UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

CONTAGEM: NÚMEROS ESPECIAIS

ALDO ALEXANDRE DE MENEZES ZANONI

CAMPO GRANDE - MS

Agosto de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

CONTAGEM: NÚMEROS ESPECIAIS

ALDO ALEXANDRE DE MENEZES ZANONI

Orientadora: Prof.ª Dr. ª Elisabete Sousa Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

Agosto de 2013

CONTAGEM: NÚMEROS ESPECIAIS

ALDO ALEXANDRE DE MENEZES ZANONI

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. ª Dr. ª Elisabete Sousa Freitas - UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello - UFMT

Campo Grande - MS

Agosto de 2013

Dedico esse trabalho a minha querida esposa, Daniele Akemi Oshiro Zanoni, que antes de tudo e de todos, sempre acreditou e confiou em mim e em meu sucesso.

Epígrafe

A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, mas também para auxiliar as artes e poupar o trabalho dos homens.

René Descartes

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família, em especial aos meus pais, pela dedicação e pelos seus sacrifícios para que eu pudesse ter acesso a boa educação, e aproveitar as oportunidades que tive.

Agradeço a minha esposa, pelo apoio e pela paciência que teve enquanto me dedicava integralmente ao estudo e ao trabalho.

Agradeço aos meus professores pela dedicação nos trabalhos realizados, pelo apoio dado a nós, e pelo seu esforço durante todo o projeto.

Agradeço a professora Elisabete Sousa Freitas, pela orientação de meu trabalho, pelas horas dedicadas a ele, pelo apoio, compreensão, paciência e incentivo dado durante toda a trajetória do trabalho.

Agradeço a professora Élvia Mureb Sallum, por sua dedicação ao nosso trabalho inicial que, por motivos de força maior, não pode ser concluido, mas no qual também aprendi muito.

Agradeço aos meus colegas de classe pelos estudos, pelo incentivo, pela colaboração e pela ajuda que todos deram uns aos outros.

Agradeço aos colegas Josiane Colombo Pedrini Esquinca e Rogério Esquinca, pelo valioso auxilio que deram no decorrer do trabalho.

Por fim agradeço ao PROFMAT, à CAPES, e à toda sua equipe pela oportunidade e pelo auxilio na realização desse sonho.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos alguns resultados interessantes dentro do campo da Contagem envolvendo os Coeficientes Binômiais, Números de Stirling e Números de Euler. Mostraremos as fórmulas de recorrência que determinam esses números especiais, e através delas, as relações que conectam esses números uns aos outros. Também mostraremos seus padrões triângulares e exemplos de sua aplicação.

Palavras-chave: Contagem, Recorrência, Números Especiais, Pascal, Stirling, Eulerianos.

Abstract

We present in this paper interesting results in the field of Couting(conbination e permutations), envolving the Binomial Coefficients, Stirling Numbers and Eulerian Numbers. We are showing the recurrence formulas the give us this special numbers, and by them, the relations that connect this number to each other. We also showing their triangular pattern and examplos of their applications.

Keywords: Couting, Recurrence, Special Numbers, Pascal, Stirling, Eulerians.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A matemática apresenta, muitas vezes, interessantes e inesperadas coincidências que nos deixam intrigados e curiosos a respeito dessa ciência. Essa característica da matemática atrai e motiva alunos e professores a ingressarem ou se aprofundarem em seus estudos.

Nosso objetivo nesse trabalho é apresentar alguns números especiais que aparecem em problemas de contagem. Números como os Coeficientes Binômiais, Números de Stirling e Números de Euler produzem padrões curiosos e possuem conexões surpreendentes. Apesar de suas definições não terem uma ligação evidente, observamos várias relações curiosas entre esses números.

A motivação para esse trabalho e a escolha desse tema, foram as interessantes coincidências que pudemos encontrar estudando esses números, suas relações e aplicações. Essas coincidências, podem ajudar o professor a despertar a curiosidade de seus alunos pelo tema da contagem, motivando-os a estudar, e até a terem curiosidade por outros campos da matemática onde também é possível encontrar esses resultados inesperados.

O objetivo desse trabalho é fornecer informações úteis ao professor para que ele possa aplicar atividades sobre os temas de Contagem e Recorrência, para que dessa forma, possa despertar a curiosidade e o interesse de alunos.

Lembramos que esse trabalho inclui alguns exemplos de números com características especiais. Existem outros exemplos no campo da combinatória que também são muito curiosos e interessantes, e esperamos que esse trabalho incentive professores e alunos a pesquisarem a respeito.

Capítulo 2

Conceitos e Resultados Básicos

2.1 Indução

Lembraremos nesta seção de uma ferramenta importante, denominada Princípio de Indução Matemática (PIM), utilizada nas demonstrações de fatos envolvendo o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$ dos números naturais. Usaremos a notação $P(n)$ indicando uma propriedade relativa aos números naturais.

Exemplo 1 $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$

Em palavras: A soma dos n primeiros naturais ímpares é igual ao quadrado de n. Vamos verificar esta afirmação para alguns valores de $n \in \mathbb{N}$:

n	$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
1	$1 = 1^2$
2	$1+3 = 4 = 2^2$
3	$1+3+5 = 9 = 3^2$
4	$1+3+5+7 = 16 = 4^2$
5	$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

Observando que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n-1}(2i-1) + (2n-1)$ testaremos a afirmação para outros valores:

n	$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
6	$25+11 = 36 = 6^2$
7	$36+13 = 49 = 7^2$
8	$49+15 = 64 = 8^2$
9	$64+17 = 81 = 9^2$
10	$81+19 = 100 = 10^2$

Suponhamos agora, de um modo geral, que a afirmação é verdadeira para $n = k$, isto é, $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.

A partir desta suposição vamos calcular $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Portanto a afirmação também é verdadeira para $n = k + 1$. Resumindo:

- Verificamos que a afirmação é verdadeira para alguns valores de n, começando pelo $n = 1$.

- Provamos que, se a afirmação é verdadeira para $n = k$ então também é verdadeira para $n = k + 1$.

Assim, a partir de $n = 1$, podemos concluir que a afirmação é válida para $n = 2$. A partir de $n = 2$, podemos concluir que é válida para $n = 3$ e assim por diante, concluimos que é válida para todo n natural.

O que acabamos de fazer é denominado Principio da Indução Matemática, que nos garante a validade da afirmação para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2 $P(n)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Em palavras: A soma dos quadrados dos **n** primeiros naturais é igual a fração de numerador 6 e cujo denominador é o produto de três números, n, seu consecutivo $n + 1$ e o consecutivo do dobro de n, $2n + 1$.

Passo 1: Para $n = 1$ temos $1^2 = 1 = \dfrac{1.2.3}{6}$

Passo 2: Suponhamos agora que a afirmação é verdadeira para $n = k$, isto é,

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

A partir desta suposição, vamos calcular $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i^2$. Observando que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$, temos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Daí obtemos

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

Como

$$2k^2+7k+6 = 2k^2+6k+4+k+2 = 2(k^2+3k+2)+k+2 = 2(k+1)(k+2)+k+2 = (k+2)(2(k+1)+1)$$

segue que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

Portanto, a afirmação também é verdadeira para $n = k+1$.

Novamente, a partir de $n = 1$, podemos concluir que afirmação é válida para $n = 2$. A partir de $n = 2$, podemos concluir que é válida para $n = 3$ e assim por diante, concluimos que é válida para todo n natural.

