UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

MÁRCIO MACÁRIO DA CUNHA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E FRACTAIS

CAMPO GRANDE - MS
MAIO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

MÁRCIO MACÁRIO DA CUNHA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E FRACTAIS

ORIENTADOR: Prof. Dr. JAIR DA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

CAMPO GRANDE – MS
MAIO DE 2013

PROGRESSÃO ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E FRACTAIS

MÁRCIO MACÁRIO DA CUNHA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jair da Silva – UFMS

Profa. Dra. Maristela Missio – UEMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS

CAMPO GRANDE – MS
MAIO DE 2013

O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo.

(Roger Bacon)

Dedico este trabalho à minha mãe Elisabete Flores
e a todos meus amigos e familiares que me
apoiaram nessa caminhada.

Gostaria de agradecer a todos os professores do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
pelos seus ensinamentos, aos colegas pelo seu companheirismo e incentivo
durante o curso, e por último um agradecimento especial ao
Prof. Dr.Jair da Silva pela sua orientação, cooperação e compreensão ao longo da
realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fixar o conceito de progressão aritmética e geométrica através de atividades envolvendo fractais famosos como, por exemplo, a curva de Koch, o floco de neve, o triângulo de Sierpinski e árvore bifurcada. Todos esses fractais são introduzidos de forma simples e detalhados. Outro objetivo não menos importante que o primeiro é o de oferecer uma motivação para o estudo de progressões em nível de ensino médio. Também é apresentada uma atividade prática envolvendo fractais, realizada através de dobraduras. Toda a teoria e atividades estão em linguagem simples e acessível aos professores e estudantes da educação básica. Antes das atividades estão os aspectos históricos e a fundamentação teórica sobre sequências, progressões aritméticas e geométricas e posteriormente de fractais. Também é apresentado o roteiro para construção dos quatro fractais citados acima, essa construção é realizada no Geogebra que é um software livre de geometria dinâmica. Para finalizar oferecemos no apêndice os formulários para quem futuramente optar pela aplicação dessas atividades.

Palavras-chave: fractais, progressão aritmética e progressão geométrica.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal permite a integração de vários campos da matemática e de outras ciências. A ideia de estudá-la deve-se ao fato de ser mais precisa do que a geometria euclidiana para representar formas da natureza tais como nuvens, montanhas, mapas, flores, árvores entre outras. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o lado experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais. Este trabalho tem o objetivo principal de fixar e motivar o estudo de progressões aritméticas e geométricas através do estudo de fractais.

O ensino das progressões é atualmente trabalhado fora do contexto de funções, apenas utilizando fórmulas prontas e aplicando-as em problemas trabalhados ano após ano. Nota-se também que esses conceitos não são abordados a partir de um contexto histórico e não tem ligação com a realidade dos nossos alunos.

No capítulo 2 faremos um levantamento histórico sobre sequências, progressões aritméticas e geométricas a fim de oferecer uma base histórica e conhecer exemplos de problemas que vem sendo trabalhados desde a antiguidade. Ainda neste capítulo faremos a introdução do tema fractais. Que é uma área de conhecimento nova, que surgiu em meados no século XX.

No Capítulo 3, faremos uma revisão bibliográfica sobre temas já conhecidos no ensino médio como sequências, progressões aritméticas e geométricas. Outro nem tanto difundido que é conhecido como geometria fractal ou fractais. Faremos isso de maneira breve pois abordaremos o tema apenas utilizando a matemática da educação básica, que é o nosso maior objetivo.

Após isso, no Capítulo 4, propiciaremos seis atividades relacionando progressões, fractais e suas construções. Essas atividades visam fixar o conceito de PA e PG por meio de fractais famosos como por exemplo: a curva de Koch, o floco de neve, o triângulo de Sierpinski e a árvore bifurcada. As duas últimas atividades deste capítulo envolvem apenas o estudo de sequências, relacionando aritmética e geometria. Uma trata de fractais por meio de dobraduras e a outra sobre soma dos termos de uma PG, esta última é uma ótima oportunidade para se apresentar o termo série infinita e trabalhar com a ideia de convergência.

As construções dos fractais serão feitas no Geogebra, que é um software livre de geometria dinâmica. Será feita uma descrição minuciosa sobre os passos a serem seguidos para a construção de cada fractal.

Para finalizar, no Apêndice, apresentaremos os formulários com as sugestões das atividades envolvendo progressões e fractais.

2. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA, PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FRACTAIS – ASPECTOS HISTÓRICOS

Para iniciarmos o estudo do tema abordado, iremos descrever, de maneira sucinta, os aspectos históricos relevantes aos temas sequências, progressões aritméticas, progressões geométricas e fractais, desde o período neolítico até o século XX.

2.1 SEQUÊNCIAS, PA E PG

As primeiras evidências sobre sequências numéricas simples aparecem em desenhos como os da fig. 1, que datam do período neolítico, aproximadamente 10 mil a.C. até cerca de 4 mil a.C. [4].

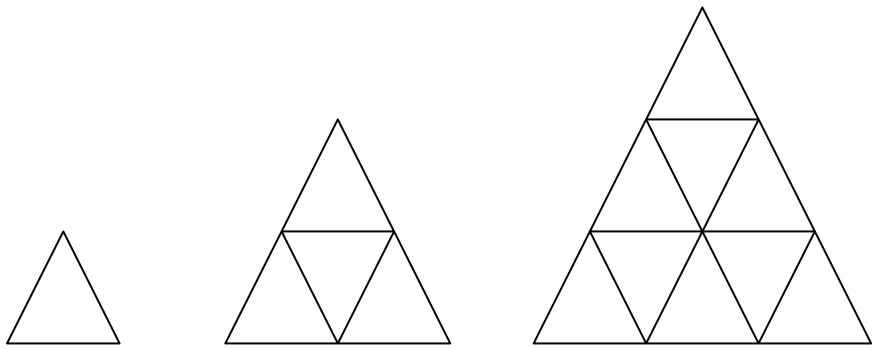


Figura 1

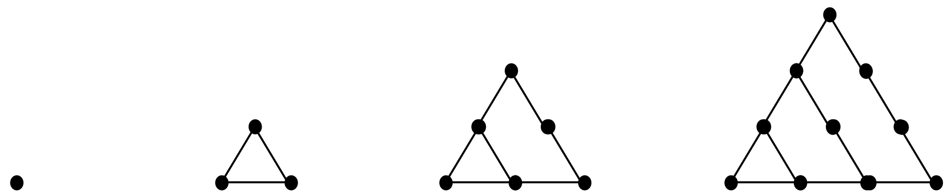
A sequência acima sugere a soma dos números naturais consecutivos (ou números triangulares). Porém, como no período neolítico não há documentos, fica impossível relacionar desenhos específicos com uma teoria.

No papiro de Ahmes (ou de Rhind), um pergaminho egípcio, escrito na forma de manual prático, copiado em 1650 a.C. pelo escriba Ahmes, de um trabalho ainda mais antigo possui vários problemas de progressões aritméticas e progressões geométricas. Este papiro é uma fonte rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências claras de que os Egípcios sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética e geométrica.

Por exemplo, o problema 79 diz apenas “7 casa, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares de grãos”. É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, que em uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas de trigo, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão, ou seja, a soma 7+49+343+2041+16807 que é a soma dos cinco primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 7.

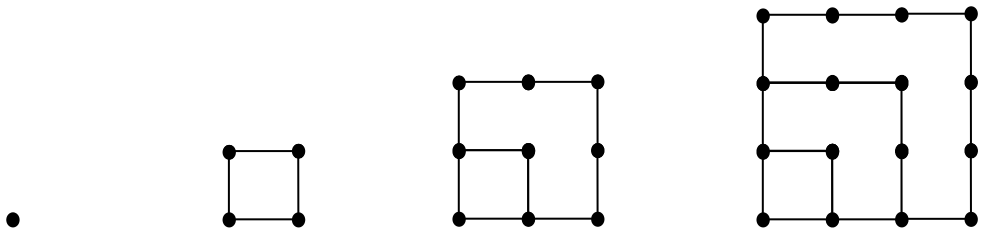
Pitágoras (Grécia, 585 a.C. - 500 a.C.) fundou a escola pitagórica, o estudo de números figurados tem origem nos membros mais antigos dessa escola. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam uma ligação entre a geometria e aritmética. Casos particulares dos números figurados são os números triangulares, quadrados e pentagonais que representam a soma dos termos das seguintes progressões aritméticas respectivamente.

Números Triangulares → $T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$



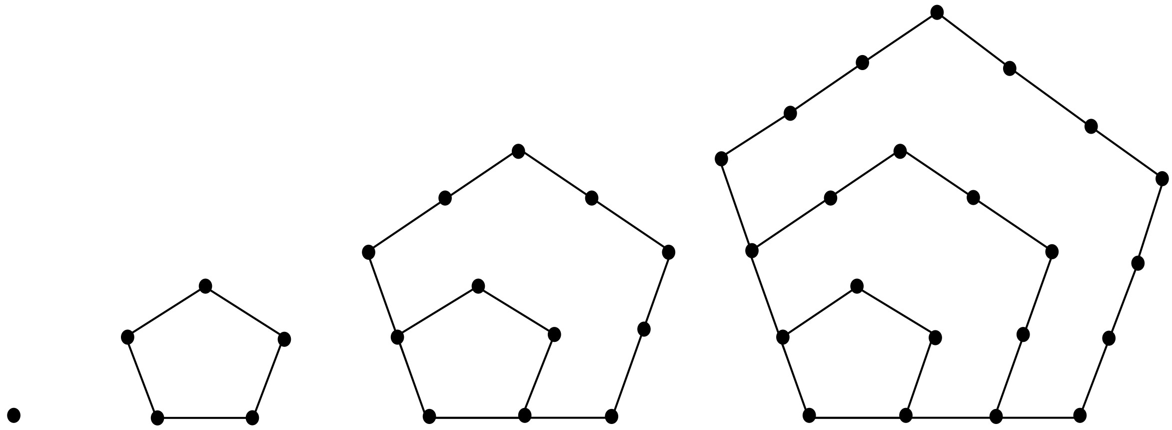
1 3 6 10

Números quadrados → $Q_n=1+3+5+7+...+(2n+1) = n^2$



1 4 9 16

Números pentagonais $\rightarrow$ $P_n = 1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = = \dfrac{n(3n-1)}{2} = n + \dfrac{3n(n-1)}{2}$



1 5 12 22

Euclides de Alexandria (Grego, 360 a.C. - 295 a.C.) escreveu "*Os Elementos*". Nenhum outro trabalho, exceto a Bíblia, foi tão usado e estudado, e provavelmente nenhum exerceu maior influência no pensamento científico. "*Os Elementos*" trata de proporções contínuas e progressões relacionadas. Se temos uma proporção contínua a:b=b:c=c:d, então a, b, c e d formam uma progressão geométrica. Outros casos sobre progressões geométricas também são encontrados nos livros IV e IX. Apesar do que se pensava essa obra não trata somente de geometria, contém muito sobre teoria dos números e álgebra elementar.

Arquimedes (Grécia, 287 a.C. - 212 a.C.) foi quem aplicou de maneira mais elegante o método da exaustão e mais se aproximou da atual e verdadeira integração. Em um exemplo antigo da quadratura de um segmento parabólico utiliza a fórmula de soma da série geométrica.

Na tábua de Louvre datada por volta de 300 a.C. foram encontrados 2 problemas interessantes sobre seqüência. Um deles afirma que:

$1+2+2^2+2^3+2^4+...+2^8+2^9=2^9+2^9-1.$

que é a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2. Esta tábua foi escrita pelos babilônicos, mostrando assim que eles também trabalhavam sequências.

Diofanto de Alexandria (Grécia, 250 a.C.-166 a.C.) publicou em sua obra mais importante, *Aritmética*, alguns problemas sobre progressões aritméticas e geométricas.

Por exemplo, no Problema 7, Livro III: encontre 3 números em progressão aritmética, sabendo que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado.

O Matemático hindu mais importante do século XII foi Bhaskara (1114-1185). Os problemas da aritmética hindus envolviam geralmente irracionais quadráticos, o teorema de Pitágoras, progressões aritméticas e permutações. O seguinte problema é de autoria de Bhaskara e está presente em sua obra mais conhecida, *Lilavati*, 1150: "Numa expedição para capturar os elefantes do seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calculador inteligente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?

Em 1202, Leonardo de Pisa (Itália, 1170-1250) escreveu um livro denominado *Liber Abacci*. Continha muitos problemas, um deles muito conhecido atualmente é o da sequência de Fibonacci, que foi gerada a partir de observações em relação à criação de coelhos. O seguinte problema está contido no *Liber* Abacci: "Há dois homens que tencionam fazer uma longa viajem, e um irá a 20 milhas por dia. O outro irá, respeitosamente, 1 milha no primeiro dia, 2 no segundo, 3 no terceiro, e sempre assim, mais uma milha por dia até que se encontrem. Procura-se, durante quantos dias o primeiro é perseguido". Basta procurar o valor de n para que 20n seja menor que n(n+1)/2. O n procurado é 39, ou seja o primeiro homem é perseguido durante 39 dias. Leonardo também é reconhecido pelo seu papel na introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa.

Michael Stifel (Alemanhã, 1486-1567), maior algebrista alemão do séc. XVI. Em sua maior obra *Arithmetica integra,* publicada em 1544, na primeira parte dessa obra Stifel salienta as vantagens de se associar uma PA a uma PG, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos. Este trabalho incluía também o triângulo de Pascal, mas o aspecto mais importante é seu tratamento dado a números negativos, radicais e potências. A *Arithimetica integra* constituía um tratamento completo de álgebra até 1544.

John Napier (Escócia, 1550-1617) possuía completo conhecimento da correspondência entre progressões aritméticas e geométricas, que o levou aos logaritmos gerando em consequência de sua descoberta a construção das tabelas de logaritmos que foram publicadas posteriormente. Essa correspondência encontra-se em [8] pág. 344 e se resume do seguinte modo: associando-se os termos de uma progressão geométrica $b, b^2, b^3, ..., b^m, ..., b^n,...$ aos termos da progressão aritmética 1, 2, 3, ..., m, ..., n, ..., então o produto $b^m b^n = b^{m+n}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma m+n dos termos correspondentes da segunda progressão. Para manter os termos da PG suficientemente próximos de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1. Com essa finalidade Napier tomou $1-(1/10^7)=0,9999999$ para b. Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7. Então, se

$$N=10^7(1-1/10^7)^L$$

Ele chamava de L de "logaritmo" do número N. Segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0 e o de $10^7(1-1/0^7)=0,9999999$ é 1. Dividindo-se N e L por 10^7, virtualmente se encontrará um sistema de logaritmos na base 1/e, pois

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)10^7=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

Sobre o cálculo diferencial e integral, já na Idade Moderna, o uso de sequências, séries e progressões se faz presente na maior parte da teoria.

Como podemos perceber as progressões aparecem de forma natural desde a antiguidade até os dias atuais na resolução de problemas diversos.

2.2 FRACTAIS

A ideia de estudar a Geometria Fractal se deve ao fato dela ser mais precisa para descrever as formas da natureza do que Geometria Euclidiana, já que esta não é capaz de descrever formas como as nuvens, as montanhas, as flores, as árvores entre outras.

Fractal [3] ou geometria fractal é um termo utilizado desde 1975 pelo matemático Benoit Mandelbrot (1924-2010), matemático polonês que difundiu amplamente essa geometria. Mandelbrot denominou fractal baseando-se no latim, do adjetivo fractus, cujo verbo frangere correspondente significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar.

A geometria dos fractais está intimamente ligada à uma ciência chamada Caos. As estruturas fragmentadas dos fractais fornecem uma certa ordem ao Caos, razão esta dos fractais chegarem a ser considerados linguagem para o Caos, pois buscam padrões dentro de um sistema que aparentemente é aleatório.

Inicialmente Mandelbrot usou conceitos de dimensão para definir fractais: "um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente a dimensão topológica". Essa definição recebeu críticas e não agradou nem ao próprio Mandelbrot. Outros autores como por exemplo, K. J. Falconer e J. Feder tentaram dar uma definição formal aos fractais, porém deixaram a desejar. Atualmente ainda não há uma definição formal para fractais.

A construção de fractais demanda processos iterativos, por isso não é possível sua representação fiel, haja visto que tais processos são infinitos. Os fractais se difundiram a partir da década de 80, com o avanço da computação, o que permitiu maior precisão na construção deles.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma sequência numérica finita de n termos é uma função cujo domínio é o conjunto numérico {1, 2, 3, ... , n} e o contra domínio é o conjunto dos números reais que são indicados por a_1, a_2, ... , a_n.

Uma sequência infinita é uma função f:N→R. O domínio dessa função é o conjunto dos números naturais. Os números do contradomínio são indicados por a_1, a_2, a_3, ..., a_n,...

Assim $f(1)= a_1, f(2)= a_2, f(3)=a_3, \ldots , f(n)= a_n ,\ldots$

a_1 é o primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo e a_n é o n-ésimo termo.

Nas próximas seções estudaremos casos particulares de sequências numéricas.

3.2 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

No decorrer da história, o estudo de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG) fascinou muitos matemáticos. Problemas de PA e PG são encontrados, por exemplo, no papiro de Ahmes (ou de Rhind), um pergaminho egípcio, escrito na forma de manual prático, copiado em 1650 a.C. pelo escriba Ahmes, de um trabalho ainda mais antigo. O seguinte problema encontra-se no papiro referido acima:

"Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores".

A seguir vamos apresentar a definição de PA.

Definição: Progressão aritmética é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada razão da progressão aritmética (PA) e é representada pela letra r.

Teorema 3.1. Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão r, então $a_n=a_1+(n-1)r$, para todo n inteiro e positivo.

Prova: Pela definição de progressão aritmética, temos

$$a_2-a_1=r$$

$$a_3-a_2=r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

...

$$a_n - a_{n-1} = r$$

Somando essas n-1 igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)r$, isto é,

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \text{(I)}$$

□

Observação: Se tivéssemos começando a enumeração dos termos por a_0, teríamos $a_n = a_0 + nr$.

Na fórmula (I) do termo geral, que possibilita calcular qualquer termo de uma PA a partir do primeiro termo e sua razão, temos que:

- a_n → enésimo termo
- a_1 → primeiro termo
- r → razão da progressão aritmética
- n → número de termos (até a_n)

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Vamos resolver o problema introdutório do papiro de Ahmes:

Solução:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100$

$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r = 100$

$5a_1 + 10r = 100 \rightarrow a_1 + 2r = 20$ (I)

$$\frac{1}{7}(a_1 + a_2 + a_3) = a_4 + a_5 \rightarrow 11a_1 - 2r = 0 \quad \text{(II)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), temos que:

$$a_1 = \frac{5}{3} \text{ e } r = \frac{55}{6}$$

Resposta: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \left(\frac{5}{3}; \frac{65}{6}; 20; \frac{175}{6}; \frac{230}{6}\right)$ a sequência dada corresponde a quanto cada homem receberá. Observe que esse é um problema com solução não inteira.

Exemplo 2: Quando completou 15 anos, Micheli decidiu comprar um novo aparelho de telefone celular, mas viu que só tinha R$ 50,00 e decidiu que, a partir do mês seguinte, reservaria R$ 40,00 de sua mesada para adquirir o celular. Os valores acumulados por Micheli, a partir do mês de seu aniversário, formam a seguinte sequência (50, 90, 130, ...). Qual será a quantia que Micheli terá acumulado após o 6º mês?

Solução: Observe que temos de encontrar o 7º termo da sequência, haja visto que Micheli começou sua "economia" com 50 reais.

$a_n=a_1+(n-1).r$

$a_7=a_1+(7-1).40=50+6.40=290$

Logo Micheli terá acumulado R$ 290,00 após 6 meses.

Exemplo 3: Determine quantos múltiplos de 3 há entre 100 e 600.

Solução: A sequência dos múltiplos de 3 (0, 3, 6, 9, ...) é uma PA de razão 3, mas o que nos interessa é estudar a sequência entre 100 e 600.

O primeiro múltiplo de 3 maior que 100 é 102, logo $a_1=102$.

O último múltiplo de 3 que pertence ao intervalo dado é 597, logo $a_n=597$.

Pelo termo geral, temos:

$a_n=a_1+(n-1).r \rightarrow a_n=102+(n-1).3=597 \rightarrow n=166.$

Portanto há 166 múltiplos de 3 entre 100 e 600.

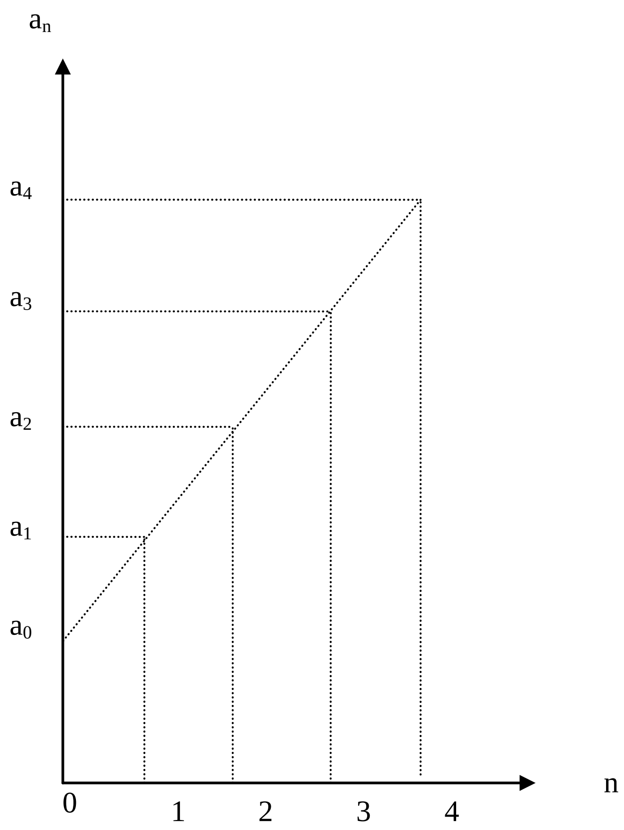
Classificação de uma progressão aritmética:

A razão de uma progressão aritmética pode ser um número negativo, zero ou positivo, assim:

- Se a razão é negativa a progressão aritmética é dita decrescente;
- Se a razão é zero a progressão aritmética é dita constante;
- Se a razão é positiva a progressão aritmética é dita crescente.

