UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WILLY ALVES DE OLIVEIRA

NÚMEROS COMPLEXOS: ENSINO E APLICAÇÕES

Campo Grande (MS)

Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia - CCET
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Números Complexos: Ensino e Aplicaçoes

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Polo Campo Grande, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre.

por

Willy Alves de Oliveira

Orientadora: **Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos** – CCET/UFMS

Banca Examinadora

Prof. Dr. Aurélio Ribeiro Leite de Oliveira	IMECC/UNICAMP
Profa. Dra. Janete de Paula Ferrareze	CCET/UFMS
Profa. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos	CCET/UFMS (orientadora)

Fevereiro de 2013

Agradecimentos

Agradeço a Deus que me iluminou durante toda a minha jornada, concedeu-me as forças necessárias e preparou todo o caminho que eu deveria trilhar.

Também agradeço a Ele por ter colocado pessoas especiais no meu caminho, como minha querida esposa Francielli, meu filho Arthur, minha orientadora Professora Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos e meu irmão Vanias que atuaram como verdadeiros anjos na minha vida, contribuindo de maneira efetiva para que essa vitória fosse alcançada.

Rendo graças a Deus por ter me dado a grande sorte de contar com o apoio dos meus pais: Ernestino e Vera, não só nesta jornada, mas desde o princípio.

Resumo

Este trabalho trata essencialmente dos Números Complexos: sua história, ensino, generalizações e aplicações. No ensino desse conteúdo, constata-se a predominância de um tratamento algébrico e a falta de conexão com a Geometria. Nesse sentido, orientações ao ensino são estabelecidas visando a subsidiar o trabalho docente na introdução dos Números Complexos via abordagem geométrica. A Álgebra dos Números Complexos é apresentada e os Quatérnions, generalizações quadridimensionais dos Números Complexos são estudados com ênfase em suas propriedades. O trabalho apresenta também uma introdução à Álgebra de Clifford e estabelece relações com a Álgebra dos Números Complexos e com os Quatérnions. Os resultados obtidos demonstram o grande potencial dos Números Complexos para solução de problemas reais.

Palavras-Chave: Números Complexos, Ensino, Álgebra de Clifford.

Abstract

This report is essentially about the Complex Numbers: their history, education methods, generalizations and applications. In teaching this content, there is a predominance of an algebraic treatment and lack of connection with geometry. Accordingly, teaching guidelines are established aiming to subsidize the introduction of teaching in Complex Numbers via geometric approach.The Algebra of the Complex Numbers is presented and the Quaternions, four-dimensional generalizations of the Complex Numbers, are studied with emphasis on their properties.The report also presents an introduction to Clifford's Algebra and establishes relationships between Algebra of Complex Numbers and Quaternions. The obtained results demonstrate the great potential of Complex Numbers in solving real problems.

Keywords: Complex Numbers, Education, Clifford Algebra.

Notação

$\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais;

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos Números Inteiros;

$\mathbb{R}$: Conjunto dos Números Reais;

$\mathbb{C}$: Conjunto dos Números Complexos;

$x \in \mathbb{B}$: x pertence ao conjunto $\mathbb{B}$;

$\overline{z}$: Conjugado do Número Complexo z;

$Re(z)$: Parte real do Número Complexo z;

$Im(z)$: Parte imaginária do Número Complexo z;

$\overrightarrow{OP}$: Vetor com origem no ponto O e extremo no ponto P;

$\overrightarrow{a}$: Vetor a;

$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$: Ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, medido no sentido antihorário;

$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$: Base canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$;

$E(z)$: Parte Escalar do Quatérnion z;

$V(z)$: Parte Vetorial do Quatérnion z;

$\overset{\rightrightarrows}{v}$: Bivetor v;

$\overset{k}{\overrightarrow{v}}$: k-vetor v;

$\hat{v}$: Objeto vetorial de grade qualquer;

$|\hat{v}|$: Módulo ou magnitude do objeto vetorial v;

$\hat{v} \cdot \hat{w}$ **ou** $\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle$: Produto Interno entre objetos vetoriais;

$\hat{v} \times \hat{w}$: Produto Externo entre objetos vetoriais;

$\hat{v} \vee \hat{w}$: Produto Vetorial de Gibbs e Heaviside;

$\hat{v} \wedge \hat{w}$: Produto Vetorial de Grassman;

$\hat{v}\hat{w}$: Produto Geométrico (ou Produto de Clifford) entre objetos vetoriais;

$A(V)$: Álgebra Geométrica de Clifford sobre o espaço vetorial V;

$\hat{i}$: Pseudo-escalar unitário $\overrightarrow{\overrightarrow{e}}_{12} = \overrightarrow{e}_1 \overrightarrow{e}_2$;

$M(n, \mathbb{C})$: Conjunto das Matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas.

Geralmente, um multivetor é representado pela letra maiúscula M. Eventualmente, quando vários multivetores estão relacionados, índices são acrescentados para distinção, assim, tem-se M_i, onde $i \in \mathbb{N}$.

Funções e polinômios são representados por letras minúsculas $(f, g, h, ...)$.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Ao contrário do que se encontra escrito em muitos livros didáticos, os números complexos nasceram por meio de tentativas de resolução de equações do terceiro grau e não das equações quadráticas com discriminante negativo. As equações quadráticas com essa propriedade eram desconsideradas, ou seja, simplesmente aceitava-se a inexistência de solução.
As equações cúbicas começaram a aparecer na Matemática grega. Uma evidência desse fato encontra-se no problema clássico da duplicação do cubo. Diofanto também trabalhou com equações cúbicas para solução de problemas da aritmética, enunciando e resolvendo uma equação que, em nossa linguagem, é equivalente a $x^3 + x = 4x^2 + 4$. O escritor árabe Omar Khayan também contribuiu para a solução de equações cúbicas que apresentavam a forma $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.
Todas as equações cúbicas apresentadas até aqui consistem em formulações algébricas para problemas da geometria. Foi apenas no Renascimento que alguns matemáticos se interessaram em encontrar um método geral para solução de equações cúbicas. Este problema foi atacado principalmente pelos matemáticos italianos do século XVI.
Primeiramente, Scipione Del Ferro resolveu as equações cúbicas da forma $x^3 + px = q$. Os resultados encontrados por Scipione não foram divulgados a não ser a um seleto grupo de amigos, no qual se incluía Antônio Maria Fior.
Posteriormente, em 1535, o matemático italiano Tartaglia conseguiu encontrar um método para resolver equações da forma $x^3 + px^2 = q$. Na mesma época, Tartaglia foi desafiado publicamente por Fior para uma disputa intelectual que consistia na resolução de equações

cúbicas.

Fior propôs 30 equações a Tartaglia, provavelmente todas da forma $x^3 + px = q$. Tartaglia resolveu todas essas equações e, além disso, não teve as suas equações resolvidas por Fior. Assim, Tartaglia foi considerado vencedor do confronto. Um maior detalhamento da história das equações cúbicas pode ser encontrado em [20].

Dessa forma, Tartaglia despertou o interesse de Giriolamo Cardano, que era um renomado cientista reconhecido pelas suas contribuições na Astrologia, Medicina, Filosofia e Matemática. Cardano, mesmo sem o consentimento de Tartaglia, conseguiu obter a fórmula das equações da forma $x^3 + px^2 = q$ e publicou o resultado em sua obra intitulada *Ars Magna* (1545), sem dar crédito algum a Tartaglia.

Apesar dessa atitude moralmente criticada, Cardano desenvolveu um trabalho de extrema importância para o surgimento do conceito dos chamados Números Complexos, pois foi o primeiro matemático a manipular raízes quadradas de números negativos.

Os números complexos são entes matemáticos que podem ser estudados por um ponto de vista algébrico ou geométrico. Seu estudo ajuda a cumprir os papéis formativos da matemática no Ensino Médio, pois possui várias aplicações em outras ciências, uma estreita relação com a geometria e a trigonometria e o seu tratamento formal é simples, possibilitando a realização de diversas demonstrações com nível de complexidade compatível ao Ensino Médio.

1.1 História dos Números Complexos

Em *Ars Magna* (1545), Cardano apresentou, além da fórmula de Tartaglia, a resolução de equações biquadradas. Constam ainda estudos sobre relações entre raízes e coeficientes, regras de localização de raízes, entre outros. Nesse momento, começaram a aparecer determinadas raízes quadradas de números negativos. A grande novidade é que elas passaram a ser manipuladas como se fossem números reais e não mais ignoradas como anteriormente.

Assim, Cardano é considerado o primeiro matemático a realizar operações com números complexos. Na sua obra, Cardano resolve o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40. Esse problema se reduz em determinar números x e y tais que:

$$x + y = 10$$

$$x.y = 40$$

Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda, resulta a equação quadrática $x^2 - 10x + 40 = 0$. Resolvendo-a pelo tradicional método de complemento de quadrado, obtém-se que:

$$x^2 - 10x + 40 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = -15 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Com respeito a essa solução, Cardano cita: *"Deixando de lado toda a tortura mental envolvida, multiplica* $5+\sqrt{-15}$ *por* $5+\sqrt{-15}$*. O produto é* $25-(-15) = 40$ *(...). Assim, progride a sutileza aritmética cujo objetivo, como afirmado, é tão refinado quanto inútil."*
Ainda no mesmo livro, o método apresentado para resolver equações do terceiro grau implicava obrigatoriamente o manejo de raízes quadradas de números negativos, muito embora, as soluções das equações se constituíssem em números reais. Na verdade, o método apresentado por Cardano consistia, primeiramente, em transformar uma equação do terceiro grau qualquer na forma $x^3 + px + q = 0$. Essa transformação é sempre possível de ser feita, bastando para isso realizar uma substituição apropriada. Feito isso, Cardano mostrou que a solução dessa última equação é dada por:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q}{2}^2 + \frac{p}{3}^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q}{2}^2 + \frac{p}{3}^3}}$$

Para exemplificar o exposto, considere-se a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. É fácil de se ver que as soluções desta equação são todas reais, a saber, 4, $-2-\sqrt{3}$ e $-2+\sqrt{3}$. Porém, pela fórmula apresentada por Cardano, tem-se que:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Desse modo, sendo uma equação do terceiro grau, que sabidamente possui três raízes reais conhecidas, para sua determinação é necessário passar pelo processo de extração de raízes quadradas de números negativos. Na verdade, é possível mostrar que uma equação da forma $x^3 + px + q = 0$ tem três raízes reais se, e somente se, o fator $\frac{q}{2}^2 + \frac{p}{3}^3 \leqslant 0$. Esse fato sugere que as raízes quadradas de números negativos possuem algum sentido matemático e que deveriam ser mais bem estudadas.
Um matemático italiano discípulo de Cardano, chamado Bombelli (1526-1572) contribuiu para a elucidação dessa questão ao introduzir uma quantidade que chamava *piu di meno* que

corresponde à conhecida unidade imaginária, $\sqrt{-1}$. Bombelli enunciou, inclusive, as regras de manipulação com essa unidade.

De maneira geral, os matemáticos do século XVI utilizavam os números complexos e aplicavam as regras usuais de cálculo com números reais, o que levou, inclusive, a alguns enganos, por exemplo, Euler (1797-1783) afirmou que $\sqrt{-2}.\sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$, por analogia à regra operatória válida para números reais.

Albert Girard (1595-1632) fez a seguinte afirmação acerca das soluções de equações de algébricas que resultavam em raízes de números negativos: *"Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis. Eu respondo: para três coisas - para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções."*

Nota-se nessa fala uma mudança de concepção com relação aos números complexos em relação as ideias de Cardano, que afirmava que tais soluções eram inúteis.

Em uma obra denominada *La Géometrie*, René Descartes (1596-1650) admitiu a existência de raízes complexas para equações algébricas. Ele introduziu a denominação "números imaginários", que ainda hoje é utilizada.

Em 1749, Jean Le Rond D'Alambert (1717-1783) elencou todos os tipos de números complexos que poderiam ser obtidos ao se resolverem equações algébricas. Em geral, ele mostrou que, em qualquer expressão algébrica envolvendo um número da forma $a+b\sqrt{-1}$, o resultado também é um número da forma $a+b\sqrt{-1}$.

Euler estudou as operações com números complexos, incluindo potências imaginárias, logaritmos e forma trigonométrica e, em 1749, mostrou que se $a+\sqrt{-1}$ é uma raiz de uma equação algébrica qualquer, então $a-\sqrt{-1}$ também o é. Mostrou ainda que todas as raízes não reais de uma equação algébrica são da forma $a+b\sqrt{-1}$.

Dessa forma, até o fim o século XVIII, os matemáticos já conseguiam realizar operações complicadas com números complexos, muito embora ainda tivessem uma posição ambígua com relação a eles.

Foi somente no século XIX que os números complexos foram reconhecidos e aceitos pela comunidade acadêmica, para tanto, foi necessário o prestígio de Gauss, que publicou um trabalho intitulado "A Verdadeira Metafísica das Quantidades Imaginárias", na qual divulgou a interpretação geométrica dos números complexos.

Tal interpretação geométrica divulgada por Gauss foi construída ao longo dos anos com a contribuição de diversos matemáticos. Dentre eles, destacam-se Descartes, John Wallis, Caspar Wessel e Argand. Argand desenvolveu o trabalho mais esclarecedor com respeito à representação geométrica dos Números Complexos. Os resultados de Argand foram publicados em 1813 na obra "Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas".

Devido ao grande peso da contribuição dada por Argand, o plano que hoje é utlizado para a representação de números complexos é comumente chamado de plano de Argand-Gauss. O nome de Gauss aparece acompanhado ao nome de Argand, pois Gauss desenvolveu um trabalho, embora de forma independente, muito próximo do trabalho de Argand. O prestígio científico de Gauss foi fundamental para a aceitação dos Números Complexos pela comunidade acadêmica.

Em 1833, Hamilton, um matemático natural de Dublin na Irlanda, apresentou um artigo à Academia Irlandesa por meio do qual introduziu a álgebra formal dos números complexos. Segundo as ideias de Hamilton o conjunto dos números complexos pode ser visto como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (a, b) de números reais.

As informações aqui exposta sobre a história dos Números Complexos foram baseadas, principalemente, em [9], que é recomendada para um aprofundamento no assunto. Informações adicionais podem ser encontradas em [19].

O objetivo central de Hamilton não era desenvolver um tratamento algébrico formal dos Números Complexos, mas sim generalizar o conceito dos Números Complexos visando a encontrar um Álgebra que possuísse relações com vetores do espaço tridimensional similares com as relações existentes entre números complexos e vetores do plano.

Num primeiro momento, Hamilton acreditava que os entes matemáticos procurados deveriam possuir a forma $(a, b, c) = a + bi + cj$. Porém, após dez anos de trabalho, essa ideia foi abandonada por Hamilton, uma vez que não conseguira encontrar uma regra adequada para a multiplicação desses ternos. A nova tentativa de Hamilton foi considerar quádruplos em vez de ternos ordenados e, além disso, abandonar a comutatividade da multiplicação. Dessa forma, Hamilton tentou trabalhar com objetos da forma $(a, b, c, d) = a + bi + cj + dk$, onde i, j, e k são unidades imaginárias. Nasceram então os chamados *Quatérnions*.

Com o intuito de que a multiplicação entre dois quatérnions gozasse de determinadas propriedades preestabelecidas, tais como, associatividade, distributividade com relação a adição, existência de elementro neutro e inverso, as relações $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$ foram estabelecidas como definição.

Hamilton depositava grande confiança na aplicabilidade dos quatérnions, que são vistos como um dos grandes avanços da matemática. Eles são adequados para descrever vários fenômenos naturais e assim despertou-se o interesse de vários pesquisadores em matemática da época, entre eles, Hermann Gunther Grassmann que, em 1873, publicou um artigo no qual propôs o conceito de *objetos vetoriais*. De acordo com esse conceito, as grandezas físicas deveriam ser representadas por objetos geométricos ao invés de numéricos. Tais objetos poderiam ser segmentos de retas (vetores), fragmentos de planos orientados (bivetores), cubos orientados (trivetores), e assim por diante, onde se obtém de maneira geral os chamados *k-vetores*, os quais não possuem apelo geométrico quando $k \geq 4$. Além disso, Grassmann conseguiu generalizar a geometria de Euclides sugerindo um tratamento matemático válido para um espaço de dimensão qualquer. O trabalho de Grassmann deu origem à chamada *Álgebra Vetorial*, que ganhou grande notoriedade, devido as suas aplicações imediatas, principalmente, no ramo da física.

Grassmann definiu dois produtos entre objetos vetorias: o *produto interno* e o *produto externo*. De acordo com a definição de Grasmann o produto externo entre dois vetores é um bivetor. Geometricamente, dados dois vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, obtém-se o produto externo ao deslizar o vetor $\overrightarrow{a}$ na direção do vetor $\overrightarrow{b}$, definindo então um fragmento de plano orientado com sentido de giro do vetor $\overrightarrow{a}$ para o $\overrightarrow{b}$. O produto externo é representado por $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$. No capítulo 4, prova-se que o produto externo é associativo e anticomutativo.

O produto interno associa a cada par de objetos vetoriais um número real. Para vetores, o produto interno é definido pela fórumla $\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$, onde θ é o menor ângulo formado entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$. Na verdade, essa definição de produto interno para vetores é bastante difundida. A grande contribuição dada por Grassmann foi a generalização desse produto para os demais objetos vetoriais introduzidos por ele mesmo, tais como: bivetores, trivetores, entre outros.

O matemático William Kingdon Clifford, amparado nos trabalhos de Grassman e Hamilton, conseguiu formular, por volta de 1880, uma nova álgebra vetorial de forma mais simples que a álgebra desenvolvida por Grassman. Essa álgebra é conhecida por *Álgebra Geométrica* ou *Álgebra de Clifford* e se mostrou adequada para a descrição de vários fenômenos como a relatividade restrita, a mecânica quântica e o eletromagnetismo, despertando assim, o interesse de vários pesquisadores, principalmente, do ramo da física-matemática. Em particular, a Álgebra de Clifford ganhou notoriedade por conseguir reduzir as equações de Maxwell (que eram originalmente em 8) em apenas uma equação.

O conceito central da Álgebra de Clifford está na definição do chamado *produto geométrico* (ou *produto de Clifford*). O produto geométrico entre dois vetores foi definido como a soma entre o produto interno e o produto externo de Grassmann. Prova-se no capítulo 4 que o produto definido por Clifford é associativo e não comutativo. Além disso, possui a propriedade de que qualquer objeto vetorial (k-vetor) é invertível, como acontece com os quatérnions de Hamilton. Na verdade, o trabalho de Clifford unificou os trabalhos de Grassmann e de Hamilton.

