UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

LEANDRO COLOMBO PEDRINI

O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

CAMPO GRANDE-MS

JUNHO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

LEANDRO COLOMBO PEDRINI

O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Rúbia Mara de Oliveira Santos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE-MS

JUNHO DE 2013

O ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES NOS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO

LEANDRO COLOMBO PEDRINI

Trabalho de Conclusão de Curso, submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Rúbia Mara de Oliveira Santos - UFMS
Prof. Dr.ª Selma Helena Marchiori Haschimoto- UFGD
Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS

CAMPO GRANDE-MS

JUNHO DE 2013

Dedico a minha família, que compreendeu minha ausência e falta de tempo para lhes dedicar a atenção merecida. Agradeço por aceitarem minha falta, durante minha busca por novos conhecimentos, concedendo-me a chance de crescer ainda mais.

Epígrafe

"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real."

Lobachevsky

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por essa oportunidade e por me dar forças nos momentos em que mais precisei.

A minha esposa Gisele, por estar sempre ao meu lado, me ajudando em tudo o que precisasse, inclusive tomando conta das crianças sozinha enquanto eu estudava.

Aos meus filhos Felipe e Alice pois, apesar de serem pequenos, acho que compreenderão daqui algum tempo porque que as vezes não pude estar junto a eles por falta de tempo enquanto me dedicava aos estudos.

A minha irmã Josiane e a meu cunhado Rogério por ajudarem nas horas mais difíceis.

Aos meus pais, que por tantas vezes deixei de vê-los, por causa das obrigações que tinha para com este trabalho, pelo amor e por todas as orações que fizeram.

A minha professora e Orientadora, Rúbia, por toda dedicação e paciência que teve durante as aulas e durante o trabalho de conclusão.

A todos os colegas de turma, pelas trocas de experiência e conhecimento.

A todos os professores, que nos propiciaram excelentes aulas, em especial ao professor Claudemir, coordenador do curso.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho, refere-se ao estudo de Sistemas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio, trazendo parte de sua história, a fundamentação teórica e algumas aplicações. Um estudo criterioso foi realizado com o auxílio das referências bibliográficas, foi elaborado um breve histórico da história da matemática sobre álgebra e sistemas lineares. Foi apresentado porque, quando e como deve ser introduzido o ensino de sistemas lineares nos Ensinos Fundamental e Médio, mostrando os métodos que devem ser utilizados em cada etapa de ensino, bem como os tipos de sistemas estudados, fazendo uma análise de três livros didáticos utilizados no segundo ano do ensino médio, apontando uma contribuição de como pode ser apresentado o conteúdo de sistemas lineares, com a utilização da representação geométrica de sistemas. O embasamento teórico sobre Sistemas Lineares foi feito de maneira clara e objetiva, na sequência, buscou-se elencar algumas aplicações de Sistemas Lineares adequadas ao nível de ensino destes alunos.

Palavras-Chave: Sistemas Lineares. Ensino. Aplicações.

Abstract

This work presents a study about linear systems in primary and secondary education. The work presents linear systems history, theoretical foundations, and some applications. We have performed a detailed study based on the bibliographical references. We have also described the history of algebra and linear systems. In this work, we intend to discuss why, when, and how to introduce the teaching of linear systems in primary and secondary education. We have shown methods that can be adopted in each step of teaching followed by the types of linear systems that can be studied. Three different books adopted in the second grade of the secondary education have been analyzed in order to indicate how the linear systems content can be presented, based on the systems geometric representation. The theoretical foundations of linear systems are clearly and objectively presented through the text. Some applications of linear systems have been selected based on the learning level of the students.

Keywords: Linear Systems. Education. Applications.

Nomenclatura

$[a_{ij}]_{m\times n}$	Matriz formada por elementos a_{ij}, de ordem mxn
$\cap$	Interseção
$\parallel$	Paralelo
$\sim$	Equivalente
$\varnothing$	Conjunto vazio
a_{ij}	Elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna, na matriz
$A_{m\times n}$	Matriz A de ordem mxn
R	Conjunto dos Números Reais

Lista de Figuras

2.6.1 Retas coincidentes 21

2.6.2 Retas paralelas 21

2.6.3 Retas concorrentes 22

2.6.4 Sistema linear homogêneo em que as retas são concorrentes 23

2.6.5 Sistema linear homogêneo em que as retas são coincidentes 23

2.6.6 Três planos coincidentes 24

2.6.7 Dois planos coincidentes e o terceiro é paralelo a eles 25

2.6.8 Os planos são paralelos dois a dois 25

2.6.9 Dois planos coincidentes e o terceiro os intersectam segundo uma reta l . . . 26

2.6.10 Dois planos paralelos e o terceiro os intersecta segundo as retas l_1 e l_2 . . . 26

2.6.11 Os três planos são distintos e se intersectam segundo uma reta l 27

2.6.12 Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas l_1, l_2, l_3 27

2.6.13 Os três planos se intersectam segundo um único ponto P. 28

4.2.1 Região de todas as possíveis soluções do problema 56

4.2.2 Maximizando a função $f(x, y) = 400x + 600y$ 57

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 História da Matemática 2

1.2 Objetivos 5

2 O Ensino de Sistemas Lineares **6**

2.1 O Ensino de Sistemas Lineares no 7º Ano do Ensino Fundamental (Ciclo 3) . 6

2.2 O Ensino de Sistemas Lineares no 8º Ano do Ensino Fundamental (Ciclo 4) 8

2.3 Resolução de Sistemas Lineares no Ensino Fundamental 10

2.3.1 Método da Adição 10

2.3.2 Método da Substituição 11

2.3.3 Método Gráfico (ou Método Geométrico) 11

2.4 O Ensino de Sistemas Lineares no 2º Ano do Ensino Médio 12

2.4.1 Resolução de Sistemas Lineares no Ensino Médio 14

2.4.1.1 Método do Escalonamento 14

2.5 Análise de Livros Didáticos 15

2.5.1 Análise do Livro (1) 16
2.5.2 Análise do Livro (2) 17
2.5.3 Análise do Livro (3) 19
2.6 Contribuições Para o Ensino de Sistemas Lineares 20
2.7 Considerações Finais 29

3 Fundamentação Teórica dos Sistemas Lineares 30

3.1 Matrizes 31
3.1.1 Matrizes Especiais 32
3.1.2 Operações com Matrizes 33
3.1.2.1 Igualdade 33
3.1.2.2 Adição 34
3.1.2.3 Multiplicação por Escalar 34
3.1.2.4 Transposição 35
3.1.2.5 Produto de Matrizes 35
3.1.3 Matriz Inversa 36
3.1.3.1 Unicidade da Matriz Inversa 36
3.1.4 Determinante 38
3.1.5 Forma Escada de uma Matriz 39
3.2 Classificação de um Sistema Linear 40
3.2.1 Forma Matricial de um Sistema Linear 40

3.2.2 Sistemas Lineares Equivalentes 42

3.3 Resolução de Sistemas Lineares 46

3.3.1 Método do Escalonamento de Sistemas Lineares 46

3.3.2 Escalonamento de Sistemas 48

3.3.2.1 Resolução de Sistemas Lineares 49

3.4 Considerações Finais 52

4 Aplicações de Sistemas Lineares **53**

4.1 Aplicações de Sistemas Lineares na Química 54

4.1.1 Balanceamento de uma Reação Química 54

4.2 Aplicações de Sistemas Lineares na Matemática 55

4.2.1 Problema do Sítio (Programação Linear) 55

4.2.2 Problema do Dinheiro 58

4.2.3 Aplicações de Sistemas Lineares na Física 59

4.2.4 Problemas Sobre Movimento 59

4.3 Considerações Finais 60

5 Conclusão **61**

Capítulo 1

Introdução

Surge dos problemas do nosso cotidiano a necessidade de que as pessoas desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações e tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. Tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, a matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional, [18].

Desta forma, o estudo dos Sistemas Lineares constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas, permitindo que o aluno interprete modelos, perceba o sentido de transformações, busque regularidades e conheça o desenvolvimento tecnológico de parte de nossa cultura [18].

O estudo das aplicações dos Sistemas Lineares é vasto, para tanto se faz necessária a investigação deste conteúdo. Partindo desse pressuposto faz-se necessário o estudo completo dos Sistemas Lineares, começando por sua história, posteriormente é imprescindível analisar as suas definições e teoremas para entender a forma matemática dos sistemas lineares e por último observar as aplicações relacionadas ao assunto, pois dessa forma o leitor observará a grandeza do conteúdo.

1.1 História da Matemática

Ao se fazer um relato cronológico e histórico do desenvolvimento da matemática, torna-se necessário saber por onde começar. De acordo com [9], considera-se como matemática mais antiga, aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número. O conceito de número e o processo de contar, desenvolveram-se antes dos primeiros registros históricos, de forma amplamente conjectural.

As primeiras manifestações matemáticas surgiram ainda no Paleolítico, ligadas diretamente às necessidades práticas impostas pelo convívio social [15]. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer mais ou menos. Com a evolução da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples, uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e também quantos eram seus inimigos, assim como, se tornava necessário saber se o rebanho de carneiros estava diminuindo [4].

É provável que a maneira mais antiga de contar tenha sido baseada em algum método de registro simples, como por exemplo, para contar carneiros poder-se-ia dobrar um dedo para cada animal ou mesmo fazer ranhuras em uma pedra ou barro. Contudo, a matemática primitiva precisava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade [6]. Com o passar dos anos e com o desenvolvimento dos povos, tornou-se necessário efetuar contagens mais extensas, desta forma o processo de contar teve que ser sistematizado. A partir de então, houve um significativo desenvolvimento da matemática e posteriormente seu reconhecimento como ciência, assim como, surgiram e foram reconhecidos grandes pensadores e postuladores da Matemática.

A álgebra surgiu aproximadamente 1650 a.C., na antiga Babilônia, onde aprendizes de Escribas frequentavam as escolas do amanhecer ao pôr do sol, durante dez anos, onde aprendiam a escrever cerca de 700 sinais e efetuar cálculos matemáticos [16]. Durante anos a palavra Álgebra designava aquela parte da matemática que se ocupava de estudar as operações entre números e resoluções de equações. Era considerada um procedimento para resolver problemas que envolviam números desconhecidos.

Segundo [2] a palavra Álgebra é uma variante latina da palavra árabe Al-jabr, usada no título de um livro escrito em Bagdá por volta de 825 a.C., pelo matemático árabe Mohamed Ibn-musa Al-khowarizmi. A palavra al-jebr significa restauração, refere-se à passagem de um termo para outro lado da equação. Ainda que originalmente álgebra refira-se a equações, atualmente tem significado muito mais amplo, sendo a parte da matemática que estuda as leis e processos formais de operações com entidades abstratas. A álgebra apresentou-se de diversas maneiras conforme a região e a época analisada [16].

De acordo com [12] os primeiros aparecimentos de Sistemas Lineares datam do século II a.C. tendo reconhecimento tanto no ocidente quanto no oriente, porém sendo mais aprofundados os estudos no oriente. Os chineses representavam sistemas lineares por meio de bambus em tabuleiros, através do qual começaram a perceber um método que eliminava incógnitas através de operações elementares.

Porém foi a partir do ano de 1683, no trabalho do japonês Seki Kowa que aperfeiçoou a ideia dos chineses utilizando determinantes, kowa foi considerado o maior matemático do século XVII. Somente dez anos depois em 1693 foi que o uso do determinante veio a ser trabalhado por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), em 1693 ele escreveu uma carta a Guillaume de L'Hospital (1661-1704), que fora publicada em 1850 e redescoberta anos após por Colin Maclaurin, onde ele usava números que indicavam linhas e colunas como equações, Leibniz ousou ao estabelecer a condição de se trabalhar com um sistema envolvendo três equações e duas incógnitas em termos do determinante de ordem três, formado pelos coeficientes e pelos termos independentes.

No desenvolvimento de sua regra para resolver sistemas lineares com n equações e n incógnitas Cramer baseou-se na ideia do escocês Colin Maclaurin. Segundo [11], possivelmente a Regra de Cramer já era conhecida por Maclaurin, todavia fora publicada dois anos após a sua morte em seu livro Treatise os Álgebra de Maclaurin no ano de 1748, onde ele usava a regra para resolver equações por determinantes. A abordagem de sistemas de equações lineares adotada por Cramer foi viável considerando a praticidade na resolução, diferentemente da resolução expressa por Maclaurin, ou seja, onde os índices estavam ligados aos coeficientes afim de que pudessem facilitar a determinação dos sinais. Esse sistema era representado da seguinte forma:

$$
\text{S:}\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

O francês Étienne Bézout (1730-1783), conseguiu sistematizar em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. Porém, foi Alexandre Vandermonde (1735-1796), em 1771, que empreendeu a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares, embora também os utiliza-se na resolução destes sistemas lineares. Nesta mesma época Laplace, demonstra seu teorema, que permite a expansão de um determinante através da escolha de uma de suas r filas, esta demonstração foi publicada em [7].

Usando observações de Pallas tomadas entre 1803 e 1809, Karl Friedrich Gauss - astrônomo, matemático e físico alemão (1777-1855) obteve um sistema de seis equações lineares e seis incógnitas. Gauss criou um método sistemático para a resolução de equações desse tipo, o que é precisamente o método sobre a matriz dos coeficientes, que é conhecido hoje como Método do Escalonamento. Dentre tantos feitos realizados por Gauss, sua contribuição mais importante para a álgebra, em conjunto com o Matemático Jordan, foi a elaboração desse método para resolução de sistemas lineares e que recebeu o nome de Gauss-Jordan. Este é com certeza um método prático para resolver sistemas lineares, em especial quando o número de equações for relativamente grande. Este método exige que se transforme a matriz dos coeficientes em uma matriz na forma escalonada.