3.2.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Podemos pensar em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, $p(n)=a_n$, dado por $a_n=a_1+(n-1)r$ ou $a_n=a_0+nr$ ao começarmos a enumeração dos termos por a_0. Ela é definida por uma fórmula do tipo da função afim, com domínio natural. O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano: $(0,a_0)$, $(1,a_1)$, ... , (n,a_n), ...



Logo uma sequência numérica é uma progressão aritmética se, e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(0,a_0)$, $(1,a_1)$, ... , (n,a_n), ... são colineares.

3.2.2 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos do século XIX. Alemão de família muito simples foi uma criança prodígio. Perto dos dez anos de idade, conta-se que Gauss surpreendeu seu professor ao responder o valor da soma (1+2+...+100) em pouquíssimo tempo.

Utilizaremos a ideia de Gauss para demonstrar a fórmula que nos fornece a soma dos n termos de uma progressão aritmética.

Teorema 3.2. A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é igual a $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Prova: A soma de seus n termos pode ser escrita por:

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ (1)

Escrevendo a soma de trás para a frente, temos:

$S_n=a_n+\ldots+ a_2+a_1$ (2)

Fazendo (1)+(2)

$2.S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$ (3)

Observe que ao passar de uma parcela (parênteses) para a seguinte, a primeira parcela dentro do parênteses aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto todas as parcelas (parênteses) são iguais à primeira (a_1+a_n).

Assim de (3)

$2.S_n=(a_1+a_n).n$

Portanto

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \text{(II)}$$

□

Na fórmula (II), que possibilita calcular a soma dos termos de uma PA a partir do primeiro termo, do último termo e o número de termos, temos que:

Sendo: a_1 é o primeiro termo;

a_n é o enésimo termo;

n é o número de termos;

S_n é a soma dos n termos.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Vamos calcular a soma 1+2+3+...+100.

Aplicando na fórmula, temos:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})100}{2} = \frac{(1+100).100}{2} = 5050$$

Exemplo 2: Vamos calcular a soma dos 50 primeiros termos da progressão aritmética *(2, 6, 10, ... , 4n-2, ...).*

Solução: Nessa PA temos, $a_1=2$ *e* $r=6-2=4$

Devemos calcular o a_{50}

$a_{50}=a_1+(50-1).4=2+49.4=198$

Aplicando a fórmula, temos:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50})50}{2} = \frac{(2+198).50}{2} = 5000$$

A soma procurada é 5000.

Exemplo 3: calcular a soma dos primeiros n números ímpares

(1, 3, 5, ..., 2n-1, ...), com n natural.

Solução:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+2n-1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Portanto a soma dos n primeiros números naturais ímpares é n^2.

3.3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Enquanto a população humana cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos cresce em progressão aritmética.

Thomas Malthus – economista britânico

A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre seu aumento e o seu valor inicial. Assim, uma grandeza que passa de valor a para o valor b tem taxa de crescimento relativo igual a $\frac{b-a}{a}$.

Neste tópico trataremos de sequência que variam com taxa de crescimento relativo constante. Essas sequências são chamadas de progressões geométricas.

Definição: Progressão geométrica é toda sequência numérica, de termos não nulos, na qual o quociente entre um termo (a partir do segundo) e seu anterior é uma constante chamada de razão q.

Teorema 3.3. Em toda progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ de razão q, tem-se, para todo natural n, $a_n = a_1.q^{n-1}$.

Prova: temos $\frac{a_2}{a_1} = q$, $\frac{a_3}{a_2} = q$, $\frac{a_4}{a_3} = q$,..., $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$.

Multiplicando essas n-1 igualdades, obtemos $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$.

Daí

$$a_n = a_1.q^{n-1} \quad \text{(III)}$$

□

Na fórmula (III), que possibilita calcular um termo de uma PG a partir do primeiro termo e sua razão, temos que:

Chamada de fórmula do termo geral.

Nesta fórmula temos que:

- a_n é o n-ésimo termo;
- a_1 é o primeiro termo;
- n é o número de termos;

- q é a razão.

Classificação de uma progressão geométrica:

Dependendo da razão, a PG pode ser classificada em:

- Se $q>1$ e $a_1>0$ então a progressão geométrica é crescente;
- Se $q>1$ e $a_1<0$ então a progressão geométrica é decrescente;
- Se $0<q<1$ e $a_1>0$ a progressão geométrica é decrescente;
- Se $0<q<1$ e $a_1<0$ a progressão geométrica é crescente;
- Se $q=1$ a progressão geométrica é constante;
- Se $q<0$ os termos oscilam entre valores negativos e positivos.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: A sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \cdots\right)$ é uma PG infinita. Determine a razão dessa PG.

Solução:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Logo a razão procurada é $\frac{1}{3}$.

Exemplo 2: A população de um país é atualmente igual a P_0 e cresce 3% ao ano. Qual será população desse país daqui a t anos?

Solução: Como a população cresce 3% ao ano, então em cada ano a população é 103% a do ano anterior.

Após t anos a população será $P_0.(1,03)^t$.

Neste caso temos a PG: $P_0; P_0.(1,03); P_0.(1,03)^2; ..., P_0.(1,03)^t$; ... de razão 1,03.

3.3.1 SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Teorema 3.4. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão $q \neq 1$ é igual a

$$S_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Prova:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ e, multiplicando por q, obtemos

$q.S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + q.a_n$ subtraindo essas igualdades, obtemos

$S_n - qS_n = a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n$, ou seja, $S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$.

Daí, já que $q \neq 1$, temos $S_n = a_1 . \dfrac{1-q^n}{1-q}$

□

Teorema 3.5. O limite da soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q tal que $|q|<1$, é igual a $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

Prova: Observemos que o resultado é intuitivo, pois $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$, ou seja para n suficientemente grande q^n tende a zero. Logo

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n = a_1 . \frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

□

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Há uma lenda que diz que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa por ter inventado esse jogo. O inventor respondeu : “1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda cada, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta casa, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa”. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas (8 linhas por 8 colunas), o inventor pediu a soma dos 64 primeiros termos da seguinte PG (1, 2, 4, 8, ...) de razão 2.

$$S_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q-1} = 1.\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

A recompensa era impagável, pois a quantia de trigo superava as suas colheitas nos próximos 2 000 anos.

Exemplo 2: A medida do lado de um triângulo eqüilátero é 10 cm. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo eqüilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente. Vamos calcular a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Solução:

Perímetro do primeiro triângulo → 30

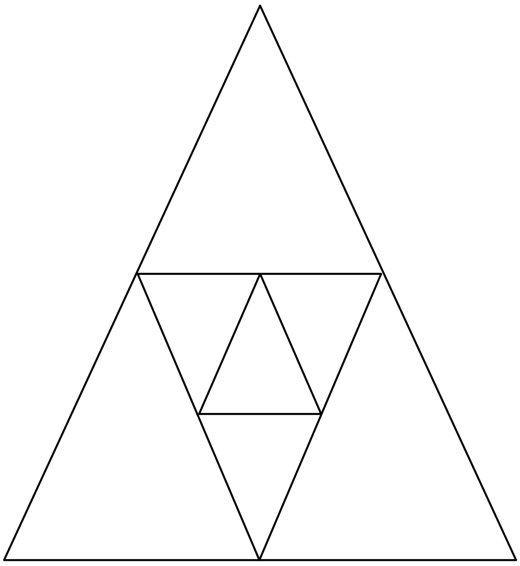
Perímetro do segundo triângulo → 15

Perímetro do terceiro triângulo → 7,5

Devemos calcular a soma dos termos da *PG (30, 15, ...)* de razão *0,5*.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$$

Logo a soma de todos os perímetros é igual a 60 cm.



3.4 FRACTAIS

O objetivo principal de se estudar fractais se deve ao fato dele ser mais preciso para descrever as formas da natureza do que geometria euclidiana, já que esta não é capaz de descrever formas como as nuvens, as montanhas, as flores, as árvores entre outros. Benoit Mandelbrot foi o responsável pelo desenvolvimento desta "Geometria da Natureza" e implementou o seu uso em diversas aplicações. A partir desta teoria descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou fractais.

Os fractais possuem uma propriedade especial, eles constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Suas partes lhe são semelhantes, propriedade conhecida como auto-similaridade.

Fractais podem ser obtidos através de processos recursivos apresentando determinadas características que por vezes são encontradas em formas da natureza. Essas características são: auto-semelhança, escala, complexidade e dimensão.

Autossemelhança (ou autossimilaridade): Uma figura é auto-semelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo.

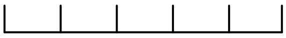
Complexidade infinita: refere-se ao fato de que o processo de geração de um fractal, é recursivo. Isto significa que, quando se executa um determinado procedimento, no decorrer do mesmo encontra-se como sub-procedimento o próprio procedimento anteriormente executado.

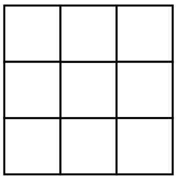
Dimensão: A dimensão fractal diz respeito à dimensão espacial, ou seja, ao espaço que a figura ocupa.

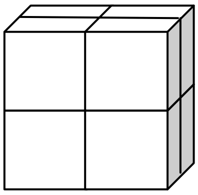
O conceito de dimensão fractal está sendo aplicado e calculado atualmente para linhas, figuras e superfícies em diversos campos. Por exemplo, na medicina, para o diagnóstico de câncer, na fabricação de antenas, na mineralogia para medir a densidade dos minerais, na biologia para a análise da rugosidade de fungos e corais, na indústria para a detecção de falhas em produtos têxteis, no solo, na chuva, na economia entre outras áreas.

Como calcular a dimensão fractal:

Observemos as seguintes figuras:







Nas figuras acima ilustramos as divisões:

De um segmento de reta em cinco peças;

De um quadrado em nove peças quadradas congruentes, repartindo o lado em três;

De um cubo em oito peças cúbicas, tendo dividido cada aresta em duas.

Cada pequena peça é autossimilar ao todo, assim para cada peça fique igual ao todo devemos ampliá-la por um fator de aumento (coeficiente de proporcionalidade) igual respectivamente a *5, 9* e *8*.

Em resumo, o número de peças em cada caso é igual:

Ao fator de aumento *(5)*;

Ao quadrado do fator de aumento (3^2);

Ao cubo do fator de aumento (2^3).

Em geral o número n de peças é dado por $n=m^D$, onde m é o fator de aumento e D a dimensão.

Como exemplo tomaremos a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski:

Cada triângulo de um nível é repartido para o nível seguinte em *3* triângulos (desde que o central seja removido), então $n=3$ e cada um pode ser ampliado para se igualar ao anterior, duplicando-o, logo o fator de aumento é $m=2$. Usando a mesma igualdade anterior $n=m^D$, teremos $3=2^D$ e com logaritmos obtemos

$$D=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}585$$

Portanto a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski é *1,585*.

Logo: $$Dimensão=\frac{\log(número \quad de \quad peças)}{\log(fator \quad de \quad aumento)}=\frac{\log(n)}{\log(m)}$$

Portanto a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski é *1,585*.

4. ATIVIDADES

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. A maioria das atividades foi elaborada pensando em fixar os conceitos de progressão aritmética e progressão geométrica utilizando o uso dos fractais.

Primeiramente vamos tratar de quatro problemas envolvendo fractais em conjunto progressão aritmética e progressão geométrica, nos quatro problemas elaboramos uma descrição minuciosa das construções dos fractais. O quinto problema também é um fractal, mas vamos trabalhar de maneira diferente dos quatro problemas iniciais, nesse vamos trabalhar o fractal abordando-o com dobraduras e assim relacionaremos os conceitos de progressão aritmética e progressão geométrica. No sexto problema, faremos uso de uma visão geométrica da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica para fixar o conceito de soma de seus termos.

Na construção dos fractais dos quatro problemas iniciais faremos uso do Geogebra[1] que é um software de matemática dinâmica gratuito e pode ser instalado em computadores com Windows, Linux e Mac OS. Abrange todos os níveis de ensino, do básico ao universitário, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Todas as nossas construções estarão disponíveis no seguinte endereço: http://sites.google.com/site/marciomcprofmat

Nossa intenção nesse capítulo é mostrar algumas atividades aplicáveis ao ensino fundamental e ensino médio. Cada uma dessas atividades será composta de uma descrição sobre como abordar a questão, com os objetivos e os pré-requisitos necessários para a resolução, o ano escolar no qual o problema deve ser abordado, a duração proposta para a realização da atividade. Na sequência iremos apresentar a resolução matemática da atividade proposta, com comentários sobre como finalizar essas atividades. Em todas as nossas atividades iremos trabalhar com material concreto em sala de aula e sugerimos que elas também sejam trabalhas em laboratórios computacionais utilizando o macro do fractal.

[1] Texto baseado no seguintes sites dos Instituto Geogebra:
www.geogebra.im-uff.mat.br
www.pucsp.br/geogebrasp

As questões que iremos explorar, na ordem, são:

Atividades envolvendo fractais:

- Cuva de Koch: Com a curva de Koch faremos uma atividade.
- Floco de Neve: Com o Floco de Neve faremos duas atividades.
- Triângulo de Sierpinsky: Com o Triângulo de Sierpinsky faremos duas atividades.
- Arvore Bifurcada: Com a Árvore bifurcada faremos uma atividade.
- Fractal com Cortes de Papel: Faremos uma atividade.

Atividade envolvendo soma dos termos de uma Progressão Geométrica

- Somas Infinitas: Faremos uma atividade.

4.1 Curva de Koch e aplicações em PG

Introdução:

A curva de Koch foi idealizada pelo matemático polonês Helge Von Koch (1870-1924) e possui a propriedade de ser uma curva limitada possuindo um comprimento infinito. Este fractal é muito interessante e possui uma relação íntima com o conceito de progressão geométrica. Conforme vamos construindo este, tanto a sequência de novos segmentos que vão surgindo, quanto a sequência do tamanho dos novos segmentos e também a sequência do comprimento total da curva gerada formam uma progressão geométrica. Propomos uma atividade baseada nesse fractal e nessas três sequência para fixar o conceito de progressão geométrica. Começamos com uma descrição da construção da curva de Koch, em seguida apresentaremos a atividade e por fim a descrição passo a passo de como montar o macro da curva de Koch no Geogebra.

Construção:

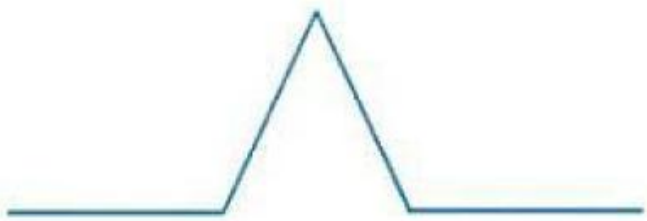
1-Considerar um segmento de reta;

2-Dividir o segmento em 3 partes iguais, substituir o segmento central por uma triângulo equilátero sem base;

3-Repetir cada um dos passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura.

Nível 0 (zero) →

Nível 1 →



Nível 2 →

Roteiro da ATIVIDADE 1 (Curva de Koch):

Conteúdo:

Progressão geométrica e fractais.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é reconhecer se uma sequência numérica é uma progressão geométrica e fixar o conceito de PG utilizando a visão geométrica da construção da curva de Koch. Outro objetivo é trabalhar reconhecimento de padrões através de sequências numéricas, faremos isso ao generalizar para um nível n qualquer.

Duração:

Duas aulas (100 min.)

Público-alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

Pré-requisitos:

Progressão geométrica e noção de fractal.

Recursos materiais:

Caneta, lápis, borracha, régua, compasso e a folha contendo a atividade (encontra-se no apêndice deste trabalho).

Problema:

Considerando que o comprimento inicial da curva de Koch seja 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela:

Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

a) A sequência dada pelos valores da coluna "número de segmentos", formam uma PG, PA ou uma sequência qualquer? Justifique.

b) A sequência dada pelos valores da coluna "comprimento de cada segmento", formam uma PG, PA ou uma sequência qualquer? Justifique.

c) A sequência dada pelos valores da coluna "comprimento total da curva", formam uma PG, PA ou uma sequência qualquer? Justifique.

Solução:

Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
0	*1*	1	*1*
1	*4*	$\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}$
2	4^2	$\frac{1}{3^2}$	$4^2\,\frac{1}{3^2}$
3	4^3	$\frac{1}{3^3}$	$4^3\,\frac{1}{3^3}$
...	...	...	...
N	4^n	$\frac{1}{3^n}$	$4^n\,\frac{1}{3^n}$

a) A sequência formada pelo número de segmentos forma a seguinte PG $(1, 4^2, 4^3, ..., 4^n, ...)$ onde o primeiro termo é *1* e a razão é *4*.

b) A sequência formada pelo comprimento de cada segmento forma a seguinte PG $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, ..., \frac{1}{3^n}, ...)$ onde o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{1}{3}$.

c) A sequência formada pelo comprimento total da curva forma a seguinte sequência $(1, 4\frac{1}{3}, 4^2\frac{1}{3^2}, 4^3\frac{1}{3^3}, ..., 4^n\frac{1}{3^n}, ...)$ onde o primeiro termo é 1 e a razão é $\frac{4}{3}$.

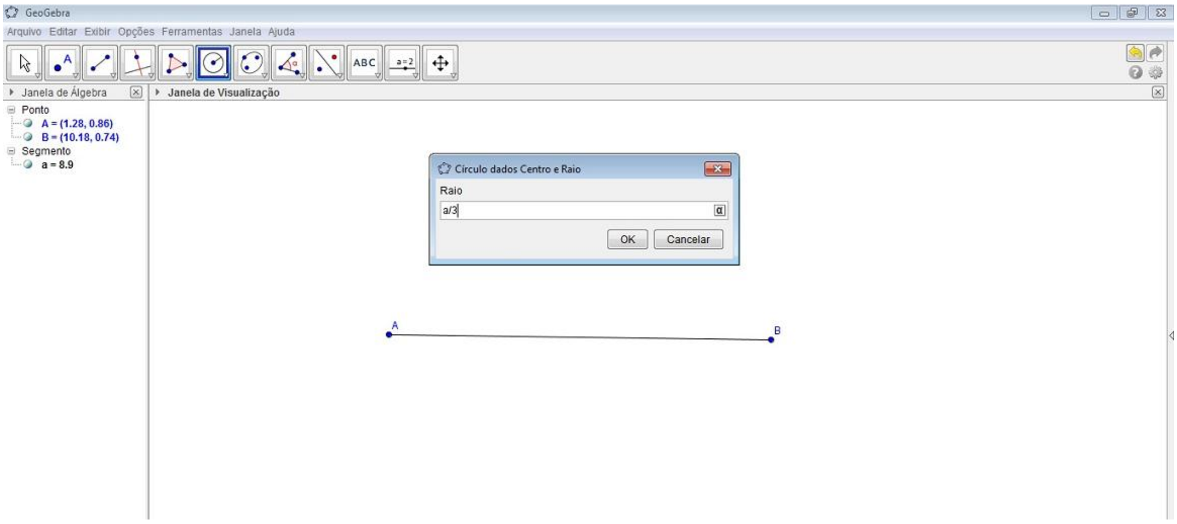
Construção do fractal e do macro utilizando o Geogebra:

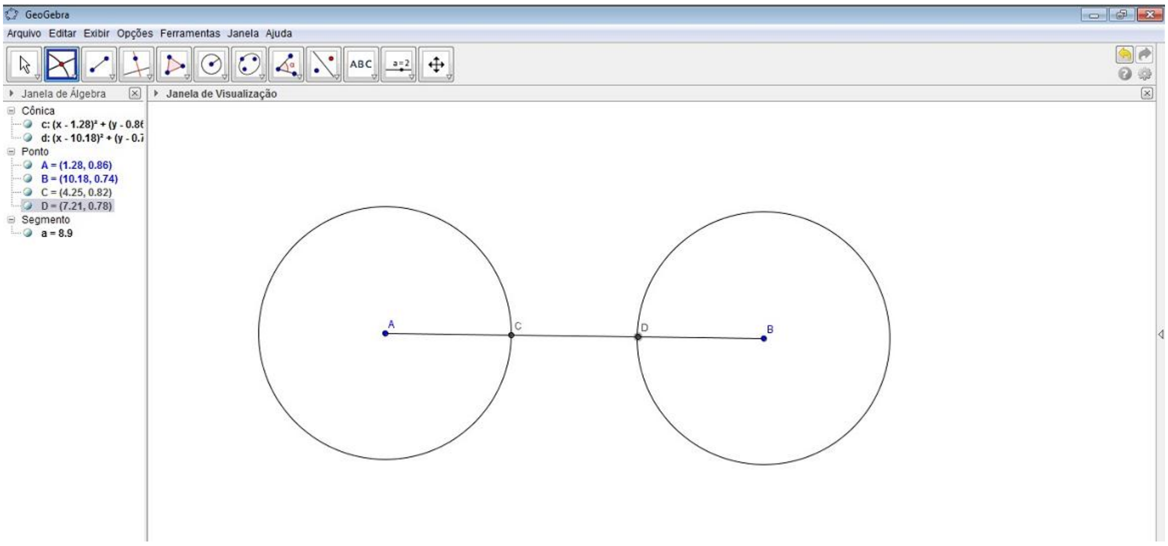
Apresentaremos agora um roteiro detalhado para a construção da curva de Koch no Geogebra.