No capítulo 4 serão apresentadas interessantes relações entre a Álgebra dos Números Complexos, a Álgebra dos Quatérnions e a Álgebra de Clifford, tais como um isomorfismo entre o conjunto dos Números Complexos e a Álgebra de Clifford $A(\mathbb{R}^2)$, sobre o plano bidimensional. Além disso, a definição de norma de um k-vetor foi desenvolvida por uma analogia com os Números Complexos. Observa-se, ainda, que os bivetores possuem um comportamento análogo ao comportamento da unidade imaginária, o que gerou novas formas de representações de objetos vetoriais.

Vários pesquisadores salientam que a Álgebra de Clifford deve ser utilizada no lugar da Álgebra Vetorial. O capítulo 4 deste trabalho apresenta com maior detalhe os objetos geométricos (k-vetores) e a Álgebra Clifford.

1.2 Objetivo do Trabalho

Este trabalho trata essencialmente dos números complexos: seu ensino, suas generalizações e aplicações. O trabalho foi dividido da seguinte forma:

Capítulo 2: Apresenta a atual conjuntura do ensino deste conceito no Ensino Médio, assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, livros didáticos do Ensino Médio e artigos sobre o ensino de números complexos são analisados. Além disso, estabelece diversas orientações que podem ser utilizadas em sala de aula como proposta de sequência didática para o Ensino dos Números Complexos via abordagem geométrica.

Capítulo 3: Apresenta uma fundamentação teórica dos Números Complexos e dos Quatérnions, demonstrando suas propriedades e elencando as principais definições. O conjunto $\mathbb{C}$ é caracterizado como um corpo.

Capítulo 4: Apresenta uma introdução à Álgebra Geométrica de Clifford, relacionando-a com a Álgebra dos Números Complexos e com os Quatérnions. Para tanto, trata-se do conceito de objetos vetoriais e define-se o produto geométrico. Após uma introdução informal, uma axiomática da Álgebra de Clifford é apresentada.

As conclusões deste trabalho e as indicações para desenvolvimento de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

CAPÍTULO 2

O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Este capítulo tem como objetivo a realização de uma análise crítica do ensino dos Números Complexos. Serão apresentadas análises de livros didáticos do Ensino Médio com o objetivo de levantar informações sobre o processo de Ensino e Aprendizagem desse assunto. Ao final, são apresentadas orientações para a utilização em sala de aula, com o intuito de introduzir os Números Complexos via abordagem geométrica.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - [5] a Matemática ensinada no Ensino Médio deve possibilitar o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, tomada de decisões, realização de inferências, entre outras. Nesse sentido, a Matemática no Ensino Médio possui caráter formativo, instrumental e científico.

Cumprindo o seu papel formativo, a Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, contribuindo para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Diante da perspectiva instrumental, a Matemática deve fornecer um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas em outras áreas da ciência, mostrando-se ao aluno como uma linguagem que permite modelar a realidade.

A Matemática vista como ciência deve se mostrar como um conjunto de definições, axiomas, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos que têm a capacidade de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

A álgebra e a geometria são subáreas da Matemática ligadas às aplicações, tanto internas da própria matemática como de outras ciências, e que, além disso, permitem a realização de uma abordagem teórica simples. Desse modo, são subáreas que contribuem para o cumprimento dos objetivos do Ensino da Matemática nas perspectivas formativa, instrumental e científica.

Os Números Complexos são entes que podem ser estudados tanto do ponto de vista algébrico como geométrico. Eles estão relacionados com problemas de rotação, translação e deslocamentos de figuras no plano e resolução de equações algébricas. Além disso, constituem-se em poderosas ferramentas para resolver problemas de outras áreas da ciência e possuem uma estreita relação com a trigonometria. Assim sendo, considera-se que o conteúdo de Números Complexos é de fundamental importância dentro do currículo da Matemática no Ensino Médio.

Pela análise de livros didáticos e como observado em vários trabalhos sobre o ensino de Números Complexos, acredita-se que o ensino desse assunto ocorre de forma predominantemente algébrica, deixando a interpretação geométrica em segundo plano, aparecendo apenas como uma aplicação.

As Orientações Educacionais Complementares aos PCN (PCN+) - [25] não fornecem muitas orientações ao ensino de Números Complexos. Nessa obra, consta apenas que eles devem ser apresentados como uma necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação e sugerem que isso seja feito por uma equação simples, como, por exemplo, $x^2 + 1 = 0$.

Essa orientação não se prende à raiz histórica dos Números Complexos, pois eles nasceram a partir da fórmula de solução de equações cúbicas e não quadráticas e, ao seguir apenas essa orientação, perde-se a valiosa oportunidade de apresentação dos Números Complexos diretamente como objetos geométricos, relacionando-os, desde o início, com pontos do plano.

De acordo com [11], uma abordagem que enfatize a parte gráfica dos Números Complexos promove a articulação entre os diversos tipos de registros que os representam, fato este necessário para a sua compreensão conceitual.

Por [1] a abordagem excessivamente algébrica no ensino dos Números Complexos gera duas consequências nocivas: i) O estudante permanece com uma visão demasiadamente formal, não se beneficiando da visualização; ii) O estudante, possivelmente, não estará apto a aplicar os Números Complexos para resolver problemas geométricos. Na verdade pesquisas apresentadas em [1] mostram que estudantes ficam surpreendidos ao saberem que números complexos podem ser utilizados para tratar de problemas reais.

Conclui-se, ainda, que os Números Complexos não são muito estudados nos cursos de nível superior por serem considerados "Elementares" e são evitados no Ensino Médio por serem considerados de "difícil compreensão" e com poucas utilidades práticas. Essa visão de que os Números Complexos não se aplicam à solução de problemas reais é vinda da própria forma como são introduzidos: a partir de sua definição algébrica e ausente de significados.

Apesar da defesa de uma abordagem geométrica dos Números Complexos, a abordagem algébrica tradicional não é dispensável. Apenas propõe-se uma alteração na ordem de apresentação, objetivando facilitar ao aluno a atribuição de significado a um número complexo.

Com intuito de validar algumas hipóteses e de verificar como os Números Complexos são comumente ensinados, análises de livros didáticos do Ensino Médio foram realizadas. Os resultados estão expostos na Seção 2.1.

2.1 Análise de Livros Didáticos

O livro didático é um instrumento essencial no ensino de qualquer disciplina. No Brasil, o livro se constitui no instrumento didático mais acessível aos professores. A rede pública de ensino fornece os livros didáticos gratuitamente para seus alunos e professores.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) compõe uma comissão para avaliação de livros didáticos, que considera vários quesitos com a finalidade de garantir a boa qualidade do material que é disponibilizado para os alunos da rede pública.

O livro didático possibilita que os alunos estudem sozinhos em casa, façam exercícios e realizem leituras complementares. Ele constitui-se num instrumento de atualização dos professores e auxilia no planejamento, organização e avaliação da disciplina ministrada. Diante da realidade brasileira, onde muitas escolas não possuem biblioteca, o livro assume um papel ainda mais importante no processo de ensino.

Levando em conta esses fatos, a análise de livros didáticos pode fornecer um panorama razoável do ensino de determinado conteúdo. Através dessa análise, é possível identificar quais os conteúdos são abordados e priorizados, qual a forma dessa abordagem e quais relações interdisciplinares são estabelecidas. Nesse sentido, esse texto apresenta análise de livros didáticos do Ensino Médio visando a delinear a atual condição de ensino dos Números Complexos.

Os Números Complexos são entes algébricos abordados no 3º ano do Ensino Médio, antecedendo o conteúdo de polinômios e sucedendo a geometria analítica. Esse caminho é geralmente adotado para que se possa tratar de polinômios sobre o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e culminar num importante resultado que é o Teorema Fundamental da Álgebra que afirma que todo polinômio possui pelo menos uma raiz complexa.
A análise mostrou que os conteúdos comumente tratados são a apresentação da unidade imaginária, a forma algébrica dos números complexos, operações com os complexos, forma trigonométrica e fórmulas de Moivre. Percorrendo esse caminho, os livros apresentam as definições fundamentais como conjugado e dão sentido à divisão entre números complexos.
Do ponto vista algébrico, os livros não cometem erros conceituais. A análise realizada teve como foco a forma de abordagem do conteúdo, a apresentação inicial dos Números Complexos, a contextualização apresentada, a interdisciplinaridade, as relações com outros conteúdos previamente estudados, entre outros.
Três livros foram analisados: (1) Matemática uma nova abordagem de Giovani Bonjorno - [7]; (2) Matemática de Dante - [8] e (3) Matemática Para o Ensino Médio de Bezerra - [6].

2.1.1 Análise do livro (1)

A introdução dos Números Complexos acontece a partir de uma equação quadrática com discriminante menor do que zero. Segue, portanto, a orientação dada pelos PCN. Quando aparece a famosa $\sqrt{-1}$, o texto informa que esse número não pertence ao conjunto $\mathbb{R}$, mas, com o intuito de que a equação tratada possua solução, define um novo número chamado unidade imaginária.
Em seguida, o texto apresenta alguns fatos históricos sobre a descoberta dos Números Complexos e admite, nesse ponto, que os números complexos nasceram por meio da solução de equações do terceiro grau e não das equações quadráticas como o exemplo utilizado para introduzir o conteúdo.
Dessa forma, a apresentação do conteúdo não se prende à raiz histórica e também não utiliza a abordagem geométrica. O caminho adotado pelo autor (de utilizar equações quadráticas) é a maneira mais rápida de se obter a $\sqrt{-1}$.
A forma algébrica dos números complexos é apresentada como uma definição, ou seja, um número complexo é um objeto da forma $z = a + bi$, onde $i^2 = -1$.
Com a apresentação do plano de Argand-Gauss começa a surgir um apelo geométrico, desse

modo, um número complexo começa a ser visto como um ponto. O conjunto $\mathbb{C}$ é definido como o conjunto dos pares ordenados da forma (a, b) e o texto já admite a dicotomia de notações, considerando que $(a, b) = a + bi$.

Não existe uma construção das diferentes formas de representação dos números complexos, de modo que a passagem de uma notação para a outra é apresentada como uma espécie de definição e sem muita justificativa.

As operações entre números complexos são definidas sem a utilização de um exemplo geométrico. Assim, o estudante não tem a oportunidade de visualizar a lógica que está por trás da definição apresentada.

O texto ensina a multiplicar Números Complexos pela utilização da propriedade distributiva e depois considerando a relação $i^2 = -1$. Na verdade, do ponto de vista prático, essa é a melhor maneira de fazer a multiplicação, muito embora, a operação de multiplicação não venha acompanhada da ideia de rotação. Assim, o aluno pode até aprender a realizar multiplicações entre Números Complexos, porém, dificilmente entenderá o significado dessa operação, de modo que, provavelmente, não estará apto a utilizar esse conhecimento na resolução de problemas mais elaborados.

A forma trigonométrica é apresentada e deduzida pela representação de um Número Complexo no plano de Argand-Gauss. Em seguida, são apresentadas as fórmulas de Moivre e o texto se encerra.

Ao final do texto, existe uma nota sobre aplicações dos Números Complexos. O texto informa, sem muita justificativa, que a multiplicação pela unidade imaginária corresponde à rotação de um vetor por um ângulo reto e relaciona a soma de vetores com a soma de complexos.

Em geral, o texto não traz propostas de problemas a serem resolvidos pelos alunos, há apenas exercícios que podem ser facilmente resolvidos utilizando-se as fórmulas e ideias apresentadas no próprio texto. Não existe uma abordagem do tipo espiral, ou seja, o conteúdo está completamente concentrado no capítulo destinado para ele e nesse sentido, o conteúdo não é retomado em momento posterior diante de um novo ponto de vista.

A abordagem geométrica é apresentada somente como comentário no final do capítulo. As definições apresentam-se, em geral, sem justificativas e desprovidas de sentido. Assim, a parte de aplicações possui um caráter mais informativo do que formativo.

2.1.2 Análise do livro (2)

A apresentação do conteúdo é iniciada com a equação $x^2 + 1 = 0$, exatamente conforme orienta os PCN. Dessa forma, surge que $x^2 = -1$. Como sabidamente todo quadrado de número real é positivo, obtém-se que o número x que satisfaz essa equação não pode ser real. Assim, o conjunto $\mathbb{C}$ aparece como um extensão dos números reais com a finalidade de que o conjunto solução da equação $x^2 + 1 = 0$ seja não-vazio. Portanto, tem-se novamente uma introdução do conteúdo pelo contexto das equações.

Em seguida, o livro apresenta o conjunto dos Números Complexos como o conjunto dos pares ordenados da forma (a, b) e define as suas operações. Nesse sentido, a operação de multiplicação é definida como $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Do ponto de vista algébrico, a definição está correta porém, do ponto de vista didático, ela não é muito apropriada.

Em consonância às ideias apresentadas em [1], a definição de multiplicação de números complexos dada acima quando utilizada para efeitos de ensino se compara a introduzir a operação de soma de frações com a definição $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

O caminho utilizado pelo autor ao apresentar os números complexos, desde o princípio, como pares ordenados fornece a oportunidade de relacionar estes com as operações geométricas de rotação e translação de vetores no plano. Dessa forma, as operações com números complexos poderiam ser definidas de maneira mais significativa para a aprendizagem, proporcionando uma articulação entre diversas formas de representação e a geometria euclidiana.

Porém, este não foi o caminho seguido pelo autor, pois logo em seguida é feita a chamada imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ e apresentada a forma algébrica de representação dos Números Complexos. A partir desse ponto, as operações passam a receber um tratamento estritamente algébrico. A forma trigonométrica é apresentada, juntamente com o plano de Argand-Gauss. Várias operações são realizadas utilizando-se essa forma de representação, inclusive as fórmulas de Moivre.

Ao final, o texto apresenta uma seção dedicada às aplicações dos Números Complexos. É nessa parte que as relações entre a Geometria e os Números Complexos são exploradas. As ideias de rotação e translação são apresentadas e justificadas.

De modo geral, o texto apresenta, além dos exercícios tradicionais, boas situações-problema que exigem certo empenho por parte do aluno para encontrar a solução. Existem problemas envolvendo geometria e também puramente algébricos. A abordagem do conteúdo não é do tipo espiral, concentrando-se no seu próprio capítulo e após realizada a apresentação, ele não é retomado em um outro nível.

2.1.3 Análise do livro (3)

Diante da impossibilidade de cálculo de raízes com índice par de números negativos, o autor sugere uma possível ampliação no conjunto $\mathbb{R}$ de modo que esse cálculo se torne possível. O texto define de imediato a chamada unidade imaginária através da condição $i^2 = -1$. Em seguida, o livro trabalha com exemplos e com equações quadráticas cujo discriminante é negativo.

Um número complexo é definido como um ente da forma $a + bi$, em que i é a unidade imaginária mencionada. As operações são definidas utilizando-se a forma algébrica dos números complexos. O texto não apresenta uma abordagem histórica dos Números Complexos. As interpretações geométricas das operações só aparecem ao final do texto, no momento de apresentação da forma trigonométrica. Nenhum problema geométrico é proposto ou resolvido utilizando Números Complexos.

Quando o plano de Argand-Gauss é apresentado, o livro associa o número complexo $a + bi$ com o par ordenado (a, b), porém não é apresentada uma justificativa para a realização desta associação, ou seja, essa relação é imposta de forma arbitrária e fora de um contexto que a motive.

O livro propõe diversos exercícios, porém nenhum problema é apresentado, ou seja, as questões propostas podem ser realizadas com facilidade pela utilização das fórmulas e definições dadas no texto.

Ao contrário das outras obras, esta não apresenta a formalização das fórmulas de Moivre. A exposição do conteúdo é feita de forma muito sucinta abordando apenas os tópicos mais importantes. O livro não apresenta aplicações dos números complexos, evidenciando uma falta de articulação entre conteúdos já estudados e com outras disciplinas. Além disso, a obra não apresenta uma abordagem em espiral.

Em consonância com o que foi constatado nas análises, em [21] destaca-se que os livros do Ensino Médio ao apresentarem o conteúdo de Números Complexos, em geral, não fazem conexões com outros temas já estudados, não trazem muitas figuras para ilustrar geometricamente as operações de soma e multiplicação e também para representar o conjugado como o simétrico com relação ao eixo real.

De acordo com [21], muitos livros afirmam que os Números Complexos tiveram a sua introdução motivada pelas equações quadráticas que não possuem raízes reais. Conclui-se também que a abordagem é essencialmente algébrica, sendo praticamente inexistente uma abordagem via vetores, de tal forma que as aplicações apresentadas não são relevantes, evidenciando assim, a falta de conexão entre os números complexos e a geometria, o que revela uma falta de articulação interna entre os próprios capítulos do livro.

Se a articulação interna é quase inexistente, imagine-se a articulação entre as diferentes disciplinas. Assim, perde-se a valiosa oportunidade de utilização dos números complexos para resolver problemas da física.

Conclui-se em [21] que os aspectos apresentados reforçam a necessidade de apresentação dos números complexos com ênfase na parte gráfica, procurando resolver problemas da geometria plana.

Em [11] é apresentada uma pesquisa realizada com seis alunos do Ensino Médio, nela constatou-se, por meio da aplicação de questionários, que nenhum deles mencionou que os números complexos poderiam ser utilizados para resolver problemas da geometria. Em outro momento, também afirmaram nunca terem utilizado números complexos para tal finalidade. Todos os alunos consideraram que os números complexos nasceram diante da necessidade de se resolverem equações quadráticas com discriminante negativo. Em [11] fica também evidenciado que a parte histórica dos números complexos é muito pouco explorada.

O questionário aplicado mostrou ainda que os alunos não conseguem associar corretamente um número complexo a um ponto do plano. Além disso, não estão aptos para interpretar geometricamente as operações de soma de multiplicação de números complexos.

As informações levantadas em [11], embora que através de uma amostra pequena, estão em consonância com as observações de [21] e com a análise dos livros didáticos aqui apresentadas. Nesse sentido, estes fatos reforçam as hipóteses levantadas neste capítulo e evidenciam a necessidade de apresentação dos Números Complexos via abordagem geométrica. Não basta apenas apresentar a parte geométrica como aplicação da parte algébrica. Na verdade, é necessário introduzir as operações entre complexos, primeiramente, via geometria. Em seguida, as relações algébricas surgirão como consequências quase imediatas.

A seguir apresentam-se algumas ideias para serem utilizadas em sala de aula. O intuito é fornecer subsídios aos professores do Ensino Médio para que possam apresentar geometricamente o conteúdo dos Números Complexos.