O termo determinante surgiu apenas em 1812, num estudo feito por Cauchy, o qual demonstrou que o assunto tem importância para a matemática e seus respectivos conceitos. Outro grande estudioso que contribuiu com o estudo sobre sistemas lineares e determinantes foi o alemão Carl G.J. Jacobi, que concretizou o estudo dos determinantes. Outras contribuições vieram de Kronecker, que buscou solução para sistemas de equações lineares homogêneas e também de Fontene, Rouché e frobenius, que participaram do aperfeiçoamento desse estudo.

Em 1826, Cauchy no contexto das formas quadráticas em n variáveis, encontrou os autovalores e deu resultados sobre a diagonalização de uma matriz. Além disso, ele introduziu a ideia de matrizes semelhantes e mostrou que elas possuem o mesmo polinômio característico. Após os estudos de Cauchy, Gauss e Jacobi, vários outros matemáticos aprofundaram ainda mais os estudos sobre sistemas lineares, chegando-se ao amplo conhecimento atual sobre esse assunto. Hoje os Sistemas Lineares possuem várias aplicações em outras áreas do conhecimento, o que o torna um conteúdo importante para essas áreas, além de sua importância na própria matemática.

1.2 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivos realizar uma análise crítica sobre o conteúdo de Sistemas Lineares, apresentado em livros didáticos utilizados no segundo ano do Ensino Médio, em Campo Grande, MS. Discutir e divulgar métodos acerca do ensino de sistemas lineares nos ensinos fundamental e médio, utilizando as abordagens algébrica e geométrica, além de apresentar uma fundamentação teórica e aplicações de sistemas lineares. O trabalho será apresentado da seguinte forma.

Capítulo 2: Apresenta a atual conjuntura do ensino de Sistemas Lineares nos ensinos fundamental e médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs, os referenciais curriculares da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul e da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande, MS e a análise de livros didáticos do ensino médio. Além disso, estabelece várias orientações que podem ser utilizadas em sala de aula como proposta de sequência didática para o ensino de sistemas lineares utilizando as abordagens algébrica e geométrica.

Capítulo 3: Apresenta a fundamentação teórica de Sistemas Lineares, elencando suas principais definições, teoremas e métodos de resolução.

Capítulo 4: Descreve algumas aplicações de Sistemas Lineares.

As considerações finais desse trabalho serão apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

O Ensino de Sistemas Lineares

Neste capítulo será realizada uma abordagem crítica sobre o ensino de Sistemas Lineares nos ensinos fundamental e médio, posteriormente será feita a análise de três livros didáticos utilizados no ensino de sistemas lineares no segundo ano do ensino médio, além de serem apresentadas orientações que podem ser utilizadas em sala de aula, com o intuito de introduzir o conteúdo de Sistemas Lineares através das abordagens algébrica e geométrica.

O ensino de Sistemas Lineares ocorre no sétimo e oitavo anos do ensino fundamental e no segundo ano do ensino médio, assim, será analisado seu ensino nesses três anos.

2.1 O Ensino de Sistemas Lineares no 7º Ano do Ensino Fundamental (Ciclo 3)

No sétimo ano do ensino fundamental o aluno começa a ter seus primeiros contatos com conceitos algébricos, entre estes as expressões algébricas, equações do 1º grau e sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas.

Levando em consideração o ensino da matemática, vários documentos foram publicados para nortear o ensino desta área do conhecimento, sendo estes de âmbito nacional, estadual e/ou municipal, no decorrer deste trabalho serão elencados tais documentos.

Em princípio de acordo com [18] a importância do ensino das primeiras noções de álgebra para o Terceiro Ciclo (7° ano) do Ensino Fundamental, objetiva desenvolver algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer generalizações e compreender as representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra. Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos, não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando o aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. Neste ciclo é suficiente que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare-se com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, recomenda-se que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo.

Assim, nesta etapa o aluno deve utilizar representações algébricas para generalizar propriedades de operações aritméticas e expressar regularidades encontradas em sequências numéricas, compreender a noção de variável e construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas. De acordo com [14], ao estudar equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau, o aluno deve ser capaz de:

- Reconhecer expressões algébricas, equações e sistemas de equações do 1º grau. Encontrar o valor das incógnitas de sistemas de equações do 1º grau.
- Resolver problemas envolvendo sistemas de equações do 1º grau.

Considerando as orientações propostas por [19] os objetivos no ensino de equações e sistemas de equações do 1º grau são:

- Nos anos iniciais já se devem desenvolver alguns aspectos da álgebra, conquanto seja especialmente nos anos finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas.
- Trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra: generalizar padrões aritméticos, estabelecer relações entre duas grandezas, modelar, resolver problemas aritmeticamente difíceis.
- Representar problemas por meio de equações e inequações, diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, compreender regras para solução de uma equação.
- Para o 7º ano, espera-se que o educando seja capaz de utilizar representações algébricas para generalizar as propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas; construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Nota-se que, tanto nos documentos federais como nos, estaduais e municipais as orientações quanto ao Ensino da Matemática, referente ao ramo da Álgebra, em particular das equações e de sistemas de equações, são de que nesta etapa do ensino o aluno deve ter apenas um contato superficial com os conceitos algébricos, entre estes, o aluno deve reconhecer e calcular o valor numérico de uma expressão algébrica, reconhecer e resolver equações do 1º grau e resolver sistemas lineares simples.

2.2 O Ensino de Sistemas Lineares no 8º Ano do Ensino Fundamental (Ciclo 4)

No oitavo ano do ensino fundamental, o aluno já tem um contato mais profundo com o ensino da álgebra, estudando expressões algébricas, polinômios, operações com polinômios, equações do 1º grau, sistemas de equações do 1º grau e situações-problema envolvendo estes conteúdos. Segundo [18], nesta etapa que corresponde ao Quarto Ciclo do Ensino Fundamental, o aluno ao estudar equações e sistemas de equações deve ser capaz de:

- Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas de equações;
- Resolver situações-problema por meio de equações e inequações e sistemas de equações do 1º grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
- Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

O estudo da Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a pré-álgebra desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos e modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. Desse modo, o ensino da álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções da álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). Assim, no trabalho com a álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável, incógnita e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações e inequações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação.

O aluno deve traduzir situações-problema por meio equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta, resolver situações-problema utilizando um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação geométrica das equações do sistema no plano cartesiano, discutindo o significado das soluções encontradas em confronto com a situação proposta. O aluno deve construir procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas. De acordo com [14], no oitavo ano, o educando ao ter contato com o estudo de equações e sistema de equações deve aprender:

- Encontrar o valor das incógnitas de uma equação e/ou inequação do 1º grau.
- Resolver problemas envolvendo equações e/ou inequações do 1º grau.
- Verificar se um par ordenado (x, y) é ou não uma das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.
- Resolver sistemas de equações com duas incógnitas, utilizando o Método da Substituição ou o Método da Adição.
- Reconhecer um sistema de equações fracionárias (sistema de equações em que os coeficientes das incógnitas não são todos números inteiros).
- Resolver um sistema de equações fracionárias pelo método mais adequado.

Segundo [19], o objetivo no estudo de equações e sistemas de equações para esta série, é que o aluno possa:

- Resolver situações-problema por meio de equações, inequações ou sistemas de equações do 1° grau (com duas incógnitas), aplicando as propriedades de igualdade e desigualdade para determinar suas soluções.

Do mesmo modo que no sétimo ano, os objetivos para o oitavo ano do ensino fundamental elencados nos documentos de âmbito federal, estadual e municipal sobre o ensino de equações e sistemas de equações, são muito parecidos. Nesta etapa o aluno tem uma visão mais aprofundada em seus estudos sobre álgebra, trabalhando também com polinômios, situações problema envolvendo equações do 1º grau e sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas.

No oitavo ano, o aluno também já deve saber classificar um sistema linear em possível e determinado, possível e indeterminado e impossível de acordo com sua solução ou utilizando a representação gráfica das retas que representam suas equações.

2.3 Resolução de Sistemas Lineares no Ensino Fundamental

No Ensino Fundamental os alunos do sétimo e oitavo anos aprendem a resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas utilizando os métodos da adição e da substituição, além de utilizar a representação gráfica para auxiliar na resolução e na classificação dos sistemas lineares.

2.3.1 Método da Adição

Este método consiste em preparar as equações do sistema de modo que uma das incógnitas das equações possua coeficientes opostos. Para obter esses coeficientes deve-se utilizar a multiplicação de uma das equações por um número k adequado, e em seguida basta efetuar a soma das equações membro a membro para que seja anulada uma das incógnitas do sistema, resumindo assim o sistema de equações a uma única equação, a qual após ser resolvida revela o valor de uma das incógnitas do sistema, bastando então substituir o valor desta em uma das equações do sistema para obter-se o valor da segunda incógnita do sistema, obtendo assim a solução (x, y) do sistema. Quando esta solução é única o sistema é classificado como possível e determinado.

Observação 1. Ao preparar e somar as equações de um sistema com duas equações e duas incógnitas podem ocorrer outros dois casos:

1º caso: Obtem-se a seguinte equação após preparar e realizar a soma das equações membro a membro: $0x + 0y = 0$, onde x e y podem assumir quaisquer valores, logo o sistema possui infinitas soluções. Um sistema nessas condições é classificado como possível e indeterminado.

2º caso: Obtem-se a seguinte equação após preparar e realizar a soma das equações membro a membro: $0x + 0y = z$, com $z \neq 0$, que é uma equação que não possui solução. Um sistema assim é classificado como impossível.

2.3.2 Método da Substituição

O Método da Substituição consiste em escolher uma das equações do sistema e isolar uma de suas incógnitas, então substituir esse valor na outra equação, obtendo assim uma equação linear com apenas uma incógnita que pode facilmente ser resolvida, determinando assim o valor de uma das incógnitas do sistema. Após encontrado o valor da primeira incógnita, basta substituí-lo em uma das equações do sistema para que seja possível encontrar o valor da segunda incógnita, determinando assim a solução (x, y) do sistema. Se essa solução for única o sistema será classificado como possível e determinado.

Observação 2. Ao isolar e substituir uma das incógnitas de uma das equações na outra equação podem ocorrer outros dois casos:

1º caso: Após substituir o valor da incógnita y na outra equação obtem-se a seguinte: $0x = 0$, em que x pode assumir qualquer valor. Logo pode-se obter infinitos valores para y, bastando variar o valor de x. Portanto esse sistema é um sistema possível e indeterminado.

2º caso: Após substituir o valor da incógnita y na outra equação obtem-se a seguinte: $0x = z$, com $z \neq 0$, que não possui solução. Portanto o sistema é classificado como impossível.

2.3.3 Método Gráfico (ou Método Geométrico)

Este método consiste em realizar a representação gráfica de cada uma das equações do sistema em um plano cartesiano. A solução do sistema linear é dada por todos os pares ordenados (x, y) que satisfaçam ambas as equações. Quando se trabalha com este método é possível classificar o sistema apenas pela observação da posição relativa entre as retas descritas por cada uma das equações do sistema. Para representar as retas no plano cartesiano basta encontrar dois pontos (x, y) pertencentes a elas, representa-los no plano, e traçar por eles a reta que representa cada uma das equações do sistema, em seguida observa-se a posição relativa entre as retas para classificar o sistema em:

Sistema Possível e Determinado: quando as retas descritas pelas equações do sistema são concorrentes, ou seja, possuem apenas um ponto de intersecção, as coordenadas

(x, y) deste ponto são o conjunto solução do sistema.

Sistema Possível e Indeterminado: quando as retas descritas pelas equações do sistema são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos de intersecção, e as coordenadas (x, y) de cada um destes pontos são uma solução do sistema.

Sistema Impossível: quando as retas descritas pelas equações do sistema são paralelas, ou seja, as retas não possuem intersecção, logo o sistema não possui nenhum ponto (x, y) que satisfaça ambas as equações do sistema, logo este não possui solução.

Observação 3. O método gráfico é um ótimo instrumento para a visualização da solução de um sistema de ordem 2 x 2, pois, os alunos conseguem observar através da posição relativa entre as retas que representam as equações do sistema se este possui uma única solução, se possui infinitas soluções ou se não possui solução.

2.4 O Ensino de Sistemas Lineares no 2º Ano do Ensino Médio

Com relação ao estudo de Sistema Lineares no sétimo e oitavo anos do ensino fundamental, o estudo realizado no segundo ano do ensino médio é feito de maneira mais completa e profunda. Nesta etapa os alunos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e do segundo grau e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares $m \times n$, aplicando esse estudo à resolução de problemas matemáticos e de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola [18].

Em relação às competências a serem desenvolvidas pelo estudo da Matemática, a abordagem proposta para esse tema, permite ao aluno usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades e conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura, adquirindo uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático. De acordo com [23], para esta etapa de ensino considerada mais abrangente e mais aprofundada quando comparada com as séries finais do ensino fundamental, os objetivos do ensino da Álgebra especialmente de Sistemas Lineares nesta fase de ensino, são:

- Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
- Tomar decisões diante de situações-problema, baseado no uso de determinante.
- Elaborar argumentos consistentes, de diferentes naturezas, fazendo uso das operações com determinantes.