Primeiramente vamos construir a curva de Koch no nível zero. Para isso seguimos os passos:

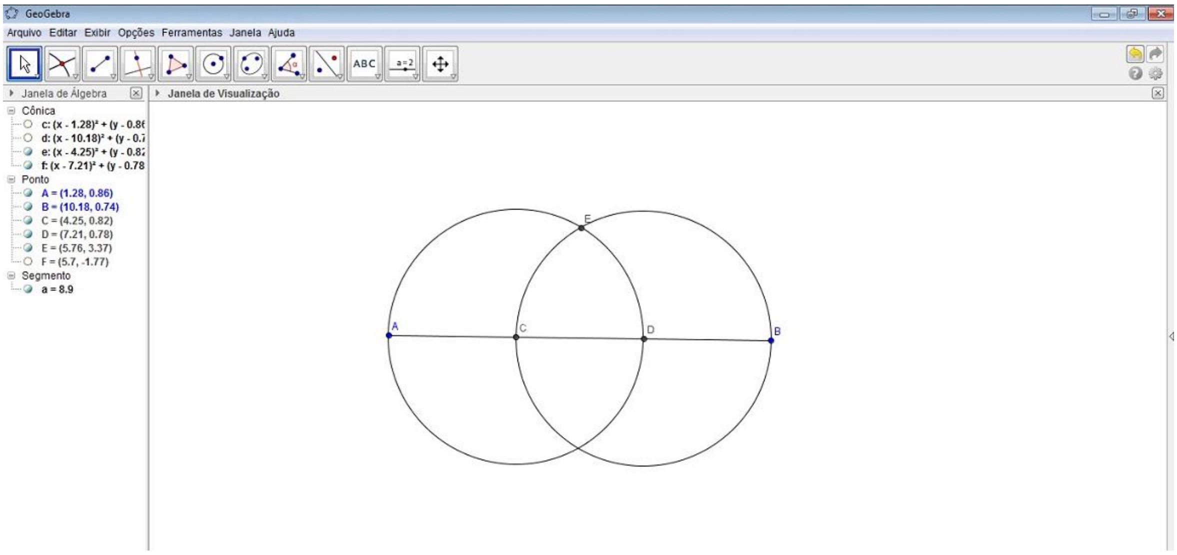
a) Construir um segmento AB;

b) Construir a partir de A, 3 segmentos de mesma medida;

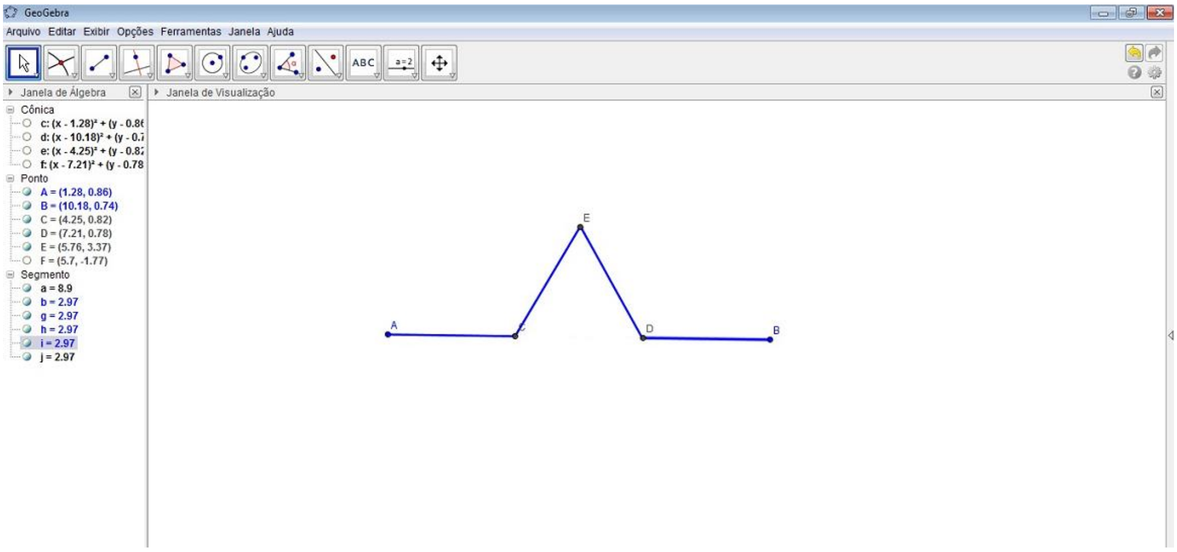




c) Traçamos uma circunferência com centro em C passando por D em seguida traçamos uma circunferência com centro em D passando por C, as circunferências intersectam em dois pontos, só nos interessa o ponto superior que chamaremos de E;

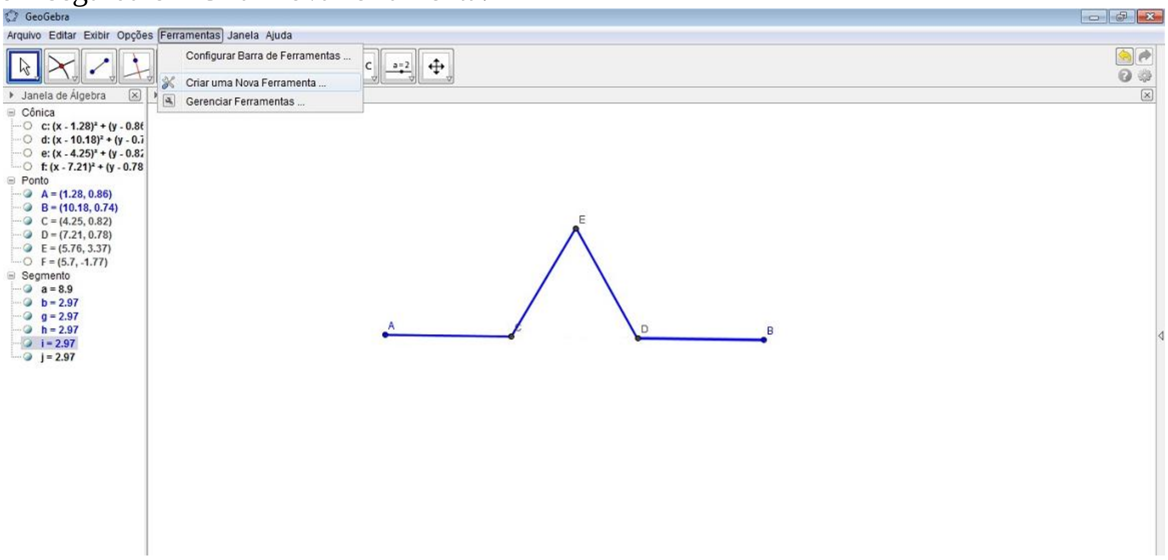


d) A curva de Koch será composta pelos segmentos AC, CE, ED e DB.

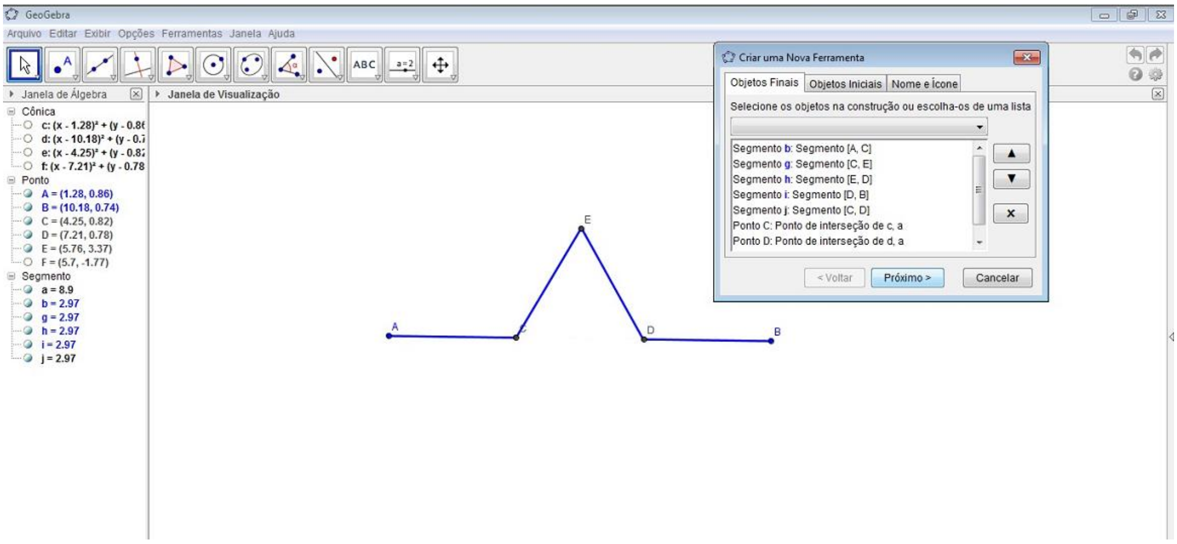


Observando a figura acima podemos notar que o segmento CD não aparece como resultado final. Na verdade ele foi construído na cor branca. Caso o leitor queira fazer um teste poderá mudar a cor e observará outro resultado.

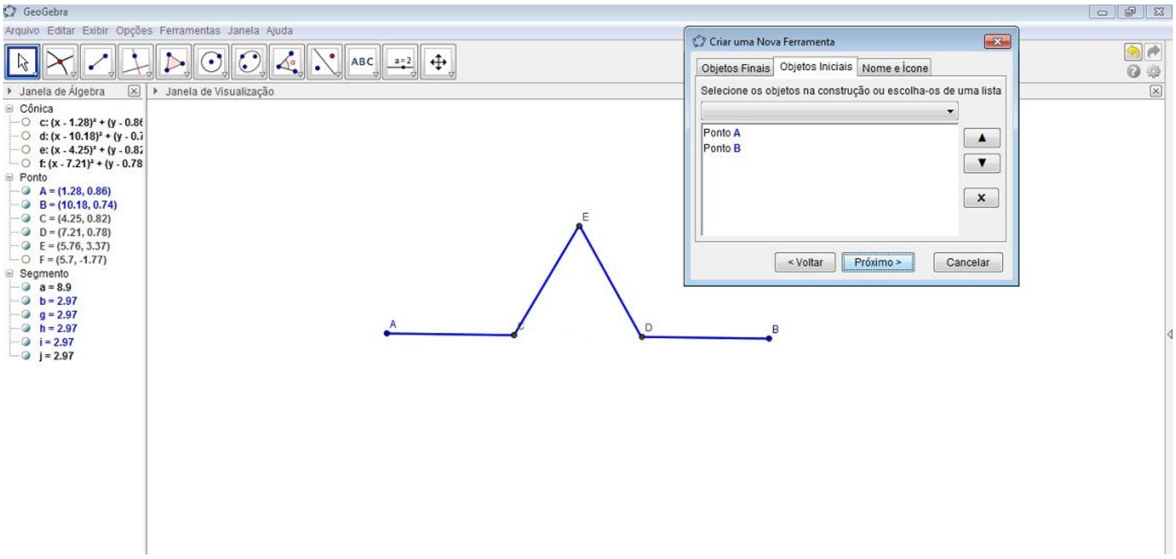
Próximo passo é a criação do macro. No Geogebra clicar em Ferramenta logo em seguida em Criar nova ferramenta.



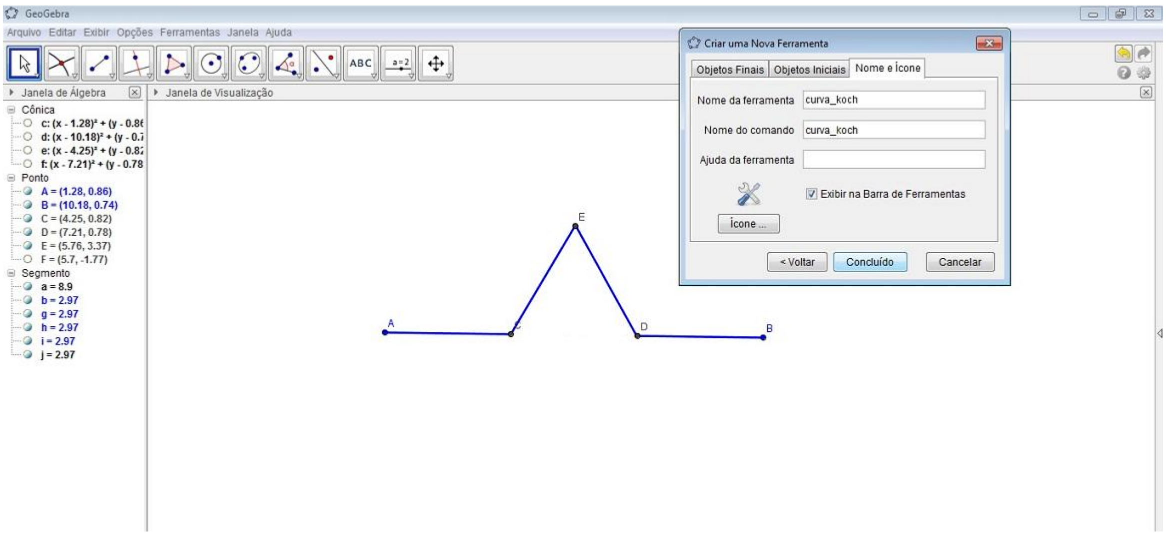
- Abrir-se-á uma nova janela pedindo os objetos de saída.

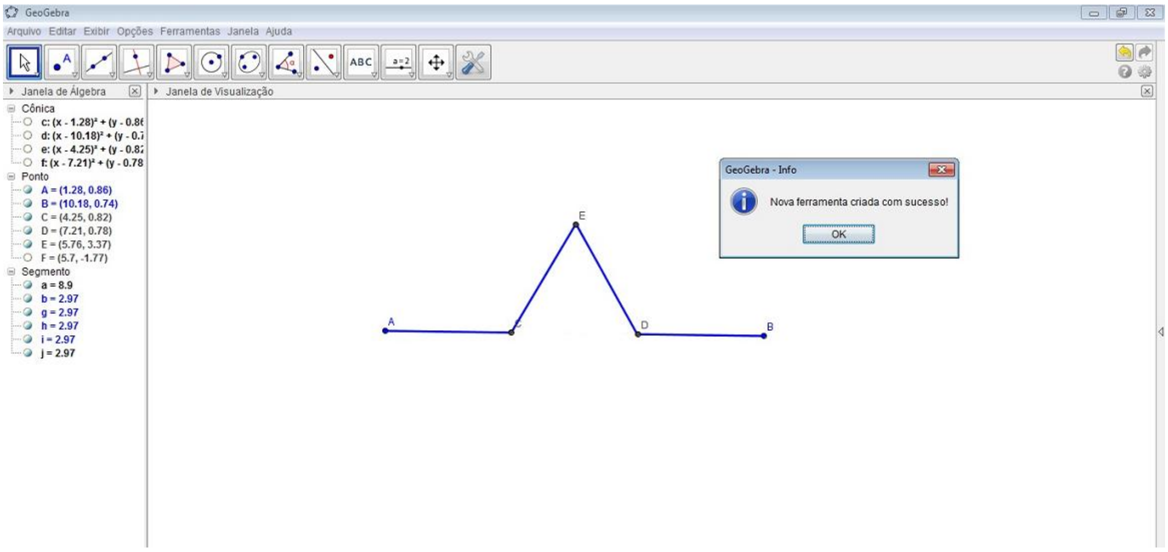


- Próximo passo é entrar com os objetos iniciais.

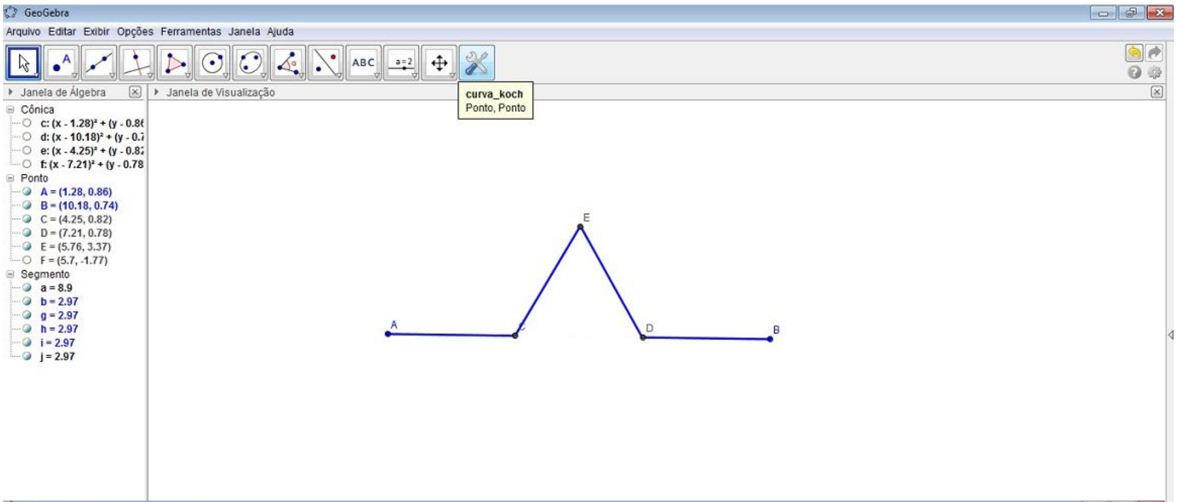


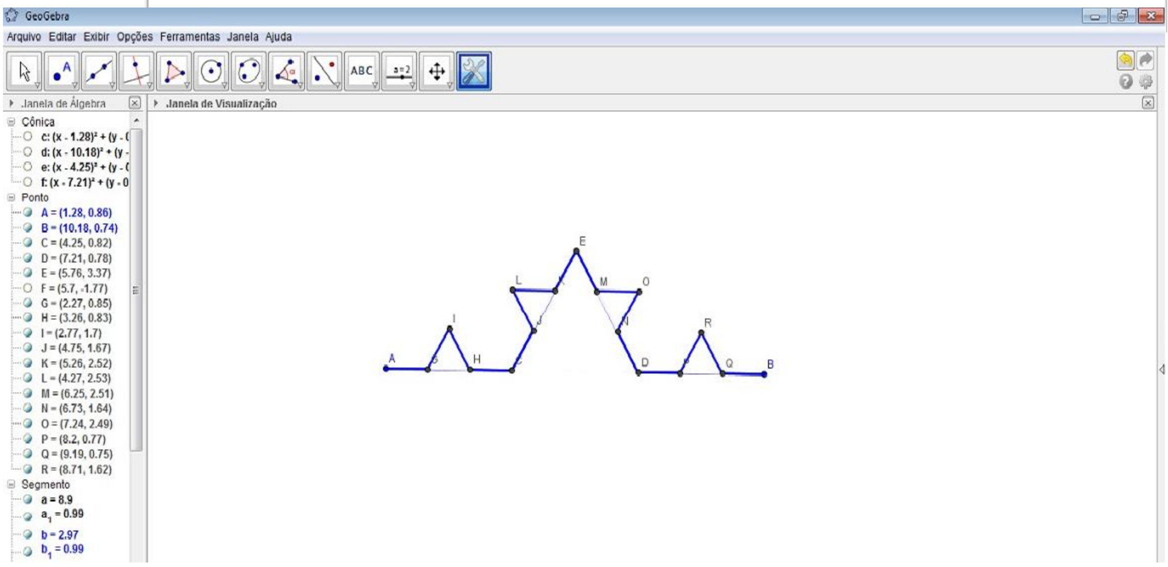
- Último passo será dar o nome para a nova ferramenta.



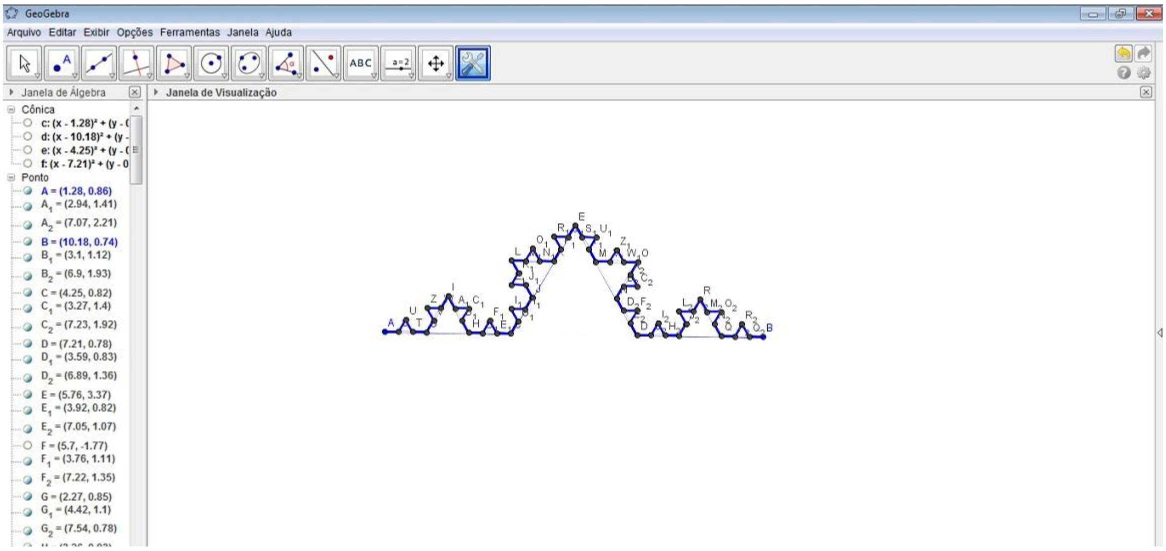


- Aparecerá na parte superior um ícone referente a esse macro. Para utilizar esse macro deve-se primeiro clicar no ícone e após isso clicar nas extremidades do segmento. O resultado será a curva de Koch procurada.





