



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA – CURSO DE DOUTORADO

JULIANA ALVES DE SOUZA

COLA EM PROVA ESCRITA:
DE UMA CONDUTA DISCENTE A UMA ESTRATÉGIA
DOCENTE

JULIANA ALVES DE SOUZA

**COLA EM PROVA ESCRITA:
DE UMA CONDUTA DISCENTE A UMA ESTRATÉGIA
DOCENTE**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Campo Grande - MS
2018

JULIANA ALVES DE SOUZA

COLA EM PROVA ESCRITA:
DE UMA CONDUTA DISCENTE A UMA ESTRATÉGIA DOCENTE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS

Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profa. Dra. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-UFMS

Campo Grande-MS, 07 de junho de 2018.

A Deus

Porque dele, e por ele, e para ele, são todas as coisas.
Rm. 11:36

AGRADECIMENTOS

- ✦ *A Deus pela força concedida e refúgio encontrado.*
- ✦ *À minha orientadora, Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, por ter aceitado o desafio de orientar a distância uma leiga na área de avaliação da aprendizagem e por, mesmo assim, me conceder liberdade de ação; pela atenção e cuidado; pela paciência ao me guiar no entendimento de tudo que era novo; pelo carinho com que sempre nos recebia em sua casa e no grupo de pesquisa; pelo zelo nas leituras e pelo cuidado conosco sempre que “pegávamos” a estrada Aquidauana – Londrina.*
- ✦ *Ao professor Dr. João Ricardo Viola dos Santos pelo voto de confiança sem o qual possivelmente este trabalho sequer teria sido iniciado, pelas contribuições na leitura realizada e por desestabilizar várias de minhas certezas.*
- ✦ *Às demais professoras que compõem a banca examinadora: profa. Dra. Magna Natália Marin Pires, profa. Dra. Marcele Mendes Tavares e profa. Dra. Marilena Bittar, pelo zelo na leitura e pelas valiosas contribuições, as quais muito colaboraram para a qualidade desta pesquisa.*
- ✦ *Aos meus alunos da graduação, os primeiros inclusive, por terem aceitado ser as “cobaias” da pesquisa e a aprender junto comigo.*
- ✦ *Aos membros do GEPEMA, pelo acolhimento e pelas contribuições ao trabalho a cada apresentação realizada.*
- ✦ *A todos os colegas da turma, e em especial ao Adamo, Sonia e Vanessa, por todo o aprendizado proporcionado e pelos momentos de descontração. Foi muito bom conviver com vocês.*
- ✦ *Aos meus pais, Evaristo e Rosa, pela educação, valores de vida e orações.*
- ✦ *A meu, no início da pesquisa namorado, depois noivo e atual esposo, Rogerio Dumont, por me aturar; por dirigir horas e horas de viagem para que eu descansasse; por transcrever todos os áudios que foram necessários; por me ouvir e pensar junto comigo; por compreender e ajudar quando eu precisava que ele se esquecesse de mim, dele mesmo e de nossa casa; por faltar dias em seu trabalho para me acompanhar; por participar de eventos, palestras, orientações e reuniões do grupo de pesquisa junto comigo, por se privar de sair porque eu precisava ficar em casa; por se abdicar; por ter imensa paciência; por não me cobrar em nada; por me acolher em minhas crises..., enfim, por participar de todo o processo de construção desta pesquisa.*

SOUZA, Juliana Alves de. **Cola em Prova Escrita**: de uma conduta discente a uma estratégia docente. 2018. 146 p. Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

RESUMO

Esta pesquisa tem natureza qualitativa e subverte a ideia de cola em provas escritas. Parte de sua universalidade e persistência sinalizando que os mecanismos de controle podem provocar seu aperfeiçoamento e mudanças de estratégia na sua utilização. Convencionalmente, a cola desafia os professores, seus métodos avaliativos, suas escolhas metodológicas, seu domínio de sala de aula e até mesmo sua presença nela. Sai-se desse contexto para investigar a utilização da cola como um processo de subversão, ou seja, partindo de uma conduta comum dos discentes para uma estratégia docente. Para tanto, tomamos a prova-escrita-em-fases como instrumento avaliativo. O estudo, desenvolvido com estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática, teve por principal objetivo investigar a utilização da cola em uma prova-escrita-em-fases como estratégia docente na formação inicial de professores de matemática. A Educação Matemática Realística (RME) foi tomada como abordagem para o ensino de matemática. Nesse ambiente, os alunos são conduzidos a terem participação ativa, a avaliação é integrada à ação de formação e posta em prol do ensino e aprendizagem, constituindo-se em um elemento de formação, uma oportunidade de aprendizagem e uma prática de investigação. Ao final, considera-se que a prova-escrita-em-fases altera a natureza dos instrumentos convencionais de avaliação, coloca o aluno no direito de errar sem ser penalizado e lhe oferece a oportunidade de ampliar seus conhecimentos, a partir de suas maneiras de lidar com seus tempos e caminhos. As intervenções inerentes às fases reduzem a utilidade da cola porque individualiza a prova. A cola como conduta marginal discente interessa a um tipo de prova que privilegia a repetição. No contexto desta estratégia docente, ela perde sua finalidade, uma vez que a prova realizada em fases elimina a regra da não comunicação. Desse modo, a utilização da cola desperta interesse nos alunos e incentiva o estudo. Já as intervenções revelaram ser um recurso potencial para o professor orientar a resolução dos estudantes e regular o ensino e a aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática. Avaliação formativa. Cola. Prova-escrita-em-fases.

SOUZA, Juliana Alves de. **Cheating on Written Exam**: from a student conduct to a teacher strategy. 2018. 146 p. Doctorate (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

ABSTRACT

This is a qualitative nature research and it discusses the use of cheating by students on written exams. We begin with its universality and persistence indicating that the control mechanisms may lead to its improvement and changes of strategy in its use. Conventionally, cheating challenges teachers, their assessment methods, methodological choices, control over classroom and even their presence in it. We came out of this context to investigate the use of cheating as a subversion process, in other words, from a student's common conduct to a teacher strategy. Therefore, we took the stage-written exam as evaluative instrument. It was also developed a study with students of a Mathematics Undergraduate Course, whose main objective was to investigate the use of cheating on a stage-written exam as a teacher strategy in initial teacher training. The Realistic Mathematics Education (RME) was taken as an approach to mathematics teaching. In this environment, students are conducted to have active participation; the evaluation is integrated to training action and put in favor of teaching and learning, constituting a training element, a learning opportunity, and an investigation practice. Finally, we considered that the stage-written exam changes the nature of conventional instruments of evaluation; allows students to make mistakes without being penalized; and offers them opportunities to broaden their knowledge, from their manners of dealing with time and ways. The interventions inherent to the stages reduce the utility of cheating because they individualize the exam. Cheating as a student marginal conduct interests a type of exam that favors repetition. Within the context of that teacher strategy, cheating misses its purpose, since the exam carried out in stages eliminates the rule of non-communication. Thus, the use of cheating awakes interest on students and stimulates the study. In addition, interventions proved to be a potential resource for teachers to guide resolution by students and to regulate teaching and learning.

Keywords: Mathematics Education. Formative assessment. Cheating. Stage-written exam.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO.....	12
1	MUNDO DA COLA: CARACTERIZAÇÕES.....	16
1.1	TRÍADE PRINCIPAL.....	18
1.2	MITOS E RITOS.....	23
1.3	UM PANORAMA.....	24
1.4	POSSIBILIDADES	26
2	UM AMBIENTE DE ENSINO E APRENDIZAGEM.....	28
2.1	PROVA-ESCRITA-EM-FASES.....	32
3	ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS: O CAMINHAR.....	38
3.1	A UTILIZAÇÃO DA COLA EM UMA PROVA-ESCRITA-EM-FASES.....	48
3.2	OS ENUNCIADOS DAS QUESTÕES DA PROVA	53
4	UM OLHAR SOBRE SOBRE AS PRODUÇÕES	58
4.1	DOS ESTUDANTES.....	58
4.1.1	QUESTÃO DAS PIZZAS.....	58
4.1.2	QUESTÃO DA P.A E P.G.....	63
4.1.3	QUESTÃO DA RECEITA DO RESTAURANTE.....	69
4.1.4	QUESTÃO DA CERCA DO TERRENO.....	76
4.1.5	QUESTÃO DA DIVISÃO DOS CAMELOS	80
4.1.6	QUESTÃO DAS CONTAS NA CAIXINHA	82
4.1.7	QUESTÃO DO CARTEIRO..	84
4.2	DA PESQUISADORA	90
4.2.1	AS INTERVENÇÕES	90
5	AS DUAS PERSPECTIVAS DE COLA.....	104
5.1	A COLA COMO UMA CONDUTA DISCENTE.....	104
5.2	A COLA COMO UMA ESTRATÉGIA DOCENTE.....	107

6	CONSIDERAÇÕES.....	122
	REFERÊNCIAS.....	128
	ANEXO.....	133
	ANEXO A – EMENTA DA DISCIPLINA.....	134
	APÊNDICES.....	135
	APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO.....	136
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO ESCRITO.....	137
	APÊNDICE C – RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA PROVA.....	139

APRESENTAÇÃO

Venho de uma grande família da zona rural, a filha número oito de um total de 11 irmãos. Estudei até a 4ª série (atual 5º ano) em uma escola bem pequena e extremamente simples, feita de pau a pique que ficava cerca de 2 km de casa. Meus irmãos e eu íamos a pé. A partir da 5ª série, os alunos eram encaminhados para a escola principal do Assentamento, um lugar maior e no molde de escolas urbanas. A distância era de uns 7 km, então íamos de ônibus. Quando já estávamos na escola e recebíamos a notícia de que o ônibus havia apresentado algum problema mecânico, voltávamos a pé. Quando isso acontecia e ainda estávamos em casa, íamos para a escola de bicicleta.

A educação escolar oferecida no Assentamento era julgada pela própria comunidade como inferior, ou seja, com menor qualidade quando comparada com a urbana, então os jovens daquele lugar não tinham muitas expectativas profissionais. Ter sido aprovada no vestibular foi motivo de muita alegria e de orgulho. Essa aprovação marcou o início de uma fase cheia de desafios.

Iniciei o Curso de Licenciatura em Matemática em 2007, na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), *Campus* de Aquidauana, cidade do interior do Estado, que fica cerca de 130 km de distância da capital, Campo Grande. Fui bolsista do primeiro ao quarto ano e concluí o curso dentro do período mínimo (2007-2010). No final do último ano, incentivada por uma professora, inscrevi-me no Processo Seletivo do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da UFMS. Fui aprovada e, nos dois anos seguintes, cursei o mestrado pesquisando na área de formação inicial de professores de matemática.

Enquanto aluna, a cola sempre me foi familiar. Por um tempo, tive-a como uma parceira. A primeira estratégia que aprendi para burlar o professor foi a de decorar as lições de Língua Portuguesa, só depois aprendi a ler. Decorei a tabuada para depois realmente entender. Depois aprendi a colar, e a partir daí não precisei mais me preocupar em decorar, porque pensava ter encontrado um recurso quase que infalível para tirar boas notas. Poderia dizer que até (mais ou menos) o sexto ano do Ensino Fundamental fui uma *expert* em cola! E foi naquela “escolinha” simples de zona rural que mais coleei.

O tempo passou e fui percebendo que não precisava mais recorrer à cola para tirar as desejadas boas notas. No Ensino Médio, não me recordo de tê-la usado. Enquanto acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática, houve uma vez em que (por vaidade) eu quis

aumentar minha média em uma disciplina e, então, resolvi fazer a prova optativa para substituir a menor nota. Nesse dia resolvi colar por não ter muita facilidade com os conteúdos daquela disciplina. Que infeliz decisão! Não sabia que havia perdido o “jeito pra coisa”. Fiquei tão nervosa que não conseguia nem fazer a prova nem consultar a cola, já que tinha que ficar observando cada movimento do professor, a fim de perceber o exato momento para colar. A nota foi menor do que as anteriores (e que se mantiveram). Acabei confessando ao professor o motivo do mau desempenho naquela prova.

Ainda na faculdade, passei cola a uma amiga que precisava de determinada nota para ser aprovada em uma disciplina na qual ela tinha dificuldade. Sabia também que havia colegas da turma que colavam, mas nunca denunciei. Seria deslealdade, provocaria inimizade, mal-estar entre os colegas e “mau clima” na sala.

Agora me alio novamente à cola, mas de outra perspectiva: a de professora.

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desencadeado pela participação da autora no grupo de pesquisa FAEM (Formação, Avaliação e Educação Matemática) da UFMS, sob a coordenação do professor Viola¹, nos anos de 2013 e 2014. Juntamente com os membros desse grupo, participou do evento “GEPEMA² - Uma década de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação da Aprendizagem”, nos dias 15 e 16 de setembro de 2014, em Londrina-PR. Lá, por intermédio do professor Viola, conheceu a professora Regina Buriasco³. Nesse tempo, ela orientava uma pesquisa de mestrado sobre a prova com cola. Foi amor à primeira vista pelo tema, ali iniciou-se o relacionamento com a prova com cola como instrumento de avaliação.

Nos anos de 2013 e 2014, trabalhou como professora do Ensino Fundamental do Colégio Militar de Campo Grande. Em agosto de 2014, ingressou no curso de Matemática da UFMS, *campus* de Aquidauana (onde foi aluna), como professora efetiva. Saiu de uma instituição onde a cola efetivamente gera expulsão e começou em outra onde se propõe a investigá-la.

Em 2015 iniciou o doutorado na primeira turma do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS, sob a orientação da professora Regina, colaboradora do programa. Apesar das mudanças inerentes ao processo de pesquisa, a ideia principal de partir da cola como uma conduta discente para uma estratégia docente se manteve.

Enquanto professora do Ensino Superior, formadora de professores de matemática, tem vivenciado experiências de colas em provas escritas tanto suas quanto de colegas do curso e da universidade. A atitude varia de professor para professor, mas nada que distancie muito dessas ações. Quando há a suspeita, há professores que mudam alunos de lugar, passam a observá-los de forma mais próxima e direta para inibir, fazem provas diferentes, etc. Quando há o flagrante, alguns professores retiram a prova ou atribuem nota zero.

As formas de colar têm acompanhado as transformações pelas quais as instituições de ensino e a sociedade têm passado. Os papezinhos, mesmo ainda sendo uma opção, foram substituídos por atuais instrumentos eletrônicos. Quando o aluno quer colar, ele busca diversos meios para isso.

¹ Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos.

² Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação. Mais informações podem ser obtidas em: <<http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/>>

³ Prof^a. Dr^a. Regina Luzia Corio de Buriasco, coordenadora do GEPEMA.

Por outro lado, a escolha em colar pode ser uma manifestação de que os alunos não se ajustam ao modo como o ensino tem se dado, geralmente pautado na transmissão de conteúdos, repetição e provas quase que exclusivamente escritas e individuais. A cola pode contestar justamente um sistema em que o aluno finge que aprendeu e o professor pensa que ensinou (MARQUESIN; BENEVIDES, 2011). Talvez por isso, ela se constitua um sinal de alerta para a discussão do processo de ensino, aprendizagem e avaliação. Entretanto, essa prática ainda permanece como assunto tabu ou não assunto nas universidades, sem debate crítico (GOMES, 2008).

A cola tem resistido às investidas de sua eliminação. Os mais variados mecanismos de controle terminam por promover, legitimar e convidar à sua prática, visto que um número muito pequeno de alunos, comparado ao número real de praticantes, é “pego” colando, o suficiente apenas para manter a impressão de controle (KRAUSE, 1997). As medidas de prevenção, como a vigilância, provas com questões em ordem diferentes, separação de alunos etc., e as medidas de punição, como a retirada da prova e atribuição da nota zero, têm levado a uma mudança de estratégia de utilização da cola e ao seu aperfeiçoamento, possibilitando conjecturar que não há efetividade de qualquer que seja o instrumento de vigilância e repressão.

Esta pesquisa busca investigar e utilizar a cola como meio de provocar (outros) caminhos e possibilidades, entre eles, aliar-se a ela, utilizando-a não como um instrumento para obtenção de nota, mas como um recurso ao estudo e à aprendizagem. Relativizar padrões e, como consequência, descriminalizá-la. A ideia é aliar-se à cola, em um processo de subversão, isto é, partir de uma conduta comum dos discentes para uma estratégia docente que pode favorecer o estudo e a formação dos estudantes. O intuito não é promover a cola tradicional, mas utilizá-la como recurso ao estudo, investigando essa utilização.

A permissão da cola em si pode não ser a solução para os problemas do sistema de avaliação escolar porque “os alunos que não têm o hábito de estudar, de se preparar para as provas, que sempre dão um ‘jeitinho’ para sair-se bem nas provas, vão continuar fazendo as mesmas coisas e obtendo os mesmos resultados se não mudarem suas práticas” (FORSTER, 2016, p. 112). Sabe-se que o tema é polêmico, tanto do ponto de vista didático e de avaliação, quanto de valores morais e éticos, e por isso também instigante. Todavia, no campo da Educação Matemática no Brasil, as pesquisas com essa temática ainda são escassas.

Por meio de um levantamento bibliográfico foram encontradas três dissertações de mestrado que versam a respeito do assunto. O trabalho de:

- Eugênio Freitas (2002) do programa de pós-graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina – SC, intitulado “análise da ‘cola’ no processo ensino-aprendizagem”, teve por objetivo principal avaliar a ocorrência da cola no processo de ensino-aprendizagem, visando contribuir para o avanço do ato pedagógico, tomando como referência para a análise a atividade acadêmica no curso de Psicologia de um Centro Universitário de Belo Horizonte – MG. Os dados apresentam a posição dos entrevistados frente ao fenômeno, permitindo uma análise das mudanças subjetivas ao longo da vida escolar e acadêmica dos envolvidos.
- François Ramos (2012) do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Uberaba – MG, intitulado “Fraude acadêmica: uma análise ético-legislativa”, norteou-se pela questão “de que forma a fraude acadêmica pode constituir um comportamento transgressor da ética e da legislação brasileira?” e teve por objetivo contribuir para a reflexão do comportamento ético na relação ensino-aprendizagem. A pesquisa permitiu considerar que a existência de um quadro de impunidade constitui incentivo para a prática da fraude pelo educando, comprometendo a avaliação do processo de ensino-aprendizagem.
- Cristiano Forster (2016) do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – PR, sob a mesma orientação desta tese, intitulado “A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem”, teve por objetivo apresentar um estudo da utilização de uma prova escrita com cola em uma disciplina de um curso de pós-graduação como recurso à aprendizagem na avaliação como oportunidade de aprendizagem. Concluiu-se que, na utilização da prova escrita com cola, a oportunidade de aprendizagem é oferecida em pelo menos dois momentos: quando o aluno prepara a sua cola e quando constrói e valida o gabarito da prova com seus pares na sala de aula.

A partir desse contexto, o principal objetivo é investigar a utilização da cola em uma prova-escrita-em-fases como estratégia docente na formação inicial de professores de matemática.

Como objetivos específicos, busca-se

- I. analisar a utilização da cola em uma prova-escrita-em-fases como estratégia de ensino para aulas de matemática;
- II. analisar e discutir a utilização da cola em uma prova-escrita-em-fases como meio de repensar a prática letiva.

Busca-se investigar potencialidades na utilização da cola quando aliada ao instrumento de avaliação prova-escrita-em-fases. Quais as implicações para professor e aluno? Que mudanças provocam no ambiente de sala de aula? Como os alunos farão uso da oportunidade de colar e interagir com o professor e colegas? Como a natureza de uma prova que favorece a comunicação dialoga e intervém na cola? Qual o papel e quais as características da avaliação nesse contexto? Como o professor pode utilizar esses recursos para favorecer o ensino e a aprendizagem?

1. MUNDO DA COLA: CARACTERIZAÇÕES

A cola é famosa no mundo todo. Seu nome varia de um lugar para outro, mas não seu significado. Na Espanha, é conhecida por *chivar* e *chuleta*, *copianço* em Portugal, *tricher* na França, *cheat* em inglês e cola (ou pesca) no Brasil. Presente em dias de provas escritas de todos os níveis de ensino, ela manifesta-se de forma silenciosa, ocorre de forma rápida e gera adrenalina pelo risco da descoberta que a acompanha. Tradicionalmente, é vista como aliada pelos alunos e como inimiga pelos professores.

A origem da palavra cola é atribuída ao termo francês *colle*, que tanto significa o ato de grudar quanto expressa dificuldade ou problema a resolver (ABRANTES, 2008).

A "cola" é, sem dúvida, um fenômeno psicossocial, seja por ser considerada um comportamento desviante, seja porque, no fundo de suas razões, encontram-se processos de transferência de classificações e notas atribuídas pela avaliação escolar para a auto-avaliação [...] Os valores em nota podem ser estendidos ao valor que a própria pessoa se atribui, traduzindo-se no modo como ela se vê e como pensa que seja vista por outros (RANGEL, 2001, p. 83).

Por mais que a nota esteja arraigada na cultura escolar, e o seu processo de atribuição seja subjetivo, a forte conotação do número e sua materialidade acobertam esse processo e o contexto que a gerou, além disso, “na medida em que o emissor está sempre vinculado à sua mensagem, é difícil qualificar o produto independentemente de seu autor” (BARLOW, 2006, p. 38), e nesse meandro a nota pode refletir-se na imagem do avaliado.

Para outros autores, colar é uma “atitude de trazer para o momento da avaliação informações que não correspondem ao conhecimento já construído” (ZANON; ALTHAUS, 2008, p. 24); “é uma forma de pesquisa caracterizada como ilícita, já que desautorizada por normas institucionais ou até por determinações estabelecidas pelo professor” (IOCOHAMA, 2004, p. 26); “consiste, concretamente, na utilização de meios fraudulentos para obter vantagens competitivas no âmbito dos processos de avaliação” sendo essa, talvez, a forma mais difundida de fraude (GOMES, 2008, p.149).

Abrantes (2008) considera-a um desvio de conduta, apesar de julgar que esta é uma característica inerente ao ser humano. Acerca desse entendimento, vale acrescentar uma publicação do Ministério da Educação (MEC) via *facebook* no dia 09 de dezembro de 2015, em comemoração ao Dia Internacional de Combate a Corrupção. A fim de apontar que a corrupção também está presente nos pequenos atos, como falsificar a carteira estudantil e assinar presença pelo e para o colega, a seguinte imagem foi postada.

Figura 1 – Publicação do MEC



Fonte: www.facebook.com/ministeriodaeducacao

A corrupção consiste em todo ato em que se faz “uso de meios ilegais para apropriar-se de informações privilegiadas, em benefício próprio” (HOUAISS, 2009, CD ROM), um desvio de conduta para tirar vantagem, proveito. A mensagem da imagem traduz como sendo esse o entendimento do órgão.

De forma unilateral, isto é, da perspectiva do professor ou da instituição, colar é utilizar informações por meio de

fontes não autorizadas para a realização de provas ou de atividades avaliativas, a fim de suprir lacunas na aprendizagem do conteúdo envolvido e/ou de obter vantagens em notas.

É possível listar inúmeras formas de trapacear em provas escritas, desde estratégias mais antigas até as mais modernas, criativas e tecnológicas que são melhoradas através do tempo. Segundo reportagem da Revista Nova Escola, edição de setembro de 2011, a tentativa de enganar é tão velha quanto a própria avaliação, mostrando que essa prática acompanha as transformações por que a escola e a sociedade têm passado.

A cola tradicional pode se manifestar de maneira manuscrita e eletrônica. A primeira se caracteriza por anotações escritas em papel ou partes do corpo e que podem estar camufladas em lugares inusitados. Já a eletrônica vai de ponto de escuta no ouvido a aparelho receptor/transmissor de mensagens. Desde a popularização dos telefones celulares, a cola se sofisticou, já que o aparelho pode ser utilizado tanto em mensagens e consulta à Internet, quanto para fotografar qualquer material de interesse. É como ter um mundo na palma da mão; é o aperfeiçoamento tecnológico da clássica tirinha de papel. Existe ainda a espiadela na prova do colega, troca de provas, cochichos. O olhar constante para o professor pode indicar a intenção e os que nada fazem podem estar esperando receber uma cola ou a melhor ocasião para usar a sua própria cola. O momento decisivo ocorre quando algum aluno distrai o professor.

A cola pode ainda ter caráter individual ou “solidário”/coletivo, quando um aluno passa ou recebe respostas de colegas (nesse caso, a cola também é conhecida como pesca). Curiosamente, quando passada adiante, ela sofre uma degeneração, como na brincadeira do telefone sem fio, correndo o risco de não alcançar o objetivo prático do recebimento da nota.

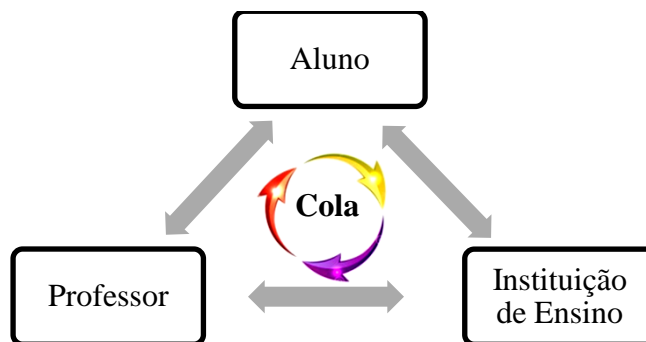
[...] a cola perde potencial de nota ao ser transferida de uma prova a outra. Por quê? Os veículos de transmissão da cola são limitados, e a necessidade de uma pequena área no papel transferido entre os alunos limita o detalhamento da resolução. Quem escreve, não escreve tudo, e quem copia, nem sempre copia direito ou entende o que está escrito. Uma série de ‘indentações’ para explicar o desenvolvimento da questão são removidos ao se fazer a cola, atendo-se ao essencial. A falta destes guias, a questão colada torna-se obscura, perdendo pontos. A cola muitas vezes se reduz apenas a valores e equações essenciais, quando não ocorrem ‘mutações’, valores errados copiados às pressas (SANTOS, 2002, s/p).

Após discorrer sobre o conceito, tipos e modos de utilização da cola, passa-se a olhar para o aluno, o professor e a instituição de ensino diante desse fenômeno.

1.1 A TRÍADE PRINCIPAL

É possível dizer que, em torno da problemática cola, há uma tríade principal relacionada: o aluno, o professor e a instituição de ensino.

Figura 2 – Tríade em torno da cola



Fonte: a autora.

Cada vértice tem suas arestas, seus detalhes, argumentos, conflitos, justificativas, contradições, motivações etc.

Domingues (2006) questiona o porquê de os alunos serem capazes de reconhecer a negatividade dos efeitos da cola (empobrecimento da formação moral, enfraquecimento da formação técnica etc.) e ao mesmo tempo praticá-la. O autor estabelece uma análise em dois planos: o juízo ético e o pragmático. Ele pontua que, “na monitorização diária da actividade, frequentemente eles se separam e os objectivos se impõem aos princípios, sobreposição esta que quase sempre impõe os interesses materiais face aos interesses éticos” (p. 48). Além disso,

[...] os benefícios são mais próximos e mais rapidamente observáveis do que os malefícios e, por isso, as decisões para agir nas provas académicas são mais condicionadas pelas desejadas vantagens imediatas. [...]. A fragilidade do sistema de controlo disciplinar desprotege os princípios éticos e deixa campo aberto para se desenvolverem os princípios pragmáticos, mais úteis para realizar ajustamentos e adaptações aos constrangimentos da avaliação (DOMINGUES, 2006, p. 49).

Uma análise das razões que levam os alunos a praticá-la pode ser o primeiro passo para o estudo da complexidade do fato, cabendo a ressalva de que “em fenômenos complexos, não encontramos uma única causa para um único efeito” (KRAUSE, 1997, p. 75).

Rangel (2001) aponta que, dentre as causas, incluem-se questões éticas, didáticas e psicossociais. Sendo que os aspectos didáticos (nota baixa, reprovação, erros de respostas) articulam-se a processos psicossociais de prestígio pessoal do aluno e preservação de imagem, ou seja, envolve os campos psicológico, emocional.

É inegável que a prova desperta uma forte carga emocional, como ansiedade (capaz de bloquear o desempenho, o pensamento e causar lapso de memória – “o branco”), medo da nota baixa e da reprovação, nervosismo, dúvidas, insegurança, esquecimento etc. Por isso, a cola pode se configurar como um meio de diminuir a ansiedade – se houver esquecimento, ela pode gerar segurança – como uma fuga ao fracasso, uma estratégia de defesa ou uma porta de escape à prova que tem poder de atribuir notas baixas, reprovar e refletir na imagem pessoal. Então, do ponto de vista prático, o aluno pode colar para garantir nota mínima e ser aprovado.

Segundo a Revista Nova Escola (2011)⁴, há também os que colam só para desafiar o professor, ou para provar que são "mais espertos" e os que não conseguem atender à expectativa de saber tantos conteúdos de uma só vez. A cola também pode ser resultado de uma aprendizagem não significativa, porque teoricamente não há necessidade de colar aquilo que se conhece ou que se sabe.

Iocohama (2004) cita o desinteresse pelo próprio estudo (no contexto universitário, cursar sem realmente ter concebido aquele curso para a formação profissional), a busca da “cola” como um instrumento de salvação para a avaliação e aprovação, sem a preocupação com o conhecimento do conteúdo. Para Ribeiro (2004), a escolha em colar pode ser uma manifestação de enfrentamento, mostrando que não se ajustam a um ensino que privilegia a “decoreba” ou como uma recusa em “quebrar a cabeça” para provar que sabem coisas pelas quais não se interessam.

⁴ <http://acervo.novaescola.org.br/formacao/prova-prova-cola-643157.shtml>

Gomes (2008) pontua diversos fatores que podem desencadear e manter a prática da cola entre universitários: fatores relacionados aos alunos, como o hábito de estudo de última hora e a desarticulação entre a vida acadêmica e a vida não acadêmica, estimulada por festas; fatores organizacionais, como, por exemplo, a concentração de muitas provas em determinado período; fatores pedagógicos – ensino que não suscita o interesse e a participação do aluno, o caráter muito teórico de algumas disciplinas, deficiente relação pedagógica entre professores e alunos, avaliação centrada em testes, memorização e reprodução acrítica dos conteúdos; e fatores institucionais, como a inexistência de um código normativo que uniformize procedimentos e clareie os valores e princípios éticos para toda a instituição.

De maneira similar, Krause (1997, p.70) entende que a cola é promovida pela proibição e

é estimulada quando se submete o aluno a múltiplas disciplinas fragmentadas, cada uma delas com exigências cumulativas e conflitivas entre si, somando testes e exames toda semana, às vezes todos os dias de uma única semana, dentro de um espaço usualmente apertado, em que o colega ao lado senta-se a menos de um metro.

As razões que levam os alunos a legitimarem a cola têm natureza muito diversa. É o que considera Domingues (2006, p. 36), para o qual essa prática deve-se a “factores de realização pessoal, de controlo das condições de sucesso nas provas realizadas, de aproveitamento de oportunidades abertas por docentes mais displicentes, de gestão da ansiedade e normalização da igualdade de oportunidades”. Para o aluno, “a decisão de copiar resulta de cálculo que considera a necessidade, equaciona os riscos e as perdas, pondera os benefícios. Neste frio cálculo racional não existe espaço para a moral” (DOMINGUES, 2006, p. 167). Soma-se, ainda, o clima de cumplicidade rodeado por um tácito pacto de silêncio que a todos protege, caso contrário, o convívio social da turma poderia se tornar caótico.

Apesar de esse autor relatar que a maior parte dos alunos considera que a cola prejudica a formação escolar e a preparação para o desempenho profissional, é possível conjecturar que, para os alunos, esse recurso pode se caracterizar como uma ajuda para si mesmo (cola individual) e para o colega (cola solidária/coletiva). Silva *et al* (2006), inclusive, sugerem o uso do termo *ajuda*, de mesmo teor, mas de natureza mais suave. Os autores defendem que, apesar de ser uma transgressão, a cola tradicional pode envolver questões de altruísmo porque, mesmo correndo o risco de ser descoberto e sofrer consequências negativas, “o estudante, ao praticar esse tipo de ação, está reagindo à situação de dificuldade de um

colega, procurando atenuá-la e a princípio não visa o interesse próprio” (SILVA *et. al.*, 2006, p. 2), sendo a amizade a causa mais direta.

Enquanto para os alunos a cola é uma aliada, para os professores é uma inimiga, porque desafia seus métodos avaliativos, suas escolhas metodológicas, seu domínio de sala de aula e até mesmo sua presença nela. Pimenta (2010, p. 126) questiona: “[a cola] seria resultado da inadequação da metodologia, do conteúdo e das formas de avaliação? Ou é resultado de valores propagados pela cultura do menor esforço [e imediatista] que tem ganhado espaço na atualidade?”. Talvez um pouco de cada e outras coisas mais.

A Revista *Amae Educando*, número 406 de novembro de 2014, traz uma reportagem na qual indica que a prática da cola está relacionada com o tipo de prova; quanto mais esta for excludente e autoritária, mais os alunos utilizam-se daquela para manipular seus resultados. Com ideia semelhante, Demo (2006, p. 89) argumenta que “o ‘professor’ que vive de aula e prova, pratica e impõe a cópia dos outros. O aluno, coagido, responde na mesma moeda: decora e cola”. Nessa linha, a cola seria provocada pelas escolhas metodológicas e de avaliação do professor, isto é, a aplicação única de provas como forma de verificar o avanço da turma pode gerar como consequência a cola.

Icochama (2004) critica a desvinculação do professor de uma prática significativa, por isso implicar em memorização sem aplicação, em restringir a avaliação à medição (e não a um instrumento de formação) e em não dar à avaliação a sua devida importância. Ele critica também o sistema educacional baseado no ensino tradicional de transmissão de conteúdos, no qual cabe ao aluno captar e repetir a informação, a avaliação restrita à prova escrita com a atribuição de notas, sendo a classificação seu fim exclusivo.

Até os dias de hoje, a nota é uma exigência formal e funciona como uma moeda de troca da escola e das instituições de ensino de maneira geral. A cola pode contestar justamente esse sistema.

Parece usual, que quando pega um aluno em flagrante, colando, professor se veja no dever de tomar alguma atitude, uma vez que ignorar não ajuda, porque pode parecer descaso e o aluno pode perder o respeito pelo professor. Quando a cola é descoberta, seria o “momento também de o professor refletir: o fato mostra que o aluno não está seguro. Mesmo sem ter aprendido, ele finge que sabe para não ser punido” (RIBEIRO, 2004, s/p). Além disso, é uma oportunidade para o professor discutir valores como a formação moral e ética dos estudantes.

Para minimizar os casos de cola, os professores tomam algumas medidas preventivas, corretivas ou repreensivas. Há aqueles que produzem provas diferentes ou com as questões

em ordens diferentes, separam alunos, advertem, mas, ao final a prática se repete, exigindo outras condutas que também não alcançam efetividade (IOCOHAMA, 2004). Outros dispõem fórmulas na lousa, autoriza consulta a cadernos e livros.

Há quem considera que a existência de regras formais poderia inibir a cola. Gomes (2008) aponta a inexistência de regras formais que condenem e estipulem sanções para os diversos tipos de fraudes, que contemplem, para fins educativos e formativos, a viabilização de ações corretivas por parte das competentes instâncias universitárias. Pimenta e Pimenta (2011, p.15) indicam a falta de um código de ética próprio, o que, para elas, serviria “basicamente ao propósito de promover uma atmosfera de honestidade acadêmica. Há pesquisas que comprovaram que em universidades que os possui, diminui a frequência de fraude em avaliações”.

Em contraponto, o controle, segundo Krause (1997), além de pouco inteligente, tende a ser ineficiente punindo somente aqueles que colam muito mal. “Se o aluno quiser colar, uma infinidade de procedimentos poderá estar a sua disposição. O problema, assim, estaria em definir quais medidas seriam necessárias para poder eliminá-la ou, até mesmo, refletir se a ‘cola’ poderia ter sua eliminação possível” (IOCOHAMA, 2004, p. 27). O sistema de vigilância para a aplicação de provas em colégios militares, por exemplo, assemelha-se ao de provas de concursos públicos e vestibulares: são constituídos fiscais tanto para as salas de aulas quanto para banheiros e corredores, porém, ainda assim, surgem casos de cola devido a uma mudança de estratégia por parte do aluno.

Em linhas gerais é possível notar que a cola persiste no cenário educacional porque é resistente às investidas de sua eliminação. Krause (1997) avalia que isso pode ser bom porque significa que o indivíduo reage ao controle e à (des)individualização, mas também pode ser ruim, pois, acaba por tornar a cola uma das substituições mais fortes das instituições de ensino. As medidas de prevenção e repreensão provocam seu aperfeiçoamento, possibilitando conjecturar que não há efetividade de qualquer que seja o mecanismo de controle. Abrantes (2008, p. 86), inclusive, acredita que, “enquanto houver aluno, escola e prova, sempre existirá, pelo menos, a tentativa de cola”.