2.2 Idéias para Utilização em Sala de Aula

Nesta seção, pretende-se abordar o conteúdo dos Números Complexos seguindo um caminho que possa facilitar a sua compreensão por parte dos alunos do Ensino Médio. Não se trata de uma abordagem teórica convencional comumente encontrada em livros do Ensino Médio, mas sim de um tratamento pensado para a utilização em sala de aula. O conhecimento básico da geometria euclidiana, da trigonometria, do sistema de coordenadas ortogonais (em duas dimensões) e de vetores são pré-requisitos para a utilização das ideias aqui propostas.
Define-se, inicialmente, um número complexo como um par ordenado (a, b) de números reais. Esse fato permite a utilização de um apelo geométrico. Nesse sentido, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ coincide com conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos os pares ordenados de números reais. Dado um par ordenado qualquer $P = (a, b)$, este pode ser identificado como um ponto, um número complexo, ou ainda, um vetor $\overrightarrow{OP}$ que vai da origem $O = (0, 0)$ ao ponto P.
O Número Complexo $(0, 1)$ receberá um nome especial: *unidade imaginária*. Essa unidade imaginária será denotada por $i = (0, 1)$. O módulo de um número complexo $z = (a, b)$, representado por $|z|$, é por definição a distância do ponto $P = (a, b)$ à origem $O = (0, 0)$. Assim, $|z| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Quando $|z| = 1$, o número complexo z é dito unitário. Dado qualquer $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, o complexo $\dfrac{z}{|z|}$ é unitário.
As operações de adição e multiplicação por escalar com números complexos são as usuais em $\mathbb{R}^2$, assim, dados $(a, b),\ \ (c, d) \in \mathbb{C}$, tem-se que $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se que $\alpha.(a, b) = (\alpha.a, \alpha.b)$. Essas definições podem ser facilmente mostradas no plano. Em geral, a multiplicação por escalar pode alterar o módulo e/ou o sentido de um vetor qualquer do plano. A soma segue a regra do paralelogramo para a soma de vetores.

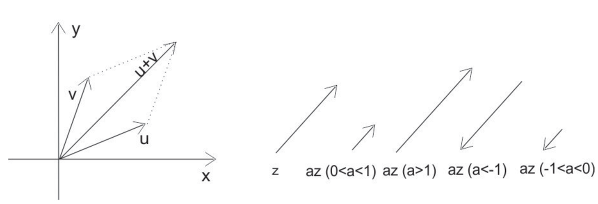

Figura 2.1: Soma de Números Complexos e Multiplicação por escalar.

Sendo $z = (a, b)$ um número complexo. Considere o ângulo θ que o complexo z faz com o eixo das abcissas.

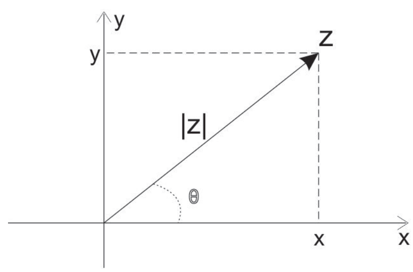

Figura 2.2: Representação geométrica de um número complexo z = (a,b).

Utilizando a definição de seno e cosseno, verifica-se facilmente que:

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \Longleftrightarrow a = |z|.\cos\theta$$

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{|z|} \Longleftrightarrow b = |z|.\text{sen}\theta$$

Assim, $z = (|z|.\cos\theta, |z|.\text{sen}\theta) = |z|.(\cos\theta, \text{sen}\theta)$. Essa é a chamada *forma polar* ou *forma trigonométrica* de um número complexo z. É importante que os alunos estejam convencidos de que qualquer número complexo pode ser escrito na forma polar.

De posse do que foi tratado é possível definir o produto entre dois números complexos. Aliado a essa definição é importante mostrar como utilizar números complexos para trabalhar com rotação de vetores. Dados os complexos $z_1 = |z_1|(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\beta, \text{sen}\beta)$, define-se o produto de z_1 por z_2, como o número complexo $z = z_1 z_2$ tal que $z = |z_1||z_2|(\cos(\alpha+\beta), \text{sen}(\alpha+\beta))$.

Geometricamente, cada número complexo da forma $z = |z|(\cos\theta, \text{sen}\theta)$ representa a rotação do ponto $(|z|, 0)$ por um ângulo θ em torno da origem.

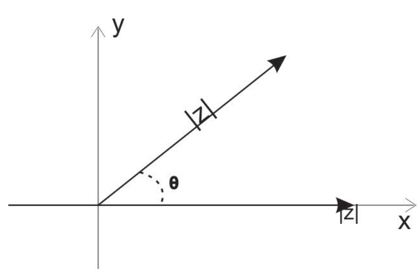

Figura 2.3: Rotação.

A multiplicação entre números complexos com o mesmo módulo corresponde a uma composição de duas rotações em torno da origem. Dados os complexos unitários $u = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$, $v = (\cos\beta, \text{sen}\beta)$, tem-se que:

$$uv = (\cos(\alpha+\beta), \text{sen}(\alpha+\beta)) = (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta), \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(\alpha))$$

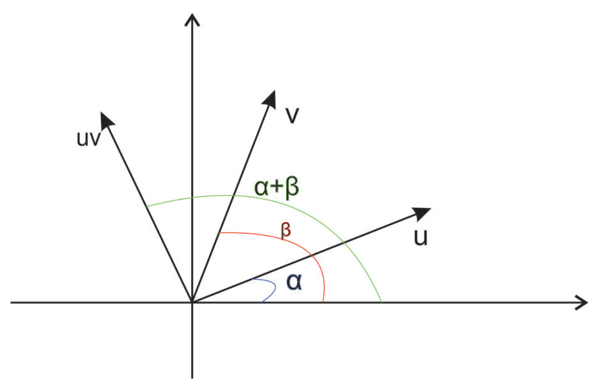

Figura 2.4: Produto entre complexos unitários.

Algebricamente, obtém-se a fórmula $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Em termos mais simples, o módulo do produto é igual ao produto dos módulos dos fatores e que o argumento do produto é igual a soma dos argumentos dos fatores. Tendo isso em mente, é conveniente abordar determinadas discussões com os alunos, tais como: Existe um elemento neutro na multiplicação de números complexos? Todo número complexo admite um inverso multiplicativo?
As respostas devem ser construídas, num primeiro momento, sem muito rigor matemático. Como o módulo do produto é o protudo dos módulo dos fatores, então o candidato a elemento neutro multiplicativo deve ter módulo igual a 1. Além disso, como o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores, então o possível elemento neutro deve ter argumento igual a zero. Assim, o elemento neutro multiplicativo é $1(\cos(0), \text{sen}(0)) = (1, 0)$.
Para responder o segundo questionamento, é necessário dar sentido à divisão entre números complexos. Para tanto, é conveniente a utilização de uma outra notação: a algébrica.
Para introduzir a notação algébrica é necessário apresentar uma forma de imersão do conjunto dos números reais no conjunto $\mathbb{C}$, ou seja, caracterizar $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{C}$. Isso teoricamente não é possível, pois os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ são números enquanto os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ são pares ordenados. Dessa forma, a imersão é feita através da

utilização de um isomorfismo, conceito que foge ao conteúdo programático do Ensino Médio. De modo geral, num primeiro momento, pode-se convencionar que $(a, o) := a$, para todo número real a. No capítulo 3 o isomorfismo aqui citado será apresentado.
Aceita a convenção acima, dado um número complexo (a, b), é possível escrever:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + bi$$

onde $i = (0, 1)$ é a unidade imaginária. Esta é a chamada forma algébrica dos Números Complexos.
Nesse momento, os alunos conhecem três formas diferentes para representar um mesmo número complexo. É importante que essas passagens sejam bem trabalhadas e manipulações com essas notações passando de uma para a outra são de fundamental importância para a compreensão. É preciso que se compreenda que é equivalente escrever (a, b), ou, $a + bi$, ou ainda, $|z|(\cos\theta, \text{sen}\theta)$.
Realizar as operações de soma, multiplicação por escalar e multiplicação entre números complexos utilizando a notação algébrica é muito simples. Nos dois primeiros casos, tem-se $(a+bi)+(c+di) = (a, b)+(c, d) = (a+c, b+d) = (a+c)+(b+d)i$ e $\alpha(a+bi) = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b) = \alpha a + \alpha bi$. Para o último caso, basta utilizar a propriedade distributiva assim como se utiliza para números reais e, por fim, notar que, $i^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1$.
Dado um número complexo $z = a + bi = (a, b)$, define-se o conjugado de z, representado por $\overline{z}$, como $\overline{z} = a - bi = (a, -b)$. Dessa forma, $\overline{z}$ é simétrico de z com relação ao eixo real.

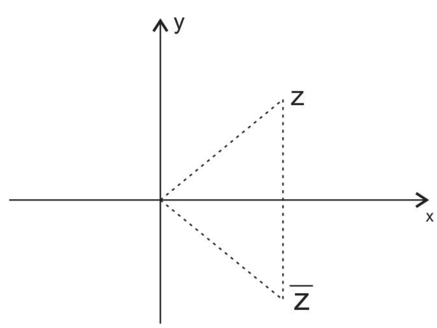

Figura 2.5: Um número Complexo e o seu conjugado.

Dado $z = a + bi$, tem-se $\overline{z} = a - bi$, e assim, $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.
De volta ao problema da divisão, dados dois números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$, pretende-se realizar a operação $\dfrac{z_1}{z_2}$, ou seja, busca-se encontrar o complexo $z = \dfrac{z_1}{z_2}$. Note-se

que:
$$z = \frac{z_1}{z_2} \Longleftrightarrow z = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} \Longleftrightarrow z = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$
O numerador de z é uma multiplicação entre números complexos, enquanto que o denominador é um número real (multiplicação por escalar). Portanto, essa operação pode ser perfeitamente realizada.

Dessa forma, as condições necessárias para responder ao segundo questionamento: todo número complexo admite um inverso multiplicativo? já foram estabelecidas. A resposta é quase afirmativa. Na verdade, todo complexo não-nulo possui inverso multiplicativo. O inverso é dado pelo número $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

É interessante a utilização de *softwares* de geometria dinâmica para o estudo dos números complexos. O *software* Cabri-Geomètric tem sido utilizado para essa finalidade. Em [10] existem diversas atividades que podem ser desenvolvidas com a sua utilização.

Existem inúmeros problemas geométricos que podem ser resolvidos via números complexos, talvez o mais conhecido seja o problema do tesouro perdido, que pode ser encontrado facilmente na literatura. Um aprofundamento do que foi exposto pode ser encontrado em [1].

2.3 Considerações Finais

Este capítulo tratou do ensino dos Números Complexos, defendendo sobretudo a utilização de uma abordagem geométrica para o estudo do conceito. De acordo com Hestenes "Geometria sem álgebra é como ser mudo, álgebra sem geometria é como ser cego". Nesse sentido, as articulações entre a geometria e álgebra são fundamentais para o ensino da matemática. A proposta aqui apresentada não exclui a utilização da abordagem algébrica tradicional, apenas a complementa. A abordagem geométrica pode ser utilizada para a introdução do conceito. Esse procedimento facilita o entendimento dos alunos e pode tornar a aprendizagem mais significativa.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS COMPLEXOS E QUATÉRNIONS

Este capítulo apresenta uma fundamentação teórica da Álgebra dos Números Complexos, mostrando as suas prinicipais propriedades e definições. Por fim, o conceito de Números Complexos é estendido para dimensão 4, originando os chamados *Quatérnions*. Uma introdução à fundamentação teórica dos Quatérnions é apresentada.

3.1 O Corpo dos Complexos

O objetivo desta seção é apresentar uma fundamentação teórica para o conjunto $\mathbb{C}$. Para isso, são definidas três operações sobre $\mathbb{C}$ e são estudadas suas principais propriedades e definições. Prova-se que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um Corpo e que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 3.1. *Chama-se conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$) o conjunto de todos os pares ordenados de números reais* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\quad x,\quad y \in \mathbb{R}\}$.

De acordo com essa definição, tem-se: $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y)$, onde $x,\quad y \in \mathbb{R}$.
Duas operações são, inicialmente, definidas no conjunto $\mathbb{C}$: a operação de adição e a de multiplicação. A operação de adição associa a cada par de números complexos a sua soma,

enquanto que a multiplicação associa a cada par de números complexos o seu produto.

Definição 3.2. *Dados $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, a soma de z_1 com z_2 é por definição $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e o produto é definido como $z_1.z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.*

De acordo com essas definições, a adição em $\mathbb{C}$ goza das seguintes propriedades:

(A1) Associativa: Dados quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{C}$, então $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
Demonstração. De fato, de acordo com as operações definidas, tem-se que:
$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2) + x_3, ((y_1 + y_2) + y_3)$
Porém, como $x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$, segue que:
$((x_1+x_2)+x_3, ((y_1+y_2)+y_3) = (x_1+(x_2+x_3), (y_1+(y_2+y_3)) = (x_1, y_1)+(x_2+x_3, y_2+y_3)$
Portanto, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$. ■

(A2) Comutativa: Dados quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{C}$. Tem-se que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
Demonstração. Basta notar que $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e como $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, então $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ e $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$. Dessa forma, conclui-se que

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1$$

. ■

(A3) Possui um elemento neutro: Existe um elemento em $\mathbb{C}$, a saber, $0 = (0, 0)$, tal que $z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}$.
Demonstração. Basta notar que dado qualquer $z = (x, y) \in$, tem-se que

$$z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$$

. ■

(A4) Existência do simétrico aditivo: Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe um $z' \in \mathbb{C}$, tal que $z + z' = 0$.
Demonstração. De fato, dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, tome-se $z' = (-x, -y) \in \mathbb{C}$, então

$$z + z' = (x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0) = 0$$

. ■

Por outro lado, a multiplicação em $\mathbb{C}$ goza das seguintes propriedades:

(M1) Assiciativa: Dados quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e $z_3 = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{C}$, vale que $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$.

Demonstração. De fato, note-se que:
$(z_1z_2)z_3 = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2-x_2y_1)(x_3, y_3) = ((x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+x_2y_1)y_3, (x_1y_2-x_2y_1)y_3+(x_1y_2+x_2y_1)x_3) = (x_1x_2x_3-y_1y_2y_3-x_1y_2y_3-y_1x_2y_3, x_1x_2y_3-y_1y_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3) = (x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(y_2x_3+x_2y_3), x_1(y_2x_3+x_2y_3)+y_1(x_2x_3)-y_2(x_2x_3-y_2y_3)) = (x_1, y_1).(x_2x_3-y_2y_3, x_2y_3+y_2x_3) = (x_1, y_1).[(x_2, y_2).(x_3, y_3)] = z_1.(z_2.z_3)$ ■

(M2) Comutativa: Sejam $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, então $z_1.z_2 = z_2.z_1$.

Demonstração. Basta notar que $z_1.z_2 = (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+y_1x_1) = (x_2x_1-y_2y_1, y_2x_1+x_1y_1) = z_2.z_1$ ■

(M3) Existe um elemento neutro multiplicativo, isto é, $\exists\ e_m \in \mathbb{C}$ tal que $z.e_m = e_m.z = z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Para provar que $e_m = (1, 0) \in \mathbb{C}$ é o elemento neutro multiplicativo, tome um número complexo qualquer, $z = (x, y)$. Observe que:
$z.e_m = (x, y).(1, 0) = (1, 0).(x, y) = (x.1 - y.0, x.0 + y.1) = (x, y) = z$ ■

(M4) Existência do inverso multiplicativo: Dado qualquer $z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, existe um $z^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que $z.z^{-1} = e_m$.

Demonstração. Seja $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Considere-se o número complexo

$$z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}.)$$

Observe-se que:

$$z.z^{'} = (x.\frac{x}{x^2+y^2} - y.\frac{-y}{x^2+y^2}, x.\frac{-y}{x^2+y^2} + y.\frac{x}{x^2+y^2}) = (1, 0) = e_m$$

■

Além dessas propriedades, o conjunto $\mathbb{C}$ munido das operações apresentadas goza da propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição.

(MA1) Dados z_1, z_2 e z_3 em $\mathbb{C}$, tem-se que, $z_1.(z_2+z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$. Demonstração. De fato, sejam $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C}$, observa-se que:
$z_1.(z_2+z_3) = (x_1, y_1).(x_2+x_3, y_2+y_3) = (x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3))$
Desta forma, tem-se que:
$z_1.(z_2+z_3) = ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)$
Por fim, segue que:
$z_1.(z_2+z_3) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 - x_3y_1) = z_1z_2 + z_2z_3$ ■

Assim, o conjunto $\mathbb{C}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas é um Corpo. Acrescentando a operação de multiplicação por escalar, definida na maneira usual, isto é, $\alpha.(x, y) = (\alpha.x, \alpha.y), \forall (x, y) \in \mathbb{C}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, então o conjunto $\mathbb{C}$ pode ser visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
Visualizar o conjunto $\mathbb{C}$ como um corpo garante a validade de várias propriedades. Talvez, a mais importante seja:

$$z_1.z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0 \;\; ou \;\; z_2 = 0, \;\; \forall \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3.1.1 Forma Algébrica

Sejam $R_1 \subset \mathbb{C}$, tal que $R_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e $f : \mathbb{R} \longrightarrow R_1$ uma função tal que $f(x) = (x, 0), \;\; \forall \;\; x \in \mathbb{R}$. Dados $x_1, \;\; x_2 \in \mathbb{R}$ com $f(x_1) = f(x_2)$, tem-se que $(x_1, 0) = (x_2, 0)$, donde, $x_1 = x_2$, portanto f é injetiva. Por outro lado, dado qualquer $y = (x, 0) \in R_1$, tem-se que $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é sobrejetiva. Dessa feita, a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow R_1$ é uma bijeção.
Além disso, f conserva as operações da adição e multiplicação, pois:

(1) $f(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y), \;\; \forall \;\; x, \;\; y \in \mathbb{R}$;

(2) $f(xy) = (xy, 0) = (xy - 0.0, x.0 + 0.y) = (x, 0).(y, 0) = f(x).f(y), \;\; \forall \;\; x, \;\; y \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, a função f é um *isomorfismo* e os conjuntos $R_1 \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ são ditos *isomorfos.* Em geral, isso permite associar de maneira única cada elemento de R_1 com um elemento de $\mathbb{R}$. Esse fato dá permissão ao abuso de notação $(x, 0) = x, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$.

Definição 3.3. *Chama-se unidade imaginária o número complexo* $i = (0, 1)$.

Note-se que dado qualquer $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ é possível escrever $z = (x, 0) + (0, y) = x + y.(0, 1) = x + yi$, em que i é a unidade imaginária. Essa forma é chamada *forma algébrica* do número complexo z.
De acordo com a definição da unidade imaginária i, conclui-se que $i^2 = (0, 1).(0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 - 1.0) = (-1, 0) = -1$. Assim, tem-se que dado qualquer número complexo $z = (x, y)$, sua forma algébrica é dada por $z = x + yi$, onde $i^2 = -1$.