Enunciamos a seguir o Princípio da Indução Matemática e daremos mais exemplos.

Princípio da Indução Matemática 1 Seja $P(n)$ uma afirmação relativa aos números naturais. Se

(1) $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$ e

(2) $P(k)$ verdadeira implica que $P(k+1)$ também é verdadeira, para todo $k \geq 1$,

então $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Ou de forma mais geral,

Princípio da Indução Matemática 2 Seja $P(n)$ uma afirmação relativa aos números naturais. Se

(1) $P(n)$ é verdadeira para $n = n_0$ e

(2) $P(k)$ verdadeira implica que $P(k+1)$ também é verdadeira, para todo $k \geq n_0$,

então $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Exemplo 3 Considere a sequência de Fibonacci, definida de forma recursiva por $F_1 = 1, F_2 = 1$ e a partir de $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Assim,

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3, F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5, F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8 \cdots\cdots,$$

e assim por diante,obtendo a sequência (F_n):

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots\cdots)$$

Vamos provar, usando o Princípio da Indução Matemática, a seguinte afirmação:

Para todo natural n, vale que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Antes da prova, vamos verificar a fórmula para alguns valores de n:

- Para $n = 1$, $F_1 = 1 = F_3 - 1$
- Para $n = 2$, $F_1 + F_2 = 2 = F_4 - 1$
- Para $n = 3$, $F_1 + F_2 + F_3 = 4 = F_5 - 1$
- Para $n = 4$, $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = F_6 - 1$

De fato, funcionou quando $n = 1, 2, 3$ e 4. Passamos agora a prova:

Passo 1: Para $n = 1$.

$$\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = F_3 - 1$$

Passo 2: Suponhamos a fórmula válida para $n = k$, isto é, $\sum_{i=1}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$.

Devemos provar que também é válida para $n = k+1$. Observando que $\sum_{i=1}^{k+1} F_i = \sum_{i=1}^{k} F_i + F_{k+1}$,

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k+1} - 1$$

Como, por definição, $F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1}$, concluimos,

$$\sum_{i=1}^{k+1} F_i = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+2} + F_{k+1} - 1 = F_{k+3} - 1$$

Logo, pelo PIM, a fórmula é válida para todo natural n.

Existe uma segunda forma de enunciar o Princípio, mais conveniente de ser aplicada em algumas situações e que será ilustrada com um exemplo, após o enunciado.

Princípio da Indução Matemática 3 Seja $P(n)$ uma afirmação relativa aos números naturais. Se

(1) $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$ e

(2) $P(n)$ verdadeira para $1 \leq n \leq k$ implica que $P(k+1)$ também é verdadeira, então $P(n)$ é verdadeira para todo natural n.

Exemplo 4 Vamos provar que, para todo n natural, vale a fórmula direta (admirável)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

onde $F_1, F_2, F_3 \ldots$ é a sequência de Fibonacci.

Passo 1: Verificando a igualdade para $n = 1$ e $n = 2$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = F_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}} = 1 = F_2$$

Passo 2: Suponhamos que para todo natural $1 \leq n \leq k$ a fórmula

$F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ seja verdadeira.

Devemos mostrar que $F_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$.

Lembrando que $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ e usando a hipótese temos que,

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

Logo, $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$. Portanto, a fórmula é válida para todo natural n.

2.2 Contagem

Nesta seção faremos uma rápida recordação de problemas de contagem. Chegaremos nas fórmulas para permutações, arranjos e combinações usando os princípios básicos de Adição e Multiplicação.

Definição 1 Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que um conjunto A é um conjunto finito e que tem n elementos quando existe uma função bijetiva $f : I_n \to A$.

Neste caso, n é único, é denominado o número cardinal de A e usaremos a notação $|A| = n$.

Uma função bijetiva $f : I_n \to A$ é denominada função de contagem do conjunto A.

Indicando por $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \cdots, a_n = f(n)$ podemos representar o conjunto como $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Exemplo 5 O conjunto das vogais $A = \{a, e, i, o, u\}$ é finito e $|A| = 5$.

Exemplo 6 O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ não é finito. De fato, considere $n \in \mathbb{N}$ e uma função $f : I_n \to \mathbb{N}$. Tomando $k = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + 1$ temos que $k \in \mathbb{N}$ e $k \notin \{f(1), f(2), \ldots f(n)\}$. Portanto f não é sobrejetiva.

Exemplo 7 Suponha que estejam em cartaz 5 filmes e 2 peças de teatro e que você possa assistir a apenas um dos eventos. Quantas são as suas opções de escolha?

Indicando por $A = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$ o conjunto de filmes e por $B = \{P_1, P_2\}$ o conjunto de peças, suas opções estarão no conjunto $A \cup B = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, P_1, P_2\}$.

Claramente você terá $5 + 2 = 7$ opções de escolha.

Este exemplo obedece o princípio básico de contagem chamado Princípio da Adição: Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras diferentes e outra decisão B pode ser tomada de n maneiras diferentes então existem $m + n$ maneiras de tomar uma ou a outra decisão .

Outro enunciado:

Princípio da Adição Sejam A e B conjuntos finitos com $A \cap B = \emptyset$. Se $|A| = m$ e $|B| = n$, então $|A \cup B| = m + n$.

Exemplo 8 Suponha que estejam em cartaz 4 filmes e 2 peças de teatro e que você possa fazer dois programas. Quantas são as suas opções de escolha?

Indicando por $A = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ o conjunto de filmes e por $B = \{P_1, P_2\}$ o conjunto de peças, suas opções estarão no conjunto

$$A \times B = \{(F_1, P_1), (F_1, P_2), (F_2, P_1), (F_2, P_2, (F_3, P_1), (F_3, P_2), (F_4, P_1), (F_4, P_2)\}$$

Portanto você terá $4.2 = 8$ opções de escolha.

Este exemplo obedece o outro princípio básico de contagem chamado Princípio da Multiplicação: Se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras diferentes e outra decisão B pode ser tomada de n maneiras diferentes então existem $m.n$ maneiras de se tomar a decisão A seguida da decisão B .

Outro enunciado, onde $A \times B$ indica o produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B:

Princípio da multiplicação Sejam A e B conjuntos finitos. Se $|A| = m$ e $|B| = n$, então $|A \times B| = m.n$.

Os dois princípios podem ser estendidos:

(1)Extensão do Princípio da Adição: Sejam $A_1, A_2, \ldots A_k$ são conjuntos finitos, disjuntos 2 a 2. Se $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \ldots, |A_k| = m_k$, então $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

(2)Extensão do Princípio da Multiplicação: Sejam $A_1, A_2, \ldots A_k$ são conjuntos

finitos com $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \ldots |A_k| = m_k$, então
$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = m_1.m_2.\ldots.m_k$.

Exemplo 9 O número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual a 2^n.

Considere $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ um conjunto com n elementos. Para tomar subconjuntos de A precisamos escolher seus elementos dentre os elementos de A. Assim , para cada $1 \leq i \leq n$, decidimos se a_i pertencerá ou não a cada subconjunto de A, no caso de a_i pertencer ao subconjunto será atribuido a este elemento o valor 1, caso contrário o valor 0. Assim, considerando todas as n-uplas com entradas 1 e 0 obteremos todos os subconjuntos de A.

Alguns exemplos:

$\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n}$ indicará o conjunto vazio, sem elementos.

$\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n}$ indicará o conjunto A.

$\underbrace{(1, 0, 1, 0 \ldots, 0)}_{n}$ indicará o conjunto $\{a_1, a_3\}$.