Curva de Koch de nível 2



Curva de Koch de nível 3

Comentários finais:

Ao final dessa atividade, o professor pode propor como lição para casa a construção da mesma tabela, porém agora considerando comprimento inicial da curva de Koch de 27 unidades.

4.2 Floco de neve (de Koch)

Introdução:

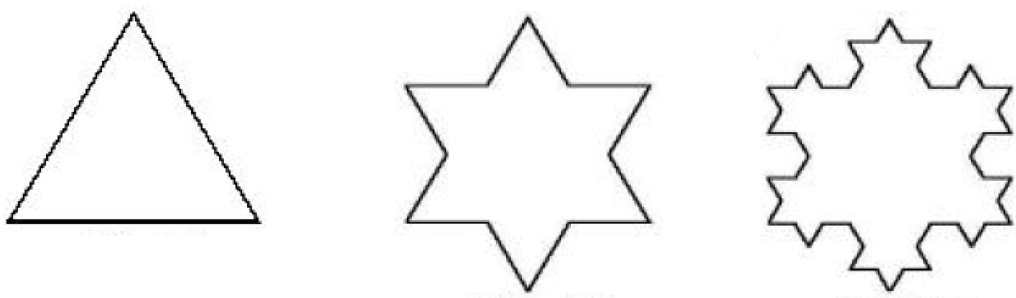
O floco de neve de Koch é uma figura geométrica delimitada por uma área finita e um perímetro infinito. O nome desse fractal vem de sua semelhança com as representações geométricas feitas de um floco de neve. Caso o triângulo eqüilátero inicial seja substituído por outro polígono regular teremos as chamadas Ilhas de Koch. No floco de neve temos uma figura regular fechada de perímetro infinito cercando uma área finita, ou seja, essa área nunca será maior que a área da circunferência circunscrita ao triângulo eqüilátero iniciador.

Conforme vamos construindo esse fractal, as sequências que vão surgindo como, por exemplo, número de segmentos, comprimento de cada lado, comprimento total da curva, área de cada triângulo inserido, número de triângulos inseridos e área total da figura formam progressões geométricas. Propomos duas atividades baseadas nesse fractal, a primeira é em relação a comprimento da curva e a segunda será em relação a área do fractal. Começamos com uma descrição da construção da curva de Koch, em seguida apresentaremos as atividades e por fim a descrição passo a passo de como montar o macro do floco de neve.

Construção:

1-Considerar um triângulo eqüilátero;

2-Em cada lado do triângulo construir a curva de Koch.



Nível 0 (zero) → Nível 1 → Nível 2

Roteiro da ATIVIDADE 2 (floco de neve):

Conteúdo:

Progressão geométrica e fractais.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é reconhecer se uma sequência numérica é uma progressão geométrica e fixar o conceito de PG utilizando a visão geométrica da construção do floco de neve. Outro objetivo é trabalhar reconhecimento de padrões através de sequências numéricas, faremos isso ao generalizar para um nível n qualquer.

Duração:

Duas aulas (100 min.).

Público-alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

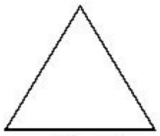
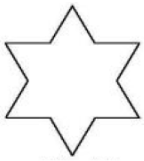
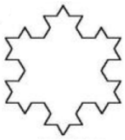
Pré-requisitos:

Progressão geométrica e noção de fractal.

Recursos materiais: caneta, lápis, borracha, régua, compasso e folha contendo a atividade (encontra-se no apêndice deste trabalho).

Problema:

Em relação aos 3 primeiros níveis do floco de neve (nível zero, nível um e nível dois) e considerando o comprimento do lado inicial do triângulo como 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela:

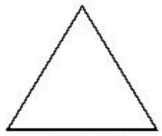
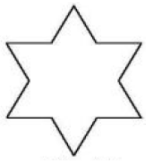
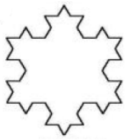
	Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada lado	Comprimento total da curva
	*0*			
	*1*			
	*2*			
...	...	...	...	...
	n			

a) A sequência dada pelos valores da coluna “número de segmentos”, formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique.

b) A sequência dada pelos valores da coluna “comprimento de cada lado”, formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique.

c) A sequência dada pelos valores da coluna “comprimento total da curva”, formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique.

Solução:

	Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada lado	Comprimento total da curva
	*0*	*3.1*	1	3
	*1*	*3.4*	$\frac{1}{3}$	$3.4.\frac{1}{3}$
	*2*	3.4^2	$\frac{1}{3^2}$	$3.4^2\ \frac{1}{3^2}$
...	...	...	...	...
	n	3.4^n	$\frac{1}{3^n}$	$3.4^n\ \frac{1}{3^n}$

a) A sequência ($3.1, 3.4, 3.4^2, ..., 3.4^n, ...$)formada pelos número de segmentos é uma PG de razão 4 e primeiro termo 3.

b) A sequência $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{3^n}, ...\right)$ formada pelos comprimentos de cada lado é uma PG de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo 1.

c) A sequência $\left(3, 3.4.\frac{1}{3}, 3.4^2.\frac{1}{3^2}, ..., 3.4^n.\frac{1}{3^n}, ...\right)$ formada na coluna comprimento total da curva é uma PG de primeiro termo 3 e razão $\frac{4}{3}$.

Roteiro da ATIVIDADE 3 (floco de neve):

Conteúdo:

Progressão geométrica e fractais.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é reconhecer se uma sequência numérica é uma progressão geométrica e fixar o conceito de PG utilizando a visão geométrica da construção do floco de neve. Um outro objetivo é calcular área de triângulos equiláteros em cada um dos níveis do fractal.

Duração:

Duas aulas (100 min.).

Público alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

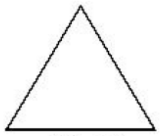
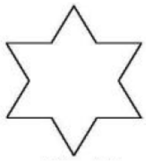
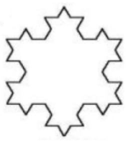
Pré-requisitos:

Progressão geométrica, propriedades de triângulos eqüiláteros e noção de fractal.

Recursos materiais: caneta, lápis, borracha, régua, compasso e a folha contendo a atividade (encontra-se disponível no apêndice deste trabalho).

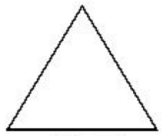
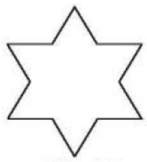
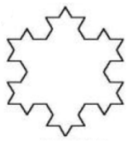
Problema:

Em relação aos 3 primeiros níveis do floco de neve (nível zero, nível um e nível dois) e considerando o comprimento inicial do lado do triângulo como 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela:

	Nível	Área de cada triângulo inserido	Nº de triângulos inseridos	Soma da área total
	*0*			
	*1*			
	*2*			

a) Em seguida calcule a área total da figura até o nível 3.

Solução:

	Nível	Área de cada triângulo inserido	Nº de triângulos inseridos	Soma da área total
	*0*	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	*0*	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{4.3^2}$	*3*	$\frac{\sqrt{3}}{4}+3.\frac{\sqrt{3}}{4.3^2}$
	*2*	$\frac{\sqrt{3}}{4.3^4}$	*3.4*	$\frac{\sqrt{3}}{4}+3.\frac{\sqrt{3}}{4.3^2}+3.4.\frac{\sqrt{3}}{4.3^4}$

a) Generalizando o processo percebemos que para o nível 3 teremos a seguinte soma: $\frac{\sqrt{3}}{4}+3.\frac{\sqrt{3}}{4.3^2}+3.4.\frac{\sqrt{3}}{4.3^4}+3.4^2.\frac{\sqrt{3}}{4.3^6}$

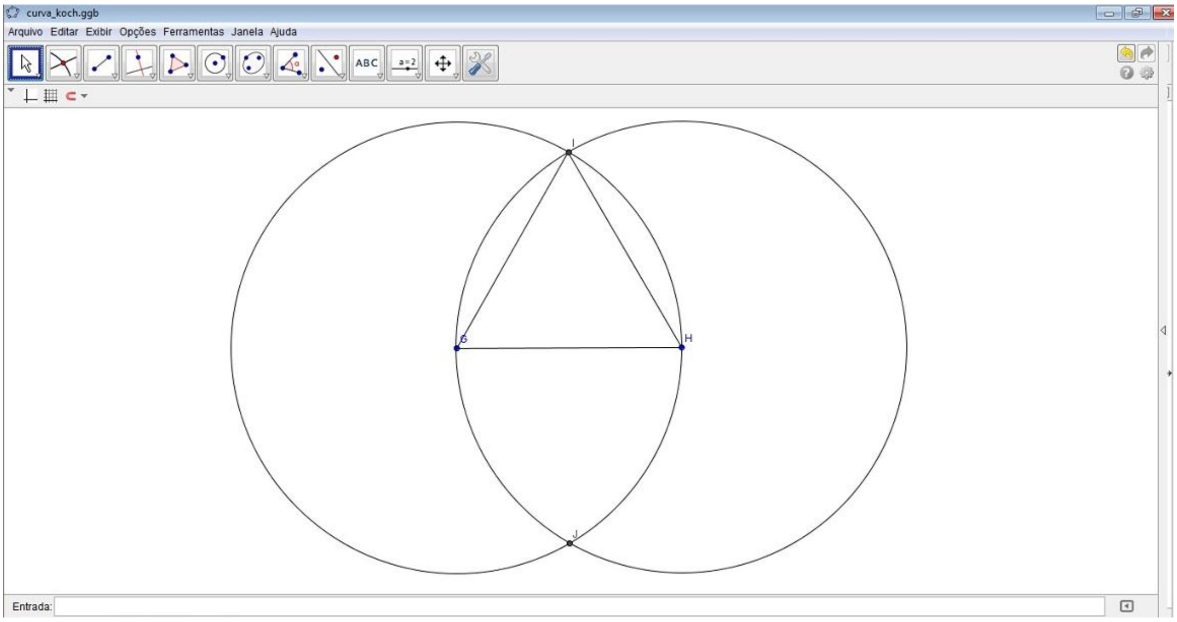
Construção do fractal e do macro utilizando o Geogebra:

A seguir apresentaremos a construção do floco de neve.

Faremos isso, aplicando a macro-construção da curva de Koch nos lados do triângulo eqüilátero. Fazendo isso de forma recursiva obteremos os primeiros níveis do floco de neve.

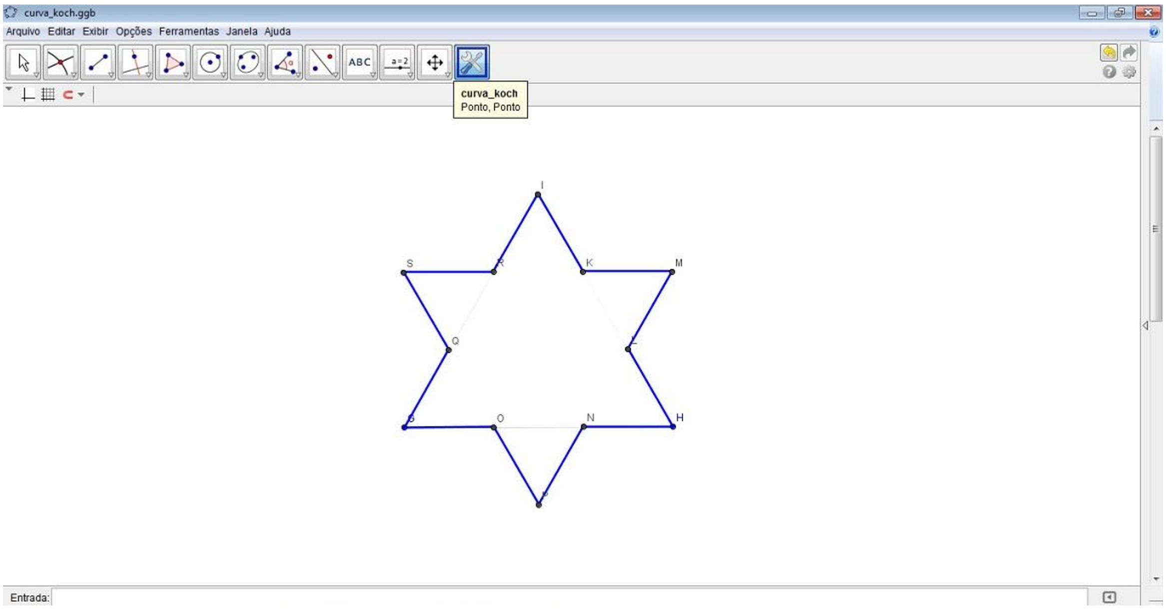
Para construção do triângulo eqüilátero inicial utilizamos técnicas de desenho geométrico no Geogebra.

a) Dado um segmento GH, construímos uma circunferência centrada em G e raio igual ao comprimento do segmento. Repetimos o mesmo procedimento para o ponto H. A intersecção das duas circunferências nos dá o ponto I que será o terceiro vértice do triângulo inicial.



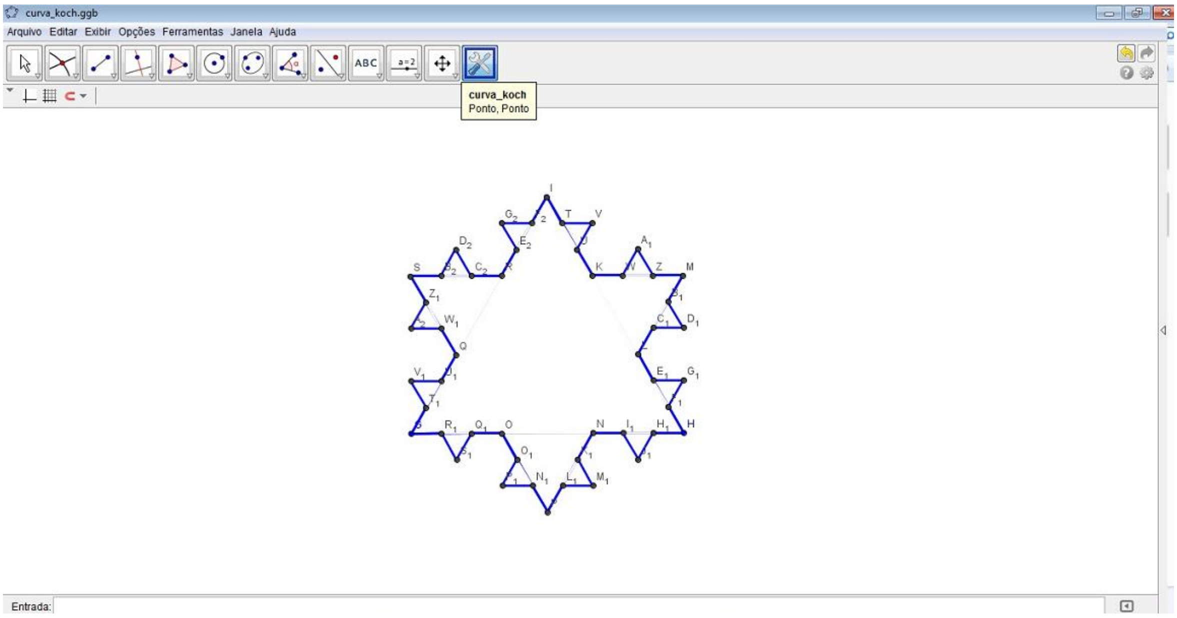
Floco de neve – nível 0 (zero)

b) Após escondermos os lugares geométricos auxiliares na construção e aplicarmos o macro da curva de Koch nos lados do triângulo obteremos o seguinte resultado:



Floco de neve – nível 1

c) Aplicando novamente o macro da curva de Koch em cada um dos segmentos do floco de neve (nível 1), obteremos o nível 2 ilustrado pela seguinte figura:



Floco de neve – nível 2

Comentários finais:

Ao final dessa atividade, o professor pode propor como lição para casa a construção da mesma tabela, até o nível 2, porém agora considerando comprimento inicial do triângulo equilátero como sendo 9 unidades.

4.3 Triângulo de Sierpinski e aplicações em PG

Introdução:

Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polonês, apresentou em 1916 a curva de Sierpinski ou Triângulo de Sierpinski. Existem diferentes processos para a construção do triângulo de Sierpinski, o mais comum, e o que nos interessa, é a construção por remoção de triângulos, utilizando um triângulo equilátero como figura inicial. O motivo de sua utilização dá-se pela conveniência e por questões estéticas. Este fato não impede que o mesmo seja construído utilizando qualquer outro tipo de triângulo. Conforme vamos construindo esse fractal vão surgindo várias sequências relacionadas a número de triângulos, comprimentos e áreas, que formam progressões geométricas. Propomos duas atividades, uma baseada no comprimento da curva e outra relativa a área do fractal, com o objetivo de fixar o conceito de progressão geométrica. Começamos com uma descrição da construção do triângulo de Sierpinski, em seguida apresentaremos as atividades e por fim a roteiro passo a passo de como montar o macro do fractal no Geogebra.

Construção:

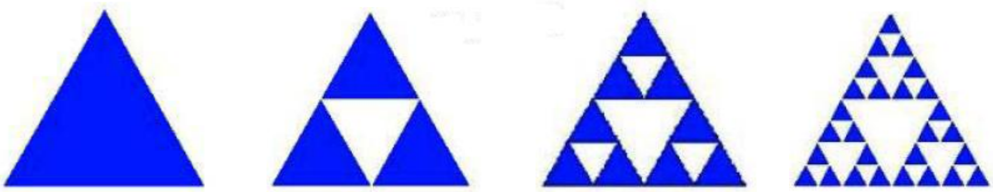
1-Considerar inicialmente um triângulo eqüilátero;

2-Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos eqüiláteros;

3-Remover o triângulo central;

4-Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;

5-repetir o passo 4 sucessivamente.



Nível 1 → Nível 2 → Nível 3 → Nível 4

Roteiro da ATIVIDADE 4 (Triângulo de Sierpinski):

Conteúdo:

Fractais e progressão geométrica.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é reconhecer se uma sequência numérica é uma progressão geométrica e fixar o conceito de PG utilizando a visão geométrica da construção do triângulo de Sierpinski. Outro objetivo é trabalhar reconhecimento de padrões através de sequências numéricas, faremos isso ao generalizar para um nível n qualquer.

Duração:

Duas aulas (100 min.).

Público-alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

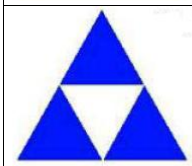
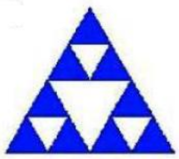
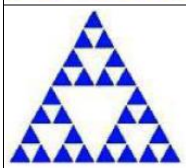
Pré-requisitos:

Progressão geométrica. Noção de fractal.

Recursos materiais: caneta, lápis, borracha, régua, compasso e folha contendo a atividade (está disponível no apêndice deste trabalho).

Problema:

Considerando inicialmente um triângulo eqüilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do "Triângulo de Sierpinski".

	Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	*0*				
	*1*				
	*2*				
	*3*				
...	...	...	...	...	...
	n				

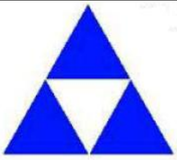
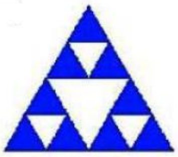
a) A sequência dada pelos dos valores da coluna "número de triângulos" formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

b) A sequência dada pelos dos valores da coluna "comprimento do lado de cada triângulo" formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

c) A sequência dada pelos dos valores da coluna "perímetro de cada triângulo" formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

d) A sequência dada pelos dos valores da coluna "perímetro total" formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

Soluções:

	Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	*0*	*1*	*1*	*3*	*1.3*
	*1*	*3*	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$3.\frac{3}{2}$
	*2*	3^2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3}{2^2}$	$3^2.\frac{3}{2^2}$
	*3*	3^3	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$3^3.\frac{3}{2^3}$

a) Observando a sequência $(1, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^n, ...)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo *1* e razão *3*.

b) Observando a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...\right)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{2}$.

c) Observando a sequência $\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{3}{2^3}, ..., \frac{3}{2^n}, ...\right)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo 3 e razão $\frac{1}{2}$.

d) Observando a sequência $\left(1.3, 3.\frac{3}{2}, 3^2.\frac{3}{2^2}, 3^3.\frac{3}{2^3}, ..., 3^n.\frac{3}{2^n}, ...\right)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo 3 e razão $\frac{3}{2}$.

Roteiro da ATIVIDADE 5 (Triângulo de Sierpinski):

Conteúdo:

Fractais e progressão geométrica.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é reconhecer se uma sequência numérica é uma progressão geométrica e fixar o conceito de PG utilizando a visão geométrica da construção do triângulo de Sierpinski. Outro objetivo é calcular área de triângulos equiláteros e trabalhar reconhecimento de padrões através de sequências numéricas, faremos isso ao generalizar para um nível n qualquer.

Duração:

Duas aulas (100 min.).

Público-alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

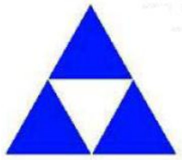
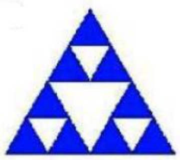
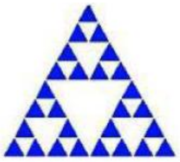
Pré-requisitos:

Propriedades de triângulos eqüiláteros, progressão geométrica e noção de fractal.