Definição 3.4. *Dado um número complexo* $z = (x, y) = x + yi$*, o módulo ou norma de* z *é o número real não-negativo* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

De acordo com a definição de número complexo, é possível associar, de maneira única, cada número complexo com um ponto do plano. Geometricamente, o módulo do complexo z representa a distância do ponto z à origem do sistema de eixos ortogonais.

Proposição 3.5. *Sejam* z_1 *e* z_2 *dois números complexos quaisquer, são válidas as seguintes relações:*

(1) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$;

(2) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

(3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Definição 3.6. *O conjungado de um número complexo* $z = x + yi$ *é o número complexo* $\overline{z} = x - yi$.

Dessa forma, tem-se que $z.\overline{z} = (x + yi).(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. Essa propriedade permite calcular facilmente o quociente $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ de dois números complexos z_1 e z_2, com $z_2 \neq 0$. De fato, note-se que:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \Longleftrightarrow z.z_2 = z_1 \Longleftrightarrow z.z_2.\overline{z_2} = z_1.\overline{z_2} \Longleftrightarrow z = \frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Definição 3.7. *Dado qualquer número complexo $z = x + yi$, o número x é chamado parte real do complexo z e representado por $Re(z)$, enquanto que o número y é chamado parte imaginária do complexo z e é representado por $Im(z)$.*

São válidas as seguintes propriedades:

(1) $|z| = |\overline{z}|, \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C};$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$

(3) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$

(4) $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C};$

(5) $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C};$

(6) $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

Definição 3.8. *Dados um número complexo z e $n \in \mathbb{N}$, a enésima potência de z é por definição dada por:*

$$z^n = 1, \quad n = 0$$

$$z^n = zz^{n-1}, \quad n \geq 1$$

Definição 3.9. *Dados um número complexo z e $m \in \mathbb{Z}$, com $m < 0$, define-se a potência z^m como*

$$z^m = \frac{1}{z^{-m}}$$

Definição 3.10. *Dados o número complexos z e $m = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, define-se a potência z^m como o número complexos w, tal que $z^p = w^q$.*

O processo de cálculo de potências e raízes de números complexos é muito trabalhoso quando se utiliza a notação algébrica. Entretanto, existe uma outra forma de representação que simplifica substancialmente esse trabalho: a *forma polar* ou *forma trigonométrica*.

3.1.2 Forma Trigonométrica

Definição 3.11. *Chama-se argumento de um número complexo $z = x + yi$ não nulo ao ângulo θ tal que:*

$$\cos\theta = \frac{x}{p} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{p}, \text{ onde } p = |z|.$$

observa-se que:

(i) $p \neq 0$, pois $z \neq 0$;

(ii) O ângulo θ que satisfaz as condições da definição acima sempre existe, pois:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \frac{x}{p}^2 + \frac{y}{p}^2 = \frac{x^2+y^2}{p^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

(iii) Existem infinitos valores para o argumento de um número complexo $z \neq 0$. Basta notar que encontrado um argumento θ_0 que satisfaça as condições da definição 3.8, qualquer $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, em que k é um número inteiro qualquer também cumpre as condições necessárias.

Dessa maneira, dado um número complexo $z = x + yi$, sempre se pode encontrar um argumento θ, onde $\cos\theta = \frac{x}{p}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{c}$. Assim:

$$z = x + yi = p\cos\theta + pi\operatorname{sen}\theta = p(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Essa é a chamada *forma polar* ou *forma trigonométrica* do número complexo z. A utilização da forma trigonométrica simplifica a realização de diversos cálculos, principalmente com respeito à potenciação através das conhecidas fórmulas de Moivre, que serão posteriormente apresentadas.

Dados dois números complexos $z_1 = p_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = p_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$, o produto de z_1 com z_2 é dado por

$$z = z_1.z_2 = p_1.p_2[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1.\operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1.\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1.\cos\theta_2)].$$

Porém, como:

(i) $\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$, e

(ii) $\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1 = \text{sen}(\theta_1+\theta_2)$.

Segue-se que:

$$z = z_1.z_2 = p_1.p_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\text{sen}(\theta_1+\theta_2)).$$

Essa fórmula continua válida para o produto de n fatores ($n \geq 2$), conforme a proposição 3.9.

Proposição 3.12. *Dados* $z_1, \quad z_2, ..., \quad z_n \in \mathbb{C}$, *tais que* $z_j = p_j(\cos\theta_j + i\text{sen}\theta_j), \quad j = 1,2,3,...,n$, *tem-se que:*

$$z_1.z_2.....z_n = p_1.p_2...p_n(\cos(\theta_1+...+\theta_n) + i\text{sen}(\theta_1+...+\theta_n))$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução. Nota-se que a fórmula é válida para $n=2$ conforme apresentado anteriormente. Supondo-se, agora, que

$$z_1.z_2.....z_r = p_1.p_2...p_r(\cos(\theta_1+...+\theta_r) + i\text{sen}(\theta_1+...+\theta_r))$$

para algum $r \in \mathbb{N}$ deve-se provar que

$$z_1.z_2.....z_r.z_{r+1} = p_1.p_2...p_r.p_{r+1}(\cos(\theta_1+...+\theta_{r+1}) + i\text{sen}(\theta_1+...+\theta_{r+1})).$$

Para tanto, note-se que,

$$z_1.z_2.....z_r.z_{r+1} = p_1.p_2...p_r(\cos(\theta_1+...+\theta_r) + i\text{sen}(\theta_1+...+\theta_r)).z_{r+1}$$

donde, tem-se que:

$$z_1.z_2.....z_r.z_{r+1} = p_1.p_2...p_r.p_{r+1}(\cos(\theta_1+...+\theta_r+\theta_{r+1}) + i\text{sen}(\theta_1+...+\theta_r+\theta_{r+1}))$$

Assim, segue-se pelo princípio da indução finita que $z_1.z_2.....z_n = p_1.p_2...p_n(\cos(\theta_1+...+\theta_n) + i\text{sen}(\theta_1+...+\theta_n))$ ■

Proposição 3.13. *(Primeira Fórmula de Moivre) Dado um número complexo não-nulo* $z = p.(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, *então:*

$$z^n = p^n.(\cos n\theta + i.\text{sen}n\theta).$$

Demonstração. Se $n \in \mathbb{N}$ então a fórmula segue diretamente da proposição 3.9, uma vez que:

$$z^n = z.z.z...z = p.p...p.(\cos(\theta + ... + \theta) + i.\mathrm{sen}(\theta + ... + \theta)) = p^n.(\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta))$$

Se $n < 0$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = -m$. Assim:

$$z^n = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{p^m.(\cos m\theta + i\mathrm{sen} m\theta)} = \frac{1}{p^m}.\frac{\cos m\theta - i\mathrm{sen} m\theta}{(\cos m\theta + i\mathrm{sen} m\theta).(\cos m\theta - i\mathrm{sen} m\theta)}$$

Portanto, conclui-se que:

$$z^n = p^{-m}.[\cos(-m\theta) + i\mathrm{sen}(-m\theta)] = p^n.[\cos(n\theta) + i\mathrm{sen}(n\theta)]$$

■

Definição 3.14. *Dado um número complexo z, chama-se raiz enésima de z, denotada por $\sqrt[n]{z}$, ao número complexo z_k tal que $z_k^n = z$. Assim, vale:*

$$\sqrt[n]{z} = z_k \Longleftrightarrow z_k^n = z$$

A raiz enésima de um número complexo pode ser facilmente encontrada pela utilização da chamada segunda fórmula de Moivre.

Proposição 3.15. *(Segunda Fórmula de Moivre) Dados o número complexo $z = p.(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma:*

$$z_k = \sqrt[n]{p}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

em que $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Se $z_k = r.(\cos w + i\mathrm{sen} w)$, então:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \Longleftrightarrow z_k^n = z$$

Assim:
$r^n.(\cos nw + i\mathrm{sen} nw) = p.(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$
Portanto, tem-se que:
(1) $r^n = p \Longleftrightarrow r = \sqrt[n]{p}$

(2) $\cos nw = \cos\theta$ e $\text{sen} nw = \text{sen}\theta$, logo, $nw = \theta + 2k\pi$, donde, $w = \dfrac{\theta}{n} + k.\dfrac{2\pi}{n}$

Supondo que $0 \leq \theta < 2\pi$, temos que determinar os valores de k para os quais resultam valores de w compreendidos entre 0 e 2π.

$k = o \Rightarrow w = \dfrac{\theta}{n}$

$k = 1 \Rightarrow w = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

$k = 2 \Rightarrow w = \dfrac{\theta}{n} + 2.\dfrac{2\pi}{n}$

O procedimento continua até que:

$k = n-1 \Rightarrow w = \dfrac{\theta}{n} + (n-1).\dfrac{2\pi}{n}$.

Esses n valores de w não são congruentes por estarem todos no intervalo $[0, 2\pi[$, portanto, n valores distintos para z_k foram obtidos.

Note-se que se $k = n$, obtém-se $w = \dfrac{\theta}{n} + n.\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi$. Esse valor é congruente ao valor obtido quando $k = 0$. De modo geral, dado qualquer $k \in \mathbb{Z}$, com $k \geq n$, existem $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que, $k = nq + r$, com $0 \leq r < n$. O valor de w correspondente a k é congruente ao valor de w correspondente a r.

Dessa forma, obtém-se apenas n valores para z_k e é suficiente fazer $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. ■

Como aplicação das proposições 3.10 e 3.12, as raízes quadradas de -1 serão determinadas. Note que $z = -1 = \cos\pi + i\text{sen}\pi$. Assim, de acordo com a segunda fórmula de Moivre:

$$z_k = \sqrt{1}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right], \quad k \in 0, 1$$

Portanto:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -i$$

essas são as duas raízes quadradas de -1.

Existe ainda, a definição da exponencial de um Número Complexo. Tal definição foi motivada por meio dos desenvolvimentos das funções seno, cosseno e exponencial em séries de Maclaurin. A dedução que motiva essa definição pode ser encontrada em [24]. Mais especificamente, tem-se que:

Definição 3.16. *Dado um número complexo $z = x + yi$, a exponencial de z, denotada por*

e^z, *é dada pela expressão:*

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\text{sen}y).$$

3.2 Polinômios Sobre o Corpo $\mathbb{C}$

A caracterização do conjunto $\mathbb{C}$ como corpo permite a definição de polinômios sobre $\mathbb{C}$. Um importante resultado da Álgebra diz que todo polinômio de grau n sobre o corpo dos Complexos admite exatamente n raízes complexas, incluindo-se, nesse caso, as raízes reais. Esse fato não é válido para polinômios sobre o corpo dos reais. De fato, seja $p(x) = x^2 + 1$ um polinômio sobre $\mathbb{R}$. O polinômio p possui grau 2, porém não admite raízes reais. O objetivo desta seção é definir um polinômio sobre o corpo dos complexos, mostrar algumas propriedades relacionadas ao número de raízes de um polinômio.

Dados os números complexos a_0, a_1, ..., a_n, considere-se a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função dada é chamada função polinomial ou polinômio com coeficientes a_0, a_1, ..., a_n. Quando $a_n \neq 0$, então o polinômio f possui grau n.

Um polinômio f é dito nulo quando se tem $f(x) = 0, \quad \forall \ x \in \mathbb{C}$. Prova-se com determinada facilidade que o polinômio f é nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes são nulos. Como consequência, fica estabelecido que dois polinômios f e g são idênticos (isto é, $f(x) = g(x) \ \ \forall \ x \in \mathbb{C}$) se, e somente se, possuem os mesmos coeficientes.

As operações de adição (subtração), multiplicação e divisão de polinômios sobre $\mathbb{C}$ são realizadas da mesma forma e possuem as mesmas propriedades das operações em polinômios sobre $\mathbb{R}$.

Definição 3.17. *Dados os polinômios m e p, diz-se que m divide p e escreve-se $m|p$ quando existe um polinômio q tal que $p = mq$*

Proposição 3.18. *(Teorema do Resto) O resto da divisão de um polinômio f por $x - a$ é igual a $f(a)$.*

Demonstração. Pela definição de divisão, existem polinômios q e r, tais que $f(x) = q(x)(x - a) + r(x)$, onde o grau do polinômio r é igual a 0 ou r é o polinômio nulo.

Da igualdade acima, obtém-se que $f(a) = q(a)(a - a) + r(a)$, donde, $r(a) = f(a)$. Como r é um polinômio constante, $r(x) = f(a), \quad \forall x \in \mathbb{C}$. ■

Proposição 3.19. *(Teorema de D'Alembert) Um polinômio f é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de f.*

Demonstração. De acordo com a proposição 3.13 constata-se que $r = f(a)$. Então, se a é raiz de f, segue-se que, $f = q(x - a) + r$, em que $r = f(a) = 0$. Assim, $x - a$ divide f. Reciprocamente, se f é divisível por $x - a$, então existe q tal que $f = (x - a)q$, donde, $r = 0$. ■

Um teorema de grande importância é o Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A). Seu enunciado é simples:

Proposição 3.20. *(T.F.A) Todo polinômio P sobre o corpo dos complexos e de grau maior ou igual a 1 admite ao menos uma raiz complexa.*

Proposição 3.21. *(Teorema da Decomposição) Todo polinômio P sobre $\mathbb{C}$ de grau n, com $n \geq 1$*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,$$

com $a_n \neq 0$, pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n)$$

em que r_1, r_2,..., r_n são as raízes de P. Com exceção da ordem dos fatores, tal decomposição é única.

Demonstração. 1ª parte: Existência.
Seja P um polinômio conforme o enunciado do teorema. Como $n \geq 1$, então pelo T.F.A, segue-se que P admite ao menos uma raiz r_1. Assim $P(r_1) = 0$. Logo, pelo teorema de D'Alembert, P é divisível por $x - r_1$. Portanto:

$$P(x) = (x - r_1).Q_1(x)$$

onde Q_1 é um polinômio de grau igual a $n - 1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n = 1$, então $n - 1 = 0$ e Q_1 é um polinômio constante, logo, $Q_1 = a_n$ e $P = a_n(x - r_1)$.
Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$ e aplicando novamente o T.F.A (agora ao polinômio Q_1), existe $r_2 \in \mathbb{C}$ tal que $Q_1(r_2) = 0$ e Q_1 é divisível por $x - r_2$. Assim:

$$Q_1 = Q_2(x - r_2) \Longleftrightarrow P = Q_2(x - r_1)(x - r_2)$$

onde Q_2 é um polinômio de grau $n-2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n=2$, então $n-2=0$, logo $Q_2 = a_n$ e $P = a_n(x-r_1)(x-r_2)$. Se $n \geq 3$ o processo prossegue.
De modo geral, após n aplicações sucessivas do T.F.A. resulta-se a igualdade:

$$P = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n)Q_n$$

em que Q_n tem grau $n-n=0$ e coeficiente dominante a_n, portanto, $Q_n = a_n$ e

$$P = a_n(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n)$$

2ª Parte: Unicidade.
Suponha que o polinômio P admita duas decomposições:

$$P = a_n(x-r_1)...(x-r_n)$$

$$P = b_n(x-s_1)...(x-s_n)$$

Supondo reduzidos e ordenados os dois segundos membros, tem-se que:

$$a_nx^n - a_nR_1x^{n-1} + ... = b_mx^m - b_mS_1x^{m-1} + ...$$

Pela igualdade de polinômios, $n = m$ e $a_n = b_m$. Resta, portanto, a seguinte igualdade:

$$(x-r_1)(x-r_2)...(x-r_n) = (x-s_1)(x-s_2)...(x-s_n)$$

Fazendo $x = r_1$, obtém-se:

$$(r_1-s_1)(r_1-s_2)...(r_1-s_n) = 0$$

Como o produto é nulo, existe algum dos fatores, $r_1 - s_j$ que seja nulo. Suponha, sem perda de generalidade, que $r_1 - s_1 = 0$, donde, $r_1 = s_1$.
Resta assim a igualdade:

$$(x-r_2)...(x-r_n) = (x-s_2)...(x-s_n)$$

Se $x = r_2$ conclui-se de maneira análoga que $r_2 = s_2$.
Continuando o procedimento, ve-se que $r_i = s_i, \ \forall \ i \in \{1,2,3,...,n\}$. Isso prova a unicidade da decomposição.
■
Essa proposição implica um importante resultado:

Proposição 3.22. *Todo polinômio (ou equação polinomial) de grau n, com $n \geq 1$ admite n e somente n, raízes complexas.*

Maiores detalhes sobre o tratamento apresentado podem encontrados em [4].

3.3 Os Quatérnions

Os números complexos possuem grandes similaridades geométricas com vetores do plano bidimensional. Porém, essas similaridades não são extensivas aos vetores do espaço tridimensional. Assim, Hamilton buscou definir um objeto matemático, que seria uma generalização dos números complexos, de modo que esse novo objeto possuísse similaridades para com os vetores tridimensionais, assim como os números complexos possuem similaridades para com os vetores bidimensionais.

De acordo com [9], o primeiro caminho tomado por Hamilton foi pensar em entes matemáticos da forma $z = a + bi + cj$, onde a, b e c são números reais e j cumpre a condição $j^2 = j.j = -1$.

Essa tentativa mostrou-se infrutífera, pois esses entes não obedecem à propriedade de fechamento da multiplicação, ou seja, dados dois entes z_1 e z_2 conforme acima, o produto $z_1 z_2$, calculado de acordo com as leis da álgebra e com relação $j^2 = -1$, não seria um ente da mesma forma. Dessa feita, a operação de multiplicação não poderia, teoricamente, ser definida no conjunto formado por todos os objetos da forma $z = a + bi + cj$.