Como são duas as opções para cada elemento, o número de subconjuntos é igual a $\underbrace{2.\ldots.2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$.

Exemplo 10 Quantas funções existem de um conjunto A com n elementos em um conjunto B com m elementos?

Considere $f : A \to B$, onde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Temos que decidir os valores de $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ onde cada um pode ser tomado de m maneiras distintas.

Portanto teremos um total de $\underbrace{m.m\ldots m}_{n\text{vezes}} = m^n$ funções.

Exemplo 11 Quantas funções injetivas existem de um conjunto A com n elementos em um conjunto B com m elementos,sendo $n \leq m$?

Considere $f : A \to B$, onde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Temos que decidir os valores de $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$.

Escolhendo o valor para $f(a_1)$, o que pode ser feito de m maneiras, como a função deve ser injetiva, sobrarão $m-1$ valores para a escolha de $f(a_2)$.

Escolhidos os valores de $f(a_1)$ e $f(a_2)$ sobrarão $m-2$ valores para a escolha de $f(a_3)$ e assim por diante.

Portanto, existem $m(m-1)\ldots(m-(n-1))$ funções injetivas.

Definição 2 Uma função bijetiva $f : A \to A$, onde A é um conjunto não vazio, é denominada uma permutação de A.

Quando A é finito com n elementos, indicando $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, uma permutação de A pode ser representada por

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

ou simplesmente por $f(a_1)\, f(a_2) \cdots f(a_n)$.

Exemplo 12 Considere $A = \{1, 2, 3\}$. Como $|A| = 3$, temos um total de $3.2.1 = 6$ bijeções, a saber

$$1\,2\,3,\ 1\,3\,2,\ 2\,1\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2 \text{ e } 3\,2\,1$$

Considerando um conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, cada bijeção $f : A \to A$ estabelece uma ordenação de seus elementos. Deste modo, todas as seguintes perguntas :

- Dados n objetos $a_1, \ldots a_n$, de quantos modos podemos ordená-los?
- Quantas bijeções existem de A em A?
- Quantas permutações de A existem?

têm a mesma resposta, dada pela seguinte proposição:

Proposição 1 O número de permutacões de $A = \{a_1, \ldots a_n\}$ é igual a

$$n! = n(n-1)\ldots 1$$

Prova

O número de funções injetivas de um conjunto A com n elementos em um conjunto B com m elementos, $n \leq m$, é $m(m-1)\ldots(m-(n-1))$. Como $A = \{a_1, \ldots a_n\}$, uma função $f : A \to A$ é injetiva se, e somente se é bijetiva. Portanto, o número de bijeções de A, com n elementos em A é igual a

$$n(n-1)\ldots(n-(n-1)) = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

$\blacksquare$

Definição 3 Permutações circulares, também chamadas de ciclos, de n elementos são permutações destes elementos em torno de um círculo.

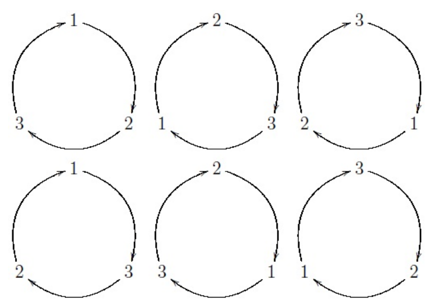
Usaremos a notação $[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$ para indicar um ciclo.

Por exemplo, considerando $A = \{1, 2, 3\}$ temos $3! = 6$ permutações de A, a saber:

$$1\,2\,3,\ 1\,3\,2,\ 2\,1\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2 \text{ e } 3\,2\,1$$

Colocando os elementos ao redor de um círculo vemos que

$$[1\,2\,3] = [2\,3\,1] = [3\,1\,2] \text{ e } [1\,3\,2] = [2\,1\,3] = [3\,2\,1]$$



Assim, o número de permutações circulares dos elementos de A é igual a 2.

Proposição 2 Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações circulares dos elementos de A é igual a

$$(n-1)!$$

Prova

O número de permutações de n elementos é igual a $n!$. Nesta contagem cada permutação circular foi contada n vezes, portanto o número de permutações circulares é igual a

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

■

Proposição 3 Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de subconjuntos de A contendo r elementos, $r \leq n$, é exatamente

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Prova

Indicando por $\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ um subconjunto de A com r elementos, temos para a escolha de b_1 um total de n possiblidades.

Em seguida, para a escolha de b_2 temos $n-1$ possibilidades. Escolhidos b_1 e b_2, sobrarão $n-2$ possibilidades para a escolha de a_3 e asim por diante. Teremos então um total de $n(n-1)\ldots(n-(r-1))$ escolhas. Observando que, uma permutação de $\{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$ forma o mesmo conjunto, cada subconjunto foi contado $r!$ vezes. Portanto, o número total de suconjuntos com k elementos é exatamente

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{r!}$$

e

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))(n-r)\ldots 1}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$\blacksquare$

Definição 4 Para $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, & \text{quando} \quad r \leq n \\ 0, & \text{quando} \quad r > n \end{cases}$$

onde observamos que $0! := 1$.

O simbolo $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ é lido como: combinação de n elementos tomados r a r, e é igual ao número de subconjuntos, contendo r elementos, de um conjunto com n elementos.

Quando $r \leq n$ temos que $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-r \end{pmatrix}$. De fato, segue diretamente da definição ou observando que o número de subconjuntos, contendo r elementos, de um conjunto com n elementos é exatamente igual ao número de subconjuntos, contendo $n-r$ elementos, de um conjunto com n elementos.

Corolário 1 Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 2^n$$

Prova

Basta notar que $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ é o número de subconjuntos do conjunto A, incluindo o conjunto vazio, portanto igual a 2^n.

$\blacksquare$

Definição 5 Arranjos de n elementos tomados r a r, onde $n, r \in \mathbb{N}$ com $r \leq n$, são todos os grupos de r elementos distintos, que diferem entre si também pela ordem dos r elementos que compõem os grupos.

Notação: A_n^r indicará o número de arranjos de n elementos tomados r a r.

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ o número de combinações de elementos de A tomamos 2 a 2 é igual a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3!}{2!.1!} = 3$, a saber : $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$.

Agora o número de arranjos dos 3 elementos tomados 2 a 2 é igual a $A_3^2 = 6$, a saber:

$$(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$$

Proposição 4 Seja $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de arranjos de elementos de A tomados r a r, $r \leq n$, é exatamente

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Prova

Indicando por $(b_1, b_2, \cdots, b_r)$ um arranjo de A com r elementos, temos para a escolha de b_1 um total de n possiblidades.

Em seguida, para a escolha de b_2 temos $n - 1$ possibilidades. Escolhidos b_1 e b_2, sobrarão $n - 2$ possibilidades para a escolha de a_3 e asim por diante. Portanto o número de arranjos de n elementos tomados r a r é igual a

$$n(n-1)\dots(n-(r-1)) = \frac{n(n-1)\dots(n-(r-1))(n-r)\dots 1}{(n-r)\dots 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\blacksquare$

2.3 Recorrência

Exemplo 13 (A Torre de Hanoi) A torre de Hanoi é um jogo, inventado pelo matemático Francês Edouard Lucas em 1883, que consiste de:

- uma base onde estão colocadas 3 hastes verticais A, B e C
- um certo número de discos de diâmetros diferentes, furados no centro, que serão colocados nas hastes.

No começo do jogo os discos estão todos colocados na haste A, em ordem decrescente de tamanho,o maior embaixo.

