionam, porquanto, para o tema *corpo geométrico* são mobilizados entendimentos sobre a composição de um corpo e o estudo sobre os seus elementos, o que nos leva a estudar a *posição* de um corpo para entendermos um pouco mais sobre suas características e por fim o tema *polígonos*, que por meio da planificação das faces de um corpo podemos realizar o estudo das figuras.

Os estágios quatro, cinco e seis do trabalho didático apresentam uma abordagem diferente dos três primeiros estágios analisados nesta pesquisa. O quarto estágio traz de maneira aprofundada o estudo sobre medida de superfície e áreas de figuras, apresentando fórmulas para calcular a área de todos os tipos de figuras. O quinto estágio traz um aprofundamento do estudo sobre volume, assim apresenta fórmulas para calcular o volume de todos os tipos de sólido e por fim, o sexto estágio traz o aprofundamento do estudo sobre equivalência e desenvolve esse trabalho a partir da equivalência entre áreas e volumes. As análises dos demais estágios podem ser realizadas em pesquisas futuras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para esta pesquisa intencionamos responder a seguinte pergunta: que saberes profissionais estão materializados em “Didáctica del Cálculo” para o ensino de geometria, com base no Livro I (metodología y procedimiento) e Livro III (didáctica del geometría)? Para respondê-la nos debruçamos sobre o material escrito por Muné, e as análises nos levaram a levantar considerações por meio das lentes de um referencial teórico-metodológico que nos permitiu alcançar o objetivo geral desta pesquisa.

Assim, para atingir os resultados desta pesquisa desenvolvemos o primeiro objetivo específico: realizar uma descrição comentada da metodologia e do procedimento didático apresentados por José Junquera Muné, com referência no Livro I relacionado às questões dos saberes a ensinar e para ensinar de Hofstetter e Schneuwly (2017). Identificamos que todas as propostas apresentadas no Livro I (metodología y procedimiento) são elementos que se relacionam para garantir o método proposto por Muné, ao haver uma preocupação, por parte do autor com a organização didático-pedagógica para tratar de assuntos como: apresentação da disciplina, tipos de exercícios e problemas, o material a ser utilizado, a forma como o professor deve fazer a criança aproveitar o conhecimento prévio, o incentivo ao professor a se desprender da ideia do tempo como regulador da aprendizagem, estabelecer relações entre o conhecimento da criança com a realidade e os demais assuntos tratados no Livro I.

Diante disso, dentro do repertório apresentado por Muné no Livro I (metodologia y procedimiento), criamos uma categoria de análise, composta por quatro etapas de aquisição do conhecimento pela criança, sendo elas a observação e manipulação, desenho, representação aritmética, exercícios e problemas. A partir dessas etapas apontamos a mobilização dos saberes profissionais do professor que ensina matemática por meio da análise do Livro III (didáctica del geometría).

Além disso, em nossa pesquisa objetivamos investigar que teorias e métodos de ensino o autor buscou incorporar em seu livro para sustentar suas ideologias. Uma vez que, Muné não fundamenta suas propostas de ensino, enfatizando que todo o conteúdo por ele apresentado sobre o trabalho didático do professor é fruto da sua experiência profissional. Todavia, por mais que Muné omita essas informações, o manual faz transparecer as vagas pedagógicas, pois apresenta uma variedade de abordagens, alternando entre o método intuitivo e o método da Escola Nova. Embora o material tenha sido editado e publicado durante o auge das ideias do Movimento da Matemática Moderna (MMM), é difícil concluir que Muné tenha sido diretamente influenciado por esse movimento. Apesar de sua organização racional, que favorece o pensamento infantil, o livro carece de uma ênfase no rigor matemático tradicional, como o ensino baseado em teoremas e postulados, o qual era o objetivo do MMM ou como identificado na Espanha, MM. Em vez disso, é possível argumentar que Muné se alinha mais com as ideologias de Piaget, cujas concepções construtivistas e estruturalistas podem ter sido adotadas e adaptadas pelo autor.