Posteriormente aos PCNs foram elaboradas pelo Departamento de Políticas de Ensino Médio, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006), na qual em seu volume dois trata dos temas Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. No que se trata do ensino de Álgebra, especificamente no ensino de Sistemas Lineares, esse documento orienta que no estudo de sistemas de equações, além de trabalhar as técnicas de resolução de sistemas de modo algébrico, recomenda-se colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2×2, duas equações e duas variáveis, pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano.

Também deve-se mostrar ao aluno que através de operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2×2 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Em relação a resolução de sistemas lineares de ordem 3×3, a Regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados e com solução única [8].

Os documentos que norteiam o ensino de matemática no Ensino Médio aqui analisados, orientam que o conteúdo de Sistemas Lineares deve ser trabalhado com os alunos do 2º ano do ensino médio objetivando um aprofundamento do conteúdo já trabalhado no 7º e 8º anos do ensino fundamental e visando o aprendizado de novas técnicas para a resolução de sistemas maiores e mais complexos.

Dentre os métodos para a resolução de sistemas lineares de ordem maior do que 2×2, estão o Método do Escalonamento e a Regra de Cramer, porém esta sendo limitada a solução de sistemas quadrados e de solução única diferentemente do método do escalonamento que é um método que serve para a solução de qualquer tipo de sistema.

2.4.1 Resolução de Sistemas Lineares no Ensino Médio

No Ensino Médio apresenta-se uma nova técnica para a resolução de sistemas já que as utilizadas pelos alunos no Ensino Fundamental (adição e substituição) funcionam bem para sistemas de ordem 2×2, mas são pouco eficientes quando utilizados na resolução de sistemas de ordem 3×3, ou sistemas de ordens maiores, para resolução destes sistemas será apresentado o Método do Escalonamento. Este método será apresentado integralmente no Capítulo 3.

2.4.1.1 Método do Escalonamento

Dado um sistema linear

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e utilizando operações elementares adequadas em suas linhas, obtem-se um sistema

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

equivalente a S, com o objetivo de que a última equação dependa somente da incógnita x_n, determinando assim seu valor e depois o valor das demais incógnitas. Se ao escalonar o sistema obtem-se um sistema em que o número de incógnitas for maior do que o número de equações, o sistema é possível porém indeterminado, pois basta atribuir valores diferentes para suas incógnitas livres para obter diferentes soluções. Para facilitar a escrita, pode-se trabalhar com a matriz completa do sistema. Assim, observe que associa-se ao sistema escalonado S', excluindo-se sua última coluna, uma matriz A triangular superior na forma escalonada, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Quando ao escalonar o sistema obtem-se uma linha do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{bmatrix},$$

há duas possibilidades a se analizar:

i) Se $b_m = 0$, elimina-se esta linha e continua-se o procedimento.

ii)Se $b_m \neq 0$, tem-se uma equação do tipo $0x_n = b_m$, logo o sistema é impossível.

Na próxima seção apresentar-se-á uma análise de livros didáticos utilizados no ensino de Sistemas Lineares no segundo ano do ensino médio, em Campo Grande, MS.

2.5 Análise de Livros Didáticos

O livro didático é objeto fundamental no processo de ensino-aprendizagem, para alunos e professores, por propiciar-lhes um contato direto com os conteúdos, além de poder tornar as aulas mais dinâmicas, pois através do uso do livro didático os professores podem utilizar mais tempo de suas aulas para explicar conteúdos e resolver exemplos e exercícios. O livro didático auxilia os professores na realização de seus planejamentos, na organização de atividades diferenciadas e de avaliações. No Brasil as redes públicas de ensino fornecem livros didáticos para quase todos os componentes curriculares de sua grade de ensino, de forma gratuita para alunos e professores. Foi criado inclusive o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que tem a responsabilidade de avaliar os livros didáticos com a finalidade de garantir a boa qualidade desse material. Neste contexto a análise de livros didáticos pode fornecer parâmetros para o ensino de determinados conteúdos, no que refere-se a este trabalho, esta análise visa mostrar os atuais métodos de ensino de sistemas lineares no segundo ano do ensino médio. Nesta seção será realizada a análise de três livros didáticos utilizados na Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul em Campo Grande, no segundo ano do ensino médio.

Livros analisados:

(1) Matemática Novo Olhar de Joamir Souza - [22];

(2) Matemática Ciência e aplicações de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida - [20];

(3) Matemática Aula Por Aula de Cláudio Xavier e Benigno Barreto Filho - [21].

2.5.1 Análise do Livro (1)

O livro faz a introdução ao conteúdo utilizando o exemplo de uma situação cotidiana, um problema que envolve uma conta telefônica que possui duas tarifas diferentes, logo pode ser representado e resolvido utilizando um sistema de equações de ordem 2×2, porém o autor utiliza apenas a representação algébrica do sistema e não utiliza a representação geométrica, esta poderia trazer uma melhor visualiação da representação e da solução desse sistema. Após a introdução, o livro define Equação Linear e Sistema Linear, dando exemplos de soluções de algumas equações e de alguns sistemas de equações, são definidos os sistemas de equações homogêneos, e solução trivial de um sistema homogêneo, porém, somente na forma algébrica, a forma geométrica poderia dar aos alunos uma melhor interpretação da solução trivial, já que as retas que representam as equações de um sistema homogêneo se intersectam na origem do plano cartesiano,ou seja, no ponto $(0, 0)$.

Com estas definições apresentadas, o livro traz alguns exercícios resolvidos utilizando os métodos da adição e da substituição para que o aluno relembre-se desses métodos.

Em seguida são apresentas as matrizes associadas à um sistema linear e a classificação de sistemas lineares de acordo com o seu número de soluções, utilizando a análise gráfica das retas representadas pelas equações de um sistema de ordem 2×2. São apresentados alguns exemplos da aplicação de sistemas lineares na Química.

Para a resolução de sistemas lineares de ordens maiores e mais complexos o livro apresenta o Método do Escalonamento, definindo sistemas equivalentes, operações elementares e sistema escalonado, classificando um sistema linear de acordo com seu número de equações e de incógnitas, quando este está na forma escalonada, para essa definição o autor poderia apresentar a definição de sistema escalonado utilizando a matriz completa do sistema. Na apresentação dos sistemas de ordem 3×3 não é apresentada a representação geométrica da intersecção de três planos no espaço que representam as equações de um sistema dessa ordem. Esta, se inserida no contexto, traria uma representação mais visual aos alunos que associariam as diferentes possíbilidades de solução de um sistema de ordem 3×3, já que esta pode não existir, ser um ponto, uma reta ou um plano.

No final do texto o autor trata da discussão de um sistema linear utilizando o conhecimento de determinante, que foi estudado no capítulo anterior.

Verifica-se que este autor está seguindo as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006), que indicam que a Regra de Cramer não seja apresentada aos alunos do ensino médio por ser menos eficiente do que o Método do Escalonamento, porém nota-se que o autor quase não utiliza a abordagem geométrica, se prendendo mais a abordagem algébrica podendo assim tornar o entendimento da representação e da solução de sistemas de ordem 2×2 e 3×3 menos visual e mais complexa aos alunos. O texto utiliza poucas aplicações de sistemas lineares, poderiam ser exploradas aplicações em outras áreas do conhecimento.

2.5.2 Análise do Livro (2)

O autor inicia o assunto com um exemplo que pode ser modelado por meio de uma equação linear com duas incógnitas e em seguida traz a definição desta, trazendo a definição da solução de uma equação linear, traduzindo-as por meio de exemplos resolvidos algebricamente, sem utilizar a representação geométrica desta equação linear, o que poderia trazer mais sentido a interpretação do aluno, já que este visualizaria que essa equação linear representa uma reta no plano.

Após a introdução, o livro trabalha com sistemas lineares de ordem 2×2, apresentando a definição e exemplos do cotidiano que podem ser modelados por meio de um sistema, conforme orientam os PCNs, trabalhando com o Método da Adição para resolução desses sistemas, e com o Método Gráfico para inserir a classificação de sistemas desta ordem, trazendo exercícios resolvidos para ilustrar os três diferentes possíveis casos de intersecção de duas retas no plano.

Então, o texto traz as definições de sistemas lineares de ordem $m \times n$, de matrizes relacionadas a um sistema e de solução de um sistema linear, porém o autor não apresenta a representação geométrica dos sistemas de ordem 3×3, o que pode ser útil para a visualização da representação e dos diferentes tipos de solução que um sistema dessa ordem apresenta.

Na sequência, o autor apresenta o Método do Escalonamento, para ser utilizado na resolução de sistemas lineares, principalmente nos sistemas de ordem maior que 2×2, pois os métodos utilizados no ensino fundamental para resolver sistemas desta ordem tornam-se pouco eficientes na resolução de sistemas de ordens maiores. É apresentada a definição de operações elementares e de sistema na forma escada. Então o autor insere o conteúdo de determinante, inicialmente apresentando um pouco de sua história, e em seguida suas principais definições, pois este é necessário para que se possa inserir a classificação de um sistema linear utilizando o determinante de sua matriz dos coeficientes. O autor apresenta a Regra de Cramer para solução de sistemas lineares, mesmo essa sendo menos eficiente na maioria dos casos e só podendo ser utilizada na resolução de sistemas quadrados e com solução única, não cumprindo com as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006) que orientam para que este método seja abandonado por ser menos eficiente do que o Método do Escalonamento. Finalizando, é inserida a discussão de um sistema linear utilizando o determinante da matriz dos coeficientes e a classificação de sistema homogêneo bem como a solução trivial de um sistema linear homogêneo, mas para definir a solução trivial de um sistema homogêneo o autor utiliza apenas a resolução algébrica e não faz o uso da representação geométrica que poderia mostrar no caso de sistemas de ordem 2×2 as retas que representam as equações deste sistema se intersectam na origem do plano, ou seja, no ponto $(0, 0)$. Da mesma forma, seria possível visualizar que em um sistema de ordem 3×3 a intersecção dos três planos que representam as equações desse sistema ocorre no ponto $(0, 0, 0)$.

Nota-se que o autor não utiliza exercícios envolvendo aplicações de sistemas lineares, e que também há poucas situações-problema, a maioria das atividades propostas são apenas de exercícios que podem ser facilmente resolvidos utilizando-se as fórmulas e ideias apresentadas no próprio texto. Física e Química são alguns dos conteúdos afins que utilizam sistemas lineares na resolução de seus problemas. A utilização deste tipo de exercícios leva a uma interligação entre estas disciplinas, mostrando ao aluno algumas das aplicações de sistemas lineares. Verifica-se também que neste livro o conteúdo de Determinante é inserido no mesmo capítulo em que Sistemas Lineares, além de ser apresentada a Regra de Cramer como método de solução para sistemas lineares, mesmo esta sendo restrita a resolução de sistemas lineraes quadrados e de solução única. Grande parte das definições não possuem explicações, apenas são inseridas no texto.

O livro não utiliza em nenhum momento a representação gráfica de sistemas de ordem 3×3, nem mesmo apresenta as 8 possíveis posições relativas de três planos no espaço, o que deixa vago o conhecimento visual acerca da representação e das soluções de um sistema de ordem 3×3, já que as soluções podem ser iguais a um ponto, uma reta, um plano ou mesmo, não possuir solução.

2.5.3 Análise do Livro (3)

O livro introduz o conteúdo com uma breve história do surgimento e dos estudos sobre Sistemas Lineares, apresenta as definições de equações lineares e de sistemas lineares definindo a solução de um sistema linear e sistema linear homogêneo, sem utilizar exemplos do cotidiano que possam ser representados por sistemas lineares, conforme as orientações dos PCNs e sem utilizar a representação geométrica de uma equação linear e de um sistema linear de ordem 2×2, o que torna mais visual o conhecimento acerca dessas definições.

Na sequência, o livro apresenta os sistemas de ordem 2×2, bem como os métodos já estudados no ensino fundamental, (adição e substituição), trata da classificação dos sistemas dessa ordem utilizando sua representação gráfica e sua solução algébrica simultaneamente, porém sem utilizar situações-problema, apenas exercícios que podem facilmente serem resolvidos com a utilização dos métodos apresentados. Então, é apresentada a Regra de Cramer para a solução de sistemas quadrados e com determinante diferente de zero, mesmo que as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006) orientem que esse método seja abolido do Ensino Médio, por ser menos eficiente do que o Método do Escalonamento. Após o estudo da Regra de Cramer, é apresentada a classificação de um sistema utilizando para isso o determinante da matriz dos coeficientes sem fazer uso da representação geométrica que traz uma melhor visualização para o aluno, já que é possível visualizar os diferentes tipos de solução de um sistema linear de ordem 2×2 e de ordem 3×3.

O texto apresenta então o Método do Escalonamento de Sistemas, porém não define as operações elementares que podem ser utilizadas para escalonar um sistema, apenas são apresentados exemplos resolvidos para ilustrar o escalonamento de sistemas e as possíveis operações elementares.

O autor utiliza pouco a representação geométrica dos sistemas na classificação de sistemas de ordem 2×2, poder-se-ia ilustrar a solução trivial de um sistema homogêneo de ordem2×2, graficamente, mostrando que a intersecção entre as retas que representam as equações do sistema se intersectam na origem do plano. No que refere-se a representação de sistemas de ordem 3×3 não é apresentada em nenhum momento sua representação geométrica, nem é citado que as equações de um sistema dessa ordem representam um plano, e que a solução do sistema é justamente a intersecção entre esses planos, que pode ser vazia, um ponto, uma reta ou mesmo um plano.