O objetivo do jogo é a mudança de todos os discos da haste A, usando a haste B, para a haste C, obedecendo as seguintes regras:

- Pode ser mudado sómente um disco de cada vez.
- Um disco maior nunca pode ser colocado sobre um disco menor.

Pergunta: Qual é o número mínimo de movimentos que devem ser feitos para alcançar o objetivo do jogo?

Para responder a esta pergunta, primeiramente vamos introduzir uma notação. Suponhamos que temos uma quantidade de n discos e indicamos por T_n o número mínimo de movimentos necessários para mudá-los da haste A para a haste C.

Se $n = 1$, basta um movimento, de A para C, portanto $T_1 = 1$.

Se $n = 2$, temos dois discos na haste A, o menor sobre o maior. Neste caso, mudamos o menor para a haste B, o maior para a C e em seguida o menor para a haste C. Portanto $T_2 = 3$.

Suponhamos $n = 3$. Neste caso deixamos o disco maior parado e com 3 movimentos mudamos os dois menores para a haste B, usando a haste C. Em seguida, mudamos o maior para a haste C e com mais 3 movimentos mudamos os dois menores de B para C, usando a A. Portanto $T_3 = 3 + 1 + 3 = 7$.

Supnhamos $n = 4$. Fazemos o mesmo procedimento, como no caso anterior, deixamos o disco maior parado e com 7 movimentos mudamos os 3 menores de A para B. Em seguida mudamos o maior de A para C e com mais 7 movimentos mudamos os 3 menores de B para C, usando a haste A. Portanto $T_4 = 7 + 1 + 7 = 15$.

Observamos que, em consequência das regras do jogo, para que o disco maior possa ser colocado na haste C é necessário e suficiente que os $n-1$ discos restantes sejam transferidos para a haste intermediária.

A tarefa de passar os $n-1$ discos menores de A para B, usando a C é equivalente à de passar $n-1$ discos de A para C, usando a B, portanto serão necessários T_{n-1} movimentos.

Uma vez, trasferidos os discos menores para a B, gasta-se um movimento para a mudança do maior para a haste C. Finalmente transferimos os discos menores para C, sobre o disco maior, num total de T_{n-1} movimentos. Portanto

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1, \quad \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

A Torre de Hanoi é um exemplo do que é chamado de recorrência. No caso, sabemos o valor de T_1 e a partir de $n \geq 2$, obtemos o valor de T_n recorrendo aos casos anteriores. Exemplificando, para calcular T_7 fazemos o seguinte procedimento:

$$T_7 = 2T_6 + 1 = 2(2T_5 + 1) + 1 = 4T_5 + 3 = 4(2T_4 + 1) + 3 = 8T_4 + 7 =$$

$$= 8(2T_3 + 1) + 7 = 16T_3 + 15 = 16(2T_2 + 1) + 15 = 32T_2 + 31 =$$

$$= 32(2T_1 + 1) + 31 = 32.3 + 31 = 96 + 31 = 127$$

Assim, podemos calcular T_n, para qualquer valor de n, mas a tarefa será árdua quando n for grande.

Se for possível achar uma fórmula explícita para T_n, que não dependa dos casos anteriores, chamaremos esta fórmula de solução da recorrência.

Neste exemplo, observamos que $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 7, T_4 = 15, T_5 = 31, T_6 = 63, T_7 = 127$ e podemos conjecturar que $T_n = 2^n - 1,$ para $n \geq 1$.

De fato, usando o PIM, provaremos esta afirmação.

Passo 1 A fórmula é válida para $n = 1$.

Passo 2 Suponhamos a fórmula válida para $n = k$, isto é, $T_k = 2^k - 1$, $k \geq 1.$ Temos que $T_{k+1} = 2T_k + 1$, e daí usando a hipótese de indução

$$T_{k+1} = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

Portanto, a fórmula vale para $k + 1$.

Exemplo 14 A sequência de Fibonacci

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

é outro exemplo de recorrência. Provamos anteriormente, usando o PIM, que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Apresentamos a seguir uma técnica para a obtenção de soluções de certas recorrências e em seguida daremos como exemplo novamente a recorrência de Fibonacci.

Definição 6 Uma recorrência para a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma fórmula que expressa a_n usando os termos anteriores da sequência, a saber, $a_1, \ldots, a_{n-1}$, a partir de um certo índice $n_0 \in \mathbb{N}$. Os valores de $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$ são chamados de condições iniciais.

No exemplo da Torre de Hanoi, a recorrência é $T_n = 2.T_{n-1}+1$ e na sequência de Fibonacci a recorrência é $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Uma sequência (a_n) é chamada solução da recorrência se seus termos satisfazem a equação de recorrência.

Observamos que a equação de recorrência juntamente com as condições iniciais determinam a solução da recorrência.

Definição 7 Uma recorrência é dita linear de ordem k, homogênea com coeficientes constantes em uma variável se a equação de recorrência é do tipo

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ são constantes reais.

A recorrência da sequência de Fibonacci é homogênea, linear de ordem 2, enquanto que a da Torre de Hanoi não é homogênea.

Proposição 9 Sejam c_1 e c_2 números reais tais que o polinômio $p(x) = x^2 - c_1x - c_2$ têm duas raízes reais distintas r_1 e r_2. Então a sequência (a_n) é solução da recorrência

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$$

se, e somente se,

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e onde α_1, α_2 são constantes reais.

Prova

Suponhamos que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, onde r_1 e r_2 são as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - c_1x - c_2$.

Segue que

$$r_1^2 - c_1r_1 - c_2 = 0 \text{ e } r_2^2 - c_1r_2 - c_2 = 0 \text{ e}$$

$$c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} = c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) =$$

$$= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1r_2 + c_2) =$$

$$= \alpha_1 r_1^{n-2}(r_1^2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(r_2^2) = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = a_n$$

Suponhamos agora que (a_n) é solução da recorrência $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ com $a_0 = A$ e $a_1 = B$ (condições iniciais).

Vamos mostrar que existem constantes reais α_1 e α_2 tais que $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, onde r_1 e r_2 são as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - c_1x - c_2$.

Temos que $A = \alpha_1 + \alpha_2$ e $B = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$.

Resolvendo o sistema encontramos

$$\alpha_1 = \frac{B - Ar_2}{r_1 - r_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{A - Br_1}{r_1 - r_2}$$

$\blacksquare$

Exemplo 15 Vamos determinar a solução da sequência de Fibonacci

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

Como a recorrência é homogênea, linear de ordem 2, com coeficientes constantes primeiramente encontramos as raízes do polinômio $p(x) = x^2 - c_1x - c_2$, onde neste caso $c_1 = c_2 = 1$.

Como $x^2 - x - 1 = 0$, as raízes são $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Portanto $F_n = \alpha_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Podemos definir $F_0 = 0$ e ainda teremos $F_2 = F_1 + F_0$.

Segue daí que $F_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ e $F_1 = \alpha_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$.

Resolvendo o sistema encontramos $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e $\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Capítulo 3

Triângulo de Pascal

Neste capítulo, apresentaremos o Triângulo de Pascal, formado pelos Coeficientes Binomiais. O Triângulo de Pascal foi definido pelo matemático chinês Yang Hui e várias de suas propriedades foram estabelecidas pelo matemático francês Blaise Pascal.