Recursos materiais: caneta, lápis, borracha, régua, compasso e folha contendo a atividade (está disponível no apêndice).

Problema:

Considerando inicialmente um triângulo eqüilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do “Triângulo de Sierpinski”.

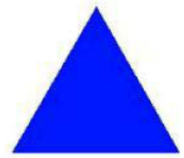
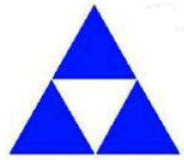
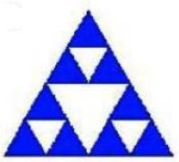
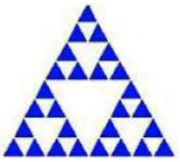
	Nível	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
	0			
	1			
	2			
	3			
...	...	...	...	...
	n			

a) A sequência dada pelos dos valores da coluna “número de triângulos” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

b) A sequência dada pelos dos valores da coluna “área de cada triângulo” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

c) A sequência dada pelos dos valores da coluna “área total” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique sua resposta.

Soluções:

	Nível	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
	*0*	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{4} = A_0$	$\frac{\sqrt{3}}{4} = A_0$
	*1*	*3*	$\frac{A_0}{4}$	$3.\frac{A_0}{4}$
	*2*	3^2	$\frac{A_0}{4^2}$	$3^2.\frac{A_0}{4^2}$
	*3*	3^3	$\frac{A_0}{4^3}$	$3^3.\frac{A_0}{4^3}$

a) Observando a sequência $(1, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^n, ...)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo 1 e razão 3.

b) Observando a sequência $\left(A_0, \frac{A_0}{4}, \frac{A_0}{4^2}, \frac{A_0}{4^3}, \ldots, \frac{A_0}{4^n}, \ldots\right)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo A_0 e razão $\frac{1}{4}$.

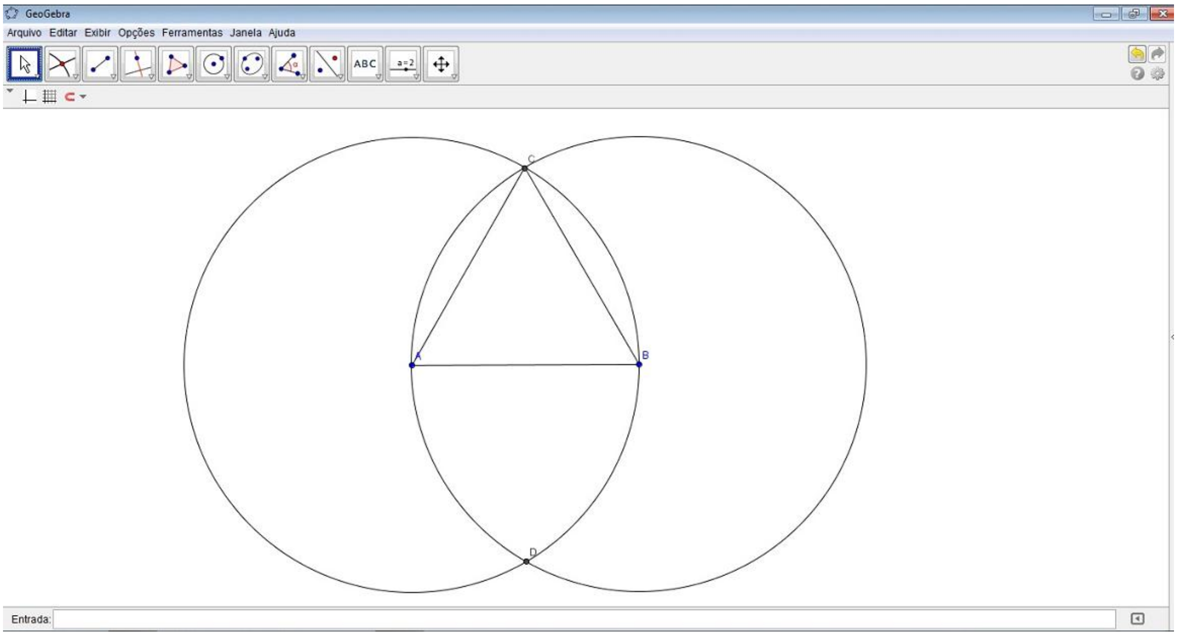
c) Observando a sequência $\left(A_0, 3.\frac{A_0}{4}, 3^2.\frac{A_0}{4^2}, 3^3.\frac{A_0}{4^3}, \ldots, 3^n.\frac{A_0}{4^n}, \ldots\right)$ constatamos se tratar de uma PG de primeiro termo A_0 e razão $\frac{3}{4}$.

Construção do fractal e do macro utilizando o Geogebra:

A seguir apresentaremos um roteiro para a construção do Triângulo de Sierpinski.

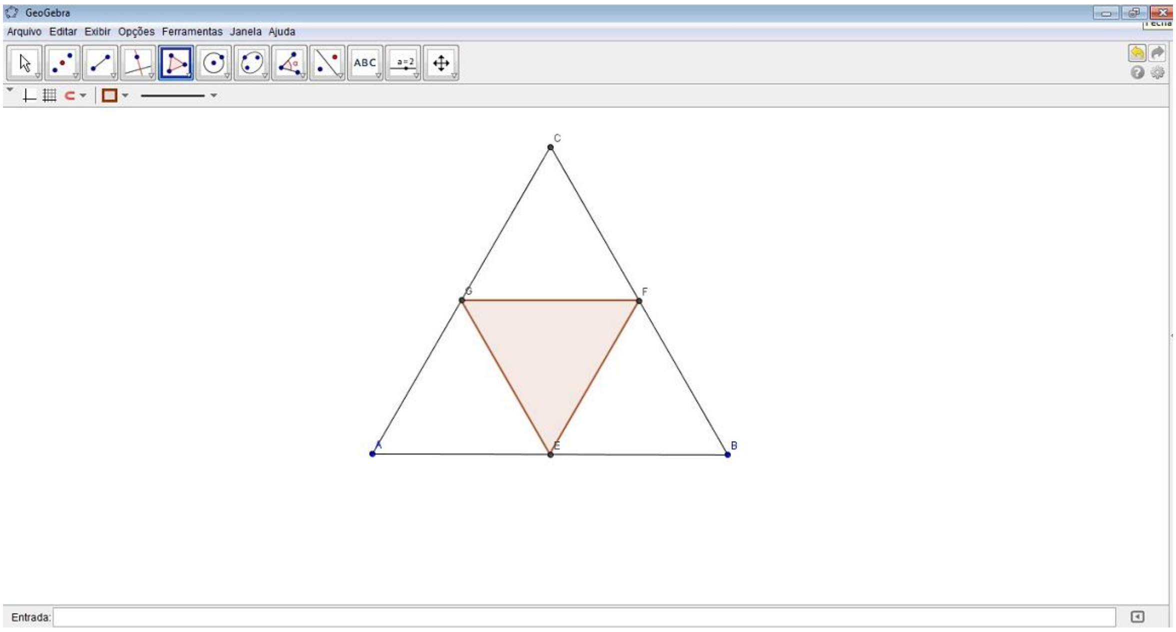
a) Construir um segmento AB;

b) Construímos duas circunferências, uma centrada em A e com raio igual ao comprimento do segmento AB e outra centrada em B e com raio igual ao comprimento do segmento AB. A intersecção entre as duas circunferências nos dá o ponto C que será o terceiro vértice do triângulo procurado;



Triângulo de Sierpinski – nível 0 (zero)

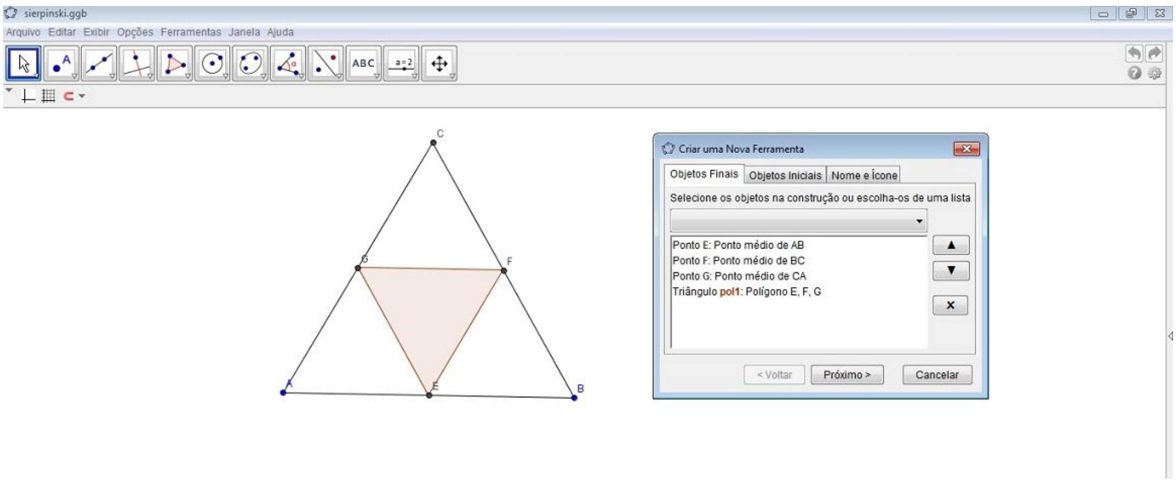
c) Em seguida aplicamos a ferramenta para ponto médio de segmento, já embutida no Geogebra e construímos o triângulo interior ao triângulo inicial.



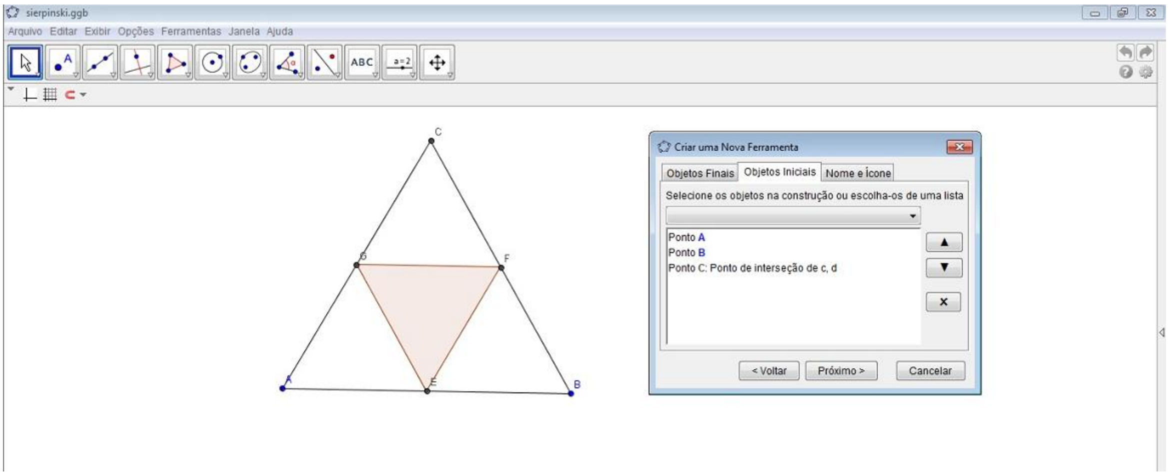
Triângulo de Sierpinski – nível 1

Após isso criamos a macro-construção;

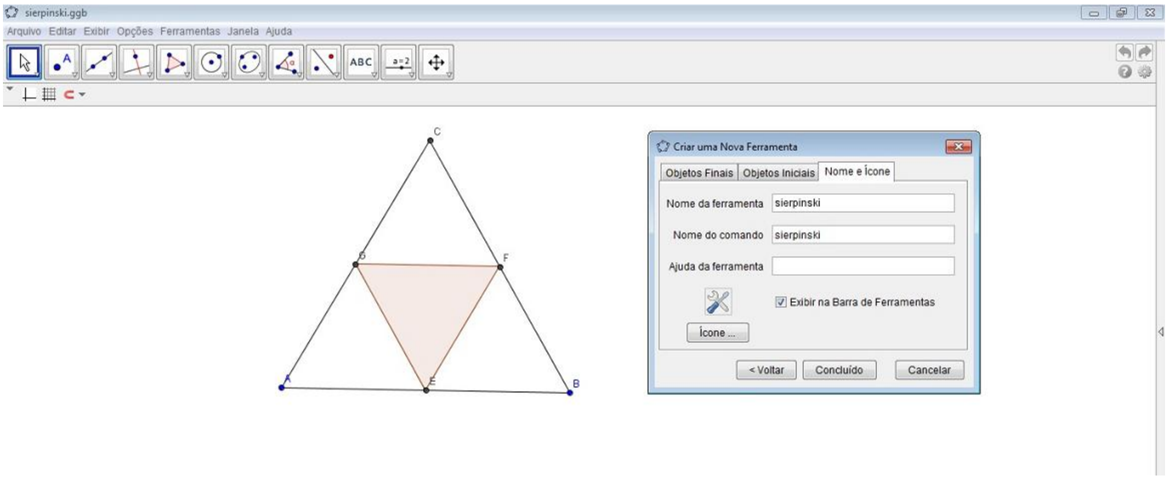
- Clicar em Ferramenta → Criar Nova Ferramenta;
- Inserir objetos finais: os pontos médio e o triângulo;



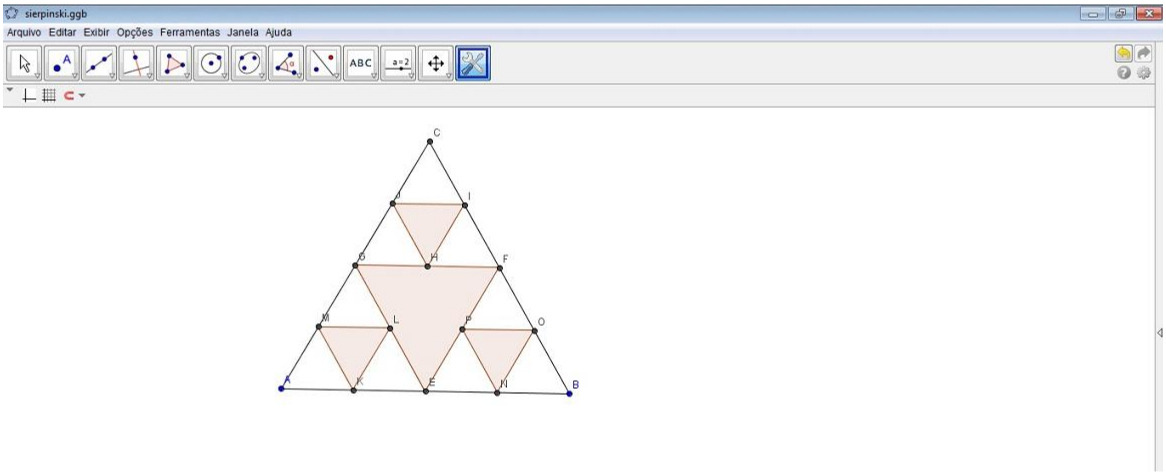
- Em seguida inserir objetos iniciais: os três vértices do triângulo;



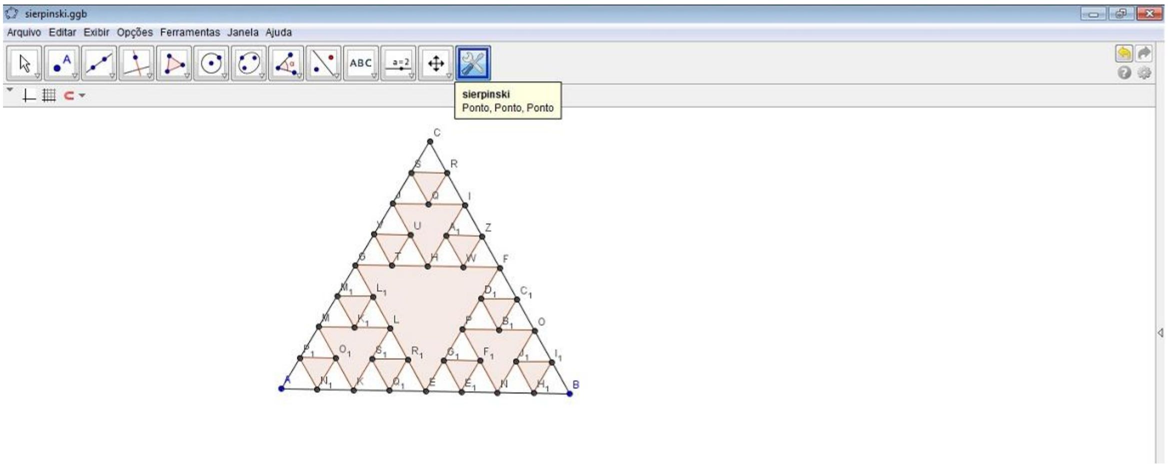
- Por último dar o nome da macro-construção, no caso escolhemos “sierpinski”;



- Ao clicar na nova ferramenta é só selecionar os vértices do triângulo escolhido e a macro-construção constrói o próximo nível do fractal;



Triângulo de Sierpinski – nível 2



Triângulo de Sierpinski – nível 3

Comentários finais:

Ao final dessa atividade, o professor pode propor como lição para casa, a construção da mesma tabela, até o nível 3, porém agora considerando comprimento inicial do triângulo equilátero como sendo 8 unidades (2^3=8).

4.4 Árvores bifurcadas e aplicações em PA e PG

Introdução:

Veremos as árvores bifurcadas com ângulo de bifurcação de 120º e escala de redução $\frac{1}{2}$, por ser bastante didática e melhor servir ao nosso propósito. Vale salientar também o caráter estético dessa curva, como poderemos observar mais adiante. As árvores bifurcadas proporcionam todas as aplicações atribuídas anteriormente às outras curvas. Na construção desse fractal notamos, nível a nível, o surgimento de várias sequências relacionando número de segmentos e comprimento. Essas sequências são típicos exemplos de progressões geométricas. Propomos uma atividade, baseada no número de segmentos e comprimento dos segmentos, com o objetivo de fixar o conceito de progressão geométrica. Começamos com uma descrição da construção da árvore bifurcada, em seguida apresentaremos a atividade e por fim a descrição passo a passo de como montar o macro do fractal no Geogebra

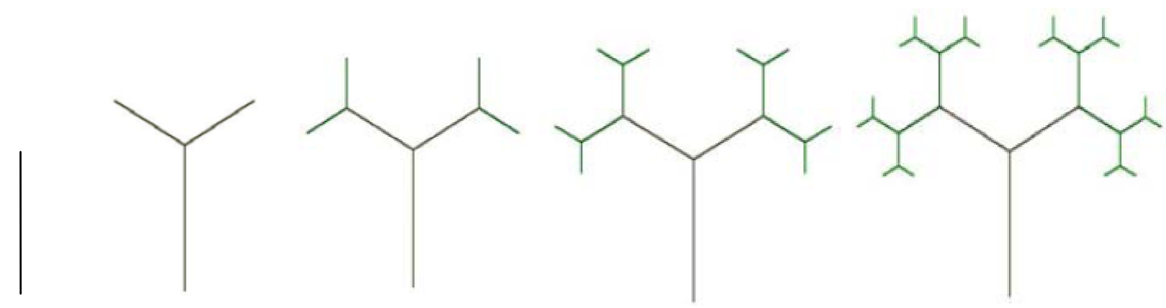
Construção:

1-Iniciamos a curva com um segmento vertical de tamanho L;

2-Aplicamos sobre este segmento inicial um fator de redução $\frac{1}{2}$;

3-Inserimos dois segmentos de forma bifurcada junto à extremidade superior do segmento inicial, com ângulo de bifurcação de 120º e com o tamanho obtido na redução do nível anterior;

4-Repetimos, indefinidamente, os passos 2 e 3 em cada um dos novos segmentos.



Nível 0 → Nível 1 → Níve2 → Nível 3 → Nível 4

Roteiro da ATIVIDADE 6 (árvore bifurcada):

Conteúdo:

Fractais, progressão aritmética e geométrica.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é reconhecer se uma sequência numérica é uma progressão aritmética ou geométrica e fixar o conceito de PA e PG utilizando a visão geométrica da construção da árvore bifurcada.

Duração:

Uma aula (50 min.).

Público-alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

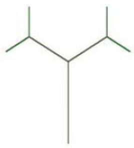
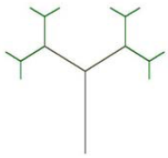
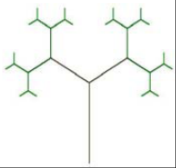
Pré-requisitos:

Progressão aritmética e geométrica. Noção de fractal.

Recursos materiais: caneta, lápis, borracha, régua, compasso e a folha contendo a atividade (está disponível no apêndice).

Problema:

Partindo de um segmento de comprimento 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente a uma "árvore bifurcada" onde o fator de redução é $\frac{1}{2}$ e ângulo de bifurcação de 120º.

	Nível	Nº de novos segmentos	Nº total de segmentos	Comprimento de cada novo segmento	Comprimento total da curva
	0				
	1				
	2				
	3				
	4				

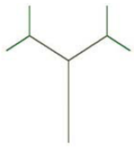
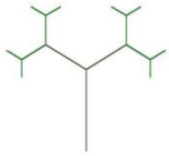
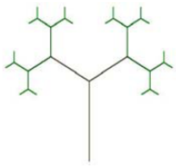
a) A sequência referente ao número de novos segmentos é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

b) A sequência referente ao comprimento de cada novo segmento é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

c) A sequência referente ao comprimento total da curva é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

d) Para um nível muito elevado, por exemplo maior que 1000 (mil), o comprimento de cada novo segmento se aproxima de quanto?