O livro não apresenta aplicações de sistemas lineares em áreas afins, como em Física e Química, bem como apresenta poucas situações-problema e mais exercícios de fácil resolução. As definições apresentam-se, em geral, sem justificativas e desprovidas de sentido.

2.6 Contribuições Para o Ensino de Sistemas Lineares

Nesta seção, será apresentado um roteiro para ser utilizado no ensino de sistemas lineares no segundo ano do ensino médio, com ideias que foram desenvolvidas neste trabalho com o intuito de mostrar como é possível utilizar a representação geométrica para facilitar a visualização e o entendimento dos alunos sobre a representação e a solução de um sistema linear.

Para introduzir o conteúdo é interessante utilizar exemplos do cotidiano dos alunos que recaiam em equações lineares e em sistemas lineares, inicialmente apenas sistemas de ordem 2×2 pois estes já foram estudados no ensino fundamental. Podem ser utilizadas situações-problemas de Matemática, Física e Química que recaiam em sistemas de ordem 2×2. O uso desse tipo de problema está de acordo com [18], pois segundo este, o aluno do segundo ano do ensino médio deve modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. Então, pode-se apresentar as representações geométricas de equação linear e de sistema linear de ordem 2×2, para que o aluno consiga visualizar os significados geométricos de equação linear e sistema linear de ordem 2×2, bem como o significado das soluções de uma equação linear com duas incógnitas e de um sistema linear de ordem 2×2, já que segundo [8] recomenda-se colocar a álgebra sobre o olhar da geometria .

Após essa introdução, faz-se necessário apresentar as definições formais de equação linear, e de sistema linear de ordem 2×2, além de definir o conjunto solução de uma equação linear e de um sistema linear de ordem 2×2. É importante também que seja apresentada a definição de sistema linear homogêneo, bem como a de solução trivial de um sistema linear homogêneo. Após a apresentação dessas definições, a representação geométrica dos três possíveis casos de solução de um sistema deve ser apresentada, para facilitar o entendimento dos alunos, dando a eles um significado mais visual desses casos.

Representação geométrica de sistemas lineares de ordem 2×2, de acordo com a posição relativa entre as duas retas que representam as equações de um sistema dessa ordem.

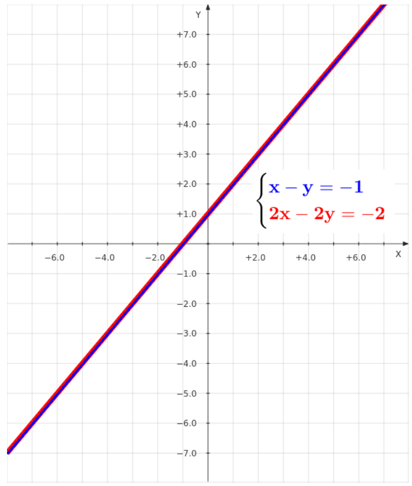

Figura 2.6.1: Retas coincidentes

Neste caso, todos os pontos $P = (x, y)$ que pertencem a reta $r : x - y = -1$, também pertencem a reta $s : 2x - 2y = -2$, ou seja, todos os pontos que satisfazem a equação $x - y = -1$ satisfazem a equação $2x - 2y = -2$, logo são soluções do sistema, portanto o sistema é possível e indeterminado, pois possui infinitas soluções.

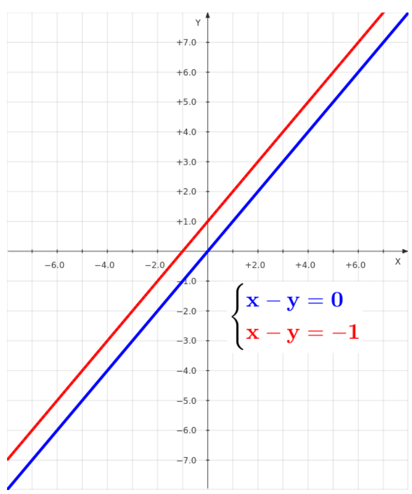

Figura 2.6.2: Retas paralelas

Como as retas são paralelas, nota-se, que nenhum dos pontos $P = (x, y)$ pertencentes a reta $r : x - y = 0$, pertence a reta $s : x - y = -1$, logo não há nenhum ponto que satisfaz as duas equações do sistema simultaneamente, isto é, o sistema não possui solução, portanto é um sistema impossível.

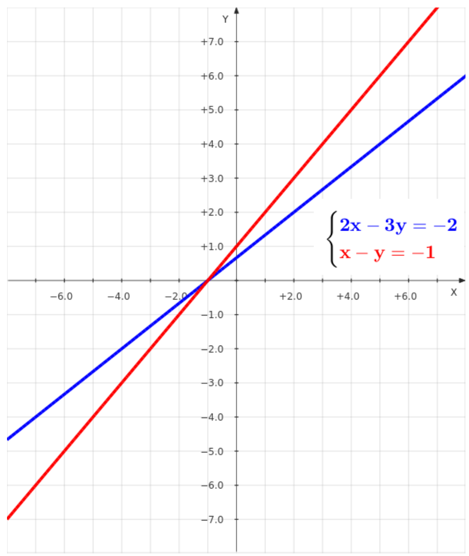

Figura 2.6.3: Retas concorrentes

Nota-se que apenas um ponto $P = (x, y)$ satisfaz as equações do sistema simultaneamente, ou seja, apenas um ponto $P = (x, y)$ que pertence a reta $r : 2x - 3y = -2$, pertence simultaneamente a reta $s : x - y = -1$, logo, esse ponto de intersecção entre as retas r e s , é a solução do sistema. Portanto o sistema é possível e determinado, pois possui uma única solução.

Utilizando a representação geométrica, pode-se apresentar a solução trivial de um sistema homogêneo, tornando visível ao aluno que a intersecção entre as retas, ou seja, a solução do sistema, ocorre na origem do plano cartesiano.

Representação geométrica de sistemas lineares homogêneos de ordem 2×2, com a visualização de sua solução trivial.

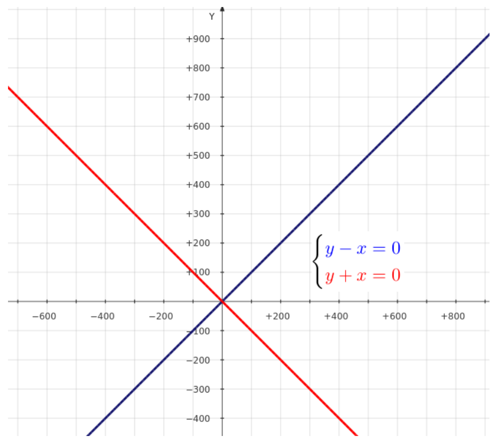

Figura 2.6.4: Sistema linear homogêneo em que as retas são concorrentes

Nota-se nesse caso que apenas o ponto $(0, 0)$ é solução do sistema.

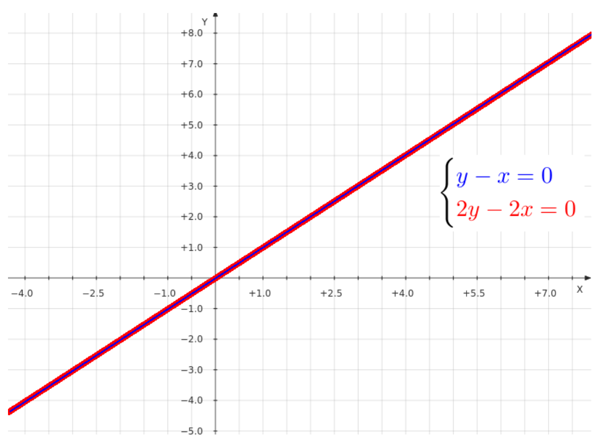

Figura 2.6.5: Sistema linear homogêneo em que as retas são coincidentes

A figura mostra que as duas retas que representam as equações do sistema são coincidentes e passam pelo ponto $(0,0)$, logo todos os pontos pertencentes a ambas as retas, são soluções do sistema.

Tendo sido explorado os sistemas de ordem 2×2 inicia-se a apresentação dos sistemas de ordem 3×3 e depois a generalização para sistemas de ordem $m \times n$. Para ilustrar os sistemas de ordem 3×3 deve ser utilizados exemplos do cotidiano dos alunos que possam ser representados e resolvidos com a utilização de um sistema de ordem 3×3. Também é importante que o aluno saiba qual é a representação geométrica dos sistemas de ordem 3×3, utilizando para isso a representação dos 8 casos de intersecção entre três planos no espaço, pois esses casos de intersecção representam as quatro possibilidades de solução de um sistema de ordem 3×3, (não possuir solução, ser um ponto, uma reta ou um plano)

Apresentação das 8 posições relativas de três planos no espaço, e a interpretação do conjunto solução do sistema em cada caso:

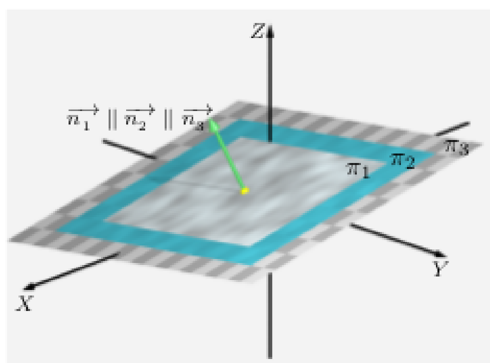

Figura 2.6.6: Três planos coincidentes

Neste caso, a intersecção entre os três planos é um plano, logo todos os pontos $P = (x, y, z)$ de π_1 são soluções do sistema, pois $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1$. Portanto o sistema possui infinitas soluções. Um sistema nessas condições é classificado como possível e indeterminado.

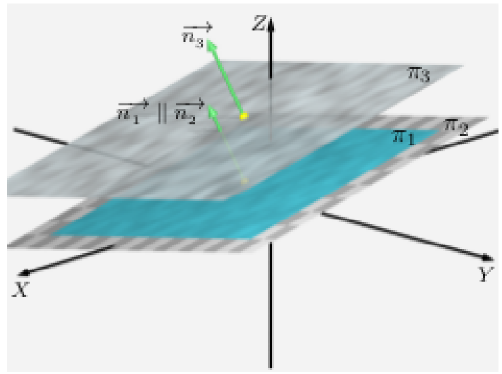

Figura 2.6.7: Dois planos coincidentes e o terceiro é paralelo a eles

Note que $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1$, mas $\pi_1 \cap \pi_3 = \varnothing$, logo não há nenhum ponto $P = (x, y, z)$ que pertença aos três planos simultaneamente, então o sistema não possui solução. Portanto é um sistema impossível.

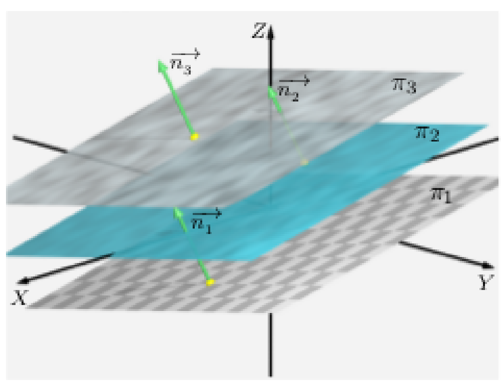

Figura 2.6.8: Os planos são paralelos dois a dois

O sistema não possui solução, pois não há nenhum ponto $P = (x, y, z)$ que satisfaça as três equações do sistema simultaneamente, pois $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$, logo o sistema é impossível.

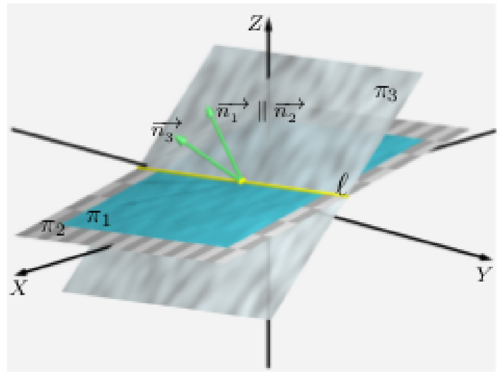

Figura 2.6.9: Dois planos coincidentes e o terceiro os intersectam segundo uma reta l

Todos os pontos $P = (x, y, z)$ pertencentes ao plano π_1 pertencem ao plano π_2, pois $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1$, mas $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = l$, então, apenas os pontos pertencentes a reta l pertencem simultaneamente aos três planos, logo esses pontos são as soluções do sistema, portanto o sistema é possível e indeterminado.

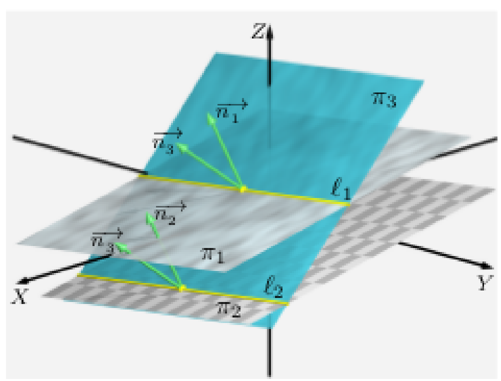

Figura 2.6.10: Dois planos paralelos e o terceiro os intersecta segundo as retas l_1 e l_2

Neste caso, o sistema não possui solução pois $\pi_1 \cap \pi_3 = l_1$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = l_2$, como $\pi_1 \parallel \pi_2$, temos que $l_1 \parallel l_2$, logo não há nenhum ponto $P = (x, y, z)$ que satisfaça as três equações do sistema simultaneamente, portanto o sistema é impossível.