Por fim, é válido mencionar que nem sempre a cola chega a ser vista como um problema, e, nesse caso, entende-se que o prejuízo ficará somente para quem cola, sem ser um sinal de alerta e de discussão do processo de ensino, aprendizagem, avaliação, nem como oportunidade para desenvolver a formação moral do aluno (IOCOHAMA, 2004).

1.2 MITOS E RITOS

O trabalho de Barlow (2006), “Avaliação escolar: mitos e realidades”, leva-nos a perceber que a sociedade, de modo geral, é permeada de mitos e ritos: religiosos, familiares, acadêmicos, escolares, militares, jurídicos, políticos, funerários etc. O rito nada mais é que “um conjunto de gestos e de palavras estritamente codificadas (sempre realizadas da mesma maneira, segundo normas muito preciosas com atores definidos) e que correspondem a uma representação religiosa ou a um mito” (BARLOW, 2006, p. 19). Já o mito é uma história sagrada, mais verdadeira para quem ouve do que a verdade das realidades concretas. “O mito nos faz considerar uma coisa como verdadeira porque ela é dita desde sempre. [...] e o rito nos faz considerar como bom aquilo que é feito desde sempre” (BARLOW, 2006, p. 07). O autor pontua que qualquer manifestação da avaliação escolar pode dar margem à produção de mitos e ritos. A prova escrita, instrumento avaliativo dominante, é o mais ritualizado dos instrumentos de avaliação. Nela estão subjacentes comparações, relação de poder, sigilo na preparação, organização em fileiras, distribuição de provas, silêncio para a realização, correção, devolução pelo professor, cola etc.

Barlow (2006) indica que o ritual de controle escolar da prova escrita parece fundamentar-se no princípio de que todos os alunos são trapaceiros em potencial, como uma espécie de disposição genética. Esse controle acirrado pode pautar-se pelo mito de que a vigilância inibe a cola, entretanto, como já discorrido, as medidas de controle geram apenas uma mudança de estratégia por parte do aluno. Além disso, o autor pondera que,

no lado oposto a essa cultura da suspeita entre os professores, elaboram-se no imaginário escolar mitos e ritos que glorificam a trapaça, elevando-as à categoria das artes e ofícios, das belas artes, e mesmo do heroísmo patriótico. Longe de ser visto pelo que é verdadeiramente – um trapaceiro, ordinário e preguiçoso –, o aluno fraudador, muitas vezes, é visto por seus colegas como uma espécie de “Robin Hood” que rouba só dos ricos em benefício dos pobres, ou ainda como um inventor genial, cujas descobertas sempre renovadas, desafiam a sagacidades dos adultos (BARLOW, 2006, p. 114, aspas do autor).

O ritual de controle em dias de prova escrita tem como objetivo principal assegurar que nenhum aluno cole. Nesse ambiente de vigilância, conseguir colar significa vencer o “forte” sistema. No imaginário escolar, todo aluno sabe fazer cola, como uma habilidade nata, conseqüentemente, colar é sinônimo de obter vantagens em termos de nota. Parece haver um mito de que a cola é sempre eficiente e que beneficiará a nota do aluno.

Há ainda o mito de que a cola é e deve ser proibida e combatida por ser prejudicial à aprendizagem e à formação moral do aluno, o que gera ritos de prevenção e repreensão por parte do professor. Quando o aluno é pego colando, o professor defende frente aos demais a regra quebrada, manifestando ritos de penalização, como anular a prova, punir com nota zero (maior penalidade normalmente aplicada), desconsiderar a parte da prova na qual se percebeu que houve cola.

1.3 UM PANORAMA

A cola é universal! É o que afirma Abrantes (2008) apoiado em relatos de cola em todos os países do mundo. Segundo ele, é estimado que cerca de 90% dos brasileiros já tenham colado ou usado artifícios não autorizados em provas ou trabalhos pelo menos uma vez na vida. O autor realizou uma pesquisa com 726 alunos dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior, entre 2007 e 2008, para analisar como os alunos veem o fenômeno da cola. Os alunos pertenciam às redes públicas e privadas de três instituições do município do Rio de Janeiro. Em resumo, 88% dos estudantes admitiram já ter colado alguma vez, 53% admitiram que ainda faziam uso e cerca de 25% afirmaram já terem sido flagrados colando. Já alunos com idade entre 10 e 12 anos, referente ao 6º ano, 60 % declararam que nunca colaram.

Pimenta (2010), com o objetivo de descrever e analisar como a prática da cola, nos estabelecimentos de ensino superior, é percebida pelos estudantes e professores, realizou uma pesquisa com estudantes e professores dos cursos de Direito, Pedagogia, Engenharia e Administração, de uma universidade de Campinas, São Paulo. Dos 250 estudantes participantes da pesquisa, quase 67% admitiram que colam, 27 % que não colam e 6% se abstiveram. O questionário foi respondido por 54 professores e 95% deles indicaram perceber a prática da cola entre os estudantes. A turma numerosa caracteriza a situação em que os professores mais observam esta prática (63%); as provas consideradas difíceis e as de múltipla escolha surgiram em seguida (42%). Quanto à motivação para a prática da cola, 78% dos professores apontaram a falta de preparação como a razão principal, e todos julgaram-na como ruim ou censurável. De maneira semelhante, para os estudantes, a situação mais comum para utilizar a cola é a prova considerada difícil (45%), seguida das provas das disciplinas sem média para aprovação (10%). Apesar de a maioria dos alunos dessa universidade admitir colar em provas, 81% deles considera a prática negativa. Com isso, a autora infere que quem usa a cola o faz pensando que não é bom fazer, ou seja, possui uma percepção de que está se

prejudicando, mas ainda assim faz, porque 67 % dos estudantes entendem que o uso da cola implica em falta ao aprendizado.

Entre 2010 e 2011, Pimenta e Pimenta (2011) realizaram um estudo com 130 alunos de cinco turmas do primeiro ao terceiro semestre do curso de Direito de uma universidade privada da cidade de Uberaba, Minas Gerais, e com 80 estudantes de duas turmas iniciantes de uma faculdade privada de Direito, da cidade de Cajazeiras, Paraíba. As autoras aplicaram um questionário para identificar a prática, as situações e por que era praticada. Em relação ao uso, em Cajazeiras, a maioria dos alunos pesquisados informou que utiliza (60%), enquanto em Uberaba quase a metade (48%) afirmou fazer. Já os que alegaram não utilizá-la foram apenas 8%, em Cajazeiras, e 15%, em Uberaba. Com base nesses dados, as autoras concluem que cerca de dois estudantes em cada três colam no sertão paraibano e, aproximadamente, um em cada dois cola no interior de Minas Gerais. Quanto às consequências para os coladores, a maioria dos alunos identificou a não aprendizagem (68%, em Cajazeiras, e 70%, em Uberaba). A maior parte deles vê a cola como algo ruim (Cajazeiras, 58%, e Uberaba, 54%), e apenas 3% em Cajazeiras e 8% em Uberaba expressaram-na como boa.

Na pesquisa de Pimenta e Pimenta (2011), a maioria dos estudantes pesquisados afirmou utilizar cola, e esse quadro não é exclusividade brasileira.

Teixeira (2011), da Universidade do Porto – Portugal, realizou um estudo com estudantes de vários cursos e graus de ensino (graduação, pós-graduação, mestrado e doutorado) a fim de caracterizar a situação portuguesa no que se refere aos diversos comportamentos e condutas por parte de estudantes do Ensino Superior. Responderam ao questionário 5403 estudantes. Quanto a copiar respostas de um colega durante um exame, 55,2% indicaram fazê-lo e 46,2% alegaram utilizar anotações escritas para copiar durante uma prova. Do total pesquisado, 69,3% afirmaram já ter copiado em exames, ao passo que somente 3,4% dos que já copiaram foram apanhados. Além disso, mais da metade (54,5%) entende que frequentemente a cópia é previamente pensada, preparada, e 80,2% conhecem alguém que habitualmente copia nos exames.

Domingues (2006) realizou uma pesquisa tendo como universo todos os alunos de uma universidade de Portugal, totalizando 1177 questionários respondidos. Grande parte dos alunos (46%) diz ter copiado de colas preparadas por eles mesmos e a maior parte (71%) revela já ter colado de colegas a quem pedem ajuda. Domingues analisa que a cola é utilizada por “maus e bons alunos”, embora os “maus” a ela recorram mais; há alunos que copiam em todas as disciplinas; há alunos que só copiam quando necessitam; outros colam para

melhorarem as suas possibilidades de sucesso; a grande maioria dos universitários (95%) já colava no ensino secundário, enquanto apenas pequena parte (5%) revela ter iniciado na universidade.

O que pode ser feito, proposto ou viabilizado para lidar com esse recurso?

1.4 POSSIBILIDADES

Alguns autores lançam ideias e alternativas, algumas das quais serão explicitadas.

Para atender ao perfil profissional que a atual sociedade requer, em que, no mundo do trabalho, não se produz mais nada sozinho e consultar todos os meios disponíveis é indispensável (KRAUSE, 1997), não cabe repressão à cola, *a priori*. Assim,

Se estivermos preocupados com a ação do aluno colar é preciso considerar que o ambiente da prova é artificial; primeiramente não existe mais trabalho individual, solitário. O empreendedorismo está vigente e toda profissão tem equipe multifuncional para desenvolver trabalhos. Sendo assim, quando me vejo no meu espaço de trabalho onde irei atuar penso que terei uma equipe para compartilhar as minhas dúvidas e, também caso seja necessário, uma literatura a disposição. O que será exigido do meu lado profissional é minha competência para desfrutar destes recursos associada a minha capacidade de análise [...]. Enquanto que na prova será cobrado do aluno, por no mínimo duas horas, que registre (memória em jogo) respostas complexas e específicas de matérias e exercícios extensos oferecidos nas aulas. Neste momento, o aluno tem que ficar incomunicável sentado numa cadeira sob a vigilância de alguém pronto para suspeitar de seus movimentos. Tudo é angustiante, no momento da prova, e mais, até colar é conflitante. Por isso, algo tem que mudar (MARQUESIN; BENEVIDES, 2011, p. 12).

Levando em consideração aspectos éticos, didáticos e psicossociais envoltos na cola, Rangel (2001) sugere maior abertura ao novo, como, por exemplo, relativizar os padrões de certo ou errado e as punições ou repressões decorrentes, para que a cola deixe de ser uma atitude marginal desviante da conduta modelo e disciplinar. De maneira similar, Domingues (2006, p. 185) sugere “alterar a natureza dos instrumentos de avaliação através da adoção de testes de consulta, eliminando não o comportamento de desviante, mas a regra que o interdita e, ao mesmo tempo, a própria categoria de copianço”.

Krause (1997) propõe “rebatizar” a cola, que passaria a trazer o nome de consulta, e, em seguida, descriminalizá-la, tornando-a necessária. Em todas as avaliações, todas as provas, todos os exames, a consulta, antiga cola, seria permitida, ou melhor, reconhecida como necessária. Em contrapartida, em todos os exames, de todas as disciplinas, toda resposta do aluno seria justificada, principalmente com uma explicação discursiva, redigida, extensiva dos passos do seu raciocínio. O aluno também poderia consultar o trabalho do colega, mas

preservando certo ambiente, certo clima de silêncio. Essa consulta simula a situação de trabalho coletivo. Para o autor, transformar a cola (in)conveniente em consulta necessária relativiza toda avaliação e todo exame, dentro do contexto dos processos de construção do saber. Para ele, os exames e provas com consulta tendem a ser até mais difíceis, mas a aceitação por parte dos alunos não seria problema.

Tendo em vista que historicamente a cola representa uma consulta proibida, algumas questões podem ser levantadas e discutidas. Quando autorizada pelo professor, a cola ainda pode ser chamada de cola? Quando permitida, ela não perde sua natureza desviante e deixa de ser efetivamente cola? Torna-se consulta? A cola escrita pode ser considerada um tipo de material de consulta com algumas características particulares: é a única fonte de consulta permitida no momento da realização da prova; deve ser elaborada pelo próprio estudante; pode demandar estudo prévio, escolhas e produção pessoal.

Rangel (2001, p. 86) questiona: “como decidir pela permissão da ‘cola’ nas provas escolares, se nas provas competitivas, que o aluno vai enfrentar em outras circunstâncias e contextos, não há essa permissão?” Para ela, é interessante encaminhar o debate da cola para possibilidades de reconceituações, por alternativas de aproveitamento e redirecionamento no processo de aprender e ensinar, mas sem deixar de levar em conta os limites dentro e fora da escola.

É viável que as instituições de ensino sigam apenas os moldes de provas competitivas? Sabe-se que essas provas avaliam o rendimento, já o intuito da permissão é contribuir com a aprendizagem dos estudantes e com suas formações, desvelar possibilidades e/ou potencialidades da estratégia, avaliar a aprendizagem. De acordo com Hadji (2001), a avaliação deve estar o máximo possível a serviço da aprendizagem com o objetivo legítimo de contribuir para o êxito do ensino e de favorecer o desenvolvimento daquele que aprende.

2. UM AMBIENTE DE ENSINO E APRENDIZAGEM

A RME⁵ é uma abordagem para o ensino de matemática desenvolvida a partir das ideias de Hans Freudenthal, em meados dos anos 1960, na Holanda, em oposição ao Movimento da Matemática Moderna (MMM). A perspectiva diz respeito tanto às ações do professor, que abarca um conjunto de atitudes relacionadas à matemática, às escolhas das tarefas, à maneira de conduzir a aula, à comunicação, quanto às dos alunos que desempenham um papel ativo em construir seu próprio conhecimento matemático, a serem autores de seus conhecimentos. Essa abordagem de ensino foi a que norteou o trabalho da professora/pesquisadora na elaboração deste estudo.

Uma aula pautada nos princípios da RME não se inicia com exposição de conteúdos, mas com tarefas e situações nas quais o aluno possa chegar em um determinado tipo de matemática e depois ter condições de aplicá-la em outras situações. Não deve haver o que Freudenthal chama de inversão antididática, em que o professor apresenta um conteúdo e depois o aplica, visto que historicamente surgiram os problemas e, posteriormente, a formalização matemática. Essa condução está presente nas atitudes do professor, na maneira como ele organiza a aula e faz questionamentos aos estudantes.

À luz da RME, o erro, visto de forma construtiva e não punitiva, é tomado como um caminho, não determinante, que o estudante começou a traçar e que pode levar a uma aprendizagem. Ele conduz à experiência do indivíduo e pode constituir um indício que encaminha aspectos relevantes para o processo de investigação da aprendizagem como um suporte que permite repensar o processo de ensino,

como momento do processo de construção de conhecimentos que dá pistas sobre o modo como cada um está organizando seu pensamento, a forma como está articulando seus diversos saberes, as diversas lógicas que atravessam a dinâmica ensino/aprendizagem, as muitas possibilidades de interpretação dos fatos, a existência de vários percursos, desvios e atalhos, as peculiaridades de cada um (ESTEBAN, 2003, p.21).

Uma produção escrita pode mostrar conhecimentos e desconhecimentos, e o erro pode revelar o que o estudante sabe, o que ainda não sabe e o que pode vir a saber (ESTEBAN, 2003).

Em síntese, o erro é visto como um recurso para o processo de aprendizagem. Então, para se ter uma prática pautada na abordagem da Educação Matemática Realística, o professor

⁵ RME – *Realistic Mathematics Education*.

adota uma atitude de constante questionamento que pode ajudar o estudante a tornar-se autor do seu conhecimento matemático seguindo um caminho guiado por uma reconstrução racional do processo histórico de elaboração do conhecimento matemático (STREEFLAND, 1991). A atitude docente não é de validar ou invalidar as produções, mas de provocar e instigar o estudo e a realização de descobertas (SILVA, 2015). O professor assume a função de orientador, guiando e direcionando o estudante. O valor da produção está no que foi feito e que servirá como ponto de partida para o professor encontrar uma maneira de caminhar com o estudante. O verbo valorizar é determinante, já que todas as produções escritas dos estudantes podem ser usadas para seus desenvolvimentos.

Um aspecto fundamental da abordagem de ensino pautada na RME é que o professor deve manter um equilíbrio entre fornecer orientação e promover a independência dos alunos. As intervenções deverão ser flexíveis para fomentar reflexões nos alunos sobre suas próprias compreensões da tarefa e em como eles tomam os procedimentos matemáticos para resolvê-la (WIJAYA, HEUVEL-PANHUIZEN, DOORMAN, 2015). Assim, o foco principal não é no resultado, mas no próprio procedimento de solução (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). Os estudantes têm papel ativo, sendo protagonistas na aprendizagem do uso de ferramentas, procedimentos e conceitos matemáticos, participando ativamente das discussões em sala de aula, orientados pelo professor. O ambiente de sala de aula visa oportunizar que o estudante se coloque em uma posição em que seu compromisso com a aula de matemática transpasse o desenvolvimento fragmentado, mecânico e reproduzido de competências, para que possa tornar-se o condutor do próprio processo de aprendizagem, por meio de tarefas que suscitem e abranjam competências cognitivas correspondentes (MENDES, 2014).

A matemática é pensada como uma atividade humana. Assim, “a ênfase não é em algoritmos de aprendizagem, mas no processo de algoritmo, não em álgebra, mas na atividade de algebrizar, não em abstrações, mas em ação de abstração, não em forma e estrutura, mas em formalização e estruturação” (BRESSAN, 2017, p. 02).

As tarefas matemáticas funcionam como um disparador a um novo aprendizado, inclusive do ponto de vista formal. O trabalho dos estudantes pode começar de modo mais informal, e o professor tem o papel de conduzir à formalização. Nesse contexto, elas precisam fazer sentido para os alunos, serem realizáveis. Isso não significa manter a matemática somente conectada a contextos do cotidiano, mas também a contextos realizáveis ou imagináveis pelos estudantes. Os contextos também podem ser puramente matemáticos. “É importante ter em conta a natureza relativa do conceito, uma vez que um contexto, seja

realístico ou não, depende da experiência anterior dos alunos e/ou de sua capacidade de imaginá-lo ou visualizá-lo” (BREISSAN, 2017, p. 05). Eles funcionam como pontos de partida da atividade matemática.

Há uma integração entre ensino e avaliação. As atividades de ensino e as instâncias de avaliação andam de mãos dadas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). A avaliação é posta em prol da aprendizagem e todos os aspectos dela revelam essa orientação educacional. “Isso significa que o propósito da avaliação, bem como o conteúdo, os métodos aplicados e os instrumentos usados são todos de natureza didática” (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996, p. 85). O intuito é coletar informações sobre os alunos e os processos de aprendizagem deles para tomar decisões apropriadas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

A avaliação é formativa, integrada na ação de formação, no ato de ensino e centrada na gestão das aprendizagens. Seu principal objetivo é “contribuir para melhorar a aprendizagem em curso, informando o professor sobre as condições em que está a decorrer essa aprendizagem, e instruindo o aprendente sobre o seu próprio percurso, os seus êxitos e as suas dificuldades” (HADJI, 1994, p. 63). Ela oportuniza a aprendizagem com vistas à formação, permite ao estudante saber o que dele é esperado, para que possa se situar em função disso, compreender seus erros e ser capaz de ultrapassá-los (HADJI, 1994).

Hadji analisa que a ideia de avaliação formativa corresponde ao modelo ideal de uma avaliação, mas “o que é formativo é a decisão de pôr a avaliação ao serviço de uma progressão do aluno e de procurar todos os meios suscetíveis de agir nesse sentido” (HADJI, 1994, p. 165). A avaliação tem de constituir realmente um elemento de formação. O aluno precisa aprender alguma coisa ao ser avaliado (BARLOW, 2006). Essa avaliação não está interessada no resultado, na “fotografia”, isto é, em como o aluno está em um momento específico, ela faz uso desses momentos para regular o processo de ensino e aprendizagem. Não está preocupada com a nota, isso é uma consequência, mas com que o aluno aprenda em um processo de análise contínua, agindo nas informações obtidas a fim de constituir elementos de formação.

Para a avaliação formativa, é de suma importância assumir a observação como instrumento de avaliação, haja vista que o professor utiliza-a o tempo todo com os alunos: o que fazem, como fazem, seus questionamentos, suas dúvidas e dificuldades, suas produções, interações etc. O que caracteriza a avaliação formativa é a vontade de colocarmos o nosso trabalho de observação realizado durante a aprendizagem a serviço do aluno. Essa avaliação também é formativa para o professor já que quanto mais a pratica mais ele reflete, observa,

modifica sua prática e sua maneira de pensar. É uma via de mão dupla porque carrega uma ação reflexiva para os dois parceiros do processo de aprendizagem: aluno que aprende e professor que ajuda a aprender.

O propósito do ensino é a aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes em relação ao conhecimento em jogo. E “ensinar é fazer aprender”, ajudar a aprender. O papel do professor é criar condições que favoreçam aos alunos essa construção.

A regulação da aprendizagem se apresenta como fator determinante nesse ambiente de ensino. A regulação é a forte característica da avaliação formativa, porque o professor, sendo informado dos efeitos de seu trabalho pedagógico, poderá regular sua ação a partir disso. O aluno poderá tomar consciência das dificuldades que encontra e ser capaz de reconhecer e corrigir ele próprio seus erros (HADJI, 2001). O professor, assim como o aluno, pode modificar sua ação, se necessário. A avaliação será formativa se ajudar o aluno a aprender e o professor a ensinar.

A avaliação formativa não é engessada, mas tomada como oportunidade de aprendizagem. Ela sempre terá a função de dar oportunidade. Em outras palavras, “oportunizar a aprendizagem é uma função da avaliação formativa, função esta que vem atrelada a sua função de intervir/regular o processo de ensino e aprendizagem” (BURIASCO; FERREIRA; PEDROCHI JUNIOR, 2014, p. 20). A intenção da avaliação como oportunidade de aprendizagem é perceber como o aluno está e obter informações a esse respeito, para que seja possível ao professor auxiliá-lo proporcionando uma ocasião conveniente ao ato de aprender (PEDROCHI JUNIOR, 2012).

Tradicionalmente, as avaliações de rendimento são aplicadas no final do processo de ensino quando o professor já não consegue se utilizar das informações obtidas em favor da aprendizagem. A avaliação como oportunidade de aprendizagem se opõe a essa prática. Conseqüentemente, ela vem no início, no meio e, se preciso, ao final do processo de ensino, se interessando por todos os momentos. Como oportunidade de aprendizagem, é importante “que a avaliação escolar seja vista como prática de investigação, isto é, olhar para o processo de ensino e aprendizagem tentando compreender mais os motivos que originaram as respostas do que se elas estão corretas ou incorretas” (PEDROCHI JUNIOR, 2012, p. 51).

Para tornar a avaliação como oportunidade de aprendizagem, é coerente encará-la como prática de investigação, pois, como tal, são analisadas as formas de lidar dos estudantes, quais estratégias e procedimentos utilizam, de quais recursos fazem uso. [Elas] se fazem complementares para compreender o processo de

aprendizagem de cada indivíduo, respeitando suas individualidades e diferenças (BURIASCO; FERREIRA; PEDROCHI JUNIOR, 2014, p. 21).

A avaliação como prática de investigação é aquela que permite esquadrihar como os alunos estão e investigar a aprendizagem pressupondo uma interrogação constante, em uma ideia similar à de um pesquisador que busca estudar e compreender uma problemática. O professor investiga o que o aluno quis dizer, o que aprendeu e o que não aprendeu buscando formas de lidar com isso e auxiliá-lo. É uma prática de investigação, “é interrogar e interrogar-se” (ESTEBAN, 2003). Assim, a avaliação

É um processo de buscar conhecer ou, pelo menos, obter esclarecimentos, informes sobre o desconhecido por meio de um conjunto de ações previamente projetadas e/ou planejadas que procura seguir os rastros, os vestígios, esquadrihar, seguir a pista do que é observável, conhecido (FERREIRA, 2009, p. 21).

Sua natureza implica exercê-la ao longo de toda ação de formação e tê-la como parte dos processos de ensino e aprendizagem. De acordo com as intenções do professor, a análise da produção escrita pode se constituir em um meio de obter informações relativas a essas práticas avaliativas.

2.1 PROVA-ESCRITA-EM-FASES

Durante correções de provas e trabalhos de alunos, é comum o professor ter dúvidas, principalmente diante de resoluções incompletas, vagas, resumidas etc. Em alguns casos, o professor procura o aluno para esclarecer esse tipo de produção para então corrigir a questão, mas nem sempre isso acontece. Muitas vezes ele analisa, toma uma decisão e julga certo ou errado. Nesses julgamentos são comuns comentários e anotações como círculos, palavras, símbolos, como ponto de interrogação, xis, riscos e traços. Mas, “muito do que os professores escrevem nas produções dos alunos não é claro para esses alunos e não dá origem à ação desejada que é corrigir os erros, completar o que não está completo ou explicitar o que está confuso” (DIAS; SANTOS, 2008, p. 12). Ao final de provas são comuns os comentários e compartilhamento das respostas entre os alunos. Os erros são lamentados, mas não há como voltar no tempo, não há uma segunda chance.

De acordo com Hadji (1994), o instrumento de avaliação formativa mais adequado é aquele que permite dialogar com o aluno enquanto este efetua a sua aprendizagem, em uma perspectiva de avaliação como *feedback*. Assim, “para ser um ato de comunicação útil, a

avaliação deve retomar a ligação com o produtor, e dizer-lhe alguma coisa acerca da sua produção que lhe permita progredir com vista a melhores produções” (HADJI, 1994, p. 108). A prova-escrita-em-fases pode ser um desses instrumentos avaliativos.

Ela consiste em uma prova que, inicialmente, os alunos resolvem na sala de aula sem quaisquer indicações do professor e em um tempo determinado. Nas fases seguintes da realização da prova, podem dispor de mais tempo e dos comentários que o professor formulou ao avaliar as resoluções anteriores. Pires (2013, p. 33) indica que “esse formato de avaliação permite que o aluno volte a refletir sobre o que ele já escreveu [...] é possível que, com os questionamentos feitos pelo professor, o aluno avance em algumas ideias oportunizando aprendizagem”.

Os questionamentos e comentários do professor são específicos para cada aluno. A padronização dá espaço à personalização. Eles não informam acertos e erros, mas têm a intenção de possibilitar o avanço do estudante para além do que produziu, em um processo dinâmico e interativo de aprendizagem. Dessa forma, o aluno tem a oportunidade de

- estabelecer um processo de comunicação por escrito: ao explicar o que fez, pode, ao mesmo tempo, mostrar o que compreendeu das considerações feitas pelo professor;
- refletir sobre sua resposta inicial procurando reconstituir e criticar o seu próprio raciocínio, podendo descrever e explicar o que fez;
- desenvolver a resolução feita inicialmente, encorajado pelo professor (PIRES, 2013, p. 33).

E o professor ao fazer uso desse instrumento, dentre outras possibilidades, pode

- desenvolver um diálogo escrito com o aluno que vai ao encontro do principal propósito da avaliação escolar: promover a aprendizagem;
- elaborar para os seus alunos retornos a respeito de seus trabalhos – o *feedback* [...]
- analisar o desenvolvimento do trabalho do estudante a cada momento para fazer as intervenções oportunas ao longo do processo de aprendizagem; [...]
- repensar e reorientar o encaminhamento das aulas a partir das informações de cada fase;
- proporcionar momentos oportunos para, em sala de aula, discutir as diferentes maneiras de lidar encontradas nas quais o diálogo escrito não foi suficiente; [...]
- guiar cada aluno em seu processo de aprender por meio da análise de sua própria produção escrita, favorecendo o desenvolvimento de diferentes níveis de competência (MENDES, 2014, p. 205).

A quantidade de fases é determinada pela necessidade de comunicação entre professor e aluno e é “definida pela discussão dos elementos disponibilizados pela resolução dos alunos na fase anterior. A proposta de ampliar o número de fases tem por objetivo ampliar também a possibilidade de discutir e investir na produção escrita dos alunos” (PIRES, 2013, p. 34).

A prova-escrita-em-fases, por um lado, possibilita ao professor perceber se seus questionamentos fizeram sentido para o aluno, favorecendo a comunicação entre ambos. O aluno é avaliado por sua produção nas distintas fases, uma vez que, com esse andamento, as questões e a produção acabam se modificando. Isso decorre das intervenções do professor e da retomada do aluno. Por outro lado, também favorece a utilização da cola (porque, de uma fase a outra, o aluno tem a oportunidade de construí-las), a discussão fora da sala de aula e o diálogo do estudante com o professor enquanto é avaliado.

Estando a serviço da aprendizagem, essa avaliação oportuniza “momentos de reflexão tanto para o aluno quanto para o professor; a este para que regule seu processo de ensino e intervenha, àquele para que regule seu próprio processo de aprendizagem” (MENDES, 2014, p. 31).

A regulação representa toda a ação realizada a favor do processo de ensino e de aprendizagem, de mudanças de estado, desenvolvimento, de evoluir do estado em que se está. A regulação remete às ideias de regulagem, de ajuste, regular da ação. Toda aprendizagem tem, pelo menos, uma parte de regulação pelo indivíduo. Ela é conduzida pelo próprio estudante quando tenta se apropriar de um conteúdo e “é o processo mais importante, o objetivo de todas as ações pedagógicas, pois nenhuma ação de intervenção terá alcançado seu objetivo se não houver causado no aluno uma autorregulação de sua aprendizagem” (PEDROCHI JUNIOR, 2018, p.51). O professor poderá orientar, participar do processo de regulação da aprendizagem, mas somente o aluno é capaz de regulá-la.

Já a intervenção vem como parte do processo de regulação. É a ação do professor na produção do estudante. A intervenção é uma ação sobre algo. O *feedback* permite ao aluno recolher características sobre o que ele fez. Na qualidade deste repousa a potencialidade da prova-escrita-em-fases. Além disso, é necessário o envolvimento do aluno, porque sem produção não há como intervir (MENDES, 2014). As “boas” situações/tarefas também são necessárias, mas não suficientes.

Hadji (1994) toma o *feedback* como informações de retorno que servem para operacionalizar a regulação da aprendizagem, ao passo que a regulação é tomada como uma operação de condução de uma ação que se apoia em *feedbacks* para ajustá-la. Só o estudante é capaz de conhecer os seus processos e corrigi-los, ou seja, ele reconhece a ação do professor (intervenção) e decide o caminho a seguir na sua produção escrita. O professor atua como colaborador dessa autorregulação, um orientador da aprendizagem.

O dizer do professor pode estar centrado no aluno, no produto, no processo e/ ou na autorregulação. Isso define seu foco. Ele pode chamar a atenção, incentivar a reflexão e/ou dar pistas, sendo essa sua natureza. Quanto ao tratamento das maneiras de lidar, ele pode assinalar ou não, mas estimular o redirecionamento. Pode ter a forma sintática simbólica, afirmativa e/ou interrogativa. Pode ser curto, médio ou longo (SEMANA; SANTOS, 2010). Todas essas características visam à qualidade e à clareza desse dizer, para assegurar o funcionamento de um processo de comunicação em que alunos e professores tentam se entender mutuamente, para apontar pistas de ação futura, incentivar a reanálise da resposta, dar ao aluno a possibilidade de ele mesmo identificar seu erro e a alterá-lo, identificar o que já está bem feito a fim de dar autoconfiança e permitir que o saber seja conscientemente reconhecido (SANTOS, 2003). Tais caracterizações devem ser observadas pelo professor que toma esse caminho para que possa alcançar seu objetivo, já que, se a intervenção externa não for percebida e assimilada, o processo pode ser comprometido.

No interior do grupo GEPEMA, até o final de 2017, foram desenvolvidas três pesquisas de doutorado utilizando a prova em fases:

- No trabalho de Pires (2013), intitulado “Oportunidade para aprender: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases”, foi utilizada uma prova em fases, com nove professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal do Paraná e analisada como uma forma de realizar uma reinvenção guiada na perspectiva da Educação Matemática Realística. A prova em fases continha 11 questões de matemática. O número de fases de cada questão foi diferente, variando entre três e dezessete, assim como o número de fases da prova, que variou de uma participante para outra. A prova em fases foi tomada como instrumento de avaliação formativa, que viabilizou a análise do trabalho das participantes para fazer intervenções oportunas. A reinvenção guiada consiste em oportunizar aos estudantes reinventar a matemática por meio da orientação do professor. O professor tem o papel de guia das rotas de reinvenção, ou seja, dos caminhos que os estudantes percorrem pra reinventar. Cada estudante tem sua própria produção e esse é o ponto de partida. A reinvenção guiada foi tomada como estratégia de formação continuada, oportunizando que as participantes desempenhassem um papel fundamental como protagonistas da aprendizagem. As questões da prova foram

o ponto de partida para o processo de reinvenção e a pesquisadora participou como guia, mediando o processo.

- A pesquisa de Trevisan (2013), intitulada “Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática”, teve por objetivo apresentar reflexões a partir da utilização da prova em fases como instrumento de avaliação em aulas de Matemática, em uma turma de Educação Profissional de Nível Médio. A prova continha 28 questões a serem resolvidas em seis fases distribuídas ao longo de um semestre. O autor apresenta uma descrição da experiência, tomada inicialmente como um “fracasso”, mas que, aos poucos, foi percebida como fundamental na modificação da própria prática de avaliação que buscava medir o quanto de uma técnica ou algoritmo foi reproduzida pelo estudante. Partindo de considerações de algumas “falhas” na elaboração e implementação, foram analisadas e repensadas, à luz da abordagem Educação Matemática Realística, as questões que compuseram a prova, o conteúdo matemático subjacente e as próprias atitudes do professor pesquisador. No texto, o autor buscou preservar o modo como a pesquisa foi feita, procurando contrapor criticamente o que “foi feito” com o que “poderia ter sido feito”, numa tentativa de repensar a própria prática avaliativa.
- Mendes (2014) realizou a pesquisa intitulada “Utilização da prova em fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo” com uma prova em 10 fases, com 48 alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de um curso de engenharia de uma universidade pública. Nessa pesquisa, foi investigada a utilização da prova em fases como um recurso para a regulação da aprendizagem. A regulação esteve associada a ações realizadas pelo aluno sobre o seu processo de aprendizagem, com a intenção de fazê-lo progredir e/ou redirecioná-lo a partir das intervenções escritas da professora. A Prova em Fases revelou-se um recurso frutífero ao ensino, aprendizagem e à avaliação, permitindo ao professor recolher informações e guiar o aluno em cada momento do processo. A forma de lidar dos estudantes com as intervenções do professor mostrou que é preciso haver “boas” intervenções escritas para que aconteça uma regulação da aprendizagem satisfatória. As intervenções oportunizaram aos alunos apresentar seu domínio matemático, e à professora/pesquisadora, a realização de uma reinvenção guiada, com a qual o

aluno pôde iniciar um processo de matematização a partir de seu próprio caminho. O trabalho gerou indícios de que, por meio da análise da produção escrita em uma prova em fases, sustentada pela Educação Matemática Realística, pode-se criar um ambiente favorável à regulação da aprendizagem, em especial a de Cálculo Diferencial e Integral.

Neste trabalho, a prova-escrita-em-fases será utilizada para oportunizar a aprendizagem na formação inicial de professores de matemática e como estratégia docente para viabilizar e fortalecer a utilização da cola como meio de estudo. A utilização da cola na prova-escrita-em-fases será analisada como estratégia de ensino para as aulas de matemática e como forma de repensar a prática letiva, já as intervenções realizadas serão analisadas e discutidas no processo da prova como fio condutor da regulação da aprendizagem. A ação docente também é pautada na perspectiva da RME.

3. ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS: O CAMINHAR

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, com ênfase na exploração das informações que envolvem o problema, as manifestações dos envolvidos, seguindo um processo de afunilamento, sem a preocupação em comprovar ou refutar hipóteses, mas em conhecer e compreender um processo (LUDKE; ANDRE, 1986).

Garnica (2004, p. 88) elenca cinco particularidades dessa perspectiva metodológica:

(a) transitoriedade de seus resultados; (b) impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

O autor pontua que valer-se dessa vertente implica reconhecer que esses próprios pressupostos podem ser totalmente reconfigurados com o desenvolvimento das pesquisas. Na pesquisa qualitativa, “não há modelos fixos, não há normatização absoluta [...]. É investigação que interage e, interagindo, altera-se” (GARNICA, 2001, p. 42). A partir dessa visão, uma metodologia não é um conjunto de métodos que pode ser tratado de maneira meramente procedimental, há, sim, um cenário em que o pesquisador procura compreender (GARNICA, 2004) e, mais do que testar teorias, interessa-se em buscar novas formas de olhar, analisar e utilizar.