Solução do problema:

	Nível	Nº de novos segmentos	Nº total de segmentos	Comprimento de cada novo segmento	Comprimento total da curva
	0	-	*1*	*1*	*1*
	*1*	*2*	*1+2=3*	$\frac{1}{2}$	*2*
	*2*	$2^2=4$	$1+2+2^2$	$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$	*3*
	*3*	$2^3=8$	$1+2+2^2+2^3$	$\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$	*4*
	*4*	$2^4=16$	$1+2+2^2+2^3+2^4$	$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$	*5*

a) A sequência referente ao número de novos segmentos (2, 4, 8, 16, ...) é uma PG de razão 2 e primeiro termo 2.

b) A sequência referente ao comprimento de cada novo segmento $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16},\ldots\right)$ é uma PG de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{2}$.

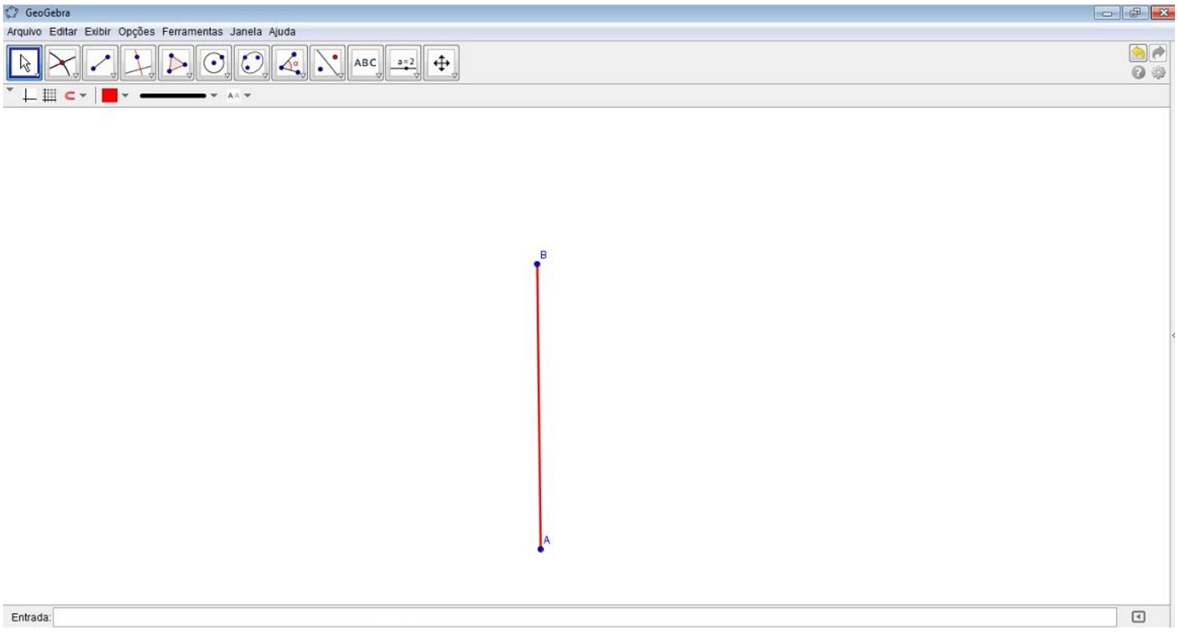
c) A sequência (1, 2, 3, 4, 5, ...) é uma PA de razão 1 e primeiro termo 1.

d) Para um nível elevado, o comprimento de cada novo segmento se aproxima de 0 (zero).

Construção do fractal e do macro utilizando o Geogebra:

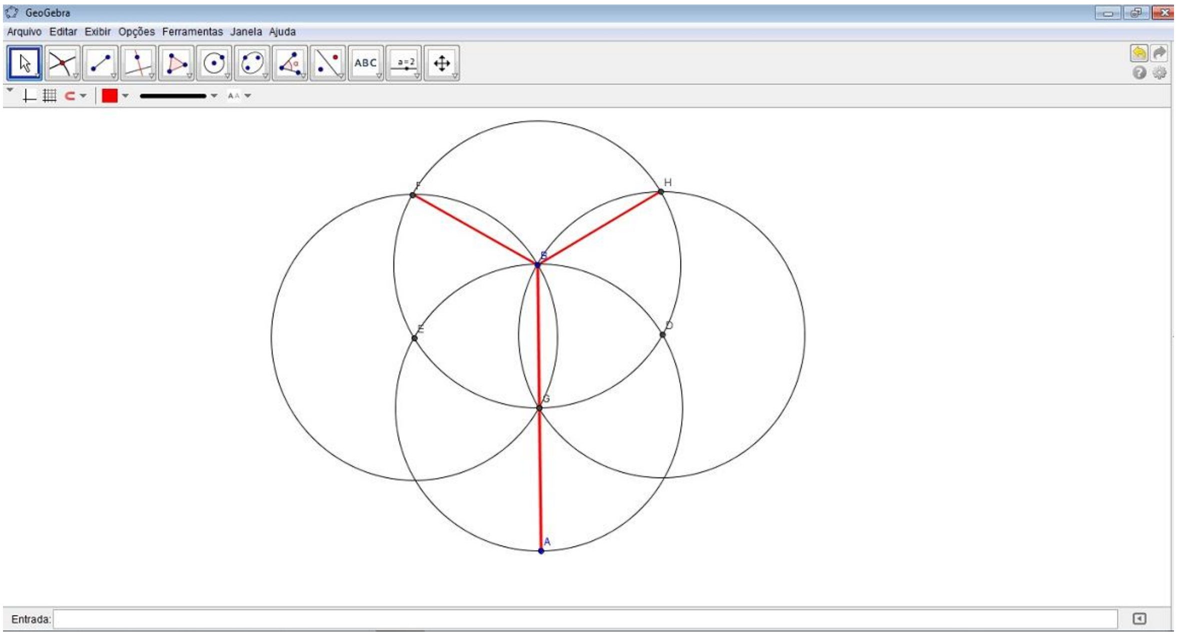
A seguir apresentaremos um roteiro para a construção da árvore bifurcada com escala de redução de $\frac{1}{2}$ e ângulo de bifurcação de 120º.

a) Construir inicialmente um segmento de reta qualquer;



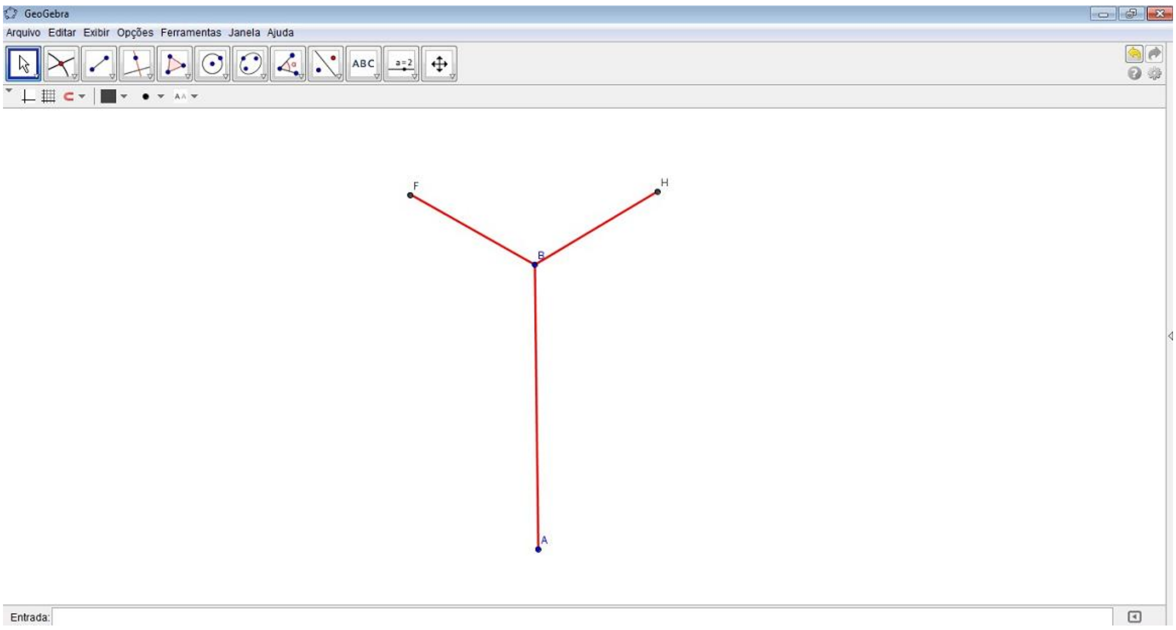
Árvore bifurcada nível 0 (zero)

b) Construímos inicialmente uma circunferência centrada no ponto médio do segmento AB e raio igual à metade do segmento, em seguida outra circunferência centrada em B e mesmo raio da anterior. A intersecção dessas duas circunferências no dá os pontos D e E. Em D centramos outra circunferência com mesmo raio das anteriores, repetimos o procedimento para o ponto E. a intersecção da segunda circunferência com essas duas últimas nos dá os pontos F e H. Os segmentos procurados são BH e BF.



Árvore bifurcada nível 1

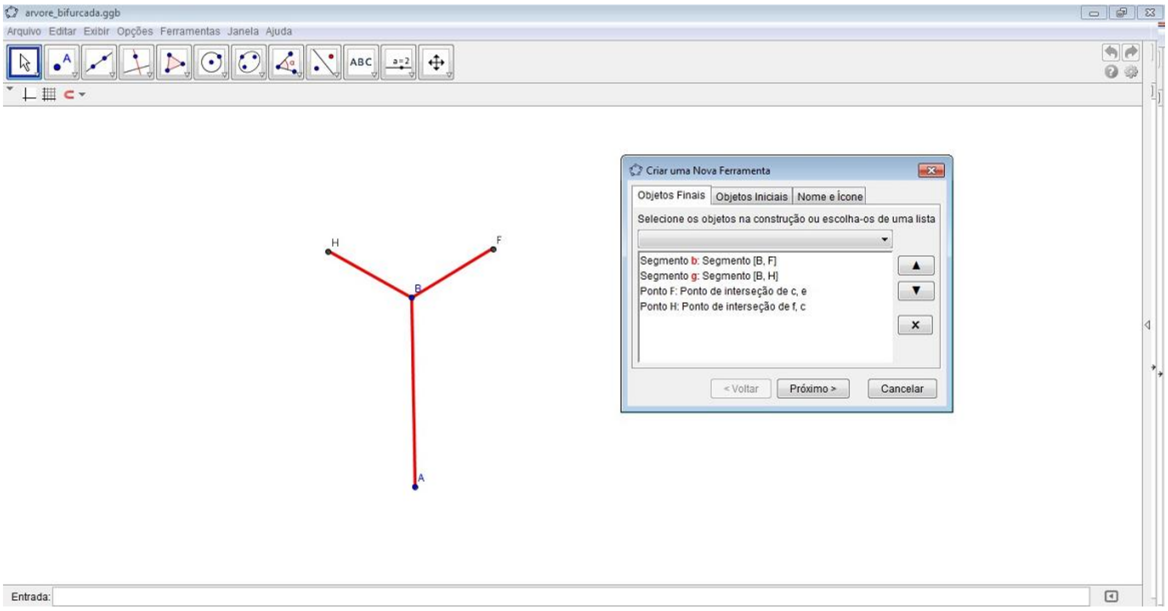
Ocultando os lugares geométricos auxiliares na construção temos a árvore bifurcada no nível 1.



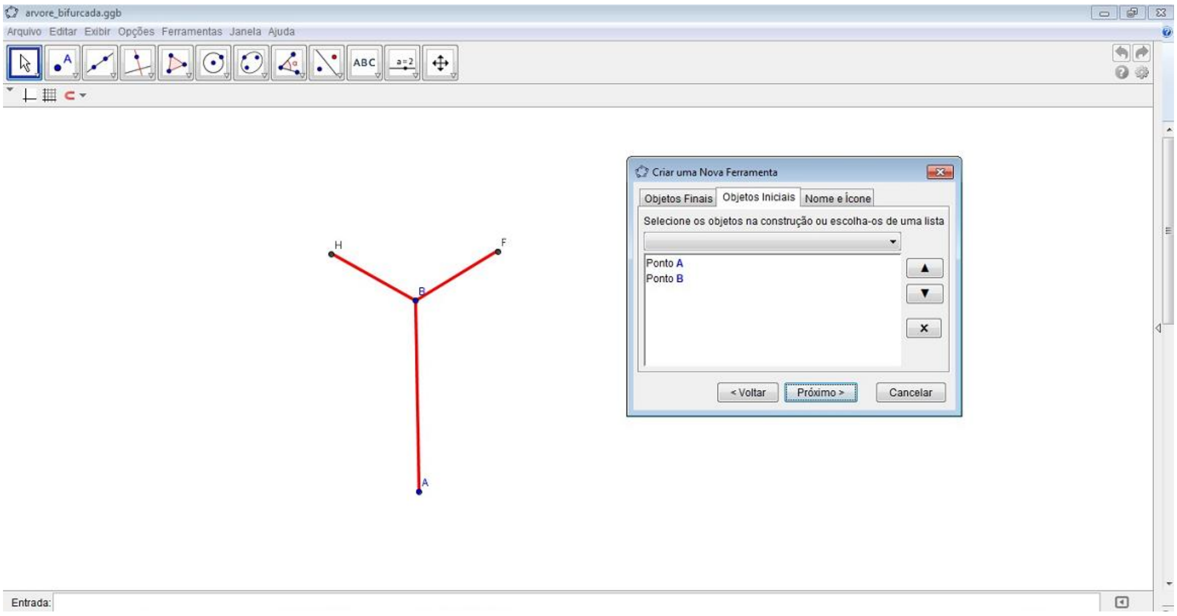
Árvore bifurcada nível 1

Próximo passo é criar a macro-construção clicando em Ferramenta e após isso criar nova ferramenta.

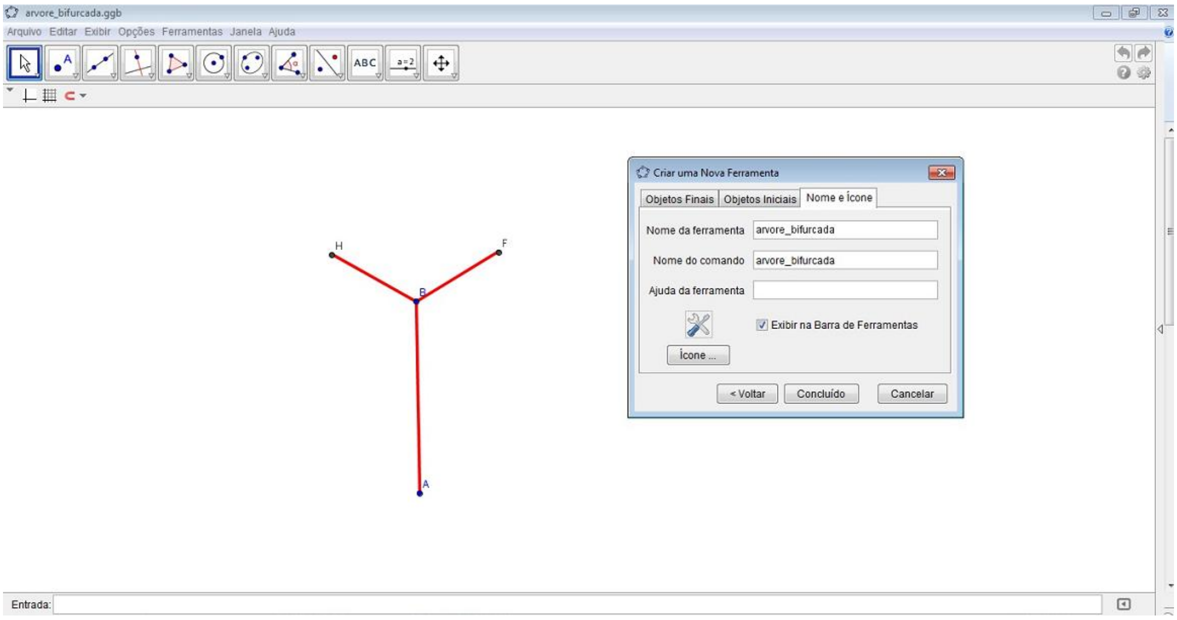
- Clicar em Ferramenta → Criar Nova Ferramenta;
- Inserir objetos finais: os segmentos e os dois pontos das extremidades ;



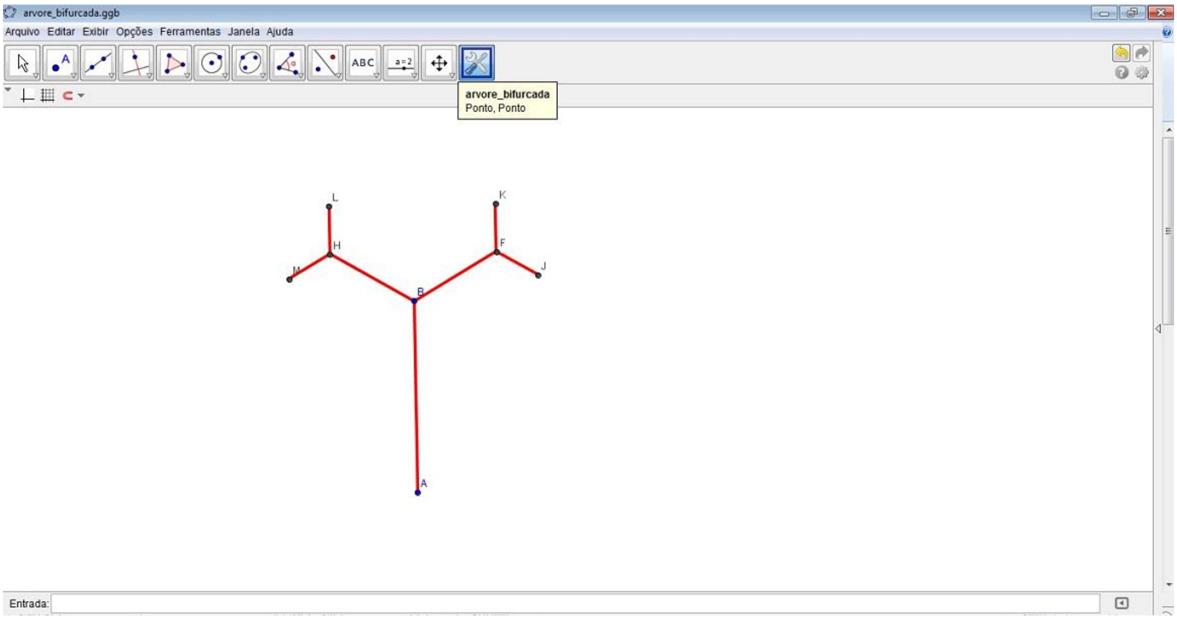
- Em seguida inserir objetos iniciais: as extremidades do segmento;



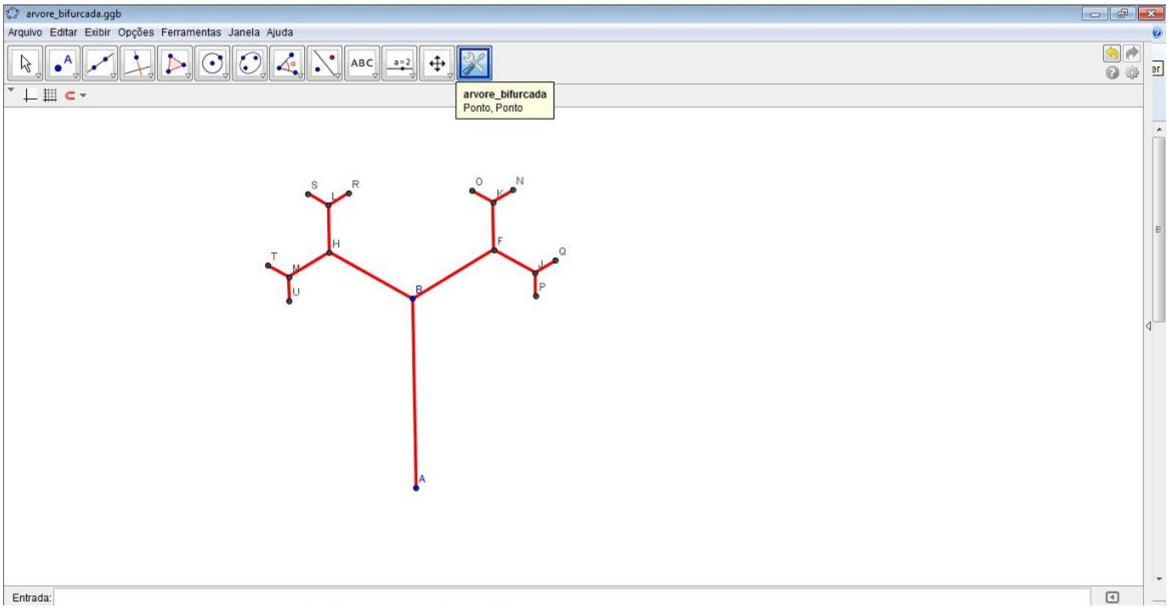
- Próximo passo é nomear a macroconstrução;



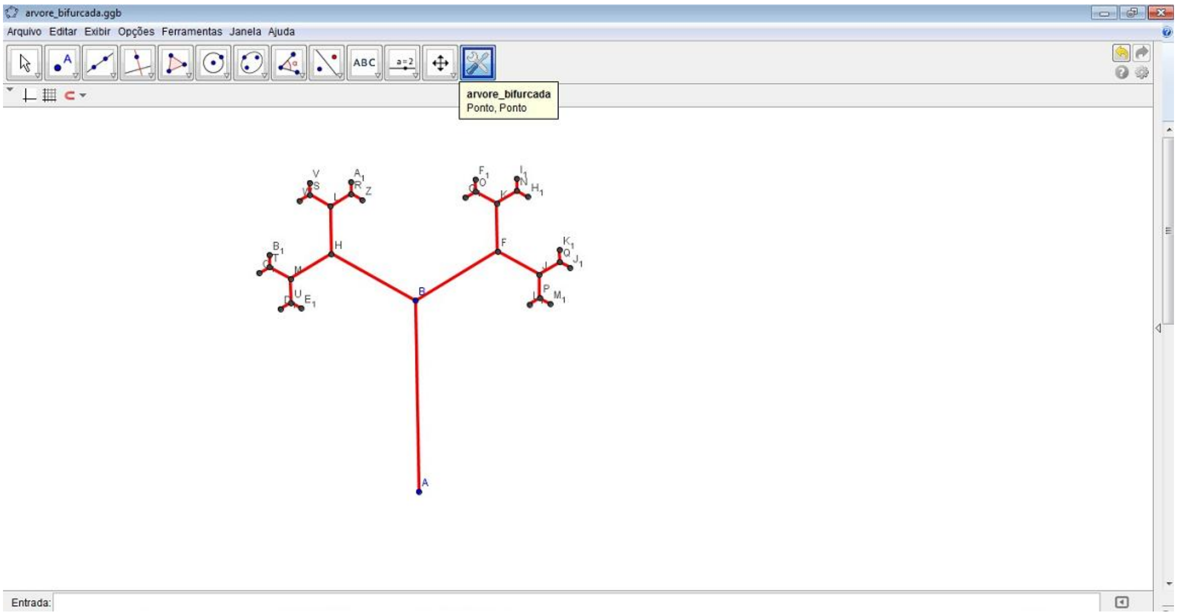
- Utilizando o macro nos segmentos BF e BH, obtemos o próximo nível da árvore;



- Utilizando novamente o macro chegamos ao nível 3 da árvore bifurcada;



- Aplicando novamente o macro, teremos o nível 4 da árvore;



Comentários finais:

Ao final dessa atividade, o professor pode propor como lição para casa, a construção da árvore bifurcada com escala de redução de meio e ângulo de bifurcação de 120º utilizando régua e compasso.