3.1 Coeficientes Binomiais

Lema 1 (Relação de Stifel)

Para todos $n, i \in \mathbb{N}$, com $i \leq n$ vale que

$$\begin{pmatrix} n \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix}$$

Prova 1

Faremos primeiramente uma prova direta, usando as definições dos símbolos.

Temos que

$$\left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{i.n! + n!(n-i+1)}{i!(n-i+1)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{i!(n-i+1)!} = \frac{(n+1)!}{i!(n-i+1)!} = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right)$$

$\blacksquare$

Prova 2

Faremos outra prova usando o significado dos símbolos .

Seja A um conjunto com $n+1$ elementos. Considere a, arbitrário, um dos elementos de A.

Tomando um subconjunto qualquer na tabela que contém todos os $\left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right)$ subconjuntos contendo exatamente i elementos existem apenas duas possibilidades : a está presente ou a não está presente.

Portanto, se somarmos o número de subconjuntos que contém a, que são em número $\left(\begin{array}{c} n \\ i-1 \end{array}\right)$, com os que não contém a, que são em número $\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)$, teremos o resultado $\left(\begin{array}{c} n+1 \\ i \end{array}\right)$.

$\blacksquare$

Teorema 1 (Binômio de Newton) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} ab^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$$

Prova

A prova será feita pelo PIM.

Passo 1 Para $n = 1$, temos $(a+b)^1 = a+b$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} a^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a^{1-1}b = a+b$, portanto a fórmula é válida.

Passo 2 Suponhamos a fórmula válida para $n = k \geq 1$, isto é,

$$(a+b)^k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} a^k + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} a^{k-1}b + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} a^{k-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} ab^{k-1} + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} b^k$$

Segue que $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k.(a+b) = (a+b)^k.a + (a+b)^k.b =$

$$= \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} a^{k+1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} a^k b + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} a^{k-1}b^2 + \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} a^{k-2}b^3 + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} a^2b^{k-1} + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} ab^k +$$

$$+ \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} a^k b + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} a^{k-1}b^2 + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} a^{k-2}b^3 + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k-2 \end{pmatrix} a^2b^{k-1} + \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} ab^k + b^{k+1}$$

Usando agora a relação de Stifel obtemos

$$(a+b)^{k+1} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \end{pmatrix} a^{k+1} + \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} a^k b + \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix} a^{k-1} b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} k+1 \\ k+1 \end{pmatrix} b^{k+1}$$

Portanto, a fórmula vale para $k+1$.

$\blacksquare$

Listamos a seguir, para alguns valores de n, a expansão de

$$(a+b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2} b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} a b^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

3.2 Triângulo de Pascal

Montando uma tabela com os coeficientes destas expansões obtemos o chamado triângulo de Pascal, onde a primeira coluna é preenchida sempre com o número 1, o último número de cada linha também é sempre 1 e observando que somando dois elementos consecutivos de uma linha obtemos o elemento situado na mesma coluna do segundo e numa linha abaixo (relaçao de Stifel):

	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	n
0	$\binom{0}{0}$								
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\binom{n}{n}$

Substituindo os valores dos coeficientes:

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Deste modo podemos continuar o preenchimento da tabela, considerando a relação de Stifel:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Exemplo 16 A última linha da tabela acima, por exemplo, nos dá o desenvolvimento de

$$(a+b)^{10} = a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$$

Somando os termos de uma linha qualquer deste triângulo, observamos que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Capítulo 4

Números de Stirling

Neste capítulo, definiremos os números de Stirling de Primeira e Segunda Espécie e apresentaremos suas relações de recorrência. Faremos também, como no Triângulo de Pascal, a construção de tabelas em forma de triângulos e, usando as relações de recorrência, veremos como acrescentar linhas na tabela.

Exemplo 17 Começaremos analisando o seguinte problema:

Uma professora pede para 2 de seus alunos que a ajudem a colorir as bandeiras que serão utilizadas para a decoração de uma festa. A professora possui 4 cores de tinta para distribuir aos seus 2 alunos: Verde, Azul, Laranja e Preto. De quantas maneiras a professora poderá distribuir essas cores de tinta para seus alunos (não se fará distinção entre os alunos, só importando a distribuição das cores entre eles), de modo que cada um possua pelo menos uma cor de tinta com a qual possa colorir as bandeiras ?

Em outras palavras, de quantas maneiras é possível distribuir os 4 elementos de um conjunto em dois subconjuntos nao vazios. Tomando o conjunto $\{V, A, L, P\}$ das cores que o professor distribuirá aos alunos, e separando seus elementos em dois subconjuntos não vazios, temos:

$$\{V\} \cup \{A, L, P\};\ \{A\} \cup \{V, L, P\};\ \{L\} \cup \{V, A, P\};\ \{P\} \cup \{V, A, L\}$$

$$\{V, A\} \cup \{L, P\};\ \{V, L\} \cup \{A, P\} \text{ e } \{V, P\} \cup \{A, L\}$$

Portanto, existem 7 maneiras diferentes de separar os elementos de um conjunto de 4 elementos em 2 subconjuntos não vazios.

Com uma relação muito próxima com os coeficientes binomiais, os Números de Stirling, nome dado em homenagem a James Stirling (1692-1770), são de dois tipos: os de primeira espécies denotados por $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ e os de segunda espécie denotados por $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

4.1 Número de Stirling de Segunda Espécie

Começaremos definindo os números de Stirling de segunda espécie de mais fácil entendimento do que os de primeira espécie.

Definição 8 Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k \geq 1$.

O símbolo $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ indicará o número de maneiras de escrever um conjunto A, com n elementos, como reunião de k subconjuntos não vazios e disjuntos.

Em outras palavras, o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia.

Quando $k = 1$ temos apenas uma maneira de distribuir os objetos, todos na mesma caixa, portanto $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1.$

Quando $k = n$ nós também temos apenas uma maneira, um em cada caixa, portanto $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1.$

Exemplo 18 No exemplo inicial temos $A = \{V, A, L, P\}$ onde listamos todas as maneiras de escrever A como reunião de dois subconjuntos não vazios e disjuntos.

Portanto, $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7.$

Exemplo 19 Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vamos calcular $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}$.

Queremos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5, em duas caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia. Coloque um dos cinco objetos , por exemplo o objeto de número 1, numa caixa. Precisamos decidir agora sobre os 4 restantes, em qual caixa ficarão. Como são duas alternativas, teremos 2^4 modos de distribuição. Eliminando o caso em que os quatro entram na caixa que está com o objeto de número 1, deixando a outra vazia, concluimos que $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 15.$

Exemplo 20 Seja $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vamos calcular $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$. De modo análogo ao exemplo anterior, queremos distribuir n objetos, numerados de 1 a n, em duas caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia. Coloque um dos n objetos , por exemplo o objeto de número 1, numa caixa. Precisamos decidir agora sobre os $n - 1$ restantes, em qual caixa ficarão. Como são duas alternativas, teremos 2^{n-1} modos de distribuição. Eliminando o caso em que os $n-1$

entram na caixa que está com o objeto de número 1, deixando a outra vazia, concluimos que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$$

Exemplo 21 Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos calcular $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}$. Quando temos mais do que duas caixas ficará mais complicado repetir o mesmo raciocínio feito com duas caixas porque teríamos de descontar os vários casos onde ficariam caixas vazias. Faremos outro procedimento que também funcionará no caso geral.

Considerando o objeto de número 1 temos exatamente dois casos a considerar:

- O objeto de número 1 permanecerá sozinho numa caixa
- O objeto de número 1 terá companhia.