Não concluiremos como influência uma única vaga ou método pedagógico, não obstante, podemos dizer que o autor compilou seu material com tudo aquilo que ele julgou importante para o trabalho do professor, sem se prender a uma corrente pedagógica daquele momento. Isso também pode ser justificado pelo autor ter produzido e publicado o seu material em um período de transição entre vagas pedagógicas. Além disso, essa análise nos permite concluir que Muné tinha uma formação consolidada em termos de conhecimento da matemática e de princípios e métodos de ensino de matemática para os anos iniciais.

Ademais, ao questionarmos sobre a possível repercussão da obra de Muné, podemos levantar a hipótese de que o Muné exercia um papel de importância política e educacional em sua época, pois o livro não teria sido publicado devido às restrições impostas pelo padrão político do período. Uma vez que já apresentamos em nossos estudos que os autores autorizados para publicar livros eram inspetores de ensino e essa produção passava pelo Conselho Nacional de Educação para receber autorização de utilidade pública. Além disso, a publicação se deu por

uma editora (Labor) que, na época, circulava nos países de língua portuguesa e espanhola. Ao pensar pelo viés comercial, as editoras buscam publicar livros com possibilidades de lucratividade. Assim, o livro deveria ter um impacto econômico para garantir o lançamento pela editora. Essas indagações podem nos levar a uma possível importância que o autor exercia em seu tempo e talvez justificar a circulação da obra de Muné. Diante da imprecisão da prerrogativa, a conclusão sobre essa hipótese pode ser desenvolvida em pesquisas futuras, por necessitar de um aprofundamento de investigação, que, devido ao tempo destinado para o desenvolvimento desta dissertação, não nos permite apontar sobre esses resultados.

Para o segundo objetivo específico: analisar as orientações didáticas dadas aos professores para o ensino de geometria com base no Livro I e no Livro III e em conexão com os *saberes a ensinar matemática e para ensinar matemática*. Analisamos os três estágios do trabalho didático, redigidos no Livro III. Consideramos que para o primeiro estágio do trabalho didático houve uma maior apreciação da primeira etapa de aquisição do conhecimento pela criança, observação e manipulação. Isso ocorre, devido ao primeiro estágio ser o primeiro contato da criança com a geometria. Assim, o autor orienta um maior uso de materiais concretos e a exploração do conhecimento prévio da criança como ponto de partida para estudos futuros, explorando um método de ensino intuitivo.

A segunda etapa, desenhos, além de garantir o processo de abstração, contribui para o entendimento ao colocar a criança para desenhar e identificar elementos para a representação de corpos geométricos. A terceira etapa, representação aritmética, se inicia de maneira intuitiva ao apresentar para a criança a ideia de mais e de menos, crescimento e decrescimento e volume, sem conjecturar valores numéricos para trabalhar essa ideação. A quarta etapa, problemas e exercícios, é apresentada de forma a não enunciar um determinado exercício, mas ao fazer a criança reproduzir o que está sendo realizado para o entendimento dos assuntos, então, essa prática é realizada quando Muné orienta o professor a colocar as crianças para desenhar traços, construir e sobrepor sólidos, dobrar figuras, desenhar e analisar, fazendo a criança realizar exercícios a partir do assunto.

O segundo estágio do trabalho didático também é voltado para a apresentação de conceitos, sendo que há uma evolução no nível de dificuldade dos conteúdos, pois o autor busca garantir um ensino que parta do fácil para o difícil. Para a primeira etapa identificamos a observação e manipulação como processo central da aprendizagem, quando o autor valoriza a exploração do sentido (ver e o manipular) com o uso de fio de prumo, observação da posição de corpos, como mesas, paredes e corpos geométricos. A segunda etapa, desenhos, garante o

processo de abstração, ao fazer a representação do material para o imaterial. A terceira etapa, representação aritmética, se dá de maneira intuitiva ao realizar medições de ângulos a partir do ângulo formado por uma perpendicular, apresentando a ideia de soma e subtração de ângulos. A quarta etapa, exercícios e problemas, é colocada em prática na medida em que novos assuntos vão sendo abordados, propondo exercícios como traçar perpendiculares, construir ângulos, identificar a posição de objetos e representar somas e subtrações de ângulos. Muné orienta a colocar a criança para praticar cada ação desenvolvida em sala de aula, sendo esse um exercício de repetição.