Procurando resolver esse impasse, Hamilton percebeu a necessidade de se introduzir mais uma unidade imaginária e de abandonar a comutatividade do produto. Assim, foram introduzidos, em 1843, os chamados *Quatérnions*, que são entes quadrimensionais da forma $z = a + bi + cj + dk$, onde i, j e k são unidades imaginárias. Nesse sentido, um quatérnion é formado por uma parte real e trêz partes imaginárias. Em [18], encontra-se a seguinte definição de Quatérnion:

Definição 3.23. *Um quatérnion é um objeto matemático da forma $z = a + bi + cj + dk$, onde a, b, c e d são números reais e i, j e k são unidades imaginárias, tais que*

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ji = j = -ik$$

As relações entre as unidades imaginárias i, j e k enunciadas na definição 3.18, foram estabelecidas com a finalidade de garantir a propriedade do fechamento para o produto entre quatérnions. Segue imediatamente dessa definição que o produto entre as três unidades imaginárias de um quatérnion é dado por:

$$ijk = ii = i^2 = -1$$

A soma de quatérnions é definida de maneira análoga à soma de números complexos, ou seja, dados dois quatérnions $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, tem-se que a soma $p + q$ é dada por $p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k$. Além disso, tem-se que os quatérnions p e q são iguais, se e somente se, $p_t = q_t, \forall \ t \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Definição 3.24. *Dado um quatérnion $z = a + bi + cj + dk$, chama-se parte escalar do quatérnion z, denotada por $E(z)$ ao número real a. Assim, $E(z) = a$. Chama-se parte vetorial do quatérnion z, denotada por $V(z)$ a parte que vem acompanhada pelas unidades imaginárias. Assim, $V(z) = bi + cj + dk$.*

No sentido dessa definição, todo quatérnion é da forma $z = E(z)+V(z)$. A multiplicação entre quatérnions é realizada de maneira análoga ao produto de número complexos, por meio da utilização das propriedades associativa e distributiva e das relações estabelecidas na definição dos quatérnions.

Definição 3.25. *Chama-se quatérnion puro o quatérnion que possui parte escalar nula.*

Assim, z é dito quatérnion puro se, e somente se, $E(z) = 0$. Nesse caso, $z = V(z)$. Dados dois quatérnions puros da forma:

$$z_1 = a_1 i + b_1 j + c_1 k, \quad z_2 = a_2 i + b_2 j + c_2 k$$

O produto de z_1 por z_2 é dado por:

$$z_1 z_2 = (a_1 i+b_1 j+c_1 k)(a_2 i+b_2 j+c_2 k) = -(a_1 a_2+b_1 b_2+c_1 c_2)+i(b_1 c_2-c_1 b_2)+j(a_1 c_2-c_1 a_2)+k(a_1 b_2-b_1 a_2)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$E(z_1 z_2) = -(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)$$

$$V(z_1 z_2) = i(b_1 c_2 - c_1 b_2) + j(a_1 c_2 - c_1 a_2) + k(a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

Portanto, o produto entre dois quatérnions puros gera um quatérnion com parte escalar não nula, indicando que não é possível realizar um tratamento isolado das partes escalar e vetorial. Fato análogo acontece com números complexos, pois o produto de dois imaginários puros resulta num escalar.

A parte vetorial de um quatérnion pode ser representada como um ponto do $\mathbb{R}^3$, assim, se $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, tem-se $v(q) = (q_1, q_2, q_3)$.

Definição 3.26. *Sejam $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Define-se o produto interno de u por v, denotado por $u \cdot v$ como*

$$u \cdot v = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

Definição 3.27. *O produto vetorial entre dois vetores $u = (a_1, b_1, c_1)$ e $v = (a_2, b_2, c_2)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, denotado por $u \times v$, é dado por*

$$u \times v = (b_1 c_2 - b_2 c_1, -(a_1 c_2 - a_2 c_1), a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Assim, se $r_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $r_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são vetores tridimensionais aos quais estão associados os quatérnions $z_1 = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ e $z_2 = a_2 i + b_2 j + c_2 k$, então $r_1 \cdot r_2$ tem a mesma estrutura algébrica que $-E(z_1 z_2)$ e $r_1 \times r_2$ tem a mesma estrutura algébrica de $V(z_1 z_2)$. Esses fatos sugerem as associações:

$$r_1 \cdot r_2 \longleftrightarrow -E(z_1 z_2)$$

$$r_1 \times r_2 \longleftrightarrow V(z_1 z_2)$$

Dessa forma, se z_1 e z_2 são quatérnions puros, tem-se que:

$$z_1 z_2 = -r_1 \cdot r_2 + r_1 \times r_2$$

O produto vetorial entre vetores do $\mathbb{R}^3$ resulta num vetor com direção perpendicular ao plano determinado pelos vetores em questão. Além disso, o produto interno entre dois vetores resulta num escalar. Portanto, o produto entre quatérnions é a soma de um escalar com um vetor perpencular aos vetores que estão associados aos quatérnions em questão.

As unidades imaginárias i, j e k são chamadas de versores. Sejam $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ e $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Note que:

$$pq = p_0 q_0 + p_0 V(q) + q_0 V(p) + V(p)V(q)$$

Assim, utilizando a notação $V(p) = p_1 i + p_2 j + p_3 k = (p_1, p_2, p_3)$ e $V(q) = q_1 i + q_2 j + q_3 k = (q_1, q_2, q_3)$, temos que:

$$pq = p_0 q_0 + p_0 V(q) + q_0 V(p) - V(p) \cdot V(q) + V(p) \times V(q)$$

Definição 3.28. *Dado o quatérnion* $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = E(q) + V(q)$*, chama-se conjugado de* q *o quatérnion* $\overline{q} = E(q) - V(q)$.

Dessa forma, o produto de um quatérnion q pelo seu conjugado é dado por:

$$q\overline{q} = (E(q)+V(q))(E(q)-V(q)) = q_0^2-(-V(q)\cdot V(q)+V(q)\times V(q)) = q_0^2+V(q)\cdot V(q)-V(q)\times V(q)$$

Porém, como $V(q) \times V(q) = 0$ e $V(q) \cdot V(q) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, segue-se que:

$$q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

Essa expressão é, na verdade, a generalização do teorema de pitágoras para quatro dimensões.

Definição 3.29. *Dado um quatérnion* $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$*, chama-se norma ou módulo de* q *ao número real dado por:*

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

Proposição 3.30. *Dado um quatérnion* q *qualquer, tem-se que* $|q| = \sqrt{q\overline{q}}$.

Demonstração. A demonstração é direta. Basta notar que $q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2$. ■
Tomando o quatérnion identicamente nulo $n = 0+0i+0j+0k$, tem-se que $q+n = n+q = q$ para todo quatérnion q. Portanto, a adição de quatérnions possui elemento neutro, além disso, ela goza das propriedades associativa e comutativa.

Proposição 3.31. *O produto vetorial é anticomutativo, ou seja, se* u *e* v *são vetores do* $\mathbb{R}^3$*, então* $u \times v = -v \times u$.

O produto interno é comutativo, ou seja, se u e v são vetores do $\mathbb{R}^3$, então $u.v = v.u$.

Assim, tem-se que se z_1 e z_2 são quatérnions puros, então

$$z_1 z_2 = -z_1 \cdot z_2 + z_1 \times z_2 = -z_2 \cdot z_1 - z_2 \times z_1$$

isso garante que o produto entre quatérnions puros não é comutativo e nem anticomutativo.

Proposição 3.32. *Sejam* $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ *e* $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ *quatérnions. São válidas as seguintes relações:*

a) $\dfrac{pq - qp}{2} = V(p) \times V(q)$*;*

b) $\dfrac{pq + qp}{2} = p_0q_0 + p_0V(q) + q_0V(p) - V(p) \cdot V(q)$*.*

Demonstração. Note-se que:

(1) $pq = p_0q_0 + p_0V(q) + q_0V(p) - V(p) \cdot V(q) + V(p) \times V(q)$;

(2) $qp = p_0q_0 + p_0V(q) + q_0V(p) - V(q) \cdot V(p) + V(q) \times V(p)$.

Assim,

$$pq - qp = V(p) \times V(q) - V(q) \times V(p) = 2(V(p) \times V(q)) \Longleftrightarrow \frac{pq - qp}{2} = V(p) \times V(q)$$

o que prova o item (a) da proposição. Para o item (b), somem-se as equações (1) e (2). Obtém-se que:

$$pq+qp = 2p_0q_0+2p_0V(q)+2q_0V(p)-2V(p)\cdot V(q) \Longleftrightarrow \frac{pq + qp}{2} = p_0q_0+p_0V(q)+q_0V(p)-V(p).v(q)$$

■

Proposição 3.33. *Seja* $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ *um quatérnion não-nulo, isto é, com* $p_i \neq 0$*, para algum* $i \in \{0, 1, 2, 3\}$*. O quatérnion* $p^{-1} = \dfrac{\overline{p}}{|p|^2}$ *é tal que* $pp^{-1} = p^{-1}p = 1$*.*
Demonstração. Basta notar que:

$$pp^{-1} = p\frac{\overline{p}}{|p|^2} = \frac{|p|^2}{|p|^2} = 1$$

. ■

Os quatérnions podem ser utilizados para tratar problemas de mecânica quântica, teoria dos campos, entre outros. Exemplos de aplicações dos quatérnions podem ser encontrados em [14], [15] e [16]. Mais informações sobre quatérnions podem ser encontradas em [18]. Uma das aplicações mais famosas e bem sucedidas dos quatérnions é a *Álgebra de Gibbs - Heaviside*. O trabalho de Hamilton foi estendido por Grassmann para espaços vetoriais de dimensão qualquer, aparecendo assim, a chamada *Álgebra de Grassmann* ou *Álgebra Exterior*. Por sua vez, a Álgebra de Grassmann foi generalizada por Clifford, dando origem à conhecida *Álgebra Geométrica*, que será apresentada no Capítulo 4.

3.4 Considerações Finais

Este capítulo apresentou a Álgebra dos Números Complexos e uma introdução aos Quatérnions. Os Quatérnions ficaram por muitos anos esquecidos pela comunidade acadêmica, porém vários pesquisadores têm retomado seu estudo e muitas aplicações foram encontradas nas mais diferentes áreas.

O capítulo trouxe à frente as principais propriedades dos quatérnions e evidenciou aspectos análogos aos números complexos, uma vez que sua multiplicação é associativa, possui elemento neutro e inverso. Além disso, o conceito de conjugado para quatérnions cumpre a condição $q\overline{q} = |q|^2$. Por possuírem dimensão 4 as representações geométricas de quatérnions ficam prejudicadas, ainda assim, os quatérnions podem ser utilizados no estudo de rotações tridimensionais.

CAPÍTULO 4

UMA APLICAÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Este capítulo trata da Álgebra Geométrica ou Álgebra de Clifford. Num primeiro momento, o conceito de *objetos vetoriais* é introduzido, algumas propriedades são apresentadas e três produtos entre objetos vetoriais são definidos: o produto interno, o produto externo (ou produto de Grassman) e o produto geométrico (ou produto de Clifford), sendo este último estudado com maior ênfase. Por fim, o tratamento axiomático da Álgebra de Clifford é apresentado e dois exemplos especiais são abordados: a Álgebra de Clifford sobre o plano $\mathbb{R}^2$ ($A(\mathbb{R}^2)$) e sobre o espaço tridimensional ($A(\mathbb{R}^3)$).

4.1 Objetos Vetoriais

No estudo da física, é comum lidar com grandezas escalares e vetoriais. Quando uma grandeza fica totalmente representada conhecendo apenas a sua magnitude, ela é dita grandeza escalar. Alguns exemplos de grandezas escalares são massa e tempo.
Outras grandezas necessitam de mais informações para que possam ser caracterizadas. O

conceito de vetor foi desenvolvido para representar grandezas nas quais se faz necessário saber, além de sua magnitude, a sua direção e o seu sentido. É o caso da velocidade, da aceleração e de qualquer força exercida sobre um determinado corpo. Todas essas grandezas são ditas vetoriais. Um vetor é comumente representado por um segmento de reta orientado.

O conceito de *objeto vetorial* é uma generalização do conceito de vetor. Algumas grandezas ficam mais bem descritas quando representadas por outros objetos, como exemplo, planos orientados. Esse é o caso de grandezas angulares como o momento angular, torque, entre outros. Basta notar que essas grandezas não atuam sobre um reta, mas sim, ao longo de um plano que, em geral, não pode ser representado apenas por um vetor.

Desse modo, um novo conceito é estabelecido: o *bivetor*, que consiste num fragmento de plano orientado, onde a área deste fragmento de plano caracteriza a magnitude da grandeza vetorial que ele representa. A direção da grandeza é representada pela direção do plano suporte ao bivetor. Um bivetor admite, ainda, dois sentidos: horário e anti-horário.

De maneira análoga, admite-se que outros objetos geométricos possam representar grandezas. Dado um espaço k-dimensional, é possível definir desde escalares até os chamados *k-vetores*. Como exemplo, existem trivetores, quadrivetores, pentavetores, entre outros. Um trivetor é representado por triedros orientados. Dos quadrivetores em diante, o apelo geométrico é perdido.

De maneira geral, um *objeto vetorial* é uma classe de objetos matemáticos que representam grandezas físicas, de forma que, toda grandeza física possa ser representada por um desses objetos. Um objeto vetorial necessita de quatro propriedades para ser completamente determinado: grade, módulo, direção e sentido.

A grade classifica o objeto vetorial de acordo com o objeto geométrico que o representa, tais como: ponto, reta, plano, triedo, entre outros. Uma grandeza que não necessita de orientação é representada por escalares e possui grade igual a 0. Grandezas como velocidade, aceleração e outras forças, que são representadas por vetores, possuem grade igual a 1. De maneira análoga, grandezas representadas por bivetores possuem grade 2. Grandezas k-dimensionais são representadas por k-vetores e possuem grade k.

O módulo representa a magnitude do objeto vetorial. O módulo de um vetor é representado pelo seu comprimento; de um bivetor, pela área do fragmento de plano e de um trivetor, pelo volume do triedro. O módulo de qualquer k-vetor é um número real não-negativo que representa a intensidade da grandeza.

A direção de um vetor corresponde à sua reta suporte; de um bivetor, ao seu plano suporte;

de um trivetor, ao seu triedro suporte e assim por diante. Nesse sentido, os escalares não possuem direção.

O sentido de um k-vetor define a origem e o destino. Na verdade, o sentido nada mais é do que a direção quando orientada da origem para o destino. Sempre existem duas possibilidades de sentido para um determinado k-vetor. Os escalares podem ser positivos ou negativos, um vetor pode apontar para qualquer um dos lados de sua reta suporte, um bivetor pode atuar no sentido horário ou anti-horário. Já o trivetor tem seu sentido definido pela "regra da mão direita"ou pela "regra da mão esquerda".

Um tratamento mais elaborado dos objetos vetoriais pode ser encontrado em [2].

4.2 O Sistema de Coordenadas Vetoriais

O objetivo desta seção é apresentar um tratamento analítico para os objetos vetoriais. Na verdade, trata-se de uma generalização do tratamento analítico utilizado para os vetores.

Um sistema de coordenadas cartesianas é um sistema de eixos ortogonais entre si que se encontram num determinado ponto, chamado origem. Dessa forma, um espaço k-dimensional é formado por k eixos, $X_1, ..., X_k$ ortogonais entre si. Qualquer ponto P desse espaço k-dimensional pode ser unicamente representado por uma sequência ordenada $(x_1, x_2, ..., x_k)$, em que cada x_i com $i \in \{1, 2, ..., k\}$ representa a distância da projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo X_i a origem.

O sistema de eixos ortogonais bidimensional foi utilizado por Gauss e Argand para representar os números complexos. Posteriormente, Grassmann desenvolveu um sistema de coordenadas ideal para a representação de vetores, que consistia em associar a cada eixo coordenado X_i um vetor unitário $\overrightarrow{e_i}$ chamado *versor*, de tal modo que, dado qualquer vetor $\overrightarrow{v}$, pode-se encontrar números reais, únicos, α_i, com $i \in \{1, 2, ..., k\}$ tais que $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e_1} + ... + \alpha_k \overrightarrow{e_k}$. O conjunto dos versores $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_k}\}$ é chamado base do sistema k-dimensional.

É comum escrever $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_k)$ para indicar que $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e_1} + v_2 \overrightarrow{e_2} + ... + v_k \overrightarrow{e_k}$.

De acordo com esse sistema, o módulo de um vetor qualquer $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_k)$ é obtido pela versão k-dimensional do teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_m^2}$$

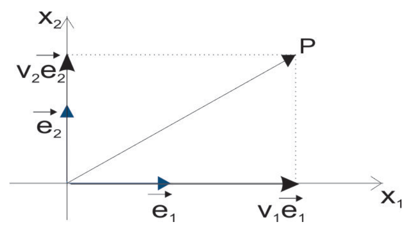

Figura 4.1: sistema de coordenadas vetoriais bidimensional.

De maneira análoga, existe um sistema vetorial adequado para a representação de bivetores. Para tanto, foi desenvolvido o conceito de biversor, que é um bivetor unitário $\overset{\rightrightarrows}{e}_{ij}$ associado a cada plano π_{ij} que se forma entre dois eixos do sistema.
Dessa forma, uma base para o sistema bivetorial é um conjunto da forma

$$\left\{\overset{\rightrightarrows}{e}_{12}, \overset{\rightrightarrows}{e}_{13}, ..., \overset{\rightrightarrows}{e}_{1n}, \overset{\rightrightarrows}{e}_{23}, ..., \overset{\rightrightarrows}{e}_{2n}, ..., \overset{\rightrightarrows}{e}_{mn}\right\}.$$

Nesse sentido, qualquer bivetor pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base bivetorial, portanto, existem escalares $v_{12}, v_{13}, ..., v_{1n}, v_{23}, ..., v_{2n}, ..., v_{mn}$, tais que:

$$\overset{\rightrightarrows}{v}= v_{12} \overset{\rightrightarrows}{e}_{12} + v_{13} \overset{\rightrightarrows}{e}_{13} + v_2 - v_{1n} \overset{\rightrightarrows}{e}_{1n} + v_{23}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{23} + ... + v_{2n}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{2n} + ... + v_{mn}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{mn}$$

Para o caso em que $n = 3$, a base bivetorial é composta por 3 bivetores: $\overset{\rightrightarrows}{e}_{12}$, $\overset{\rightrightarrows}{e}_{13}$ e $\overset{\rightrightarrows}{e}_{23}$. Assim, qualquer bivetor no espaço tridimensional terá a forma:

$$\overset{\rightrightarrows}{v}= v_{12}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{12} + v_{13}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{13} + v_{23}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{23} \; .$$

Definição 4.1. *Dado o bivetor* $\overset{\rightrightarrows}{v}= v_{12}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{12} + v_{13}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{13} + v_{23}. \overset{\rightrightarrows}{e}_{23}$, *chama-se módulo, ou norma, de* $\overset{\rightrightarrows}{v}$, *ao número real*

$$| \overset{\rightrightarrows}{v} | = \sqrt{v_{12}^2 + v_{13}^2 + ... + v_{1n}^2 + v_{23}^2 + ... + v_{2n}^2 + ... + v_{mn}^2}.$$

O número de componentes de um k-vetor depende de k e também da dimensão do sistema. Para um sistema n-dimensional, tem-se $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ k-versores.