$\boxed{\underline{1}}$-$\boxed{2}$-$\boxed{3,4}$; $\boxed{\underline{1}}$-$\boxed{3}$-$\boxed{2,4}$; $\boxed{\underline{1}}$-$\boxed{4}$-$\boxed{2,3}$;

$\boxed{\underline{1},2}$-$\boxed{3}$-$\boxed{4}$; $\boxed{\underline{1},3}$-$\boxed{2}$-$\boxed{4}$; $\boxed{\underline{1},4}$-$\boxed{\ 2}$-$\boxed{3}$

Portanto $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 6$.

Exemplo 22 Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vamos calcular $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

Queremos distribuir 5 objetos, numerados de 1 a 5, em três caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia. Faremos o procedimento do exemplo anterior que também funcionará para o caso geral.

Considerando o objeto de número 1 temos exatamente dois casos a considerar:

- O objeto de número 1 permanecerá sozinho numa caixa
- O objeto de número 1 terá companhia.

No primeiro caso temos que distribuir 4 objetos em 2 caixas, num total de $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} = 2^3 - 1 = 7$.

No segundo caso temos que distribuir 4 objetos em 3 caixas, num total de $\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\}$ e depois da distribuição colocar o objeto de número 1 em uma das três caixas, portanto de 3 modos distintos.

Assim $\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 3.\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right\}$.

Concluimos que $\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = 7 + 3.6 = 25$

Proposição 6 Para números naturais $1 < k \leq n$ e $n > 2$ vale que

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k.\left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\}$$

Prova

Considerando $A = \{1, \ldots, n\}$, queremos escrever $A = A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_k$, onde os subconjuntos são não vazios e $|A| = |A_1 + |A_2| + \ldots + |A_k|$. Novamente os elementos de A serão objetos numerados de 1 até n e os subconjuntos $A_1, A_2, \ldots A_k$ serão as caixas.

Considerando o objeto de número 1 temos exatamente dois casos a considerar:

- O objeto de número 1 permanecerá sozinho numa caixa

- O objeto de número 1 terá companhia.

No primeiro caso temos que distribuir $n-1$ objetos em $k-1$ caixas, num total de $\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right\}$.

No segundo caso temos que distribuir $n-1$ objetos em k caixas, num total de $\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\}$ e depois da distribuição colocar o objeto de número 1 em uma das k caixas, portanto de k modos distintos.

Assim $\left\{\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right\} + k.\left\{\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right\}$

$\blacksquare$

Vamos colocar os números de Stirling de segunda espécie numa tabela como fizemos com os coeficientes binomiais:

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\left\{ {0 \atop 0} \right\}$						
1	$\left\{ {1 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {1 \atop 1} \right\}$					
2	$\left\{ {2 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {2 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {2 \atop 2} \right\}$				
3	$\left\{ {3 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {3 \atop 3} \right\}$			
4	$\left\{ {4 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {4 \atop 4} \right\}$		
5	$\left\{ {5 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 4} \right\}$	$\left\{ {5 \atop 1} \right\}$	
6	$\left\{ {6 \atop 0} \right\}$	$\left\{ {6 \atop 1} \right\}$	$\left\{ {6 \atop 2} \right\}$	$\left\{ {6 \atop 3} \right\}$	$\left\{ {6 \atop 4} \right\}$	$\left\{ {6 \atop 5} \right\}$	$\left\{ {6 \atop 6} \right\}$

Agora substituindo os valores para $n = 1, \ldots, 6$ obtemos:

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\left\{ {0 \atop 0} \right\}$						
1	$\left\{ {1 \atop 0} \right\}$	1					
2	$\left\{ {2 \atop 0} \right\}$	1	1				
3	$\left\{ {3 \atop 0} \right\}$	1	3	1			
4	$\left\{ {4 \atop 0} \right\}$	1	7	6	1		
5	$\left\{ {5 \atop 0} \right\}$	1	15	25	10	1	
6	$\left\{ {6 \atop 0} \right\}$	1	31	90	65	15	1

Para manter a relação de recorrência definimos $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ e $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$ para $n > 0$, obtendo a tabela:

	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	$\boxed{15}$	$\boxed{25}$	10	1	
6	0	1	31	90=15+3.25	65	15	1

Completando a tabela até $n = 9$ obtemos por exemplo, $\left\{ \begin{matrix} 9 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 7770$:

	0	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	$\boxed{966}$	$\boxed{1701}$	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770=966+4.1701	6951	2646	462	36	1

Repetindo a definição, o número de Stirling de segunda espécie, $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$, é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia.

Agora na proposição seguinte vamos considerar o problema da distribuição de n objetos distintos em k caixas diferentes, com nenhuma caixa vazia.

Proposição 7 O número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas diferentes, com nenhuma caixa vazia é igual ao número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, onde $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$.

Prova

Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Segue que, para cada $i = 1, \ldots k$, $f^{-1}(b_i) = \{a \in A \mid f(a) = (b_i)\} \neq \emptyset$ e $A = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(b_i)$. Pensando nos elementos de A como objetos e nos de B como sendo caixas, uma maneira de distribuir os n objetos é colocar na caixa b_i os objetos que estão em $f^{-1}(b_i)$.

Recíprocamente, a partir de uma distribuição, definimos $f : A \to B$ que associa a cada objeto da caixa b_i o valor b_i. Como não há caixa vazia f é sobrejetora.

$\blacksquare$

Proposição 8 Para $n \geq k$ naturais, o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$, onde $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ é igual a

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) (k-i)^n$$

Prova

- Existem k^n funções de A em B.
- Deste total subtrairemos as que não são sobrejetoras.

Indicando por C_i o conjunto das funções $f : A \to B$ tais que $f^{-1}(b_i) = \emptyset$, para cada $i = 1, \dots k$, temos que o conjunto das funções que não são sobrejetoras é igual ao conjunto $C_1 \cup \cdots \cup C_k$. Como

$$|C_1 \cup \cdots \cup C_k| = |C_1| + \cdots + |C_k| - \sum_{1 \le i < j} |C_i \cap C_j| + \sum_{1 \le i < j < k} |C_i \cap C_j \cap C_k| - \cdots$$

e $|C_i| = (k-1)^n;\ |C_i \cap C_j| = (k-2)^n;\ |C_i \cap C_j \cap C_k| = (k-3)^n; \cdots,$

concluimos que

$$|C_1 \cup \cdots \cup C_k| = \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^3 - \cdots (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(k-k)^n$$

$$|C_1 \cup \cdots \cup C_k| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Subtraindo este número do total k^n obtemos

$$k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

∎

A proposição seguinte estabelece uma fórmula para o cálculo dos números de Stirling, usando os coeficientes binomiais.