No terceiro estágio do trabalho didático, a primeira etapa, observação e manipulação, tem a observação mais desenvolvida em detrimento da manipulação, pois a medida em que os estudos avançam, algumas práticas se fazem mais necessárias do que outras. Dessa forma, as ideias iniciais ficam mais sucintas, sendo representadas por desenhos, valorizando a observação. Para a segunda etapa, desenhos, o autor usufrui dessa para realizar representações e ainda, considera que o professor deve deixar a criança livre para desenhar polígonos regulares e irregulares. Para a terceira etapa, representação aritmética, os estudos passam a propor deduções de fórmulas e uso dessas para realizar a contagem dos números de diagonais e lados de um polígono. E por fim, para a quarta etapa, exercícios e problemas, o autor elabora uma sequência de exercícios para que o professor coloque a criança para praticar. Além disso, Muné propõe problemas, conforme o tema estudado, para que a criança possa resolvê-lo. Podemos considerar que é a partir do terceiro estágio que a criança passa a ter os conhecimentos necessários para colocar em prática o que lhe foi ensinado.

Diante disso, apesar de Muné tecer uma metodologia e um procedimento no Livro I para o ensino de cálculo, quando ele aborda a geometria, identificamos particularidades que são próprias, inerentes, do conteúdo de geometria. Por exemplo, manipular sólidos geométricos (nesse caso é desenvolvido a primeira etapa de observação e manipulação) de modo a reconhecer os elementos que compõem esses sólidos como vértice, arestas e face. Tais ações são próprias do conteúdo e específica da geometria. Por isso, dizemos que o método dele quando aplicado na geometria apresenta particularidades. Além disso, podemos extrair que o autor não separa a geometria da aritmética, colocando-as em “caixinhas”, pois a unidade e as propriedades numéricas se revelam sobre a geometria, seja nas relações ou por meio de associações de ideias.

Notamos que em todos os estágios a primeira etapa de aquisição do conhecimento, observação e manipulação, é desenvolvida de modo que a criança tenha uma melhor compreensão sobre o tema estudado. Todos os temas abordados nesta etapa, priorizam a

observação e a manipulação para que a criança alcance o entendimento. O desenho uma etapa que favorece a abstração. A representação aritmética é a etapa que amplia o conhecimento para trabalhar noções de aritmética. Os exercícios e problemas garantem a prática e aplicação da aprendizagem, sendo explorados em forma de lista a partir do terceiro estágio.

Ao identificarmos a partir do Livro I as quatro etapas do processo de aquisição do conhecimento pela criança e ao analisarmos no Livro III a forma como o autor orienta o professor para ensinar os temas de geometria, concluímos que as etapas de *observação e manipulação, desenho, representação aritmética e exercícios e problemas* constituem-se como uma *matemática para ensinar*, pois essas etapas auxiliam no trabalho didático do professor apresentando simultaneamente a *matemática para ensinar* e os *saberes para ensinar matemática*. Dessa forma, dizemos que essas etapas são como uma *matemática para ensinar*, por elas estarem objetivadas a partir das orientações de Muné, ao abordar o objeto e as formas de ensinar esse objeto.

Posto isto, para o manual de Muné, inferimos que os saberes profissionais mobilizados para o ensino de geometria também, se configuram em uma *matemática a ensinar* e uma *matemática para ensinar*, pois o autor traz em seu material o assunto de geometria a ser desenvolvido e entendido pelo professor, e em seguida a forma como o professor deve apresentar e contextualizar essa situação para o aluno. O que nos leva a concluir que o método utilizado pelo autor contribui para a condensação de saberes da formação de professores que ensinam matemática.

A análise do livro "Didáctica del Cálculo" revela os saberes profissionais, como a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*, emanados a partir do ensino de geometria e pelas orientações didáticas apresentadas por Muné. A pesquisa ressalta a contribuição do autor para a formação de professores e destaca a metodologia de ensino proposta pelo autor para o desenvolvimento de habilidades de ensino. Tudo o que discorremos sobre o Muné nos leva a assertiva de que ele era uma pessoa intelectual, tinha profundo conhecimento sobre formação de professores, exercia um papel de importância em sua época e era professor formador. Podemos dizer que Muné aprendeu a ensinar e objetificou o seu método para que outros professores também aprendessem a ensinar. Assim, entendemos que o estudo desses saberes postos em outra época pode fornecer subsídios importantes para práticas pedagógicas contemporâneas.