O processo de investigação iniciou-se oficialmente na primeira orientação ocorrida em 27 de fevereiro de 2015. A ideia central era partir da cola como uma conduta discente para uma estratégia docente. Por ser, a autora desta investigação, professora de um curso de Licenciatura em Matemática, desde o início pensou-se em o realizar trabalho com a formação inicial de professores de matemática, isto é, com os alunos da graduação. Por atuar nas disciplinas de práticas de ensino e estágio, inicialmente a autora pensou em disponibilizar um artigo relativo a uma temática de uma disciplina de prática de ensino, para que os estudantes elaborassem uma cola manuscrita em um espaço delimitado, previamente combinado, com as informações que considerassem mais importantes e necessárias para a realização da prova. O texto não seria explicado pela professora, os alunos poderiam apenas esclarecer dúvidas. A intenção era analisar potencialidades no uso da cola em provas escritas em uma perspectiva de

avaliação como prática de investigação e análise da produção escrita como meios que podem oportunizar aprendizagem na formação inicial de professores de matemática.

As disciplinas do doutorado começaram na primeira semana de março de 2015. Começou-se a discutir os projetos de tese nas disciplinas de Seminário de Tese e aí surgiram os questionamentos: o que entendemos por aprendizagem? Como vamos proceder para analisar se houve ou não potencialidade no uso da cola? Qual a justificativa para o nome cola? Por que não consulta? A cola também será avaliada? Então a cola já será uma avaliação, somando-se duas avaliações? O que impede discutir o texto com os alunos antes da prova? Sem explicar o texto, não poderá parecer que estamos analisando a capacidade de compreensão e interpretação de texto do aluno? O texto fala por si só? Tirar dúvidas em um ambiente coletivo (discutir) não se caracteriza como aula? Como decidir pela (ou como nos posicionaremos diante da) permissão da cola nas provas escolares? Etc., etc. e etc. Todos os questionamentos eram levados para discussão nas orientações da pesquisa.

Para ambientação dos alunos e da professora pesquisadora, com inspiração em Forster (2016), foi realizada uma prova piloto com cola no dia 25 de maio de 2015, na disciplina de Prática de Ensino I – Didática da Matemática do terceiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UFMS, *campus* de Aquidauana. Essa era a segunda disciplina que a pesquisadora ministrava nessa turma. Foi disponibilizado um texto com um mês de antecedência da data da prova, ocasião na qual foi explicada aos alunos a proposta da pesquisa. Visando à autonomia deles, a não intervenção no estudo do material e a análise da cola, o texto não foi explicado/“ensinado” pela professora. Eles puderam apenas esclarecer dúvidas ao final de cada aula no mês que antecedeu a prova, o que gerou certo desconforto para alguns estudantes, porque eles estavam acostumados a sempre ter (pelo menos) uma explicação do professor do conteúdo em que são avaliados.

Tendo em vista as intenções desse primeiro contato com a estratégia (ambientação), a professora pesquisadora foi orientada a elaborar e corrigir a prova sem interferências, em moldes comuns a qualquer outra prova da disciplina, com o diferencial da utilização da cola, manuscrita frente e verso em um quarto de folha de papel A4. Essa escolha do tamanho é arbitrária, nesse caso, ele foi assim delimitado para que o aluno fosse levado a fazer escolhas, já que nesse espaço é possível escrever bastante coisa, mas não muito. A prova foi composta por 10 questões, dentre as quais os alunos deveriam escolher seis para responder.

A turma era composta por 13 alunos. Antes de iniciar, foram realizados dois questionamentos escritos a eles. O primeiro foi a respeito dos critérios utilizados para a

construção da cola. Cinco alunos informaram ter registrado as partes principais ou que consideravam mais importantes do texto. Quatro optaram por fazer um resumo dos tópicos ou ideias centrais em suas colas. Entre as demais estratégias, houve a formulação de perguntas e respostas e o registro do entendimento do texto. O segundo questionamento foi quanto às expectativas dos alunos acerca de seus próprios desempenhos na prova. Dez alunos indicaram expectativas positivas, porque, segundo eles, “a cola serviu como uma maneira de estudo”, houve “uma longa jornada de leitura e concentração”, “com as partes principais do texto se faz lembrar todo o conteúdo”. Outros, mesmo se mostrando confiantes, fizeram algumas ressalvas: “é uma metodologia um tanto diferente”, “tive que estudar para resumir o texto, não foi fácil”, “estudar um assunto, sem a explicação do professor, deixa os pensamentos inseguros [...]. Mas nessa situação a cola está me passando segurança”, “nunca fiz uma cola antes, então espero que não me atrapalhe usando a mesma”.

As questões da prova foram de reprodução, ou seja, poderiam ser respondidas com as mesmas palavras do autor do artigo, caso as tivessem registradas na cola. Esse tipo de questão foi escolhido porque, nesse momento, interessava conhecer as escolhas dos alunos quanto ao que colocar na cola. Essa escolha mostrou que a reprodução de trechos do texto se fez presente na maioria das respostas apresentadas pelos alunos na prova escrita.

A codificação foi a mesma utilizada na dissertação de Forster (2016), como já exposto no primeiro capítulo. A fim de valorizar e reforçar a utilização da cola, as questões que tinham indícios de resposta na cola receberam maior pontuação do que as que não tinham, aspecto pré-combinado com os estudantes. Esse critério foi usado apenas para incentivar os alunos a elaborarem as suas colas porque entende-se que esse processo pode demandar estudo e favorecer a aprendizagem, mas o gerenciamento da nota fica sempre a critério do professor.

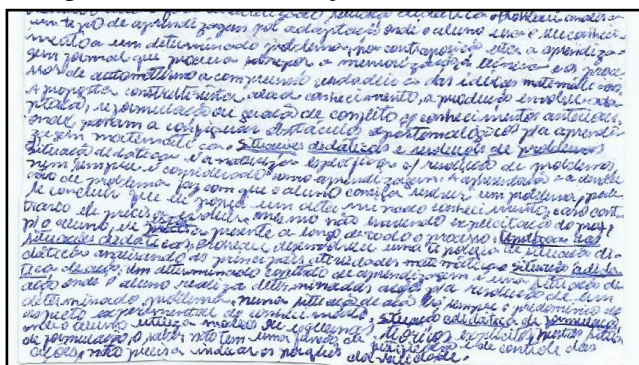
Sabe-se que a nota do avaliador é subjetiva, que não há como medir a aprendizagem e que ela está sujeita a todos os imprevistos da relação humana. Quase a metade da turma (pouco mais de 46%) ficou com a nota abaixo de seis. Esse resultado surpreendeu a pesquisadora por imaginar que, por causa da cola, eles obteriam notas mais altas. Isso evidencia um mito (até então interno) de que todo aluno sabe fazer cola e que, por isso, a cola seria “eficiente” e beneficiaria a nota.

Outra surpresa foi a percepção de várias respostas na cola dos alunos e que não foram utilizadas por eles na prova. Houve um estudante que respondeu a poucas questões, obteve baixo desempenho, mas sua cola continha diversos trechos que respondiam às questões e que, se fossem utilizados, o resultado seria diferentes, isto é a nota seria maior. As notas

divergiram muito pouco do perfil habitual de cada aluno. Alguns tiveram um desempenho levemente melhor, outros levemente pior, mas não houve um aumento considerável como imaginado.

Quando a correção foi iniciada, a pesquisadora cogitou o uso de uma lupa para a leitura das colas. Todavia, apenas uma cola, com letras minúsculas, somadas a uma caligrafia desfavorável, impossibilitou a totalidade da leitura. Nesse caso, foi necessário que a aluna ampliase o texto, transcrevendo para o tamanho comum, o que resultou em três páginas e meia de folha A4.

Figura 3 – Uma ilustração de cola construída



Fonte: a autora.

A análise das colas, em sua maioria com letras ínfimas, retardou a correção da prova. A turma demonstrou que não tem o hábito de estudar com antecedência, porque não houve procura à professora durante o período (30 dias) destinado ao estudo e esclarecimento de dúvidas. Elas foram levantadas somente no dia da prova, nos minutos que a antecederam.

Após a correção, foi realizada uma discussão, em sala, das ideias gerais do texto e aspectos pontuais que não ficaram claros nos estudos individuais. Foram aplicados ainda novos questionamentos escritos aos estudantes com base em seus desempenhos, critérios de elaboração da cola e expectativas expostas no primeiro questionamento. Nesse dia, faltaram quatro alunos.

Com exceção de uma aluna para a qual a cola “não [influenciou na nota], pois as respostas estavam na cola, só não soube me expressar nas respostas”, todos os demais afirmaram que o recurso influenciou no resultado obtido. Mesmo uma aluna, que não obteve boa nota, comentou: “o pouco que tirei foi pela cola”. Os demais afirmaram que a cola ajudou: “não lembraria com tantos detalhes cada resposta”; “trouxe segurança na hora de realizar a prova”; “para fazermos a cola precisamos ler e entender o conteúdo, otimizando o conteúdo em um pedaço de folha”; “nela pude colocar bastante informações”; “a cola serviu como uma forma de relembrar aquilo que já havia estudado [...] não tem como se fazer uma boa cola sem ter lido o conteúdo”; “em outra situação, teria tirado uma nota diferente, talvez até mais baixa”. Apesar de eles considerarem que a cola beneficiou em termos de nota, como

comentado na página anterior, não foi percebido um aumento na quantidade de notas altas, e grande parte obteve nota abaixo de seis.

Questionou-se também se em outra oportunidade eles fariam uma cola diferente ou manteriam a estratégia adotada nessa prova. Apenas dois alunos disseram que não mudariam. Alguns disseram: “colocaria mais informações”, “teria resumido mais”, “permaneceriam algumas coisas, ou seja, as partes do texto e mudaria em questão de colocar conclusões minhas”, “a cola deixou a desejar [...] faltou informações”. Um aluno pontuou: “se tivéssemos acesso às perguntas que seriam colocadas na prova antes dela ser aplicada, talvez exercesse uma cola um pouco mais diferente”.

A partir dessa primeira experiência, em julho de 2015 discutiu-se como seria viabilizada a próxima. A última frase do parágrafo anterior pode ter sido o *start* para a utilização da prova-em-fases. Possivelmente, foi nesse momento que surgiu o propósito da prova-escrita-em-fases como instrumento de avaliação, junto com a cola, com o objetivo de investigar sua utilização como estratégia de ensino para favorecer a aprendizagem na formação inicial de professores de matemática.

Novos questionamentos surgiram nas disciplinas do doutorado: como explorar a cola na prova em fases? Cola igual em todas as fases? Cola diferente em todas as fases? Cola apenas na primeira fase? Duas colas: uma na primeira e outra para as demais fases? Como podemos dizer que “x” e “y” podem favorecer a aprendizagem sem dizer o que estamos entendendo por aprendizagem? Durante as orientações, algumas dessas questões foram (re)direcionadas, outras abandonadas, adotadas, leituras indicadas, tarefas encaminhadas etc.

Outro aspecto a mencionar, concomitante a todo esse processo, é a Educação Matemática Realística. Faltam palavras para descrever a pesquisadora frente a essa abordagem, mas o sentimento pode ser materializado pela cena do monge aprendiz do vídeo⁶ “mudar paradigmas é difícil”.

Nessa ilustração, o monge (Ansgar) encontrou problemas de manuseio após adquirir um novo produto: um livro! Um segundo monge foi chamado para prestar assistência de uso. Ansgar está sentado à mesa, com as mãos no rosto, cotovelo apoiado na mesa, olhando para seu livro sem saber o que fazer, quando chega o “assistente técnico”:

- Você é Ansgar?
- Sim, sou eu.
- Bom. Qual o problema?

⁶ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=znQND531ulM>. Acesso em: 08 set. 2015

- É essa coisa aqui [mostrando o livro].
- Sente-se.
- Obrigada.
- Não consegui fazer nada a manhã toda.
- Peço desculpas pela demora. Todo mundo tem procurado ajuda por causa do novo sistema.
- Então você não conseguiu abri-lo?
- Não. Está aí, em cima da mesa.
- Você tentou abri-lo?
- Abri-lo? Claro que não. Se fosse tão fácil não precisaria do *help desk*⁷.
- Aceita água?
- Não, obrigado.
- Bom, se fizer assim... [abrindo o livro]. Aí, está! Conseguimos entrar.
- Até este ponto eu cheguei sozinho. Mas aí eu parei com medo de perder algum texto.
- Ok. Deve haver centenas de páginas de texto aqui. Para prosseguir, você segura uma página assim... [segura uma folha mostrando] e vira. O texto continua ali.
- Eu “viro a página”?
- Sim. Vira a página.
- Mas e se eu quiser voltar?
- É só virar a página na direção contrária [exemplifica voltando a folha] e você retorna à página anterior.
- Ok, então termina aqui [apontando com o dedo no final da página] e continua aqui! [virando a página].
- Ok. Mas o que eu faço quando terminar?
- Você apenas fecha o livro. Assim [fechando o livro].
- Pronto. Está fechado e todo o texto está guardado para você.
- E você garante que não perderei nenhum texto?
- Não. Tudo está arquivado de forma segura.
- Ah ok. Mas comparado à rolagem [Ansgar pega o pergaminho], leva mais tempo passar as páginas do livro.

⁷ Termo em inglês que significa literalmente "balcão de ajuda" e que se refere a um serviço de atendimento aos clientes que procuram por soluções, esclarecimentos sobre dúvidas e outras solicitações para problemas técnicos relacionados a telefonia, informática, tecnologia da informação ou ainda pré e pós-vendas. Fonte: <http://canaltech.com.br/o-que-e/o-que-e/O-que-e-help-desk/>. Acesso em: 08 set. 2015.

- Tudo bem então. Já vou [levanta-se o técnico].
- Um minuto! Deixe-me ver se aprendi tudo.
- Eu abro assim... e aí... como se fala mesmo? [refazendo o movimento de virar a folha]
- “Virar a página”
- Ah é. Viro a página pra frente e para trás. E quando termino eu fecho [fechando o livro].
- Excelente! Obrigado!
- Não! Espere, espere... Agora não consigo abrir! [tentando abrir o livro pelo lado contrário].
- Você tem que abrir pela frente. Assim [mostrando como se abre]. O seu livro não veio com manual?
- Ah sim, tem o manual [coloca-o na mesa na frente de Ansgar]. Resolvido o problema. [Mas o manual também é um livro, e Ansgar insiste novamente em tentar abri-lo pelo lado contrário].

O vídeo apresenta de forma cômica a troca do uso do pergaminho pelo livro, provocando uma reflexão sobre a atitude humana diante de uma mudança. Dificuldades e obstáculos são criados e colocados com um “mas...”, “e se...”. O novo, nesse caso a Educação Matemática Realística, não se compara com a simplicidade da situação transcrita, a qual foi usada apenas para ilustrar a dificuldade e a resistência inicial ao que parecia ser um “bicho de sete cabeças”. Era quase como ouvir alguém falar em grego, não entendia. Talvez porque toda vez que ouvia alguém explicar, ciente da necessidade de compreensão, uma autopressão interna paralisava esta pesquisadora, o que só piorava “as coisas”. Boa parte dessa dificuldade poderia também estar relacionada à distância física do grupo de pesquisa GEPEMA e, conseqüentemente, de suas discussões ou pelas muitas informações novas a assimilar naquela fase de início de curso de doutorado. Esse desconforto foi embora quando surgiu a oportunidade de dialogar com alguns membros do GEPEMA sobre algumas temáticas: RME, avaliação formativa, avaliação como oportunidade de aprendizagem, estratégia de ensino, provas em fases, etc. Ali as “coisas” começaram a fluir, porque a pesquisadora teve coragem de se mostrar, de ficar à vontade para perguntar, de dizer que estava com dificuldade de entender aqueles conceitos.

Ao todo, foram quatro conversas individuais (pesquisadora e um membro do GEPEMA) e, em cada uma um tema era discutido de maneira aberta e tranquila no sentido de

favorecer que ambos se expusessem. Com o Osmar Pedrochi Junior, conversou-se a respeito de vários aspectos, características e naturezas de avaliação: avaliação de rendimento, avaliação da aprendizagem, formativa, avaliação como oportunidade de aprendizagem e como prática de investigação. Com a Marcele Tavares Mendes, o tema foi a prova em fases: características, implicações, papel do professor e do aluno, desafios envolvidos, os conceitos de regulação, intervenção e *feedback*. Com a Edilaine Regina dos Santos conversou-se especificamente acerca dos conceitos de método, estratégia, procedimentos e meios de ensino. Todos dizem respeito ao trabalho do professor e estão relacionados, mas o que é cada um e quais as diferenças? Nesse encontro, ficou entendido que o instrumento que se pretendia desenvolver era uma estratégia docente, como exposto no item 2.5. Já com o Gabriel dos Santos e Silva o tema foi a RME, e foi perguntado: como você falaria da Educação Matemática Realística para um leigo? Naquele momento, era preciso ouvir dessa forma para depois aprofundar. A RME, que parecia ser o maior entrave e preocupação tornou-se mais clara. Passou-se a entender que essa abordagem tem a ver com um conjunto de atitudes e ações, com a maneira de o professor trabalhar e conduzir suas aulas, com o tratamento didático, com os seus “óculos” do que vem a ser a matemática, isto é, como atividade humana, ativa, em um processo de ensino que visa à compreensão, à ação, ao fazer, à construção, ao invés da mecanização e da transmissão. A dinâmica de suas aulas envolve atividades geradoras, olhando para o que o estudante produziu, buscando meios de avançar a partir disso, evitando a exposição ou transmissão de conteúdos. O erro é tratado como algo usual no processo de aprendizagem, uma maneira de lidar que pode gerar uma solução.

Concomitantemente, leituras eram realizadas (HADJI, BARLOW, VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, ESTEBAN, BURIASCO, MENDES, PIRES, PEDROCHI JUNIOR, VIOLA DOS SANTOS, SANTOS, SILVA, FERREIRA, etc). Essa base teórica em construção permitiu que dúvidas fossem levadas para essas discussões/conversas. Além disso, essa interação permitiu uma melhor compreensão e consolidação dos conceitos e ideias teóricas estudadas, bem como de aspectos práticos, por exemplo, como se dá o trabalho com o instrumento prova em fases: cuidados, desafios, sugestões, limitações etc. ou sobre a atitude docente ao trabalhar na perspectiva da RME, da avaliação formativa e como oportunidade de aprendizagem. Além do entendimento, era preciso aprender a fazer a avaliação da aprendizagem, praticar.

Com esse pontapé inicial e a continuidade de leituras e orientação, a ideia de trabalho com a cola em uma prova-escrita-em-fases, foi se definindo como a estratégia a ser seguida.

No campo docente a estratégia “refere-se ou ao planejamento de operações ou à aplicação (exploração) de recursos (condições) ou ao planejamento e execução de operações” (SANTOS, 2014, p. 44). Em outras palavras, diz respeito às decisões ou ações tomadas pelo professor, as quais, para serem postas em prática, necessitam de procedimentos e meios de ensino. Os meios são recursos que auxiliam na operacionalização dos passos ou procedimentos de ensino, são os materiais que o professor necessita para pôr em prática seus procedimentos e sua estratégia.

A prova-escrita-em-fases e a cola se caracterizam como meios de ensino para o professor pôr em prática sua estratégia docente, isto é, a escolha e a utilização desses meios com o objetivo de investigá-los e oportunizar a aprendizagem na formação inicial de professores de matemática.

A pesquisa de Forster (2016) serviu de inspiração desde o início do processo desta pesquisa. Esse autor investigou a utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem tendo por objetivo apresentar um estudo dessa utilização com estudantes de uma disciplina de um curso de Pós-Graduação. Inicialmente, foi proposto um texto, partir do qual o professor elaborou a prova e os alunos, a cola. Ela foi manuscrita a caneta e os estudantes tiveram até um quarto de folha de papel A4, frente e verso, para inserir as informações que julgaram pertinentes.

De antemão ficou combinado que as respostas seriam codificadas da seguinte forma:

- código 2: resposta correta com algum indício de resposta na cola;
- código 1: resposta correta sem indício de resposta na cola;
- código 0: resposta incorreta;
- código 9: questão com ausência de resposta.

Essa codificação foi utilizada apenas para incentivar os alunos a elaborarem as suas colas porque esse processo pode demandar estudo e, conseqüentemente, favorecer a aprendizagem dos alunos. No entanto, o gerenciamento da nota fica a critério do professor da turma. Por exemplo, se a intenção é que todos os alunos elaborem a cola por entender que é um meio de estudo, então uma resposta correta com indícios na cola, pode valer mais. Se, por outro lado, acredita-se que apenas a apresentação de uma resposta correta é suficiente, ambas podem ter o mesmo valor e receberem a mesma pontuação, explica o autor.

Na segunda parte, os alunos foram agrupados para que juntos elaborassem o gabarito da prova e codificassem as questões. Por fim, validaram suas codificações por meio de troca de provas e colas entre eles e realizaram uma discussão do processo. Concluiu-se que, na

utilização da prova-escrita-com-cola, a oportunidade de aprendizagem é oferecida em pelo menos dois momentos: quando o aluno prepara a sua cola e quando constrói e valida o gabarito da prova.

Entende-se que a utilização do instrumento prova-escrita-em-fases, juntamente com a cola, propicia que o discente inicie a construção de seus procedimentos de resolução de diferentes formas. Além disso, não será direcionado e selecionado pelo professor o que deve ser colado, quais informações são mais ou menos relevantes para serem registradas, mas ficará a cargo de cada um analisar, pesquisar e registrar aquilo que lhe parece mais conveniente, possibilitando a tomada de decisão e a percepção dos enfoques do estudante.

Assim, no dia 07 de março de 2016, com o objetivo de investigar a utilização desses meios como estratégia docente na formação inicial de professores de matemática, a dinâmica da prova foi explicada e foi proposta sua realização aos alunos da disciplina Prática de Ensino II – Modelagem Matemática e Resolução de Problemas do quarto semestre do Curso de Licenciatura em Matemática da UFMS, Campus de Aquidauana. A dinâmica realizada será detalhada no item seguinte, 3.1. Os alunos eram os mesmos que participaram do primeiro piloto da prova escrita com cola.

A primeira fase da prova se deu na semana seguinte, dia 14 de março, e a última no dia 18 de abril de 2016. Na aula seguinte, dia 25 de abril, promoveu-se um espaço de discussão a respeito do processo vivenciado. Não havia como ampliar a quantidade de fases visto que essas aulas eram do segundo semestre letivo de 2015, que estava atrasado devido a uma greve nas universidades públicas.

Durante o desenvolvimento da prova, a pesquisadora elaborava intervenções para cada questão e depois enviava por *e-mail* para a orientadora intervir nelas. A cada fase, as provas escritas e as colas eram escaneadas e também enviadas por *e-mail* para que a orientadora tivesse acesso às produções dos alunos e pudesse auxiliar nas intervenções propostas pela professora. Foi uma etapa bem trabalhosa.

Esse processo gerou um grande volume de produções dos alunos. Ao todo havia 54 questões resolvidas, além das colas. Todas elas foram incluídas na versão para a banca de qualificação. Depois, fez-se uma escolha por conveniência e apresentamos a resolução de um aluno para cada questão.

3.1 A UTILIZAÇÃO DA COLA EM UMA PROVA-ESCRITA-EM-FASES

Para a realização do trabalho, primeiramente, foi necessário que os estudantes consentissem que suas produções escritas fossem utilizadas pela pesquisadora (Apêndice A). A prova foi aplicada na disciplina de Prática II: Modelagem Matemática e Resolução de Problemas (Anexo A), semestral, com carga horária de 68h/a distribuída em 17 encontros semanais de 4h/a cada um. A disciplina contava com 14 alunos matriculados e 9 frequentes. As aulas eram ministradas, das 13h às 17h, nas segundas-feiras, pela autora da pesquisa. O Quadro 01 apresenta um perfil da turma.

Quadro 01 - Perfil dos estudantes

Estudante	Idade	Formação Ensino Médio				Ingresso no Curso
		Escola pública	Escola particular	Tipo	Conclusão	
Lavínia	26 anos	4 anos	---	Regular e EJA	2010	2014
Elsa	37 anos	3 anos	---	Regular	1999	2014
Eliezer	27 anos	4 anos	---	Regular	2007	2014
Dani	19 anos	3 anos	---	Regular	2013	2014
Isis	20 anos	3 anos	---	Regular	2012	2014
Carolina	33 anos	1 ano	---	EJA e ENEM	2011	2014
João	22 anos	4 anos	---	Regular	2013	2014
Letícia	28 anos	---	3 anos	Regular	2004	2014
Jhoni	38 anos	3 anos	---	Regular	1998	2009

Fonte: a autora.

O processo da cola na prova-escrita-em-fases foi iniciado com uma explicação da proposta aos estudantes. Foi frisado que seria necessário que todos se comprometessem com o trabalho a ser desenvolvido em cada fase da prova.

Os alunos deveriam escolher seis das sete questões que compunham a prova, que envolviam conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental e Médio. Na dinâmica inicialmente planejada, as questões seriam introduzidas de duas em duas a cada fase para que os estudantes pudessem focar a construção da cola nas questões que estivessem em pauta naquela fase. Os alunos puderam escolher a ordem das questões, conforme o Quadro 02. Eles poderiam produzir três colas: uma para a primeira e segunda fases, outra para a terceira e a

última para a quarta e quinta fases. A cola deveria ser manuscrita a caneta em um dos lados de um quarto de papel A4. De posse dessas informações, a prova foi distribuída para que cada aluno conhecesse as sete questões e escolhesse as seis que resolveria na ordem desejada. Foram concedidos dez minutos para a leitura e a escolha, que seria registrada em um quadro, conforme segue:

Quadro 02 – Ordenação das questões

Estudante:..... data:.....	
Ordem para resolução	Nº da questão
1ª questão	
2ª questão	
3ª questão	
4ª questão	
5ª questão	
6ª questão	
Questão excluída	

Fonte: a autora.

Os estudantes foram orientados a levar a primeira cola referente às quatro primeiras questões na primeira fase. Além disso, foi explicado que as respostas que apresentassem indícios na cola receberiam maior pontuação e que as colas e as provas seriam recolhidas em todas as fases. Cada questão estaria presente em três fases e, em cada fase, a professora faria comentários e perguntas sobre a produção. Por exemplo, a questão 01:

P1 (Produção1) → intervenção sobre resolução da questão 01 na fase 2 (I₁₂);

P1+ I₁₂ → P2 (produção2);

P2 → intervenção sobre a resolução da questão 01 na fase 3 (I₁₃);

P2 + I₁₃ → P3 (produção3).

...

Foi realizada na lousa uma ilustração dessa dinâmica.

Quadro 03 - Dinâmica proposta para a prova

Fases	Leitura e escolha	1ª fase	2ª fase	3ª fase	4ª fase	5ª fase	Retorno e discussão
Questões		Cola 1	Cola 1	Cola 2	Cola 3	Cola 3	
01		P1	P1+I ₁₁ = P2	P2+I ₁₂ = P3			
02		P1	P1+I ₂₁ = P2	P2+I ₂₂ = P3			
03			P1	P1+I ₃₁ = P2	P2+I ₃₂ = P3		
04		P1	P1+I ₄₁ = P2	P2+I ₄₂ = P3			

05				P1	$P1+I_{51} =$ P2	$P2+I_{52} =$ P3	
06				P1	$P1+I_{61} =$ P2	$P2+I_{62} =$ P3	

Fonte: a autora.

Por fim, foi aberto espaço para dúvidas e perguntas. Os discentes questionaram se poderiam anotar as questões no caderno e foram orientados a realizar apenas a leitura cuidadosa. Ao devolverem as provas e a ordem de resolução escolhida, eles conversaram entre eles para saberem qual questão⁸ cada um havia excluído. Seis dos nove alunos excluíram a questão três, alegando ser extensa, pois é a única que possui três subitens.

Quadro 04 - Questões escolhidas pelos os estudantes

Ordem	Estudantes ⁹								
	Lavínia	Elsa	Eliezer	Dani	Isis	Carolina	João	Letícia	Jhoni
1 ^a	4	7	1	4	7	1	2	7	5
2 ^a	5	2	7	5	4	7	6	1	3
3 ^a	7	1	2	7	1	4	5	4	2
4 ^a	3	6	4	1	2	5	7	6	4
5 ^a	1	5	6	2	5	6	1	5	1
6 ^a	2	4	5	6	6	2	4	3	7
Exclusão	6	3	3	3	3	3	3	2	6

Fonte: a autora.

Foi informado ainda que, em cada fase, seria utilizada uma cor diferente de caneta fornecida pela pesquisadora para a realização da prova, e a professora usaria caneta de cor roxa em todas as fases.

Na primeira fase, todos trouxeram a cola e foram concedidos 50 minutos para a resolução das duas questões. Na segunda fase, foi destinada uma hora, mas decorridos os 60 minutos ainda havia sete alunos em sala, por isso foram acrescentados 30 minutos. Na terceira fase, foram dadas duas horas para a resolução porque seriam resolvidas seis questões e a opção de permanecerem com a primeira cola ou levar a segunda cola. Apenas os alunos Lavínia e Jhoni permaneceram com a cola 01. Na quarta fase, eles deveriam levar a terceira cola, mas apenas João, Letícia e Eliezer o fizeram. Percebeu-se a necessidade de realizar a

⁸ As questões da prova serão apresentadas no capítulo seguinte.

⁹ Nomes fictícios.

sexta fase e, durante o processo repensou-se a decisão de retirar uma questão de maneira truncada em sua terceira fase, deixando cada uma até o momento que fosse julgado necessário. A quinta e sexta fases tiveram duração de uma hora cada uma. Por fim, os estudantes responderam a um questionário escrito (Apêndice B) e discutiram o processo vivenciado. O Quadro 05 resume o processo efetivamente ocorrido na prova.

Quadro 05 - Dinâmica da cola em uma prova escrita-em-fases

Fases	Leitura e escolha	1ª fase	2ª fase	3ª fase	4ª fase	5ª fase	6ª fase	Retorno e discussão
Questões		Cola 1	Cola 1	Cola 2	Cola 3	Cola 3	Cola 3	
01		P1	P1+I ₁₂ = P2	P2+I ₁₃ = P3	P3+I ₁₄ = P4	P4+I ₁₅ = P5	...	
02		P1	P1+I ₂₂ = P2	P2+I ₂₃ = P3	P3+I ₂₄ = P4	P4+I ₂₅ = P5	...	
03			P1	P1+I ₃₃ = P2	P2+I ₃₄ = P3	P3+I ₃₅ = P4	...	
04			P1	P1+I ₄₃ = P2	P2+I ₄₄ = P3	P3+I ₄₅ = P4	...	
05				P1	P1+I ₅₄ = P2	P2+I ₅₅ = P3	...	
06				P1	P1+I ₆₄ = P2	P2+I ₆₅ = P3	...	

Fonte: a autora.

Como, inicialmente, as questões foram sendo resolvidas duas a duas, as fases não ocorreram de maneira igual em cada questão. Por exemplo, enquanto a sexta questão estava em sua terceira fase, a quarta questão poderia estar apenas na primeira, e ambas serem resolvidas paralelamente. Contudo, não necessariamente um estudante ficou com as seis questões na quinta e sexta fases, poderia estar, mas essa necessidade era analisada caso a caso.

Em resumo, os estudantes resolveram seis questões, que foram sendo inseridas duas a duas, em uma ordem escolhida por eles, isto é, a partir da terceira fase, eles já estavam lidando com as seis questões, deveriam produzir três colas, sendo uma para a primeira e a segunda fases da prova, outra para a terceira e uma última cola para as últimas fases. Em cada fase utilizaram uma cor diferente de caneta. As provas e colas eram recolhidas em cada fase e entregues na fase seguinte para a continuidade.

A necessidade de os alunos obterem uma validação dada pela professora fez com que eles ficassem curiosos e ansiosos pela correção, mas, neste trabalho, esse não era o papel da professora, que propôs que as soluções das questões fossem sistematizadas por eles mesmos na lousa. Cada um se dispôs a resolver uma questão. Quando algum aluno resolvia de maneira diferente, essa resolução também era registrada, isto é, cada um apresentava o modo como

resolveu. Depois foi feita uma discussão do processo de utilização da cola na prova-escrita-em-fases com os alunos, a fim de levá-los a refletir sobre a utilização da cola, as fases, as intervenções e a estratégia avaliativa como um todo, conforme segue.

Quadro 6 – Descrição da dinâmica de utilização da cola na prova-escrita-em-fases

	Fases	Alunos	Professor	Resultados
Antes		- Preparação. -Produção da primeira cola.	- Preparação. - Planejamento da prova.	
Durante	1ª fase	- Realiza a prova escrita com tempo restrito utilizando a primeira cola.	- Recolhe as provas e as colas. - Analisa a cola e as produções escritas. - Intervenção escrita.	
	2ª fase	- Regulação. - Continua a execução da prova utilizando a primeira cola.	- Recolhe as provas e as colas. - Analisa a cola e as produções escritas. - Intervenção escrita.	
	3ª fase	- Traz uma segunda cola. - Regulação. - Continua a execução da prova utilizando a segunda cola.	- Recolhe as provas e as colas. - Analisa a cola e as produções escritas. - Intervenção escrita.	
	4ª fase	- Traz a última cola escrita. - Regulação. - Continua a execução da prova utilizando a terceira cola.	- Recolhe as provas e as colas. - Analisa a cola e as produções escritas. - Intervenção escrita.	
	5ª fase	- Regulação. - Continua a execução da prova utilizando a última cola.	- Recolhe as provas e as colas. - Analisa a cola e as produções escritas. - Intervenção escrita.	
	6ª fase	- Regulação. - Continua a execução da prova utilizando última terceira cola.	- Recolhe as provas e as colas. - Analisa a cola e as produções escritas. - Encerra as intervenções.	
Depois		- Resultados. - Compartilha os caminhos de resolução. - Expõe suas percepções.	- Correção - <i>Feedback</i> oral - Promove uma discussão da estratégia avaliativa.	- Sistematização das questões. - Compartilhamento dos caminhos de resolução. -Análise do processo.

Fonte: a autora

Para facilitar a análise das questões, bem como a visualização do percurso dos estudantes em relação às resoluções e à cola, em cada fase foi atribuída uma codificação para as produções escritas, como mostra o Quadro 07.

Quadro 07 – Codificação para as resoluções

Código	Significado	Cor
2	Resolução correta com indícios na cola	Verde
2.1	Resolução correta sem indícios na cola	Verde claro
1	Resolução parcialmente correta com indícios na cola	Azul
1.1	Resolução parcialmente correta sem indícios na cola	Ciano
0	Resolução incorreta com indícios na cola	Vermelho
0.1	Resolução incorreta sem indícios na cola	Laranja
9	Em branco ou incompleto com indícios na cola	Púrpura
9.1	Em branco ou incompleto sem indícios na cola	Acinzentado

Fonte: a autora.

Essa é uma possibilidade de codificação que depende dos objetivos do professor, não uma regra. Nesta pesquisa, essa codificação foi utilizada para incentivar os alunos a elaborarem suas colas porque se entende que esse processo pode demandar estudo e favorecer a aprendizagem. Os alunos foram informados que, por razões burocráticas, ao final, seria atribuída uma nota à prova, sendo que a pontuação das respostas com indícios prevaleceria sobre as demais. Esse estabelecimento fica a critério do professor, “se a intenção dele é que todos os alunos façam a cola, pois acredita-se que esse é um meio de estudo, então uma resposta correta com indicativo na cola deve valer mais. Agora, se acredita que é necessária apenas a apresentação de uma resposta correta” (FORSTER, 2016, p. 43) então, a nota independe dos indicativos da cola.

3.2 OS ENUNCIADOS DAS QUESTÕES DA PROVA

A prova foi composta por sete questões que serão apresentadas a seguir. Uma questão constituiu-se por uma “pergunta, interrogação, proposta ou matéria a examinar que suscita ou provoca alguma discussão ou ação do sujeito. Nem sempre a questão precisa ser uma pergunta” (FERREIRA, 2013, p. 63).

Na perspectiva da RME, as características das tarefas de avaliação podem exercer influência no trabalho dos estudantes, por isso, seus contextos devem possibilitar a

matematização e a apresentação de informações a respeito da aprendizagem dos estudantes, bem como ampliar seus conhecimentos (FERREIRA, 2013). O próprio termo realístico que diz respeito ao que faz parte da realidade e ao que pode ser imaginado, mentalizado, idealizado pelos estudantes (SILVA, 2015) norteia esse processo.