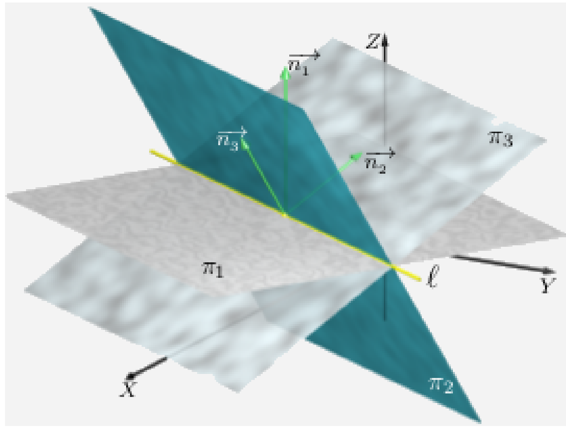

Figura 2.6.11: Os três planos são distintos e se intersectam segundo uma reta l

Todos os pontos $P = (x, y, z)$ pertencentes a reta l são soluções do sistema, pois $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = l$, logo o sistema é possível e indeterminado.

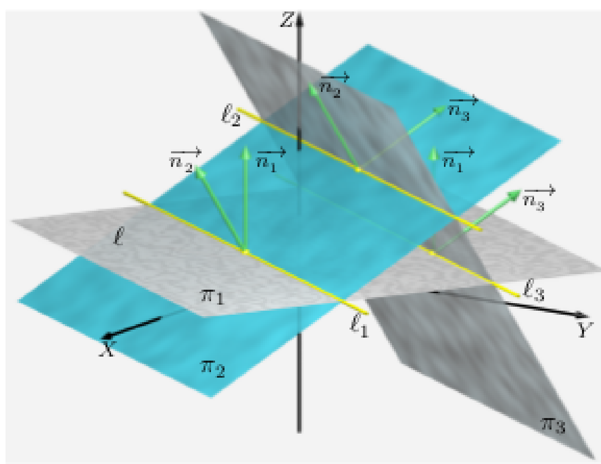

Figura 2.6.12: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas l_1, l_2, l_3

O sistema não possui solução pois não há nenhum ponto $P = (x, y, z)$ que satisfaça as três equações do sistema simultaneamente, pois $\pi_1 \cap \pi_2 = l_1$, $\pi_2 \cap \pi_3 = l_2$e $\pi_1 \cap \pi_3 = l_3$, e $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, portanto o sistema é impossível.

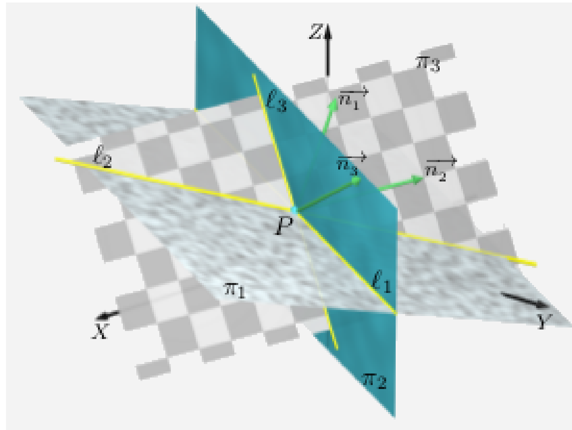

Figura 2.6.13: Os três planos se intersectam segundo um único ponto P.

Note que $\pi_1 \cap \pi_2 = l_1$, $\pi_2 \cap \pi_3 = l_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = l_3$ e que $l_1 \cap l_2 \cap l_3 = P$, logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P$, então o sistema possui uma única solução dada pelo ponto $P = (x, y, z)$ que é o ponto de intersecção entre os planos π_1,π_2 e π_3. Portanto o sistema é possível e determinado.

Após a apresentação das possíveis posições relativas de três planos no espaço, devem ser apresentadas aos alunos as definições de Sistemas Equivalentes, Operações Elementares, Matriz dos Coeficientes e Matriz Completa de um Sistema Linear, demonstrando que aplicando operações elementares transforma-se uma matriz A em uma outra matriz A' que é equivalente A. Com isso é possível mostrar aos alunos que podemos transformar um sistema S em um outro sistema S' equivalente a S, que possa ser resolvido com facilidade, como $S \sim S'$, temos que a solução de S também é solução de S' e vice versa. Pode-se utilizar a representação geométrica para mostrar que a intersecção entre as retas que representam as equações de S e as retas que representam as equações de S' ocorrem nos mesmos pontos.

Apoś o estudo das definições anteriores, inicia-se a apresentação do Método do Escalonamento de Sistemas, iniciando com a definição de Matriz Reduzida a Forma Escada, demonstrando que dada uma matriz A só existe uma matriz A' equivalente por linhas a A que esteja na forma escada, isso é importante para que os alunos saibam que ao escalonar uma matriz A, todos devem obter a mesma matriz A' na forma escada. Agora é possível aplicar o método do escalonamento para a solução de sistemas de ordem 3×3 e em seguida iniciar a discução de um sistema linear de ordem 3×3 de acordo com o número de equações e de incógnitas de um sistema na forma escalonada.

Então, apresenta-se a discussão de um sistema linear de ordem $n \times n$, utilizando o conhecimento sobre determinante estudado anteriormente. É importante apresentar situações-problema que interliguem os conhecimentos acerca de sistemas lineares com outros conteúdos já estudados pelos alunos, bem como inserir aplicações de sistemas lineares em áreas afins, para que os alunos notem a importância de tal conteúdo e vejam essa interligação entre estas áreas do conhecimento.

2.7 Considerações Finais

Este capítulo tratou do ensino de Sistemas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio, exibindo como o conteúdo apresentado em cada uma das etapas de ensino. Foi apresentada uma análise crítica de três livros, utilizados no segundo ano do ensino médio, nas escolas de Campo Grande-Ms, então foi apresentado um possível roteiro para ser utilizado no ensino de sistemas lineares no segundo ano do ensino médio, utilizando as abordagens algébrica e geométrica, pois esta é pouco utilizada pelos livros didáticos, e seu uso pode facilitar a visualização da representação e da solução de sistemas de ordem 2×2 e 3×3.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica dos Sistemas Lineares

Neste capítulo, será apresentada a fundamentação teórica sobre Sistemas Lineares, enunciando as principais definições, teoremas e proposições, além de tratar de um método de resolução de sistemas lineares, o Método do Escalonamento.

Definição 1. Chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ as equações da forma $a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n = b$, onde os números $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ são denominados de coeficientes da equação e b é o termo independente da equação.

A solução de uma equação linear é a n-upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que quando substituídos na equação, no lugar das incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, fazem com que a sentença seja verdadeira [10].

Definição 2. Sistema linear é um conjunto de $m(m \geq 1)$ equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$. Dessa forma o sistema

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{, é linear.}$$

Uma n-upla de números $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema linear se satisfaz a todas as equações do sistema simultaneamente, isto é: $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é solução se, e somente se, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ [3].

Definição 3. Sistemas Lineares Homogêneos são os sistemas em que todos os termos independentes $b_1, b_2, ..., b_n$ são todos iguais a zero.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Assim, dado um sistema homogêneo a n-upla $(0, 0, 0, ..., 0)$ é uma solução do sistema. Esta é denominada de solução trivial de qualquer sistema linear homogêneo. Logo, todo sistema homogêneo possui pelo menos uma solução, ou seja, todo sistema linear homogêneo é possível.

3.1 Matrizes

Nesta seção apresentar-se-á os conceitos básicos sobre matrizes. Esses conceitos aparecem naturalmente na resolução de problemas que envolvem sistemas lineares, são essenciais, porque fornecem métodos de resolução.

Definição 4. Chama-se matriz, uma tabela formada por elementos de $\mathbb{R}$, organizados em linhas e colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados de entradas da matriz.

Em uma matriz qualquer A, cada elemento é indicado por a_{ij}. Onde o índice i indica a linha a qual o elemento pertence, e o índice j a coluna a qual o elemento pertence. Sendo que as linhas são numeradas de 1 até m, e as colunas numeradas de 1 até n, uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma matriz A, do tipo $m \times n$ também pode ser indicada por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

3.1.1 Matrizes Especiais

a) *matriz linha*: Toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, uma matriz que possui apenas uma linha.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

b) *matriz coluna* : Toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, uma matriz que possui apenas uma coluna.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

c) *matriz nula*: Toda matriz, em que, para qualquer elemento a_{ij}, tem-se $a_{ij} = 0$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

d) *matriz quadrada*: Toda matriz, em que, o número de linhas é igual ao número de colunas.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

e) *matriz triangular inferior*: Toda matriz quadrada, na qual, todos os elementos a_{ij}, em que, $i < j$ são iguais a zero.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

f) *matriz triangular superior* : Toda matriz quadrada, na qual, todos os elementos a_{ij}, em que, $i > j$ são iguais a zero.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

g) *matriz diagonal*: Toda matriz quadrada, na qual, todos os elementos a_{ij}, em que, $i \neq j$ são iguais a zero.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

h) *matriz identidade*: Toda matriz diagonal, na qual, todos os elentos a_{ij}, em que, $i = j$ são iguais a 1.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

3.1.2 Operações com Matrizes

Ao utilizar matrizes, surge a necessidade de efetuar-se algumas operações com matrizes, estas operações serão apresentadas a seguir.

3.1.2.1 Igualdade

Definição 5. Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, são iguais, e escreve-se $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$.

3.1.2.2 Adição

Definição 6. A adição de duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, é uma matriz $m \times n$, que será denotada por $A + B$, cujos os elementos são obtidos pela soma dos elementos correspondentes de A e B. Isto é, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Proposição 1. *Dadas as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *e* $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, *tem-se:*

i) $A + B = B + A$ (comutatividade);

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade);

iii) $A + 0 = A$, onde 0 representa a matriz nula de ordem $m \times n$;

iv) $A + (-A) = 0$, onde $(-A)$ é a matriz oposta da matriz A.

Demonstração. A demonstração dos itens decorrem diretamente das definições de igualdade e adição de matrizes. Por esse motivo será provado apenas o item (ii) , a demonstração dos itens $(i), (iii)$ e (iv), pode ser encontrada em [17].

(i): Se $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, então

$A + (B + C) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = (A + B) + C$. □

3.1.2.3 Multiplicação por Escalar

Definição 7. Seja uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real, então $k.A = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Proposição 2. *Dadas as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, *e os números reais* k, k_1 *e* k_2, *verificam-se as seguintes propriedades:*

i) $k(A + B) = kA + kB$

ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

iii) $0.A = 0$

iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

v)$1.A = A$ (elemento neutro)

Demonstração. (*i*): De fato, sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ e k um elemento pertencente a $\mathbb{R}$, então

$k(A + B) = k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [ka_{ij} + kb_{ij}] = [ka_{ij}] + [kb_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$. A demonstração das demais propriedades é encontrada em [17]. □

3.1.2.4 Transposição

Definição 8. Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, pode-se obter um matriz $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A matriz A^T é denominada transposta de A.

Proposição 3. *Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, de mesma ordem, e k um número real então,*

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

iii) $(kA)^T = kA^T$, onde k é um número real qualquer.

Demonstração. (*ii*) Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Então,

$(A + B)^T = [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} = [a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} = A^T + B^T$. A demonstração das demais propriedades é encontrada em [17]. □

Definição 9. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, é simétrica se, e somente se, $A = A^T$.

3.1.2.5 Produto de Matrizes

Definição 10. Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, denomina-se produto de A por B e representa-se por $A \cdot B$ a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$, tal que

$C_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum a_{ij} \cdot b_{jk}, \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, m\}\, e\, \forall$ $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$.

Proposição 4. *Desde que as operações sejam possíveis, tem-se:*

i) $AI_n = I_nA = A$

ii) $A(B + C) = AB + AC$

iii) $(A + B)C = AC + BC$

iv) $A(BC) = (AB)C$

v) $(AB)^T = B^TA^T$

vi) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$

3.1.3 Matriz Inversa

Definição 11. Uma matriz quadrada de ordem n, possui inversa se existe uma matriz B, tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Caso esta matriz B exista, ela é única e chama-se inversa de A, e indica-se por A^{-1} [5].

3.1.3.1 Unicidade da Matriz Inversa

Proposição 5. *Se, A é inversível, então sua inversa A^{-1} é única.*

Demonstração. De fato, se existir duas matrizes B e C que são inversas da matriz A, então:

$B = B \Rightarrow B = B \cdot I_n \Rightarrow B = B \cdot (AC) \Rightarrow B = (BA) \cdot C \Rightarrow B = I_n \cdot C$. Portanto, $B = C$. $\square$

Corolário 1. *A condição necessária e suficiente para que a matriz quadrada A, possua inversa A^{-1}, é que $det(A) \neq 0$.*

Proposição 6. *Sejam* as matrizes $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{n \times n}$, *de mesma ordem, então,*

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

$ii)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$iii)\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

$iv)\ det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

$v)\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Demonstração. (i) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Suponha que A é invertível e que sua inversa seja a matriz A^{-1}. Dessa forma

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

Logo, A^{-1} também é invertível e sua inversa é $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Suponha que A e B são invertíveis e que suas inversas sejam respectivamente A^{-1} e B^{-1}. Então:

$$(AB) \cdot (A^{-1}B^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n \text{ e}$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Portanto, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

A demonstração das demais propriedades pode ser encontrada em [17]. □

Definição 12. Seja uma matriz $E = [a_{ij}]_{n \times n}$, obtida a partir da matriz I_n, pela aplicação de uma das transformações elementares, em sua $i - ésima$ linha, denotada por L_i. Diz-se que $E = [a_{ij}]_{n \times n}$, é uma matriz elementar e representa-se por $E = e(I_n)$.