REFERÊNCIAS

- ADORNO, Thais Lira França; MIGUEL, Maria Elisabeth Blanck. A metodologia de Pestalozzi e o ideário da Escola Nova. *Acta Scientiarum*, v. 42, 2020. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S2178-52012020000100112&script=sci_arttext. Acesso em: 02 set. 2023.
- BAQUÉ, Juan Mainer. Inventores de sueños: Diccionario bioprofesional de pedagogos y didactas de Geografía e Historia hacia 1936. Colección Estudios Historia. Zaragoza: Institución Fernando el Católico (C.S.I.C.), 2009. Disponível em: https://ifc.dpz.es/recursos/publicaciones/29/40/_ebook.pdf. Acesso em: 05 set. 2023.
- BEVILAQUA, Aluisio Pampolha. John Dewey e a escola nova no Brasil. *Ciência & Luta de Classes*, v. 1, n. 1, 2014. Disponível em: <https://revistaclc.ceppes.org.br/online/article/view/29>. Acesso em: 06 set. 2023.
- BERTINI, Luciane de Fatima; MORAIS, Rosilda dos Santos; VALENTE, Wagner Rodrigues. *A Matemática a Ensinar e a Matemática para Ensinar: novos estudos sobre a formação de professores*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.
- CABRAL, João. O abraço da criança ao mundo da Matemática. *Correio dos Açores*, Açores, 11 dez. 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/289828642_O_abraco_da_crianca_ao_mundo_da_Matematica. Acesso em: 15 jul. 2022.
- CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & educação*, v. 2, n. 2, p. 177-229, 1990.
- CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa*. Trad. Maria Adriana C. Cappello. São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549- 566, set/dez, 2004.
- CLARAS, Antonio Flavio; PINTO, Neuza Bertoni. O movimento da matemática moderna e as iniciativas de formação docente. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 10., 2008, Curitiba. Anais. Curitiba: PUCPR, 2008.
- CRUZ, Evellin Sena. Saberes para ensinar geometria: manuais didáticos para ensinar matemática na década de 1930. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2021.
- D’ESQUIVEL, Márcio Oliveira. Primeiras noções de Geometria Prática (1894-1966): a obra e as mudanças no saber profissional do professor que ensina geometria. Tese (doutorado) – Universidade Federal de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação e Saúde na Infância e na Adolescência, 2019.
- FORTALEZA, Francisca Janice dos Santos. *UMA GEOMETRIA PARA ENSINAR: elementos do saber profissional do professor que ensina matemática (1870-1920)*. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, 2021.

GIORDANI, E. Relações interdisciplinares na pedagogia: Piaget e Montessori. Revista Educação. Santa Maria, vol.25, no.1, p.81-98, 2000.

GHEMAT-BRASIL. Glossário. São Paulo – SP. 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/158952>. Acesso em 02 jan. 2023.

GONZALEZ ASTUDILLO, Maria Teresa. La transición hacia la matemática moderna en España: la revista Vida Escolar. Revista Diálogo Educacional, v. 8, n. 25, p. 615-631, 2008. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S1981-416X2008000300003&script=sci_abstract. Acesso em: 15 nov. 2022.

HOFSTETTER, R. SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: Rita Hofstetter e Wagner Rodrigues Valente (Org.). Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 113-172.

MOROTO, A. S. SABERES PARA ENSINAR GEOMETRIA NO ENSINO PRIMÁRIO: um estudo sobre manuais escolares produzidos por Theobaldo Miranda Santos. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2021.

MUNÉ, José Junqueira. Didática Del cálculo. Barcelona: Editorial Labor, 1969.