A escolha dessas questões se deu pelo fato de se considerar que elas favorecem a realização de intervenções escritas e discussões; possuem potencialidades quanto à exploração de conceitos matemáticos; possibilitam obter informações a respeito dos conhecimentos, estratégias e procedimentos dos estudantes; são acessíveis e podem ser resolvidas por diferentes estratégias e níveis de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

Antes da aplicação da prova, foram elaborados pela pesquisadora possíveis caminhos de resolução das questões (Apêndice C).

Questão 1 – Uma pizzaria serve duas *pizzas* redondas da mesma espessura, do mesmo recheio e em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais. Qual das *pizzas* tem o preço mais vantajoso? Explique sua resolução e resposta.

Essa questão foi retirada do arquivo¹⁰ de itens liberados da prova do PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Nela será necessário calcular áreas de círculos para depois realizar equivalências entre o cm^2 e a unidade monetária e concluir qual *pizza* tem o preço mais vantajoso para o cliente.

Questão 2 – Sabendo-se que a sequência $(1 - 3x, x - 2, 2x + 1)$ é, nessa ordem, uma progressão aritmética e que a sequência $(4y, 2y - 1, y + 1)$ é, nessa ordem, uma progressão geométrica, determine o valor de x e o de y . Explique sua resolução e resposta.

Essa questão foi adaptada¹¹ da prova do vestibular do ano de 1999 da Universidade Federal de Santa Catarina. Nela será preciso utilizar conceitos de Progressão Aritmética (P.A) e Progressão Geométrica (P.G), como razão ou propriedades das progressões.

¹⁰ http://download.inep.gov.br/download/internacional/pisa/Itens_Liberados_Matematica.pdf

¹¹ http://antiga.coperve.ufsc.br/provas_ant/1999-1A.pdf, parte 3 – Matemática, questão 27.

Questão 3 – Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R\$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo corretas as informações da pesquisa e definindo a receita do restaurante como o valor total pago pelos clientes.

a) Em que caso a receita do restaurante será maior: se o preço subir para R\$ 18,00 / kg ou para R\$ 20,00 / kg? Explique sua resolução e resposta.

b) Formule matematicamente a função $f(x)$, que fornece a receita do restaurante como função da quantia x , em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição. Explique sua resolução e resposta.

c) Qual deve ser o preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível? Explique sua resolução e resposta.

Essa questão foi retirada da segunda fase da prova do vestibular da UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), do ano de 2007¹². No item a, é preciso calcular a receita em cada caso e depois compará-las, já o item b é uma generalização do primeiro e requer conhecimentos de função quadrática, e o último pode ser encontrado a partir das raízes da função determinada no item anterior, ou ainda por tentativas.

Questão 4 – Aldo quer cercar completamente um terreno retangular de 900m^2 . Ao calcular o comprimento da cerca, ele se enganou, fez os cálculos como se o terreno fosse quadrado e comprou 2 metros de cerca a menos que o necessário. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno? Explique sua resolução e resposta.

Essa questão foi aplicada na primeira fase da prova do nível três – Ensino Médio, da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) do ano de 2008. Sua resolução demanda a utilização de conceitos de perímetro e área de quadrado e retângulo bem como de sistema de equações lineares do primeiro grau com duas incógnitas.

¹² Resolução detalhada: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/fovest/20070117-unicamp-resolucao-5.pdf>

Questão 5 – Mostre se a solução apresentada é correta e justifique.

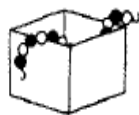
Um homem, que tinha 17 camelos e 3 filhos, morreu. De acordo com o testamento, metade dos camelos ficaria para o filho mais velho, um terço para o segundo e um nono para o terceiro. O que fazer? Eram 17 camelos; como dar metade ao mais velho? Um dos animais deveria ser cortado ao meio? Mas isso também não resolveria porque um terço deveria ser dado ao segundo filho e a nona parte ao terceiro. Os filhos decidiram então consultar um homem bastante idoso e experiente. Contaram-lhe o problema. O velho riu e disse:

— É muito simples, não se preocupem. Empristo um dos meus camelos, vocês ficam com 18 camelos para fazer a divisão.

Metade dos camelos, 9, foi para o filho mais velho; ao segundo, a terça parte - 6 camelos, e, ao terceiro filho foram dados dois camelos - a nona parte. Sobrou um camelo: o que foi emprestado. O velho pegou seu camelo de volta e disse: "Agora podem ir, está cumprido o testamento".

Essa questão é baseada em uma situação similar presente no livro “O Homem que Calculava”, de Malba Tahan¹³, em que a quantidade de camelos a ser dividida entre três irmãos era de 35, e sua solução tem por base um raciocínio matemático semelhante, na qual, além de conceder vantagens aos irmãos, ainda faz sobrar camelo para o sábio. Em resumo, em ambas as situações, o sábio sai do rigor matemático, que mataria um animal, para uma divisão humana. Sua resolução requer conhecimentos de frações.

Questão 6 – A caixinha abaixo possui uma sequência de 20 contas. Quantas contas brancas estão nesta sequência? Explique sua resolução e resposta.



Essa questão, de Van Den Heuvel-Panhuizen (1996, p. 36), é considerada de contexto realístico com diversas possibilidades de exploração de conceitos, como sequência, regularidade e, até mesmo, equação.

¹³ TAHAN, Malba. O Homem que calculava. Rio de Janeiro: Record, 2011. 80 ed. p. 21-23.

Questão 7 – Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia? Explique sua resolução e resposta.

Retirada da prova de questões abertas de matemática do AVA – 2002 (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar da Rede Estadual do Paraná), essa questão pode ser resolvida por meio de P.A, equação do primeiro grau e tentativas.

4. UM OLHAR SOBRE AS PRODUÇÕES

Das sete questões propostas, cada estudante resolveu seis que foram exploradas e analisadas em diferentes momentos das análises. A possibilidade de não resolver uma questão teve como intenção poder não resolver a questão da qual a cola não continha indícios para a resolução.

4.1 DOS ESTUDANTES

4.1.1 QUESTÃO DAS PIZZAS

Para essa questão, apresentamos a produção de Letícia. A primeira resolução da aluna para a questão das pizzas foi a seguinte:

Letícia - Questão 1 – Fase 1

The image shows a student's handwritten solution for a problem involving two pizzas, P₁ and P₂. P₁ has a diameter of 30 cm, and P₂ has a diameter of 40 cm. The student calculates the area of each pizza and then divides the total price by the area to find the price per cm². The calculations are as follows:

Pizza	Diameter (D)	Radius (r)	Area (A)	Price (P)	Price per cm ²
P ₁	30 cm	15 cm	$A_1 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi \text{ cm}^2$	R\$ 706,85	$706,85 \div 225 = 3,12 \text{ cm}^2/\text{R\$}$
P ₂	40 cm	20 cm	$A_2 = \pi \cdot 20^2 = 400\pi \text{ cm}^2$	R\$ 1.256,63	$1.256,63 \div 400 = 3,14 \text{ cm}^2/\text{R\$}$

The student concludes: "Sabendo que as duas pizzas P₁ e P₂ tem a mesma espessura e mesmo recheio, o preço da pizza que é mais vantajoso é a P₁ (30cm) de diâmetro."

Ela calcula a área das duas pizzas e divide esse resultado pelo valor de cada pizza, ou seja, compara área e preço. Esse caminho pode levar à solução correta e mostra que a aluna tem ideia de razão e comparação. Todavia, infere-se que a estudante interpretou os resultados como número menor (23,56 cm²/R\$), mais vantajoso, e número maior (31,41 cm²/R\$), menos vantajoso, porque ela concluiu que a pizza menor é a mais vantajosa. Na realidade, esse resultado indica que com um real compram-se 23,56 cm² da pizza menor e 31,41 cm² da maior, portanto, a maior é mais vantajosa para o cliente porque se compra mais com o mesmo

custo. Por meio dessa situação, busca-se desenvolver uma oportunidade de aprendizagem. Assim, para que a aluna pudesse analisar a interpretação de sua produção e repensá-la, foram feitas as primeiras intervenções:

Fase 2

1. Quanto custa cada cm^2 de cada *pizza*?¹⁴
2. Com R\$1,00 quanto de cada *pizza* dá para comprar?

Nessa fase, ela interpreta que o centímetro quadrado de cada pizza é o resultado da divisão da área pelo preço: “1. O cm^2 da pizza 01 custa R\$ 23,56 e da pizza 02 custa R\$ 31,41”, o que evidencia sua interpretação do resultado encontrado na primeira fase e o porquê da escolha da pizza menor como mais vantajosa. Poderíamos ter questionado para quem a pizza menor é mais vantajosa, porque pode não ser para o cliente, mas pode ser para a pizzaria. Na segunda pergunta, ela calcula quanto poderia ser comprado com um real em cada caso e conclui: “com R\$1,00 eu consigo comprar a mesma quantidade de pizza da P1 e P2”.

Diante disso, na terceira fase, buscou-se redirecioná-la a outro caminho ou possibilidade de resolução. A professora buscou uma maneira de caminhar com a estudante a partir de sua produção e assumiu a função de orientadora, guiando-a e direcionando-a (SILVA, 2015).

Fase 3

3. Se as *pizzas* fossem divididas em pedaços do mesmo tamanho, a *pizza* de 40cm de diâmetro teria o mesmo número de pedaços? Por quê?

Não teria a mesma quantidade de pedaços, a pizza de 40 cm teria alguns pedaços a mais que a de 30 cm pois haveria uma sobra porque a área da *pizza* de 40 cm é maior que a de 30 cm.

Fase 4

4. Se você dividir cada uma das *pizzas* em 8 pedaços, quanto custará cada um? O que você conclui disso?

¹⁴ Para diferenciação e melhor visualização as intervenções realizadas pela pesquisadora estão em fonte Garamond e as produções dos alunos em Arial.

Letícia - Questão 1 – Fase 4

Pizza 30 cm
 $706,85 \text{ cm}^2 \div 8 = 88,35 \text{ cm}^2/\text{pedaço}$

157,07	3,92
88,35	2,94

$88,35 \div 30 = 2,94$

Pizza 40 cm
 $1256,63 \text{ cm}^2 \div 8 = 157,07 \text{ cm}^2/\text{pedaço}$

$157,07 \div 40 = 3,92$

Com 0,98 é possível com 63,72 cm² a mais. Pense-se mais que o dobro da pizza de 40 cm² com apenas 0,98 R\$. O aumento do tamanho do pedaço não é o mesmo aumento no valor da diferença da pizza.

Na resolução dessa fase, é possível perceber que ela divide a área de cada *pizza* pelos oito pedaços, encontrando a área de cada pedaço. Em seguida, divide a área correspondente a cada pedaço pelo valor das respectivas *pizzas*, ao invés do valor pelos pedaços. Novamente, ela indica ter ideia de que é preciso realizar uma comparação, mas tem dificuldade em estabelecer a ordem dos elementos da razão. Sendo assim, na quinta fase, interferimos de maneira mais direta:

Fase 5

5. Se uma *pizza* custa 30 reais e está dividida em 8 pedaços, como fazemos para calcular o custo de cada pedaço?
6. Se uma *pizza* custa 40 reais e está dividida em 8 pedaços, como fazemos para calcular o custo de cada pedaço?
7. Por fim, qual das duas *pizzas* é mais vantajosa? Por quê?

Letícia - Questão 1 – Fase 5

Resposta:

⑤
$$\begin{array}{r} 30 \text{ L}8 \\ -24 \quad 3,75 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ 0 \end{array}$$
 Cada pedaço custa R\$ 3,75 da pizza de R\$ 30,00.

⑥
$$\begin{array}{r} 40 \text{ L}8 \\ 0 \quad 5 \end{array}$$
 Cada pedaço da pizza de 40 reais custa R\$ 5,00.

⑦ A pizza de 30,00 reais é mais vantajosa porque come-se a mesma quantidade de pizza (8 pedaços) por um ~~valor~~ ^{custo} menor.

Ela encontra o custo de cada pedaço, comparando os preços de cada *pizza*. Por fim, na sexta fase, foram lançados questionamentos que pudessem levar a estudante a perceber que, para comparar os pedaços, é preciso levar em conta também o tamanho de cada um.

Fase 6

8. Você encontrou o custo de cada pedaço das duas *pizzas*, caso elas sejam divididas em 8 pedaços, mas não levou em consideração o tamanho deles. Em sua primeira resolução você calculou a área de cada *pizza*. Dividindo a área de cada *pizza* pelos 8 pedaços, qual a área de cada pedaço?

9. Agora, conhecendo a área/tamanho e o preço de cada pedaço, reanalise qual das duas *pizzas* é mais vantajosa e finalize a questão.

Se as *pizzas* fossem divididas em oito partes, cada pedaço da *pizza* menor teria $88,35\text{cm}^2$ e custaria R\$ 3,75, já na *pizza* maior teriam $157,07\text{ cm}^2$ de área e custariam R\$ 5,00.

Letícia - Questão 1 – Fase 6

Handwritten work for a math problem involving pizzas. The work includes two circular diagrams representing pizzas, algebraic equations, and a final conclusion.

Left diagram: A circle divided into 8 sectors. Values written around it: 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08.

Right diagram: A circle divided into 8 sectors. Values written around it: 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08, 157,08.

Equations and calculations:

$$706,85 \div 30 = 23,56$$

$$706,85 - 30,00$$

$$88,35 - x$$

$$706,85x = 2650,50$$

$$x = \frac{2650,50}{706,85}$$

$$x = 3,75$$

Def. $68,73$ na área da pizza
 $1,25$ é o custo da pizza

Pedaco $40,00$ R\$ - Pedaco pizza $30,00$ R\$ } custo pedaco pizza maior - custo pedaco pizza menor
 $157,08 - 88,35 = 68,73 \text{ cm}^2$ } $5,00 - 3,75 = 1,25$

Portanto a pizza mais vantajosa é a de R\$ $40,00$. Porque a diferença entre a maior e a menor custa apenas $1,25$ R\$.

A aluna persistiu na questão, utilizando as intervenções durante seu percurso, (re)operacionalizando procedimentos que permitiram que ela se situasse em sua produção e avançasse. Por meio da prova-escrita-em-fases ela teve a oportunidade de repensar, retomar e desenvolver a resolução feita inicialmente, incentivada pela professora.

Na cola, a estudante registrou a fórmula da área do círculo, do diâmetro, do raio e que espessura é igual a “grossura”. Mediante o exposto, a questão recebeu código 2, resolução correta com indícios na cola.

Letícia foi uma dos três estudantes que fizeram as três colas. Ela sempre usava calculadora, quis saber como seriam avaliados ao final e queixava-se, mesmo que em tom de brincadeira, da quantidade de fases da prova. Por exemplo, nessa questão das pizzas que gerou várias fases e intervenções, ela dizia: “professora não gostei desse negócio não. Porque cada hora a senhora vai perguntando mais e a gente não sabe o que ainda falta. A gente pesquisa, pesquisa e chega na hora não dá certo”. Ela geralmente se atinha às intervenções, sem levar em consideração o todo já construído ou a questão.

O Quadro 08 representa o andamento das questões durante a prova, segundo os códigos utilizados. Exceto a questão 6, todas as outras apresentaram indício de cola.

Quadro 08: Mapa das codificações – aluna Letícia

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6
3 ^a			Fase 1	Fase 2	Fase 3	
3B			Fase 1	Fase 2	Fase 3	
3C			Fase 1	Fase 2		
4		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	
5			Fase 1	Fase 2	Fase 3	
6		Fase 1	Fase 2	Fase 3		
7	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		

Fonte: a autora.

É possível perceber que, ao longo da realização da prova com cola em fases, a estudante avançou em termos de resolução das questões, visto que a questão 01 passou de parcialmente correta para correta com indícios na cola, assim como o item 3C; a questão 4 passou de incorreta para correta com indicativos na cola e a questão 6, de parcialmente correta para correta sem sinais de cola. Como ela mesma disse, as colas e as fases serviram como meio de pesquisa, proporcionando oportunidade de estudo e aprendizagem, e ampliando sua formação. Como defende Barlow (2006), a avaliação deve servir de ferramenta para que o próprio aluno construa seu saber.

4.1.2 QUESTÃO DA P.A E P.G

Na questão 2 são dadas a P.A $(1 - 3x, x - 2, 2x + 1)$ e P.G $(4y, 2y - 1, y + 1)$ e pede-se o valor de x e y . Isis utiliza a fórmula do n -ésimo termo da P.A para determinar o valor de x :

Ísis - Questão 2 – Fase 1

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
 $2x+1 = 1-3x + (3-1) \cdot (4x-3)$
 $2x+1 = 1-3x + 2 \cdot (4x-3)$
 $2x+1 = 1-3x + 8x - 6$
 $2x+3x-8x = -1+1-6$
 $-3x = -6 \quad (-1)$
 $3x = 6$
 $x = \frac{6}{3}$
 $x = 2$

$x = x - 2 - (1-3x)$
 $x = x - 2 - 1 + 3x$
 $x = 4x - 3$

utilizando a fórmula do
 n-ésimo termo de progressão aritmética (P.A)
 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ onde
 $a_n = n$ -ésimo termo que se quer determinar no caso dessa sequência já deu $(2x+1)$, $a_1 = a_0$ 1º termo da sequência, $n =$ nº de termos da sequência (3) , $r =$ razão da sequência que é obtida através da diferença entre o um número com seu antecessor.

$q = \frac{2y-1}{4y}$
 $2y-1 = 4y \cdot q$
 $2y-1 = 4y \cdot \left(\frac{1}{2} - 4y\right)^{(3-1)}$
 $2y-1 = 4y \cdot \left(\frac{1}{2} - 4y\right)^2$

Ísis – Recorte Cola 1

Em sua cola estava registrado o conceito de ambas as progressões, suas razões, termo geral e fórmula da soma dos n primeiros termos da P.A.

P.A: sequência de n.º em que a diferença entre um n.º e seu antecessor é = a uma razão "r". Ela pode ser cres. ou decres. fórmula n-ésimo termo P.A. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
 $a_n = n$ -ésimo termo q se quer determinar, $a_1 = 1^\circ$ da sequência
 $n =$ número de termos da sequência, $r =$ razão da sequência
 fórmula dos n termos de P.A $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

P.G - sequência de n.º em que a divisão entre um n.º e seu antecessor é igual a razão "q". pode ser cres. ou decres.
 n-ésimo termo P.G, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, onde $a_n = n$ -ésimo termo que se quer determinar, $a_1 = 1^\circ$ termo da sequência
 $n = n^\circ$ de termos da sequência, $q =$ razão encontrada pela divisão de um termo com seu antecessor.

Nesse dia, a aluna comentou que colou errado, pois não sabia P.A e P.G e que, portanto, aquela era uma cola necessária. Ela considerou que as informações trazidas na cola não foram suficientes. Para ajudar a aprender, buscou-se criar condições que facilitassem a construção da aprendizagem da aluna, intervindo para auxiliá-la no desenvolvimento de sua produção e instigá-la a buscar informações:

Fase 2

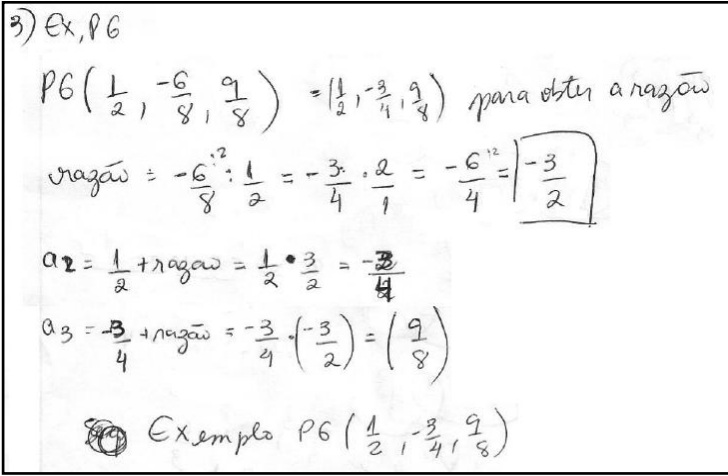
1. A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... é uma P.A. ou uma P.G.? Por quê?

2. Em uma sequência, que procedimento se pode utilizar para determinar se é uma P.A. ou uma P.G.?
3. Dê um exemplo de uma P.G. e justifique por que é uma P.G.

Isis:

1. P.A, pois a sequência é uma soma de um número com seu antecessor.
2. P.A a subtração de um elemento com seu antecessor se ela existir é uma P.A [...] a razão será a soma de um elemento com seu antecessor.

Isis – Questão 2 – Fase 2



3) Ex, PG

$$PG\left(\frac{1}{2}, -\frac{6}{8}, \frac{9}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right) \text{ para obter a razão}$$

$$\text{razão} = -\frac{6}{8} : \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = -\frac{6}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} + \text{razão} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

$$a_3 = -\frac{3}{4} + \text{razão} = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{9}{8}\right)$$

Exemplo PG $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{9}{8}\right)$

A sequência da primeira pergunta dessa fase não se caracteriza nem como P.A nem como P.G. Trata-se da Sequência de Fibonacci em que cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois anteriores, diferente de uma Progressão Aritmética, em que cada termo da sequência é a soma do elemento anterior com uma razão.

Na segunda pergunta, Isis também se confunde com os conceitos de P.A, porque a existência da diferença de um elemento com seu antecessor não garante que uma sequência seja uma P.A (como no próprio caso da Sequência de Fibonacci) pois essa diferença precisa ser uma constante. Além disso, a razão é a diferença de um termo com o seu antecessor e não a soma.

A aluna também voltou a lidar com a questão principal. Agora, ela faz uso da afirmação do enunciado de que as sequências são P.A e PG, utiliza nova estratégia (propriedades trazidas na cola) e determina os valores de x e y :

Isis – Questão 2 – Fase 2

Valor de x

Numa sequência (a, b, c) é P.A. e o somatório de 10 termos médios é igual a média ~~aritmética~~ aritmética entre a e c, como no enunciado afirmo que a sequência $(1-3x, x-2, 2x+1)$ é uma P.A.

então $b = \frac{a+c}{2}$

$$x-2 = \frac{1-3x+2x+1}{2}$$

$$2x-4 = 1-x+1$$

$$2x+x = 2+4$$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3}$$

$$\boxed{x=2}$$

a sequência é $(1-3 \cdot 2, 2-2, 2 \cdot 2+1) = (-5, 0, 5)$

concluindo:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$b = \frac{-5+5}{2}$$

$$b = 0$$

Valor de y

O quadrado do termo central é igual ao produto dos extremos

$(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a_2)^2 = (a_1)(a_3)$

$(4y, 2y-1, y+1) \rightarrow (2y-1)^2 = (4y)(y+1)$

$$4y^2 - 4y + 1 = 4y^2 + 4y$$

$$1 = 4y + 4y$$

$$\boxed{\frac{1}{8} = y}$$

Antes de iniciar a prova, a estudante comentou: “eu não sabia que tinha propriedades de P.A e P.G, hoje eu vou conseguir fazer essa questão”. Nesse terceiro dia, os alunos podiam trazer a segunda cola e, então, foi possível perceber que ela foi à busca de meios que ajudassem na solução da questão, porque estavam registradas na cola propriedades relativas a cada progressão, as quais foram utilizadas para determinar a razão de ambas.

Isis – Recorte Cola 2

Podemos aplicar a média geométrica (numa PG)

"O quadrado do termo central é o produto dos extremos"

$$(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a_2)^2 = (a_1)(a_3)$$

$y = \frac{1}{8} \quad r = -\frac{3}{2}$

A sequência (a, b, c) é P.A. e o somatório de 10 termos médios é igual a média aritmética entre a e c:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

PA $(2, 4, 6, 8, 10)$

Numa P.A. com n° ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os extremos. ex: $a_1 = 2, a_3 = 6, a_5 = 10$

$$a_3 = \frac{a_1 + a_5}{2} = \frac{2+10}{2} = 6$$

Em síntese, a construção da cola serviu ao estudo e à pesquisa de progressões, conteúdo que, segundo a própria aluna, não era de seu domínio.

Na tentativa de guiá-la rumo a outras possibilidades, ainda questionou-se:

Fase 3

4. Você encontrou o valor de x inicialmente pela fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ e depois pela relação “o termo médio é igual a média aritmética entre a e c ” e valor de y pela relação “o quadrado do termo central é igual ao produto dos extremos”.

Há algum outro caminho possível de determinar o valor de y ? Qual(is)?

Não sei.

Nesse caso, o próprio conceito de razão também poderia ser usado para encontrar a solução, como foi, inicialmente, feito com o valor de x . Sua produção foi considerada correta com indícios na cola (código 2). Seria possível também tê-la questionado sobre as respostas das fases anteriores para gerar aprendizagem dos conceitos de P.A e P.G. Contudo, notou-se o papel chave da cola e das fases no desenvolvimento da produção escrita da aluna, permitindo à estudante descobrir propriedades até então desconhecidas por ela.

Durante a realização da prova com cola em fases, a aluna produziu duas colas. Ela foi a única que se atentou à orientação de que as respostas com indícios de cola receberiam maior pontuação, ou seja, ela soube explorar a cola tanto para auxiliar em seu estudo e em suas dificuldades quanto para se beneficiar em termos de nota. O Quadro 09 mostra que apenas uma questão não apresentou indícios de cola (questão 6). Além disso, ela atendia aos questionamentos, mas não se restringia a eles porque não deixava de pensar a questão principal em nenhum caso. O quadro a seguir representa o caminho da aluna durante o desenvolvimento da prova, sob a perspectiva das codificações atribuídas.

Quadro 09: Mapa das codificações - Aluna Isis

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1		Fase 1	Fase 2	Fase 3		
2		Fase 1	Fase 2	Fase 3		
4	Fase 1	Fase 2	Fase 3			
5			Fase 1	Fase 2		
6			Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
7	Fase 1	Fase 2	Fase 3			

Fonte: a autora.

Na maior parte das vezes, a estudante resolvia as questões de uma maneira correta na primeira tentativa (questões 1, 4, 5 e 7), então foi preciso desenvolver intervenções que pudessem levá-la para além do acerto, que lhe permitissem pensar em outros caminhos ou possibilidades, por isso foi necessário problematizar algumas questões (1, 6 e 7) para que ela avançasse em outras direções. A cola e as fases funcionaram com o meio de busca e pesquisa. Ela comentou, inclusive, que leu artigos que tratavam de provas em fases com a intenção de entender mais sobre a funcionalidade e intencionalidade dessa estratégia avaliativa. A avaliação como prática de investigação, complementar à avaliação como oportunidade de aprendizagem, permite analisar as formas de lidar dos estudantes, suas estratégias e procedimentos, bem como de quais recursos eles fazem uso, possibilitando que a avaliação se constitua um elemento de formação para a estudante (BURIASCO; FERREIRA; PEDROCHI JUNIOR, 2014).

4.1.3 QUESTÃO DA RECEITA DO RESTAURANTE

Nesta questão, Jhoni inicia montando um tipo de quadro para analisar a receita do restaurante nos dois casos do primeiro item e responde:

vendendo a R\$ 20,00 o kg em 7 dias e meio terá 1500,00 a mais, no mesmo período se ele vender a R\$ 18,00 o kg ele irá obter apenas R\$ 225,00, uma diferença na receita de R\$ 1275,00 no mesmo período.

Jhoni – Questão 3A – Fase 1

dia	quantidade	valor
18,00 => 1 o quilo	85 Kg	18 x 85 = 1530,00
20,00 => 1 o quilo	75 Kg	20 x 75 = 1500,00

Não foi possível perceber como o aluno chegou a esses valores, uma vez que vendendo a R\$ 20,00, a receita de um dia resulta em R\$ 1500,00, então em sete dias em meio seria de R\$ 11250,00 e, no mesmo período a R\$ 18,00, a receita corresponderia a R\$ 11475,00. Uma diferença de R\$ 225,00 na receita. Era preciso compreender seu procedimento para que houvesse condições de intervir e obter informações necessárias para lidar com sua produção (HADJI, 2001). Para isso, retornou-se a ele:

Fase 2

1. No quadro construído, você encontrou que:

- sendo R\$ 18,00 o quilo, em 1 dia o restaurante vende 85 kg de comida e arrecada R\$ 1530,00.

- sendo R\$ 20,00 o quilo, em 1 dia o restaurante vende 75kg de comida e arrecada R\$ 1500,0.

Em que caso a receita é maior? Explique.

2. O maior preço é melhor negócio? Justifique.

O aluno não respondeu.

Fase 3

1 – A receita será maior no 2º caso onde o quilo custa R\$ 20,00, pois ele terá uma economia maior com a quantidade de alimento menor.

2 – O maior preço é melhor porque ele precisa de uma quantidade menor de comida, menor consumo de gás e menor tempo no preparo.

Nesse momento, inferiu-se que o aluno estava se atendo ao lucro e não à receita conforme o enunciado da questão, já que, mesmo a receita sendo maior (R\$ 1530,00), a R\$ 18,00 o quilo não seria lucrativa, porque são vendidos 10 kg de comida por apenas R\$ 30,00 a mais se comparada à receita de R\$ 20,00 (R\$ 1500,00). Com base naquilo que se compreende da situação de aprendizagem do aluno, as intervenções foram ajustadas,

Fase 4

No contexto da questão, o que você entendeu por receita?

Receita é o lucro final (depende do total de comida que ele compra para vender + o valor de revenda e os custos de produção).

Sua resposta estava coerente com seu entendimento de receita como sinônimo de lucro, mas contrária ao enunciado da questão que definia a receita do restaurante como o valor total pago pelos clientes, isto é, independia das demais variáveis que definem um lucro. Ela traz informações do entendimento e do modo de operar do estudante (ESTEBAN, 2003).

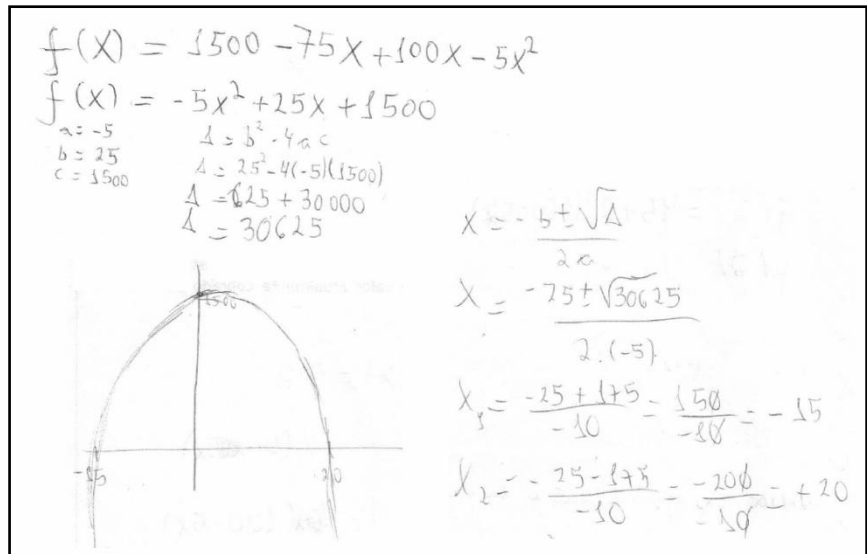
Esse item recebeu código 0.1, resolução incorreta sem indícios na cola, já que em sua cola não havia registros relacionados a essa questão e o caminho tomado por ele não correspondeu ao solicitado no enunciado. Talvez devesse ter sido chamada sua atenção para o texto do enunciado que definia receita. Contudo, do ponto de vista da aprendizagem, não houve prejuízos, pelo contrário, ele seguiu um caminho diferente e sua maneira de lidar resolveria a questão caso o solicitado fosse a análise do preço de venda que fornece o maior lucro.

No item b, Jhoni apresenta corretamente a função $f(x) = (15 + x) \cdot (100 - 5x)$ como a relação matemática que fornece a receita do restaurante em função da quantia x em reais a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição. Na avaliação como oportunidade de aprendizagem, toda produção pode ser usada para o estudante avançar (SILVA, 2015) ou produzir outras coisas. Assim, para ampliar as possibilidades da relação descrita instigou-se:

Fase 2

Resolvendo o produto $(15 + x) \cdot (100 - 5x)$, como ficará a lei de formação dessa função? Esboce o gráfico que a representa.

O aluno desenvolveu a lei de formação da função e representou o gráfico considerando todos os valores reais para o domínio, aparentemente sem refletir sobre o significado dessa escolha no contexto da situação, que abrange apenas um



conjunto discreto de pontos positivos compreendido entre 0 e 20, sendo zero nada a acrescentar sobre o preço de venda e 20 o maior valor possível a ser acrescentado porque com um acréscimo maior que R\$ 20,00, a receita se tornaria negativa. Para que ele prosseguisse na compreensão e interpretação da questão e dos conceitos envolvidos perguntou-se:

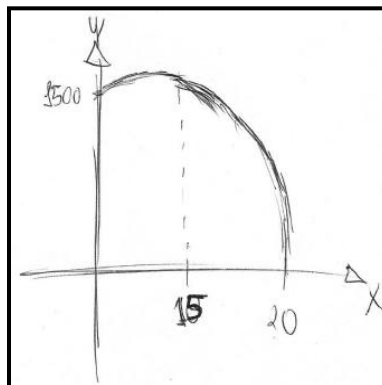
Fase 3

1. Este gráfico pode te auxiliar a analisar qual deve ser o preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?
2. Na construção do gráfico, você levou em consideração os valores negativos de x ? Por quê? O que os valores negativos de x representam?
3. O restaurante poderá acrescentar quantias negativas ao valor atualmente cobrado? O que são quantias negativas?
4. Como ficará o gráfico da função levando em consideração apenas valores positivos de x ?

- 1) Não, porque não mostra a redução ou aumento da quantidade em kg de comida
- 2) Eu levei em consideração os valores negativos para construção do gráfico apenas. Mas para trabalhar na economia do restaurante não serve, pois o dono do restaurante não paga para você comer lá.
- 3) Quantias negativas é o que o dono do restaurante pagaria para os clientes comer e quanto você comeria para receber uma determinada quantia x .

Em atendimento ao quarto questionamento, ele apresenta o gráfico abaixo.

Jhoni - Questão 3B – Fase3



Por suas respostas e a representação gráfica apresentada, é possível notar que ele percebe que os valores negativos não servem ao contexto, por outro lado, como não apresentou uma resposta final à questão, inferiu-se uma possível não percepção a respeito do que os eixos do gráfico representam (o eixo x indica a quantia a ser acrescida no preço inicial do quilo da comida e o eixo y a receita do restaurante para cada quantia acrescentada) e, portanto, a representação gráfica pode auxiliar na identificação de qual o valor a ser acrescido no preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível (coordenadas do vértice da parábola).

Em seguida, interveio-se de modo a guiá-lo a essa compreensão e para que ele pudesse regular sua aprendizagem, função característica da avaliação formativa:

Fase 4

5. Determine as coordenadas x e y do vértice da parábola.
6. O que o $x_{\text{vértice}}$ e o $y_{\text{vértice}}$ representam no contexto da questão?

$x_v =$

O estudante escreveu “ $x_v =$ ” na quarta fase e continuou na fase seguinte, deixando evidências de que foi em busca das fórmulas.

Jhoni - Questão 3B – Fase5

5)

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-25}{2 \cdot (-5)} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-30625}{4 \cdot (-5)} = \frac{30625}{20} = \frac{6125}{4} = 1531,25$$

Handwritten calculations for x_v and y_v are shown, including long division for $\frac{30625}{20}$ and $\frac{6125}{4}$.

Ele determina de forma correta os valores das coordenadas do vértice da parábola e os interpreta>

O x do vértice e o y do vértice representam quanto teria que ser o preço da comida para obter maior 'lucro'. Mas isso não é verdade, pois se a comida custar R\$ 2,50 o restaurante teria que vender 167,5 kg de comida e um lucro bem menor em relação ao gráfico R\$ 418,75 sendo que o gráfico mostra R\$ 1531,25.

Pelos seus registros, Jhoni deixa sinais de que interpretou a coordenada x do vértice como o preço do quilo da comida e não como o valor a ser acrescido ao preço fixo da comida. Para finalizar, foi feita uma intervenção para conduzi-lo a repensar essa interpretação:

Fase 6

7. Calcule $f(2,50)$.

8. O $x_v = 2,50$ representa quanto o quilo da comida deveria custar para obter maior receita ou quanto deve ser o aumento sobre o preço fixo da comida para que se obtenha a maior receita?

9. Esses valores te auxiliam a responder a item c da questão 3? De que maneira?

7) Quando se calcula a $f(2,50)$ encontra-se quanto deveria ser o aumento para se obter o máximo de lucro.