Define-se por transformações elementares nas linhas de uma matriz A, as seguintes operações:

(i) Permutação das linhas L_i e L_j, indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) Substituição de uma linha L_i pela adição desta linha com k vezes uma outra linha L_j, indicada por $L_i \rightarrow L_i + kL_j, k \in R$ e $k \neq 0$.

(iii) Multiplicação de uma linha L_i por um número real k não nulo, indicado por $L_i \rightarrow kL_i$.

Proposição 7. *Toda transformação elementar e nas linhas de uma matriz A é reversível.*

Demonstração. Se e é uma transformação elementar do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$ tome a transformação $e' = e$. Se e é uma transformação do tipo $L_i \rightarrow kL_i$, tome a transformação $e' = L_i \rightarrow \frac{1}{k}L_i$. Mas, se e é uma transformação do tipo $L_i \rightarrow L_i + kL_j$, tome e' como a transformação $L_i \rightarrow L_i - kL_j$. □

Corolário 2. *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

3.1.4 Determinante

Definição 13. A toda matriz quadrada $A = (a_{ij})$, de ordem n, cujos elementos a_{ij} são números reais, associa-se, por definição, um único número que será denominado o seu *determinante* e que será indicado por $det(A)$. Sejam M o conjunto das matrizes quadradas de ordem n e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Considere a função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida do seguinte modo [3]:

(i) se $n = 1$, $M = (a_{11})$, define-se $det(M) = a_{11}$

(ii) se $n \geq 2$, define-se $det(M)$ pela fórmula de recorrência

$$det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}.a_{i1}.D_{i1}, \text{ isto é:}$$

$$det(M) = (-1)^{1+1}.a_{11}.D_{11} + (-1)^{2+1}.a_{21}.D_{21} + ... + (-1)^{n+1}.a_{n1}.D_{n1},$$

onde D_{i1} é o determinante da matriz que se obtém de M, suprimindo-se a linha de índice i e a coluna de índice 1.

Aplicando a definição quando $M = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 2:

$$det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.a_{11}.D_{11} + (-1)^{2+1}.a_{21}.D_{21},$$

note que $D_{11} = a_{22}$ e $D_{21} = a_{12}$, então tem-se que $det(M) = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$

Aplicando a definição quando $M = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem 3:

$$det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.a_{11}.D_{11} + (-1)^{2+1}.a_{21}.D_{21} + (-1)^{3+1}.a_{31}.D_{31},$$

note que $D_{11} = a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}$, $D_{21} = a_{12}.a_{33} - a_{32}.a_{13}$ e $D_{31} = a_{12}.a_{23} - a_{22}.a_{13}$, então

$$det(M) = a_{11}(a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}) - a_{21}(a_{12}.a_{33} - a_{32}.a_{13}) + a_{31}(a_{12}.a_{23} - a_{22}.a_{13}) =$$
$$+(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}),$$

observe que nesse desenvolvimento três termos são precedidos do sinal de $(+)$ e três termos pelo sinal de (-). Esses termos podem ser obtidos adotando-se a disposição abaixo, onde coloca-se ao lado da 3ª coluna as duas primeiras colunas da matriz, esse desenvolvimento é chamado de Regra de Sarrus.

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right| =$$

$$= +a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}.$$

Note que as multiplicações que vão da esquerda para a direita possuem sinal $(+)$ e as que vão da direita para a esquerda possuem sinal (-).

3.1.5 Forma Escada de uma Matriz

Definição 14. Uma matriz de ordem $m \times n$ será dita na forma escada ser for nula, ou se:

(i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é o número 1.

(ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(iv) Se as linhas $1, 2, ..., r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna K_i então $K_1 < K_2 < ... < K_i$. Esta última condição impõe a forma escada á matriz [3].

Definição 15. Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. A matriz A é dita ser equivalente por linhas à matriz B se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.

Teorema 1. *Toda matriz é equivalente a uma única matriz na forma escada.*

3.2 Classificação de um Sistema Linear

Um sistema linear pode ser classificado quanto ao número de soluções que possui, assim é classificado como possível e determinado se possui solução única, possível e indeterminado se possui infinitas soluções e é classificado como impossível quando não possui solução [5]. Para classificar sistemas de ordem 2×2, pode-se utilizar a posição relativa entre as retas que representam as equações dos sistemas, verificando se estas são paralelas (impossível), concorrentes (possível e determinado) ou coincidentes (possível e indeterminado). Em um sistema de ordem 3×3, é possível verificar a intersecção entre os planos que representam as equações do sistema, se a intersecção é um ponto o sistema é possível e determinado, se a intersecção é uma reta ou um plano o sistema é possível e indeterminado e se a intersecção entre os três planos é vazia o sistema é impossível.

3.2.1 Forma Matricial de um Sistema Linear

Considere o sistema linear com m equações e n incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

associa-se a este sistema três matrizes: a matriz A que é a matriz incompleta do sistema, (matriz dos coeficientes), a matriz X que é a matriz das incógnitas e a matriz B que é a matriz dos termos independentes[3]. Assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Todo sistema pode ser escrito como um produto de matrizes. Seja o sistema:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

O produto que representa o sistema linear acima é dado pela equação matricial

$$A.X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Observação 4. A matriz completa de um sistema linear é a matriz formada pela matriz dos coeficientes e pela matriz dos termos independentes desse sistema, assim dado o sistema linear

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

, a matriz completa de S é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Sistemas Lineares Equivalentes

Definição 16. Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes, quando toda solução de S_1 também é solução de S_2 e toda solução de S_2 também é solução de S_1, ou seja, quando possuem o mesmo conjunto solução [10].

Teorema 2. *Multiplicar qualquer uma das equações do sistema inicial S, por um número real $k \neq 0$, o novo sistema S_1 obtido é equivalente ao sistema inicial S, assim toda solução de S_1 é solução de S e toda solução de S é solução de S_1.*

Demonstração. Seja

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Multiplicando a $i-ésima$ linha de S por $k \neq 0$, obter-se-á o seguinte sistema:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + ... + ka_{in}x_n = kb_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre os sistemas S e S' é a $i-ésima$ equação. Portanto, deve-se analisar somente esta linha do sistema.

($\Rightarrow$) Suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ é uma solução de S. Veja que também é uma solução de S'.

De fato, por hipótese: $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Assim, tem-se que:

$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ... + ka_{in}\alpha_n = k(a_{i1}\alpha 1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n) = kb_i.$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) satisfaz a $i - ésima$ equação de S'.

Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) é solução de S'.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) é uma solução de S'. Veja que também é solução de S.

Por hipótese:

$ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ... + ka_{in}\alpha_n = kb_i,$

donde tem-se que:

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = \frac{k}{k}a_{i1}\alpha_1 + \frac{k}{k}a_{i2}\alpha_2 + ... + \frac{k}{k}a_{in}\alpha_n =$

$\frac{1}{k}[ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + ... + ka_{in}\alpha_n] = \frac{1}{k}.k.b_i = b_i.$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) é solução da $i - ésima$ equação de S. Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$) é solução de S. □

Teorema 3. *Multiplicando qualquer equação do sistema por um número real $k \neq 0$ e adicionando esta a uma outra equação qualquer do sistema S, o novo sistema S_2 obtido é equivalente ao sistema inicial S, assim toda solução de S_2 é solução de S e vice versa.*

Demonstração. Seja

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Substituindo a $i-ésima$ equação de S, pela soma, membro a membro, dela com a $j-ésima$ equação, obtem-se o seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 ... + (a_{in} + a_{jn})x_n = b_i + b_j \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a $i-ésima$ equação, logo deve-se analisar somente esta linha do sistema.

($\Rightarrow$) Suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ é solução de S e prove que também é solução de S'.

De fato, por hipótese:

$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i (I)$

$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j\ (II)$

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ no primeiro membro da $i-ésima$ equação de S', tem-se que:

$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + ... + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n =$

$= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n) + (a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n) = b_1 + b_j.$

O que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ satisfaz a $i - ésima$ equação de S'. Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ é solução de S'.

($\Leftarrow$) Suponha agora que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ é uma solução de S'. Deve-se provar que também é solução de S.

De fato, por hipótese:

$$\begin{cases} (a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + ... + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n (I) \\ e \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + ... + a_{jn}\alpha_n = b_j (II) \end{cases}$$

Das igualdades (I) e (II), conclui-se que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$, o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ satisfaz a $i - ésima$ equação de S. Portanto $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ é solução de S. $\square$

Teorema 4. *Sistemas lineares que possuem matrizes ampliadas (completas) equivalentes, são equivalentes.*

A demonstração do Teorema será feita usando matrizes elementares.

Demonstração. Sejam A e A' matrizes ampliadas dos sistemas S e S' respectivamente, sendo estas matrizes-linha equivalentes. Então, tem-se que $A' = MA$, onde M é um produto de matrizes elementares, e portanto, invertível. Os sistemas S e S' podem ser escritos respectivamente:

$NX = B$ e $N'X = B'$,

onde N é a matriz A na qual se substituiu a última coluna por B, da mesma forma N' é a matriz A' na qual se substituiu a última coluna por B'. Além disto, verifica-se que:

$N' = MN$ e $B' = MB$.

Portanto, $NX = B \Leftrightarrow MNX = MB \Leftrightarrow N'X = B'$. Isto significa que os sistemas S e S' são equivalentes pois toda matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que seja a solução do sistema S será solução do sistema S' e vice versa. $\square$

3.3 Resolução de Sistemas Lineares

Nesta seção será apresentado o Método do Escalonamento de Sistemas Lineares para resolução de sistemas lineares de ordem $n \times n$.

3.3.1 Método do Escalonamento de Sistemas Lineares

Este método consiste em transformar um sistema inicial em um sistema na forma escada, utilizando para isso operações elementares com as linhas e/ou colunas do sistema.

Definição 17. Um sistema linear é reduzido à forma escada se:

(i) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é o número 1.

(ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(iv) Se as linhas $1, 2, ..., r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_i$. Esta última condição impõe a forma escada ao sistema.

Definição 18. Operações elementares são as operações feitas com as linhas de um sistema S de forma que sempre o transformam em um sistema S' que é equivalente ao sistema S. As possíveis operações elementares são:

(i) Permutar duas das linhas ou colunas de A.

(ii) Multiplicar uma das linhas por um número real $k \neq 0$.

(iii) Somar a uma das equações do sistema, uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real $k \neq 0$.

Definição 19. Dado um sistema S, utilizando um número finito de vezes as operações elementares obtem-se um novo sistema S_1. O sistema S_1 é equivalente ao sistema S. Notação $S \sim S_1$.

A relação assim definida é uma relação de equivalência, pois, goza das seguintes propriedades [5]:

(i) $S \sim S$ (reflexiva);

(ii) $S_1 \sim S \Rightarrow S \sim S_1$(simétrica); e

(iii) $S_1 \sim S$ e $S_2 \sim S \Rightarrow S_1 \sim S_2$ (transitiva).

Se $S \sim S_1$ então toda solução de S é solução de S_1 e vice-versa. Assim, há um método para resolver sistemas, já que pode-se trocar um sistema S por um sistema S' equivalente a S que possa ser resolvido.

Teorema 5. *Todo sistema S é equivalente a um único sistema na forma escada.*

Demonstração. Existência: Deve-se demonstrar que todo sitema S é equivalente a um sistema na forma escada.

Seja um sistema S com m equações e $n-1$ incógnitas. Associa-se a este sistema a matriz A de ordem $m \times n$, que é a matriz completa do sistema S. Se todo elemento da primeira linha de A é igual a zero, a primeira condição está satisfeita no que se trata da primeira linha. Agora, se a primeira linha possui algum elemento não nulo, tome k o menor inteiro da linha j tal que $a_{ij} \neq 0$. Então, multiplica-se a primeira linha pelo inverso de a_{ij} e a primeira condição ficará satisfeita. Agora, para cada $i \geq 2$ some $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à i-ésima linha. Assim, obtem-se uma matriz cujo primeiro elemento de cada linha é igual a zero, exceto o primeiro elemento da linha k o qual é igual a 1.

Tome agora a segunda linha dessa matriz B obtida, se nesta houver elementos não nulos, seja a coluna k' a primeira a conter um deles, então multiplique a segunda linha pelo inverso desse elemento não nulo, em seguida, somando múltiplos adequados desta nova segunda linha às demais linhas, obtem-se uma matriz cujo primeiro elemento da segunda linha é igual a 1 e os demais elementos dessa linha são todos nulos.

Repetindo esse procedimento em relação às demais linhas obtem-se uma matriz A' que é linha equivalente a matriz A. O sistema S' Associado a matriz A', está na forma escada e é equivalente ao sistema S.

Unicidade: Agora que já foi provada a existência, é necessário provar a unicidade, ou seja, que o sistema S' obtido é único.