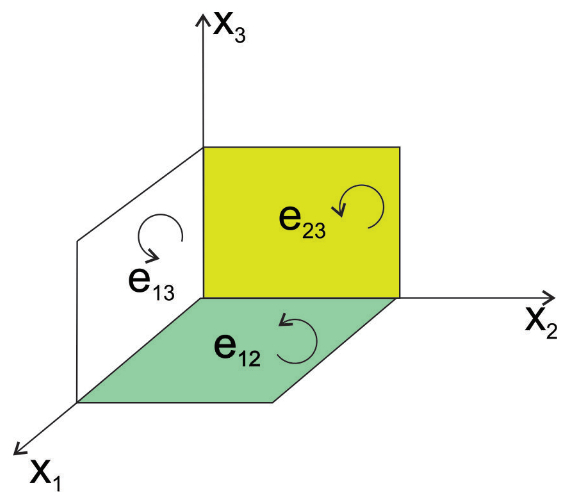

Figura 4.2: Sistema para representação de bivetores no espaço tridimensional.

4.3 Soma Geométrica

Dados dois vetores $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\overrightarrow{w} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ no espaço n-dimensional, a soma de $\overrightarrow{v}$ com $\overrightarrow{w}$ é dada por $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$, ou seja, basta somar os componentes de cada vetor. Esse fato pode ser percebido na figura 4.3.

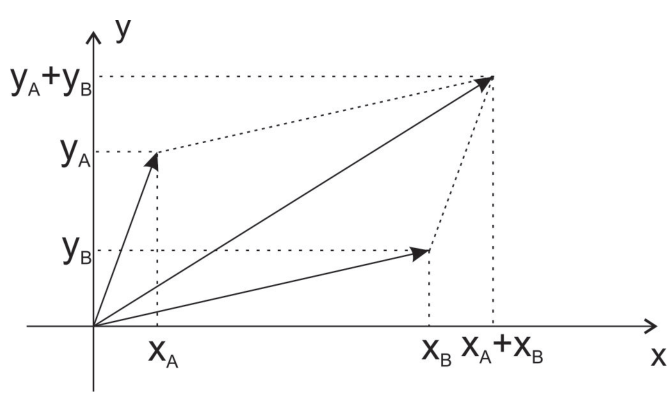

Figura 4.3: soma de vetores no plano bidimensional

Analogamente, define-se a soma de k-vetores. Por exemplo, dados dois bivetores

$$\vec{\vec{v}} = \alpha_{12} \vec{\vec{e}}_{12} + ... + \alpha_{1n} \vec{\vec{e}}_{1n} + \alpha_{23} \vec{\vec{e}}_{23} + ... + \alpha_{2n} \vec{\vec{e}}_{2n} + ... + \alpha_{mn} \vec{\vec{e}}_{mn}$$

e

$$\vec{\vec{w}} = \beta_{12} \vec{\vec{e}}_{12} + ... + \beta_{1n} \vec{\vec{e}}_{1n} + \beta_{23} \vec{\vec{e}}_{23} + ... + \beta_{2n} \vec{\vec{e}}_{2n} + ... + \beta_{mn} \vec{\vec{e}}_{mn}$$

a soma de $\overset{\rightrightarrows}{v}$ com $\overset{\rightrightarrows}{w}$ será dada por:

$$\overset{\rightrightarrows}{v} + \overset{\rightrightarrows}{w} = (\alpha_{12}+\beta_{12})\overset{\rightrightarrows}{e}_{12} + ... + (\alpha_{1n}+\beta_{1n})\overset{\rightrightarrows}{e}_{1n} + ... + (\alpha_{2n}+\beta_{2n})\overset{\rightrightarrows}{e}_{2n} + ... + (\alpha_{mn}+\beta_{mn})\overset{\rightrightarrows}{e}_{mn}.$$

É importante salientar que dois objetos vetoriais só podem ser somados quando possuírem a mesma grade. Nesse sentido, não é possível realizar uma operação da forma $\overrightarrow{v} + \overset{\rightrightarrows}{w}$, muito embora, essa expressão seja comumente escrita.

Notação 4.2. *Um k-vetor será denotado pelo símbolo* $\overset{k}{\overrightarrow{u}}$.

A soma geométrica possui as seguintes propriedades:

a) Associativa: Dados três k-vetores quaisquer $\overset{k}{\overrightarrow{u}}, \overset{k}{\overrightarrow{v}}$ e $\overset{k}{\overrightarrow{w}}$, tem-se que

$$\left(\overset{k}{\overrightarrow{u}} + \overset{k}{\overrightarrow{v}}\right) + \overset{k}{\overrightarrow{w}} = \overset{k}{\overrightarrow{u}} + \left(\overset{k}{\overrightarrow{v}} + \overset{k}{\overrightarrow{w}}\right).$$

b) Comutativa: Sejam $\overset{k}{\overrightarrow{u}}$ e $\overset{k}{\overrightarrow{v}}$, k-vetores, tem-se que $\overset{k}{\overrightarrow{u}} + \overset{k}{\overrightarrow{v}} = \overset{k}{\overrightarrow{v}} + \overset{k}{\overrightarrow{u}}$.

c) Existência do vetor nulo. O k-vetor $\overset{k}{\overrightarrow{o}}$ que possui todos os componentes nulos é o elemento neutro da soma geométrica, isto é,

$$\overset{k}{\overrightarrow{u}} + \overset{k}{\overrightarrow{o}} = \overset{k}{\overrightarrow{u}},$$

para todo k-vetor $\overset{k}{\overrightarrow{u}}$.

d) Existência do vetor oposto -$\overset{k}{\overrightarrow{u}}$.

e) Dados dois k-vetores $\overset{k}{\overrightarrow{u}}$ e $\overset{k}{\overrightarrow{v}}$, tem-se que, $\left|\overset{k}{\overrightarrow{u}} + \overset{k}{\overrightarrow{v}}\right| \leq \left|\overset{k}{\overrightarrow{u}}\right| + \left|\overset{k}{\overrightarrow{v}}\right|$.

A demonstração dessas propriedades é direta e pode ser encontrada em [2].

Definição 4.3. *Um multivetor M é um objeto vetorial da forma* $M = \alpha_0 + \alpha_1\overrightarrow{v} + ... + \alpha_n \overset{n}{\overrightarrow{v}}$.

Definição 4.4. *Dados dois multivetores $M = \alpha_0 + \alpha_1\overrightarrow{v} + ... + \alpha_n \overset{n}{\overrightarrow{v}}$ e $N = \beta_0 + \beta_1\overrightarrow{v} + ... + \beta_n \overset{n}{\overrightarrow{v}}$, define-se a soma entre os multivetores M e N, representada por $M + N$, como:*

$$M + N = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{v} + ... + (\alpha_n + \beta_n)\overset{n}{\overrightarrow{v}}.$$

Observa-se que um multivetor possui uma grade mista. No sistema tridimensional, pode-se encontrar desde escalares até trivetores. Dessa sorte, um multivetor no sistema tridimensional é da forma:

$$M = v_0 + v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2 + v_3 \overrightarrow{e}_3 + v_{12} \overset{\rightrightarrows}{e_{12}} + v_{13} \overset{\rightrightarrows}{e_{13}} + v_{23} \overset{\rightrightarrows}{e_{23}} + v_{123} \overset{\Rrightarrow}{e_{123}}.$$

De modo geral, uma Álgebra é um conjunto munido de duas operações que goza de determinadas propriedades. Para completar a caracterização da Álgebra de Clifford é necessário definir uma nova operação: o produto. A seção 4.4 abordará a definição do produto geométrico.

4.4 Produto Geométrico de Clifford

Esta seção tem como objetivo introduzir a definição do produto geométrico de Clifford que foi desenvolvido com a intenção de generalizar a noção de produto interno conhecida para vetores. A análise aqui apresentada é feita sobre uma geometria euclidiana ortogonal.
Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor, então o seu módulo $|\overrightarrow{v}|$ é dado por:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}},$$

em que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$ é o produto interno entre o vetor $\overrightarrow{v}$ e ele próprio. Dessa forma, o produto de Clifford foi definido, de modo que, para qualquer k-vetor $\overset{k}{\overrightarrow{v}}$, a relação

$$|\overset{k}{\overrightarrow{v}}| = \sqrt{\overset{k}{\overrightarrow{v}}\overset{k}{\overrightarrow{v}}}$$

seja verdadeira, onde $\overset{k}{\overrightarrow{v}}\overset{k}{\overrightarrow{v}}$ representa o produto geométrico de Clifford entre $\overset{k}{\overrightarrow{v}}$ e ele próprio.

Notação 4.5. *O produto Geométrico ou produto de Clifford entre dois multivetores quaisquer M e N é denotado por MN.*

Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor em um sistema bidimensional. Assim, $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2$.
Afim de que $|\overrightarrow{v}|^2 = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v}$, é necessário que:

$$v_1^2 + v_2^2 = (v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2)(v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2).$$

Como o produto entre vetores deve seguir as regras da álgebra, especialmente à distributiva, segue-se que

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1^2 . \overrightarrow{e_1} . \overrightarrow{e_1} + v_1 v_2 \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + v_2 v_1 \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} + v_2^2 \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}.$$

Para garantir a igualdade acima, algumas relações entre os versores $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ devem ser impostas. Tais relações irão determinar o produto geométrico.
Se $\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} = 1$, então da equação acima, segue-se que:

$$v_1 v_2(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}) = 0.$$

Para satisfazer essa última igualdade, existem duas possibilidades:

i)$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} = 0$;

ii)$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}$.

Gibbs e Heaviside admitiram a condição (i), dando origem a um produto vetorial que sempre associa num número real, o que não seria conveniente para aplicações em física.
Clifford optou pela alternativa (ii), ou seja, admitiu que $\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}$.
Dessa forma, a generalização n-dimensional das relações que caracterizam o produto geométrico é:

a)$\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_i} = 1 \;\; \forall \;\; i \in \{1, ..., n\}$

b)$\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j} = -\overrightarrow{e_j}\overrightarrow{e_i}; \;\; \forall \;\; i \neq j; \;\; i, \;\; j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Uma vez estabelecidas estas relações, tem-se que $|\overrightarrow{v}|^2 = \overrightarrow{v}\overrightarrow{v}$.

4.4.1 Propriedades do produto geométrico de Clifford

Essa seção aborda as principais propriedades do produto geométrico de Clifford, estabelecendo-se relações com a Álgebra dos Números Complexos. A abordagem será iniciada num sistema bidimensional para posterior generalização.
Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores com $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{w} = w_1\overrightarrow{e_1} + w_2\overrightarrow{e_2}$. Desenvolvendo-se o produto $\overrightarrow{v}\overrightarrow{w}$ por distributividade, segue-se que

$$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = v_1 w_1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + v_1 w_2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + v_2 w_1\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} + v_2 w_2\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}.$$

Pelas relações (a) e (b) da seção 4.4, vê-se que:

$$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}).$$

A primeira parcela é um escalar, na verdade, o produto interno entre os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Essa parcela corresponde ao produto vetorial definido por Gibbs e Heaviside. Utiliza-se a notação $\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w}$ para denotar esse produto.

Observa-se que:

$$\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = |\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{w}|.\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

em que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

O segundo termo do produto geométrico é conhecido como produto de Grassman, ou também, produto externo, comumente representado por $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

Assim:

$$|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}| = v_1 w_2 - v_2 w_1 = |\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{w}|.\text{sen}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).$$

Essa equação define a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Dessa feita, o produto externo está associado a fragmentos de plano e não a segmentos de reta, portanto, trata-se de um bivetor.

Define-se que $\overset{\rightrightarrows}{e}_{ij} \equiv \overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}$, para quaisquer i e j.

Generalizando as noções de produto interno e externo para um sistema n-dimensional, surgem as seguintes definições:

Definição 4.6. *Dados os vetores* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *e* $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)$, *chama-se produto interno de* $\overrightarrow{v}$ *por* $\overrightarrow{w}$, *denotado por* $\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w}$ *ao escalar:*

$$\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + ... + v_n w_n.$$

Definição 4.7. *Dados dois vetores* $\overrightarrow{v} = (v_1, ..., v_n)$ *e* $\overrightarrow{w} = (w_1, ..., w_n)$, *chama-se produto externo de* $\overrightarrow{v}$ *por* $\overrightarrow{w}$, *representado por* $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ *ao bivetor:*

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \sum_{1,2}^{m,n} (v_i w_j - v_j w_i)\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}.$$

A partir dessas definições, o produto de Clifford é definido como a soma dos produtos interno e externo.

Definição 4.8. *Dados dois vetores* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$, *chama-se produto geométrico ou produto de Clifford entre* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$, *o multivetor dado por:*

$$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}.$$

Assim, o produto de Clifford (entre dois vetores) associa a cada par de vetores um multivetor constituído por um escalar mais um bivetor.

Proposição 4.9. *Dados os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, tem-se que:*

$$\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}}{2}$$

;

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}}{2}.$$

Demonstração. Dados os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, pela definição do produto de Clifford, segue-se que:

i) $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$;

ii)$\overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \vee \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$.

Fazendo (i)-(ii), tem-se que:
$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w} \vee \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$.
Porém, é fácil ver que $\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \vee \overrightarrow{v}$, donde, $\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w} \vee \overrightarrow{v} = 0$. Além disso, como $\overrightarrow{e}_i\overrightarrow{e}_j = -\overrightarrow{e}_j\overrightarrow{e}_1; \quad \forall i \neq j$, então $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.
Assim, tem-se:

iii) $2(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}}{2}$.

Por fim, substituindo (iii) em (i), segue-se que:

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \frac{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}}{2} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}}{2}.$$

■

Proposição 4.10. *Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ dois vetores num sistema n-dimensional, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos então $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}$ e se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são ortogonais, então $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}$.*

Demonstração. De fato, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos, então o produto externo $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \sum_{1,2}^{m,n}(v_iw_j - v_jw_i)\overrightarrow{e}_i\overrightarrow{e}_j$ é nulo, pois, nesse caso, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v_i = \alpha w_i, \forall i \in$

$\{1, 2, ..., n\}$.
Assim, dados quaisquer i e j, tem-se

$$v_i w_j - v_j v_i = \alpha \overrightarrow{w}_i . \overrightarrow{w}_j - \alpha \overrightarrow{w}_j \overrightarrow{w}_i = 0.$$

Portanto, se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos, então

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \vee \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \vee \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}.$$

Suponha-se então, que $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam ortogonais. Assim, $\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = 0$. Portanto,

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}.$$

■

Proposição 4.11. *Dados vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ num sistema n-dimensional, então,*

$$|\overrightarrow{v}|^2 . |\overrightarrow{w}|^2 = |\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w}|^2 + |\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}|^2.$$

Dado um vetor $\overrightarrow{v}$ qualquer, tem-se que $(\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2$, donde todo quadrado de um vetor é um número real positivo.
O produto de Clifford não é comutativo, desse modo divisões são admitidas, uma pela esquerda $(\overrightarrow{w}^{-1}).\overrightarrow{v}$ e outra pela direita, $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{w}^{-1})$.
Para resolver essa divisão é necessário verificar a existência do vetor inverso $\overrightarrow{w}^{-1}$, tal que, $\overrightarrow{w}\,\overrightarrow{w}^{-1} = \overrightarrow{w}^{-1}\overrightarrow{w} = 1$. Considere-se o vetor $\dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2}$, note-se que:

i) $\left(\overrightarrow{w} \vee \dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2}\right) + \left(\overrightarrow{w} \wedge \dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2}\right) = \dfrac{\overrightarrow{w}^2}{|\overrightarrow{w}|^2} + 0 = 1;$

ii) $\left(\dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2} \vee \overrightarrow{w}\right) + \left(\dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2} \wedge \overrightarrow{w}\right) = 1 + 0 = 1.$

Portanto, $\overrightarrow{w}^{-1} = \dfrac{\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2}$.
Dessa forma, tem-se que:

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}^{-1} = \frac{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{w}|^2}$$

e

$$\overrightarrow{w}^{-1}\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{w}\,\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{w}|^2}.$$

Para generalizar o produto de Clifford para bivetores, deve-se ter $\sqrt{\overset{\Rightarrow}{v}\overset{\Rightarrow}{v}} = |\overset{\Rightarrow}{v}|$. Porém, note-se que isto não é possível, pois:

$$|\overset{\Rightarrow}{e}_{ij}| = |\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}| = \sqrt{\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}} = \sqrt{-(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j})} = \sqrt{-|\overrightarrow{e_i}|^2.|\overrightarrow{e_j}|^2} = \sqrt{-1} = i.$$

Portanto, a expressão $\sqrt{\overset{\Rightarrow}{v}\overset{\Rightarrow}{v}}$ pode fornecer como resultado um número complexo, donde segue que o módulo de um k-vetor não pode ser definido por meio dessa relação. Entretanto, o resultado encontrado indica que os objetos bivetoriais são entidades complexas, no sentido de que possuem propriedaes semelhantes a dos números complexos.

Dessa forma, através de uma analogia com os números complexos, conclui-se que o módulo de um k-vetor deve ser dado por uma expressão da forma

$$|\overset{k}{\overrightarrow{v}}| = \sqrt{\overset{k}{\overrightarrow{v}}\,\overset{k}{\overrightarrow{v}}^{*}},$$

onde $\overset{k}{\overrightarrow{v}}^{*}$ é o chamado *conjugado* de $\overset{k}{\overrightarrow{v}}$.

O k-vetor-conjugado $\overset{k}{\overrightarrow{v}}^{*}$ pode ser obtido de $\overset{k}{\overrightarrow{v}}$ invertendo-se a ordem dos versores presentes em cada um dos termos, assim, o conjugado do bivetor $\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}$ será $\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}$.

Notação 4.12. *A notação $\hat{v}$ será utilizada para representar um objeto vetorial com grade qualquer.*

Em [2] defini-se as operações de contração e expensão entre k-vetores conforme segue:

Definição 4.13. *Chama-se contração de $\hat{w}$ por $\hat{v}$, representada por $\hat{v} \Downarrow \hat{w}$, a soma de todos os k-vetores resultantes do produto geométrico cuja grade seja menor ou igual a do primeiro vetor.*

Definição 4.14. *Chama-se expansão de $\hat{w}$ por $\hat{v}$, representada po $\hat{v} \Uparrow \hat{w}$, a soma de todos os k-vetores resultantes cuja grade seja maior que a do primeiro.*

De acordo com as definições acima, tem-se que o produto de Clifford entre dois objetos vetoriais quaisquer é dado por $\hat{v}\hat{w} = \hat{v} \Downarrow \hat{w} + \hat{v} \Uparrow \hat{w}$.