Jhoni - Questão 3B – Fase 6

$$\begin{aligned} 7) f(2,50) &= (15 + 2,50) \cdot (100 - 5 \cdot 2,50) \\ f(2,50) &= 17,5 \cdot (100 - 12,5) \\ f(2,50) &= 17,5 \cdot 87,5 \\ f(2,50) &= 1531,25 \end{aligned}$$

8) O $x_v = 2,50$ representa quanto o quilo da comida deveria aumentar para se obter maior lucro. Se o dono do restaurante aumentar em R\$ 2,50, o quilo passará para R\$ 17,50 e ele terá que vender 87,5 quilos de comida para obter o lucro de R\$ 1531,25.

9) Sim, pois com o auxílio do gráfico dá para ver o aumento que irá proporcionar maior lucro ao restaurante. Nesse caso é o ponto de máximo (x_v, y_v) . Onde o x_v mostra o valor do aumento e o y_v o total do lucro.

Suas respostas mostram que as intervenções oportunizaram reflexão e aprendizagem e, que o erro se constituiu em um meio importante para o processo de investigação da aprendizagem, porque deixou sinais sobre o modo como Jhoni estava entendendo a situação (ESTEBAN, 2003). O estudante ainda volta e assinala um grande “x” em cima da resolução dada à sexta pergunta, como se dissesse: desconsidere isso!

Jhoni analisou que as coordenadas do vértice da parábola serviam para indicar o aumento sobre o preço fixo da comida e a receita correspondente, a qual ele tomou como lucro. O desencadeamento da questão foi para além de erros e acertos e as intervenções proporcionaram reflexões servindo à orientação e à regulação da aprendizagem, à ampliação de estratégias e ao desenvolvimento de conceitos, como a representação gráfica e o estudo do vértice da parábola.

Uma discussão que ainda poderia ser levantada é a descontinuidade da função, porque nessa situação o domínio é formado por um conjunto discreto de pontos positivos compreendidos entre 0 e 20. Levando em consideração o contexto comercial da questão, em que é usual cobrar apenas valores com duas casas decimais, a imagem da função também será formada por um conjunto discreto. Assim, a representação gráfica é dada por uma curva parabólica discreta.

O terceiro item (Qual deve ser o preço da comida para que o restaurante tenha maior receita possível?), acabou por ser desenvolvido juntamente com o segundo. Como não foram

encontrados em sua cola indicativos que poderiam auxiliar na resposta, os itens b e c receberam código 2.1, resolução correta sem indícios na cola.

Jhoni permaneceu com a mesma cola desde o início até a última fase da prova. Essa estratégia o desfavoreceu em termos de nota para a disciplina já que as questões com indícios de cola recebiam maior pontuação. Esses indícios foram encontrados apenas nas duas primeiras questões, corretas com indícios na cola, todas as demais não apresentaram sinais de cola, conforme o quadro a seguir. Por outro lado, as fases da prova favoreceram o estudo extraclasse e o desenvolvimento da questão 3. O Quadro 10 ilustra o percurso do estudante de acordo com as codificações atribuídas.

Quadro 10: Mapa das codificações - Aluno Jhoni

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1			Fase 1	Fase 2		
2		Fase 1	Fase 2	Fase 3		
3A	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		
3B	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6
3C	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6
4		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	
5	Fase 1	Fase 2	Fase 3			
7			Fase 1	Fase 2		

Fonte: a autora.

Sua maneira de lidar com algumas questões (3A e 04) não foi ao encontro do solicitado, mas resolveria questões semelhantes, o que tem igual valor do ponto de vista da aprendizagem. Percebeu-se que a cola, a prova-escrita-em-fases e as intervenções inerentes às fases ofereceram meios para ele avançar, encorajado pela professora, na direção do principal objetivo de uma avaliação com fins formativos: fazer com que o aluno se desenvolva em um processo de análise contínua e de ação nas informações obtidas (BURIASCO; FERREIRA; PEDROCHI JUNIOR, 2014).

4.1.4 QUESTÃO DA CERCA DO TERRENO

Nessa questão, Lavínia toma uma linha de raciocínio em que supõe que a largura do terreno tenha 30 metros e o comprimento $30+x$. A partir disso, ela encontra a medida x que é de 15 metros. Com essa medida o terreno ficaria com 30m e 45m de dimensões e 1350m^2 de área, contrariando o enunciado que informa área de 900m^2 .

Problematizamos sua

produção e tentamos direcioná-la à percepção dessas contradições e a outros aspectos que poderiam ajudar na resolução visando seu desenvolvimento a partir do caminho tomado:

Lavínia – Questão 4 – Fase 1

30 m
30 m + x
900 m²
30 m
comprimento
largura

2 lados iguais
2 diferentes

ao calcular o comprimento como sendo quadrado ele colocou como se todos os lados medissem 30 m

Pois. Área do quadrado é igual.

$$l^2 = 900 \Rightarrow l = \sqrt{900} \Rightarrow l = 30 \text{ metros.}$$

Porém o Perímetro se dá pela soma dos lados

$$30 + x \cdot 2 = 60 \Rightarrow 2x = 60 - 30 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15 \text{ m}$$

Fase 2

1. Você escreveu que $30 + x \cdot 2 = 60$. Como você encontrou esse 60? O quê esse 60 representa?
2. Você disse que “ao calcular o comprimento como sendo quadrado ele colocou como se todos medissem 30 m” e que “o perímetro se dá pela soma dos lados”. Qual o perímetro calculado por Aldo? Qual o perímetro real do terreno? A partir dessas informações, e levando em consideração a área do terreno, é possível encontrar as medidas do comprimento e da largura do terreno? Justifique.

Ora perímetro é a soma dos lados. Logo ao colocar como sendo quadrado Aldo coloca como se todos os lados valessem 30m, pois o quadrado são 4 lados iguais já o retângulo são 2 a dois iguais. Logo eu tirei como os dois lados menores sendo 30 cada lado e duas vezes trinta é sessenta $\rightarrow 2 \cdot 30 = 60$. Bom a área do retângulo se dá por $b \cdot h = a \rightarrow 900 = b \cdot h \rightarrow$ base? $\rightarrow h=30, 900 = 30 \cdot b \rightarrow \frac{900}{30} = b \rightarrow 30$.

Notamos que a estudante se ateu em explicar sua produção inicial e chega à conclusão que tanto o lado como o comprimento do terreno medem 30 metros.

Fase 3

3. Em sua resposta você considerou o terreno retangular e tomou os dois lados menores como tendo 30m cada um. A partir disso, você utilizou a fórmula da área e encontrou que os outros dois lados também mediam 30m, chegando assim a uma figura quadrada com lado 30. Podemos afirmar que o lado do terreno mede 30m? Isso não nos leva ao mesmo equívoco cometido por Aldo? Analise e comente.

Aldo precisava cercar seu terreno retangular, o terreno era de perímetro 122m pois que Aldo comprou a cerca faltando dois metros de cerca. Como sei disso? Bom ao calcular o comprimento do terreno como sendo quadrado Aldo deduziu que os lados eram todos iguais medindo 30m cada lado e o seu perímetro dava 120m total. Logo quando analisei esses dados cheguei que: lado maior = 31, lado menor 30. A diferença é mínima

Lavínia – Questão 4 – Fase 3

Aldo	Área	Perímetro
Retângulo	$b \cdot H$	$2 \cdot l_m + 2 \cdot l_{maior}$
Quadrado	L^2	$4 \cdot L$

entre o comprimento e a largura, daí o porque do equívoco de Aldo. Para que eu chegasse nessa resposta levei em consideração as seguintes intervenções: qual o perímetro calculado por Aldo? Resp. 120. Qual o perímetro real do terreno? Ora se ele calculou como sendo 120 e comprou a cerca faltando dois metros, então o perímetro real do terreno é 122m. Aí que eu havia feito um quadro. Portanto ficaria assim:

Lavínia – Questão 4 – Fase 3

$122 = 120 + 2x \Rightarrow 122 - 120 = 2x$
 $2 = 2x \Rightarrow \frac{2}{2} = x$
 $x = 1$

↓
 Perímetro Real
 ↓
 Perímetro Calculado Por Aldo

Os registros indicam que a aluna percebe que o perímetro do terreno é de 122m, mas indica que os lados medem 30 e 31 metros, o que resultaria em um terreno de 930m² de área. Com base na abordagem RME, buscou-se intervir de modo a possibilitar a manutenção da autonomia da aluna, utilizando alguns dos resultados apontados por ela com a finalidade de guiá-la à compreensão.

Fase 4

4. Você afirmou que o terreno é retangular e seu perímetro real é de 122m. Além disso, o quadro construído por você mostra:

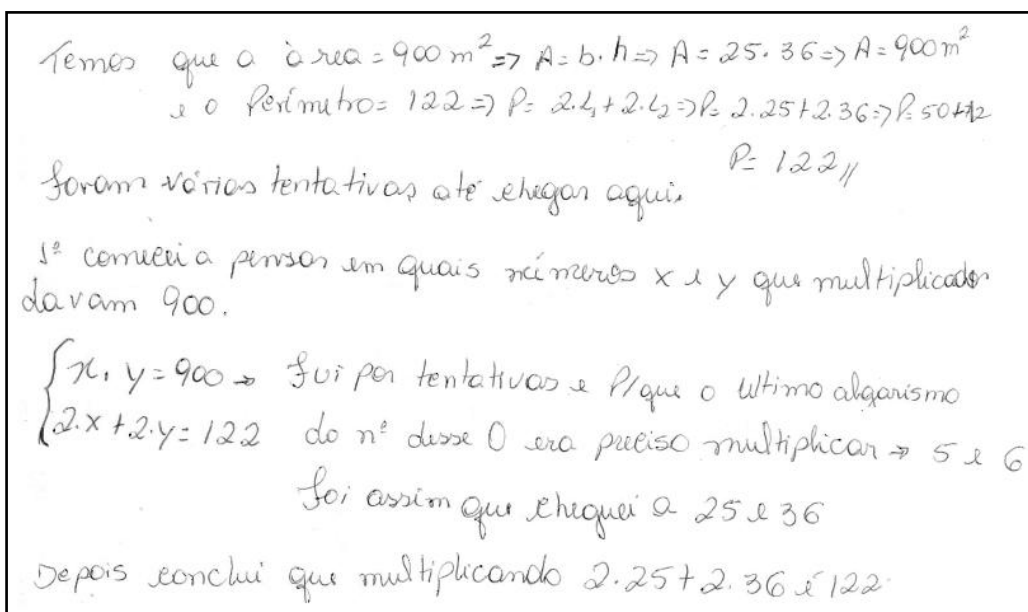
Área do retângulo	$b \cdot h$
Perímetro do retângulo	$2 \cdot L_{\text{menor}} + 2 \cdot L_{\text{maior}}$

Qual a área do terreno informada no enunciado da questão? Analise essas informações e tente resolver a questão novamente.

A área do terreno informada é de $900m^2$.

$A = b \cdot h \rightarrow$ área do terreno é $900m^2$. De fato se calcularmos o valor da base vezes o lado daria $30 \cdot 31 = 930$ a área. Porém para que um retângulo tivesse $900m^2$ de área os lados dele deveriam valer: 36 e 25. Então reformulando:

Lavínia – Questão 4 – Fase 4



Concluo que o terreno de Aldo mede 25 de frente e 36 de fundo!

Ela explica que chegou ao resultado por tentativas. Por meio das intervenções a estudante conseguiu regular sua trajetória ao lidar com a situação e corrigir suas eventuais falhas, solucionando a questão de acordo com as condições do enunciado.

Em sua cola constava que o “perímetro de qualquer figura plana é dada pela soma de seus lados. Área: não se trata só de contorno $\square = l^2$ ”, desse modo, a questão foi codificada como resolução correta com indícios na cola, código 2.

Na segunda fase, ela também citou que o “perímetro é a soma dos lados”. Convém pontuar que “a medida do comprimento do contorno de uma figura geométrica plana é o perímetro dessa figura” (SILVEIRA, 2015, p. 244) ou, em outras palavras, “o perímetro de

um polígono é a soma das medidas dos seus lados” (BIANCHINI, 2015, p. 279), já a área representa a medida da superfície da figura.

O Quadro 11 busca representar o caminho percorrido pela estudante de acordo com as codificações atribuídas.

Quadro 11: Mapa das Codificações – aluna Lavínia

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1			Fase 1	Fase 2	Fase 3	
2			Fase 1	Fase 3	Fase 3	Fase 4
3A		Fase 1	Fase 2			
3B		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	
3C		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5
4	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		
5	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		
7		Fase 1	Fase 2	Fase 3		

Fonte: a autora.

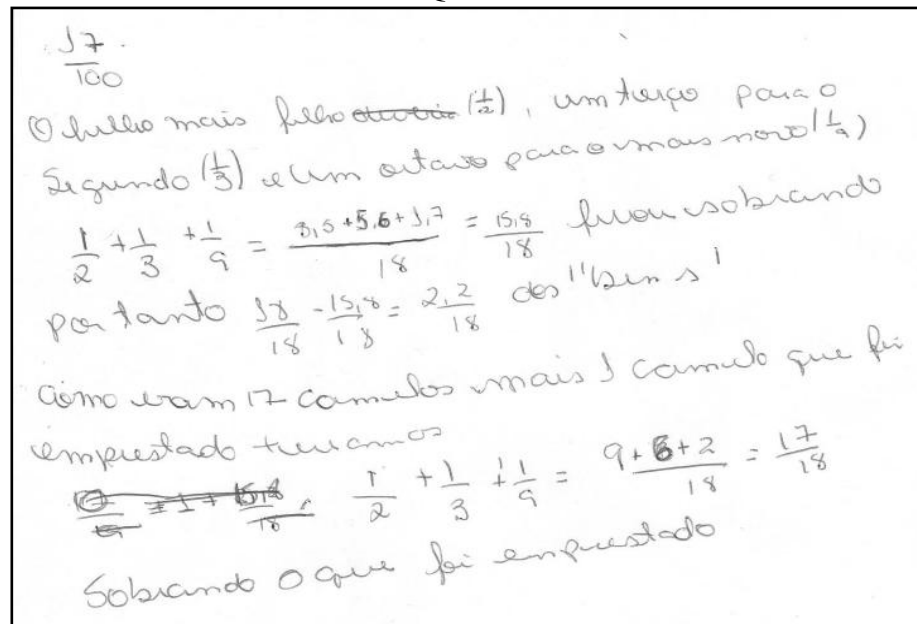
Por meio desse quadro, percebe-se que, no decorrer das fases, metade das questões se mantiveram com a mesma codificação (2, 3A, 5 e 7) e que houve avanço no *status* das questões: 1, passou de incorreta para parcialmente correta com indícios de cola; 3C, de incorreta para correta sem sinais de cola e 4, incorreta para correta com indicativos de cola. Os indícios de cola estiveram presentes em três questões (1, 2 e 4).

Lavínia produziu uma única cola, desvalorizando a informação de que as questões com indícios de cola receberiam maior pontuação para fins de nota da disciplina. Ela se apropriou das intervenções em algumas situações, como na questão 4 aqui exposta, mas, talvez pelas dificuldades que possui em matemática, em outros momentos (questões 1, 2, 3B e 5) sua maneira de lidar não atendeu às condições do enunciado da questão, ou a intervenção externa não foi percebida e utilizada, o que também pode ter comprometido o processo, porque a intervenção pode exercer influência nas ações dos alunos (SANTOS; DIAS, 2006). Contudo, a avaliação foi posta em benefício daqueles que a exercem, com a disposição de meios que lhes oportunizassem avanços (HADJI, 1994).

4.1.5 QUESTÃO DA DIVISÃO DOS CAMELOS

Na primeira produção dessa questão, Dani tentou somar as frações correspondentes a cada irmão. Nesse trajeto, ela escreve “um oitavo para o mais novo” em vez de $\frac{1}{9}$, mas considera $\frac{1}{9}$ nos cálculos,

Dani – Questão 5 – Fase 1



então isso pode não ter interferido em seus cálculos. A estudante soma as três frações expondo sua busca em entender se as três partes compõem o todo da herança. Entretanto, observa-se que, na primeira soma das três frações $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9})$, ao compor frações com decimais, ela iguala essa soma a quanto vale cada fração do todo (8,5; 5,6 e 1,7) e divide por 18 como se estivesse resolvendo o mínimo múltiplo comum: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{8,5+5,6+1,7}{18} = \frac{15,8}{18}$.

Tomando o erro como um caminho e um momento comum em um processo de construção de conhecimento, interveio-se tentando orientá-la em sua percepção:

Fase 2

1. Em um trecho de sua resposta, você escreveu que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{15,8}{18}$ e em outro $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Afinal, em quanto resulta essa soma?
2. A solução apresentada pelo velho está correta ou não? Explique.

Dani explica que “a soma $\frac{17}{18}$ é o resultado com o camelo do sábio” e que “a solução está correta”. Assim, ela conclui que o resultado correto é $\frac{17}{18}$, mas inclui o camelo do sábio como uma das parcelas dessa soma.

Fase 3

aprendizagem, por isso é um grande desafio o professor se comunicar de modo adequado a cada aluno e em cada situação.

A questão recebeu código zero, resolução incorreta com indícios na cola.

Dani foi a única aluna que inseriu as resoluções prontas na cola, como uma cópia. Esse foi o caso das questões 1, 4, 5 e 7. Por isso buscou-se questionar seus acertos, problematizando-os, a fim de levá-la a pensar em outras variáveis e caminhos, ou mesmo para refletir sobre os registros para analisá-los e amadurecê-los. Em outras palavras, tentou-se desenvolver ocasiões de aprendizagem de acordo com suas especificidades. A cola teve forte presença em suas produções. A resolução da questão 6 foi a única em que não havia indícios. O Quadro 12 mostra o percurso da aluna em função dos códigos atribuídos às questões em cada fase.

Quadro 12: Mapa das Codificações – aluna Dani

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1		Fase 1	Fase 2	Fase 3		
2			Fase 1	Fase 2	Fase 3	Falta
4	Fase 1	Fase 2	Fase 3			
5	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		
6			Fase 1	Fase 2	Fase 3	Falta
7		Fase 1	Fase 2	Fase 3		

Fonte: a autora.

4.1.6 QUESTÃO DAS CONTAS NA CAIXINHA

Com relação à quantidade de contas brancas na sequência da caixinha, Eliezer afirmou que havia “10 contas brancas, pois pretas e brancas se intercalam, numa única sequência. Sendo a primeira e a última brancas. Ao somar apenas as brancas uma a uma obtemos 10”. Essa é uma possibilidade, mas não a única. Então, para instigar o estudante a refletir acerca de sua própria compreensão da tarefa e de outros possíveis modos de resolvê-la, perguntou-se:

Fase 2

1. É possível ter certeza de que as contas que não podem ser vistas seguem alternadas em pretas ou brancas?

2. Analise as sequências de contas:

a) ●○●○●○ ○○○○○○○○○○ ●○●○

b) ●○●○●○ ●●●●●●●●●● ●○●○

c) ●○●○●○● ●●●●●○●●●●● ●○●○

d) ●○●○●○ ○○○○●○●○○○ ●○●○

e) ●○●○●○ ●●●●●○●○●●● ●○●○

É possível haver possibilidades como essas na parte não visível da caixinha? Por quê?

1. Não é possível ter certeza [sobre a parte não visível], somente deduções.
2. Sim, pois as contas das extremidades são iguais da figura na caixinha e todas estas alternativas estão corretas, pela possibilidade.

Fase 3

3. Com base em sua resposta à pergunta 2, você conclui que há quantas contas brancas na sequência de 20 contas da caixinha? Justifique.
4. Observe a sequência de contas: ●○●○●○ ●●●●●○●○●●● ●○●○. Quando a gente faz cópias não coloridas de um texto colorido, como fica a parte colorida?
5. Podemos ter certeza que as contas escuras são pretas?

3. Há 5 contas brancas fixas e 10 contas desconhecidas que podem ser brancas ou pretas, na sequência de 20 contas o mínimo de contas brancas é 5 e o máximo 15.
4. A parte colorida [quando a gente faz cópias não coloridas] fica escura.
5. Não sei de onde foi tirada essa figura de repente estas contas no original seriam coloridas, porém tenho certeza que estas que estou vendo são pretas se a intenção fosse destacar o colorido a impressão então não deveria ser preto e branco.

Na resposta à pergunta 3, nota-se que o estudante passa de uma visão única para uma compreensão da quantidade mínima e máxima de contas brancas, inclusive, que as 10 contas ocultas podem ser todas brancas ou todas pretas, por exemplo. Em outras palavras, o diálogo escrito, inerente à prova em fases, deu-lhe a oportunidade de desenvolver sua compreensão da situação. As intervenções foram encaminhadas de maneira a explorar suas respostas e, a partir delas, ampliar seu entendimento e proporcionar a regulação da aprendizagem por parte do estudante. Considera-se que na questão o objetivo foi atingido porque, ao final, o aluno mostra ter ampliado seu campo de visão das possibilidades sequenciais da parte interna da caixa.

Em sua terceira cola, ele anotou que “uma pulseira com metade dentro de uma caixa e a outra metade fora dela, a parte que está escondida não tem como afirmar uma resposta e sim deduzi-la” o que pode ser consequência de trocas com os colegas em ambiente extraclasse ou de pesquisa na Internet, posto que em suas colas anteriores nada constava sobre o assunto. Por fim, foi conferido código 2 à questão, resolução correta com indícios na cola.

Eliezer foi um dentre os três estudantes que construiu as três colas. Sua principal estratégia de resolução foi a de tentativas e erros. O Quadro 13 possibilita uma macrovisão de sua trajetória durante a realização da prova. De acordo com os códigos adotados, houve um desenvolvimento nas produções da questão 4, que passou de em branco ou incompleta com indícios na cola, para correta com indícios e da 6, que, inicialmente, apresentava resolução parcialmente correta sem sinais de cola e, por fim, correta sem os indicativos de cola. Em apenas duas questões (5 e 6) não foram encontrados indícios de cola.

Quadro 13: Mapa das Codificações – aluno Eliezer

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		
2		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	
4		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	
5			Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
6			Fase 1	Fase 2	Fase 3	
7	Fase 1	Fase 2	Fase 3			

Fonte: a autora.

4.1.7 QUESTÃO DO CARTEIRO

Carolina inicia essa questão realizando diversas tentativas de resolução com regra de três simples, mas parece não acreditar no caminho tomado, visto que risca praticamente todos os cálculos.

Carolina – Questão 7 – Fase 1

Mesmo assim, ela apresenta uma resposta: ele entregou 28 telegramas. Um erro provisório e que, se percebido, poderia redirecionar sua estratégia de resolução.

Fase 2

1. Qual é a pergunta do problema?
2. Sua resposta responde o problema? Por quê?

Carolina – Questão 7 – Fase 2

Carolina realiza uma nova tentativa por outro caminho: Progressão Aritmética, usando as fórmulas que trouxe na segunda cola. Em seguida, ela realiza uma

conferência dos valores encontrados e parece perceber que a soma não resulta em 100 telegramas, mas em 112, talvez por isso não tenha apresentado uma conclusão.

Além disso, em vez de escrever $a_n = a_1 + (n - 1).r$, ela escreve apenas $a_n + (n - 1).r$ no cálculo de cada termo comprometendo a determinação do valor de cada um.

Fase 3

3. De acordo com o enunciado, você não terminou a resolução da questão. O que falta?
4. Logo no início da resolução, você usou uma regra de três. Por quê?
5. Responda às perguntas que ainda não respondeu.
6. Quais fórmulas de P.A. você utilizou? Por quê?

A aluna responde à terceira e à quarta perguntas indicando que falta “a conclusão dos cálculos” e que usou a regra de três porque pensou que assim conseguiria chegar à resposta [modo dela operar]. Responde aos dois primeiros questionamentos conforme solicitado em 5, indicando que o problema requer quantos telegramas foram entregues em cada dia e que sua primeira resposta não responde ao problema porque está incorreta e apresenta nova resolução.

Carolina – Questão 7 – Fase 3

Handwritten work by Carolina for Question 7, Phase 3. The work is contained within a rectangular border and includes the following:

- Formulas for the n th term: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ and $a_n = a_1 + (5-1) \cdot 7$.
- Formulas for the sum of n terms: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ and $100 = \frac{a_1 + a_n \cdot 5}{2}$.
- Equation (I): $a_n = a_1 + 28$.
- Equation (II): $40 = a_1 + a_n$.
- Equation (III): A system of equations $\begin{cases} a_1 + a_n = 40 \\ a_1 + a_n + 28 = 28 \end{cases}$ leading to $2a_n = 68$ and $a_n = 34$.
- Calculations for the first four terms: $a_2 = 7$, $a_3 = 14$, $a_4 = 21$.
- Final conclusion: "R: Ele entregou no 1º dia 7 telegramas, no 2º entregou 14, no 3º dia entregou 21, no 4º dia entregou 28 e no 5º dia entregou 34 telegramas."

Agora Carolina utiliza corretamente a fórmula no n ésimo termo da P.A em (I), tomando a razão igual a 7 e $n = 5$, número total de dias de entregas. Já em (II) ela toma corretamente a fórmula da soma dos n termos da progressão, mas deixa de colocar os parênteses em $a_1 + a_n$ na segunda, terceira e quarta linhas e, mesmo assim, procede à divisão de 200 por 5. Em outras palavras, apesar de o resultado $a_1 + a_n = 40$ estar correto, há erros no caminho que levou até ele.

Quanto ao passo (III), apesar de o resultado final estar correto, de $a_n = a_1 + 28$ e $a_1 + a_n = 40$, ela passa a usar $a_n + a_1 = 28$ e $a_n - a_1 = 40$, respectivamente, quando o correto seria $a_n - a_1 = 28$ e $a_n + a_1 = 40$. Além disso, o cálculo de a_2, a_3 e a_4 também apresenta erros porque novamente ela utilizou $a_n + (n - 1).r$ em lugar de $a_n = a_1 + (n - 1).r$ e, apesar de encontrar $a_2 = 7, a_3 = 14$ e $a_4 = 21$, ela apresenta em sua resposta final $a_1 = 7, a_2 = 14, a_3 = 21, a_4 = 28$ e $a_5 = 34$.

Por meio dessa produção escrita, a estudante explicita alguns conhecimentos de P.A e sistema de equações. Usando as fórmulas do enésimo termo da P.A e da soma geral combinadas em um sistema de equação, a estudante determina o enésimo termo da P.A, que, nesse caso, é $a_5 = 34$. Todavia, o sistema de equação é formado por duas incógnitas (a_1 e a_n), tendo encontrado o a_n , ela não retorna a uma das equações do sistema ($a_n - a_1 = 28$ ou $a_n + a_1 = 40$) para determinar o primeiro termo (a_1) já que, a partir dele, poderia calcular os demais termos (a_2, a_3, a_4) com a fórmula $a_n = a_1 + (n - 1).r$. Como o total de telegramas da solução apresentada por ela totaliza 104 telegramas, e não 100 como informa o enunciado da questão, foi feita uma solicitação.

Fase 4

6. Mostre que sua resposta resolve a questão.

Ela repete os cálculos da fase anterior.

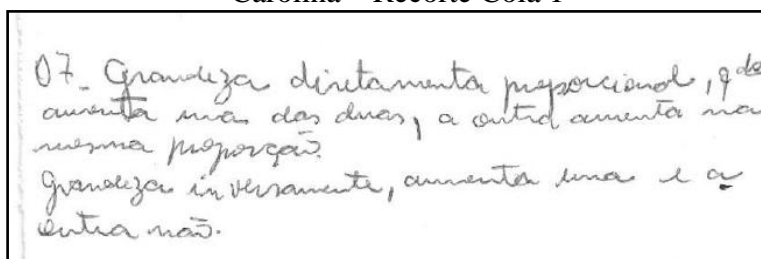
Carolina – Questão 7 – Fase 4

$$\begin{array}{l}
 a_n = a_1 + (n-1).r \\
 = a_1 + (5-1).7 \\
 a_1 + 4.7 \\
 a_1 + 28 \\
 \text{Substituindo} \\
 \begin{cases} -a_1 + a_n = 40 \\ +a_1 + a_n = 28 \end{cases} \\
 2a_n = 68 \\
 a_n = \frac{68}{2} \\
 a_n = 34
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 S_n = \frac{(a_1 + a_n).N}{2} \\
 100 = \frac{a_1 + a_n.5}{2} \\
 200 = a_1 + a_n.5 \\
 \frac{200}{5} = a_1 + a_n \\
 40 = a_1 + a_n
 \end{array}$$

Um dos trabalhos importantes do professor é tornar o erro visível para o aluno e levá-lo a modificar. Mesmo não encontrando a resposta correta, percebe-se uma evolução na sua produção quando comparada à primeira fase porque ela organizou matematicamente as informações fazendo uso das fórmulas da soma e do termo geral da P.A.

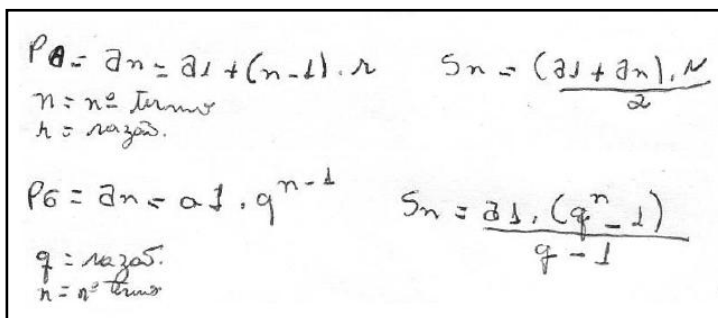
Sua primeira cola produzida trazia informações de grandezas direta e inversamente proporcionais. Como esses conceitos não estão relacionados à questão, eles não foram considerados indícios.

Carolina – Recorte Cola 1



Já sua segunda cola continha fórmulas de Progressão Aritmética que foram usadas na resolução apresentada, então atribuiu-se código zero à produção, resolução incorreta com indícios na cola.

Carolina – Recorte Cola 2



Quadro 14: Mapa das codificações – aluna Carolina

Data	14/03	21/03	28/03	04/04	11/04	18/04
Questões						
1	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Falta
2			Fase 1	Fase 2	Fase 3	Falta
4		Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Falta
5		Fase 1	Fase 2	Fase 3		
6			Fase 1	Fase 2	Fase 3	
7	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4		

Fonte: a autora.

Carolina produziu duas colas, apenas as resoluções das questões 5 e 6 não continham indícios. O Quadro 15 representa seu percurso durante a prova de acordo com as codificações tomadas. Em alguns momentos (questões 1 e 7), a aluna percebeu seus próprios erros e.

apesar de nem sempre ter conseguido tomar outro caminho que fosse viável, percebe-se um desenvolvimento em algumas situações, como, por exemplo, na questão 7 aqui descrita, que, apesar não estar matematicamente correta, representa um avanço quando comparada à resolução inicial. Talvez os questionamentos e comentários não tenham feito tanto sentido para a aluna, já que, na maior parte das vezes, ela não conseguiu se apropriar deles.

O quadro a seguir oferece um panorama das codificações que cada questão recebeu.

Quadro 15 – Mapa geral das codificações

Códigos →	2	2.1	1	1.1	0	0.1	9	9.1
Questões ↓								
1	5	—	2	—	2	—	—	—
2	3	—	1	—	4	—	—	—
3A	1	1	—	—	—	1	—	—
3B	—	1	—	—	1	1	—	—
3C	1	2	—	—	—	—	—	—
4	5	—	—	—	3	1	—	—
5	1	1	1	3	1	2	—	—
6	1	4	—	2	—	—	—	—
7	6	2	—	—	1	—	—	—
Com indícios de cola	23	—	4	—	12	—	—	—
Sem indícios de cola	—	11	—	5	—	5	—	—

Fonte: a autora.

A maior ocorrência foi do código 2 (resolução correta com indícios na cola) seguido do código zero (resolução incorreta com indícios na cola). Isso pode ser um sinal de que a prova em fases possibilitou e fortaleceu a utilização da cola. O terceiro código com maior ocorrência foi o 2.1 (resolução correta sem indícios na cola). Isso significa que as resoluções ditas corretas prevaleceram (códigos 2 e 2.1), representando mais da metade do total de respostas.

4.2 DA PESQUISADORA

4.2.1 AS INTERVENÇÕES

A intervenção é um elemento fundamental no desenvolvimento da prova-escrita-em-fases, pois a qualidade da primeira interfere na força da segunda. Ela pode influenciar os estudantes no desenvolvimento de ideias, estratégias e procedimentos, além de motivá-los e orientá-los. Para tanto, é preciso que o estudante perceba para que possa fazer tomá-la na regulação de sua aprendizagem.

Mendes (2014) indica que as intervenções escritas permitem reconhecer uma responsabilidade docente em criar um ambiente que oportunize aos estudantes revisitar e (re)construir seus conhecimentos. Cabe, portanto, ao professor desenvolver diálogos com os estudantes para que, da melhor maneira possível, eles resolvam suas tarefas e construam um diagnóstico de suas estratégias e dificuldades, e, a partir disso, decidir a forma de intervir. O professor deve interpretar as produções, formular hipóteses a respeito do raciocínio do aluno, lançando questionamentos ou pistas que orientem a ação a ser desenvolvida por aquele. As informações levantadas servem para regular/reorientar a prática docente.

Para análise das produções da pesquisadora na dinâmica da prova, realizaram-se agrupamentos de intervenções. Agrupar é o mesmo que reunir em grupos, juntar; ordenar, organizar, dispor em grupo a partir de algum critério (HOUAISS, 2009). Foram construídos sete grupos que reúnem intervenções por suas semelhanças.

Os grupos foram levantados para estabelecer uma delimitação na abrangência das intervenções, para nortear o olhar. Eles foram formados por sentenças relativas aos tipos das intervenções realizadas, representando um conjunto de informações. Inicialmente foram necessárias releituras do material, tentando buscá-los. Essa leitura representa uma perspectiva do pesquisador e o resultado de um esforço (ou tentativa) de uma síntese, a fim de facilitar a análise. Não representa um esgotamento das possibilidades, mas tipos de intervenções. Os agrupamentos emergiram das informações, ou seja, *a posteriori*, já que em uma prova em fases as intervenções são produzidas só a partir das produções dos estudantes, o que demanda constantes idas e vindas da teoria ao material de análise e vice-versa. As intervenções foram organizadas em sete tipos de agrupamentos.

Grupo 1. Intervenções voltadas à compreensão da produção escrita do aluno.

Grupo 2. Intervenções voltadas a auxiliar o aluno na compreensão de um conceito.

Grupo 3. Intervenções para guiar o aluno a um caminho de resolução.

Grupo 4. Intervenções para problematizar o acerto.

Grupo 5. Intervenções para problematizar o erro.

Grupo 6. Intervenções para o aluno reafirmar seu procedimento ou resolução.

Grupo 7. Intervenções regulares.

Os grupos não são mutuamente excludentes, uma vez que, por exemplo, uma intervenção utilizada para problematizar o erro (grupo 5) ou a compreensão de um conceito (grupo 2) pode conduzir a um caminho de resolução (grupo 3). Os grupos 4 e 5 poderiam se resumir em apenas um: intervenções para problematizar a produção do estudante. Uma intervenção realizada regularmente (grupo 7) pode estar voltada para problematizar o acerto ou o erro (grupos 4 e 5), para um caminho de resolução (grupo 3) ou mesmo para a reafirmação de um procedimento/resolução (grupo 6). Entretanto, a distinção serve para demarcá-los e reservar-lhes um espaço de discussão.

O foco está voltado à análise e ao papel das intervenções realizadas com exemplos de momentos em que cada grupo se revelou. Esses exemplos são apenas recortes da interação ocorrida entre a professora e o estudante. Como as informações não falam por si mesmas, delas foram extraídos significados por meio de inferências, ou seja, deduções que permitissem a passagem de uma descrição a uma interpretação (FRANCO, 2008).

Grupo 1. Intervenções voltadas à compreensão da produção escrita do aluno

Em alguns casos não se conseguiu entender a produção escrita do aluno, seja pelos procedimentos seja pela (des)organização deles. Nessas situações, realizaram-se intervenções para auxiliar o entendimento da professora da produção do aluno para que fosse possível intervir da maneira mais apropriada e pudesse conduzir a regulação do ensino com vistas à aprendizagem. Esse tipo de intervenção serve diretamente ao pesquisador e indiretamente ao aluno. Exemplo:

Questão 4 – Aluna Elsa

Em sua primeira produção escrita, a aluna apresenta um *mix* de cálculos e uma resposta: “o comprimento é 45 e a largura 20”.

Elsa - Questão 4 – Fase 1

Handwritten mathematical work for Elsa's question 4, phase 1. It includes diagrams of rectangles with dimensions 900m and 9,5, and 900m² and 11,5. The work shows several equations: $30x$, $30x = 900$, $x = 30$, and $44930 + 2x = 0$, leading to $x = 39$ and $x = 15$. There are also various arithmetic calculations and a list of values: $a_{\square} = 12$, $a_{\square} = 9,5$.