MUNARI, Alberto. Jean Piaget - Alberto Munari; tradução e organização: Daniele Saheb. – Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

ROLIM CAPELATO, Maria Helena. Ensino primário franquista- os livros escolares como instrumento de doutrinação infantil. Revista Brasileira de História, v. 29, p. 117–143, jun. 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbh/a/vMpvvNdtvHnRRpWtHWN33Ks/?lang=pt>. Acesso em: 15 nov. 2022.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; ENS, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas do tipo Estado da Arte em educação. Revista diálogo educacional, v. 6, n. 19, p. 37-50, 2006. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S1981-416X2006000300004&script=sci_abstract. Acesso em: 18 nov. 2022

SANTOS, Edilene Simões Costa dos; MENDES, Iran Abreu. O método didático de José Junquera Muné para o ensino de Matemática no primário. Revista Cocar, v. 19, n. 37, 2023. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/7209>. Acesso em: 16 out. 2023.

SÃO PAULO (Estado) – Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 5ª série. Versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1994. 385p.

SÃO PAULO (Estado) – Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 6ª série. Versão preliminar.

São Paulo: SE/CENP, 1994. 411p. SÃO PAULO (Estado) – Secretaria da Educação. Coordenadoria de S241e Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 7ª série. Versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1994. 390p.

SÃO PAULO (Estado) – Secretaria da Educação. Coordenadoria de S241e Estudos e Normas Pedagógicas. Experiências matemáticas: 8ª série. Versão preliminar. São Paulo: SE/CENP, 1994. 365p.

SILVA, Vivian Batista da. Saberes em Viagem nos manuais pedagógicos: construções de escolas em Portugal e no Brasil (1870-1970). 2006. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

VALDEMANRIN, Vera Teresa. O método intuitivo: os sentidos como janelas e portas que se abrem para um mundo interpretativo. In. SAVIANI, Dermeval et. al. O legado educacional do século XIX. 2ª ed. rev. e ampl. Campinas, SP: Autores Associados, p. 85-132, 2006.

VALENTE, W. R. Os movimentos da matemática na escola: do ensino de matemática para a educação matemática; da educação matemática para o ensino de matemática; do ensino de matemática para a Educação Matemática; da Educação Matemática para o Ensino de Matemática? **Pensar a Educação em Revista**, Curitiba/Belo Horizonte, v. 2, n. 2, p. 3-23, abr./jun. 2016.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Os saberes para ensinar matemática e a profissionalização do educador matemático. *Rev. Diálogo Educ.*, Curitiba, v. 17, n. 51, p. 207-222, jan./mar. 2017a. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/174494>. Acesso em: 20 jan. 2023

VALENTE, Wagner Rodrigues. " Matemática? Eu trabalho primeiro no concreto": elementos para a história do senso comum pedagógico. *Ciência & Educação (Bauru)*, v. 23, p. 597-611, 2017b. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/CWLbMwxHkYwVjPfjKdJPgBq/?lang=pt>. Acesso em: 15 set. 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História e cultura em educação matemática: a produção da matemática do ensino. *REMATEC*, v. 15, n. 36, p. 164-174, 2020. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/88>. Acesso em: 18 ago. 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Que matemática para formar o futuro professor? História do saber profissional do professor que ensina matemática. *Revista Exitus*, v. 9, n. 2, p. 15-25, 2019. Disponível em: http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S2237-94602019000200015&script=sci_arttext. Acesso em: 18 ago. 2023.

VALENTE, W. R. A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos primeiros anos escolares, segunda metade do século XIX. *Historia de la Educación*, v. 39, p. 31-44, 2020. Disponível em: <https://www.proquest.com/openview/432c622ceb90bb074230b1fe176f7ff2/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2032100>. Acesso em: 14 mar. 2023.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Programas de ensino e manuais escolares como fontes para estudo da constituição da matemática para ensinar. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 12, n. 2, p. 51-63, 2019. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7222062>. Acesso em: 15 ago. 2023

ZANATTA, Beatriz Aparecida. O legado de Pestalozzi, Herbart e Dewey para as práticas pedagógicas escolares. Teoria e prática da Educação, v. 15, n. 1, p. 105-112, 2012. Disponível em: <https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/TeorPratEduc/article/view/18569>. Acesso em: 30 ago. 2023.