Proposição 9 O número de maneiras distribuirmos n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia é

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Prova

Para obtermos distribuições de n objetos distintos em k caixas distintas, com nenhuma caixa vazia basta encontrarmos as distribuições de n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia, e fazer a ordenação destas caixas. Isto nos dá

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = k! \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$$

$\blacksquare$

Exemplo 23 Vamos calcular $\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\}$ usando a fórmula acima.

$$\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3!} \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^5$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3!} \left(3^5 - \binom{3}{1} (3-1)^5 + \binom{3}{2} (3-2)^5 - \binom{3}{3} (3-3)^5 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3!}(243 - 3.32 + 3) = \frac{1}{3!}150 = 25$$

4.2 Números de Stirling de Primeira Espécie

Exemplo 24 Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em uma mesa. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

Este problema equivale a distribuição de 4 objetos distintos em um circulo, portanto a pergunta equivalente é: quantos ciclos distintos de 4 elementos existem. Como provamos anteriormente, existem $\frac{4!}{4} = 6$ ciclos distintos com 4 elementos. A saber:

$$[1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 3, 2, 4], [1, 3, 4, 2], [1, 4, 2, 3], [1, 4, 3, 2]$$

Exemplo 25 Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em 2 mesas idênticas, nenhuma vazia. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

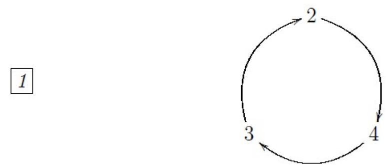
Indicaremos o conjunto de convidados que serão colocados nas 2 mesas por $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Acomodando o convidado número 1, temos duas possibildades:

- O convidado número 1 ficará sozinho numa mesa.
- O convidado número 1 terá companhia.

No primeiro caso, teremos que acomodar as 3 pessoas restantes numa mesa. Como o número de maneiras de distribuir 3 elementos numa mesa é igual ao ciclos de 3 elementos , isto pode ser feito de 2 modos distintos $[2, 3, 4]$ ou $[2, 4, 3]$. Assim, neste caso temos 2 modos:

$$[1] \cup [2, 3, 4] \text{ e } [1] \cup [2, 4, 3]$$

A notação usada $[1] \cup [2, 3, 4]$ representa que o convidado de número 1 ficará numa mesa e os de números 2, 3, 4 ficarão na outra, em posições estabelecidas pelo ciclo $[2, 3, 4]$. O símbolo $\cup$ é usado significando que, reunindo os elementos das duas mesas teremos todos os convidados.



No segundo caso temos que distribuir as três pessoas restantes usando duas mesas, o que pode ser feito de 3 modos:

$$[2] \cup [3, 4],\ [3] \cup [2, 4] \text{ e } [4] \cup [2, 3].$$

Agora, neste caso, o convidado número 1 poderá ocupar uma das mesas de 9 modos:

$$[1, 2] \cup [3, 4], [1, 3] \cup [2, 4],\ [1, 4] \cup [2, 3],\ [2] \cup [1, 3, 4],\ [2] \cup [3, 1, 4],\ [3] \cup [1, 2, 4],\ [3] \cup [2, 1, 4],$$
$$[4] \cup [1, 2, 3] \text{ ou } [4] \cup [2, 1, 3]$$

Portanto o número de fazer a distribuição de 4 convidados em duas mesas idênticas (nenhuma vazia) é igual a $2 + 9 = 11$.

Exemplo 26 Um anfitrião tem que distribuir 4 convidados em 3 mesas idênticas, nenhuma vazia. Qual é o número de maneiras de fazer esta distribuição?

Usando as notações do exemplo anterior, temos 6 maneiras de fazer a distribuição, a saber:

$$[1] \cup [2] \cup [3, 4],\ [1] \cup [3] \cup [2, 4],\ [1] \cup [4] \cup [1, 2],\ [2] \cup [3] \cup [1, 2],\ [2] \cup [4] \cup [1, 3] \text{ e } [3] \cup [4] \cup [1, 2]$$

Definiremos agora os números de Stirling de primeira espécie.

Definição 9 Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k \geq 1$.

O símbolo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ indicará o número de maneiras de arranjar n objetos distintos em k ciclos, ou equivalentemente, o número de maneiras de distribuir n pessoas em k mesas idênticas (nenhuma vazia).

Quando $k = 1$ temos que $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ (n pessoas em uma mesa) e quando $k = n$ temos que $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ (um único modo, uma pessoa em cada mesa).

Exemplo 27 Calculamos anteriormente que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11 \text{ e } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 6.$$

Exemplo 28 Tomando uma permutação de 4 elementos, por exemplo, 1324, onde $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ e $f(4) = 4$, podemos representá-la por 3 ciclos, a saber: $[1][2,3][4]$.

Listando todas as permutações de 4 elementos representadas pelos seus ciclos temos:

- as escritas usando 1 ciclo, num total de 6, a saber:

$$[1,2,3,4] = 2341, [1,2,4,3] = 2413, [1,3,2,4] = 3431, [1,3,4,2] = 3142$$

$$[1,4,2,3] = 4312, [1,4,3,2] = 4123$$

- as escritas usando 2 ciclos, num total de 11, a saber:

$$[1][2,3,4],[1][2,4,3],[2][1,2,4],[2][1,4,2],[3][1,2,4],[3][1,4,2],$$

$$[4][1,2,3],[4][1,3,2],[1,2][3,4],[1,3][2,4],[1,4][2,3]$$

- as escritas usando 3 ciclos, num total de 6, a saber:

$$[1][2][3,4],[1][3][2,4],[1][4][2,3],[2][3][1,4],[2][4][1,3],[3][4][1,2]$$

- as escritas usando 4 ciclos, uma única, a saber:

$$[1][2][3][4]$$

Donde obtemos $6+11+6+1=24=4!$

Esta interpretação, de permutações escritas usando ciclos, nos dá a seguinte igualdade;

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

A proposição seguinte estabelece uma relação de recorrência para os números de Stirling de primeira espécie.

Proposição 10 Para números naturais $1<k<n$ vale que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Prova

Indicamos o conjunto de n elementos por $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Seus elementos serão distribuidos em k ciclos.Temos duas possibilidades:

- O elemento 1 constitui um ciclo isolado.
- O elemento 1 ficará num ciclo com mais de um elemento.

O número de modos do primeiro caso é $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$, ou seja o número de maneiras de organizar $n-1$ elementos em $k-1$ ciclos.

No segundo caso, distribuimos os $n-1$ elementos restantes em k ciclos e em cada ciclo temos $n-1$ posições para encaixar o 1, obtendo o número é

$$(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Portanto, somando os dois valores temos:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

■

Vamos colocar os números de Stirling de primeira espécie numa tabela, onde definimos:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \text{ e } \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ para } n > 0.$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$						
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$					
2	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$				
3	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$			
4	$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$		
5	$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	
6	$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

Substituindo os valores, obtemos:

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
$\boxed{4}$	0	$\boxed{6}$	$\boxed{11}$	6	1		
5	0	24	$50 = 6 + 4.11$	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

Usando a relação de recorrência podemos aumentar a tabela, por exemplo:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Capítulo 5

Números de Euler (Números Eulerianos)

Definição 10 Seja $\pi = \pi_1\pi_2 \ldots \pi_n$ uma permutação de um conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dizemos que o índice i, com $1 \leq i < n$, é um ascendente da permutação π se $\pi_i < \pi_{i+1}$. Quando um indíce i é ascencente dizemos que o par (π_i, π_{i+1}) é uma ascendência.

Exemplo 29 Considere $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a permutação $\pi = 2314$. Temos $\pi_1 = 2, \pi_2 = 3, \pi_3 = 1$ e $\pi_4 = 4$, portanto temos dois ascendentes, $i = 1$ e $i = 3$, ou, equivalentemente, duas ascendências, (π_1, π_2) e (π_3, π_4).

Os números de Euler contam os números de permutações de um conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ com k ascendentes. Observamos que uma permutação de n elementos possuirá no máximo $n-1$ ascendentes e o máximo será atingido quando a permutação tiver os elementos dispostos em ordem crescente, a saber, $12 \ldots n$. Quando a permutação tiver os elementos dispostos em ordem decrescente o número de ascendentes será 0.