Pesquisadora – fase 2:

Não consegui entender o procedimento que você fez para encontrar a resposta. Resolva e responda à questão novamente de forma mais organizada para que eu possa entender.

Elsa retorna:

Elsa - Questão 4 – Fase 2

Handwritten mathematical work for Elsa's question 4, phase 2. It shows a list of values: $a_{\square} = 12$, $a_{\square} = 30^2$, $a_{\square} = 900$. Below this, it says "A diferença do comprimento 15m e a largura 10m". There are also diagrams of squares with side 30 and a rectangle with dimensions 900m² and 15.

As respostas apresentadas indicam que ela tentou atender a condição da área do terreno (900m²), já que as medidas indicadas nas duas resoluções (20 e 45; 30m cada lado) resultam na área da figura.

Essa intervenção teve a função de conduzir a estudante a uma organização de sua produção para que tanto a pesquisadora quanto a aluna pudessem regular suas ações. Pautadas na perspectiva da avaliação formativa, o foco recaiu em seus procedimentos. O entendimento

deles se fazia necessário para que se percebesse como ela chegou a resposta apresentada e assim pudéssemos guiá-la a partir de sua compreensão e de seu caminho.

Grupo 2. Intervenções voltadas a auxiliar o aluno na compreensão de um conceito

Compreender um conceito durante a resolução de uma tarefa pode promover a autonomia do aluno, e “uma das hipóteses nas quais se fundamenta a ideia da avaliação formativa é a de que o aluno aprende tanto melhor quanto mais se tornar autônomo” (HADJI, 1994, p. 170). Esse tipo de intervenção buscou conduzir o aluno a refletir sobre sua própria compreensão e em como são tomados os procedimentos matemáticos para resolver a questão (WIJAYA, HEUVEL-PANHUIZEN, DOORMAN, 2015).

Em alguns momentos a resolução de uma questão ficava prejudicada porque o aluno apresentava dificuldades na compreensão ou aplicação de um conceito, ou em lidar com uma fórmula, regra ou procedimento matemático. Quando isso aconteceu, interveio-se de modo a guiar o estudante rumo ao entendimento do conceito em jogo e, assim, criar condições para que ele pudesse avançar em aprendizagem e na resolução da questão.

Às vezes, antes de auxiliar o aluno na compreensão de um conceito, era preciso entender qual o conhecimento/entendimento dele sobre aquilo para partir de “onde” ele estava. Isso emergiu quando um conceito foi utilizado de diferentes maneiras nas produções escritas ou de um modo que foge à regra/significado padrão.

Questão 1 – Aluna Elsa

A aluna aplica a medida do raio da pizza na fórmula da área do círculo de duas maneiras diferentes e incorretas: I) raio igual ao diâmetro ao quadrado dividido por dois ($r = \frac{d^2}{2}$) e II) raio igual ao diâmetro dividido por 2 ao quadrado ($r = \left(\frac{d}{2}\right)^2$). Fazendo isso, ela encontra duas medidas de áreas diferentes também incorretas para cada pizza: pizza menor com 1425,56 cm² e 706,5 cm²; pizza maior com 2512 cm² e 1256 cm².

Elsa - Questão 1 – Fase 1

Handwritten calculations for the area of circles using the radius formula:

- For $r = 30$: $(30)^2 \cdot 3,14 = 900 \cdot 3,14 = 2826,00$
- For $r = 40$: $(40)^2 \cdot 3,14 = 1600 \cdot 3,14 = 5024,00$

The student also notes: "A mais vantajosa é de 40 mais".

Por meio dessa produção, inferimos que a estudante tem noção de que precisa calcular a área para analisar qual das pizzas apresenta preço mais vantajoso para o cliente, mas, para que ela percebesse o conflito de informações que gerou os dois resultados e para levá-la a compreender o conceito de raio, na segunda fase lançou-se o seguinte:

Pesquisadora – fase 2:

Você encontrou duas áreas diferentes para cada pizza. Por que você realizou dois cálculos? Afinal, qual é a área de cada pizza?

A intervenção realizada teve o objetivo de levá-la a refletir nos procedimentos realizados, identificar a dualidade da utilização da medida do raio e iniciar uma possível modificação.

No entanto, Elsa apresentou novo cálculo para a área das pizzas registrando uma terceira medida para cada uma (2826,00 cm² para a menor e 502400 cm² para a maior), consequência do emprego da medida do diâmetro em lugar do raio: $r = d$.

Elsa - Questão 1 – fase 2

Handwritten calculations for the area of circles using the diameter formula:

- For $d = 30$: $A = \pi \cdot d^2 = 3,14 \cdot 30^2 = 2826,00$
- For $d = 40$: $A = \pi \cdot d^2 = 3,14 \cdot 40^2 = 502400$

The student also shows the formula: $A = \pi \cdot r^2$.

Viu-se, então, a possibilidade de disparar um aprendizado dos conceitos de raio, diâmetro e a fórmula da área do círculo, uma vez que a avaliação deve possibilitar-lhe firmar suas aquisições e construir outras (BARLOW, 2006)

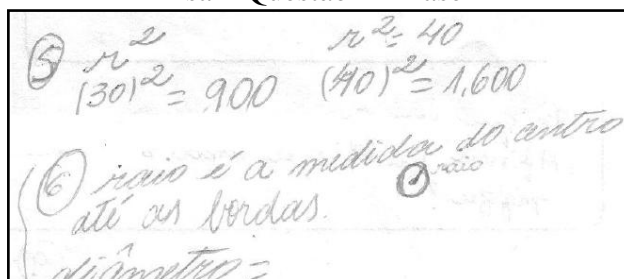
Compreender que a medida do raio é metade da medida do diâmetro é de suma importância na resolução da questão, por isso a intervenção da quarta fase buscou investigar o entendimento desses conceitos pela estudante.

Pesquisadora – fase 4:

O enunciado informa que o diâmetro da pizza menor é de 30 cm e o da pizza maior é de 40 cm. Qual o raio de cada pizza?

O que você entende por raio e diâmetro?

Elsa – Questão 1 – Fase 4



Por sua resposta é possível inferir que a aluna compreende a ideia de raio. Quanto ao diâmetro, não há como dizer por que ela não escreveu a respeito. Todavia, durante sua resolução, ao relacionar raio e diâmetro, foram empregados três modos diferentes que possibilitam indicar um desconhecimento do raio como metade do diâmetro, conseqüentemente, indicou-se a pesquisa dos referidos conceitos.

Grupo 3. Intervenções para guiar o aluno a um caminho de resolução

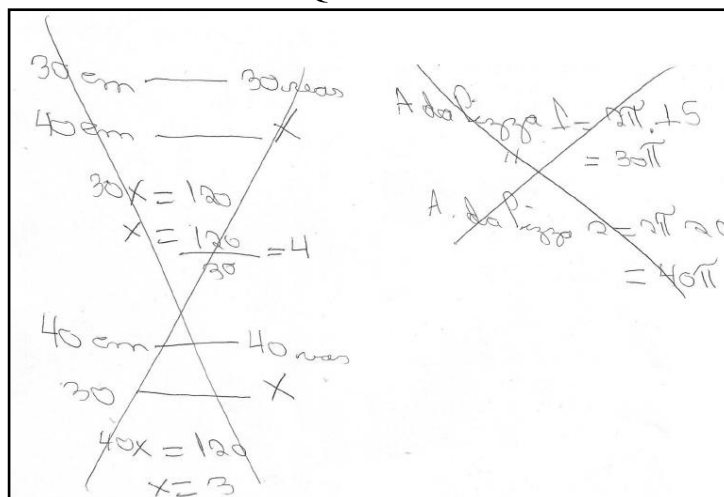
Em muitos momentos, a professora notava que o caminho tomado pelo aluno não resolveria a questão, ou que o estudante estava com dificuldades em seguir o caminho pretendido. Em outras situações, a produção escrita do estudante indicava que ele poderia estar “sem um norte”, às vezes estava em branco ou tinha sido anulada por ele mesmo. Então, realizavam-se intervenções que pudessem guiá-lo em seu caminho ou direcioná-los a um caminho viável/possível.

Questão 1 – Aluno João

João tentou resolver a questão por meio de regra de três simples, mas registra que

$30 \cdot 40 = 120$ e fica com dificuldade em interpretar o resultado encontrado, conforme figura ao lado. Ele também utilizou a fórmula do comprimento da circunferência em lugar da área do círculo, ou seja, $2\pi r$ ao invés de πr^2 .

João – Questão 1 – Fase 1



Para guiá-lo em seu caminho utilizando procedimentos de área, na intervenção da segunda fase, buscou-se criar condições que permitissem ao aluno construir saberes, regulando sua aprendizagem.

Pesquisadora – fase 2:

- Como se pode calcular o tamanho de uma sala? E de uma parede?
- Como se pode calcular o tamanho de uma pizza?
- Resolva a questão.

João:

- Uma parede se calcula multiplicando o tamanho dos lados que é a base e a altura.
- πr^2

João – Questão 1 – Fase 2

Handwritten student work showing calculations for pizza areas and a comparison of two options. The text is written in Portuguese and includes the following content:

3. $\pi \cdot 20^2 = 400\pi$
 $\pi \cdot 15^2 = 225\pi$
 $400\pi = 40 \text{ reais}$
 $225\pi = X \text{ reais}$
 $X = 22,5$

Se o valor das 2 pizzas seguir um valor proporcional ao tamanho da área de cada uma de 30cm de diâmetro deveria custar R\$ 22,5, logo a de 40cm de diâmetro por R\$ 40,00 é mais vantajosa a compra.

Em atendimento à terceira colocação, ele calculou novamente as áreas das pizzas por meio da estratégia inicial: regra de três simples. João encontrou o valor proporcional à área que a pizza menor deveria custar e assim concluiu que a pizza maior era mais vantajosa. Seus registros mostraram que a oportunidade de repensar a questão foi indispensável e que as intervenções com o objetivo de direcioná-lo a um caminho foram apropriadas por ele.

Grupo 4. Intervenções para problematizar o acerto


As intervenções desse grupo tiveram por finalidade oportunizar ao estudante pensar em outros elementos e desdobramentos quando suas respostas eram ditas corretas. Para isso, buscou-se problematizar procedimentos, as próprias questões e as respostas dadas para enriquecer as possibilidades e oportunizar (outros) olhares e reflexões, bem como a resolução por outros caminhos e com outras estratégias. Os questionamentos e comentários tiveram a intenção de possibilitar o avanço do estudante para além do que produziu, em um processo dinâmico e interativo de aprendizagem (PIRES, 2013).

Questão 6 – Aluna Ísis

As possibilidades de sequência de contas na caixinha foram analisadas caso a caso por Ísis. Tomando as contas escuras como pretas, a aluna elabora um estudo detalhado e objetivo de todas as possíveis quantidades de contas brancas na caixinha, chegando à conclusão de que esse número pode estar compreendido entre o mínimo de cinco e máximo de 15.

Ísis – Questão 6 – Fase 1

Estão para fora da caixa, 10 contas
5 brancas
5 pretas



Então dentro da caixa pode ter:

10	contas brancas	e	0	pretas
9	"	"	e	1
8	"	"	e	2
7	"	"	e	3
6	"	"	e	4
5	"	"	e	5
4	"	"	e	6
3	"	"	e	7
2	"	"	e	8
1	"	"	e	9
0	"	"	e	10

Somando as \odot contas que aparecem fora da caixa com as possíveis que estão \odot dentro da caixa

1ª possibilidade	fora da caixa	dentro da caixa	Contas da sequência
1ª			$5 + 10 = 15$
2ª			$5 + 9 = 14$
3ª			$5 + 8 = 13$
4ª			$5 + 7 = 12$
5ª			$5 + 6 = 11$
6ª			$5 + 5 = 10$
7ª			$5 + 4 = 9$
8ª			$5 + 3 = 8$
9ª			$5 + 2 = 7$
10ª			$5 + 1 = 6$
11ª			$5 + 0 = 5$

então na sequência \odot é possível encontrar (15, 14, 13, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5) contas brancas

Visando à ampliação de possibilidades para a aluna, problematizou-se a situação.

Pesquisadora – fase 3:

Sabemos que a caixinha contém 20 contas: em uma ponta tem 3 contas brancas e 3 escuras e na outra ponta tem 2 brancas e 2 escuras, e não podemos ter nenhuma

certeza sobre a parte não visível da caixa, pois há várias possibilidades. Escreva uma sentença matemática que represente essa situação.

A intenção era levar a aluna a pensar em uma equação. Como não houve retorno, a intervenção foi reformulada na quarta fase.

Pesquisadora – fase 4:

Como podemos representar algebricamente coisas que desconhecemos? A partir dessa pergunta, repense a pergunta anterior e tente descrevê-la com uma equação ou fórmula matemática.

Isis – Questão 6 – Fase 4

$20 = x + 10$
 $20 - 10 = x$
 $10 = x$
 faltam 10 contos
 $x = b_1 + b_2 + b_3 = 10$
 A equação possibilita várias combinações pois, a questão 06 e a pergunta 3 tem várias respostas possíveis.

$20 \rightarrow$ total de contos
 $10 \rightarrow$ soma de bolas moedas e nozes
 $x \rightarrow$ número de elementos que faltam.
 $b_1 =$ bolas
 $b_2 =$ moedas / nozes
 $b_3 =$ qualquer cor
 $10 =$ total da soma contos restante

A estudante escreve uma sentença matemática que representa as contas de dentro da caixa, já considerando que pode haver contas brancas, pretas, bem como qualquer outra cor. Nota-se que as intervenções funcionaram como um disparador, oportunizando à aluna encontrar novas possibilidades para a situação, o que representa um desenvolvimento em relação à resolução inicial e também que a avaliação serviu a um desenvolvimento da produção da aluna (HADJI, 1994).

Grupo 5. Intervenções para problematizar o erro

Errar é comum em um processo de construção de conhecimento, por isso é importante tomá-lo como provisório e como um processo de aprendizagem, de modo que ocorresse a análise do erro pelo aluno por intermédio do professor. Em vários momentos as intervenções tiveram a finalidade de tornar o erro visível ao estudante, para que o reconhecesse e o modificasse.

Questão 7 – Aluna Elsa

Elsa divide 100 por 5 e conclui que o resultado é o número de telegramas entregues no primeiro dia pelo carteiro e, a partir daí, adiciona 7 para encontrar a quantidade de telegramas entregues nos outros quatro dias.

Elsa - Questão 7 – Fase 1

Eu dividi o 100 telegramas em 5 dias, o resultado foi 20. Isto é a cada dia ele distribuiu 20 telegramas. Mas como ele distribuiu 7 a mais que no dia anterior. Então peguei o 1º dia que distribuiu 20, no outro dia $20 + 7 = 27$, no 3º dia $= 27 + 7 = 34$, 4º dia $= 34 + 7 = 41$ e no quinto 5º dia $41 + 7 = 48$.

Não há registros de que a aluna tenha notado que o carteiro entregou um total de 100 telegramas. Com o objetivo de guiá-la à análise de seu erro, interveio-se com os seguintes questionamentos.

Pesquisadora – fase 2:

Por que você dividiu os 100 telegramas pelos 5 dias?

Quantos telegramas o enunciado do problema informa que foram entregues ao todo?

Compare com o total de telegramas que você encontrou na sua resolução. Deu um resultado igual ao que o enunciado do problema informa? O que você conclui disso?

Elsa - Questão 7 – Fase 2

A aluna percebe e identifica o erro indicando que o total de telegramas foi ultrapassado. Ela repensa o caminho inicialmente tomado, apresenta novos procedimentos, agora por P.A., explicando o raciocínio, e apresenta uma resolução que atende às condições do enunciado.

Que está tudo errado. Pois eu pensei em dividir os 100 pelos 5 dias e aí a cada dia eu acrescentar 7 telegramas, só que passou o total de telegramas. Então peguei a fórmula da P.A., onde n é o número de dias, a_n é os telegramas entregues a n dias, onde resulta $a_n = a_1 + 28$. Aí fiz a soma dos 5 termos que deu resultado $a_n = a_1 + 40$. Coloquei os dois resultados montei um sistema onde deu o resultado do último termo que é 34. Então eu só substituí a_n do primeiro resultado e montei o a_1 que é 6. E para achar a_2, a_3, a_4 , peguei a fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ e no lugar de n coloquei 2 para achar a_2 , 3 para achar a_3 e 4 para achar a_4 .

Com a avaliação em função daquele que aprende, a aluna foi capaz de “encontra-se”, compreendendo seus erros e superando-os (HADJI, 1994).

Grupo 6. Intervenções para o aluno reafirmar seu procedimento ou resolução

Nessas intervenções foram solicitadas explicações dos procedimentos realizados, ou reproduzidos da cola, para análise da segurança do aluno sobre a resolução apresentada, a fim de desconstruir e/ou reconstruir certezas, possibilitar reflexões. A ideia é permitir e estimular que o aluno retome sua produção e avance em direções que oportunizem a aprendizagem (PIRES, 2013).

Questão 7 – Aluno Eliezer

O aluno solucionou a questão dos telegramas por meio de P.A e equação do primeiro grau com uma incógnita.

Eliezer – Questão 7 – Fase 1

aqui temos um problema de progressões aritméticas.
 fórmula do termo geral
 $A_n = A_1 + (n - 1) \cdot u$
 $A_n =$ termo geral
 $A_1 =$ primeiro termo
 $n =$ número de termos
 $u =$ razão da P.A
 $A_n = 100$
 $A_1 = x$
 $n =$ dia
 $u = 7$
 logo
 1º dia foi entregue 6 telegramas.
 2º dia foi entregue 13 telegramas.
 3º dia foi entregue 20 telegramas.
 4º dia foi entregue 27 telegramas.
 5º dia foi entregue 34 telegramas.

temos que:
 1º dia) $A_1 + (n - 1) \cdot u$
 $x + (1 - 1) \cdot u$
 x
 2º dia) $x + (2 - 1) \cdot 7$
 $x + 7$
 3º dia) $x + (3 - 1) \cdot 7$
 $x + 14$
 4º dia) $x + (4 - 1) \cdot 7$
 $x + 21$
 5º dia) $x + (5 - 1) \cdot 7$
 $x + 28$
 1º dia. x
 2º dia. $x + 7$
 3º dia. $x + 14$
 4º dia. $x + 21$
 5º dia. $x + 28$
 $5x + 70 = 100$
 $5x = 30$
 $x = \frac{30}{5}$
 $x = 6$
 Total = $5x + 70$

Apesar de Eliezer intitular sua produção como de progressão aritmética, sua resolução foi pautada em equação. Para analisar sua compreensão da resolução apresentada, estabelecemos o seguinte diálogo:

Pesquisadora – fase 2:

1. Quantos telegramas o enunciado do problema informa que foram entregues ao todo? O que significa “ao todo”?

2. Você escreveu " $A_n = 100$ ", o que isso quer dizer?
3. Você também escreveu " $Total = 5x + 70$ ", o que isso quer dizer?
4. Por que em seguida escreveu " $5x + 70 = 100$ "?

Eliezer:

1. [O enunciado] diz que 100 telegramas, "ao todo" é a soma da entrega dos 5 dias.
2. " A_n " significa "ao todo".
3. " $Total = 5x + 70$ " quer dizer que durante os 5 dias foram entregues $5x$ telegramas + 70 telegramas.
4. " $5x + 70$ " → cheguei à conclusão de que durante 5 dias foram entregues $5x$ telegramas + 70 telegramas, e sei também que durante os 5 dias foram entregues 100 telegramas, porém tem um valor chamado de x que eu não sei, então peguei o que foi entregue nos 5 dias ("ao todo também") com isso cheguei no valor de x que até então não sabia, conseguindo assim o valor da entrega diária.

Pesquisadora – fase 3:

5. O que você entende por progressão aritmética?
6. Você escreveu que $A_n = 100$. Em uma P.A., o que o A_n representa?
7. $5x + 70 = 100$ representa qual elemento da P.A.?
8. Mostre que você resolveu a questão por P.A.

Eliezer:

5. É uma sequência que aumenta conforme a razão.
6. [A_n] representa o termo geral, o número que somado todos os termos dá ele.
7. [$5x + 70 = 100$ representa] o termo geral que foi entregue $5x + 70$ no total dos 5 dias, e que foi entregue 100 telegramas, usamos a igualdade porque o que está no 1º membro vale para o 2º membro. E desta forma achar o valor desconhecido que é a chave da nossa resposta. A quantidade que foi entregue em cada dia. Mas na verdade achamos o valor (exato) do 1º termo, logo representa o 1º termo.
8. Resolvi por P.A, pois usei a fórmula do termo geral, achando assim o valor que foi entregue em cada dia. Não seria possível achar a equação sem a fórmula.

Ele inverte o significado do termo geral da P.A, designado por A_n , com a soma geral da progressão, $S_n = 100$. Porém, por meio das intervenções foi possível ao estudante mostrar domínio e segurança nos demais procedimentos realizados na resolução da questão. Ao explicar o que fez, Eliezer pôde ainda mostrar o que compreendeu das nossas considerações e refletir sobre sua produção inicial e explicá-la.

Grupo 7. Intervenções regulares

Em questões que os estudantes apresentaram caminhos de resolução similares, foram realizadas intervenções também similares. Nesses casos, as intervenções apresentavam regularidades.

Um exemplo disso é a questão 6. Cinco alunos (Elsa, Dani, Leticia, João e Eliezer) forneceram inicialmente a mesma resposta: contas alternadas em pretas e brancas, portanto, do total de 20 contas na caixinha, 10 eram brancas. Para todos eles foram encaminhadas as seguintes intervenções:

- É possível ter certeza de que as contas que não podem ser vistas seguem alternadas em pretas ou brancas?

- Analise as sequências de contas:

a) ●○●○●○ ○○○○○○○○○○ ●○●○

b) ●○●○●○ ●●●●●●●●●● ●○●○

c) ●○●○●○ ●●●●●○●●●● ●○●○

d) ●○●○●○ ○○○○●○●○○○ ●○●○

e) ●○●○●○ ●●●●○●○●●● ●○●○

É possível haver possibilidades como essas na parte não visível da caixa? Por quê?

- Quando a gente faz cópias não coloridas de um texto colorido, como fica a parte colorida?

- Observe a sequência de contas: ●○●○●○ ●●●●●●●●●● ●○●○. Quando a gente faz cópias não coloridas de um texto colorido, como fica a parte colorida?

- Podemos ter certeza de que as contas escuras são pretas?

Isso mostra que, na prova-escrita-em-fases, apesar da essência personalizada, de respeito às individualidades e especificidades de aprendizagem de cada indivíduo, não há uma obrigação de os questionamentos e comentários do professor serem todos diferentes. Nesse caso, em que vários alunos seguiram a mesma linha de raciocínio e apresentaram a mesma resposta, nada impede de lançar intervenções iniciais também idênticas, facilitando o trabalho

do professor. Isso não significa uma padronização, mas uma praticidade porque, apesar de o diálogo escrito se iniciar de maneira similar, os estudantes respondem-nos de maneira diferente, o que torna a comunicação específica e sinaliza que a mesma intervenção escrita não serve de maneira igual a todos os alunos.

Por meio desses agrupamentos é possível perceber os tipos e características das intervenções, bem como algumas possibilidades de o professor regular o processo de ensino diante de situações específicas. Como professores, responsáveis por proporcionar e manter um ambiente que permita ao aluno exercer da melhor forma possível o seu próprio controle da aprendizagem, é importante reconhecer o papel de sua ação, visando sua qualidade.

As situações percorridas em cada grupo de intervenções sinalizam que as intervenções serviram para guiar os estudantes a avançar por meio do erro ou o acerto, encontrar caminhos de resolução quando não se tinha, reanalisar suas produções escritas, identificar e alterar o próprio erro, compreender conceitos, explicitar firmeza na utilização dos procedimentos ao reafirmá-los. Esses aspectos trazem à tona elementos que oportunizam um movimento na direção da regulação da aprendizagem.

As intervenções também permitiram obter informações dos efeitos do trabalho da professora para regular sua ação. Por fim, apesar das recomendações, não existe uma receita quanto ao tipo de intervenção a fornecer ou como fazê-la. É um desafio ao professor saber se comunicar de modo adequado com cada aluno e em cada situação, de maneira a orientar, estimular reflexão, autocorreção e conduzir à aprendizagem.

5. AS DUAS PERSPECTIVAS DE COLA

Esta pesquisa apresenta duas perspectivas de cola. Parte do contexto de uma para desenvolver a outra. A discussão deste capítulo está voltada para a retomada dos objetivos da pesquisa e das questões levantadas na introdução.

5.1 A COLA COMO UMA CONDUTA DISCENTE

O primeiro capítulo apresentou diversos aspectos da cola como conduta discente: caracterizações, conceito, tipos, natureza, papel do professor, do aluno, da instituição, da prova. Alguns desses elementos serão retomados. A ação de colar não é um ato isolado, ela envolve outros componentes como o professor, o aluno e a prova.

O contexto da cola como conduta discente aqui considerado é aquele manifestado em um ambiente tradicional de ensino, pautado na transmissão, memorização e repetição de conteúdos. É a esse ambiente reprodutivo que se contrapõe. Um extremo oposto ao que se tenta desenvolver, mas ainda muito praticado. É válido informar que isso não significa uma inclusão das demais práticas nesse ou naquele polo. É certo que há outras práticas com outras perspectivas e formas de trabalho, mas estamos fazendo um contraponto com aquela que consideramos completamente oposta.

Nesse contexto, o **professor** ainda é visto como o transmissor de conhecimento, um examinador, um vigia que elabora estratégias para tentar controlar a cola. A cola ainda é tomada como sua inimiga ousada que desafia seus métodos avaliativos, suas escolhas metodológicas, sua presença e domínio de sala de aula. Se o professor a ignora, pode parecer descaso e o aluno pode perder o respeito. Ignorar não ajuda nem resolve. Ele se vê no dever de tomar uma atitude e acaba vivendo na tensão entre ser enganado pelos seus alunos e controlá-los e puni-los.

O controle docente ainda é usual na escola. Mas, conforme explica Krause (1997), essa prática tende a punir somente aqueles que colam explicitamente. Na tentativa de coibir e enfraquecer a cola, há professores que produzem provas diferentes ou com as questões em ordens diferentes, separam alunos, advertem. Outros dispõem fórmulas na lousa, autorizam consulta a cadernos e livros. Mas a prática se repete, exigindo outras condutas que também não alcançam efetividade (IOCOHAMA, 2004).

Quando a cola é descoberta, o professor usualmente defende frente aos demais a regra quebrada, podendo discutir valores como a formação moral e ética dos estudantes.

O **aluno** ainda é tomado como reprodutor e receptor de informações, examinado e vigiado. Seus olhares e movimentos são postos sob suspeita. Ele também vigia. Vigia à espera da oportunidade de agir. Planeja, calcula. Sua ação deve ser rápida e certa. Ele também é tido como cúmplice, porque sustenta um clima de cumplicidade e silêncio para preservar os colegas e o convívio social com a turma. Ele toma cuidados porque um flagrante gera punição. O aluno que cola considera a necessidade, pondera os benefícios e perdas, equaciona os riscos e vive a adrenalina da ação.

Colar não é simples, é conflitante, e as razões do aluno têm natureza diversa. Os objetivos e benefícios imediatos podem se impor a princípios; o aluno pode estar aproveitando oportunidades abertas por docentes mais omissos ou pela proximidade em um espaço físico apertado; pode estar querendo fugir da imagem de fracasso provocada pela nota baixa; não ter interesse pelo estudo e despreocupação com o domínio de conteúdos; ou pode estar tomando uma atitude de enfrentamento ao sistema e a um ensino pautado na “decoreba”; ou a cola pode ser causada pelo acúmulo de exigências de disciplinas fragmentadas etc. (DOMINGUES, 2006; RANGEL, 2001, IOCOHAMA, 2004; RIBEIRO, 2004).

Para os estudantes que participaram desta pesquisa, quem cola é o aluno que não estuda, que não sabe o conteúdo, tem preguiça, não participa em sala ou que tem insegurança, aqueles que, mesmo sabendo o conteúdo, não se sentem confiantes o bastante. Para eles, a quantidade geralmente grande de conteúdo e as muitas fórmulas levam os alunos a colar. Nesses casos, segundo eles, o aluno apoia-se na cola como um meio de não esquecer e, se esquecer, dar uma olhadinha. Também citaram a cultura do menor esforço e do caminho mais fácil como motivos.

Os estudantes apontaram que, no próprio Curso, há aluno que observa o comportamento e perfil do professor e tenta perceber quais partes do conteúdo são consideradas mais importantes para ele, para priorizar na cola aquilo que foi mais enfatizado nas aulas. Para eles, na escola a cola é mais facilitada pela quantidade de conteúdo, ao passo que na universidade isso se torna um obstáculo já que, às vezes, tem-se que estudar um livro inteiro para uma prova que conterà apenas algumas questões e aí não é possível fazer uma cola que agregue tantas informações.

A **prova** ainda é sinônimo de teste, exame. Ainda é aplicada ao final do processo de ensino para verificar, atribuir nota, medir, classificar, aprovar e reprovar. Seu interesse ainda é o rendimento e seu fim o produto, o resultado. Ainda se constitui em momento estanque com um modelo engessado. Funciona sob o sistema de recompensa e na dualidade certo e errado.

É temida pelos alunos, e desperta cargas emocionais, como ansiedade, nervosismo, esquecimento, medo da nota baixa e da reprovação.

A prática da cola também pode estar relacionada com um tipo de prova que não exige nada além de reprodução de informações. Tomando como referência o modelo usual de prova, a cola pode se configurar como um meio de gerar segurança em caso de esquecimento. Uma estratégia de defesa. Uma porta de escape àquela que tem poder de reprovar e refletir na imagem pessoal. Então, do ponto de vista prático, a cola pode ser vista como uma tentativa de garantir nota mínima para aprovação.

A nota, exigência formal dos sistemas de ensino, é utilizada como o fim da prova de rendimento. Um instrumento burocrático e administrativo, configurada como uma moeda de troca das instituições de ensino. A cola pode contestar justamente esse sistema e ser um sintoma do fracasso dele.

Na escola é usual tomar a **cola** como uma conduta discente marginal, fraudulenta e proibida. É tida como um recurso dos alunos e contrária aos professores. A obtenção de nota é vista como sua principal finalidade. Ela emite uma ousadia que perpassa todos os níveis de ensino, desde instituições renomadas de primeiro ou terceiro mundo ao menor dos lugares. Ocorre rapidamente e manifesta-se silenciosamente. Causa adrenalina pelo risco da descoberta.

As formas de utilizá-la vão desde estratégias mais antigas até as mais modernas, como a utilização de grupo de *Whatsapp*¹⁵. Há outras bem criativas, como a do aluno¹⁶ que se aproveitou das suas longas unhas pintadas das mãos para colar sob elas pequenos papéis com fórmulas. A cola pode revelar a engenhosidade do aluno, porque sua manifestação é inteligente. Seus modos surpreendentes correspondem ao desafio de criar soluções em um ambiente reprodutivo (DEMO, 2006).

O **ambiente**, formado pelo professor, o aluno e a prova, é usualmente reprodutivo: o professor transmite; a prova examina, testa e classifica; o aluno reproduz, copia e cola. A matemática ainda é tomada como uma ciência pronta e acabada. A cola ainda é proibida e combatida por ser prejudicial à aprendizagem e à formação moral e intelectual do aluno. O clima é de vigilância e colar significa vencer o sistema.

O ensino transmissivo acarreta memorização sem aplicação e à avaliação restrita a prova escrita e à medição. O aluno capta e repete a informação. Ironicamente, nada é mais

¹⁵ <http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,usp-apura-esquema-de-cola-por-whatsapp,10000060274>. Acesso em 16 out. 2017.

¹⁶ <http://blogs.oglobo.globo.com/pagenotfound/post/alunas-escondem-cola-sob-unhas.html>. Acesso em 16 out. 2017.

bem reproduzido do que a cola porque ela é uma reprodução fiel (DEMO, 2006). O ambiente é propício e o ciclo se mantém com:

- o professor tentando controlar criando estratégias para inibir.
- o aluno tentando escapar criando estratégias para burlar.
- a cola tendo garantidas as condições de que precisa para continuar.

5.2 A COLA COMO UMA ESTRATÉGIA DOCENTE

Na utilização da cola na prova-escrita-em-fases como estratégia de ensino, cada componente envolvido no processo educacional, descritos no item anterior, apresenta modificações, que, em alguns momentos, serão reforçadas com exemplos de situações ocorridas durante a realização da prova.

O **professor** torna-se o guia, um orientador, mediador. Aquele que favorece e oportuniza a aprendizagem. Ele adota uma atitude de questionamentos que permita ao estudante avançar e se desenvolver. O valor da produção do estudante passa a ser o que foi feito, sendo isso tomado como ponto de partida para o professor encontrar uma maneira de caminhar com ele. A atitude docente é de incentivar o estudo e a apropriação de novos conhecimentos (SILVA, 2015).

O professor torna-se responsável por criar as condições favoráveis à construção da aprendizagem dos alunos. Para isso, ele desenvolve diálogos escritos com o aluno; elabora retornos a respeito de seu trabalho (*feedbacks*); analisa o desenvolvimento do trabalho do estudante a cada momento para fazer as intervenções oportunas; repensa e reorienta o encaminhamento das aulas a partir das informações de cada fase; proporciona momentos oportunos para discutir em sala de aula as diferentes maneiras de lidar para as quais o diálogo escrito não foi suficiente e guia cada aluno em seu processo de aprender por meio da análise de sua produção escrita (MENDES, 2014).

O **aluno** passa a ser guiado, orientado pelo professor, conduzido a ser protagonista da sua aprendizagem e a ter papel ativo, isto é, a ser um participante, a justificar procedimentos, discutir, questionar, construir rotas de resolução, expor ideias... Ele deixa de ser punido por seus erros, tendo oportunidades de percebê-los e se desenvolver por meio deles. Prepara sua cola de acordo com as orientações do professor e dialoga com o professor durante suas produções escritas. Interage. Pesquisa. Estuda. Constrói conhecimentos.

A **prova** realiza-se em fases, tomada como um instrumento de avaliação voltada para a aprendizagem, formativa e como oportunidade de aprendizagem. Manifesta-se como um ato

dinâmico que qualifica e subsidia o (re)encaminhamento da ação tanto do professor quanto do estudante, possibilitando o direcionamento do aprendizado e desenvolvimento dos estudantes.

O principal objetivo da avaliação torna-se a aprendizagem e a formação do estudante. A nota é uma consequência. O instrumento prova surge no início, no meio e, se preciso, ao final do processo de ensino, interessando-se por todos os momentos, tornando-se uma prática que auxilia outra, aprender (HADJI, 2001). A prova torna-se um elemento de formação que possibilita a personalização.

A avaliação da aprendizagem busca investigar a qualidade do desempenho dos estudantes, tendo em vista uma intervenção no processo, caso seja necessário. Ela gera um conhecimento acerca do estado de aprendizagem do estudante. Ela oferece possibilidades de investigar uma ação e, partir do conhecimento que se obtém da qualidade dessa ação, intervir nela.

O instrumento avaliativo adotado, prova-escrita-em-fases, permitiu aos estudantes se desenvolverem com suas produções independentemente do *status* certo e errado, além de ter possibilitado à professora perceber se suas intervenções fizeram sentido para os alunos favorecendo a comunicação entre as partes, a utilização da cola e a discussão extraclasse. Essas e outras características e particularidades emergiram dos próprios estudantes:

- As intervenções são personalizadas

“Porque nem sempre a pergunta que você fazia pra mim era a pergunta que você fazia pra Isis ou pra Lavínia ou pra qualquer um de nós” (Letícia).

As intervenções individualizam a prova, o que, de certo modo, enfraquece e desestabiliza a cola trazida; elas são baseadas pelos caminhos de resolução dos estudantes, assim, caminhos diferentes podem gerar diferentes intervenções. Entretanto, caminhos iguais não impedem intervenções iguais e, mesmo quando os caminhos coincidem, o professor pode se ater a algum detalhe da resolução ou suscitar outro modo de resolução. A sétima questão (do carteiro), por exemplo, foi resolvida corretamente por meio de equação por Jhoni, Dani e Letícia. As intervenções propostas a Jhoni foram:

Explique sua resolução e resposta;

Resolva de outro jeito e compare as respostas. São iguais ou diferentes? Por quê?

Já para Dani questionou-se o porquê do formato de sua resposta.

Por que você escreveu a resposta em forma de conjunto?

E para Letícia, problematizou-se a questão para suscitar outras possibilidades:

Se no enunciado fosse: Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, incluindo o primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia? Como você resolveria? Explique sua resolução e resposta.