De fato, suponha que através das operações com linhas, partindo de uma matriz A, pode-se chegar a duas matrizes-linha reduzidas a forma escada, B e C. Tem-se então que $A \sim B$ e $A \sim C$. Como as operações com linhas são reversíveis, isso significará que B é linha equivalente a C, e, portanto, $B = C$. Logo o sistema S' na forma escada equivalente ao sistema S é único. $\square$

3.3.2 Escalonamento de Sistemas

Para escalonar um sistema, é necessário seguir vários passos, baseando-se nas operações elementares apresentadas na seção 3.3.1.

1º passo: Coloca-se como primeira equação aquela em que o coeficiente da primeira incógnita é igual a 1, caso não haja nenhuma equação nessas condições deve-se multiplicar uma das equações que tenha o primeiro coeficiente k pelo número $\frac{1}{k}$ tornando assim o primeiro coeficiente dessa equação igual a 1.

2º passo: Anula-se o coeficiente da primeira incógnita de todas as equações, menos o da primeira equação, substituindo a i-ésima equação $(i \geq 2)$ pela soma da mesma com a primeira multiplicada por um número conveniente.

3º passo: Deixa-se de lado a primeira equação e aplica-se o 1º e o 2º passos nas equações seguintes e assim sucessivamente até que o sistema fique na forma escalonada e possa ser resolvido utilizando uma das maneiras que serão citadas na próxima seção.

Porém, se ao seguir os passos descritos obter-se uma linha do tipo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{bmatrix}$, há duas possibilidades a serem consideradas:

$i)$ Se $b_m = 0$, elimina-se esta linha e continua-se o procedimento.

$ii)$ Se $b_m \neq 0$, tem-se uma equação do tipo $0x_n = b_m$, logo o sistema é impossível.

3.3.2.1 Resolução de Sistemas Lineares

No que refere-se a resolução de sistemas lineares via escalonamento, há dois casos a serem considerados:

1º caso - número de equações igual ao número de incógnitas.

Nesse caso o sistema S será da seguinte forma:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $a_{ii} \neq 0$, $\forall\ i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Assim, a matriz incompleta do sistema é a matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $D = det(A) \neq 0$ o sistema linear S é possível e determinado. Para obter os valores de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\ )$ da solução do sistema S, deve-se partir da última equação, obtendo o valor de x_n; em seguida, substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1} e assim sucessivamente obtendo os valores de x_{n-2},x_{n-3},...,x_2,x_1.

2º caso - número de equações é menor que o número de incógnitas.

Nesse caso o sistema será do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (j \geqslant 2) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad a_{mr}x_r + ... + a_{mn}x_n = b_m \qquad (r > j) \end{cases}$$

com $m < n$.

Para resolver este sistema, pode-se tomar as incógnitas livres do sistema e transpô-las para o segundo membro, obtendo um novo sistema que deve ser visto como se tivesse apenas as incógnitas do primeiro membro das equações. Assim atribuindo valores as incógnitas do segundo membro, tem-se um sistema do primeiro caso, portanto, determinado; resolvendo-o, obtem-se uma solução do sistema. Se forem atribuidos outros valores as incógnitas do segundo membro obter-se-á outra solução e assim sucessivamente. Como este procedimento de atribuir valores as incógnitas do segundo membro pode continuar indefinidamente pode-se extrair do sistema original um número infinito de soluções. Um sistema dessa forma é dito possível e indeterminado.

Observação 5. Chama-se de grau de indeterminação o número de variáveis livres do sistema, isto é $n - m$.

Definição 20. Uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a matriz A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n - p$.

Proposição 8. *Uma matriz quadrada de ordem n é invertível se, e somente se, ela tem posto n.*

Teorema 6. (i) *Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz completa é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*

(ii) *Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, o sistema possui uma única solução.*

(iii) *Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, pode-se escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.*

Demonstração.

<u>1ª parte</u>: Se o posto da matriz ampliada for maior que o da matriz dos coeficientes, então esta matriz reduzida à forma escada deve ter pelo menos uma linha do tipo $(00...0c_k)$, com $c_k \neq 0$. Isto significa que o sistema associado a esta matriz tem uma equação do tipo: $0x_1 + ... + 0x_n = c_k \neq 0$, e portanto não admite solução.

<u>2ª parte</u>: Agora, se o posto da matriz completa for igual ao da matriz dos coeficientes, há dois casos a considerar:

(a) Se $p = n$, então a matriz-linha reduzida a forma escada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto a solução do sistema será $(x_1 = c_1, ..., x_n = c_n)$, logo o sistema possui solução única.

(b) Se $p < n$, há vários casos a considerar sobre a matriz-linha reduzida a forma escada. Será analisado agora o caso em que a matriz de posto $p < n$ tem a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2p+1} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{pp+1} & \cdots & a_{pn} & c_{pn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - a_{1p+1}x_{p+1} ... - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_p = c_p - a_{pp+1}x_{p+1} ... - a_{pn}x_n \end{cases},$$

logo o sistema terá infinitas soluções, sendo $x_{p+1}, ..., x_n$, as variáveis livres do sistema. Assim, é possível proceder de maneira análoga, considerando outras formas para a matriz reduzida a forma escada de posto $p < n$ e obter-se um sistema com infinitas soluções, e $n - p$ variáveis livres. $\square$

3.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada a fundamentação teórica sobre Sistemas Lineares, suas principais definições, teoremas e métodos de resolução e definições utilizadas no estudo de Sistemas Lineares, como matrizes e determinante. Foram demonstrados os principais resultados utilizados no estudo de Sistemas Lineares.

Capítulo 4

Aplicações de Sistemas Lineares

Neste capítulo serão apresentadas aplicações de Sistemas Lineares, por meio de exemplos de aplicações em problemas da Química, Física e da Matemática relacionados aos conteúdos do Ensino Médio que possam ser resolvidos com o uso de sistemas lineares. Estes problemas foram escolhidos para mostrar aos alunos a importância do estudo dos sistemas lineares.

Muitos alunos questionam frequentemente seus professores de matemática sobre aplicações em situações reais do conteúdo que estão aprendendo. Os alunos atribuem à "falta de aplicação" do conteúdo, o seu desinteresse pelo mesmo, gerando fracasso no processo de ensino-aprendizagem. É claro que, muitos alunos podem apresentar motivação para aprender, se o professor despertar o interesse de tais alunos, para o conteúdo específico estudado, ou fazê-los perceber a importância deste conteúdo. Por exemplo, as funções, os sistemas lineares e a geometria analítica são conteúdos que aparecem na maioria dos livros didáticos e ementas do ensino médio. Esses conteúdos possuem diversas aplicações. Os exemplos de aplicação da geometria analítica em situações reais estão muitas vezes ligados à localização de coordenadas geográficas, tais como distância entre cidades e outras aplicações tradicionais. As funções são aplicadas em modelos matemáticos diversos, os sistemas lineares são utilizados no balanceamento de reações químicas e em vários outros problemas da matemática, da física e de outras áreas do conhecimento.

Nas próximas seções, apresentar-se-ão exemplos de situações-problema relacionados a conteúdos do ensino médio, que podem ser resolvidos com o uso de sistemas lineares.

4.1 Aplicações de Sistemas Lineares na Química

Nesta seção apresentar-se-á um problema de balancemento de reações químicas, que pode ser modelado e resolvido com a utilização de um sistema linear. Balancear uma reação química consiste em igualar o número de átomos presente nos reagentes com o dos produtos. Um dos métodos mais utilizados para balancear uma reação química é o método da tentativa, porém este método pode ser ineficiente em alguns casos, então o próximo problema será resolvido com a utilização de um sistema linear.

4.1.1 Balanceamento de uma Reação Química

Quais são os valores dos menores coeficientes inteiros de balanceamento da reação entre o perclorato de potássio e o alumínio, formando cloreto de potássio e óxido de alumínio?

Dados:

$KClO_4$ é a molécula do percloreto de potássio;

Al é a molécula de alumínio;

KCl é a molécula do cloreto de potássio; e

Al_2O_3 é a molécula do óxido de alumínio

Considere a reação abaixo:

$$KClO_4 + Al \rightarrow KCl + Al_2O_3,$$

e associie a ela o seguinte sistema linear:

$$xKClO_4 + yAl \rightarrow zKCl + wAl_2O_3 \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 4x - 3w = 0 \\ y - 2w = 0 \end{cases},$$

logo $x = z$, $y = \frac{8x}{3}$, $w = \frac{4x}{3}$, fornecendo a solução do balanceamento dada por $S = (x, \frac{8x}{3}, x, \frac{4x}{3})$, de modo que tomando $x = 3$ obtem-se os coeficientes inteiros $S_1 = (3, 8, 3, 4)$.

4.2 Aplicações de Sistemas Lineares na Matemática

Existem problemas matemáticos que podem ser modelados e resolvidos com o uso de sistemas lineares.

4.2.1 Problema do Sítio (Programação Linear)

Os Problemas de Programação Linear são caracterizados por serem modelados por funções lineares, restrições (equações e/ou inequações) lineares e variáveis não-negativas. Seu objetivo é determinar a melhor solução para o problema, ou seja, a solução máxima em um problema de maximização e a solução mínima em um problema de minimização. Este tipo de problema é ótimo por trabalhar com a representação gráfica do problema.

Após anos de economia Paulo resolve comprar um sítio de 90 hectares para plantar milho e feijão. Cada hectare de milho gera lucro de R$ 400,00 e cada hectare de feijão gera lucro de R$ 600,00. Para cada hectare de milho são necessários 3 empregados e são utilizadas 2 toneladas de fertilizantes e para um hectare de feijão são necessários 2 empregados e 4 toneladas de fertilizantes. Considerando que Paulo pode contar com 200 empregados e 240 toneladas de fertilizantes, como ele pode maximizar seu lucro [13]?

Para a resolução de um problema de maximização deve-se seguir os seguintes passos:

(i)Escolha das variáveis : Paulo precisa decidir em quantos hectares vai plantar milho e em quantos hectares vai plantar feijão. Então, sejam x a quantidade de hectares que serão plantados com milho e y a quantidade de hectares que será plantada com feijão.

(ii) Modelar a situação por função: Cada hectare plantado com milho gera um lucro de R$ 400,00 e cada hectare plantado com feijão gera um lucro de R$ 600,00. Então a função é $L = f(x, y) = 400x + 600y$.

(iii)Descrever as restrições:

Área total do sítio: $x + y \leq 90$.

Quantidade de empregados disponíveis: $3x + 2y \leq 200$.

Quantidade de fertilizantes disponíveis: $2x + 4y \leq 240$.

Assim, pode-se escrever o problema da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } L = f(x, y) = 400x + 600y,$$

$$\text{sujeito a: } x + y \leq 90$$

$$3x + 2y \leq 200$$

$$2x + 4y \leq 240$$

$$x > 0 \text{ e } y > 0.$$

Solução: Primeiramente deve-se determinar o conjunto dos pontos que satisfazem as restrições do problema. Para isso, basta determinar a intersecção das regiões definidas por cada uma das inequações. Lembrando-se de que $x > 0$ e $y > 0$, então esta região pertencerá ao primeiro quadrante do plano.

Plotando as restrições $x + y \leq 90$, $2x + 4y \leq 240$ e $3x + 2y \leq 200$ no plano obtem-se a seguinte região:

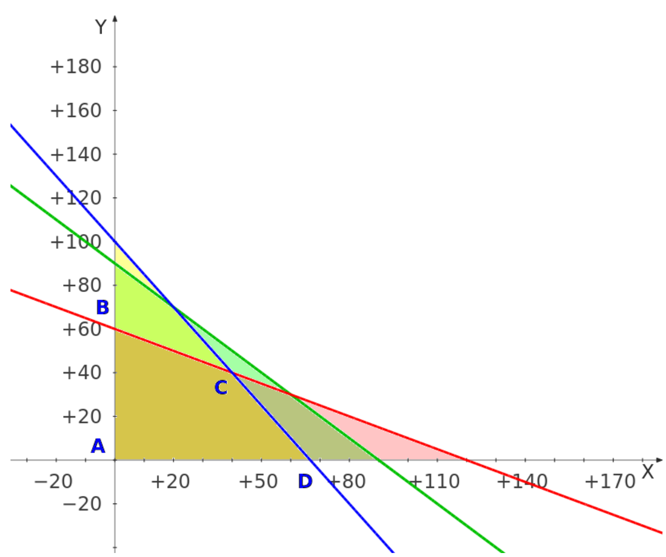

Figura 4.2.1: Região de todas as possíveis soluções do problema

Para determinar qual dos pontos da região ABCD, é a melhor solução do problema, deve-se observar que a região ABCD é delineada pelos segmentos de reta que ligam os pontos A, B, C e D. Qualquer ponto dentro ou sobre o contorno do espaço ABCD satisfaz todas as restrições. Como este espaço consiste de um número infinito de pontos, é necessário um procedimento sistemático para determinar a melhor solução. Inicia-se determinando a direção na qual a função aumenta de valor, já que este é um problema de maximização. Para determinar essa direção, atribui-se valores para a função $L = f(x, y) = 400x + 600y$, como por exemplo $L = 1000$, $L = 2000, ...,$ até que a reta (L) esteja "fora" do espaço ABCD para algum L_0.