Definição 11 Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k \geq 0$.

O número de Euler, representado pelo símbolo $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$, indicará o número de permutações de um conjunto de n elementos com k ascendentes.

Exemplo 30 Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Temos 6 permutações do conjunto A:

123 (com dois ascendentes)

132 (com 1 ascendente)

231 (com 1 ascendente)

213 (com 1 ascendente)

312 (com 1 ascendente)

321 (com 0 ascendente)

Portanto, $\left\langle \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1$, $\left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = 4$ e $\left\langle \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = 1$.

Exemplo 31 Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Vamos calcular $\left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle$, ou seja, o número de permutações de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ com dois ascendentes.

Acrescentando o número 4 a uma permutação de $\{1, 2, 3\}$, o que pode ser feito de 4 modos, obtemos uma permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$. Por exemplo, tomando a permutação 231 obtemos 4231, 2431, 2341 e 2314.

Recíprocamente a partir de uma permutação de $\{1, 2, 3, 4\}$, retirando o número 4 obtemos uma permutação de $\{1, 2, 3\}$.

Indicamos por $\pi_1\pi_2\pi_3$ uma permutação qualquer de $\{1, 2, 3\}$ e analisaremos os pares de elementos consecutivos (π_1, π_2) e (π_2, π_3).

obs1. Se colocarmos o 4 no final da permutação $\pi_1\pi_2\pi_3$, adicionaremos um ascendente.

obs2. Se colocarmos o 4 no início, não adicionaremos ascendentes.

obs3. Se colocarmos o 4 entre π_i e π_{i+1}, onde $i = 1, 2$, teremos dois casos:

$$\pi_i < \pi_{i+1} \Rightarrow \text{ não serão adicionados ascendentes}$$

$$\pi_i > \pi_{i+1} \Rightarrow \text{ será adicionado um ascendente}$$

Agora faremos a contagem das permutações de $\{1, 2, 3, 4\}$ com dois ascendentes.

Consideramos todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$ e separamos por quantidade de ascendentes:

- permutações sem ascendentes, a saber, 321. Não é possível obter dois ascendentes acrescentando o 4.
- permutações com dois ascendentes, a saber, 123. Para manter a quantidade de ascendentes temos as possiblidades

$$4123, 1423, 1243$$

- permutações com 1 ascendente, a saber: 132, 231, 213, 312. Para aumentar um ascendente temos as possibilidades

$$1324, 1342, 2314, 2341, 4213, 2413, 4312, 3412$$

Portanto, $\left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = 11$

Proposição 11 Para $n > 0$ natural vale que:

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1-k \end{matrix} \right\rangle$$

Prova

Considere $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ uma permutação de um conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ com k ascendentes. Considerando todos os pares de elementos consecutivos $(\pi_1, \pi_2), (\pi_2, \pi_3), \ldots, (\pi_{n-1}, \pi_n)$, temos k ascendências e $n-1-k$ pares que não são ascendências. Invertendo os elementos da permutação π obtemos $\pi_n\pi_{n-1}\ldots\pi_1$ com $n-1-k$ ascendências e k não ascendências. Portanto,

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} n \\ n-1-k \end{matrix} \right\rangle$$

■

A proposição seguinte estabelece uma relação de recorrência para os números Eulerianos.

Proposição 12 Para $n > k > 0$ naturais vale que:

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$$

Prova

As permutações $\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_n$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ podem ser obtidas do conjunto das permutações de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ acrescentando o elemento n, de n modos distintos, em cada uma delas. As permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com k ascendências podem ser obtidas de dois modos:

- de uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ com k ascendências.
- de uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ com $k-1$ ascendências.

No primeiro caso, para não aumentar o número de ascendentes, temos que inserir o n antes do 1 ou entre os dois valores de uma ascendência, portanto de $k+1$ modos. Neste caso, obtemos o número $(k+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle$.

No segundo caso, para aumentar um ascendente, temos que inserir o n no final ou entre os dois valores de uma não ascendência, portanto de $1+n-1-k = n-k$ modos. Neste caso, obtemos o número$(n-k)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$.

Portanto, $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = (k+1)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\rangle + (n-k)\left\langle \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle$.

■

Exemplo 30 Vamos calcular $\left\langle \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\rangle$ usando a relação de recorrência.

Temos que $\left\langle \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\rangle = 4\left\langle \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\rangle + 2\left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = 4.1 + 2.11 = 26$

A seguir construimos a tabela para os números Eurelianos, onde colocamos por definição $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1$

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle$						
1	$\left\langle {1 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {1 \atop 1} \right\rangle$					
2	$\left\langle {2 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {2 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {2 \atop 2} \right\rangle$				
3	$\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {3 \atop 3} \right\rangle$			
4	$\left\langle {4 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {4 \atop 4} \right\rangle$		
5	$\left\langle {5 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {5 \atop 1} \right\rangle$	
6	$\left\langle {6 \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 5} \right\rangle$	$\left\langle {6 \atop 6} \right\rangle$

Agora, substituindo os valores para $n = 1, \ldots, 9$, observamos que a tabela possui uma simetria como no Triângulo de Pascal:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	0								
2	1	1	0							
3	1	4	1	0						
4	1	11	11	1	0					
5	1	26	66	26	1	0				
6	1	57	302	302	57	1	0			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

Curiosidade- Os coeficientes binomiais , os números de Stirling e os números de Euler estão relacionados pelas fórmulas seguintes:

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} (m+1-k)^n (-1)^k$$

$$m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{m} \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} k \\ n-m \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} n-k \\ m \end{pmatrix} (-1)^{n-k-m} k!$$

Capítulo 6

Considerações Finais

Ao final desse trabalho, pudemos concluir, através dos vários exemplos dados e das considerações feitas, que o tema de contagem possui vários resultados interessantes e curiosos, que poderão despertar o interesse de alunos pelo tema e pela Matemática. Esse texto mostra uma característica muito forte da matemática: temas que aparentemente não estão associados podem estar relacionados e ligados de maneiras inesperadas.

Lembramos que existem ainda outros números que carregam consigo características especiais e interessantes relações, como por exemplo os números Eulerianos de Segunda Ordem, a Sequência de Fibonacci, Número de Ouro ou Razão Áurea, os Números Harmônicos, e outros que poderão virar objetos de estudos para professores que queiram buscar atividades interessantes para incentivar o estudo da matemática em seus alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ALBERTSON, Michael O., HUTCHINSON, Joan P., Discrete Mathematics With Algorithms, Wiley, 1988.

[2] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado, A Matemática do Ensino Médio Vol. 2, SBM.

[3] GONÇALVES, Adilson de Souza, Introdução à Álgebra, Projeto Euclides, IMPA, 2005.

[4] HERNSTEIN, I.N. Topics in Algebra, 1964. ISBN: 9780471010906.

[5] JACY MONTEIRO, L. H. Elementos de Álgebra. Rio de Janeiro, RJ: Ao livro técnico S. A., 1969.

[6] MORGADO, A.C. et al. - Análise Combinatória e probabilidade . Coleção do Professor de Matemática, SBM, RJ, 2004.

[7] R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Parasshnik, Concrete Mathematics, A Foundation for Computer Science, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[8] ROSEN, Kenneth H., Discrete Mathematics and Its Applications, McGraw Hill, 1995.

[9] SANTOS, José Plinio, MELLO, Margarida P., MURARI, Idani T. C. Introdução à Análise Combinatória. Rio de Janeiro, Ed. Ciencia Moderna, 2007.