- As intervenções orientam a resolução

“[...] sempre que eu focava no que me era questionado eu conseguia chegar a um resultado [...]” (Lavínia).

Os estudantes indicaram que os questionamentos e intervenções de cada fase serviram para estudo e pesquisa dos conceitos envolvidos, bem como os orientavam a perceber seus erros e alterá-los encontrando rotas de resolução.

Lavínia: “[...] sempre que eu focava no que me era questionado eu conseguia chegar a um resultado [...]”.

Elsa: “[...] foi através dos questionamentos que eu consegui resolver algumas questões, estava resolvendo alguma questão pelo caminho errado, o questionamento me orientava”.

Eliezer: “A cada dia voltava com outros pensamentos, nos guiando para a resposta correta. Ajudou bastante”.

Isis: “Algumas perguntas fizeram eu me interessar por alguns conteúdos, estudar novamente para fazer a prova”.

Carolina: “A cada questionamento eu percebia que estava às vezes por um caminho certo e outras vezes errado e com os questionamentos eu podia acertar ou acrescentar o que estava faltando”.

Letícia: “Sempre tinha que fazer novas pesquisas de conceitos que não estava tendo domínio”.

Alguns alunos pontuaram que, no decorrer das fases, em vez de refletirem sobre suas produções, dirigiam-se exclusivamente às intervenções da pesquisadora e esqueciam o contexto da questão, o que também poderia conduzi-los a uma aprendizagem.

- A interação é favorecida

“Conversava com os colegas, trocávamos ideias. Também fazia novas pesquisas” (Letícia).

Há interações entre o professor e os alunos, entre alunos e deles com a cola. Praticamente todos os estudantes relataram conversar com os colegas durante o processo da prova. A busca e a interação predominaram em seus modos de agir diante das intervenções e desconhecimentos.

Lavínia: “Na realidade, muitas das vezes nos reunimos para discutir sobre o assunto (eu e meus colegas) não fui pesquisar, nem fiz outra cola”.

Elsa: “Eu procurava os colegas, alguns livros para que eu entendesse”.

Eliezer: “Se tornou uma novela, pois não via a hora da prova pra saber qual era a pergunta; nos assuntos dos colegas sempre rolava perguntas e discussões a respeito da tal prova com cola e isto ajudava também na hora da prova”.

Isis: “A princípio eu pesquisei as perguntas clássicas como a do camelo, depois eu questionei os meus resultados com dos meus colegas e voltei a pesquisar perguntas semelhantes”.

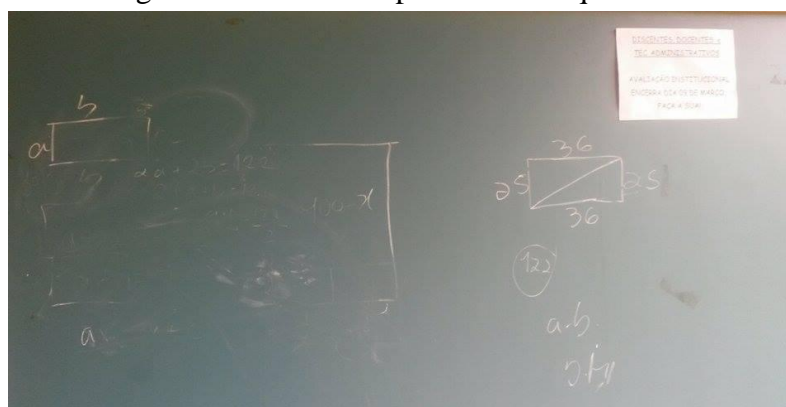
Carolina: “Discutia o assunto com os colegas, mas às vezes eu me perdia com tantas perguntas, acabava mudando tudo, ou seja, a minha cabeça dava um nó e quando eu chegava em casa ficava refletindo e buscava as respostas corretas”.

Letícia: “Conversava com os colegas, trocávamos ideias. Também fazia novas pesquisas”.

As trocas, pesquisas e discussão entre os estudantes são fatores que oportunizam momentos de aprendizagem. Eles comentaram, ainda, que, no dia da primeira fase, compararam as colas a fim de complementá-las a partir das colas dos colegas. Alguns inseriram informações, outros preferiram não alterar, já quem nem todos iam fazer as mesmas questões.

Na segunda fase, quando a professora se direcionava à sala de aula, as alunas Elsa, Letícia, Dani, Lavínia e Carolina estavam ouvindo de Ísis explicações da questão 04 (da cerca do terreno) em uma lousa externa do pátio da Universidade. Quando me viram tentaram apagar o que tinham escrito na lousa.

Figura 4 - Estudo compartilhado da questão 04



Fonte: a autora.

Letícia fez uma ressalva dizendo que essa troca era cuidadosa porque as intervenções eram diferentes de um para o outro, além disso, às vezes o colega havia seguido outra rota de resolução.

Letícia: Essa troca era às vezes alguma coisa mais assim... Porque nem sempre a pergunta que você fazia pra mim era a pergunta que você fazia pra Isis ou pra Lavínia ou pra qualquer um de nós. Que cada um teve um ponto de dificuldade né, uma questão ou algum conceitinho ali que... igual quando eu conversei com o Jhoni... ele foi por outro caminho da mesma questão [03] que eu não fui. Eu falei: meu Deus então eu to fora da casinha!

Para a questão 4, Letícia registrou na primeira cola as fórmulas de área e perímetro do quadrado e do retângulo, na terceira cola, ela inseriu informações diretamente ligadas à questão e que podem ter sido incluídas a partir de trocas e discussões com os colegas de turma, sinalizando que as fases da prova favoreceram a construção e utilização da cola.

- A natureza da tarefa é modificada

“A cada etapa um grau de dificuldade aumentava devido aos questionamentos da professora [...]” (Letícia).

As fases não mudam apenas a proposta de resolver a questão, mudam a natureza da tarefa. As intervenções da professora em cada fase desestabilizavam aquilo que o aluno trazia preparado na cola para a resolução das questões da prova. Sendo a natureza modificada, a cola perde sua força.

A **cola** passa a ser tomada como uma estratégia docente. Numa perspectiva subversiva, ela torna-se um recurso à aprendizagem, um meio de estudo e pesquisa. Demanda estudo prévio, escolhas (porque o espaço é limitado), análise, produção pessoal e reflexão. Torna-se a única fonte permitida de ser consultada no momento da realização da prova e elaborada pelo próprio estudante. Sua permissão evita a exclusiva memorização dos conteúdos. A natureza do instrumento de avaliação altera a essência da cola porque permite ao aluno dialogar por escrito com o professor, personalizando a prova, e com seus colegas fora da sala de aula, possibilitando trocas e aprendizagem.

Quando o professor se utiliza da cola ela pode lhe servir de indicativo. Se o aluno insere informações muito distintas significa que ele não está compreendendo qual é o enfoque que o professor está dando, além disso, o docente pode perceber no enfoque do aluno informações que poderiam ou deveriam receber maior atenção. No processo de utilização da

cola na prova-escrita-em-fases, os depoimentos e colas produzidas pelos estudantes sinalizam que:

- A cola passa se tornar um instrumento de estudo, pesquisa e aprendizagem

“Eu precisei da cola para realizar a questão que envolvia um conteúdo que eu não tinha domínio” (Ísis).

A estratégia dos estudantes que se destacou foi pesquisar e incluir na cola fórmulas que precisariam ser lembradas e informações referentes ao que eles não sabiam. Para alguns mais; para outros, menos, mas todos afirmaram que a cola teve papel importante e indispensável.

No meu caso foi diferente, porque eu usei a cola pra colar o que eu realmente não sabia, porque como você disse o que ia contar eram indícios na cola então eu escrevi algumas coisinhas que eu já sabia e o que eu não sabia era PA e PG, então nesse dia **eu fui pro laboratório estudar, pra saber informações e foi quando eu achei uma pesquisa semelhante a sua, sobre cola.** [...] Aí o que eu notei, é que as perguntas feitas por você eram pra ajudar ou indícios de acerto ou erros, aí foi nisso que eu me liguei que as perguntas não eram pra complicar a nossa vida, era pra você olhar a sua resposta de novo (Ísis, negrito da autora).

Na segunda fase da questão 2, Ísis comentou que colou errado porque não sabia Progressão Aritmética e Geométrica e a cola que tinha em mãos (pela orientação deveria ser elaborada para as duas primeiras fases) contemplava apenas as duas questões da primeira fase. Na terceira fase, os estudantes deveriam trazer a segunda cola. Nesse momento foi possível perceber que ela foi à busca de meios que ajudassem na solução da questão, porque trouxe na cola propriedades relativas a ambas as progressões e que foram utilizadas para determinar as razões de cada uma. Antes de iniciar a prova, Isis comentou: “eu não sabia que tinha propriedades de P.A e P.G, hoje eu vou conseguir fazer essa questão”, indicando um aprendizado de conceitos das progressões até então desconhecidos para ela.

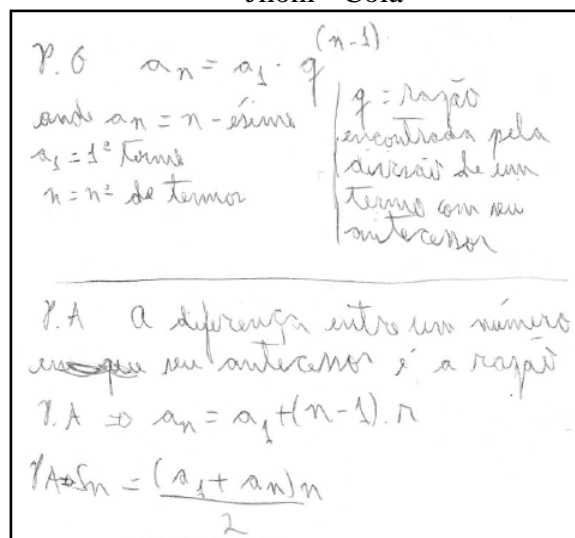
Um dos trabalhos pesquisados por Isis é de autoria de Secon (2009), sob a orientação da professora Regina Buriasco, intitulado “A resolução de problemas como estratégia para o ensino de matemática na educação básica”, que consiste na apresentação de uma proposta de trabalho pautada na Resolução de Problemas enquanto estratégia metodológica para aulas de matemática. Nesse trabalho, inclusive, é discutida a questão das pizzas. O segundo é de autoria de Maria Cristina Conceição dos Santos (2010), com a mesma orientadora, intitulado “Uma prática avaliativa em matemática”. A autora utilizou a Resolução de Problemas como

estratégia metodológica para oportunizar desenvolvimento de conteúdos matemáticos e a prova em três fases como instrumento de avaliação. Na perspectiva adotada, erros e acertos foram analisados e tomados como um ponto de partida para a aprendizagem.

A estudante utilizou a cola de maneira perspicaz, tanto para se beneficiar em termos de nota, inserindo informações que já dominava, quanto para pesquisa e estudo de conceitos em que tinha dificuldades, ou seja, como um recurso para a aprendizagem.

Outro exemplo é a cola produzida por Jhoni para a resolução da questão 2. Ela sinaliza estudo e pesquisa que vão além de um lembrete de fórmulas. Pela maneira como estão inseridas as informações, inferiu-se que foram necessários momentos de estudos para sua elaboração, haja vista que as fórmulas não foram simplesmente elencadas, mas os elementos que as compõem vieram acompanhados de descrições relativas a seus significados.

Jhoni - Cola



- “Mesmo pra colar tem que saber alguma coisa” (Eliezer)

“A cola facilitou em algumas questões, mas em outras não serviu, uma por não saber usar as fórmulas, ou por não saber qual fórmula a ser usada na questão” (Elsa).

A primeira cola de Elsa continha a fórmula da área do círculo como sendo $\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2$ e na segunda cola estava: “área da circunferência $a_c = \pi \cdot r^2$ ”. A aluna aplicou a medida do raio da pizza na fórmula da área do círculo de três maneiras diferentes e incorretas: I) raio igual ao diâmetro ao quadrado dividido por dois ($r = \frac{d^2}{2}$) e II) raio igual ao diâmetro dividido por 2 ao quadrado ($r = \left(\frac{d}{2}\right)^2$) e III) raio igual ao diâmetro ($r = d$), determinando três medidas de áreas diferentes e incorretas para cada pizza. Mas nenhum dos três modos utilizados na prova coincide com aqueles trazidos nas duas colas. Por sua cola, pode-se inferir que talvez ela acredite que a circunferência possua área. É preciso lembrar que “circunferência é uma linha plana fechada cujos pontos estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano chamado

centro” (SILVEIRA, 2015, p. 255). A circunferência delimita uma área (círculo), e a medida do comprimento dessa circunferência é a medida do perímetro do círculo.

Na questão 4, do terreno, o enunciado informa que Aldo quer cercar completamente um terreno retangular de 900m^2 . Na terceira fase, Elsa indica que o perímetro calculado por Aldo é 900 e que o terreno possui 225 metros em cada lado. Interveio-se, colocando que “o enunciado informa que a área do terreno é 900m^2 e você indica que os lados do terreno medem $225\text{m}/226\text{m}$. A área de um terreno com essas medidas resulta em 900m^2 ? O que você conclui a partir disso?”. Elsa indica que sua resolução está incorreta, mas mantém a ideia da resposta e argumenta no sentido de justificá-la. Isso pode ser um indicativo de que a aluna não compreende que a área é dada pelo produto dos lados. Essa hipótese é reforçada pela escrita das unidades de medida que utiliza para as dimensões da figura: 224m^2 e 225m^2 como se fossem área e não medidas de comprimento.

Em sua segunda cola havia esta informação:

$a \square = a \cdot b = \text{perímetro} = 2b + 2a$

As igualdades utilizadas na expressão suscitam questionamos: Elsa entende que área e perímetro são iguais? Ela dispunha na cola de informações necessárias para resolver a questão, mas ela mesma disse que a cola ajudou em algumas questões, em outras não “por não saber usar as fórmulas, ou por não saber qual fórmula a ser usada na questão”.

Dani é outro exemplo disso. Para resolver a questão 2, ela trouxe na segunda cola propriedades das progressões: em uma P.A com número ímpar de termos, o termo médio é igual à média aritmética entre os extremos; em uma P.G com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Dani – Recorte Cola 2

"O quadrado do termo central $a_i =$ o produto
 $a_1, a_2, a_3 \rightarrow (a_2)^2 = (a_1)(a_3) \quad q = \frac{1}{8} \quad q = -\frac{3}{2}$
 a sequência (a, b, c) é P.A. use somente o termo
 médio e iguale a média aritmética entre a e c
 $b = \frac{a+c}{2}$
 numa P.G com n° ímpar de termos, o termo
 médio $a_i = q_i$ média aritmética entre os
 extremos

É possível também visualizar que sua cola contém parte da resposta da questão: o valor de y ($\frac{1}{8}$) e da razão da P.G ($-\frac{3}{2}$).

Ela tentou utilizar as propriedades trazidas na cola. Em relação a P.G, ela aplica corretamente a propriedade, mas seus registros indicam uma dificuldade no cálculo do produto notável, apresentando $(2y - 1)^2 = 4y^2 - 2y + 1$ em vez de $4y^2 - 4y + 1$.

Dani – Questão 2 – Fase 3

P.G
 $(2y-1)^2 = (4y) \cdot (y+1)$
 $4y^2 - 2y + 1 = 4y^2 + 4y$
 $4y^2 - 4y^2 = 4y - 2y + 1$
 $2y = +1$
 $y = \frac{+1}{2}$

Em relação a P.A, nota-se algumas tentativas de utilização da propriedade, mas o cálculo da média aritmética dificultou todas elas, podendo ser esse conceito seu obstáculo para resolver a questão pelo caminho tomado.

Dani – Questão 2 – Fase 3

PA
 $b = \frac{a+c}{x} = \frac{1-3x+2x+3}{x}$
 $\frac{-x+2}{x} = \frac{4-x}{x}$
 $x=2$
 $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}$
 $\frac{1-3x+2+3}{2} = \frac{-x+2}{2}$
 $1-3x+5 = -x+2$
 $6-3x = -x+2$
 $6-2 = -x+3x$
 $4 = 2x$
 $x = \frac{4}{2}$
 $x = 2$
 $a_3 = 2x + 1(-1)$
 $a_3 = 2 \cdot 2 - 1$
 $a_3 = 3$

A estudante escreve o termo central e iguala à soma dos termos extremos, mas não realiza a divisão por dois (média aritmética simples). Sua produção em face de sua cola mostra que, por mais que o aluno disponha de informações e ferramentas necessárias e suficientes para colar na prova, é preciso saber utilizá-las. É preciso ter um mínimo de

compreensão daquilo que se cola, ou seja, cola por si só não é suficiente. Ter uma cola, mas não saber utilizar os conceitos matemáticos presentes nela pouco adianta.

Eliezer: [...] mas mesmo pra colar tem que saber alguma coisa.

Pesquisadora: pra colar tem que saber alguma coisa? Por quê? Se a pessoa não souber nada ela não consegue colar?

Eliezer: não, porque vai olhar a cola e não vai nem entender o que está escrito.

Lavínia: Outro dia pediram na sala: professor, o senhor podia colocar a fórmula no quadro. Ele falou: “eu posso colocar a fórmula mas se vocês não souberem como vocês vão aplicar ela?” O que adianta ter a cola com a fórmula se não vai saber aplicar?

- As intervenções reduzem a utilidade da cola

“No primeiro momento a cola atendia ao que o exercício pedia, mas depois com os questionamentos da professora ela não era tão útil. Dependia do meu entendimento e quando conseguia pesquisar novamente para a próxima etapa” (Letícia).

Os estudantes relataram que a cola foi mais útil no primeiro momento ou primeira fase de cada questão, momento em que ainda não tinham que lidar com as intervenções, somente com a questão.

Letícia: no primeiro dia você veio assim mais seguro, ah, tá aqui, eu vou vim e vou responder. Mas depois não tinha mais segurança, parecia que a cola não servia de nada, porque cada pergunta era pessoal né, você não vai achar.

Pesquisadora: vocês acham então que o dia mais importante da cola foi o primeiro?

Letícia: não que os outros não foram importantes, mas tipo assim, vamos supor: no primeiro dia você se lembrava das suas duas questões que você ia responder, estava mais fresca na sua mente né, aquelas duas primeiras estava mais fresca, então você vinha já seguro. Ah! eu pesquisei, achei exercício semelhante: vou conseguir responder! Você já achava que estava certo. Só que quando você ia pegar a sua prova depois tinha perguntas lá que a cola não ia assim... responder.

Pesquisadora: que a cola não ajudava a responder?

Letícia: ela não ia te ajudar, ia depender de você, eram perguntas pessoais, para cada um era uma pergunta.

Pesquisadora: a cola ajudou no primeiro dia?

Letícia: no primeiro momento de cada pergunta.

Pesquisadora: Ah tá, no primeiro momento de cada questão?

Letícia: de cada questão.

Eliezer: até porque é assim, a continuidade das questões a gente olhava o primeiro resultado, a primeira resposta que nós colocamos e aí nós passamos a analisar a resposta e não mais a... cola.

Essas falas mostram que as intervenções da professora em cada fase desestabilizavam aquilo que eles traziam na cola para a resolução das questões da prova.

“[...] na primeira cola achei que resolveria e depois pude perceber que não [...]” (Carolina).

- A utilização da cola não torna a prova mais fácil

“Eu achei que seria fácil, este método, mas não foi, porque as fórmulas que coloquei para resolver as questões, algumas eu não sabia e ficou difícil eu resolver as questões” (Elsa).

A possibilidade de ver a prova antes de sua aplicação e poder produzir uma cola pra sua resolução foi bem recebida pelos estudantes, mas, ao contrário do que imaginavam, isso não facilitou a sua resolução. Eles foram questionados a respeito do que pensaram inicialmente da proposta de utilização da cola na prova-escrita-em-fases e suas percepções ao final do processo. É possível notar que eles acreditavam que a prova seria fácil por terem-na visto antes de resolvê-la e terem tido a oportunidade de produzir e utilizar a cola. Já ao final, eles expuseram que encontraram dificuldades para a resolução e que esta demandou estudo.

Lavínia: “achar que por haver uma prova com cola não precisa estudar, é engano pois a cola ajuda e muito, se colocarmos apenas as fórmulas e não sabermos aplicá-la não adianta nada”.

Elsa: “Eu pensei que seria muito fácil. Mas não foi. Foi muito difícil [...]”.

Eliezer: “A princípio pensei que seria fácil por ter a cola do lado, porém percebi que tive dificuldades mesmo com a cola [...]”.

Ísis: “No primeiro dia achei que seria fácil já que as perguntas eram do E.M, depois eu fui pesquisar sobre essa metodologia da prova com cola e percebi que as perguntas feitas serviam de indícios (dos meus erros)”.

Carolina: “Eu pensava no começo que seria fácil, mas com o desenvolver eu percebi que não era tão simples. Mesmo com a cola a gente confunde e acaba fazendo errado”.

Letícia: “Pensei que seria fácil [...]. Agora, no final, achei uma experiência interessante e que nos fez buscar e não desistirmos do exercício de primeiro momento. Nos ajudou a sermos perseverantes”.

Com esses elementos retomou-se o primeiro objetivo específico da pesquisa, analisar a utilização da cola em uma prova-escrita-em-fases com cola como estratégia de ensino para aulas de matemática. Sendo a prova escrita realizada em fases, com o objetivo de contribuir para a aprendizagem, a comunicação entre professor e aluno é favorecida. Todavia, as intervenções são personalizadas e a natureza da tarefa é modificada, o que individualiza a prova e enfraquece a cola. A nota passa a ser uma consequência. A cola torna-se aliada de ambos os parceiros da relação didática. Os estudantes percebem que, mesmo para colar, é preciso saber alguma coisa, porque o foco não é a repetição de informação, mas a compreensão. A cola pode se tornar uma estratégia de ensino para aulas de matemática porque sua permissão não facilita a prova e não traz prejuízos à formação do estudante, quando aliada a um instrumento de avaliação que elimina a regra de não comunicação que a proíbe, alterando inclusive sua finalidade.

O **ambiente** passa a oportunizar ao estudante se colocar em uma posição ativa, por meio de tarefas que possibilitam o surgimento e mobilização de competências compatíveis (MENDES, 2014). A aula não mais se inicia com exposição de conteúdos, mas com tarefas e situações disparadoras. O professor passa a equilibrar sua orientação com a preservação da liberdade de ação dos alunos. O foco principal são os próprios procedimentos, a matematização (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996).

O erro torna-se um caminho de aprendizagem, um indício do processo da aprendizagem; um meio de orientar o processo de ensino; um sinal de como o aluno está organizando seu raciocínio; uma expressão das especificidades de cada um e de vários percursos (ESTEBAN, 2003).

A matemática passa a ser tomada como uma atividade humana, de nossa natureza. As tarefas precisam fazer sentido para os alunos e serem realizáveis, para funcionarem como disparadoras de um novo aprendizado. O aluno aprende ao ser avaliado. A cola passa a ser utilizada como uma estratégia docente que pode fomentar o estudo e a formação do estudante.

O quadro síntese a seguir apresenta, de forma polarizada, os extremos dos componentes que acompanham os dois tipos de cola e os contrapontos entre ambos.

Quadro 16 – Extremo da cola como conduta discente *versus* o da cola como estratégia docente

	Cola como conduta discente	Cola como estratégia docente
Professor	<ul style="list-style-type: none"> - Transmissor de conhecimento - Examinador - Vigia - Desafiado pela cola 	<ul style="list-style-type: none"> - Guia, orientador e mediador - Avalia a aprendizagem e ação docente - Alia-se à cola em um processo de subversão
Aluno	<ul style="list-style-type: none"> - Receptor e reprodutor de informações - Examinado - Vigia e Vigiado - Punido com erro e com a cola - Cola - Infrator de uma regra 	<ul style="list-style-type: none"> - Conduzido a construir seu conhecimento - Guiado pelo professor - Papel ativo - Incentivado a avançar com erros e acertos - Aprende por meio da cola
Prova	<ul style="list-style-type: none"> - Ao final do processo de ensino - Interessa o produto, o rendimento - Verifica, mede e classifica - Premia o acerto, pune o erro - Desperta cargas emocionais 	<ul style="list-style-type: none"> - Avalia a aprendizagem - Surge no início, no meio e no fim do processo de ensino - Investe no processo - Permite avançar com erros e acertos - Um elemento de formação - Momento de aprendizagem - Nota como consequência
Cola	<ul style="list-style-type: none"> - Desvio de conduta discente - Proibida - Fraude - Amiga dos alunos, inimiga dos professores - Fins de recebimento de nota 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia de ensino docente - Subversiva - Autorizada - Aliada do aluno e do professor - Um meio de estudo e aprendizagem
Ambiente	<ul style="list-style-type: none"> - Matemática pronta e acabada - Reprodutivo e de vigilância - Padronização - Aluno cola, professor controla - Cola proibida e combatida - Avaliação de rendimento - Erro é punido 	<ul style="list-style-type: none"> - Matemática como atividade humana - Tarefas disparadoras da atividade matemática - Personalização - A cola como uma estratégia docente e um recurso ao estudo - Integração ente ensino e avaliação. - O erro é um momento da aprendizagem

Fonte: a autora.

O Quadro 16 auxilia pensar nos objetivos da pesquisa e nas questões levantadas na introdução. Ao realizá-la, o principal objetivo era investigar a utilização de uma cola na prova-escrita-em-fases como estratégia docente na formação inicial de professores de matemática. Com o instrumento avaliativo adotado, percebeu-se que a estratégia de utilizar a

cola, descriminalizando-a, ao invés de torná-la necessária, como na sugestão de Krause (1997), enfraquece-a porque sai da padronização à personalização. Transforma-se a cola inconveniente em um recurso conveniente. E, então, chega-se ao nosso segundo objetivo específico: analisar e discutir a utilização da cola na prova-escrita-em-fases como meio de repensar a prática letiva. Como Krause (1997) pontua, a proposta pode parecer simples, mas não pequena para a prática letiva porque ela afeta e modifica:

- a elaboração de provas;
- a correção;
- a avaliação;
- a relação do professor com o saber;
- a relação entre professor e aluno;
- a relação do professor com a prova;
- a relação do aluno com a prova;
- a relação do aluno e do professor com a cola;
- a prática de sala de aula;
- a relação professor e instituição de ensino

A estratégia exige uma mudança de conduta, implica estar aberto a aprender, estar disposto afetiva e efetivamente. Requer ações como tomar a avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem e a análise da produção escrita do estudante a favor do ensino e aprendizagem. É necessário mudar o hábito de examinar para o de avaliar, o que afeta sua relação com o significado de avaliação e elaboração de prova. É preciso incluir, ao invés de excluir, o que implica uma modificação de correção de provas, do tratamento do erro, do acerto e do olhar nos resultados para um olhar nos procedimentos. Ele deixa de ser um transmissor de conhecimentos para formar por meio da matemática, o que altera sua relação com o saber. Ele precisa orientar e, ao mesmo tempo, assegurar a independência dos alunos. O estudante é encaminhado de maneira a ser participante.

Para o aluno, os instrumentos de avaliação deixam de ser um momento de tensão e medo. A cola pode se caracterizar um meio de segurança e redução do medo do esquecimento. Já o professor a utiliza em vez de controlá-la. A permissão da cola atrai e interessa os alunos como discorrido no item 5.2, e a utilização favorece tanto professor quanto aluno.

Essas modificações são indícios do poder da natureza da prova. Se o instrumento avaliativo estiver voltado à aprendizagem e ao processo, a cola, ao invés de tornar o professor

um controlador e o aluno um fraudador, pode se constituir realmente em aliada de ambos. Essa potencialidade surge das intervenções do professor que individualizam a prova.

A relação professor e aluno deixa de ser um “jogo de gato e rato”. Não há necessidade de vigilância acirrada entre ambas as partes. A estratégia também exige que as instituições de ensino modifiquem sua relação com os seus profissionais, da preocupação com o programa curricular para o ensino e a aprendizagem e da cobrança de resultados imediatos para o processo, tendo o resultado como uma consequência.

Seria isso possível?

6. CONSIDERAÇÕES

Sob a influência dos autores estudados na fundamentação teórica, considera-se que há muitas críticas aos procedimentos e instrumentos de avaliação usualmente utilizados na escola. Conforme comumente aplicada, a prova escrita acaba por provocar a cola porque exige do aluno essencialmente memorização e repetição. Nesta pesquisa, apresenta-se uma proposta de ação em que é dada aos estudantes a oportunidade de ampliar seus conhecimentos, em seus tempos e por seus caminhos. Essa proposta não é um antídoto porque pode não ser possível superar a cola instaurando no lugar outro jogo. Mas diversificar os meios de avaliar a aprendizagem é melhor que a repreensão e vigilância.

A partir da utilização da cola, em conjunto com a prova-escrita-em-fases, foi possível realizar algumas inferências.

No imaginário docente, parece que todo aluno sabe fazer cola, como uma habilidade nata ou algo cultural, conseqüentemente, colar é sinônimo de obter vantagens em termos de nota. Parece haver um mito de que a cola é sempre eficiente e que beneficiará a nota do aluno. Não foi o que aconteceu neste trabalho. Na primeira prova foram percebidas na cola dos alunos várias indicações para as respostas e que não foram utilizadas por eles na prova, além disso, as notas divergiram muito pouco do perfil habitual de cada aluno. Não houve uma vantagem significativa na nota como imaginado.

A utilização da cola também não tornou a prova mais fácil, como pensaram os estudantes ao receber a proposta. Ao final, declararam que foi difícil e que tiveram que estudar, porque dispor das informações não foi suficiente, era preciso saber utilizá-las. Isso decorre da natureza da prova (nesse caso, instrumento para uma avaliação formativa) que não estava na reprodução, mas na compreensão. A permissão da cola não trouxe prejuízos para a formação. O recurso se revelou favorável ao estudo, pesquisa e aprendizagem, favorecendo tanto a formação do estudante quanto o trabalho docente.

A estratégia trouxe à tona o que todos sabem, mas que é encoberto ou ignorado: a cola. A proposta é inusitada, audaciosa e polêmica, e nela não importa se a cola é bem ou mal vista. Importa que os alunos estudem e aprendam. Preparar a cola e poder utilizá-la é o mote para o aluno estudar. A oportunidade de refazer a cola, além de novos estudos, pode gerar também uma estratégia discente. Neste estudo, isso ficou mais evidente.

Percebe-se que é muito difícil realizar a avaliação enquanto processo, porque se tem uma percepção discreta da realidade na qual se consegue captar momentos. Só é possível

gerar intervenções a partir desses momentos discretos de um processo contínuo. Parece que não se é capaz de olhar para o todo.

Em uma avaliação da aprendizagem escolar, a prova-escrita-em-fases é um instrumento que pode favorecer o contínuo. Oferece “retratos” para que haja condições de imaginar um “álbum”, oferece “cenas” para que se possa imaginar um “filme”. Ela coloca o aluno no direito de errar sem ser castigado e permite ao professor ter (alguma) noção se o que ele está “falando” faz algum sentido para o aluno. Ela permite ao estudante também aprender com o que usualmente é considerado um erro.

Como professora e pesquisadora, para a realização do trabalho, foi necessário passar por um processo de aprendizagem da avaliação da aprendizagem. Mas essa não é uma mudança que ocorre da noite para o dia, é um processo em que se busca desenvolver na prática docente e não apenas no decorrer da pesquisa. Mudar uma conduta em um curto espaço de tempo é difícil, porém mais difícil ainda é ter essa prática cotidianamente. É um processo de formação que exige uma desconstrução para uma reconstrução. A prática do exame predomina em nossa sociedade, mas é necessário deixar os exames para as situações de exames cujo espaço não é a sala de aula. Na sala de aula, a prática do exame deve ceder lugar à prática da avaliação como oportunidade de aprendizagem e prática de investigação.

A estratégia desenvolvida nesta pesquisa exigiu uma mudança de conduta, um estar disponível para aprender. O impulso de transmitir, de dar o caminho da resposta, de querer que o aluno chegasse ao resultado, de apontar o que estava errado, de sugerir (para não dizer induzir) foi tentador. Talvez por isso, esses momentos ainda sejam percebidos tanto na escrita desta pesquisa quanto nas intervenções direcionadas aos estudantes. Muitas foram as correções da orientadora desta pesquisa nas primeiras intervenções. Esse foi um dos processos de formação. As intervenções se apresentaram como uma grande responsabilidade e um desafio. É realmente complexo intervir e interagir com o outro. Quanto a isso, cita-se a quantidade. A turma era pequena, composta por nove alunos e havia seis questões, mas, mesmo assim, foi trabalhoso porque, a partir da terceira fase lidou-se com 54 produções. Em turmas maiores, talvez seja mais viável trabalhar com menos fases ou menos questões.

Em muitos momentos da pesquisa, foi questionado se a prova em fases não “brilhava mais” do que a utilização da cola. Mas a utilização da cola na prova-escrita-em-fases, ou seja, o casamento de ambas se mostrou realmente estratégico. Quando se altera a natureza do instrumento de avaliação, altera-se também a natureza da cola. Sua permissão evita a exclusiva memorização. A reprodução foi possível apenas na primeira fase de cada questão.

Na primeira fase de cada questão da prova somada à cola, é o momento em que a prova-escrita-em-fases mais se assemelha à situação de uma prova escrita convencional. E foi justamente nesse momento que eles disseram se sentir mais seguros e que a cola teve mais utilidade. As intervenções que surgem a partir da segunda fase reduzem essa utilidade e individualizam a prova. Fica claro que aquela cola como conduta marginal discente interessa àquele tipo de prova, ao passo que, no contexto da estratégia docente, a cola proposta perdeu sua força.

Os alunos não conseguiram utilizá-la do mesmo modo porque o chamariz da não comunicação que a provocava e fortalecia foi desfeito; o conceito usual de prova em que é proibido se comunicar foi subvertido; o momento decisivo e único de não ter mais a oportunidade de ver de novo e voltar a fazer foi descaracterizado. Quando a prova saiu da padronização, a força da cola e da memorização foi reduzida. A partir da segunda fase, eles vinham seguros com as colas e com suas estratégias, e as intervenções os desestabilizavam. Então, a resposta é sim, a cola brilhou menos, porque interessa que ela seja um recurso ao estudo, mas encontrar meios e estratégias de reduzir a sua força tradicional também.

Em resumo, para a cola beneficiar professor e aluno uniram-se algumas subversões: a utilização da cola como estratégia docente; a realização da prova-escrita-em-fases retirando a regra que proíbe a cola; o avaliar em lugar de examinar; a personalização em lugar da padronização; o passar da reprodução para a compreensão; a mudança do papel do professor de transmissor para o de guia orientador; a mudança do papel do aluno de receptor passivo do conhecimento pronto para autor do seu próprio.

Os participantes deste estudo, futuros professores de matemática, tiveram a oportunidade de experienciar esse formato de avaliação sendo avaliados. A semente foi lançada e se há mesmo a tendência de se ensinar como se aprendeu, há uma possibilidade de que ela dê bons frutos.

Podem existir diversos encaminhamentos para se utilizar a cola em uma prova escrita. O utilizado neste estudo é um deles. Cada professor tem autonomia para realizar os ajustes que julgar necessários à sua realidade tanto em relação ao instrumento e dinâmica quanto aos critérios de pontuação. O mais importante é tornar a avaliação um momento de aprendizagens.

Além da mobilização de utilização e desmistificação da cola em prova escrita, essa pesquisa traz outras contribuições à Avaliação em Educação Matemática. Uma delas é a relação quantidade *versus* qualidade. Quando se fala em quantidade, refere-se à nota. Sim, não é possível e nem preciso fugir dela. Deixá-la de lado só coloca nossa pesquisa distante do

contexto da sala de aula. Além disso, não é pecado atribuir nota! Mas por ser esse um elemento burocrático das instituições de ensino e estar arraigada na cultura escolar, é mister discutir a qualidade de sua atribuição. A perspectiva de avaliação aqui adotada, e a tentativa de praticá-la, faz esse movimento. E, como se quer que a avaliação como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem esteja nas salas de aula, deve-se sim, discutir como dar qualidade a essa quantidade (nota).

Avaliar é “revelar o qualitativo no quantitativo” (BARLOW, 2006, p. 18). Precisa-se, cada vez mais, dar condições para os alunos interpretarem as conversões entre qualidade e quantidade, tornar mais transparentes os critérios quantitativos e qualitativos, e permitir que se compreenda que esse quantitativo está em construção, e que pode ser substituído por outro que melhor represente o estudante em cada momento de sua formação, como foi nesta pesquisa.