Para se exemplificarem as definições 4.10 e 4.11, tome-se o vetor $\overrightarrow{v}$ e o bivetor $\overset{\rightrightarrows}{w}$. Note-se que:

$$\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3};$$

$$\overset{\rightrightarrows}{w} = w_{12}\ \overset{\rightrightarrows}{e_{12}} + w_{13}\ \overset{\rightrightarrows}{e_{13}} + w_{23}\ \overset{\rightrightarrows}{e_{23}} = w_{12}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + w_{13}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + w_{23}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}.$$

Assim, segue-se que:

$$\overrightarrow{v}\ \overset{\rightrightarrows}{w} = (v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}).(w_{12}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + w_{13}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + w_{23}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}).$$

Utilizando a propriedade distributiva, vê-se que:
$\overrightarrow{v}\ \overset{\rightrightarrows}{w} = v_1w_{12}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + v_1w_{13}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + v_1w_{23}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + v_2w_{12}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + v_2w_{13}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + v_2w_{23}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + v_3w_{12}\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + v_3w_{13}\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + v_3w_{23}\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.
Considerando, agora, as relações $\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j} = -\overrightarrow{e_j}\overrightarrow{e_i}, \forall\ i \neq j\ e\ \overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_i} = |e_i|^2 = 1$, segue-se que
$\overrightarrow{v}\ \overset{\rightrightarrows}{w} = v_1w_{12}\overrightarrow{e_2} + v_1w_{13}\overrightarrow{e_3} + v_1w_{23}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} - v_2w_{12}\overrightarrow{e_1} - v_2w_{13}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + v_2w_{23}\overrightarrow{e_3} + v_3w_{12}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} - v_3w_{13}\overrightarrow{e_1} - v_3w_{23}\overrightarrow{e_2}$.
Donde, obtém-se:
$\overrightarrow{v}\ \overset{\rightrightarrows}{w} = (-v_2w_2 - v_3w_{13})\overrightarrow{e_1} + (v_1w_{12} - v_3w_{23})\overrightarrow{e_2} + (v_1w_{13} + v_2w_{23})\overrightarrow{e_3} + (v_1w_{23} - v_2w_{13} + v_3w_{12})\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.
Portanto, o produto geométrico entre um vetor e um bivetor é um multivetor composto pela soma de um vetor com um trivetor.
De maneira geral, o produto geométrico é calculado dessa forma. O produto geométrico é associativo e não-comutativo, todo k-vetor com módulo não-nulo admite um inverso multiplicativo. Além disso são válidas as propriedades distributivas do produto sobre a adição, isto é,

$$\hat{u}(\hat{v} + \hat{w}) = \hat{u}\hat{v} + \hat{u}\hat{w}$$

e

$$(\hat{v} + \hat{w})\hat{u} = \hat{v}\hat{u} + \hat{w}\hat{u}.$$

Calcular o produto geométrico entre k-vetores pode ser muito trabalhoso, porém, a utilização de matrizes pode simplificar os cálculos.

Considere-se, inicialmente, um sistema euclidiano bidimensional. Seja então M um multivetor neste sistema. Assim, tem-se

$$M = m_0 + m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2} + m_{12}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}.$$

Representa-se o multivetor M pela matriz coluna formada pelos coeficientes das suas componentes. Desse modo:

$$M = \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_{12} \end{Bmatrix}.$$

Se M for um escalar, então terá a forma $M = \begin{Bmatrix} m_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$. Se M for um vetor, então $M = \begin{Bmatrix} 0 \\ m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$. Por fim se M for um bivetor, tem-se $M = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{12} \end{Bmatrix}$.

Como a soma de multivetores é efetuada somando-se os coeficientes dos versores homólogos, é claro que:

$$M + V = \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_0 + v_0 \\ m_1 + v_1 \\ m_2 + v_2 \\ m_{12} + v_{12} \end{Bmatrix};$$

O produto geométrico também pode ser calculado com o auxílio de matrizes. Porém, o produto geométrico não será simplesmente o produto matricial. Na verdade, o produto geométrico entre multivetores N e V, num sistema bidimensional, é dado por:

$$N.V = \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_{12} \end{Bmatrix} . \begin{Bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_0v_0 + w_1v_1 + w_2v_2 - w_{12}v_{12} \\ w_0v_1 + w_1v_0 - w_2v_{12} + w_{12}v_2 \\ w_0v_2 + w_1v_{12} + w_2v_0 - w_{12}v_1 \\ w_0v_{12} + w_1v_2 - w_2v_1 + w_{12}v_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_{12} \end{Bmatrix}.$$

Para se obterem os termos de uma determinada linha da matriz do produto geométrico, basta verificar quais os elementos de V devem ser multiplicados pelos elementos de W para que o produto pertença àquela linha.

Para tanto, basta observar que a primeira linha corresponde aos escalares, a segunda e a terceira representam os vetores e a última representa um bivetor.

4.5 Álgebra geométrica e os Números Complexos

Definição 4.15. *Um k-vetor $\hat{v}$ é dito real quando o produto geométrico $\hat{v}\hat{v}$ é um número positivo. Por outro lado, se o produto $\hat{v}\hat{v}$ for um número real negativo, então $\hat{v}$ é dito imaginário.*

Observam-se, agora, as potências dos versores $\overrightarrow{e_i}$:
$(\overrightarrow{e_i})^1 = \overrightarrow{e_i}$;
$(\overrightarrow{e_i})^2 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i} = 1$;
$(\overrightarrow{e_i})^3 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{e_i}$;
$(\overrightarrow{e_i})^4 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i} = 1$.

Essas potências comportam-se de maneira análoga às potências do número -1, pois:
$(-1)^1 = -1$;
$(-1)^2 = 1$;
$(-1)^3 = -1$;
$(-1)^4 = 1$;

Por outro lado,
$(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})^1 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}$
$(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})^2 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j} = -\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j} = -1$
$(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})^3 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j} = -(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j}) = -(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})$
$(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})^4 = \overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j} = (\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_j}) = 1$.

Dessa forma, também as potências dos biversores comportam-se de forma semelhante às potências da unidade imaginária i, pois:
$i^1 = i$;
$i^2 = -1$;
$i^3 = -i$;
$i^4 = 1$.

Esse fato mostra que os bivetores se comportam como objetos complexos. Essas descrições indicam que a Álgebra Geométrica pode ser uma generalização da Álgebra dos Números Complexos.
É possível mostrar que um determinado k-vetor é real quando $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} = 1$ e imaginário quando $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} = -1$. A demonstração pode ser encontrada em [3].

Definição 4.16. *(k-vetor conjugado) Dado um k-vetor $\hat{v}$, define-se o k-vetor conjugado de $\hat{v}$, representado por $\hat{v}^*$, como*

$$\begin{cases} \hat{v}^* = \hat{v}, se\ \hat{v}\ é\ real; \\ \hat{v}^* = -\hat{v}, se\ \hat{v}\ é\ imaginário. \end{cases}$$

Nota-se que o produto de Clifford para dois vetores é dado por $\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$. Porém, como

$$\overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{w}|.\cos\theta \quad e \quad \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}|.|\overrightarrow{w}|.\overrightarrow{e_v}\overrightarrow{e_w}\text{sen}\theta,$$

em que $\overrightarrow{e_n}$ e $\overrightarrow{e_w}$ são versores coplanares a $\overrightarrow{v}$ e a $\overrightarrow{w}$, respectivamente e $\theta = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Dessa forma, o produto de Clifford é dado por:

$$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|.(\cos\theta + \overrightarrow{e_v}\overrightarrow{e_w}\text{sen}\theta).$$

Considere, agora, o seguinte problema: Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor no espaço bidimensional e $\overrightarrow{w}$ o vetor que se obtém por meio da rotação de θ graus do vetor $\overrightarrow{v}$. Como determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{w}$?
A solução é encontrada utilizando o produto de Clifford. Note-se que:

$$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}|^2(\cos\theta + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}.\text{sen}\theta) \Leftrightarrow \overrightarrow{v}^{-1}\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}_{-1}.|\overrightarrow{v}|^2.(\cos\theta + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\text{sen}\theta).$$

Porém, $\overrightarrow{v}^{-1} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^2}$, logo,

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^2}.|\overrightarrow{v}|^2.(\cos\theta + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\text{sen}\theta) = \overrightarrow{v}.(\cos\theta + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\text{sen}\theta).$$

Dessa forma, dado o vetor $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$, tem-se que:
$\overrightarrow{w} = (v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}).(\cos\theta + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\text{sen}\theta) = v_1\cos\theta\overrightarrow{e_1} + v_1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\text{sen}\theta + v_2\cos\theta.\overrightarrow{e_2} + v_2\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{w} = v_1 \cos\theta \overrightarrow{e_1} + v_2 . \cos\theta \overrightarrow{e_2} + v_1 \overrightarrow{e_2} \text{sen}\theta - v_2 \overrightarrow{e_1} \text{sen}\theta$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{w} = (v_1 \cos\theta - v_2 \text{sen}\theta) . \overrightarrow{e_1} + (v_2 \cos\theta + v_1 \text{sen}\theta) \overrightarrow{e_2}$.
Assim, as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ são obtidas em função do ângulo θ de rotação e do vetor rotacionado $\overrightarrow{v}$.
A forma com que o produto geométrico $\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|(\cos\theta + \overrightarrow{e_v}\overrightarrow{e_w}\text{sen}\theta)$ é representado se parece com a forma polar de um número complexo

$$z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta) = |z| . e^{i\theta}.$$

Além disso, o comportamento de um biversor $\overrightarrow{e_v}\overrightarrow{e_w}$ é análogo ao comportamento da unidade imaginária. Portanto, escreve-se:

$$\overrightarrow{v}\overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| . e^{\overrightarrow{e_v}\overrightarrow{e_w} . \theta}.$$

4.6 Introdução ao tratamento axiomático da álgebra de Clifford

O objetivo desta seção é apresentar uma fundamentação teórica (axiomática) para a Álgebra de Clifford. São apresentadas as principais definições e teoremas. Um aprofundamento do estudo aqui abordado pode ser encontrado em [3].

Definição 4.17. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Uma Álgebra de Clifford ou Álgebra Geométrica sobre o espaço vetorial V é o conjunto formado por multivetores (no sentido apresentado na seção 4.3) e munido de duas operações: adição geométrica e o produto geométrico, que gozam das seguintes propriedades:*

Axioma 1: A adição geométrica é associativa, isto é, dados quaisquer $M_0, M_1, M_2 \in A(V)$, tem-se que $(M_0 + M_1) + M_2 = M_0 + (M_1 + M_2)$;

Axioma 2: A adição geométrica é comutativa, no sentido que se $M_0, \ M_1 \in A(V)$, então $M_0 + M_1 = M_1 + M_0$.

Axioma 3: Existe um elemento neutro aditivo $O \in A(V)$ tal que $M + O = O + M, \ \forall \ M \in A(V)$;

Axioma 4: Existe um elemento neutro multiplicativo $1 \in A(V)$, isto é, $1.M = M.1 = M, \forall\ M \in A(V)$;

Axioma 5: Dado qualquer $M \in A(V)$ existe o inverso aditivo $-M \in A(V)$, tal que $M + (-M) = 0$;

Axioma 6: A multiplicação é distributiva com relação à adição, isto é, dados $M_0, M_1, M_2 \in A(V)$, tem-se que:
$M_0(M_1 + M_2) = M_0M_1 + M_0M_2$;
$(M_0 + M_1)M_2 = M_0M_2 + M_1M_2$;

Axioma 7: O espaço vetorial V é um subespaço linear de $A(V)$. Os elementos de V são chamados de vetores;

Axioma 8: Dado qualquer $M \in A(V)$, M é o resultado do produto geométrico entre vetores de V e da combinação linear dos elementos gerados pelo produto de vetores;

Axioma 9: O conjunto $A(V)$ possui um subespaço vetorial, denominado subespaço dos escalares no qual é idêntico ao conjunto dos números reais.

Axioma 10: Dado um vetor $\overrightarrow{a} \in V \subset A(V)$, existe um escalar denotado por $|\overrightarrow{a}|$ e chamado magnitude de $\overrightarrow{a}$ tal que:

$$\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2;$$

Notação 4.18. *Uma álgebra geométrica sobre um espaço vetorial V será representada por $A(V)$.*

Definição 4.19. *Seja $M \in A(V)$. Chama-se inverso multiplicativo à direita do multivetor M ao multivetor M_+^{-1} que satisfaz a condição*

$$M.M_+^{-1} = 1.$$

Definição 4.20. *Dado $M \in A(V)$. Chama-se inverso multiplicativo à esquerda do multivetor M ao multivetor $M_-^{-1} \in A(V)$ que satisfaz a condição*

$$M_-^{-1}M = 1.$$

Quando um multivetor $M \in A(V)$ possui os inversos multiplicativos à esquerda e à direita, M_-^{-1} e M_+^{-1}, respectivamente e $M_-^{-1} = M_+^{-1}$ então se diz que M possui um inverso multiplicativo (ou M é inversível). Nesse caso, escreve-se $M^{-1} = M_-^{-1} = M_+^{-1}$.

Teorema 4.21. *Seja $A(V)$ uma álgebra geométrica. Todo vetor $\overrightarrow{a} \in A(V)$, com $\overrightarrow{a} \neq o$ possui um inverso multiplicativo dado por:*

$$\overrightarrow{a}^{-1} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}.$$

Demonstração. Note-se que:

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}^{-1} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}^{-1} = \overrightarrow{a} \Leftrightarrow |\overrightarrow{a}|^2.\overrightarrow{a}^{-1} = \overrightarrow{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}^{-1} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}.$$

$$\overrightarrow{a}^{-1}.\overrightarrow{a} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}^{-1}.\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}^{-1}|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}^{-1} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}.$$

■

A definição do produto interno entre vetores será feita, visando a evitar o trabalho com versores.

Definição 4.22. *O produto interno entre dois vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, representado por $\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b}$ é definido como:*

$$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}).$$

De maneira análoga, define-se o produto externo (ou produto de Gibbs-Heaviside).

Definição 4.23. *O produto externo entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, representado por $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ é definido como:*

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}).$$

É imediata a verificação de que o produto interno é comutativo. Entretanto, o mesmo fato não ocorre com o produto externo. Na verdade, o produto externo é anticomutativo, no sentido da definição 4.21.

Definição 4.24. *Seja $\circledast$ uma operação defida num determinado conjunto X. Dize-se que a operação $\circledast$ é anticomutativa quando dados quaisquer $a, \quad b \in x$, tem-se*

$$a \circledast b + b \circledast a = 0.$$

Teorema 4.25. *O produto externo entre vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ é anticomutativo.*

Demonstração. Para provar essa afirmação note-se que:

$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}) = \frac{1}{2}((-1)(-1)\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + (-1)\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}) = (-1).\frac{1}{2}((-1)\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{a})$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{b}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}.$ ■

Teorema 4.26. *O produto geométrico (ou de Clifford) entre dois vetores* $\overrightarrow{a}$ *e* $\overrightarrow{b}$ *pode ser escrito como*

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b},$$

isto é a soma do produto interno com o produto externo.

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ vetores. Tem-se que:
i) $\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{a})$;

ii) $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\overrightarrow{a})$.

Somando (i) com (ii), tem-se que:

$$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}\overrightarrow{b}.$$

■

Teorema 4.27. *Dados dois vetores* $\overrightarrow{a}$ *e* $\overrightarrow{b}$ *pertencentes a uma álgebra geométrica* $A(V)$ *sobre um espaço vetorial* V*, tem-se que são equivalentes as afirmações:*

1. $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}$*;*

2. $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b}$*;*

3. $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = 0$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Se $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\overrightarrow{a}$, então:

$$\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \vee \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}.$$

Como $\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \vee \overrightarrow{a}$ *e* $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$, logo

$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{a} \wedge \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0.$

Assim,

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b}.$$

(2)⇒(3). Se $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b}$ então:

$$\vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0.$$

(3)⇒(1). Se $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$, então, pela anticomutatividade, tem-se $\vec{b} \wedge \vec{a} = 0$. Assim, tem-se que:

$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b} = \vec{b} \vee \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{a} = \vec{b}\vec{a}.$ ■

Teorema 4.28. *As afirmações abaixo são equivalentes:*

1) $\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}$;

2) $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$;

3) $\vec{a} \vee \vec{b} = 0$.

Demonstração. (1)⇒(2). Note que:

$\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \vee \vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{a})$

$\Leftrightarrow \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a} \vee \vec{b} = 0.$

Assim, tem-se que:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}.$$

(2)⇒(3). Suponha, agora, que $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$. Para provar que $\vec{a} \vee \vec{b} = 0$, basta observar que:

$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \vee \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \vee \vec{b} = 0.$

Para (3)⇒(1), suponha-se que $\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} = 0$ e observa-se que, nesse caso, vale a igualdade:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} = -(\overrightarrow{b} \vee \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}.$$

■

O capítulo será finalizado com uma abordagem da Álgebra Geométrica sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, com a finalidade de encontrar relações interessantes entre a Álgebra Geométrica e a Álgebra dos Números Complexos.

4.7 Álgebra Geométrica $A(\mathbb{R}^2)$

Considere-se o espaço vetorial $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y);\ \ x,\ \ y \in \mathbb{R}\}$, também conhecido como plano euclidiano. A álgebra geométrica $A(\mathbb{R}^2)$ é chamada $\hat{\imath}$-álgebra.

Considere-se um sistema de eixos ortogonais e a base canônica do $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, onde $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$. Dado qualquer vetor $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, existem escalares v_1, v_2 tais que $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$.

A magnitude do vetor $\overrightarrow{v}$ é definida como a norma euclidiana do vetor $\overrightarrow{v}$. Assim, tem-se que:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

O produto geométrico $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v}$ é dado por:

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = (v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2})(v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}) = v_1^2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + v_1v_2(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1})$$

A fim de que a relação $\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2$ seja válida, algumas condições para o produto entre os versores $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ devem ser impostas. Existem duas maneiras distintas de fazer isso, uma delas leva à noção de produto geométrico e a outra leva à noção de produto interno. Seguindo as idéias de Clifford, adota-se que:

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} = 1$;

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} = 0$.

O produto $\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$ representa um bivetor $(\overset{\rightrightarrows}{e_{12}})$ e comporta-se de maneira análoga à unidade imaginária com relação à potenciação.