4.5 Fractais com cortes de papel

Essa atividade foi adaptada do texto Descobrindo a magia dos fractais com cortes de papel, publicado na revista Educação e Matemática, da associação de Professores de Matemática de Portugal, nº 55, Nov/dez de 1999.

Iniciaremos de forma simples, apresentando as instruções para a dobradura e seus recortes. A seguir faremos alguns questionamentos relativos à atividade, tais como: área de retângulos, sequências, progressão aritmética e geométrica. Finalizaremos apresentando a solução para as questões propostas.

Roteiro da ATIVIDADE 7 (fractais com cortes de papel)

Conteúdo:

Fractais, frações, área de retângulos e progressões.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é ensinar a ideia intuitiva de fractais e introduzir noções de progressões. E também trabalhar a ideia de convergência e de infinito.

Duração:

Três aulas (150 minutos).

Público-alvo:

Alunos do ensino médio (1º ou 2º ano). Esta atividade pode facilmente ser adaptada para o ensino fundamental.

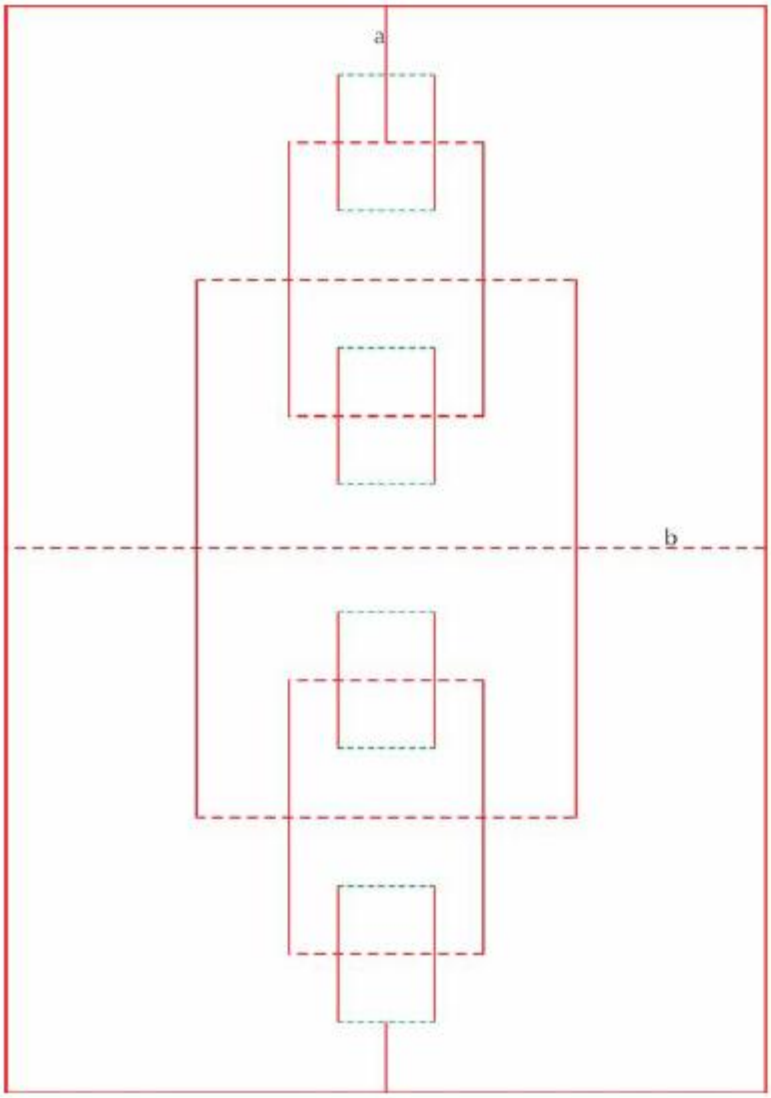
Pré-requisitos:

Frações (ideia intuitiva) e cálculo da área de retângulos.

Recursos materiais: caneta, lápis, borracha, régua, tesoura e a folha contendo a atividade (está disponível no apêndice).

Problema:

A partir do modelo abaixo vamos construir o fractal que usaremos na atividade:



Observação: esta folha deve ser um retângulo de comprimento igual ao dobro da largura. O mesmo deve acontecer com os retângulos no interior da folha.

A seguir apresentaremos as etapas para construção.

1ª Etapa

1-Recorte a moldura da figura;

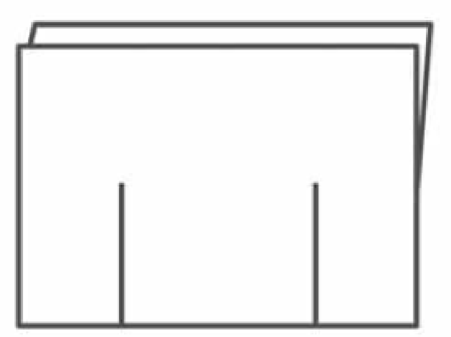
2-Pinte os quatro retângulos menores de uma mesma cor;

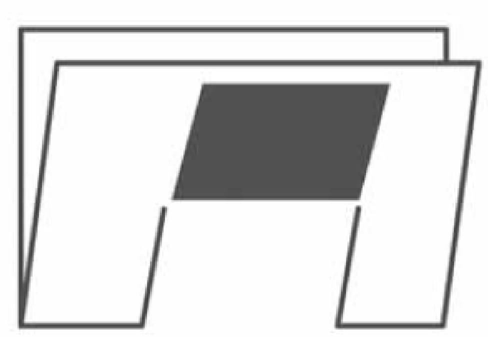
3-Pinte os dois retângulos médios de outra cor (só a parte que fica fora dos retângulos menores, já pintados);

4-Pinte o retângulo central, maior, de outra cor (apenas a parte que fica fora do que já foi pintado).

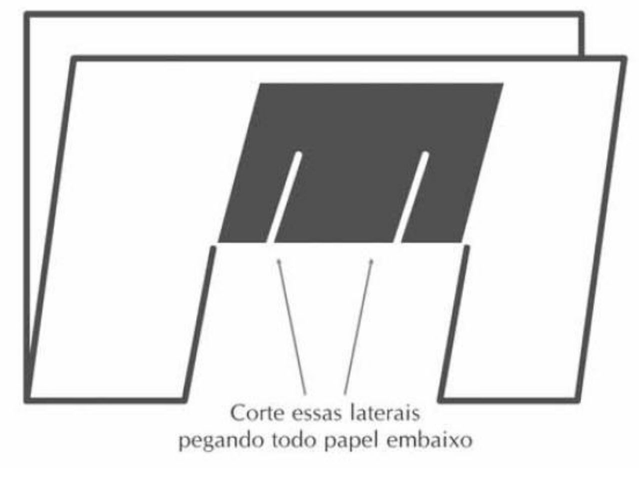
2ª Etapa

Todos os cortes serão feitos apenas na direção vertical da folha (direção da lateral maior). Para fazer os primeiros cortes, dobre a folha e corte nos dois traços que aparecem, conforme ilustração abaixo:

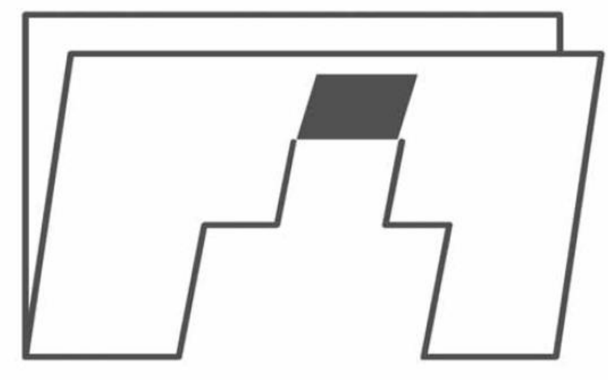


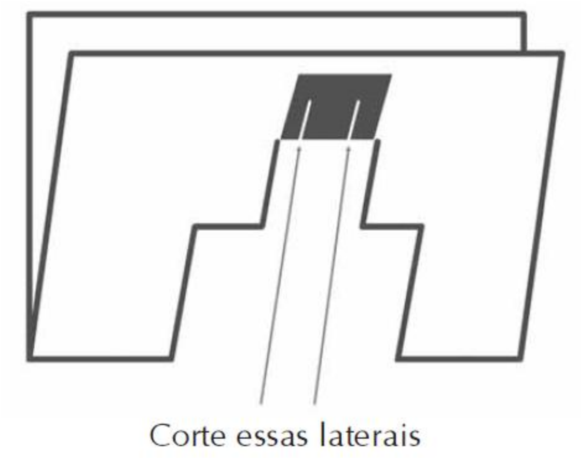


Para fazer os próximos cortes, dobre a folha como acima (a dobra divide ao meio as laterais dos retângulos médios).



Faça o mesmo para os retângulos pequenos: primeiro os que estão no topo (como mostra a figura) dobre a folha dividindo cada um ao meio e corte as laterais. Depois faça o mesmo para os dois retângulos pequenos centrais.



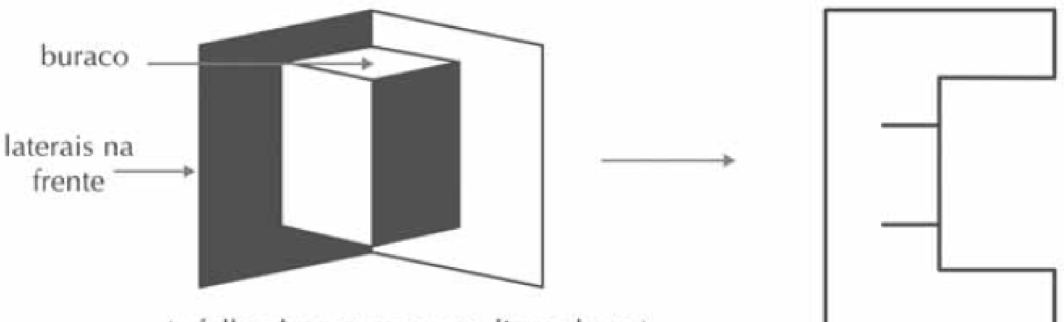


De agora em diante, você deve trabalhar com a folha na posição horizontal.

3ª Etapa

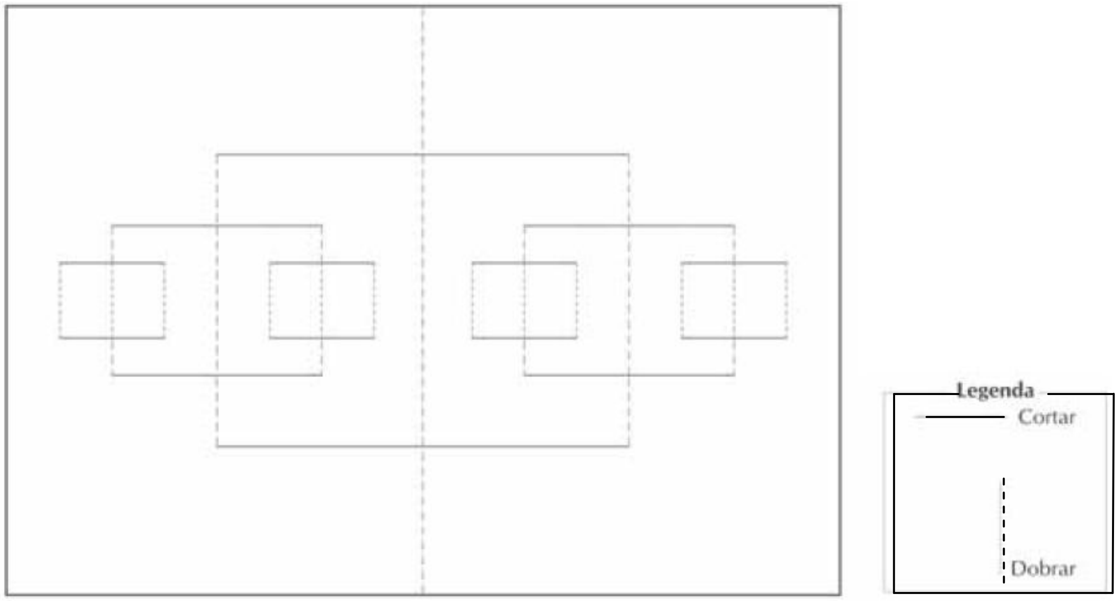
Faça as dobras. Um jeito prático de dobrar é o seguinte:

Vinque a folha no meio, formando aproximadamente um ângulo reto, e puxe o retângulo maior de modo que fique saliente. Feche a folha com o retângulo puxado e vinque bem:

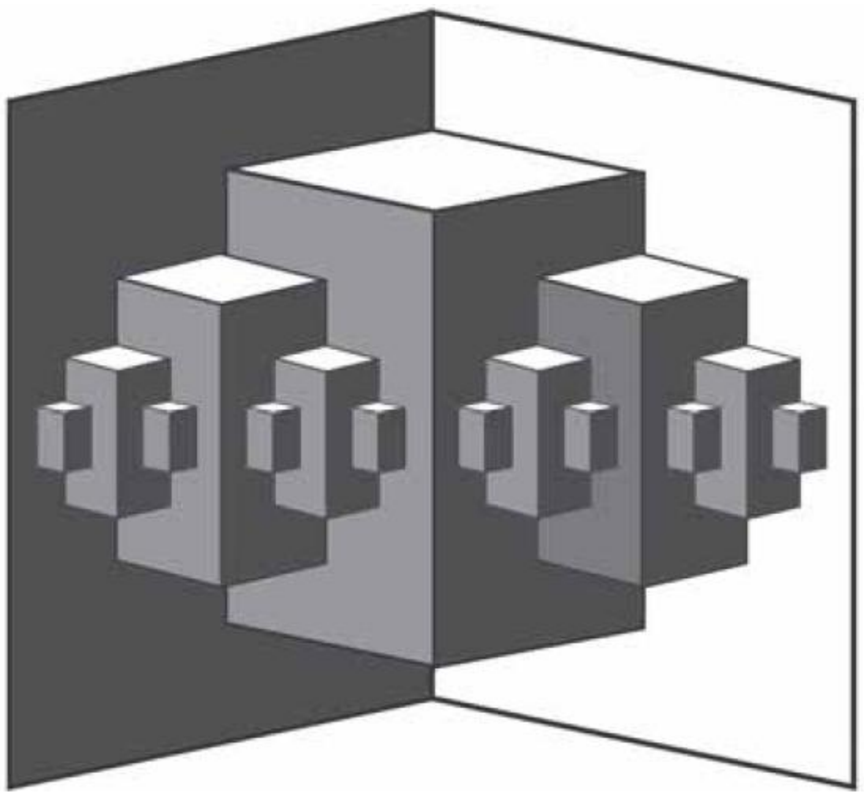


(a folha deve parecer um livro aberto)

Abra um pouco a folha vincada e puxe cada retângulo médio, de modo que fiquem salientes. Feche a folha e vinque bem.



Faça o mesmo procedimento para os quatro retângulos menores: abra um pouco a folha vincada, puxe os retângulos menores e torne a vincar. O seu cartão está pronto. Repare que, ao abri-lo um pouco, os retângulos ficam salientes.Veja o modelo pronto (um pouco mais complicado do que o que você fez) e use sua habilidade manual!



Após construirmos nosso fractal, pense nos seguintes questionamentos:

a) Qual a área inicial (área da folha)?

b) Qual a área do 1º retângulo saliente?

c) Qual a área do 2º retângulo saliente?

d) Qual a área do 3º retângulo saliente?

e) Qual a área do 4º retângulo saliente?

Escreva essa sequência de valores → (___, ___, ___, ___, ___)

f) Essa sequência é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

g) Se for uma progressão escreva sua razão.

h) Calcule a soma das áreas dos retângulos salientes?

Solução do problema:

No anexo encontra-se um modelo medindo 12x24 cm. O cálculo será baseado nessa folha modelo.

a) 288 cm^2.

b) 72 cm^2.

c) 18 cm^2.

d) 4,5 cm^2.

e) 1,125 cm^2.

Sequência → (288; 72; 18; 4,5; 1,125)

f) Essa sequência é uma PG de razão $\frac{1}{4}$ e primeiro termo 288.

g) Razão igual a $\frac{1}{4}$.

h) 72+18+4,5+1,125+... =?

Se trata da soma dos termos de uma PG infinita, o primeiro termo é 72 e razão $\frac{1}{4}$, aplicando a fórmula de soma, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \rightarrow S = \frac{72}{1-\frac{1}{4}} = \frac{72}{\frac{3}{4}} = 96$$

Comentários finais:

Para melhorar o efeito, você pode fazer uma capa: use uma folha de papel do mesmo tamanho que a folha inicial (será melhor se for cartolina). Cole-a por fora, como se fosse capa. Cuidado: cole nela apenas as partes planas do seu trabalho (não as salientes).

Esta atividade pode facilmente ser aplicada nas séries finais do ensino fundamental, de preferência 8º ou 9º ano. É ótima para introduzir a ideia de fractal e progressões. E também para trabalhar a ideia de convergência e infinito.

4.6 As séries infinitas

Essa atividade foi adaptada do texto "séries infinitas", publicado na Revista do Professor de Matemática – RPM, da Sociedade Brasileira de Matemática, nº 30.

Introdução:

As séries infinitas são conhecidas desde a antiguidade, a primeira a ocorrer na História da Matemática é uma série geométrica de razão 1/4, que aparece no cálculo da área da parábola feito por Arquimedes. Depois disso as séries infinitas só voltaram a aparecer na Matemática cerca de 1500 anos mais tarde, no século XIV. A ideia de série infinita aparece quando imaginamos a operação de somar parcelas sucessivamente sem que essa operação termine após um número finito de parcelas somadas. Apresentaremos uma atividade, para o cálculo de uma série, que será tratada de forma geométrica e algebricamente.

Roteiro da ATIVIDADE 8 – Séries infinitas

Conteúdo:

Séries infinitas e progressão geométrica.

Objetivos:

O objetivo dessa atividade é apresentar de forma simples a soma dos termos de uma PG de forma algébrica e geométrica. Outro objetivo é trabalhar a ideia de convergência e infinito.

Pré-requisitos:

Progressão geométrica.

Público alvo:

Alunos do 1º ou 2º ano do ensino médio.

Pré-requisitos:

Progressão geométrica.

Duração:

Uma aula (50 minutos).

Recursos materiais:

Cartolina e tesoura.

Problema:

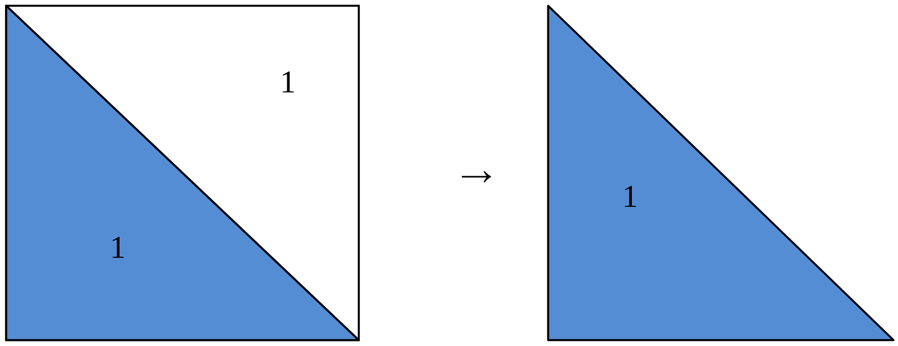
Calcular geometricamente a seguinte soma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

Instruções para solução geométrica:

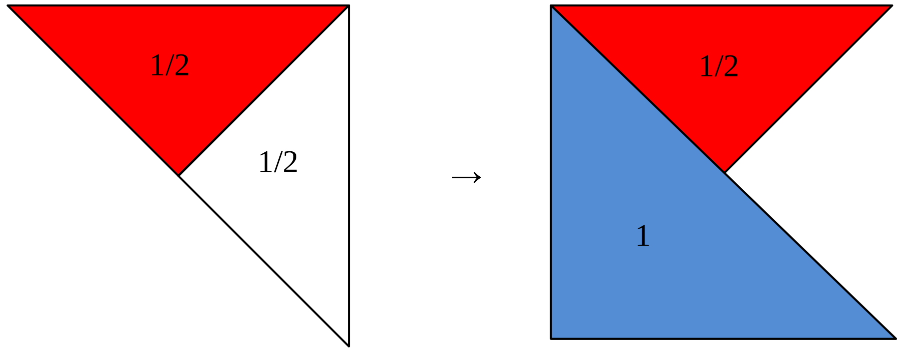
Recorte um quadrado de 30 cm de lado utilizando cartolina.