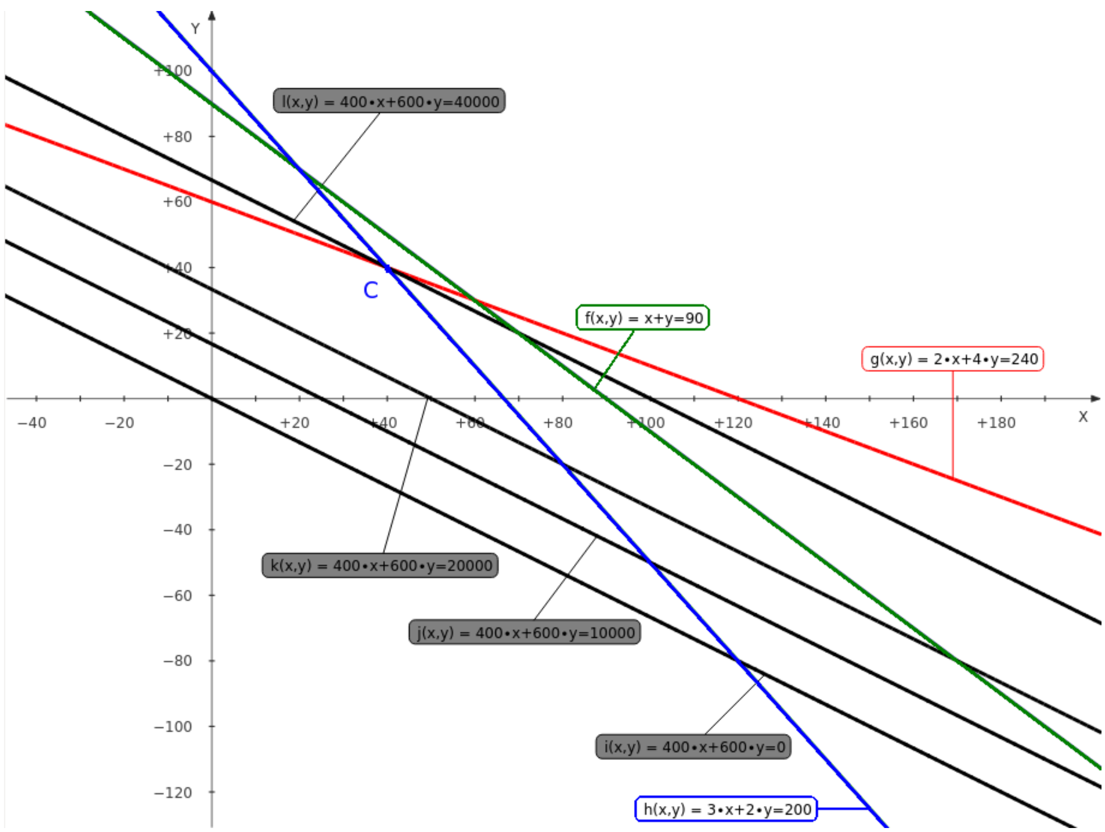

Figura 4.2.2: Maximizando a função $f(x, y) = 400x + 600y$

Nota-se na figura (4.2.2) que a solução ocorre em C, que é o ponto da região das possíveis soluções do problema no qual a partir daí, qualquer acréscimo em L faz com que a reta fique fora da região ABCD. A reta $L = 400x + 600y$ intersecta o ponto C para $L_0 = 40000$. Para determinar as coordenadas do ponto $C = (x, y)$, resolve-se o sistema S de equações definido pelas retas $2x + 4y = 240$, $3x + 2y = 200$ e $40000 = 400x + 600y$. Assim, tem-se

$$S : \begin{cases} 2x + 4y = 240 \\ 3x + 2y = 200 \\ 400x + 600y = 40000 \end{cases},$$

que S possui solução $(40, 40)$. Então a melhor solução do problema é que sejam plantados 40 hectares de milho e 40 hectares de feijão, determinando assim um lucro de R$ 40.000,00.

4.2.2 Problema do Dinheiro

Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R$16,00 cada. Quanto cada um possuia no início [1]?

Solução: Sejam A,B e C respectivamente o número de reais que Arnaldo, Beatriz e Carlos possuiam. Foram feitas 3 transferências. Após a primeira, as quantias com que eles ficaram, foram $A-B-C$, $2B$, $2C$. Após a segunda operação: $2A-2B-2C$, $2B-(A-B-C)-2C$, $4C$, ou seja: $2A-2B-2C$, $3B-A-C$, $4C$. E, no final: $4A-4B-4C$, $6B-2A-2C$, $4C-(2A-2B-2C)-(3B-A-C)$, isto é: $4A-4B-4C$, $6B-2A-2C$ e $7C-A-B$. Agora é só resolver o sistema

$$\begin{cases} 4A - 4B - 4C = 16 \\ -2A + 6B - 2C = 16 \\ -A - B + 7C = 16 \end{cases},$$

o que nos dá A=26 reais, B=14 reais e C=8 reais.

Outra maneira de se resolver este problema é utilizando a seguinte tabela e completando as informações começando pelo término até chegar ao início. Dessa forma tem-se:

<u>3ª Transferência</u>: Como todos terminaram com R$16,00 e foi Carlos que realizou

a última transferência, então Arnaldo e Beatriz receberam R$8,00 cada, o que implica que Carlos deu R$16,00, logo ele possuia R$32,00.

2ª Transferência: Quem realizou esta transferência foi Beatriz, então ela deu R$4,00 para Arnaldo e R$16,00 para Carlos, portanto ela deu no total R$20,00, então ela possuia R$28,00.

1ª Transferência: A primeira transferência foi realizada por Arnaldo, ele deu R$14,00 para Beatriz e R$8,00 para Carlos, então no total ele deu R$22,00, logo ele possuia R$26,00.

	Arnaldo	Beatriz	Carlos
Término	16	16	16
3ª Transferência	8	8	32
2ª Transferência	4	28	16
1ª Transferência	26	14	8

Assim no início Arnaldo possuia R$26,00, Beatriz R$14,00 e Carlos R$8,00.

4.2.3 Aplicações de Sistemas Lineares na Física

Muitos problemas da Física podem ser modelados e resolvidos com o uso de sistemas lineares. Nesta seção apresentar-se-á dois problemas sobre movimento, que podem ser modelados e resolvidos com o uso de sistemas lineares.

4.2.4 Problemas Sobre Movimento

1. O motorista de um automóvel aplica os freios de forma suave e constante, de modo a imprimir uma força de frenagem constante a seu veículo, até o repouso. Durante o primeiro segundo da frenagem o carro percorreu 30 metros, durante o segundo 25 metros e durante o terceiro segundo 20 metros. Os dados acima são compatíveis com o fato de a força de frenagem ser constante? Quanto tempo este veículo demora para chegar ao repouso [1]?

Solução: Se $f(t)$ é a força aplicada no instante t, temos $f(0) = 0$, $f(1) = 30$, $f(2) = 55$ e $f(3) = 75$. Se a força for constante tem-se $f(t) = at^2 + bt + c$, então substituindo os valores $0, 1, 2, 3$ em $f(t)$ obtem-se o seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 30 \\ 4a + 2b + c = 55 \\ 9a + 3b + c = 75 \end{cases},$$

onde, $a = -2,5,\ b = 32,5\, e\, c = 0$, assim como o sistema possui solução, os dados do problema são compatíveis com a hipótese. A velocidade é $f'(t) = 2at+b = -5t+32,5$, logo a velocidade é nula quando $t = 6,5$. Portanto o veículo para após 6,5 segundos.

2. Um veículo A parte de Campo Grande-MS para Jales-SP, às dez horas da manhã, segundo a função horária $S_A = 35 + 80t$. Neste mesmo dia, um outro veículo B parte também de Campo Grande-MS para Jales-SP, ao meio-dia, seguindo o mesmo trajeto de A, segundo a função horária $S_B = 55 + 120t$. As equações horárias fornecem o espaço medido em quilômetros e o tempo medido em horas. Sabendo-se que os veículos A e B percorrem o trajeto sem paradas, determine o instante de tempo t em que o veículo B alcançará o veículo A.

Solução: Considere o seguinte sistema linear de equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} S_A = 55 + 80t & (1) \\ S_B = 15 + 120t & (2) \end{cases}$$

Conforme enunciado do exercício, deve-se ter $S_A = S_B$. Assim, subtraindo da equação (2) a equação (1), tem-se:

$$0 = S_B - S_A = -40 + 40t \Leftrightarrow t = 1\text{hora}.$$

4.3 Considerações Finais

Neste capítulo foram apresentadas aplicações de sistemas lineares na resolução de problemas de balanceamento de reações (química) e em problemas de matemática e em problemas sobre movimento (física).

Capítulo 5

Conclusão

O presente trabalho abordou inicialmente um breve histórico dos Sistemas Lineares, concluindo-se que os sistemas lineares surgiram por volta do século II a.C., porém somente a partir do século XII é que aperfeiçoou-se os estudos sobre os sistemas lineares. Foram analizados documentos municipais, estaduais e federais que norteiam os conteúdos abordados nos ensinos fundamental e médio. Obervou-se que segundo esses o conteúdo de Sistemas Lineares deve ser trabalhado no sétimo e no oitavo ano do ensino fundamental e no segundo ano do ensino médio. Segundo [18] por meio do estudo dos Sistemas Lineares o aluno poderá resolver certos problemas de matemática de forma ágil e eficiente. Esta ferramenta permitirá ao aluno, fazer investigações matemáticas, modelar e resolver situações-problema. De acordo com [8] no que se trata do ensino de Álgebra, especificamente no ensino de Sistemas Lineares, esse documento orienta que no estudo de sistemas de equações, além de trabalhar as técnicas de resolução de sistemas de modo algébrico, recomenda-se colocar a álgebra sob o olhar da geometria.

O capítulo II tratou do Ensino de Sistemas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio, exibindo como é apresentado o conteúdo em cada uma das etapas de ensino. Foi realizada a análise de três livros didáticos utilizados no segundo ano do ensino médio em Campo Grande-MS, onde foi observado a falta do uso da representação geométrica dos sistemas lineares de ordem 2×2 e 3×3, bem como a interpretação geométrica da solução de um sistema dessas ordens. Então apresentou-se o resultado desse estudo, propondo um possível roteiro que pode ser utilizado no ensino de sistemas lineares no segundo ano do ensino médio, fazendo uso das abordagens algébrica e geométrica, já que esta é pouco utilizada pelos livros didáticos, e seu uso pode facilitar a visualização da representação e da solução de sistemas lineares de ordem 2×2 e 3×3. Nesse roteiro também é proposto o uso de situações-problema de outras áreas do conhecimento que possam ser modelados e resolvidos com o uso de sistemas lineares, para que os alunos notem a importância de estudar os sistemas lineares.

No capítulo III foi apresentada a fundamentação teórica sobre Sistemas Lineares, suas principais definições, teoremas , métodos de resolução e definições. Foi realizada uma breve apresentação dos conceitos de matrizes e determinante, pois esses são indispensáveis para o estudo dos sistemas lineares. Foram demonstrados os principais resultados utilizados no estudo dos Sistemas Lineares.

As Aplicações dos Sistemas Lineares foram apresentadas no capítulo IV, elencando problemas que podem ser modelados e resolvidos com o uso de sistemas lineares, sendo esses problemas de conteúdos trabalhados no ensino médio na matemática ou em áreas afins como na física e na química. Apresentou-se um problema de balanceamento de reações (química), dois problemas de matemática e dois problemas sobre movimento (física). Em trabalhos futuros serão aprofundados os estudos sobre a Teoria de Otimização Linear.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages. A matemática do ensino médio-volume 4/Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[2] Baumgart J. K. Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula – Álgebra. São Paulo: Atual, 1992.

[3] Boldrini J. L., et al. Álgebra Linear. 3 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[4] Boyer C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1992.

[5] Calioli C. A., Domingues H. H., Costa R.C.F. Álgebra Linear e Aplicações. 6. Ed. São Paulo: Atual, 1990.

[6] Garbi G. G. O Romance das Equações Algébricas. São Paulo: Markron Books, 1997.

[7] Laplace, Pierre Simon. Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo, 1772.

[8] Orientações curriculares para o ensino médio; ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (volume 2)/ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília: 2006.

[9] Howard E. Introdução a História da Matemática. 2 ed. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1997.

[10] Iezzi G., Hassan S. Fundamentos de Matemática Elementar. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993.

[11] BOYER, Carl B. História da Matemática. 2 ed. Tradução Gomide, Elza F. São Paulo: EdigardBlucher, 1996.

[12] www.somatemaica/historia/sistemas.php

[13] Neto L. L. S. Tópicos de pesquisa operacional para o ensino médio. Pólo Universitário do Sul Fluminense - UFF, 2006.

[14] Referencial curricular 2012 Ensino Fundamental /Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul. Campo Grande:SED/MS, 2012.

[15] Miorin A. M. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.

[16] Oliveira G. D. S. S., Pinto M. L. L. Dificuldades Observadas na Aprendizagem da Álgebra no 7° Ano de uma Escola Pública de Campo Grande, MS: Um Estudo de Caso. Campo Grande, 2008.

[17] Hefez A., Fernandes C. S. Introdução à álgebra linear. Profmat.2012.

[18] Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

[19] Referencial curricular 2008 Ensino Fundamental /Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande. Campo Grande:SEMED/MS, 2008 .

[20] Iezzi G., Et al. Matemática: ciência e aplicações,2: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.

[21] Xavier C., Barreto Filho B. Matemática aula por aula. São Paulo: FTD, 2005.

[22] Souza J. R. Novo olhar matemática. São Paulo: FTD, 2010.

[23] Referencial curricular 2012 Ensino Médio /Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul. Campo Grande:SED/MS, 2012.