Definição 4.29. *Chama-se pseudo-escalar unitário da álgebra $A(\mathbb{R}^2)$ ao objeto geométrico $\hat{\imath}$ dado por $\hat{\imath} = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}$.*

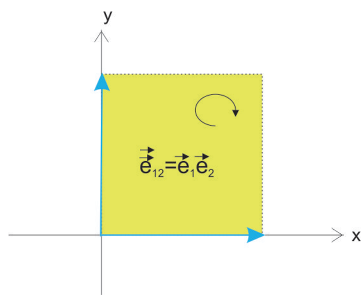

Figura 4.4: Representação dos elementos da Álgebra $A(\mathbb{R}^2)$

Uma base para os elementos (multivetores) da álgebra $A(\mathbb{R}^2)$ é dada pelo conjunto $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overset{\rightrightarrows}{e}_{12}\}$. Portanto, o espaço vetorial $A(\mathbb{R}^2)$ possui dimensão 4. Nesse sentido, os multivetores que compõem o conjunto $A(\mathbb{R}^2)$ são de forma:

$$m = m_0 + m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2} + m_{12}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = m_0 + m_1\overrightarrow{e_1} + m_2\overrightarrow{e_2} + m_{12}\hat{i}$$

em que $\hat{i}^2 = -1$; $\hat{i}^3 = -i$ e $\hat{i}^4 = 1$. Além disso, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.30. *O pseudo-escalar $\hat{i}$ de $A(\mathbb{R}^2)$ comuta com escalares e bivetores, mas anticomuta com vetores.*

Demonstração. É obvio que $\hat{i}$ comuta com escalares. Tome, agora, um vetor $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$. Vale que:

a)$\overrightarrow{v}\hat{i} = (v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}).(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}) = v_1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + v_2\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = v_1\overrightarrow{e_2} - v_2\overrightarrow{e_1};$

b)$\hat{i}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}(v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_1}) = v_1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} = v_1\overrightarrow{e_2} + v_2\overrightarrow{e_1}.$

Portanto, por (a) e (b), tem-se que $\overrightarrow{v}\hat{i} = -\hat{i}\overrightarrow{v}$.
Por fim tomando um bivetor $\overset{\rightrightarrows}{v}$, é claro que existe um escalar (neste caso, um número real) α tal que $\overset{\rightrightarrows}{v} = \alpha\, \overset{\rightrightarrows}{v}_{12} = \alpha\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = \alpha\hat{i}$.
Portanto:

c)$\overset{\rightrightarrows}{v}\,\hat{i} = \alpha\hat{i}\hat{i}v = -\alpha;$

d)$\hat{i}\,\overset{\rightrightarrows}{v} = \hat{i}\alpha\hat{i} = \alpha\hat{i}\hat{i} = -\alpha.$

Assim, $\vec{\vec{v}}\,\hat{i} = \hat{i}\,\vec{\vec{v}}$.

■

Teorema 4.31. *Sejam $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$ vetores da álgebra geométrica $A(\mathbb{R}^2)$. Então:*

$\overrightarrow{u} \vee \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2;$

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = (u_1v_2 - u_2v_2)\hat{i}.$

Demonstração. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$, o produto geométrico de $\overrightarrow{u}$ por $\overrightarrow{v}$ é dado por:

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = (u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2})(v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_1}) = u_1v_1 + u_2v_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{i}$$

O produto $\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}$ é dado por:

$$\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u} = (v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2})(u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_1}) = u_1v_1 + u_2v_2 + (u_2v_1 - u_1v_2)\hat{i}.$$

Dessa forma, segue-se diretamente da definição que:

a) $\overrightarrow{u} \vee \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}) = \dfrac{1}{2}(2.(u_1v_1 + u_2v_2) + (u_1v_2 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_1))\hat{i}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \vee \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}.2.(u_1v_1 + u_2v_2) = u_1v_1 + u_2v_2.$

b) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}) = \dfrac{1}{2}(2u_1v_2 - 2u_2v_1)\hat{i} = (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{i}.$

■

Definição 4.32. *Chama-se espinor qualquer combinação linear de um escalar com um bivetor.*

O conjunto gerado por $\{1, \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\} = \{1, \hat{i}\}$ é chamado plano espinor e será representado por $A^+(\mathbb{R}^2)$. É fácil ver que a multiplicação geométrica entre dois vetores produz um espinor. Vários autores costumam representar um espinor pela letra z. Essa nomenclatura se deve a aplicações dos espinores para a teoria de Pauli para elétron, conforme [3].

Definição 4.33. *Dado um espinor $z = \alpha + \beta\hat{i}$, chama-se conjugado de z, representado por $\overline{z}$ ao espinor $\overline{z} = \alpha - \beta\hat{i}$.*

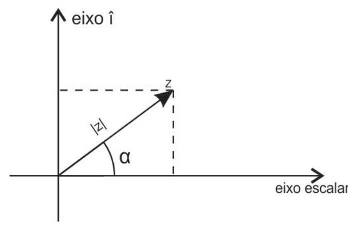

Figura 4.5: Representação geométrica do plano espinor.

Seja $z = x_1 + x_2\hat{i}$ um espinor. Note-se que:

$$\overrightarrow{e_1}.z = \overrightarrow{e_1}(x_1 + x_2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}) = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}.$$

Portanto, o espinor z realiza uma rotação em $\overrightarrow{e_1}$ pelo ângulo $\theta = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$ e uma dilatação igual a $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$. Dessa forma, o espinor z é chamado de operador rotação - dilatação quando aplicado a vetores do plano.
Em particular, tome o espinor $z = \hat{i}$. Dado um vetor $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$, então:

$$(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2})\hat{i} = x_1\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + x_2\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = x_1\overrightarrow{e_2} - x_2\overrightarrow{e_1} = -x_2\overrightarrow{e_1} + x_1\overrightarrow{e_2}$$

O produto geométrico de um vetor qualquer $\overrightarrow{v}$ do plano pelo pseudo-escalar $\hat{i}$ produz uma rotação no vetor $\overrightarrow{v}$ por um ângulo de 90°. Observe-se que esse fato também ocorre na Álgebra dos Números Complexos, pois a multiplicação de qualquer complexo z pela unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, produz com resultado complexo z rotacionado por um ângulo de 90°.
Esse fato sugere as seguintes associações:
$\hat{i} \in A^+(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow i \in \mathbb{C}$
$1 \in A^+(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow 1 \in \mathbb{C}$

Fica assim estabelecido um isomorfismo entre o plano espinor $A^+(\mathbb{R}^2)$ e o plano complexo $\mathbb{C}$. Isso significa que o conjunto $A^+(\mathbb{R}^2)$ goza das mesmas propriedades que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Conclui-se então que o plano espinor $A^+(\mathbb{R}^2)$ munido da operação adição e do produto geométrico é um corpo sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Esse fato permite concluir que o produto geométrico entre dois espinores é comutativo, muito embora, o produto geométrico não seja, geralmente, comutativo.

Em analogia ao conjunto dos números complexos, um espinor z admite uma forma polar de representação:

$z = |z|.(\cos\theta + \hat{i}\text{sen}\theta) = |z|.e^{\theta\hat{i}}$,

onde $\theta = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$ e $|z|^2 = z.\overline{z} = x_1^2 + x_2^2$.

A álgebra geométrica sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ possui relações estreitas com os quatérnions de Hamilton e também com espaço vetorial $M(2,\mathbb{C})$ das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas complexas.

Considere a base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$. Assim, todo vetor no espaço é da forma $\overrightarrow{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$. A norma do vetor $\overrightarrow{a}$ é dada por:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$$

Dado um vetor arbitrário $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$, tem-se que:

$\overrightarrow{v}^2 = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v} = (x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}).(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3})$

$= (x_1)^2\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} + (x_2)^2\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} + (x_3)^2\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_3} + x_1x_2(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}) +$

$x_1x_3(\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1}) + ... + x_3x_1(\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3}) + x_2x_3(\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2})$

A fim de que $\overrightarrow{v}^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$, algumas relações devem ser impostas. Em conformidade com o exposto na Seção 4.4, a opção encontrada por William Clifford foi definir que:

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_3} = 1$

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1} = 0$

$\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1} = 0$

$\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2} = 0$

Assim, tem-se que $\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j} = -\overrightarrow{e_j}\overrightarrow{e_i}$, $\forall\ i \neq j$ e $\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_i} = 1$, $\forall\ i \in \{1,2,3\}$. Na verdade, essa definição pode ser feita para qualquer dimensão.

Define-se que: $\hat{i_1} = \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2}$

$\hat{i_2} = \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3}$

$\hat{i_3} = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}$

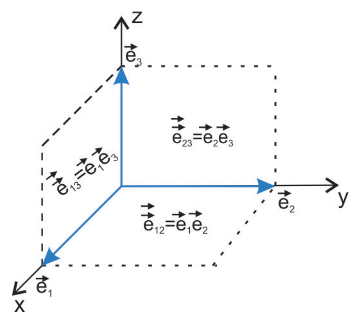

Figura 4.6: Representação geométrica da álgebra $A(\mathbb{R}^3)$

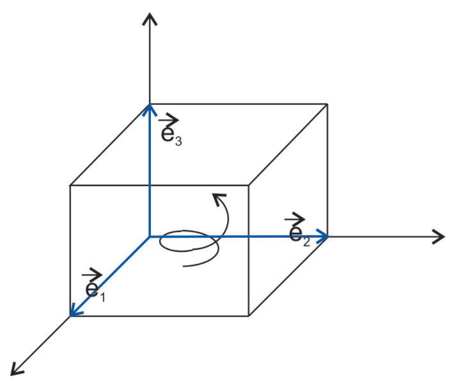

Figura 4.7: Representação do pseu-escalar $I = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$.

Define-se, ainda, o trivetor $I = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$, chamado pseudo-escalar unitário do espaço euclidiano tridimensional. Sua representação geométrica é dada pelo cubo orientado:

Teorema 4.34. *O pseudo-escalar unitário $I = \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_3}$ cumpre a condição $I^2 = -1$.*

4.7.1 Isomorfismo de $A(\mathbb{R}^3)$ com quatérnions.

De acordo com o Capítulo 3 um quatérnion é um objeto da forma $\beta = x + yi + +wk$, onde i, j e k são unidades imaginárias, também denominados versores, que satisfazem as seguintes condições:
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$;
$ij = k = -ij$;
$jk = i = -kj$;

$ki = j = -ik$.

Tais relações geram uma álgebra $S(H)$, onde H é o conjunto de todos os quatérnions. Com a finalidade de estabelecer um isomorfismo entre $A^+(\mathbb{R}^3)$ e a Álgebra dos Quatérnions, considerem-se as seguintes associações:

$\hat{i} \equiv \overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_2}$

$\hat{j} \equiv \overrightarrow{e_1}\overrightarrow{e_3}$

$\hat{k} = \overrightarrow{e_2}\overrightarrow{e_1}$

Assim, qualquer elemento de $A^+(\mathbb{R}^3)$ é de forma:

$\beta = \alpha_0 + \alpha_1\hat{i} + \alpha_2\hat{j} + \alpha_3\hat{k}$

É facil verificar que:

$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = -1$

$\hat{i}\hat{j} = \hat{k} = -\hat{j}\hat{i}$

$\hat{j}\hat{k} = \hat{i} = -\hat{k}\hat{j}$

$\hat{k}\hat{i} = \hat{j} = -\hat{i}\hat{k}$

O isomorfismo procurado é definido pelas associações:

$1 \Leftrightarrow 1$

$i \Leftrightarrow \hat{i}$

$j \Leftrightarrow \hat{j}$

$k \Leftrightarrow \hat{k}$

A soma de quatérnions fica associada com a soma em $A(\mathbb{R}^3)$ e o produto entre quatérnions com o produto geométrico de $A(\mathbb{R}^3)$.

4.8 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada uma introdução à Álgebra Geométrica de Clifford e foram estabelecidas suas relações com a Álgebra dos Números Complexos e com a Álgebra dos Quatérnions. Uma generalização do conceito de vetor foi apresentada, emergindo assim, o conceito de objetos vetoriais. O tema abordado neste capítulo é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas de Física e Engenharia, possuindo aplicações à teoria dos circuitos elétricos. Geralmente, é um tema tratado no campo da Física-Matemática.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

O presente trabalho abordou, inicialmente, a parte histórica dos Números Complexos, dos Quatérnions e da Álgebra Geométrica. Concluiu-se que os números complexos tiveram como ponto de partida para o seu nascimento as equações cúbicas e não as quadráticas, como era de se esperar e como, em muitas vezes, é ensinado no Ensino Médio. Na verdade, os matemáticos italianos do século XVI perceberam através da fórmula geral de solução de equações cúbicas, divulgada por Cardano em 1545, que as raízes de números negativos deveriam ter algum sentido matemático.
Considere-se a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$ que possui sabidamente três raízes reais, a saber: 4, $-2-\sqrt{3}$ e $-2+\sqrt{3}$. Quando a fórmula de Cardano é aplicada, obtém-se que:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Dessa feita, mesmo que o resultado final consiste apenas em números reais, para a sua determinação é necessário o manejo com raízes quadradas de números negativos, indicando que essas raízes deveriam possuir algum sentido matemático. Os números complexos só ganharam a atual identidade após a divulgação de sua interpretação geométrica apresentada por Gauss por volta de 1880. A álgebra formal que hoje se estuda e que foi apresentada no capítulo 3 foi introduzida em 1883 por Hamilton. Assim, o processo de desenvolvimento do conceito dos números complexos durou cerca de 288 anos.

No Capítulo 2, investigou-se o ensino dos Números Complexos, tendo como referência o

Ensino Médio. Para isso, livros didáticos foram analisados e orientações foram desenvolvidas visando a subsidiar o trabalho de docentes do Ensino Médio. Em trabalhos futuros, pretende-se aplicar uma sequência didática para introdução dos Números Complexos numa classe do Ensino Médio via abordagem geométrica.

O Capítulo 3 foi dedicado ao estudo formal da Álgebra dos Números Complexos e dos Quatérnions. Os Números Complexos possuem diversas aplicações, em especial, a aplicação dos Números Complexos à teoria de circuitos elétricos é consagrada, de modo a primeira aplicação ocorreu no século XIX e foi realizada pelo cientista alemão Hermann von Helmholtz. Os quatérnions são entes matemáticos quadridimensionais que ficaram por muitos anos esquecidos pela comunidade acadêmica, porém ressurgiram e constituem uma ferramente importante na solução de problemas reais. Em [16], os quatérnions são utilizados para estudar rotações tridimensionais em biomecânica, visando a analisar movimentos esportivos. Em [15], os quatérnions auxiliaram no estudo de rotações de amostras agrícolas tridimensionais e, em [14], desenvolveu-se um estudo sobre interpolação de rotações de objetos sólidos via quatérnions.

A Álgebra Geométrica de Clifford foi introduzida no Capítulo 4. Um caminho um pouco mais “informal”foi utilizado para introduzir o conceito de objetos vetoriais de maneira mais didática, em seguida, apresentou-se uma exposição axiomática dessa Álgebra. As aplicações da Álgebra de Clifford podem ser encontradas nas mais diferentes áreas, como exemplo, [13] a utilizou no estudo das Transformações de Lorentz e movimento de partículas carregadas. Um trabalho futuro consiste em utilizar os conhecimentos adquiridos em Álgebra de Clifford para resolver diversas classes de problemas oriundos das Engenharias, mais especificamente, um trabalho de Robótica que usa o domínio de Clifford [22] e o Treinamento de Redes Neurais [23].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Carneiro, J. P., *A Geometria e o Ensino dos Números Complexos*, VIII ENEM, Palestra, Recife (2004).

[2] Vieira, R. S., *Tópicos de Álgebra Geométrica*, Nota técnica, São Carlos (2006).

[3] Monteiro, I. O., *Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano: Conceitos Básicos e Algumas Aplicações Físicas*, Monografia - Graduação em Física - FURG, Rio Grande, (2009).

[4] Iezzi, G., *Fundamentos de Matemática Elementar - Complexos, Polinômios, Equações - Volume 6*, Editora Atual, São Paulo (2005).

[5] Menezes, L. C. et all, *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*, Ministério da Educação, Brasília (2000).

[6] Bezerra, M. J., *Matemática Para o Ensino Médio*, Editora Scipione, São Paulo (2001).

[7] Giovanni, J. R., Bonjorno, J. R., *Matemática: uma nova abordagem*, Editora FTD, São Paulo (2010).

[8] Dante, L. R., *Matemática*, Editora Ática, São Paulo (2010).

[9] Garbi, G. G., *O Romance das Equações Algébricas*, Editora Livraria da Física, 2ª Edição, São Paulo (2007).

[10] Carneiro, J. P., Wanderley, A., *Aplicaciones Geometricas de los Numeros Complejos con CABRI II*, Santiago (2002).

[11] Oliveira, C. N. C., *Números Complexos Um estudo dos Registros de Representação e de Aspectos Gráficos*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PUC/SP, São Paulo (2010).

[12] Vaz, J. Jr., Rocha, R. Jr., *Álgebras de Clifford Espinores*, Editora Livraria da Física, São Paulo (2012).

[13] Zeni, José R. de Resende, *Álgebras de Clifford, Transformações de Lorentz e o Movimento de Patírculas Carregadas*, Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Física - UNICAMP, Campinas (1992).

[14] Araújo, E. L., *Interpolação de Rotações de Objetos Sólidos via Quatérnions*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFPB; João Pessoa (2000).

[15] Botega, L. C., Cruvinel, P. E., *Modelo de Rotação de Amostras Agrícolas Tridimensionais Utilizando Quatérnions e Dispositivo Não Convencional de Realidade Virtual*, São Carlos (2008).

[16] Santiago, P. R. P., *Rotações Tridimensionais em Biomecânica via Quatérnions: Aplicação na Análise dos Movimentos Esportivos*, Tese de Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Ciências da Motricidade - UNESP, Rio Claro (2009).

[17] Bernnand, E. de G. et all, *Uma Abordagem Alternativa Para o Estudo da Dinâmica de um Corpo Rígido Através da Álgebra de Clifford*, XVIII Simpósio Nacional de Ensino da Física, Vitória (2009).

[18] Särkkä, S., *Notes on Quaternions*, Nota técnica, Finlândia (2007).

[19] Cerri, C., Monteiro, M. S., *História dos Números Complexos*, Nota técnica, São Paulo (2001).

[20] Pinto, U. Jr., *A História dos Números Complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (2009).

[21] Lima, E. L., *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*, Editora SBM, Rio de Janeiro (2004).

[22] Mello, G. A. B., *Robótico do domínio do Conforme de Clifford*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UFMS, Campo Grande (2011).

[23] Torchi, T., *Subconjunto de Treinamento e Critério de Confiabilidade para Redes Neurais Artificiais*, Dissertação de Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UFMS, Campo Grande (2009).

[24] Ávila, G. S. de S., *Variáveis Complexas e aplicações - 3ª edição*, Editora LTC, Rio de Janeiro (2008).

[25] Menezes, L. C. et all, *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complemetares aos Parâmetros Currilares Nacionais*, Ministério da Educação, Brasília (2007).