Assuma a partir daqui que a área do quadrado seja 2 (duas unidades).

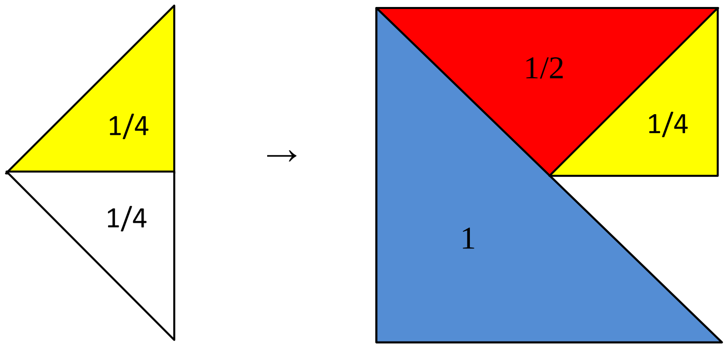
Dividimos esse quadrado ao meio através de sua diagonal, excluindo a parte de cima.



Divida o triângulo excluído ao meio e encaixe uma metade sobre o triângulo de área 1.



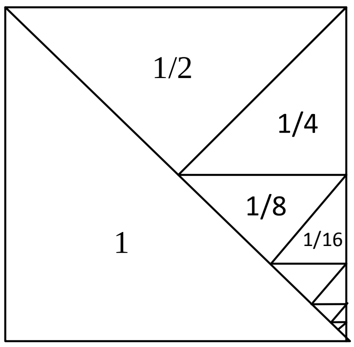
Divida este último triângulo excluído ao meio e encaixe na figura restante.



Repita o processo por mais duas etapas.

Solução do problema:

Dando sequência ao processo de construção, após as duas etapas percebemos que a soma tende a completar o quadrado de área 2. Ou seja estamos calculando a soma da seguinte PG $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$



Resolvendo algebricamente temos:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

Logo a soma é igual a 2.

Comentários finais:

Essa atividade é uma ótima oportunidade para visualizar geometricamente a soma de uma progressão geométrica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos este trabalho com o objetivo principal de provocar nossos alunos com algo desconhecido, mas com a preocupação de utilizar conhecimentos matemáticos acessíveis aos do ensino médio. Outro objetivo também foi o de fixar os conceitos de progressão aritmética e geométrica através de alguns fractais famosos como, por exemplo, curva de Koch, floco de neve, triângulo de Sierpinski e árvore bifurcada.

O conceito Geometria Fractal é relativamente novo se comparado a outros conceitos da matemática. Em um mundo desprovido de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a Geometria Fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados imprevisíveis, aleatórios e anômalos, ou seja, caóticos. Ela também vem se mostrando uma ferramenta extremamente útil para muitas ciências como mineralogia, biologia, ecologia, economia, engenharia, geologia, na indústria entre outras. Achamos que no ensino de matemática na educação básica a Geometria Fractal pode contribuir para motivar e integrar vários tópicos matemáticos.

Iniciamos nosso trabalho com um levantamento histórico sobre o tema e posteriormente fundamentamos nossa teoria, apresentando de forma breve as definições, teoremas e propriedades, seguidos de exemplos sobre suas aplicações.

Posteriormente apresentamos as atividades, que vem a ser o objetivo principal de nosso trabalho. Estas permitem desenvolver a capacidade de investigação de nossos alunos e de certa forma, motiva-los com um tema novo em nível de ensino médio. Nossas atividades visam promover a busca de padrões e regularidades, e em seguida formular generalizações em situações diversas como, por exemplo, no contexto numérico e geométrico. As atividades propostas foram tratadas de forma independente de suas construções, permitindo ao professor aplica-las somente em sala de aula sem o uso de laboratório se preferir, como também unir sala de aulas e laboratório e por fim se ele assim desejar pode ficar somente no laboratório.

Para finalizar apresentamos no apêndice os formulários das atividades propostas e um breve comentário sobre os fractais.

Esperamos ter contribuído de alguma forma a todos aqueles que dispuseram de tempo e paciência para a leitura dessa obra.

6. APÊNDICE

ATIVIDADE 1 – CURVA DE KOCH

Escola: ____

Ano: ______ Turma: ______ Data: ___ / ___ / _____

Aluno(a): ____

Instruções para construção da curva de Koch:

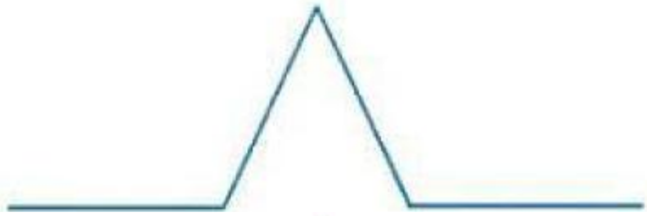
1-considerar um segmento de reta;

2-dividir o segmento em 3 partes iguais, substituir o segmento central por uma triângulo equilátero sem base;

3-repetir cada um dos passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura.

Nível 0 (zero) →

Nível 1 →



Nível 2 →

Considerando que o comprimento inicial da curva de Koch seja 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela:

Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
0			
1			
2			
3			
...	...	...	...
n			

a) A sequência dos valores da coluna "comprimento de cada segmento", esses valores formam uma PG, PA ou uma sequência qualquer? Justifique.

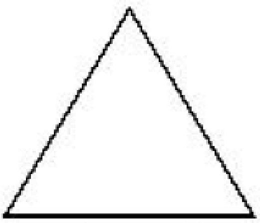
b) A sequência dos valores da coluna "comprimento total da curva", esses valores formam uma PG, PA ou uma sequência qualquer? Justifique.

ATIVIDADE 2 – FLOCO DE NEVE

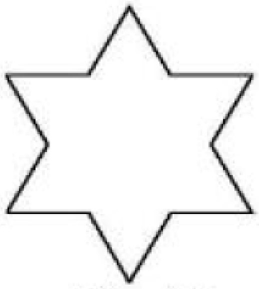
Escola: ____
Ano: ______ Turma: _____ Data: ___ / ___ / _____
Aluno(a): ____

Instruções para construção do floco de neve:

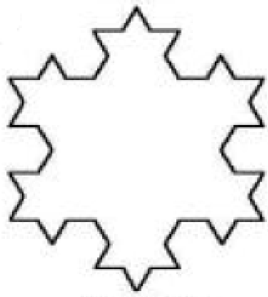
1) Construa um triângulo eqüilátero;
2) Aplicar a curva de Koch em cada lado de um triângulo eqüilátero;
3) Aplicar a curva de Koch em cada novo segmento;
4) Repetir o passo anterior para cada novo segmento.



Nível 0

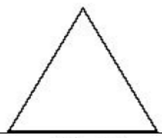
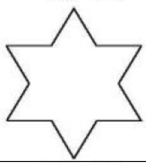
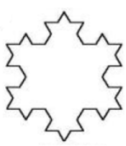


Nível 1



Nível 2

Em relação aos 3 primeiros níveis do floco de neve (nível zero, nível um e nível dois) e considerando o comprimento do lado inicial do triângulo como 1, complete a seguinte tabela:

	Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada lado	Comprimento total da curva
	0			
	1			
	2			
...	...	...	...	...
	n			

a) A sequência dada pelos valores da coluna "comprimento de cada lado", formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique.

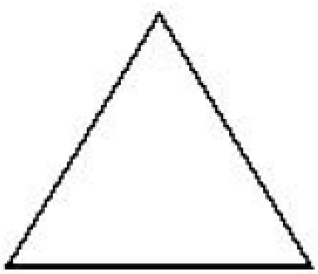
b) A sequência dada pelos valores da coluna "comprimento total da curva", formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer? Justifique.

ATIVIDADE 3 – FLOCO DE NEVE

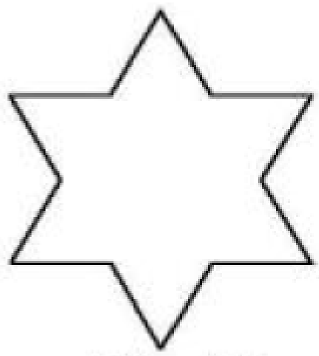
Escola: ____
Ano: ______ Turma: _____ Data: ___ / ___ / _____
Aluno(a): ____

Instruções para construção do floco de neve:

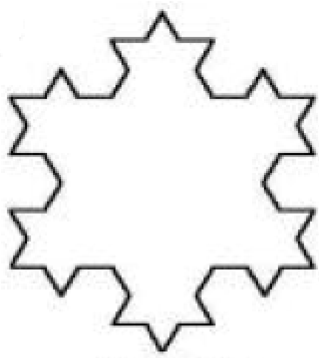
5) Construa um triângulo eqüilátero;
6) Aplicar a curva de Koch em cada lado de um triângulo eqüilátero;
7) Aplicar a curva de Koch em cada novo segmento;
8) Repetir o passo anterior para cada novo segmento.



Nível 0

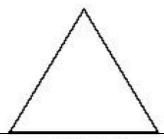
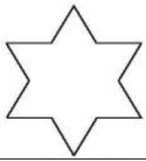
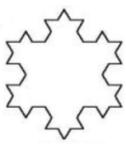


Nível 1



Nível 2

Considere o floco de neve até o nível 2, e partindo de uma lado 1 complete a seguinte tabela:

	Nível	Área de cada triângulo inserido	Nº de triângulos inseridos	Soma da área total
	0			
	1			
	2			

Em seguida calcule a área total da figura até o nível 3.

ATIVIDADE 4 – TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Escola: ____
Ano: ______ Turma: _____ Data: ___ / ___ / _____
Aluno(a): ____

Processo de construção do triângulo de Sierpinski:

Passo 1→ Considerar inicialmente um triângulo eqüilátero;

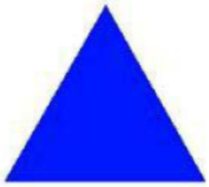
Passo 2→ Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos eqüiláteros;

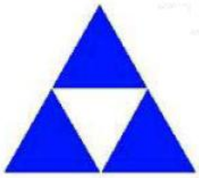
Passo 3→ Remover o triângulo central;

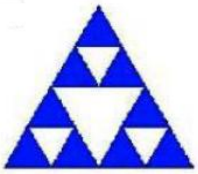
Passo 4→ Repetir em cada um dos triângulos não eliminados os passos 2 e 3;

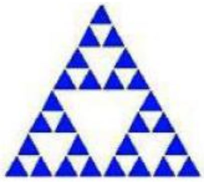
Passo 5→ repetir o passo 4 sucessivamente.

Observe as seguintes figuras e seus níveis respectivos:

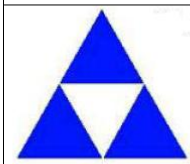
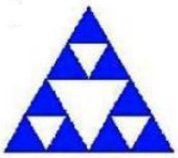
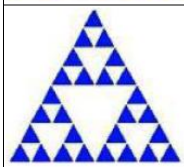

Nível 0


Nível 1


Nível 2

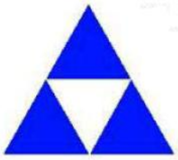
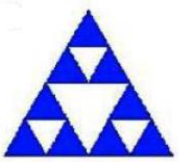
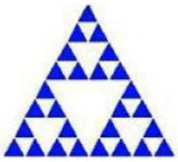

Nível

PARTE 1: Considerando inicialmente um triângulo eqüilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do “Triângulo de Sierpinski”.

	Nível	Número de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total
	0				
	1				
	2				
	3				
...	...	...	...	...	...
	n				

Observe as sequências dos valores das colunas “perímetro de cada triângulo” e “perímetro total”, classifique cada uma delas em PA, PG ou uma sequência qualquer. Justifique sua resposta.

PARTE 2: Considerando inicialmente um triângulo eqüilátero de lado medindo 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente aos 4 primeiros níveis do “Triângulo de Sierpinski”.

	Nível	Número de triângulos	Área de cada triângulo	Área total
	0			
	1			
	2			
	3			
...	...	...	...	...
	n			

Observe as sequências dos valores das colunas “área de cada triângulo” e “área total”, classifique cada uma delas em PA, PG ou uma sequência qualquer. Justifique sua resposta.

ATIVIDADE 5 – ÁRVORE BIFURACADA

Escola: ____
Ano: ______ Turma: ______ Data: ___ / ___ / _____
Aluno(a): ____

A seguir o roteiro para obtermos uma árvore bifurcada (ângulo de bifurcação 120º e escala de redução de meio).

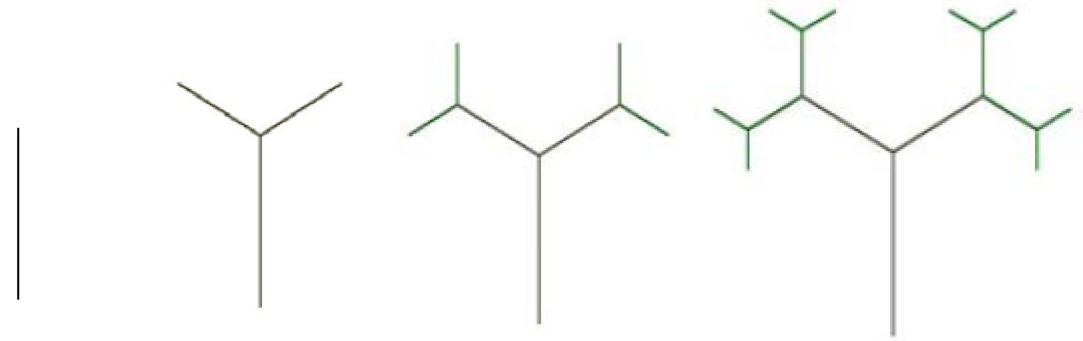
Passo 1 - Iniciamos a curva com um segmento vertical de tamanho L;

Passo 2 - Aplicamos sobre este segmento inicial um fator de redução $\frac{1}{2}$;

Passo 3 - Inserimos dois segmentos de forma bifurcada junto à extremidade superior do segmento inicial, com ângulo de bifurcação de 120° e com o tamanho obtido na redução do nível anterior;

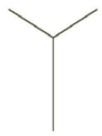
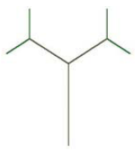
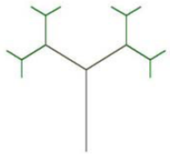
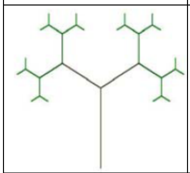
Passo 4 - Repetimos, indefinidamente, os passos 2 e 3 em cada um dos novos segmentos.

Observe logo abaixo os primeiros níveis da árvore bifurcada.



Nível zero Nível 1 Nível 2 Nível 3

Partindo de um segmento de comprimento 1 (uma unidade), complete a seguinte tabela referente a uma "árvore bifurcada" onde o fator de redução é meio e ângulo de bifurcação de 120º.

	Nível	Nº de novos segmentos	Nº total de segmentos	Comprimento de cada novo segmento	Comprimento total da curva
	0				
	1				
	2				
	3				
	4				

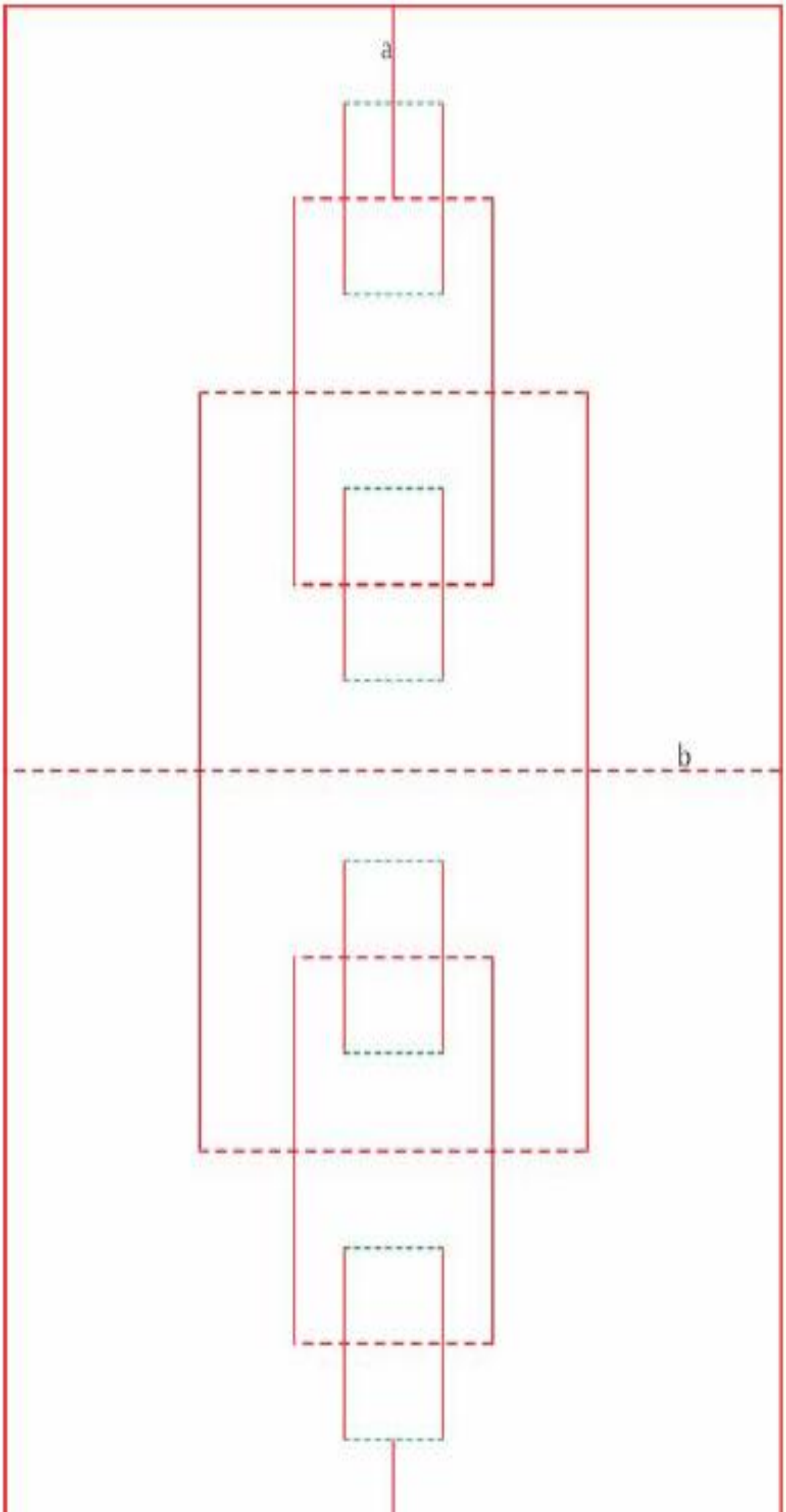
a) A sequência referente ao número de novos segmentos é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

b) A sequência referente ao comprimento de cada novo segmento é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

c) A sequência referente ao comprimento total da curva é uma PA ou PG? Justifique sua resposta.

d) Para um nível muito elevado, por exemplo maior que 1000 (mil), o comprimento de cada novo segmento se aproxima de quanto?

ATIVIDADE 6 – FRACTAIS COM RECORTES DE PAPEL



7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ASSIS, T. A. et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. Revista brasileira de ensino de física. V. 30. Nº 2. Ano: 2008.

[2] ÁVILA, G. Séries infinitas. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo. Nº 30.

[3] BARBOSA, R. M. Descobrindo a geometria fractal – para sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

[4] BOYER, C. B. História da Matemática. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp, 1996.

[5] BRANDÃO, L. O. Algoritmos e fractais com programas de GD. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo. Nº 49.

[6] BRAVIANO, G., RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria dinâmica: uma nova geometria. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo. Nº 49.

[7] DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

[8] EVES, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[9] IEZII, G. et al. Matemática: ciências e aplicações, 1: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[10] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. A matemática no ensino médio. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do professor de matemática, v. 2).

[11] MORGADO, A. C., WAGNER, E., ZANI, S. C. Progressões e matemática financeira. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[12] MURR, C. et al. Fractais: Propriedades e construção. Prodocência, UFPR, 2007.

(Disponível em <gauss.mat.ufpr.br/~karas/geralic2003.pdf>)

[13] NUNES, R. S. R. Geometria Fractal e Aplicações. Porto, Portugal, 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

[14] Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: caderno do formador. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

[15] RAMPAZO, L. Progressões aritméticas na 6ª série. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo. Nº 13.

[16] SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo. Nº 57.

[17] http://www.apm.pt/portal/em.php?id=21384&rid=21344 (Associação de professores de matemática de Portugal -descobrindo a magia dos fractais com cortes de papel)