Essa inquietação começou a ser sentida a partir do desenvolvimento de utilização da cola na prova-escrita-em-fases. Parte desse desassossego foi manifestado no artigo “Nota avaliativa: materialidade do número e as cortinas das subjetividades” apresentado no X SESEMAT (Seminário Sul-Mato-Grossense em Educação Matemática) em 2016, tempo depois da aplicação do instrumento de avaliação utilizado nesta pesquisa. Esse texto investe na forte presença dos números, nas diferentes esferas da vida em sociedade, como mote para discutir esse importante fator do processo de avaliação. Tomando por base o trabalho de Barlow (2006), no artigo busca-se, por um lado, discutir as subjetividades subjacentes à nota por meio de fatores que perpassam os critérios de julgamento do professor, hábitos e a natureza socioafetiva da relação professor e aluno e, por outro, a materialidade do número que a representa e a objetividade que ele transmite, bem como discutir seus efeitos, conotações e representatividade para aluno e sociedade.

Um exemplo da complexidade da relação objetividade e subjetividade, quantidade e qualidade pode ser discutido a partir dos casos dos alunos Jhoni e Dani. Todos os participantes foram informados de que as resoluções que apresentassem indícios na cola receberiam maior pontuação e, como já discorrido, isso foi posto para que os alunos fossem levados a produzir suas colas e por se considerar que essa elaboração pode constituir momentos de estudo e aprendizagem. Jhoni permaneceu com a mesma cola do início ao fim da prova. Sua escolha o desfavoreceu em termos de nota. No entanto, apesar de ele ter feito do processo um meio de estudo, pela manutenção do combinado, mesmo que suas resoluções estivessem corretas, receberiam menor pontuação que a de outro aluno que também resolveu

corretamente, mas que tivesse indícios em sua cola. Mas, às vezes, a cola pode ser questionável, como no caso de Dani. Ela foi a única que inseriu as resoluções prontas na cola, como uma cópia. A cópia de resolução não era permitida, os alunos sabiam disso. Ela foi uma exceção que quebrou as regras e surpreendeu. Essa cola não foi desconsiderada como indício, e isso a beneficiou em termos de nota mesmo tendo copiado.

O Caso de Jhoni e Dani é um exemplo de que a nota não é algo absoluto e indiscutível, é uma mensagem que só tem sentido em função dos critérios e escolhas utilizados para estabelecê-la (BARLOW, 2006), contudo a materialidade do número que a representa transmite a ideia de objetividade, e a força desse número acoberta e rompe o processo subjetivo de atribuição e o contexto que a gerou.

Sendo a nota um elemento que define a vida escolar dos alunos com o poder de aprovar ou reprovar, é ilusão aplicar qualquer tipo de prova envolvendo pontuação e esperar que os alunos não vão se preocupar com esse resultado. Bom seria se a nota fosse lida junto a um referente de qualidade. Mas, enquanto isso não acontece, a busca dessa qualidade desafia, convida a buscar alternativas, a subverter aspectos, mitos e ritos das práticas avaliativas.

Muito foi dito sobre guiar os estudantes em seus processos de aprendizagem, mas para onde guiar? Para que lado orientar? Em que direção? O que perguntar? Como perguntar? Como já mencionado, essa dificuldade foi sentida ao desenvolver a prova-escrita-em-fases e suprida pela supervisão da professora orientadora com suas intervenções, mas isso é um privilégio tido durante o processo de realização de uma pesquisa.

Nesse sentido, os agrupamentos levantados a partir das intervenções simbolizam um avanço para os estudos do GEPEMA em elaborar intervenções escritas. Eles representam os tipos de intervenções percebidas e permitem reconhecer unidades e regularidades nas perguntas que foram propostas aos alunos. Com isso, este trabalho inicia um delineamento das ações docentes, traçando possibilidades para o professor lidar com as produções escritas em um processo de prova em fases.

A intervenção e regulação são funções da avaliação formativa, e a qualidade desses elementos interfere diretamente na qualidade de realização do instrumento avaliativo, podendo comprometer em vez de oportunizar a aprendizagem. A intervenção é uma atitude pedagógica que sinaliza um processo de produção de significados do professor, é uma ação carregada de compreensões e intenções. O professor ter clareza do papel e das intencionalidades de sua ação é de suma importância para o sucesso dela, isto é, para que

exerça maior influência e seja apropriada e utilizada pelos estudantes em suas rotas de resoluções e regulação de suas aprendizagens.

É claro que o professor precisa estar sensível e atento às oportunidades e demandas de intervenção, levando em consideração as individualidades dos estudantes e de seus caminhos. Os agrupamentos não têm a função de indicar apenas aqueles caminhos. Outros tipos podem ser levantados em outras experiências com a prova em fases (ou até mesmo nesta, a depender do olhar lançado). Esse levantamento auxilia e facilita o trabalho do professor (principalmente, ao iniciar o contato com a prova-escrita-em-fases), porque sinaliza algumas direções que podem ser seguidas e algumas maneiras de o professor intervir no desenvolvimento dos estudantes.

Esta pesquisa se coloca na direção de criar resistências e lançar possibilidades para a prática do professor formador e do professor que ensina matemática. Um desafio e possibilidade é pensar em como utilizar a consulta tecnológica. O que é preciso ter nos instrumentos de avaliação que a consulta a equipamentos tecnológicos e à Internet não responda de imediato? Ou em como o professor do ensino básico, que trabalha com uma grande quantidade de alunos, pode fazer uso de estratégias como essa.

Mas isso é uma nova conversa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Jose. **Quem não cola não sai da escola?** Rio de Janeiro: Wak Ed., 2008.

AGRUPAR. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

BARLOW, Michel. **Avaliação escolar: mitos e realidades**. Porto Alegre-RS: Artmed, 2006. (trad. Fátima Murad.)

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**, 6º ano. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BRESSAN, Ana. **Los principios de la educación matemática realista**. Disponível em: <https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf>. Acesso em: 03 out. 2017.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; PEDROCHI JUNIOR, Osmar. Aspectos da avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação. In: BURIASCO, Regina Luzia Corio de (org.). **GEPEMA: espaço e contexto de aprendizagem**. 1. ed. Curitiba – PR: CRV, 2014. p. 13-31.

CORRUPÇÃO. In: HOUAISS, Antônio. **Dicionário Eletrônico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. CD-ROM.

DEMO, Pedro. **Pesquisa: princípio científico e educativo**. São Paulo: Cortez, 2006. 12. ed. (Biblioteca da Educação. Série 1. Escola; v. 14.). Disponível em: <http://pt.slideshare.net/efantauzzi/pesquisa-principio-cientifico-e-educativo-pedro-demo>. Acesso em 19 Mar. 2015.

DIAS, Sonia; SANTOS, Leonor. Por que razão é importante identificar e analisar os erros e dificuldades dos alunos? O *feedback* regulador. In: L. Menezes, L.; Santos, H.; Gomes, C.; Rodrigues, C. (org.). **Avaliação em Matemática: Problemas e desafios**. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 2008, p.133-143. Disponível em: [http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5315/1/Dias,%20S%20%26%20Santos%20\(2008\).pdf](http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5315/1/Dias,%20S%20%26%20Santos%20(2008).pdf) Acesso em: 15 ago. 2015.

DOMINGUES, Ivo. **O copianço na universidade: o grau zero na qualidade**. Lisboa: RÉ S XXI, 2006.

ESTEBAN, Maria Teresa. A avaliação no cotidiano escolar. In: ESTEBAN, Maria Teresa (org.) *et al.* **Avaliação: uma prática em busca de novos sentidos**. 5. ed. Rio Janeiro: SP&A, 2003. p. 7-28.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

FORSTER, Cristiano. **A utilização da prova-escrita-com-cola como recurso à aprendizagem**. 2016. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

FRANCO, Maria Laura P. B. **Análise de conteúdo**. Brasília – DF: Liber Livro Editora, 2008. 3. ed. v. 6. (série pesquisa).

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho BORBA; ARAUJO, Jussara de Loiola (orgs.). **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004. v. 9. p. 79-100. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

GOMES, Carlos Alberto. Ética e justiça na avaliação: a fraude e o ‘copianço’ no processo ensino/aprendizagem. In: **Educação e Linguagem [online]**, ano 11, n. 17. p 147-159, jan-jun. 2008.

HADJI, Charles. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. 4.ed. Portugal: Porto Editora, 1994.

HADJI, Charles. **Avaliação desmistificada**. Trad. Patrícia C. Ramos. Porto Alegre-RS: Artmed Editora, 2001.

KRAUSE, Gustavo Bernardo. **Cola, sombra da escola**. Rio de Janeiro: EdUERJ. Escola Parque, 1997.

IOCOHAMA, Celson Hiroshi. Reflexões sobre a “cola” nas avaliações do curso de direito e indicação de uma alternativa viável para sua superação. In: **Rev. Ciên. Jur. e Soc. da Unipar [online]**, v.7, n.1, jan./jun., 2004. p. 25 – 40.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo – SP: EPU, 1986. (Coleção Temas básicos de educação e ensino).

MARQUES, J. C. **Os caminhos do professor**: incerteza, inovações, desempenhos. Porto Alegre: Ed. Globo, 1977.

MARQUESIN, Denise Filomena Bagne; BENEVIDES, Claudio Roberto. Avaliação da aprendizagem no ensino superior: reflexões sobre a cola. In: **Revista de Educação**, v. 14. n. 18. 2011. p. 9-18.

MENDES, Marcele Tavares. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

NOVA ESCOLA. **Prova à prova de cola**. 245 ed. Setembro, 2011. Disponível em: <<http://revistaescola.abril.com.br/formacao/prova-prova-cola-643157.shtml?page=0>>. Acesso em: 19 Set. 2014.

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em Matemática**. 2012. 56f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEDROCHI JUNIOR, Osmar. **A avaliação formativa como oportunidade de aprendizagem: fio condutor da prática pedagógica escolar**. 2018. 69f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

PIMENTA, Maria Alzira de Almeida. Fraude em avaliações na visão de professores e de estudantes: uma reflexão sobre formação profissional e ética. In: **RPD – Revista Profissão Docente**, Uberaba, v.10, n. 22, p. 124-138, jul/dez. 2010 – ISSN 1519-0919.

PIMENTA, Maria Alzira de Almeida; PIMENTA, Sonia de Almeida. Fraude em Avaliações de aprendizagens: Estudo Comparativo entre o Nordeste e o Sudeste do Brasil. In: **IV Congresso Nacional da Sociedad Argentina de Estudios Comparados em Educación**, Buenos Aires-Arg, 16 e 17 de junho de 2011. Disponível em: <<http://www.saece.org.ar/docs/congreso4/trab37.pdf>>. Acesso em: 26 Mar. 2015.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases**. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

RANGEL, Mary. O “problema” da “cola” sob a ótica das representações. In: **Revista bras. Est. pedag.** [online], Brasília, v. 82, n. 200/201/202, p. 78-88, jan./dez. 2001.

REVISTA AMAE EDUCANDO. **Capturando os olhares sobre a cola**. Ano 47, nº 406, novembro/2014. p. 8-16. Disponível em: <http://www.fundacaoamae.com.br/home/index.php?option=com_flippingbook&view=book&id=16&page=1&Itemid=83>. Acesso em: 22 jun. 2015.

RIBEIRO, Raquel. **O aluno colou? É hora de discutir avaliação e regras**. 2004. Disponível em: <<http://revistaescola.abril.com.br/formacao/aluno-colou-hora-discutir-424529.shtml>>. Acesso em: 02 Mar. 2015.

SANTOS, André Luiz dos. Reflexões sobre a cola. In: **Revista de graduação da engenharia química** [online]. Ano V. nº. 9 Jan/Jun 2002.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SANTOS, Leonor. Avaliar competências: uma tarefa impossível? **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 74, p. 16-21, 2003. Disponível em: <<http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2007%202008/temas%20matematicos/avalia%C3%A7%C3%A3o%20de%20compet%C3%A2ncias.pdf>> Acesso em: 14 ago. 2015

SANTOS, Leonor; DIAS, Sonia. **Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback.** 2006. Disponível em: <<http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/2007%202008/temas%20matematicos/LS.pdf>> Acesso em: 14 ago. 2015.

SEMANA, Silvia; SANTOS, Leonor. O feedback em relatórios escritos na aula de matemática. **Investigação em Educação Matemática: Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática.** Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2010. p. 180 – 196. Disponível em <http://run.unl.pt/bitstream/10362/6617/1/V%3%A1rios_2011.pdf > Acesso em: 14 ago. 2015.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

SILVA, Gabriela Andrade da *et al.* Um Estudo sobre a Prática da Cola entre Universitários. In: **Psicologia: reflexão e crítica** [online]. v.19. n.1, Porto Alegre: 2006. p. 18-24.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática, 6º ano.** 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

STREEFLAND, Leen. **Fractions in Realistic Mathematics Education.** Dordrecht: Kluwer, 1991.

TEIXEIRA, Aurora A. C. **Integridade Acadêmica em Portugal:** Relatório síntese global do estudo, 11 de Setembro de 2011. Disponível em: <http://www.fep.up.pt/docentes/ateixeira/integridade_academica/11.09.11_Integridade%20Acad%3%A9mica%20em%20Portugal_relat%3%B3rio%20s%3ADntese.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2015.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL/COORDENADORIA DE BIBLIOTECA CENTRAL. **Manual de Trabalhos Acadêmicos segundo a NBR 14724/2011 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).** 2015. Disponível em: <<https://biblioteca.ufms.br/2015/07/21/manual-de-trabalhos-academicos-segundo-a-nbr-147242011/>>. Acesso em: 18 abr. 2018.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education.** Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática.** 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina.

WIJAYA, Ariyadi; HEUVEL-PANHUIZEN, Marja Van Den; DOORMAN, Michiel. **Teachers' teaching practices and beliefs regarding context-based tasks and their relation with students' difficulties in solving these tasks,** 2015. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-015-0157-8>. Acesso em 04 set. 2017.

ZANON, Denise Puglia; ALTHAUS, Maiza Margraf. **Instrumentos de avaliação na prática pedagógica universitária.** 2008. Disponível em: <http://www.uepg.br/prograd/semanapedagogica/Althaus%20Zanon%20Instrumentos%20Avalia%C3%A7%C3%A3o.pdf>. Acesso em: 19 Mar. 2015.

ANEXO

ANEXO A

EMENTA DA DISCIPLINA

Prática De Ensino II – Modelagem Matemática e Resolução de Problemas

Ementa: Análise de Modelos Matemáticos clássicos e do conteúdo matemático correspondente. Elaboração de modelos alternativos. A Modelagem Matemática como Metodologia de Ensino. Modelagem para o Ensino Fundamental e Médio. A resolução de problemas e as atividades de investigação no currículo e na sala de aula dos Ensinos Fundamental e Médio.

Bibliografia obrigatória:

BARBOSA, J. C. *et al* **Modelagem matemática na educação matemática brasileira:** pesquisas e práticas educacionais. Recife, PE: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007, v.3, p. 215-232.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática:** O que é? Por quê? Como? Veritati, [local], n.4, p. 73-80. 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

KRULIK, S.; REYS, R. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1998.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P., BROCARD, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na Sala de Aula.** 2ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

Bibliografia complementar:

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. **Modelagem matemática na licenciatura em matemática:** contribuições para o debate. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. Anais... São Paulo: SBEM, 2003. 1CD-ROM.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática.** 2ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BEAN, D. **O que é modelagem matemática?** Educação Matemática em Revista, São Paulo, Ano 8, nº 9/10, abril, 2001.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. SP: Editora UNESP, 1999.

BIEMBENGUT, M. S. **modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática.** Blumenau, SC: Editora da FURB, 1999, 134p.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver Problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Tendo em vista a necessidade de coleta de dados para o desenvolvimento de projeto de pesquisa de doutorado, sob responsabilidade de Juliana Alves de Souza, professora do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS, Campus de Aquidauana, e aluna de doutorado do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS, sob orientação da Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco, docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, declaro que consinto que a mesma utilize integralmente ou em partes, meus registros escritos das aulas, atividades e avaliações da disciplina Prática de Ensino II – Modelagem Matemática e Resolução de Problemas, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área, sem restrições de prazo e citações, com a condição de que meu nome não seja citado, garantido o anonimato no relato da pesquisa. Declaro ainda, que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida. Abdicando direitos meus e de meus descendentes, subscrevo o presente termo.

Nome	Assinatura	Nº do documento

Aquidauana-MS, 14 de março de 2016

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO ESCRITO

Sobre a utilização da cola:

Qual(is) a(s) estratégia(s) você mobilizou para a construção da cola? Foi incluído o que se sabe ou que não se sabe?

Você precisou ou não da cola? Ela foi necessária para a realização da prova? Por quê?

Como a cola foi utilizada?

Como você analisa a possibilidade de ver a prova antes de sua aplicação e poder produzir uma cola pra sua resolução? Facilitou a realização da prova? Por quê?

Como você avalia a cola produzida em relação ao que você achava que precisava e ao que ele realmente precisou?

Sobre a Prova-escrita-em-fases com cola:

Os questionamentos de cada fase serviram para estudo e pesquisa dos conceitos envolvidos? Explique.

Como você lidava de uma fase a outra com uma pergunta da professora ou questão que não conseguia responder? Procurava os colegas para discutir, pesquisava, estudava pra pôr na cola...?

O que você pensou inicialmente sobre a proposta da prova com cola em fases? E o que pensa agora ao final?

Cite aspectos positivos e negativos dessa estratégia avaliativa.

Muito obrigada pela sua colaboração!

APÊNDICE C

RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES DA PROVA

Questão 01 - Uma pizzaria serve duas pizzas redondas da mesma espessura, do mesmo recheio e em tamanhos diferentes. A menor delas tem um diâmetro de 30 cm e custa 30 reais. A maior delas tem um diâmetro de 40 cm e custa 40 reais. Qual das pizzas tem o preço mais vantajoso? Explique sua resolução e resposta.

1ª Possibilidade de Resolução: Comparar preço e área, determinando o custo do centímetro quadrado de cada pizza.

$$\text{Pizza menor: } \text{área} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 15^2 = 3,14 \cdot 225 = 706,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Custo do cm}^2 = 30,00 \div 706,5 = 0,0425 \text{ centavos}$$

$$\text{Pizza maior: } \text{área} = \text{área} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 20^2 = 3,14 \cdot 400 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$\text{Custo do cm}^2 = 40,00 \div 1256 = 0,0318 \text{ centavos}$$

A pizza maior possui o preço mais vantajoso para o cliente porque seu centímetro quadrado é mais barato.

2ª Possibilidade de Resolução: Comparar área e preço.

$$\text{Pizza menor: } \text{área} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 15^2 = 3,14 \cdot 225 = 706,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Quantidade por preço} \rightarrow 706,5 \text{ cm}^2 \div 30,00 = 23,55$$

$$\text{Pizza maior: } \text{área} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 20^2 = 3,14 \cdot 400 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$\text{Quantidade por preço} \rightarrow 1256 \text{ cm}^2 \div 40,00 = 31,4$$

A pizza maior possui o preço mais vantajoso para o cliente porque com um real pode-se comprar um pedaço maior.

3ª Possibilidade de Resolução: dividir as duas pizzas por uma mesma quantidade de pedaços e analisar o custo e a área de cada pedaço das pizzas.

Vamos dividir ambas as pizzas em oito pedaços e em seguida calcular o a área e o preço do pedaço em cada caso:

Área dos pedaços:

$$\text{Pizza menor: } \text{área} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 15^2 = 3,14 \cdot 225 = 706,5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do pedaço: } 706,5 \div 8 = 88,3 \text{ cm}^2$$

$$\text{Pizza maior: } \text{área} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 20^2 = 3,14 \cdot 400 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do pedaço: } 1256 \text{ cm}^2 \div 8 = 157 \text{ cm}^2$$

Custo dos pedaços:

$$\text{Pizza menor: } 30,00 \div 8 = 3,75$$

$$\text{Pizza maior: } 40,00 \div 8 = 5,00$$

$$3,75 - - - 88,3$$

$$x - - - 157$$

$$88,3x = 588,75 \rightarrow x = 6,67$$

A pizza maior é mais vantajosa para o cliente porque em um pedaço de 157cm^2 ele pagará R\$ 5,00, para comer essa mesma quantidade na pizza menor ele pagaria aproximadamente R\$ 6,70.

Questão 02 - Sabendo-se que a sequência $(1 - 3x, x - 2, 2x + 1)$ é, nessa ordem, uma progressão aritmética, e que a sequência $(4y, 2y - 1, y + 1)$ é, nessa ordem, uma progressão geométrica, determine o valor de x e o de y . Explique sua resolução e resposta.

1ª Possibilidade: Utilizar o conceito de razão de P.A e P.G e comparação

A razão de uma P.A é dada por $r = a_n - a_{n-1}$

$$\text{Então: } r = x - 2 - (1 - 3x) \rightarrow r = x - 2 - 1 + 3x \rightarrow r = 4x - 3$$

e

$$r = 2x + 1 - (x - 2) \rightarrow r = 2x + 1 - x + 2 \rightarrow r = x + 3$$

$$\text{Fazendo } r = r \text{ temos: } 4x - 3 = x + 3 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

A razão de uma P.G é dada por $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Então, $q = \frac{2y-1}{4}$ e $q = \frac{y+1}{2y-1}$

Fazendo $q = q$, temos:

$$\frac{2y - 1}{4} = \frac{y + 1}{2y - 1} \rightarrow 4y^2 + 4y = 4y^2 - 4y + 1 \rightarrow 8y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{8}$$

Portanto, o valores de x e y são, respectivamente, 2 e $\frac{1}{8}$.

2ª Possibilidade: utilizar propriedade das progressões

Propriedade de termos equidistantes dos extremos de uma P.A: em uma P.A com uma quantidade ímpar de termos, o termo médio é igual à média aritmética entre os extremos:

$$x - 2 = \frac{(1 - 3x) + (2x + 1)}{2} \rightarrow x - 2 = \frac{-x + 2}{2}$$

$$2x - 4 = -x + 2 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

Propriedade de termos equidistantes dos extremos de uma PG: em uma P.G, com número ímpar de termos, o quadrado do termo central é igual ao produto dos extremos.

$$(2y - 1)^2 = 4y \cdot (y + 1) \rightarrow 4y^2 - 4y + 1 = 4y^2 + 4y$$

$$4y^2 - 4y^2 + 1 = 4y + 4y \rightarrow 8y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{8}$$

Portanto, o valores de x e y são, respectivamente, 2 e $\frac{1}{8}$.

Questão 03 - Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a R\$ 15,00 o quilograma. Uma pesquisa de opinião revelou que, a cada real de aumento no preço do quilo, o restaurante deixa de vender o equivalente a 5 kg de comida. Responda às perguntas abaixo, supondo corretas as informações da pesquisa e definindo a receita do restaurante como o valor total pago pelos clientes.

a) Em que caso a receita do restaurante será maior: se o preço subir para R\$ 18,00 / kg ou para R\$ 20,00 / kg? Explique sua resolução e resposta.

Resolução: calcular a receita em cada caso e compará-las

$$\text{Receita a 18,00 o quilo} = (15 + 3) \cdot (100 - 5 \cdot 3) \rightarrow 18,00 \cdot 85 = 1530,00$$

$$\text{Receita a 20,00 o quilo} = (15 + 5) \cdot (100 - 5 \cdot 5) \rightarrow 20,00 \cdot 75 = 1500,00$$

Portanto, a receita será maior vendendo o quilograma à R\$ 18,00.

b) Formule matematicamente a função $f(x)$, que fornece a receita do restaurante como função da quantia x , em reais, a ser acrescida ao valor atualmente cobrado pelo quilo da refeição. Explique sua resolução e resposta.

Resolução: esse item é uma generalização do anterior.

Sendo:

x a quantia, em reais, acrescida ao valor de R\$ 15,00;

Preço de venda = $15 + x$;

Quantidade de venda, em kg = $100 - 5x$

$f(x)$ = receita do restaurante, em reais.

Temos:

$$f(x) = (15 + x) \cdot (100 - 5x) \rightarrow f(x) = -5x^2 + 25x + 1500, \text{ com } 0 \leq x \leq 20.$$

c) Qual deve ser o preço do quilo da comida para que o restaurante tenha a maior receita possível? Explique sua resolução e resposta.

1ª Possibilidade: Como a função tem o coeficiente angular negativo, a concavidade da parábola que a representa estará voltada para baixo, por isso o maior valor de $f(x)$ está no vértice da parábola, então basta determinar suas coordenadas.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-25}{-10} = 2,5$$
$$y_v = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{625 - 4 \cdot (-4) \cdot 1500}{4 \cdot (-5)} = \frac{625 + 24000}{20} = \frac{24625}{20} = 1231,25$$

Portanto, para que o restaurante tenha a maior receita possível deverá ser acrescido R\$ 2,50 ao valor inicial de 15 reais, totalizando R\$ 17,50 o preço de venda do quilo da comida e R\$ 1231,50 a receita.

2ª Possibilidade: Os zeros da função $f(x) = -5x^2 + 25x + 1500$ são os números 20 e -15, e a média desses é 2,5. Assim, podemos concluir que $f(x)$ é máximo para $x = 2,5$, isto é, o preço por quilo da comida deverá ser de R\$17,50 para que a receita seja a maior possível.

3ª Possibilidade: Tentativas

$$\text{Receita a 15,00 o quilo} = (15 + 0) \cdot (100 - 5 \cdot 0) \rightarrow 15 \cdot 100 = 1500,00$$

$$\text{Receita a 16,00 o quilo} = (15 + 1) \cdot (100 - 5 \cdot 1) \rightarrow 16 \cdot 95 = 1520,00$$

$$\text{Receita a 17,00 o quilo} = (15 + 2) \cdot (100 - 5 \cdot 2) \rightarrow 17 \cdot 90 = 1530,00$$

$$\text{Receita a 18,00 o quilo} = (15 + 3) \cdot (100 - 5 \cdot 3) \rightarrow 18 \cdot 85 = 1530,00$$

$$\text{Receita a 19,00 o quilo} = (15 + 4) \cdot (100 - 5 \cdot 4) \rightarrow 19 \cdot 80 = 1520,00$$

$$\text{Receita a 20,00 o quilo} = (15 + 5) \cdot (100 - 5 \cdot 5) \rightarrow 20 \cdot 75 = 1500,00$$

Percebe-se que a maior receita está compreendida entre 17,00 e 18,00 por que antes e depois desses valores a receita decresce de maneira repetida:

$$\text{Receita a 17,50 o quilo} = (15 + 2,5) \cdot (100 - 5 \cdot 2,5) \rightarrow 17,5 \cdot 87,5 = 1531,25$$

Portanto, para que o restaurante tenha a maior receita possível o quilo da comida deverá custar R\$ 17,50.

Questão 04 - Aldo quer cercar completamente um terreno retangular de $900m^2$. Ao calcular o comprimento da cerca ele se enganou, fez os cálculos como se o terreno fosse quadrado e comprou 2 metros de cerca a menos que o necessário. Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno? Explique sua resolução e resposta.

Resolução: Determinar a quantidade de metros de cerca que Aldo comprou para descobrir a quantidade que ele deveria ter comprado, e por meio de um sistema de equações formado pelas fórmulas do perímetro e área do retângulo, determinar as dimensões do terreno e a diferença entre eles.

Como Aldo pensou que o terreno era quadrado, então $A_q = l^2 = 30.30 = 900m^2$.

Nesse caso, o perímetro é equivalente a $4.30 = 120 m$. Isso significa que ele comprou 120 metros de cerca. Mas, como faltaram 2 metros de cerca, ele deveria ter comprado 122 metros.

Assim, temos:

$$\begin{cases} b \cdot h = 900 \\ 2b + 2h = 122 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição: $b \cdot h = 900 \rightarrow b = \frac{900}{h}$

$$2b + 2h = 122 \rightarrow b + h = 61 \rightarrow \frac{900}{h} + h = 61 \rightarrow h^2 - 61h + 900 = 0$$

$$\Delta = 121 \rightarrow h = \frac{61 \pm 11}{2} \rightarrow h_1 = 36 \text{ e } h_2 = 25$$

Dessa forma: $b = \frac{900}{h} \rightarrow b = \frac{900}{36} = 25$ ou $\frac{900}{25} = 36$

Portanto, considerando o comprimento 36m e a largura 25m, a diferença entre o comprimento e a largura será de 11m. Considerando, o comprimento 25m e a largura 36m, a diferença entre o comprimento e a largura será de -11. Como estamos tratando de distâncias, a diferença válida é de 11m.

Questão 05 - Mostre se a solução apresentada é correta e justifique.

Um homem que tinha 17 camelos e 3 filhos, morreu.

De acordo com o testamento metade dos camelos ficaria para o filho mais velho, um terço para o segundo e um nono para o terceiro. O que fazer? Eram 17 camelos; como dar metade ao mais velho? Um dos animais deveria ser cortado ao meio? Mas isso também não resolveria porque um terço deveria ser dado ao segundo filho e a nona parte ao terceiro. Os filhos decidiram então consultar um homem bastante idoso e experiente. Contaram-lhe o problema. O velho riu e disse:

– É muito simples, não se preocupem. Empresto um dos meus camelos, vocês ficam com 18 camelos para fazer a divisão.

Metade dos camelos, 9, foram para o filho mais velho; ao segundo a terça parte - 6 camelos, e, ao terceiro filho foram dados dois camelos - a nona parte. Sobrou um camelo: o que foi emprestado.

O velho pegou seu camelo de volta e disse: "Agora podem ir, está cumprido o testamento".

Resolução:

Uma maneira de lidar é somar as frações da partilha para analisar se representam o todo da herança: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Isso significa que $\frac{1}{18}$ da herança não estava incluído na divisão. O velho percebendo isso inseriu um camelo sobre o todo e o alterou para uma quantidade divisível por qualquer denominador das frações dadas, o que possibilitou que cada filho recebesse um número exato de camelo e ainda sobrasse o seu próprio camelo ao final. O que cada irmão recebeu a mais já lhes era de direito, de acordo com as respectivas frações, e correspondia ao $\frac{1}{18}$ que inicialmente não estava contemplado na divisão do pai. Sendo assim, a solução apresentada pelo velho é correta.

A estratégia do velho sábio em acrescentar um camelo, totalizando 18, para que as frações correspondentes a cada irmão resultassem em um número inteiro ($\frac{1}{2}$ de 18 = 9; $\frac{1}{3}$ de 18 = 6; $\frac{1}{9}$ de 18 = 2), apesar de correta, é limitada porque é válida apenas para a quantidade 17, uma vez que 18 é múltiplo tanto de 2, quanto de 3 e 9 o que torna possível a divisão pelas três frações. Se fossem 15 ou 19, por exemplo, e fosse acrescentado um camelo, a estratégia não funcionaria porque 16 e 20, não são múltiplos de 2, 3 e 9.

A estratégia funciona sempre que a o resultado da quantidade de camelos mais um, for um número múltiplo de 2,3 e 9 simultaneamente, ou seja, múltiplo de 18: $17 + 1$; $35 + 1$; $53 + 1$; $71 + 1$; $89 + 1$; $107 + 1$, etc. Contudo, para o primeiro caso ($17 + 1$), o velho sábio divide o que cabe a cada rapaz e resgata apenas o seu camelo que foi emprestado, já nos casos seguintes, ele obteria vantagens sobre os irmãos, porque além de resgatar seu camelo levaria progressivamente outros que não são seus:

Herança	Estratégia do velho sábio	Camelos retirados pelo velho sábio
17	$17 + 1$	1
35	$35 + 1$	$1 + 1$
53	$53 + 1$	$1 + 2$
71	$71 + 1$	$1 + 3$
89	$89 + 1$	$1 + 4$
...
305	$305 + 1$	$1 + 16$
323	$323 + 1$	0

A partir daí, o processo entraria em um ciclo. Podemos perceber que a quantidade total de camelos que o velho sábio obteria em cada caso é o multiplicador de 18:

$$17 + 1 = 18x1 \quad 35 + 1 = 18x2 \quad 53 + 1 = 18x3 \quad 71 + 1 = 18x4 \quad \dots$$

Questão 06 - A caixa abaixo possui uma sequência de 20 contas. Quantas contas brancas estão nesta sequência? Explique sua resolução e resposta.



Resolução: pela regularidade da sequência na parte visível, podemos ser induzidos a pensar que a sequência segue a ordem “conta preta, conta branca” do início ao fim. Dessa forma, a cada duas contas uma será branca, totalizando 10. Contudo, parte da sequência não está visível na figura e o enunciado nada informa sobre a regularidade da sequência, logo não há como garantir sua ordem e a quantidade de contas brancas dependerá da parte oculta. Essa quantidade pode variar de cinco (caso toda a parte oculta seja preta) a 15 (caso toda a parte oculta seja branca).

Outra possibilidade é explorar a relação matemática que representa a situação. Do total de 20 contas, estão visíveis cinco contas brancas e 5 escuras. Essa situação pode ser representada algebricamente por $5x + 5y + k = 20$, onde x representa a quantidade de contas brancas visíveis, y a quantidade de contas escuras visíveis e k a quantidade que está oculta na caixinha.

Além disso, não há como dizer quantas contas pretas há, pois a imagem está em preto e branco, ou seja, as contas escuras podem não necessariamente ser pretas.

Questão 07 - Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. A cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia? Explique sua resolução e resposta.

1ª Possibilidade: Equação do primeiro grau com uma incógnita

1º dia $\rightarrow x$

2º dia $\rightarrow x + 7$

3º dia $\rightarrow x + 7 + 7 = x + 14$

4º dia $\rightarrow x + 7 + 7 + 7 = x + 21$

5º dia $\rightarrow x + 7 + 7 + 7 + 7 = x + 28$

Então:

$$x + (x + 7) + (x + 14) + (x + 21) + x + 28 = 100$$

$$5x + 70 = 100 \rightarrow 5x = 30 \rightarrow x = 6$$

Como $x = 6$, então:

1º dia = $x \rightarrow$ foram entregues 6 telegramas

2º dia = $x + 7 \rightarrow$ foram entregues 13 telegramas

3º dia = $x + 14 \rightarrow$ foram entregues 20 telegramas

4º dia = $x + 21 \rightarrow$ foram entregues 27 telegramas

5º dia = $x + 28 \rightarrow$ foram entregues 34 telegramas.

Portanto, a quantidade de telegramas entregues pelo carteiro foi de 6 no primeiro dia, 13 no segundo dia, 20 no terceiro, 27 no quarto dia e 34 no quinto dia.

2ª Possibilidade: Progressão Aritmética de razão 7

O termo geral de uma P.A é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Tomando a_n como último termo da sequência $\rightarrow a_n = a_5$. Sabe-se também que $r = 7$ então:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot 7 \rightarrow a_5 = a_1 + 28 \quad \text{I}$$

A soma geral de uma P.A é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Sabemos que a soma total de telegramas entregues é 100, então:

$$100 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} \rightarrow 200 = (a_1 + a_5) \cdot 5 \rightarrow a_1 + a_5 = 40 \rightarrow a_5 = -a_1 + 40 \quad \text{II}$$

De I e II temos o sistema: $\begin{cases} a_5 = a_1 + 28 \\ a_5 = -a_1 + 40 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema por adição, temos que $2a_5 = 68 \rightarrow a_5 = 34$

Voltando à equação I, temos: $a_5 = a_1 + 28 \rightarrow 34 = a_1 + 28 \rightarrow a_1 = 6$

Para determinar os termos a_2, a_3 e a_4 , utilizaremos a fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot 7 \rightarrow a_2 = 6 + 7 \rightarrow a_2 = 13$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot 7 \rightarrow a_3 = 6 + 2 \cdot 7 \rightarrow a_3 = 6 + 14 \rightarrow a_3 = 20$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot 7 \rightarrow a_4 = 6 + 3 \cdot 7 \rightarrow a_4 = 6 + 21 \rightarrow a_4 = 27$$

Portanto, a quantidade de telegramas entregues pelo carteiro foi de 6 no primeiro dia, 13 no segundo dia, 20 no terceiro, 27 no quarto dia e 34 no quinto dia.

3ª Possibilidade: Tentativas

Sabemos que o total de telegramas entregues é 100, então vamos supor que o carteiro tenha entregado um telegrama no primeiro dia, somando sete sucessivamente a essa quantidade suposta, vamos analisando o total até encontrarmos uma sequência de números que somados resulte em 100:

Dias	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia	Total	
Tentativas	1	8	15	22	29	75	X
	2	9	16	23	30	80	X
	3	10	17	24	31	85	X
	4	11	18	25	32	90	X
	5	12	19	26	33	95	X
	6	13	20	27	34	100	✓

Portanto, o carteiro entregou 6 telegramas no primeiro dia, 13 no segundo dia, 20 no terceiro, 27 no quarto dia e 34 no quinto dia.